

Stankiewicz

ANTONI ŁOMNICKI

GEOMETRJA

PODRĘCZNIK DLA SZKÓŁ ŚREDNICH

CZĘŚĆ DRUGA

TRYGONOMETRJA

WYDANIE TRZECIE



LWÓW — WARSZAWA
NAKŁAD KSIĘGARNI GUBRYNOWICZA I SYNA
1923



51/12 (075,3)

Rozdział I.

Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

§ 1. Wstęp.

W nauce planimetriji i stereometriji zaznajamiamy się z światem utworów geometrycznych, poznajemy ich własności i związki zachodzące między nimi. Na podstawie tych wiadomości można już rozwiązywać rozmaite zagadnienia geometryczne bądźto ściśle, rachunkiem, bądźto w przybliżeniu, rysunkiem. N. p. znając dwa kąty trójkąta, potrafimy obliczyć trzeci, znając dwa boki trójkąta prostokątnego, potrafimy obliczyć bok trzeci, znając trzy boki trójkąta, możemy obliczyć jego pole i t. p. Podobnie można wykreślić trójkąt, znając trzy dowolne wyznaczające go elementy, a przez to znaleźć pozostałe elementy w przybliżeniu; potrafimy rysunkiem znaleźć bok dowolnego umiarowego wielokąta wpisanego w dane koło (używając kątomierza) a metoda geometrii wykreślnej pozwala nam rozwiązać graficznie wielką obfitość zagadnień stereometrycznych.

Jednakże już między znanymi nam zagadnieniami istnieją takie, które nauczyliśmy się rozwiązywać dotychczas tylko rysunkiem, a więc tylko z przybliżeniem takim, na jakie pozwalają przyrządy rysunkowe i granice naszego widzenia (n. p. znaleźć rzut odcinka o znanej długości nachylonego do płaszczyzny rzutów pod znanym kątem $\alpha = 53^\circ$). Pominąwszy już fakt, że takie przybliżenie nie zawsze wystarcza nawet dla celów praktycznych (n. p. dla miernictwa, astronomji), musimy się domagać ścisłego rozwiązania takich zagadnień drogą rachunkową, przede wszystkim ze względów naukowych. W matematyce ścisłej bowiem dopiero wtedy uważamy jakąś wielkość za znaną, znaną, jeżeli posiadamy prawo, pozwalające ją obliczyć z przybliżeniem dowolnem, niezależnem od czynników natury zewnętrznej (n. p. od dokładności przyrządów rysunkowych lub od chropowatości papieru).

Postaramy się więc uzupełnić tę lukę w dotychczasowych wiadomościach. Zagadnienia, o których wspominaliśmy powyżej, a których rachunkowego rozwiązania nie posiadamy dotychczas, sprowadzają się najczęściej do obliczenia nieznanymi elementami trójkąta przy po-

mocy innych, podanych, czyli do rachunkowego rozwiązywania trójkątów.

N. p. a) Znając promień koła i kąt środkowy obliczyć cięciwę należącą do niego. Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązania trójkąta równoramiennego, w którym znamy ramiona i kąt u wierzchołka. Rozwiąż to zadanie rysunkiem!

b) W stożku prostym znamy promień podstawy i nachylenie boku do podstawy; obliczyć powierzchnię i objętość stożka. Do rozwiązania tego zagadnienia trzeba rozwiązać trójkąt prostokątny, utworzony przez bok, wysokość i promień podstawy, znając podstawę i dwa kąty przy niej leżące.

Wykaż to dla zagadnienia o rzucie odcinka! Podaj inne przykłady z planimetrii i stereometrii!

Dział matematyki, zajmujący się **rachunkowym rozwiązywaniem trójkątów**, nazywamy **trygonometrią** (τρίγωνον = trójkąt).

Zajmiemy się najpierw trójkątami prostokątnymi, takie bowiem najczęściej spotykamy w zastosowaniach. Trójkąty ukośnokątne będziemy następnie mogli badać, rozkładając je na prostokątne zapomocą którejkolwiek wysokości, w dalszym zaś ciągu poznamy ogólniejsze, bezpośrednie metody rozwiązywania ogólnych trójkątów.

§ 2. Związki między elementami trójkąta prostokątnego.

Wiadomo z planimetrii, że każdy trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony zapomocą trzech swoich elementów, dobranych odpowiednio według jednego z czterech przypadków przystawiania. To znaczy: wystarczy podać trzy elementy, aby z nich można zbudować trzy pozostałe elementy trójkąta. Jeżeli je można zbudować rysunkowo, to musi istnieć także sposób obliczenia tych niewiadomych; muszą więc istnieć jakieś związki, jakieś równania, zachodzące między sześcioma elementami trójkąta. Ponieważ zaś w każdym takim zadaniu są 3 liczby niewiadome, przeto muszą istnieć trzy równania, zachodzące między sześcioma elementami trójkąta, a pozwalające wyrazić 3 z nich zapomocą 3 pozostałych.

Zbadajmy te związki dla trójkątów prostokątnych. Niech a, b, c , oznaczają boki, a α, β, γ , kąty naprzeciw nich leżące w dowolnym trójkącie prostokątnym (fig. 1).

U w a g a. Ten sposób oznaczania boków i odpowiadających im kątów ułatwia zapamiętanie wzorów i pozwala przenosić wzory wyprowadzone np. dla a, b, α , na b, c, β , lub c, a, γ , i t. p.

Znamy z planimetrii związek między 3 kątami trójkąta, mianowicie:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dla trójkąta prostokątnego $\gamma = 90^\circ$, więc zostaje:

$$(I) \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

Znamy również związek między 3 bokami trójkąta prostokątnego, mianowicie twierdzenie Pitagorasa:

$$(II) \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Równanie (I) pozwala wyliczyć kąt, jeżeli znamy drugi kąt, a równanie (II) pozwala wyliczyć trzeci bok, jeżeli znamy dwa inne. Już przy pomocy tych dwu równań możemy częściowo rozwiązać trójkąt.

N. p. a) Dane są elementy trójkąta: $\gamma = 90^\circ$, $\alpha = 32^\circ 45'$, $a = 6$ cm. Używając równania (I) obliczamy $\beta = 90^\circ - \alpha$ czyli $\beta = 57^\circ 15'$. Do obliczenia boków b i c mamy tylko jedno równanie (II) o dwóch niewiadomych. Nie potrafimy więc rozwiązać całkowicie naszego zagadnienia przy pomocy dotychczasowych wiadomości.

b) Dane są elementy trójkąta: $\gamma = 90^\circ$, $a = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Przy pomocy równania (II) obliczamy $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ czyli: $b = 4$ cm. Do obliczenia kątów α i β mamy tylko jedno równanie (I) o dwóch niewiadomych a więc i to proste zagadnienie jest dla nas dotychczas nierozwiązalne.

Brak nam jeszcze trzeciego równania, podającego związek między bokami a kątami. Równanie takie pozwoliłoby obliczyć boki ze znanych kątów i kąty ze znanych boków. Brak tego trzeciego równania stanowi właśnie lukę w naszych wiadomościach: uzupełnienie tej luki jest głównym zadaniem trygonometrii.

Że istnieje związek między bokami a kątami, o tem wiemy już z nauki o podobieństwie trójkątów. Wiadomo mianowicie (patrz tom I.¹⁾ str. 121), że stosunek boków trójkąta zależy tylko od wielkości kątów i odwrotnie; mając bowiem podane stosunki boków trójkąta, mamy temsamem wyznaczone kąty trójkąta i odwrotnie: mając podane kąty trójkąta, możemy znaleźć (konstrukcyjnie) stosunki jego boków. Biorąc szereg trójkątów prostokątnych o kącie ostrym α , jednakowym dla wszystkich trójkątów, widzimy, że, jakkolwiek te trójkąty mają różne długości boków i różne pola, to stosunki odpowiednich boków są dla wszystkich trójkątów równe, n. p. na fig. 2:

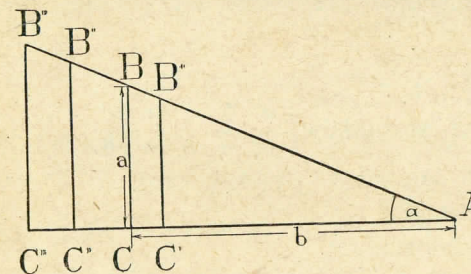


Fig. 2.

$$\frac{CB}{AC} = \frac{C'B'}{A'C'} = \frac{C''B''}{A''C''} = \frac{C'''B'''}{A'''C'''}$$

wskutek podobieństwa trójkątów.

¹⁾ A. Łomnicki. Geometria. Cz. I. Wydanie 4. Lwów 1923.

Jeżeli zaś kąt α się zmieni, musi się zmienić także wykładnik stosunku boków, chociażby się nawet jeden bok nie zmienił. N. p. na fig. 3 mamy szereg trójkątów prostokątnych o równej podstawie AC a o różnych kątach przy A .

Stosunki:

$$\frac{CB}{AC}, \frac{CB'}{AC}, \frac{CB''}{AC} \text{ i t. d.}$$

mają wykładniki różne. Widzimy więc, że ze zmianą kąta zmienia się stosunek przyprostokątni. Podobnie stosunki te byłyby różne, gdyby się zmieniały naraz trzy boki przy zmianie kąta α . Gdyby bowiem choć jedna para stosunków była równa, to odpowiednie trójkąty prostokątne byłyby podobne (według którego przypadku podobieństwa?) a więc kąty musiałyby być równe wbrew założeniu.

Z tych rozważań widzimy, że stosunek dwóch boków trójkąta prostokątnego zależy od wielkości kąta ostrego i jest jednoznacznie wyznaczony zapomocą tego kąta.

Gdybyśmy wiedzieli, jaką wartość: s , ma ten stosunek dla każdego kąta α , moglibyśmy rozwiązywać wszystkie trójkąty prostokątne; trzecie brakujące nam równanie moglibyśmy

przyjąć w postaci:

$$\frac{a}{b} = s$$

Równie dobrze możnaby wyjść od stosunków: $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$.

§ 3. Sinus (wstawa) kąta ostrego.

Cała trudność polega teraz na obliczeniu wartości (wykładnika) takiego stosunku dla wszystkich kątów α . Początkowo (aż do XVI wieku) używano tylko stosunku:

$$(III) \quad \frac{a}{c} = s$$

t. j. *stosunku przyprostokątnej, leżącej naprzeciw kąta α , do przeciwprostokątnej*.

Zajmijmy się dokładniej tym stosunkiem. Zobaczmy przedewszystkiem, że dla niektórych kątów znamy wartość tego stosunku już

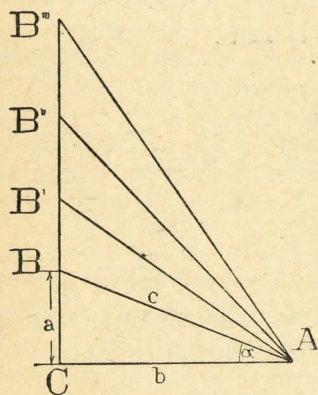


Fig. 3.

z planimetrii. I tak weźmy jakikolwiek trójkąt prostokątny ABC (fig. 4) o kącie ostrym $\alpha = 30^\circ$. Można go uważać za połowę trójkąta równobocznego: ADC , podzielonego wysokością. Ponieważ

$$BC = \frac{AD}{2}, \text{ przeto stosunek:}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

dla wszystkich trójkątów prostokątnych o kącie ostrym 30° .

Używając równań (I), (II) i tej wartości stosunku $a:c$ możemy więc rozwiązać każdy trójkąt prostokątny o kącie $\alpha = 30^\circ$.

Jeżeli $\alpha = 45^\circ$, to trójkąt prostokątny jest równoramienny (bo i $\beta = 45^\circ$), więc $a = b$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy wtedy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ czyli $c = a\sqrt{2}$. Więc dla $\alpha = 45^\circ$ jest:

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106...$$

Jeżeli $\alpha = 60^\circ$, to z figury 4 (zmieniając oznaczenia A, a i α z B, b i β) łatwo obliczyć:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86602...$$

Fig. 4.

Podobnie z twierdzenia o boku dziesięciokąta umiarowego (tom I. str. 155) otrzymujemy dla $\alpha = 18^\circ$ wartość:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0.30902...$$

Oblicz $a:c$ dla $\alpha = 15^\circ$ przy pomocy 12-kąta umiarowego, dla $\alpha = 22^\circ 30'$ przy pomocy ośmiokąta umiarowego!

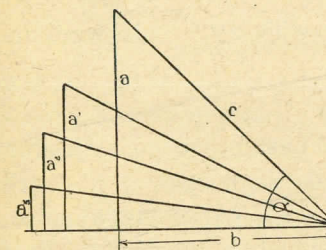


Fig. 5.

Są to, jak widzimy, przeważnie liczby niewymierne; wszystkie są mniejsze od 1. Rozważmy jeszcze graniczne wartości stosunku $a:c$. Jeżeli kąt α (na fig. 5) dąży do zera (n. p. przy niezmienionej przeciwprostokątnej), to przyprostokątnia a dąży również do zera, a zatem i wartość stosunku $a:c$ dąży do zera. Jeżeli stanie się zerem, to trójkąt prostokątny przestaje istnieć, jednakże i teraz możemy mówić o wartości stosunku $a:c$, przypisując jej wartość graniczną 0. A więc dla $\alpha = 0^\circ$ jest stosownie do naszej umowy: $a:c = 0$. Podobnie wnioskujemy, że dla $\alpha = 90^\circ$ najwygodniej jest nadać stosunkowi

$a:c$ wartość graniczną $=1$, wtedy bowiem a dąży do c , więc $\frac{a}{c}$ dąży do 1. W ten sposób unikamy skoków i nieoznaczoności w wartości stosunku $a:c$.

Poznaliśmy więc już wartość $a:c=s$ dla kilku kątów α .

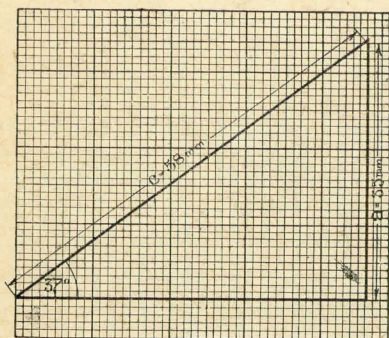


Fig. 6.

Dla innych kątów (n. p. dla $\alpha=37^\circ$) nie potrafimy jeszcze obliczyć $a:c$. Można jednak łatwo otrzymać te wartości w przybliżeniu, za pomocą rysunku.

N. p. chcemy znaleźć wartość $a:c$ dla kąta $\alpha=37^\circ$. Wykreślamy w tym celu (fig. 6) dowolnie wielki trójkąt prostokątny o kącie 37° n. p. na papierze milimetrowym, mierzymy przeciwprostokątną i przyprostokątną, leżącą naprzeciw tego kąta: $a=35\text{ mm}$, $c=58\text{ mm}$. Wobec tego

$$\frac{a}{c} = \frac{35}{58} = 0.603... \text{ dla } \alpha = 37^\circ.$$

Przy pomocy tej wartości przybliżonej możnaby już rozwiązywać wszystkie trójkąty prostokątne o kącie $\alpha=37^\circ$ (n. p. rozwiąż trójkąt znając $\gamma=90^\circ$, $\alpha=37^\circ$, $a=18\text{ dm}$).

Wartości otrzymane w ten sposób są przybliżone tem więcej, im dokładniejszy rysunek i pomiar. Jednakże nawet przy najdalej posuniętej dokładności nie można się spodziewać poprawnych piątych i dalszych miejsc po kropce dziesiętnej. Później poznamy sposoby dokładnego obliczenia wartości takiego stosunku z takim przybliżeniem, jakiego zechcemy. Wartości te obliczono istotnie dla wszystkich kątów w odstępach 1° lub $1'$ lub nawet $1''$ i spisano w tablicach, podobnie jak logarytmy (patrz str. 10).

Porównując wartości stosunku $\frac{a}{c}$ dla rozmaitych kątów, np. dla $\alpha=30^\circ$ i $\alpha=60^\circ$, widzimy, że wartość ta nie wzrasta proporcjonalnie do kąta: gdy kąt α stanie się dwa razy większy, $\frac{a}{c}$ nie wzrasta bynajmniej podwójnie!

(Sprawdź to samo dla $\alpha=45^\circ$ i $\alpha=90^\circ$!)

Wszystkie te przykłady i uwagi prowadzą do następującego wniosku:

Wartość stosunku $a:c$ zależy tylko od kąta α ,

każdej bowiem wartości kąta α odpowiada pewna ściśle określona wartość stosunku $a:c$, którą potrafimy obliczyć dla niektórych kątów ściśle, dla innych zaś na razie tylko w przybliżeniu.

Taki związek dwóch wyrażeń posiada w matematyce osobną nazwę.

Jeżeli mamy dwa wyrażenia ogólne: x i y (np. u nas α i $s = \frac{a}{c}$) i jeżeli każdej

wartości szczegółowej x z pewnego zbioru wartości odpowiada pewna ściśle określona wartość wyrażenia y , to mówimy, że *wyrażenie y jest funkcją wyrażenia x* .

Wiele przykładów takiej zależności funkcyjnej znajdujemy zarówno w matematyce, jak i w tych naukach, w których matematyka znajduje zastosowanie. Np. w wyrażeniu $y=5x-6$, y jest funkcją x , bo każdej wartości x odpowiada jakaś wartość y ; np. dla $x=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ otrzymujemy $y=-6, -1, +4, +9, +14, \dots$. Liczbę ogólną x nazywamy zmienną niezależną, y zaś zmienną zależną. Można jednak to wyrażenie także tak przekształcić, że y będzie zmienną niezależną x zaś zależną, a mianowicie $x = \frac{y+6}{5}$; ta funkcja nazywa się *odwrotną* względem poprzedniej.

Podobnie pole koła jest funkcją promienia koła, bo $p=r^2\pi$, każdej więc wartości r odpowiada ściśle określona wartość pola p . Możnaby wiele podobnych przykładów podać z dziedziny geometrii.

Znany z mechaniki wzór $s = \frac{g}{2} t^2$ poucza, że droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest funkcją dwóch zmiennych: czasu t i przyspieszenia g . Wogóle wzory fizyki podają zależności funkcyjne między pewnymi wielkościami zmiennymi, jak: czas, droga, objętość, siła, temperatura, praca itp.

Stosując to pojęcie funkcji do naszego przypadku, powiemy:

Stosunek $\frac{a}{c}$ jest funkcją kąta α ; znamy jej wartość dla każdego kąta od 0° do 90° włącznie.

Funkcji tej dano osobną nazwę, mianowicie:

Stosunek przyprostokątni, leżącej naprzeciw kąta α , do przeciwprostokątnej w dowolnym trójkącie prostokątnym nazywamy wstawą kąta α lub sinus kąta α i piszemy w skróceniu:

$$(III) \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha \quad (I)$$

(podobnie jak $\log \alpha$ oznacza funkcję logarytmiczną; pochodzenie tej nazwy wyjaśnimy później). Stosując to określenie do kąta β , otrzymamy także:

$$(III') \quad b:c = \sin \beta.$$

Jest to trzecie równanie niezbędne i wystarczające do rozwiązywania wszystkich trójkątów prostokątnych. Aby tego równania (III) można używać, trzeba naturalnie znać wartości funkcji sinus dla wszystkich kątów α , tudzież odwrotnie znać wartości kąta α dla każdej wartości $\sin \alpha$ między 0 a 1 (innych bowiem wartości nie może przybierać stosunek $a:c$).

Podajemy tutaj (na str. 10) tabelkę I, wartości $\sin \alpha$ dla wszystkich kątów od 0° do 90° w odstępach jednostopniowych; wartości te są zaokrąglone do 4 miejsc dziesiętnych. Obok tego podana jest tabelka II, odwrotna, z której można odczytać, jaki kąt należy do każdej wartości $\sin \alpha$ od 0 do 1 w odstępach 0.01, przyczem wartości kątów są zaokrąglone do minut.

Możnaby także nie podawać osobnej tablicy do odczytywania kąta,

Tablica

α	$\sin \alpha$	α	$\sin \alpha$
0°	0.0000		
1°	0.0175	46°	0.7193
2°	0.0348	47°	0.7313
3°	0.0523	48°	0.7431
4°	0.0698	49°	0.7547
5°	0.0872	50°	0.7660
6°	0.1045	51°	0.7772
7°	0.1219	52°	0.7880
8°	0.1392	53°	0.7986
9°	0.1564	54°	0.8090
10°	0.1737	55°	0.8192
11°	0.1909	56°	0.8290
12°	0.2079	57°	0.8387
13°	0.2250	58°	0.8481
14°	0.2419	59°	0.8572
15°	0.2588	60°	0.8660
16°	0.2756	61°	0.8746
17°	0.2924	62°	0.8830
18°	0.3090	63°	0.8910
19°	0.3256	64°	0.8988
20°	0.3420	65°	0.9063
21°	0.3584	66°	0.9136
22°	0.3746	67°	0.9205
23°	0.3908	68°	0.9272
24°	0.4067	69°	0.9336
25°	0.4226	70°	0.9397
26°	0.4384	71°	0.9455
27°	0.4540	72°	0.9511
28°	0.4695	73°	0.9563
29°	0.4848	74°	0.9613
30°	0.5000	75°	0.9659
31°	0.5150	76°	0.9703
32°	0.5299	77°	0.9744
33°	0.5446	78°	0.9782
34°	0.5592	79°	0.9816
35°	0.5736	80°	0.9848
36°	0.5878	81°	0.9877
37°	0.6018	82°	0.9903
38°	0.6157	83°	0.9926
39°	0.6293	84°	0.9945
40°	0.6428	85°	0.9962
41°	0.6561	86°	0.9976
42°	0.6691	87°	0.9986
43°	0.6820	88°	0.9994
44°	0.6947	89°	0.9999
45°	0.7071	90°	1.0000

Tablica II.

$\sin \alpha$	α	$\sin \alpha$	α
0.00	0° 0'		
0.01	0° 31'	0.51	30° 40'
0.02	1° 9'	0.52	31° 20'
0.03	1° 43'	0.53	32° 0'
0.04	2° 18'	0.54	32° 41'
0.05	2° 52'	0.55	33° 22'
0.06	3° 26'	0.56	34° 3'
0.07	3° 59'	0.57	34° 45'
0.08	4° 35'	0.58	35° 27'
0.09	5° 10'	0.59	36° 9'
0.10	5° 44'	0.60	36° 52'
0.11	6° 19'	0.61	37° 35'
0.12	6° 54'	0.62	38° 19'
0.13	7° 28'	0.63	39° 3'
0.14	8° 3'	0.64	39° 48'
0.15	8° 38'	0.65	40° 32'
0.16	9° 13'	0.66	41° 18'
0.17	9° 47'	0.67	42° 4'
0.18	10° 22'	0.68	42° 51'
0.19	10° 57'	0.69	43° 38'
0.20	11° 32'	0.70	44° 26'
0.21	12° 7'	0.71	45° 14'
0.22	12° 43'	0.72	46° 3'
0.23	13° 18'	0.73	46° 53'
0.24	13° 53'	0.74	47° 44'
0.25	14° 29'	0.75	48° 35'
0.26	15° 4'	0.76	49° 28'
0.27	15° 40'	0.77	50° 21'
0.28	16° 16'	0.78	51° 16'
0.29	16° 51'	0.79	52° 11'
0.30	17° 27'	0.80	53° 8'
0.31	18° 4'	0.81	54° 6'
0.32	18° 40'	0.82	55° 5'
0.33	19° 16'	0.83	56° 6'
0.34	19° 53'	0.84	57° 8'
0.35	20° 29'	0.85	58° 13'
0.36	21° 6'	0.86	59° 19'
0.37	21° 43'	0.87	60° 28'
0.38	22° 20'	0.88	61° 40'
0.39	22° 57'	0.89	62° 52'
0.40	23° 35'	0.90	64° 10'
0.41	24° 12'	0.91	65° 30'
0.42	24° 50'	0.92	66° 56'
0.43	25° 28'	0.93	68° 26'
0.44	26° 6'	0.94	70° 3'
0.45	26° 45'	0.95	71° 48'
0.46	27° 23'	0.96	73° 43'
0.47	28° 2'	0.97	75° 56'
0.48	28° 41'	0.98	78° 32'
0.49	29° 20'	0.99	81° 54'
0.50	30° —	1.00	90° —

wtedy jednak dla znalezienia kąta, odpowiadającego danej wartości stosunku $\sin \alpha$, musielibyśmy postępować podobnie, jak przy szukaniu liczby logarytmowanej, t. j. używać interpolacji.

Przypatrując się liczbom zawartym w tej tablicy widzimy, że $\sin \alpha$ nie wzrasta proporcjonalnie do kąta α . N. p. jeżeli kąt wzrasta z 20° do wartości dwa razy większej 40°, to $\sin \alpha$ wzrasta od wartości 0.342 do 0.6428, a nie do 0.684!

Sinus wzrasta najszybciej z początku, t. j. dla kątów bliskich 0°. Np. gdy kąt zmieni się od 3° do 4°, to $\sin \alpha$ wzrasta od 0.0523 do 0.0698 t. j. o 0.0175; przy wzroście kąta od 59° do 60° mamy już wzrost $\sin \alpha$ tylko o 0.0088, a przy wzroście od 87° do 88° tylko o 0.0008.

Tabelkę taką także można przedstawić rysunkiem, czyli *graficznie*, jak to dokładnie wyjaśnimy w następnym ustępie.

§ 4. O graficznym przedstawieniu funkcji ¹⁾.

Funkcję podaną tabelarycznie lub zapomocą równania, wiążącego zmienną zależną ze zmienną niezależną, można przedstawić rysunkiem. Do tego celu używa się układu osi współrzędnych, znanego już z niektórych zagadnień planimetrycznych.

Są to dwie proste prostopadłe do siebie. Ich punkt przecięcia się nazywamy początkiem układu. Od tego punktu począwszy odmierzymy na obu osiach w dwie strony jednostki zmiennej zależnej i niezależnej w dowolnej skali.

Jedną oś — zwykle poziomą — nazywamy osią odciętych lub osią x -ów; na niej odmierzymy wartości zmiennej niezależnej, w prawo dodatnie, w lewo ujemne. Prostopadłą

do niej oś nazywamy osią rzędnych lub osią y -ów i na niej odmierzymy wartości zmiennej zależnej, w górę dodatnie, na dół ujemne.

Aby przedstawić na rysunku, że do pewnej wartości zmiennej niezależnej, np. do $x=3$, należy jakaś wartość zmiennej zależnej, np. $y=2$, wykreślamy przez punkt odpowiadający wartości $x=3$ na osi x -ów prostą do niej prostopadłą i odcinamy na niej odcinek $y=2$ (por. fig. 7) do punktu A.

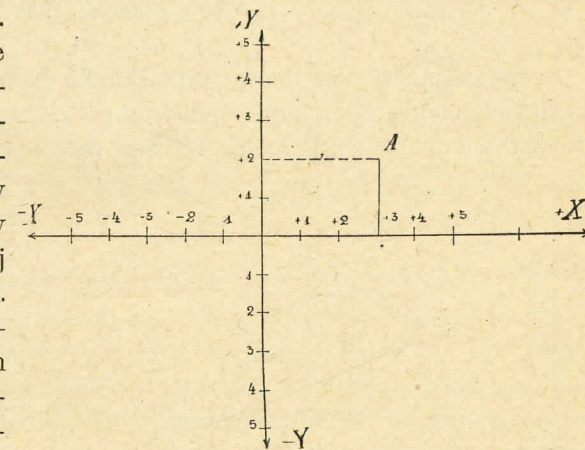


Fig. 7.

¹⁾ Ustęp ten można pominąć, jeżeli w poprzednim toku nauki (np. w algebrze) poznano już zasady graficznego przedstawiania funkcji.

Odwrotnie, z położenia punktu A odczytujemy, że do wartości $x=3$ należy wartość $y=2$. Odległość punktu A od osi y -ów z uwzględnieniem znaku nazywamy odciętą punktu A , (w naszym przypadku jest to liczba $x=3$), odległość zaś od osi x -ów nazywamy rzędną punktu A (w naszym przykładzie jest to liczba $y=2$). Odciętą i rzędną obejmujemy wspólną nazwą: są to współrzędne prostokątne punktu A . W taki sposób można przedstawić geometrycznie każdą zależność funkcyjną: w punktach odpowiadających rozmaitym wartościom zmiennej x kreśli się prostopadłe do osi x -ów i odcina się na nich odpowiadające im wartości y .

Bardzo dogodnym jest przy takich rysunkach użycie papieru milimetrowego t.j. podzielonego na kratki milimetrowe.

Przykład 1. Przedstawić graficznie przebieg temperatury powietrza w ciągu doby, t. j. temperaturę jako funkcję czasu.

Zanotowano następujące spostrzeżenia:

O godzinie:

12 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 n
temperatura wynosiła:																								
-3°	-5°	-6°	-7°	-8°	-6°	-3°	-1°	0°	+1°	+4°	+8°	+10°	+11°	+12°	+10°	+6°	+2°	0°	-1°	-3°	-4°	-6°	-5°	-4°

Odcinając na osi x -ów godziny jako jednostki, a na osi y -ów i na prostych równoległych do niej stopnie temperatury, otrzymamy szereg punktów przedstawiony na figurze 8. Łącząc te punkty jedną nieprzerwaną linią

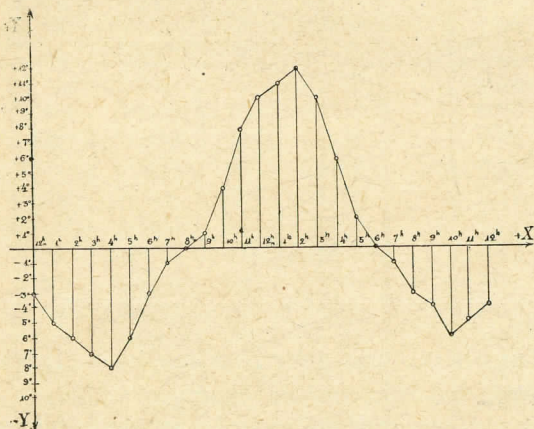


Fig. 8.

szukiwani w tabelce, że o godz. 4 rano temperatura była najniższa, następnie wzrastała aż do godz. 2 popoł., poczem znowu nastąpił spadek aż do 10 rano itd. Widzimy także, kiedy zmiany temperatury były silniejsze, a kiedy słabsze. Linję krzywą otrzymaną w ten sposób, nazywamy wykresem.

otrzymamy przybliżony obraz zmian temperatury w ciągu doby. Przypuszczamy bowiem, że w czasie, w którym nie zapisywano spostrzeżeń, np. między 7 a 8 rano, temperatura wzrastała stale od wartości -1° do 0° , nie wykonując żadnych znaczących wahań.

W praktycznym zastosowaniu używa się specjalnych przyrządów, rysujących automatycznie taką linię, t. zw. termografów.

Z figury naszej odczytujemy odrazu, bez żadnych po-

Przykład 2. Znaleźć wykres funkcji, podanej równaniem:

$$y=1.5x$$

(y jest proporcjonalne do x). Dla wartości $x=0, 1, 2, 3, 4, \dots -1, -2, \dots$ otrzymujemy odpowiednio $y=0, 1.5, 3, 4.5, 6, \dots -1.5, -3, \dots$. Wykreślając w układzie współrzędnych prostokątnych punkty, odpowiadające każdej parze wartości x, y , otrzymamy zbiór punktów oznaczonych silnie na figurze 9. Spostrzegamy z łatwością, że te wszystkie punkty leżą na jednej linii prostej. Gdybyśmy obliczyli y dla pośrednich wartości x , np. dla $x=1\frac{1}{2}$, otrzymalibyśmy także punkty leżące na tej linii prostej. Wynika to z podobieństwa trójkątów prostokątnych $OAB, OA'B', \dots$ w których stosunek przyprostokątnej $y:x$ ma zawsze stałą wartość 1.5 .

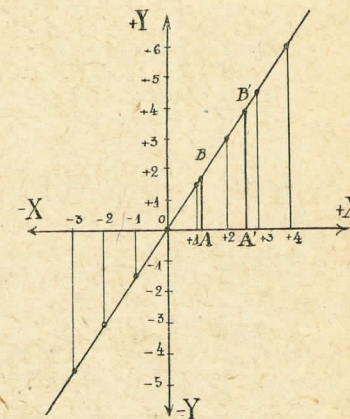


Fig. 9.

Obrazem wzrastania proporcjonalnego jest więc zawsze linia prosta.

Przykład 3. W fizyce znany jest związek między objętością v , gazu, a jego prężnością p , a mianowicie: $pv = \text{liczbie stałej, np. } pv = 8$.

Stąd $p = \frac{8}{v}$. Uważając v za zmienną niezależną, a p za jej funkcję, wykreślamy obraz tej funkcji podobnie, jak w poprzednim przykładzie. Dla $v=0, 1, 2, 3, 4, \dots$ (tylko dodatnie wartości v trzeba tu brać pod uwagę) otrzymujemy $p = \infty, 8, 4, \frac{8}{3}, 2, \dots$. Odcinamy v na osi odciętych, a p na osi rzędnych

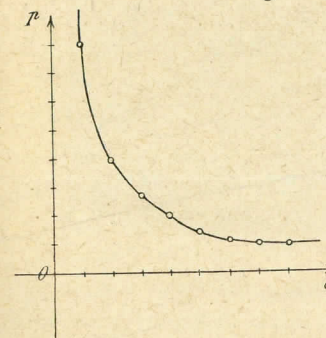


Fig. 10.

i otrzymujemy linię krzywą, która jest częścią hyperboli równobocznej, znanej ze stereometrii jako jeden z przekrojów stożka (druga gałąź hyperboli leży symetrycznie do tej względem początku układu O). Z figury 10 można odczytać prężność dla wszelkich wartości v , nawet dla takiej, której nie obliczaliśmy z wzoru, byleby tylko była zawarta w granicach rysunku.

Korzyści wynikające z graficznego przedstawienia funkcji są następujące: 1-o przejrzyste ujęcie z jednego rzutu oka wszystkich faz zmienności danej wielkości, 2-o przybliżone zbadanie wartości zmiennej zależnej dla każdej wartości zmiennej niezależnej bez rachunku. Dzięki tym zaletom rozpowszechniła się ta metoda nie tylko w matematyce i fizyce, ale także w badaniach statystycznych i w naukach przyrodniczych opisowych.

§ 5. Graficzne przedstawienie funkcji sinus i interpolacja tablic.

Zastosujmy metodę graficzną do przedstawienia przebiegu wartości funkcji sinus. Odcinamy na osi x -ów jako stopnie dowolne jednostki (np. na naszej figurze 11 odpowiada 1 stopniowi: 1 mm) a na liniach prosto-

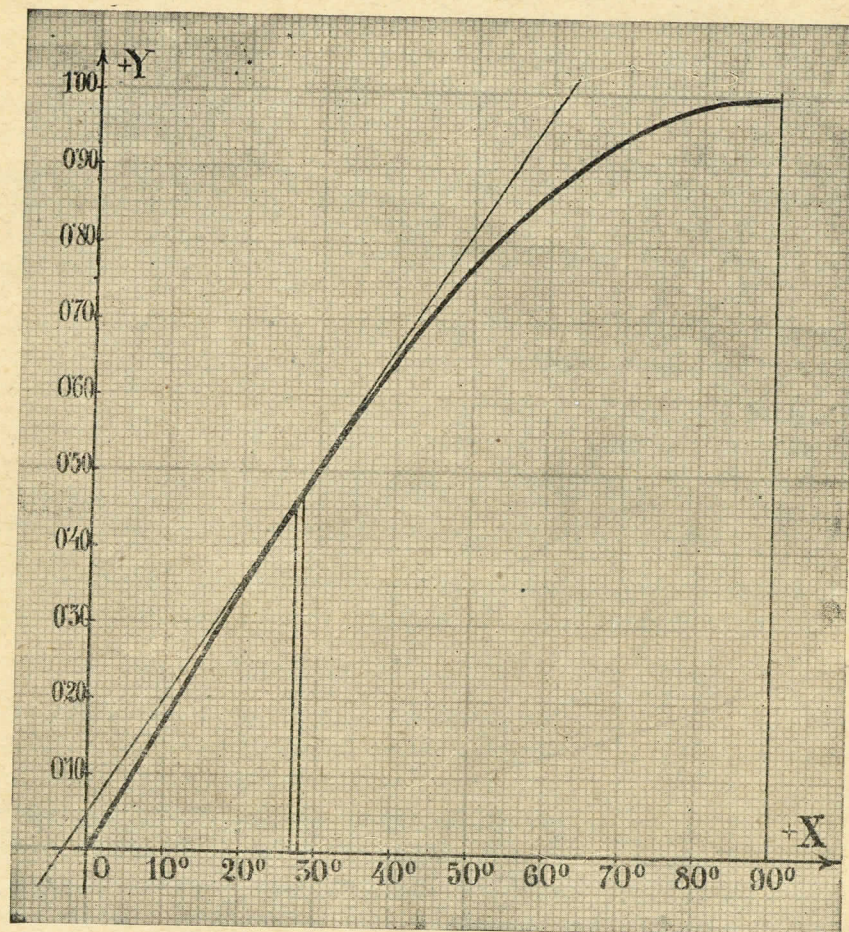


Fig. 11.

padłych do osi x -ów odpowiednie wartości funkcji $\sin \alpha$ wzięte z tablicy I. (za jednostkę obraliśmy na osi y -ów 1 dm).

Łącząc końce tych prostopadłych jedną nieprzerwaną linią, otrzymamy graficzny obraz przebiegu funkcji $\sin \alpha$. Linję tę nazywamy sinusoidą.

U w a g a. Kreśląc łuk koła przechodzącego przez trzy dowolne punkty tej linii, łatwo sprawdzić, że linja ta nie jest łukiem koła. Wykonaj taką konstrukcję!

Obraz ten można także otrzymać bez pomocy tablic, kreśląc ćwiartkę koła o promieniu 1 dm (patrz ćwiczenia I. nr. 4. str. 18).

Przy pomocy graficznego obrazu funkcji sinus łatwo wytłumaczyć interpolację tablic. Jeżeli mamy podane wartości funkcji sinus np. dla kątów 27° i 28° , a chcemy znaleźć sinus kąta pośredniego, np. $\sin 27^\circ 10'$, to rozumiemy tak:

$\sin 27^\circ = 0.454$ } jeżeli kąt wzrasta od 27° o 1° , to wartość $\sin \alpha$ wzrasta
 $\sin 28^\circ = 0.4695$

o 0.0155, jeżeli więc kąt wzrośnie tylko o $10'$ t. j. o $\frac{1}{6}$ część stopnia, to $\sin \alpha$ wzrośnie o: $\frac{0.0155}{6} = 0.0026$. A więc:

$$\sin 27^\circ 10' = 0.454 + 0.0026 = 0.4566.$$

Ogólnie: dla obliczenia dodatku uzupełniającego należy różnicę dwóch sąsiednich wartości z tablicy, tak zwaną »różnicę tablicową«, pomnożyć przez liczbę, wskazującą, jaką częścią jednego stopnia jest dodatkowy kąt. Można także obliczyć najpierw dodatek przypadający na wzrost kąta o 1 minutę i pomnożyć go przez liczbę minut. Podobnie postępujemy, gdy w tablicach podane są wartości $\sin \alpha$ w odstępach mniejszych, np. co $10'$ lub co $1'$.

Postępowanie to nazywamy interpolacją (wstawianie pomiędzy dwie znane wartości trzeciej nieznanej).

Rozumowanie to jednak nie jest ściśle: sinus α nie wzrasta proporcjonalnie do kąta; gdyby tak było, obrazem funkcji sinus byłaby linja prosta (obraz wzrastania proporcjonalnego, por. fig. 11).

Otóż błąd, jaki popełniamy, polega na tem, że łuk sinusoidy między 27° a 28° zastępujemy linią prostą, łączącą te punkty, t. j. sieczną. Z figury widzimy, że błąd ten jest bardzo mały, na rysunku wprost niewidoczny; w rachunku ten błąd wpływa dopiero na dalekie miejsca dziesiętne, a przy 4 cyfrowych tablicach można go zupełnie opuścić, zwłaszcza, gdyby odstępów kątów w tablicach były $10'$ lub $1'$.

Dla ścisłości jednak zapamiętajmy, że przez taką interpolację popełniamy zawsze błąd przez niedomiar, sinusoida bowiem, jako linja wszędzie wypukła, wznosi się wszędzie wyżej, aniżeli punkty pośrednie cięciwy łączącej dwa dowolne jej punkty.

U w a g a. Gdyby chodziło o ściślejszą interpolację, zastąpilibyśmy łuk sinusoidy, łączący trzy znane punkty, łukiem jakiejś linji krzywej wypukłej, łączącej te 3 punkty, np. łukiem paraboli.

Obszerniejsze tablice i opis ich użycia znajdujemy w książkach zawierających tablice logarytmiczne.

§ 6. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych przy pomocy funkcji sinus.

Posiadając tablice wartości funkcji $\sin \alpha$, potrafimy już używać równania (III), mianowicie: jeżeli mamy podany kąt α , znajdujemy w tablicach wartość $\sin \alpha$, a więc znamy wartość stosunku $a:c$; odwrotnie, jeżeli znamy wartość stosunku $a:c$, czyli $\sin \alpha$, znajdujemy w tablicach odpowiednią wartość kąta α . W ten sposób rozwiązywanie dowolnych trójkątów prostokątnych jest już dla nas zadaniem wykonalnym. Cały problem opiera się na rozwiązaniu 3 równań o 3 niewiadomych:

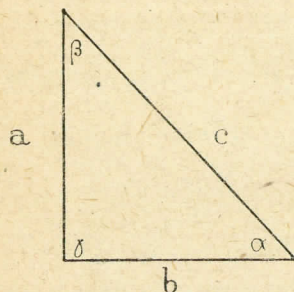


Fig. 12.

$$(I) \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$(II) \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$(III) \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

Zobaczmy to najlepiej na przykładach:

1. Rozwiązać trójkąt znając przeciwprostokątną $c = 16 \text{ m}$ i kąt $\beta = 26^\circ$.

Z równania (I) otrzymujemy:

$$\alpha = 90^\circ - \beta = 64^\circ.$$

Równania (II) nie możemy jeszcze użyć, ponieważ zawiera dwie niewiadome: a i b , natomiast z równania (III) otrzymujemy:

$$a = c \cdot \sin \alpha \text{ czyli} \\ a = 16 \cdot \sin 64^\circ$$

W tablicach znajdujemy $\sin 64^\circ = 0.8988$, więc:

$$a = 16 \text{ m} \cdot 0.8988 = 14.3808 \text{ m}$$

Teraz możemy obliczyć z (II) równania: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}$

$$b = \sqrt{1.6192 \cdot 30.388} = 7.0137... \text{ m}$$

U w a g a. Do obliczenia b można także użyć równania (III') na str. 9 zamiast (II). Wtedy $b:c = \sin \beta$, czyli $b = c \sin \beta$. więc

$$b = 16 \text{ m} \cdot \sin 26^\circ = 16 \text{ m} \cdot 0.4384 = 7.0144 \text{ m}.$$

Różnica w ostatnich miejscach dziesiętnych pochodzi stąd, że wartości: $\sin 26^\circ = 0.4384$ i $\sin 64^\circ = 0.8988$ są zaokrąglone (niezupełne).

2. Znamy przyprostokątną $b = 2.3 \text{ km}$ i kąt $\alpha = 35^\circ$. Rozwiązać trójkąt!

Z równania (I) otrzymujemy $\beta = 55^\circ$.

Z równania (III') zastosowanego do boku b , otrzymujemy:

$$\frac{b}{c} = \sin \beta \text{ czyli } c = b : \sin \beta$$

$$c = 2.3 : \sin 55^\circ$$

W tablicach znajdujemy $\sin 55^\circ = 0.8192$, więc

$$c = 2.3 \text{ km} : 0.8192 = 2.807 \text{ km}$$

Bok a można obliczyć bądźto z równania (II) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, bądźto prościej z równania (III): $a:c = \sin \alpha$.

$$a = c \cdot \sin \alpha \text{ czyli } a = 2.807 \cdot \sin 35^\circ.$$

W tablicach znajdujemy $\sin 35^\circ = 0.5736$, więc

$$a = 2.807 \text{ km} \cdot 0.5736 = 1.7101 \text{ km}$$

3. Znamy przeciwprostokątną $c = 0.75 \text{ cm}$ i przyprostokątną $a = 0.39 \text{ cm}$. Rozwiązać trójkąt!

Z równania (II) otrzymujemy:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c-a)(c+a)}$$

$$b = \sqrt{0.36 \cdot 1.14} = 0.6406... \text{ cm}$$

Kąt α otrzymamy z równania (III):

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha, \text{ więc } \sin \alpha = \frac{0.39}{0.75} = 0.52$$

Do wartości $\sin \alpha = 0.52$ znajdujemy w tablicy II (strona 10) wartość kąta:

$$\alpha = 31^\circ 20'$$

Równanie (I) pozwala teraz obliczyć kąt $\beta = 90^\circ - \alpha$,

$$\beta = 58^\circ 40'$$

U w a g a. Można było najpierw obliczyć α i β , a potem bok b przy pomocy równania $b:c = \sin \beta$. Wykonać rachunek w ten sposób!

4. Znamy obydwie przyprostokątne $a = 83.5 \text{ dm}$, $b = 92.6 \text{ dm}$. Rozwiązać ten trójkąt!

Z równania (II) otrzymamy:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ czyli}$$

$$c = \sqrt{83.5^2 + 92.6^2} = \sqrt{15547.01} = 124.687... \text{ dm}.$$

Równanie (III) daje:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{83.5}{124.687} = 0.670...$$

Stąd znajdujemy w tabelce II:

$$\alpha = 42^\circ 4'$$

Na podstawie równania (I) otrzymujemy wreszcie:

$$\beta = 47^\circ 56'$$

Posiadamy więc dostateczne środki do rozwiązania każdego trójkąta prostokątnego. Rachunki jednak uproszczą się znacznie, skoro wprowadzimy także inne funkcje oprócz $\sin \alpha$.

Cwiczenia I.

§ 2—3. 1. Z odległości $b=15\text{ m}$ od podstawy domu widzimy jego górną krawędź pod kątem wzniesienia $\alpha=34^\circ$. Widząc, że dla takiego kąta $a:b=s=0.675$, obliczyć wysokość domu. Wykonaj sam podobny pomiar!

2. Obliczyć wartość stosunku $a:c$ w trójkącie prostokątnym o kącie: a) $\alpha=15^\circ$ (por. str. 7), b) $\alpha=75^\circ$ (dopelnienie 15°), c) $22^\circ 30'$ (z ośmiokąta umiarowego), d) $\alpha=72^\circ$ (dopelnienie 18°).

3. Znaleźć graficznie wartość stosunku $a:c$ dla $\alpha=27^\circ, 56^\circ, 14^\circ$.

4. Narysować ćwiartkę koła o promieniu $r=1\text{ dm}$, podzielić ją przy pomocy kątomierza na 18 równych wycinków i kreśląc odpowiednie trójkąty prostokątne, znaleźć przez mierzenie sinus dla $\alpha=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, \dots, 85^\circ, 90^\circ$ (użyć papieru milimetrowego!).

5. Wykreślić sinusoide, odcinając na osi x -ów jako 1° odcinek $2\pi:360=0.0174\dots$ (miara łukowa); za jednostkę długości obrać $100\text{ mm}=1\text{ dm}$.

6. Zbudować takie trójkąty prostokątne, w których $\sin \alpha$ wynosi: $1:3, 1:5, 2:7$. Zmierzyć α !

7. Narysować kąt $\alpha=40^\circ$, znaleźć w tablicach $\sin \frac{\alpha}{3}$ t. j. $\sin 13^\circ 20'$ i wykreślić

przy pomocy tej wartości kąt $\frac{\alpha}{3}$ (podział kąta na trzy równe części!)

8. Narysować dowolny kąt ostry i zmierzyć go kątomierzem. Następnie wykreślić prostopadłą z punktu na jednym ramieniu do drugiego ramienia, zmierzyć odpowiednie odcinki i obliczywszy $\sin \alpha$, wyszukać kąt α w tablicach. Porównać wyniki!

9. Narysować dowolny trójkąt ukośnokątny i poprowadzić jedną wysokość: mierząc odpowiednie odcinki obliczyć $\sin \alpha$ i $\sin \beta$ i wyszukać w tablicach kąty α i β leżące przy podstawie.

10. Wyszukać na podstawie tablic wstawy następujących kątów: $24^\circ 15', 63^\circ 18', 41^\circ 23' 30'', 71^\circ 34' 10'', 2^\circ 43' 53''$.

11. Wyszukać w tablicach kąty, których sinus wynosi: $0.36379, 0.8073, 0.21736, 0.732, 0.954$.

12. Rozwiązać trójkąt prostokątny, znając:

- a) $c=24.8\text{ cm}, \alpha=26^\circ 40'$;
- b) $a=0.95\text{ cm}, \alpha=53^\circ 46'$;
- c) $a=4.2\text{ dm}, c=5.6\text{ dm}$;
- d) $a=70\text{ m}, b=133\text{ m}$.

13. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, znając:

- a) $c=86\text{ cm}, \alpha=34^\circ 48'$;
- b) $b=3.09\text{ dm}, \beta=61^\circ 25' 20''$.

14. Rozwiązać trójkąt równoramienny, znając podstawę: $2a=4.6\text{ cm}$ i kąt u wierzchołka $2\alpha=82^\circ 40'$ (podzielić go wysokością na dwa trójkąty prostokątne!).

15. Jak wielka jest cięciwa w kole o promieniu $r=3\text{ cm}$, należąca do kąta środkowego $\varphi=48^\circ 10'$?

16. Ile wynosi bok umiarowego: a) 9-kąta, b) 360-kąta wpisanego w koło o promieniu $r=100\text{ mm}$?

17. Znając przekątnie prostokąta $d=7.4\text{ cm}$ i jej nachylenie do podstawy $\alpha=25^\circ 4'$ obliczyć jego pole.

18. Pod jakim kątem wznosi się droga, jeżeli na 1 km drogi mierzonej wzdłuż pochyłości wzniesienie wynosi 24 m ?

19. Szczyt góry wysokiej 2300 m widać z pewnej odległości (poziom 0 m) pod kątem wzniesienia $21^\circ 20'$. Jaka jest odległość od szczytu w linii powietrznej?

20. Wahadło ma długości $1\text{ m } 27\text{ cm}$; odległość pozioma końca wahadła przy najdalszych wychyleniach wynosi 48 cm . Jaki jest największy kąt wychylenia tego wahadła?

21. Promień koła wynosi 4 dm . Z pewnego punktu poza kołem widać je pod kątem $60^\circ 20'$. Jak daleko leży ten punkt od środka koła?

22. Odległość księżyca od ziemi wynosi 60.28 promieni ziemskich ($R=6377\text{ km}$), a kąt widzenia tarczy księżyca $31' 8''$. Obliczyć jego promień.

23. Obwód śruby wynosi 5.6 cm , a długość jednego skretu 6.2 cm . Obliczyć, jaki kąt tworzy linia śrubowa z podstawą. (Rozwinąć linie śrubową!)

24. Siłę 600 kg rozłożyć na dwie składowe w kierunkach prostopadłych, tworzących z nią kąty $\alpha=20^\circ 35'$ i $\beta=90^\circ-\alpha$. Obliczyć wielkość sił składowych.

25. Wykazać, że znając wartość stosunku $a:c=s$ w trójkącie prostokątnym, możemy obliczyć pozostałe stosunki $a:b, b:c, c:a, b:a, b:c$, przy pomocy twierdzenia Pitagorasa (np. $a:c=1:2$). Wskazówka: celem otrzymania $b:c$ należy wyrazić bok b przy pomocy twierdzenia Pitagorasa i podzielić obie strony wzoru przez c . Podobnie dla innych stosunków.

Rozwiązania ćwiczeń:

$$1. a=10.125\text{ m} \quad 2. a) \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad b) \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}, \quad c) \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$d) \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad 3. 0.454, 0.83, 0.242. \quad 4. \text{Wartości powinny się zgadzać}$$

z wartościami zawartymi w tablicy I na str. 10. 6. W przybliżeniu $\alpha=19^\circ 20', 11\frac{1}{2}^\circ, 16\frac{1}{2}^\circ$. 11. $21^\circ 20', 53^\circ 50', 12^\circ 33' 2'', 47^\circ 3' 17'', 72^\circ 33' 13''$,

12. a) $\beta=63^\circ 20', a=22.162\text{ cm}, b=11.13\text{ cm}$; b) $\beta=36^\circ 14', c=1.178\text{ cm}, b=0.696\text{ cm}$; c) $\alpha=48^\circ 35', \beta=41^\circ 25', b=3.7\text{ dm}$; d) $\alpha=27^\circ 45' 5'', \beta=62^\circ 14' 5'', c=150.3\text{ m}$;

13. a) 1733.02 cm^2 ; b) 8.7643 dm^2 . 14. Kąt przy podstawie $\beta=48^\circ 40'$; bok $b=3.482\text{ cm}$. 15. $C=2.44842\text{ cm}$.

16. $b_9=68.404\text{ mm}, b_{360}=1.746\text{ mm}$.

$$17. P=\frac{d^2 \sin 2\alpha}{2}=21.378\text{ cm}^2.$$

18. $\alpha=1^\circ 2' 5'$. 19. $d=6322.3\text{ m}$. 20. $\alpha=21^\circ 47'$. 21. $d=7.96\text{ dm}$.

22. $r=0.27487, R=1751\text{ km}$. 23. $\alpha=25^\circ 25'$. 24. $P=561.696\text{ kg}$,

$$Q=210.942\text{ kg}. \quad 25. \frac{a}{b}=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{b}{c}=\sqrt{1-s^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{c}{a}=\frac{1}{s}=$$

$$=2, \quad \frac{c}{b}=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{1-s^2}}{s}=\sqrt{3}.$$

§ 7. Dostawa kąta α (cosinus kąta α).

Jako trzecie równanie potrzebne do rozwiązywania trójkątów prostokątnych obraliśmy związek (1) ... $a:c = \sin \alpha$. Równie dobrze możnaby obrać zamiast stosunku $a:c$ którykolwiek inny z stosunków $b:c$, $a:b$ i t. d. Funkcje te istotnie wprowadzono, obliczono tablice ich wartości i nadano im osobne nazwy.

Zajmiemy się w tym ustępie stosunkiem $b:c$.

Stosunek przystokątnej przyległej kątowi α do przeciwprostokątnej w dowolnym trójkącie prostokątnym nazywamy dostawą kąta α czyli cosinus kąta i piszemy w skróceniu

$$(2) \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

Podobnie dla kąta β mamy: $\frac{a}{c} = \cos \beta$.

Wartości tej funkcji nie trzeba już osobno obliczać, skoro znamy wartości $\sin \alpha$ dla wszystkich kątów od 0° do 90° . Jeżeli bowiem weźmiemy pod uwagę kąt β , to z określenia funkcji sinus wynika, że

$$\frac{b}{c} = \sin \beta \text{ ale } \beta = 90^\circ - \alpha, \text{ więc}$$

$$\frac{b}{c} = \sin (90^\circ - \alpha).$$

Porównując to równanie z równaniem (2), otrzymujemy:

$$(3) \quad \cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$

To znaczy: *dostawa (cosinus) jakiegokolwiek kąta równa się wstawie (sinus) kąta dopełniającego* (po łacinie: sinus complementi, stąd skrócona nazwa: co—sinus).

Aby więc znaleźć w tablicach cosinusy kątów $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$, szukamy sinusów kątów $85^\circ, 80^\circ, 75^\circ, \dots$. Zwykle urządza się już tablicę wstaw tak, aby była zarazem tablicą dostaw. W tym celu wypisuje się po prawej stronie kolumny wstaw stopnie w odwrotnym porządku: od 90° do 0° ku dołowi, a pod kolumną wstaw dajemy napis: cosinus (porównaj używane tablice!).

Jeżeli przedstawimy graficznie (figura 13) przebieg funkcji: $\cos \alpha$, otrzymamy linię PBX symetryczną względem sinusoidy, zwaną cosinusoidą. Dla $\alpha = 45^\circ$ obydwie funkcje mają tęsamą wartość, bo $\cos 45^\circ = \sin (90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ$. W obrazie geometrycznym przecinają się więc obydwie linie w punkcie, odpowiadającym kątowi 45° . Prostopadła do osi x -ów przechodząca przez ten punkt B jest osią symetrii tej figury. Do każdego punktu np. C sinusoidy znajdziemy symetrycznie leżący punkt D cosinu-

soidy. Końce E i F odcinków, odpowiadających kątowi α i $90^\circ - \alpha$ są bowiem równo oddalone od punktu A , odpowiadającego kątowi 45° , a wartości $\cos \alpha$ i $\sin (90^\circ - \alpha)$, przedstawione liczbami wymiarowymi odcinków

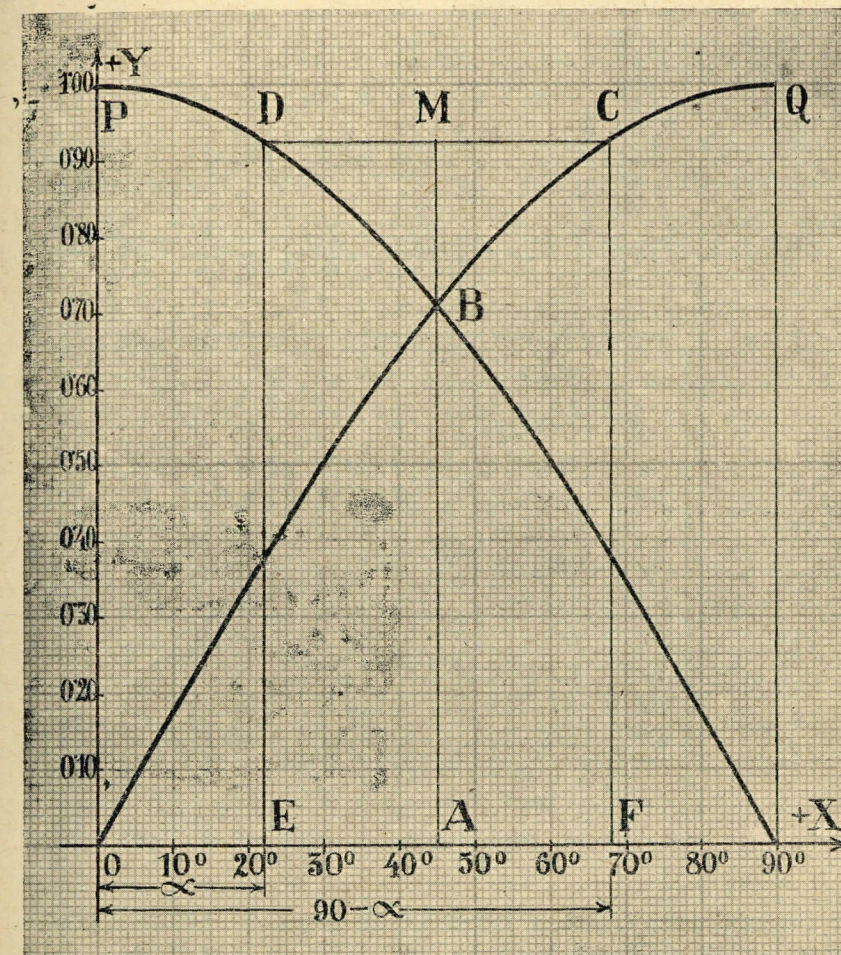


Fig. 13.

ED i FC , są równe. Punkty C i D leżą więc na tej samej linii CM prostopadłej do AM , w równych odległościach od punktu M .

Jeżeli więc mamy narysowaną sinusoidę, to cosinusoidę otrzymamy już bez pomocy tablic, jako jej symetryczny obraz.

Z obrazu tego widzimy, że gdy funkcja $\sin \alpha$ rośnie od 0 do 1, to równocześnie funkcja $\cos \alpha$ maleje od 1 do 0. Dla $\alpha = 0^\circ$ jest $\cos 0^\circ = 1$; dla $\alpha = 90^\circ$ jest $\cos 90^\circ = 0$. Im większy kąt, tem mniejszy cosinus. Przy interpolacji tablic trzeba więc dla $\cos \alpha$ poprawkę,

pochodzącą z reszty minut i sekund, odejmować od wartości znalezionej w tablicy.

Podobnie, jak doszliśmy do związku (3), można wykazać przy użyciu stosunku $a:c$ prawdziwość związku.

$$(4) \quad \sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$$

Wypowiedz słowami!

Jeżelibyśmy więc obliczyli wartość dwóch funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ dla wszystkich kątów od 0° do 45° , to wzory (3) i (4) dałyby zarazem wartości tych funkcji dla wszystkich kątów dopełniających, t. j. dla kątów od 45° do 90° . Dlatego to w tablicach (por. poniżej) mamy podane kąty tylko od 0°

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	α
0°	0.00000	1.	90°
5°	0.08716	0.99619	85°
10°	0.17365	0.98481	80°
15°	0.25882	0.96593	75°
20°	0.34202	0.93969	70°
25°	0.42262	0.90631	65°
30°	0.5	0.86603	60°
35°	0.57358	0.81915	55°
40°	0.64279	0.76604	50°
45°	0.70711	0.70711	45°
α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	α

do 45° , ale zato mamy osobną kolumnę dla $\sin \alpha$, a osobną dla $\cos \alpha$. Po prawej stronie są wypisane kąty dopełniające, a u dołu kolumna $\sin \alpha$ ma napis $\cos \alpha$ i odwrotnie. Np. liczba 0.5 przedstawia $\sin 30^\circ$, a równocześnie $\cos 60^\circ$; liczba 0.96593 przedstawia $\cos 15^\circ$, ale zarazem $\sin 75^\circ$. Przy takim urządzeniu tablic nie trzeba już zamieniać kąta na kąt dopełniający, tylko odrazu odczytuje się wartości funkcji także dla kątów większych od 45° .

(W obrazie geometrycznym wystarczy znać linję krzywą łamaną $OBDP$, aby można odtworzyć przebieg funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ dla kątów od 0° do 90°).

Istnieje prosty związek nie tylko między $\sin (90^\circ - \alpha)$ i $\cos \alpha$, ale wprost między $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, t. j. między funkcjami tego samego kąta.

Związek ten zawiera się w twierdzeniu Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$. Jeżeli bowiem obie strony podzielimy przez c^2 , otrzymamy:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \text{ czyli: } (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.$$

Zwykle piszemy to bez nawiasów, w sposób następujący:

$$(5) \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Jest to trygonometryczna forma twierdzenia Pitagorasa. Przy pomocy tego równania można obliczyć cosinus każdego kąta, znając jego sinus.

U w a g a. Przy sporządzeniu tablic wystarczy więc obliczyć $\sin \alpha$ dla kątów od 0° do 45° , wtedy bowiem z wzoru (5) obliczymy $\cos \alpha$ dla $\alpha = 0^\circ \dots 45^\circ$, a wiemy już, że stąd przy pomocy wzorów (3), (4) oblicza się wartości tych funkcji dla kątów $45^\circ \dots 90^\circ$.

Znając naturę związku $b:c = \cos \alpha$ i opanowując to równanie liczbowo, możemy go użyć do rozwiązywania trójkątów. Możemy więc zamiast układu równań (I), (II), (III) na str. 16, użyć równań:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ a^2 + b^2 &= c^2 \\ \frac{b}{c} &= \cos \alpha \text{ (lub } \frac{a}{c} = \cos \beta) \end{aligned}$$

Możemy jednak także zamiast niedogodnego do rachunku logarytmicznego twierdzenia Pitagorasa użyć związku $a:c = \sin \alpha$ i wtedy mamy układ równań:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ \frac{b}{c} &= \cos \alpha, \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha \end{aligned}$$

lub odpowiednio dla kąta β .

Przykłady.

1. $a = 378.2 \text{ m}$, $c = 576.8 \text{ m}$. Rozwiązać trójkąt!

Z równania: $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ otrzymamy:

$$\sin \alpha = \frac{378.2}{576.8} = 0.65744, \text{ a stąd znajdujemy w tablicach:}$$

$$\alpha = 41^\circ 6' 15''$$

$$\text{więc } \beta = 90^\circ - \alpha = 48^\circ 43' 45''$$

Bok b obliczamy z równania $b:c = \cos \alpha$ czyli $b = c \cdot \cos$

$$b = 576.8 \text{ m} \cdot \cos 41^\circ 6' 15''$$

$$b = 576.8 \text{ m} \cdot 0.75352 = 434.62 \text{ m}.$$

2. Znając długość odcinka d i kąt φ , jaki ten odcinek tworzy z płaszczyzną rzutów, obliczyć jego rzut.

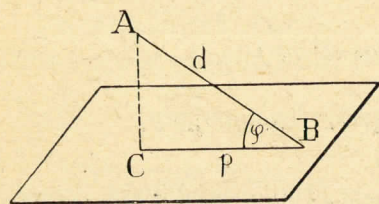


Fig. 14.

Z trójkąta prostokątnego ABC znamy d i φ .

Bok p znajdziemy z równania:

$$\frac{p}{d} = \cos \varphi \text{ więc}$$

$$p = d \cdot \cos \varphi$$

Funkcja cosinus odgrywa więc ważną rolę przy rzutach prostopadłych: podaje ona stosunek zmniejszenia odcinków (a także powierzchni płaskich!) nachylonych pod znanym kątem do płaszczyzny rzutów.

3. Znając promień ziemi R i szerokość geograficzną φ jakiegoś równoleżnika, obliczyć jego promień.

Z trójkąta prostokątnego OAB otrzymamy:

$$\frac{r}{R} = \cos \varphi \text{ czyli } r = R \cos \varphi$$

Promienie a więc i obwody równoleżników maleją w stosunku dostawy szerokości geograficznej.

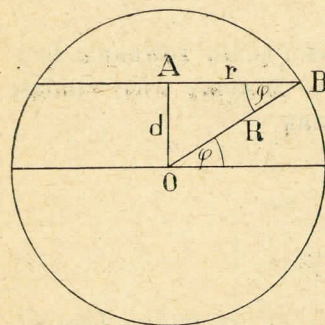


Fig. 15.

Ćwiczenia II.

§ 4. 1. Obliczyć wartość stosunku $b:c$ w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym $\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 15^\circ, 18^\circ$, opierając się na znanych twierdzeniach planimetrycznych.

2. Znaleźć graficznie wartość stosunku $b:c$ dla $\alpha = 28^\circ, 41^\circ, 73^\circ$.

3. Narysować ćwiartkę koła o promieniu $r = 1 \text{ dm}$, wykreślić w niej kąty środkowe $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 85^\circ, 90^\circ$ kątomierzem i znaleźć rysunkiem cosinus tych wszystkich kątów.

4. Przy pomocy poprzedniej figury wykreślić cosinusoidę.

5. Zbudować trójkąty prostokątne, znając $\cos \alpha = \frac{13}{45} \frac{6}{15}$. Zmierzyć kąt α !

6. Wykreślić kąt $\alpha = 50^\circ$, znaleźć w tablicach $\cos \frac{\alpha}{3}$ i przy pomocy tej wartości podzielić kąt na 3 równe części.

7. Wynaleźć w tablicach dostawy następujących kątów: $16^\circ 10', 75^\circ 25', 38^\circ 10' 20'', 1^\circ 23' 45''$.

8. Znaleźć w tablicach kąty, których dostawy mają wartość: $0.93042, 0.6648, 0.85456, 0.385$.

9. Wykazać, że: $\cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha)$.

10. Znając $\sin 42^\circ 10' = 0.6713$, obliczyć $\cos 42^\circ 10'$.

11. Rozwiązać trójkąt prostokątny, znając:

a) $c = 5 \text{ km}, \alpha = 2^\circ 10'$;

b) $b = 42 \text{ m}, \alpha = 48^\circ 15'$;

c) $b = 70.4 \text{ cm}, c = 1 \text{ m}$;

d) $a = 20 \text{ cm}, b = 21 \text{ cm}$.

12. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, znając $c = 45.3 \text{ cm}$ i $\alpha = 71^\circ 40'$ w liczbach ogólnych i szczególnych.

13. Obliczyć pole trójkąta równoramiennego, znając ramię $b = 123 \text{ cm}$ i kąt $\beta = 64^\circ 25'$, leżący przy podstawie.

14. W trójkącie równoramiennym znamy ramię b i kąt u wierzchołka 2α . Obliczyć jego pole w dwa sposoby: używając wysokości w_a lub w_b . Z porównania tych wzorów wyprowadzić związek:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

(z którego widzimy, że sinus nie wzrasta proporcjonalnie do kąta).

15. Obliczyć promień r koła wpisanego w 11-kąt umiarowy wpisany w koło o promieniu $R = 10 \text{ cm}$.

16. Obliczyć pole 40-kąta umiarowego wpisanego w koło w promieniu $R = 12 \text{ dm}$.

17. Droga wznosi się pod kątem $3^\circ 10'$. Ile kilometrów mierzonych w poziomie odpowiada dziesięciu kilometrom drogi?

18. Obliczyć rzut prostopadły odcinka $d = 25 \text{ cm}$, nachylonego do płaszczyzny rzutów pod kątem $\varphi = 19^\circ 30'$.

19. Pole prostokątne o powierzchni 3560 m^2 jest nachylone do poziomu pod kątem 23° . Ile wynosi rzut tego pola? Ile cm^2 zajmie to pole na planie w skali $1:1000$?

Czy wielkość rzutu zależy od położenia tego pola na płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod kątem 23° ?

20. Podstawa trójkąta jest równoległa do płaszczyzny rzutów, a jego płaszczyzna tworzy z płaszczyzną rzutów kąt α . Obliczyć pole rzutu znając tylko pole trójkąta i kąt α . Jeżeli podstawa nie jest równoległa do pł. rzutów, dzielimy trójkąt na dwie części linią, przechodzącą przez jeden wierzchołek, a równoległą do pł. rzutów i otrzymujemy tensam wynik.

21. Koło o promieniu $r = 2.54 \text{ cm}$ jest nachylone do płaszczyzny rzutów pod kątem $39^\circ 15'$. Obliczyć oś małą eliptycznego rzutu tego koła.

22. Znając obwód podstawy stożka prostego $u = 124 \text{ m}$ i nachylenie boku do podstawy $\alpha = 65^\circ 24'$, obliczyć powierzchnię i objętość tego stożka.

23. Obliczyć kąt dwuścienny φ , utworzony przez dwie sąsiednie ściany ośmiościanu umiarowego $\left(\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} : \frac{a}{2} \sqrt{3}\right)$.

24. Obliczyć kąt nachylenia krawędzi czworoszczanu do ściany łączącej dwie sąsiednie krawędzie.

25. Słońce oświetla płaszczyznę prostopadłą do promieni z natężeniem 61000 świec, znajdujących się w odległości 1 m . Jakie będzie oświetlenie płaszczyzny odchylonej od tej płaszczyzny o kąt $33^\circ 50'$? (t. j. jaka część promieni pierwotnych trafi tę płaszczyznę nachyloną?)

26. Wierzchołek drzewa złamanego wichrem dotyka ziemię pod kątem 25° w odległości 34 m od pnia; obydwie części drzewa są jeszcze złączone w miejscu złamania. Obliczyć długość obydwu części.

27. Obliczyć promień równoleżnika ziemskiego (promień ziemi $R = 6377.4 \text{ km}$) w szerokości geograficznej $\varphi = 49^\circ 50' 11''$ (dla Lwowa).

28. Zmierzone, że w szerokości geograficznej 50° wypada na 1° długości geograficznej łuk 71.55 km . Obliczyć promień ziemi.

29. Jak daleko widać ze szczytu góry o wysokości 2000 m? Obliczyć odległość w linii powietrznej i łuk (promień ziemi $R = 6377 \text{ km}$).

30. Czy z Krakowa widać szczyty Tatr? (Garluch 2663 m; odległość Krakowa od Tatr około 100 km). Porównaj wynik poprzedniego zadania!

Rozwiązania ćwiczeń:

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. 2. 0.883, 0.755, 0.454. 5. $\alpha = 75^\circ 5'$, 53° , $23\frac{1}{2}^\circ$. 7. 0.96046, 0.25179, 0.78616, 0.99983. 8. $21^\circ 30'$, $48^\circ 20'$, $31^\circ 17'4''$, $63^\circ 21' 23''$. 9. Zastosować twierdzenie: $\cos x = \sin(90^\circ - x)$. 10. Zastosować wzór $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$; $\cos 42^\circ 10' = 0.7412$. 11. a) $\beta = 87^\circ 50'$, $b = 4.99645 \text{ km}$, $a = 1.8905 \text{ km}$. b) $\beta = 41^\circ 45'$, $c = 56.4 \text{ m}$, $a = 37.2 \text{ m}$. c) $a = 71.02 \text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ 15'$, $\beta = 44^\circ 45'$. d) $c = 29 \text{ cm}$, $\alpha = 43^\circ 36'1''$, $\beta = 46^\circ 23'9''$. 12. $P = \frac{c^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha = 306.34 \text{ cm}^2$. 13. $P = b^2 \sin \beta \cos \beta = 5892.5 \text{ cm}$. 15. $r = 9.5949 \text{ cm}$. 16. $P = 450.52 \text{ dm}^2$. 17. 9.9847 km. 18. 23.566 cm. 19. $P' = 3276.98 \text{ m}^2$, $p' = 32.7698 \text{ cm}^2$. 20. $P' = P \cdot \cos \alpha$. 21. $b = 1.97 \text{ cm}$. 22. $P = 2086.4 \text{ m}^2$, $V = 17581 \text{ m}^3$. 23. $\varphi = 109^\circ 28' 16''$. 24. $\cos \alpha = \sqrt{3}:3$. 25. $n = 50670 \text{ świec}$. 26. 37.51 m , 15.85 m . 27. $r = 4113 \text{ km}$. 28. $R = 6377.6 \text{ km}$. 29. 155.8 km . 30. Tak.

§ 8. Styczna kąta (tangens kąta).

Widzieliśmy w poprzednim ustępie, jak można ominąć twierdzenie Pitagorasa, używając stosunków $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$. Gdybyśmy jednak mieli podane boki a i b , to nawet przy użyciu funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ nie moglibyśmy ominąć twierdzenia Pitagorasa. Aby i w tym wypadku udogodnić rachunek, wprowadzono także wartość stosunku $a:b$ w związku z kątem α . Stosunek $\frac{a}{b}$ jest bowiem także funkcją kąta α (por. str. 6). Funkcja ta ma osobną nazwę: nazywa się styczną kąta α lub tangens kąta α .

Otóż: **Stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi α do drugiej przyprostokątnej nazywamy styczną kąta α lub tangens kąta α i piszemy w skróceniu:**

$$(6) \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

Pochodzenie tej nazwy wyjaśnimy później.

Stosując nasze określenie do kąta β , otrzymamy: $b:a = \operatorname{tg} \beta$

Wartość tej funkcji łatwo obliczyć, znając wartości funkcji $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, albowiem stosunek $a:b$ jest ilorazem stosunków $a:c$ i $b:c$, więc

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Otóż: *Funkcja tangens jest ilorazem funkcji sinus i cosinus.*

Aby uniknąć dzielenia dwu liczb wielocyfrowych, podano w tablicach także wartości tej funkcji dla wszystkich kątów.

Uwaga. Funkcja tangens pozostaje także w innym związku z funkcją cosinus, jak to łatwo spostrzec, dzieląc równanie Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$ przez b^2 . Otrzymamy:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

czyli

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Związku tego używa się jednak rzadziej, ponieważ obliczenie $\sin \alpha$ lub $\operatorname{tg} \alpha$ z tego wzoru wymaga pierwiastkowania sumy lub różnicy.

Natomiast odwrotnie można z korzyścią użyć funkcji tangens i cosinus do obliczenia drugiego pierwiastka z sumy lub różnicy przy pomocy logarytmów. N. p.:

$$x = \sqrt{3.678^2 + 5.326^2} = 5.326 \cdot \sqrt{\left(\frac{3.678}{5.326}\right)^2 + 1}$$

Kładąc $\frac{3.678}{5.326} = \operatorname{tg} \varphi$ otrzymamy przy użyciu tablic logarytmicznych $\varphi = 34^\circ 37' 40''$.

Wobec tego

$$x = 5.326 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + 1} = 5.326 \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} = \frac{5.326}{\cos \varphi}$$

Teraz można już i x obliczyć przy pomocy logarytmów: $\log x = \log 5.326 - \log \cos \varphi$ a następnie $x = 6.4726$. Podobnie można przy użyciu funkcji sinus przekształcić pierwiastek z różnicy tak, że się da obliczyć przy pomocy logarytmów. Przekształcenia te są korzystne zwłaszcza wtedy, jeżeli w wyrażeniu $\sqrt{a \pm b}$ znamy nie same liczby a , b , tylko ich logarytmy (tak n. p. w naszym przykładzie łatwiej byłoby wykonać rachunki mając podane logarytmy wyrażeń 3.678^2 i 5.326^2). Kąt φ nazywamy *kątem pomocniczym* (lub posilkowym), a całą metodę rachunku nazywamy *metodą kąta pomocniczego*.

Jeżeli na podstawie tablic sporządzimy obraz graficzny przebiegu tej funkcji, otrzymamy linię krzywą, wznoszącą się nieograniczenie ponad oś x -ów, zwaną *tangensoidą*.

(Na naszej figurze obraliśmy za jednostkę 25 mm a 1° przedstawiono odcinkiem $\frac{1}{2} \text{ mm}$).

Dla $\alpha = 0^\circ$ jest $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, ponieważ $\sin 0^\circ = 0$, a $\cos 0^\circ = 1$.

Dla $\alpha = 45^\circ$ jest $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, ponieważ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ (trójkąt prostokątny o kącie 45° jest równoramienny). Gdy α zbliża się do 90° , to $\sin \alpha$

daży do 1, a $\cos \alpha$ do 0, więc ich iloraz, czyli $\operatorname{tg} \alpha$, daży do nieskończoności. Piszemy to w postaci równania:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \operatorname{tg} \alpha = \infty$$

(niewłaściwie piszą czasem:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \infty)$$

$\lim$ czyta się: limes (granica)
 $\alpha \rightarrow 90^\circ$

dla α dążącego do 90° .

Funkcja tangens przybiera wszelkie wartości od 0 do ∞ , podczas kiedy funkcje $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ przybierają tylko wartości od 0 do 1. Tak więc n. p. nie istnieje taki kąt, aby $\sin \alpha = 5$, natomiast dla $\operatorname{tg} \alpha = 5$ można znaleźć odpowiedni kąt.

Wyjaśnić na figurze 16. dopuszczalność interpolacji prostolinjowej (proporcjonalnej) dla funkcji tangens!

Przykład interpolacji:

Obliczyć $\operatorname{tg} 34^\circ 46'$ w tablicach o odstępach $10'$. W tablicach znajdujemy:

$$\operatorname{tg} 34^\circ 40' = 0.69157$$

$$\operatorname{tg} 34^\circ 50' = 0.69588$$

Przyrostowi kąta o $10'$ odpowiada tu przyrost wartości funkcji tangens o 0.00431 (jest to różnica tablicowa), a więc przyrostowi kąta o $1'$ odpowie przyrost tg o 0.000431 , o ile przyjmemy, że tangens wzrasta w tym niewielkim przedziale proporcjonalnie do kąta; dla $6'$ otrzymamy więc przyrost o 0.002586 lub przy zatrzymaniu 5 miejsc po kropce dziesiętnej: 0.00259 . Wobec tego:

$$\operatorname{tg} 34^\circ 46' = 0.69157 + 0.00259 = 0.69416.$$

Stąd wynika praktyczna regułka interpolacji zupełnie tasama, którąśmy otrzymali dla funkcji sinus (por. str. 15).

Ten obraz graficzny można otrzymać także bez pomocy tablic, wprost z rozważań geometrycznych. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = a:b$, to, aby otrzymać wartość $\operatorname{tg} \alpha$ dla różnych kątów, najprościej będzie zostawić przyprostokątnię b stałą, n. p. równą jednostce długości (na naszej figurze obraliśmy za jednostkę 25 mm). Wtedy długość boku a , wyrażona w tych jednostkach, t. j. liczba wymiarowa boku a przy użyciu boku b jako jednostki, da nam wprost wartość funkcji $\operatorname{tg} \alpha$ dla wszelkich kątów. Odcinki OA , OB , OC ..

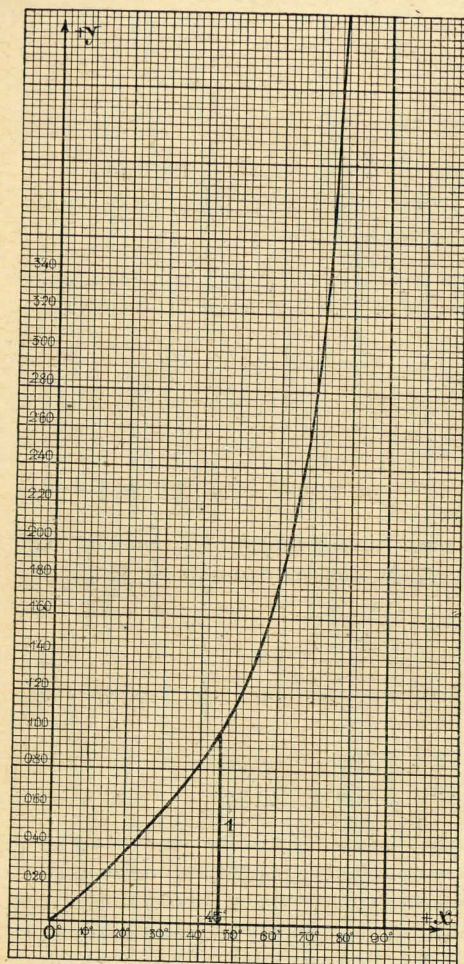


Fig. 16.

na figurze 17. przedstawiają wtedy wprost wartości funkcji tangens dla kątów OMA , OMB , OMC (n. p. w odstępach 10°).

Otóż w odpowiednich punktach osi x -ów kreślimy prostopadłe do niej odcinki równe OA , OB , OC i t. d. Łącząc ich końce otrzymamy tangensoidę, przedstawioną na fig. 16.

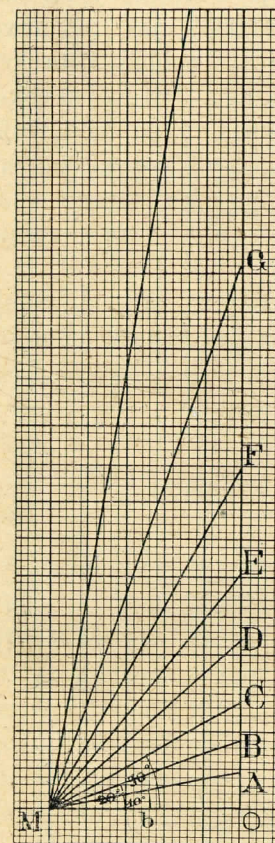


Fig. 17.

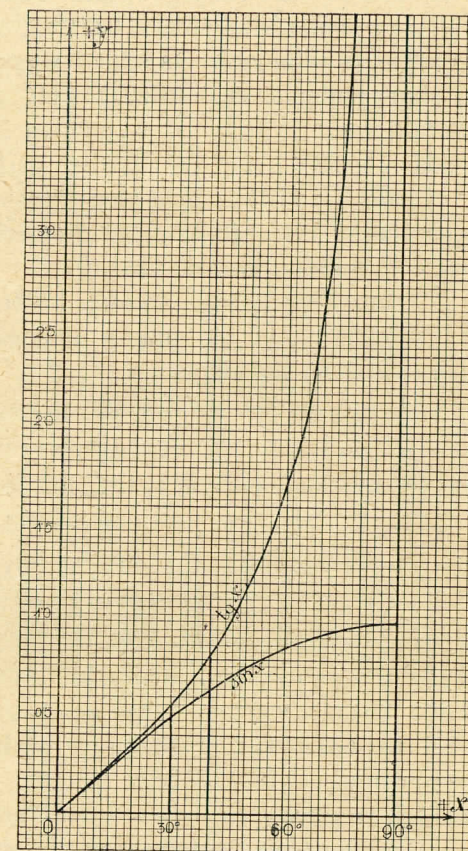


Fig. 18.

Zestawiając na jednej figurze (fig. 18) przebieg funkcji $\sin \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$ (za jednostkę obraliśmy 25 mm , a jeden stopień przedstawiliśmy odcinkiem $\frac{1}{2} \text{ mm}$) widzimy, że funkcja tangens wzrasta o wiele szybciej, aniżeli sinus.

Można to także z łatwością sprawdzić rachunkiem. Np. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, a dla kąta dwa razy większego $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866...$, funkcja nie wzrosła więc nawet dwukrotnie. Tymczasem $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; gdy więc

kąt wzrósł dwukrotnie, funkcja tangens wzrosła trzykrotnie. Wzrastanie kąta przedstawilibyśmy na figurze linią prostą styczną do sinusoidy i tangensoidy, przechodzącą przez początek układu O . Linia ta przebiegałaby między sinusoidą a tangensoidą, (powyżej pierwszej a poniżej drugiej).

Funkcja tangens jest więc o wiele »czulsza« na zmiany kąta, aniżeli sinus i to dla każdego kąta. Tak n. p. gdy kąt wzrośnie z 30° na $30^\circ 10'$, to sinus wzrośnie o 0.00252, a tangens o 0.00389, jak to łatwo sprawdzić w tablicach. Najbardziej występuje ta różnica w pobliżu kąta 90° ; tam sinus zmienia się bardzo powoli, a tangens wzrasta bardzo szybko, nieograniczenie. Natomiast w pobliżu kąta 0° obydwie funkcje zachowują się podobnie, a ich wartości bardzo mało się różnią (sprawdzić w tablicach).

Zbadać podobnie przebieg funkcji: $\log \operatorname{tg} \alpha$ i $\log \sin \alpha$, biorąc z tablic wartości tych funkcji! Sprawdzić w tablicach, że $\log \sin \alpha$ rośnie o wiele powolniej, aniżeli $\log \operatorname{tg} \alpha$!

Wskutek większej »czułości« funkcji tangens na zmiany kąta używamy przy wykonywaniu rachunków liczbami szczegółowymi zawsze chętniej funkcji tangens aniżeli sinus.

Tak np. mamy wyznaczyć pewien kąt x z warunku:

$$\log \operatorname{tg} x = 11.61399 - 10.$$

W tablicach logarytmów f. trygonometrycznych znajdziemy:

$$x = 88^\circ 36' 24''.$$

Przy użyciu funkcji sinus otrzymalibyśmy na tensam kąt wyrażenie:

$$\log \sin x = 9.99987 - 10$$

z którego jeszcze nie wiadomo, czy $x = 88^\circ 35'$, czy $88^\circ 36'$, czy też $88^\circ 37'$ (sprawdź w tablicach!), wszystkim tym bowiem kątom odpowiada w tablicach tasama wartość funkcji $\log \sin$, a mianowicie $9.99987 - 10$. W takich przypadkach (t. j. dla kątów bliskich 90°) staramy się używać funkcji tangens nawet wtedy, gdyby zadanie prowadziło bezpośrednio do funkcji sinus. N. p. gdyby się zdarzył taki przypadek przy rozwiązywaniu trójkąta prostokątnego z elementów a i c , to obliczylibyśmy najpierw bok b (z tw. Pitagorasa), a potem kąt α z warunku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, zamiast odwrotnie:

najpierw α z warunku $\sin \alpha = \frac{a}{c}$.

Użycie funkcji tangens do rozwiązywania trójkątów jest pożyteczne zwłaszcza wtedy, gdy znamy obydwie przyprostokątne. Sprawdzimy to przerabiając przykład 4 na str. 17 przy użyciu funkcji tangens.

Przykłady.

1. Znamy $a = 83.5 \text{ dm}$ i $b = 92.6 \text{ dm}$. Rozwiązać trójkąt prostokątny! Dawniej obliczaliśmy najpierw c z wzoru $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a potem kąty.

Obecnie unikniemy zupełnie niewygodnego do rachunku twierdzenia Pitagorasa, używając systemu równań:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{a}{c} = \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{Otóż } \operatorname{tg} \alpha = \frac{83.5}{92.6} = 0.90173$$

Do tej wartości $\operatorname{tg} \alpha$ znajdujemy w tablicach kąt:

$$\alpha = 42^\circ 2\frac{1}{2}'$$

$$\text{Więc } \beta = 90^\circ - \alpha = 47^\circ 57\frac{1}{2}'$$

Z równania $a : c = \sin \alpha$ otrzymujemy $c = a : \sin \alpha$ czyli

$$c = 83.5 \text{ dm} : 0.66967 = 124.8 \dots \text{ dm}.$$

Sposób ten jest dogodniejszy głównie przez to, że można użyć logarytmów zarówno do obliczenia kąta α , jak i do obliczenia c .

2. Pręt długości $g = 1 \text{ m}$, przytwierdzony poziomo do ściany pionowej, rzuca na nią cień c . Obliczyć długość cienia, jeżeli promień słońca pada pod kątem $\alpha = 54^\circ$ względem poziomu.

Pręt taki, t. zw. gnomon, jest istotną częścią składową zegara słonecznego.

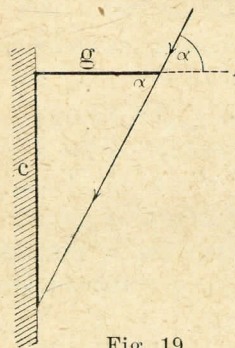


Fig. 19.

Z fig. 19 widzimy, że $\frac{c}{g} = \operatorname{tg} \alpha$, więc:

$$c = g \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

W naszym przykładzie:

$$c = 1 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 54^\circ = 1.3764 \text{ m}.$$

U w a g a. Wskutek tego związku z cieniem funkcję a : nazywano dawniej »umbra versa« (cień przewrócony).

Z własności cienia łatwo stwierdzić, że $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, a $\operatorname{tg} \alpha$ dąży do ∞ , gdy α dąży do 90° .

Zobaczymy również, że funkcja tangens odgrywa ważną rolę przy trygonometrycznych pomiarach wysokości (por. ćwiczenia III. str. 35. nr. 27—29.), co zresztą jest jasne z figury 17., jeżeli MO uważamy za poziom.

§ 9. Dotyczna (cotangens) pozostałe funkcje.

Funkcją $b : a$, która jest styczną kąta β , t. j. kąta dopełniającego do α , nazywamy dotyczną kąta α czyli cotangens kąta α (= tangens complementi) i piszemy w skróceniu:

$$(8) \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Dotyczna (cotangens) kąta jest to stosunek przyprostokątnej przyległej kątowi α do drugiej przyprostokątnej.

Wartość tej funkcji łatwo obliczyć, znając wartość $tg \alpha$. Mamy bowiem:

$$b : a = tg \beta = tg (90^\circ - \alpha) \text{ więc:}$$

$$(9) \quad ctg \alpha = tg (90^\circ - \alpha)$$

Tworząc $ctg \beta$ wykazujemy, że także odwrotnie:

$$(10) \quad tg \alpha = ctg (90^\circ - \alpha)$$

Stosunek $b : a$ jest odwrotnością stosunku $a : b$, więc między funkcjami tg i ctg tego samego kąta zachodzi związek:

$$(11) \quad ctg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}$$

Dla funkcji tg i ctg mamy więc prawo: funkcja kąta dopełniającego jest zarazem odwrotnością funkcji samego kąta. (Nie mieliśmy zaś takiego związku dla funkcji $\sin$ i $\cos$). Wystarczy więc znać wartość $tg \alpha$ dla kątów od 0° do 45° , aby można obliczyć wartości $ctg \alpha$ dla kątów od 0° do 45° , a co zatem idzie wartości $tg \alpha$ dla kątów od 45° do 90° .

W tablicach są ułożone wartości funkcji tangens i cotangens podobnie jak sinus i cosinus (por. str. 22).

Ze związku (11) widzimy: ponieważ z wzrostem kąta tangens rośnie od 0 do ∞ , to cotangens maleje równocześnie od ∞ do 0. (Przy interpolacji poprawkę odejmujemy!) Graficzny obraz tej funkcji otrzymamy, tworząc symetryczne odbicie tangensoidy. Jako oś symetrii należy obrać prostą prostopadłą do osi x -ów, a wykreśloną w punkcie odpowiadającym kątowi $\alpha = 45^\circ$. (Dowodzi się podobnie, jak dla funkcji cosinus!) Narysuj!

Funkcja cotangens jest w bliskim związku z cieniem prostym. Pręt pionowy długości g (gnomon) rzuca cień na płaszczyznę poziomą, wskutek promieni padających pod kątem α względem poziomu.

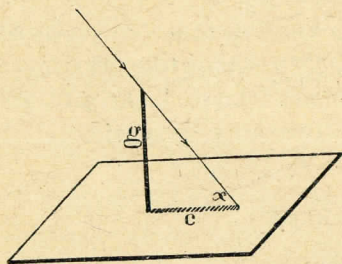


Fig. 20.

$$\text{Ponieważ: } \frac{c}{g} = ctg \alpha, \text{ to } c = g \cdot ctg \alpha$$

Długość cienia jest więc proporcjonalna do wartości funkcji $ctg \alpha$. Jeżeli długość gnomonu $g = 1$, to wprost $c = ctg \alpha$. Dlatego funkcję cotangens nazywano dawniej: »umbra recta« t. j. cień prosty. Z własności cienia jest widocznym, że $ctg \alpha$ maleje od ∞ do 0, gdy kąt wzrasta od 0° do 90° .

Funkcji tej używa się przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych o wiele rzadziej, aniżeli funkcji $\sin$, $\cos$ lub tg .

Porównaj na graficznym przedstawieniu i w tablicach wzrastanie funkcji cosinus i cotangens! funkcji $\log \cos \alpha$ i $\log ctg \alpha$!

Dla niektórych kątów, n. p. 30° , 45° i t. d. można obliczyć wartości $tg \alpha$ i $ctg \alpha$ już przy pomocy znanych twierdzeń planimetrii, podobnie, jak wartości $\sin \alpha$ (por. str. 7) i $\cos \alpha$ (por. Ćw. II. zad. 1). W podanej poniżej tabelce zestawiono ściśle (nie przybliżone!) wartości funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens dla niektórych ważniejszych kątów. Układ tablicy podobny, jak na str. 22.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$	α
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	75°
18°	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}+2\sqrt{5}$	72°
$22^\circ 30'$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$	$67^\circ 30'$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	60°
36°	$\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5}-2\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	54°
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	45°
α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$ctg \alpha$	$tg \alpha$	α

Z pomiędzy sześciu możliwych stosunków boków w trójkącie prostokątnym (por. str. 6) zbadaliśmy dotychczas cztery:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}.$$

Pozostają jeszcze dwa stosunki: $\frac{c}{b}$ i $\frac{c}{a}$. Otóż:

$\frac{c}{b}$ t. j. odwrotność funkcji $\cos \alpha$ nazywa się sieczną kąta α czyli secans α , w skróceniu:

$$\frac{c}{b} = \sec \alpha$$

$\frac{c}{a}$ t. j. odwrotność funkcji $\sin \alpha$ nazywa się **dosieczną kąta α czyli cosecans α** , w skróceniu:

$$\frac{c}{a} = \text{cosec } \alpha$$

Funkcje te są więc związane z poznanymi już funkcjami zapomocą równań:

$$(12) \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$(13) \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Wartości tych funkcji nie wypisuje się zwyczajnie w tablicach i wogóle rzadko się ich używa.

Uwaga: $\text{ctg } \alpha$ wypisuje się w tablicach dlatego, że jest to funkcja kąta dopełniającego do (potrzebnej i bardzo często używanej) funkcji $\text{tg } \alpha$, a więc tablica tangensów jest już zarazem tablicą cotangensów. Dla funkcji zaś $\sec \alpha$ i $\text{cosec } \alpha$ trzeba by otwierać w tablicach nową rubrykę podwójną.

Ćwiczenia III.

§ 8—9. 1. Obliczyć wartość stosunku $a : b$ w trójkątach prostokątnych o kątach $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 18^\circ$, $\alpha = 15^\circ$, z rozważań planimetrycznych.

2. Znaleźć graficznie wartość stosunku $a : b$ dla kątów $\alpha = 5^\circ$, 10° , 15° , 20° , 25° , 30° 90° .

3. Wykreślić tangensoidę, odcinając jako 1° odcinek $\frac{2\pi}{360^\circ} = 0.017 \dots$

4. Zbudować trójkąt prostokątny znając $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}, \frac{4}{7}$, 3, 15.

5. Wyznaczyć w tablicach $\text{tg } \alpha$ dla kątów: $2^\circ 30'$, $42^\circ 36'$, $58^\circ 25'$, $73^\circ 42' 20''$.

6. Znaleźć w tablicach kąty, których tangens ma wartości: 0.65771, 1.15715, 0.40312, 1.5247, 4.

7. Obliczyć $\text{tg } 36^\circ 52' 12''$, wiedząc, że $\sin 36^\circ 52' 12'' = 0.6$.

7. a) Wykazać, że jeżeli we wzorze $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ podstawimy $a = b \text{ tg } \alpha$, to $x = \frac{b}{\cos \alpha}$ (wzór przydatny do rachunku logarytmicznego).

7. b) Znamy $\log a = 3.45762$ i $\log b = 2.93826$. Obliczyć wartość $\sqrt{a^2 + b^2}$, podstawiając za $a = b \cdot \text{tg } \alpha$ (patrz zadanie poprzednie).

8—14. Wykonać zadania 1—7 dla funkcji $b : a = \text{ctg } \alpha$.

15. Rozwiązać przy użyciu funkcji $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\text{tg } \alpha$ i $\text{ctg } \alpha$ trójkąty prostokątne, znając:

a) $a = 0.41 \text{ cm}$, $\alpha = 62^\circ 4' 30''$;

b) $b = 504 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ 16'$;

c) $a = 3726.5 \text{ m}$, $b = 4081.7 \text{ m}$.

16. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, znając b i α w liczbach ogólnych i szczególnych (np. $b = 5.08 \text{ m}$, $\alpha = 71^\circ 2'$).

17. Rozwiązać trójkąt równoramienny, znając podstawę: $a = 0.534 \text{ m}$ i wysokość $w = 1.097 \text{ m}$.

18. Obliczyć promień koła wpisanego w 17 — bok umiarowy o boku $b = 12 \text{ cm}$.

19. Obliczyć pole 25 — boku umiarowego, którego bok wynosi $b = 3.5 \text{ cm}$.

20. Obliczyć różnicę między obwodem 60 — kąta umiarowego, opisanego na kole, a wpisanego w koło o promieniu 1 m .

Obliczyć z tego przybliżoną wartość liczby π .

21. Jakie kąty tworzy z bokami prostokąta przekątnia, jeżeli boki wynoszą: $a = 6.14 \text{ m}$, $b = 10.52 \text{ m}$?

22. Siły $P = 6 \text{ kg}$ i $Q = 10 \text{ kg}$ działają pod kątem prostym na tensam punkt; jakie kąty tworzy wypadkowa z kierunkami tych sił?

23. Cięciwa $c = 4.6 \text{ cm}$ jest oddalona od środka koła o $d = 2.2 \text{ cm}$; obliczyć pole odpowiedniego wycinka koła.

24. Z punktu, leżącego poza kołem o promieniu $r = 3.1 \text{ dm}$, poprowadzono styczne; kąt między nimi zawarty wynosi $2\alpha = 16^\circ 40'$. Obliczyć odcinki stycznych.

25. Znając wysokość ostrosłupa 6-bocznego umiarowego $w = 5 \text{ dm}$ i kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy $\varphi = 54^\circ 35'$, obliczyć jego objętość.

Z miernictwa.

26. Pociąg jedzie z szybkością 80 km na godzinę; strumienie deszczu padającego pionowo wydają się jadącym nachylone pod kątem 30° do poziomn. Jaka jest prędkość kropel deszczu?

27. Pod jakim kątem wznosi się droga, mająca 2% spadku? (Spadek jest to stosunek wysokości do odległości poziomej).

28. Nachylenie toru kolejowego wynosi $4' 36''$; ile wynosi spadek?

29. Szczyt wieży, odległej (w kierunku poziomym) o 600 m , widać pod kątem wzniesienia $12^\circ 30'$. Jaka jest wysokość tej wieży?

30. Z gościńca widać kościół w bok na prawo pod kątem 53° względem kierunku gościńca. Posunąwszy się 2 km prosto naprzód, widzimy ten kościół wprost na prawo. Jaka jest odległość kościoła od drugiego punktu obserwacji?

31. Droga wznosi się do góry pod kątem $4^\circ 25'$ na długości poziomej 3 km , a następnie po dalszych 5 km (liczonych w poziomie) osiąga wysokość 430 m względem punktu początkowego. Jaki jest spadek drogi wzdłuż ostatnich 5 km ?

32. Rozpięcie dachu wynosi 20 m , a wysokość 4 m ; jaki jest kąt nachylenia płaszczyzny dachu do poziomu?

33. Na ścianie oznaczono dwa punkty, leżące na jednej linii pionowej, dla których różnica poziomów wynosi 2 m . Dolny punkt widzimy pod kątem wzniesienia $5^\circ 30'$, a górny pod kątem 38° . Jaka jest odległość ściany od naszego oka? (Wykonaj podobny pomiar w sali szkolnej!)

Kąt widzenia.

34. Pod jakim kątem wzniesienia widać wierzchołek słupa 10 m wysokiego z odległości (poziomej) 500 m ?

35. Kąt widzenia pewnego przedmiotu wynosi $30'$. Ile razy jest większa jego odległość od długości?

36. Jak wielki musi być przedmiot na księżycu, aby był widzialny gołym okiem z ziemi (odległość 60.6370 km), jeżeli najmniejszy możliwy kąt widzenia wynosi $40''$?

37. Jak daleko widać człowieka (2 m wysokości), jeżeli granicą kąta widzenia jest $40''$?

38. W jakiej odległości zbiegają się pozornie szyny kolejowe (szerokość toru 1.435 m), jeżeli graniczny kąt widzenia jest $40''$?

Cień.

39. Jak długi cień rzuca pręt pionowy o wysokości 1 m , jeżeli promienie słońca padają pod kątem 40° ?

40. Jaki jest stosunek zmniejszenia odcinków prostopadłych do płaszczyzny obrazu, jeżeli promienie rzucające tworzą kąt 63° z płaszczyzną obrazu? (Zastosowanie w perspektywie równoległej!)

41. Pod jakim kątem padają promienie słońca, jeżeli pręt pionowy, o długości 1 m , rzuca na poziom cień o długości 0.87 m ? (Kąt ten nazywamy wysokością słońca!)

42. Pod jakim kątem padają promienie, jeżeli odcinki prostopadłe do płaszczyzny obrazu doznają skrócenia: $0.3:1$ (stosunek rzutu do pierwotnego odcinka).

43. Jak długi cień rzuca na poziom pręt pionowy, 1 m długi, na biegunie południowym z końcem grudnia (słońce jest wtedy odchylone od równika niebieskiego o kąt $\varepsilon = 23^\circ 27'$, o tyle więc wznosi się nad poziom obserwatora znajdującego się na biegunie pd.).

44. Dnia 21 marca w południe słońce jest we Lwowie wzniesione o kąt $h = 40^\circ 9' 49''$ (ponieważ szerokość geograficzna Lwowa wynosi $\varphi = 49^\circ 50' 11''$, a słońce znajduje się wtedy nad równikiem, więc $h = 90^\circ - \varphi$); jak długi cień rzuca wtedy pręt o długości 1 m ?

45. Cień pręta, 1 m długiego, wynosi w pewnym mieście w południe dnia 21 marca $c = 0.345\text{ m}$. Jaka jest szerokość geograficzna tego miejsca? ($\varphi = 90^\circ - h$). Por. poprzednie zadanie!

46. Jak długi jest cień pręta, 1 m długiego, we Lwowie, w południe w dniach 21 czerwca (letnie przesilenie dnia z nocą) i 21 grudnia (zimowe przesilenie dnia z nocą)? W tych dniach słońce odchyła się od równika o kąt $\varepsilon = 23^\circ 27'$ na północ lub na południe. (Szer. geogr. Lwowa wynosi około $\varphi = 49^\circ 50'$).

47. a) Jak szeroka musiałaby być ulica biegnąca ze wschodu na zachód w Krakowie ($\varphi = 50^\circ 3' 50''$), aby nawet 21 grudnia w południe cień kamienia sięgał tylko do przeciwległego brzegu ulicy? Przyjmujemy średnią wysokość kamienia 25 m . (W tym dniu kąt wzniesienia słońca wynosi $h = 90^\circ - \varphi - \varepsilon$, gdzie ε oznacza najdalsze odchylenie słońca od równika i wynosi $23^\circ 27'$).

b) Jak wąska musi być ulica w tych samych warunkach, aby nawet 21 czerwca była w cieniu całkowicie, aż do przeciwległego brzegu?

48. Przedłużając w trójkącie prostokątnym bok b o długość c poza punkt A i łącząc koniec tego odcinka z wierzchołkiem B wykazać, że:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}}$$

49. Wyrażając bok b zapomocą c i α wyprowadzić z wzoru, otrzymanego w poprzednim ćwiczeniu, wzór:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Rozwiązania ćwiczeń:

1. $1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}, 2 - \sqrt{3}$. 5. $0.04366, 0.91955, 1.62655, 3.42103$,
6. $33^\circ 20', 49^\circ 10', 21^\circ 57' 18'', 56^\circ 44' 25'', 75^\circ 57' 48''$. 7. 0.75 . 8. $1, \sqrt{3}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, 2 + \sqrt{3}$. 12. $22.9038, 1.0875, 0.6148, 0.29231$. 13. $56^\circ 40', 40^\circ 50', 68^\circ 2' 42'', 33^\circ 15' 35'', 14^\circ 2' 12''$. 14. $\frac{4}{3}$. 15. a) $\beta = 27^\circ 55' 30'', b = 0.21731\text{ cm}, c = 0.464\text{ cm}$, b) $\beta = 59^\circ 44', a = 294.12\text{ m}, c = 584.58\text{ m}, c) \alpha = 42^\circ 23' 43''$,

$$\beta = 47^\circ 36' 17'', c = 5527\text{ m}. 16. P = \frac{b^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} = 37.545\text{ m}^2. 17. \alpha = 27^\circ 21' 30'',$$

$$\beta = 76^\circ 19' 15'', b = 1.1291\text{ m}. 18. r = 32.09886\text{ cm}. 19. P = 675.55\text{ cm}^2. 20. d = 0.0084\text{ m}. 21. \alpha = 30^\circ 16', \beta = 59^\circ 44'. 22. \alpha = 30^\circ 58', \beta = 58^\circ 2'. 23. P = 8.1814\text{ cm}^2. 24. s = 21.1635\text{ dm}. 25. V = 38.47\text{ dm}^3. 26. c = 46.188\text{ km/godz}. 27. \alpha = 1^\circ 8' 45''. 28. a = 0.46\%_{100}. 29. w = 133.014\text{ m}. 30. d = 2.65408\text{ km}. 31. s = 4.32\%_0. 32. \alpha = 21^\circ 48'. 33. d = 2.91\text{ m}. 34. \alpha = 1^\circ 8' 45'. 35. Przeszło 114 razy. 36. d = 74\text{ km}. 37. d = 10309\text{ m}. 38. d = 7397\text{ m}. 39. c = 1.19175\text{ m}. 40. s = 0.50953. 41. \alpha = 48^\circ 58' 37''. 42. \alpha = 73^\circ 18'. 43. c = 2.30537\text{ cm}. 44. c = 1.18487\text{ m}. 45. \varphi = 19^\circ 2' 5''. 46. c_1 = 0.49604\text{ m}, c_2 = 3.32352\text{ m}. 47. a) s = 84.474\text{ m}, b) s = 12.527\text{ m}.$$

§ 10. Zestawienie określeń i zasadniczych własności funkcji trygonometrycznych.

$$(a) \begin{cases} \frac{a}{c} = \sin \alpha & \frac{c}{a} = \operatorname{cosec} \alpha \\ \frac{b}{c} = \cos \alpha & \frac{c}{b} = \sec \alpha \\ \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha & \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha \end{cases}$$

Funkcje te nazywamy wspólnym mianem: funkcje trygonometryczne (ponieważ służą do rozwiązywania trójkątów) lub funkcje goniometryczne (ponieważ zależą od wartości kąta; $\gamma_{\text{owa}} \alpha = \text{kąt}$).

Miedzy temi funkcjami zachodzi 5 następujących związków dla tego samego kąta:

$$(b) \begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \\ \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \end{cases}$$

Uwaga: Zachodzą także inne związki, ale są one już wynikiem tych pięciu; w przeciwnym razie mielibyśmy 6 równań niezależnych o 6 niewiadomych, wszystkie

więc funkcje dałyby się obliczyć jako liczby stałe, niezależne od kąta α , a przecież dla różnych wartości kąta α każda funkcja przybiera różne wartości.

$$\begin{aligned} \text{N. p. istnieje związek } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \sec^2 \alpha, \text{ bo } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \end{aligned}$$

Pierwszy z tych związków jest trygonometryczną formą twierdzenia Pitagorasa.

Znając wartości jednej funkcji, możemy zapomocą tych 5 związków obliczyć wartości wszystkich innych. Jest to wielkiem ułatwieniem przy sporządzaniu tablic.

N. p. obliczyć wartość wszystkich funkcji, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = m$, (α kąt ostry).

$$\text{Otóż przedewszystkiem: } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{m}$$

Wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ obliczamy z 2 równań o 2 niewiadomych:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= m \end{aligned} \right\} \text{Podstawiając z drugiego równania:}$$

$\sin \alpha = m \cos \alpha$, otrzymamy $m^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ a stąd:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \quad (\text{znak pierwiastka } +, \text{ bo cosinus kąta ostrego jest zawsze liczbą dodatnią}).$$

$$\text{Stąd } \sin \alpha = m \cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\text{a więc } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} \quad \sec \alpha = \sqrt{1+m^2}$$

Podobnie postępujemy, jeżeli podana jest wartość którejkolwiek innej funkcji.

Wszystkie takie związki mamy zestawione w następującej tabelce:

	$\sin \alpha = m$	$\cos \alpha = m$	$\operatorname{tg} \alpha = m$	$\operatorname{ctg} \alpha = m$
$\sin \alpha =$	m	$\sqrt{1-m^2}$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1-m^2}$	m	$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$
$\operatorname{tg} \alpha =$	$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$	$\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$	m	$\frac{1}{m}$
$\operatorname{ctg} \alpha =$	$\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$	$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$	$\frac{1}{m}$	m
$\sec \alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$	$\frac{1}{m}$	$\sqrt{1+m^2}$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$
$\operatorname{cosec} \alpha =$	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$	$\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}$	$\sqrt{1+m^2}$

Tabela ta odnosi się tylko do ostrych kątów α ; przy innych kątach mogą występować przy pierwiastkach znaki: $+$ lub $-$ (zob. § 20).

Oprócz związków między funkcjami tego samego kąta, wyprowadziliśmy także związki między funkcjami dwóch kątów dopełniających się:

$$(c) \left\{ \begin{aligned} \sin (90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos (90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \\ \sec (90^\circ - \alpha) &= \operatorname{cosec} \alpha \\ \operatorname{cosec} (90^\circ - \alpha) &= \sec \alpha \end{aligned} \right.$$

Krótko ujmujemy te wzory w jedno prawo:

Funkcja trygonometryczna jakiegokolwiek kąta równa się cofunkcji kąta dopełniającego i odwrotnie.

Wystarczy więc znać wartości funkcji i cofunkcji dla kątów od 0° do 45° : dalsze wartości są już ich powtórzeniami (z pomianianiem funkcji z cofunkcją). Na tem polega urządzenie tablic (patrz str. 22).

§ 11. Systematyczne rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Posiadając tablice wartości funkcji trygonometrycznych, możemy rozwiązać każdy trójkąt prostokątny, przyczem nie potrzeba nawet używać niewygodnego twierdzenia Pitagorasa, natomiast trzeba użyć dwóch z pomiędzy związków (a) i równania $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Równania (a) str. 37 i odpowiednie równania dla kąta β przedstawiamy zwykle tak, aby jeden bok był wyrażony wprost zapomocą drugiego i odpowiedniej funkcji.

I tak z określeń: $\frac{a}{b} = \sin \alpha$ i $\frac{a}{c} = \cos \beta$, wynika:

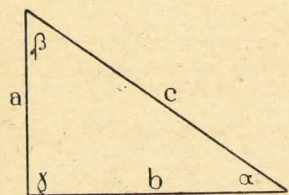


Fig. 21.

$$(d) \quad a = c \sin \alpha = c \cos \beta$$

i podobnie dla boku b . Słowami:

Przyprostokątnia równa się przeciwprostokątnej pomnożonej przez sinus kąta przeciwległego lub cosinus kąta przyległego tej przyprostokątnej.

Z równań tych wynika odwrotnie:

$$(e) \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta}$$

Przeciwprostokątnia równa się przyprostokątnej podzielonej przez sinus kąta przeciwległego lub cosinus kąta przyległego tej przyprostokątnej.

Wreszcie z równań $a:b = \operatorname{tg} \alpha$, $a:b = \operatorname{ctg} \beta$ wynika:

$$(f) \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

i podobnie dla boku b . Słowami:

Przyprostokątnia równa się drugiej przyprostokątnej pomnożonej przez tangens kąta przeciwległego lub cotangens kąta przyległego pierwszej przyprostokątnej.

Funkcyj secans i cosecans nie używa się zwyczajnie.

Wzory te i prawa należy dokładnie pamiętać; stanowią one podwalinę całej trygonometrii. Dla zapamiętania ich zwróćmy uwagę na to, że, jeżeli przyprostokątnia jest przeciwległa danemu kątowi, używa się funkcji, a jeżeli przyległa — cofunkcji.

Wszystkie te wzory nadają się do rachunku logarytmicznego. Dlatego tablice logarytmiczne zawierają zwykle obok wartości samych funkcji o wiele obszerniejszy zbiór logarytmów funkcji trygonometrycznych. Urządzenie tych tablic jest bardzo podobne do tablic samych wartości funkcji; na jedną tylko okoliczność należy zwrócić uwagę: dla jednostajności rachunku i oszczędzenia miejsca wszystkie te logarytmy są zwykle sprowadzone do wspólnej cechy: — 10, której nie wypisuje się w tablicach.

Jeżeli więc w tablicach odczytamy n. p. dla $\log \sin 19^\circ 26'$ wartość 9.52207, to należy dopisać cechę — 10, więc:

$$\log \sin 19^\circ 26' = 9.52207 - 10.$$

Bliższe objaśnienia użycia tablic i interpolacji znajdują się w książeczce logarytmicznej.

Zastosujmy te wzory do rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Elementami podanymi mogą być:

- 1) Przeciwprostokątnia i jeden kąt ostry
(c i α , lub c i β)
- 2) Przyprostokątnia i jeden kąt ostry
(a i α , a i β , b i α , b i β)
- 3) Przeciwprostokątnia i przyprostokątnia
(c i a lub c i b)
- 4) Obydwie przyprostokątne (a i b).

W każdym z tych przypadków staramy się elementy nieznane wyrazić wprost zapomocą elementów podanych.

A więc n. p. w pierwszym przypadku, jeżeli znamy c i α , to wyrażamy a i b zapomocą wzorów:

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha \\ b &= c \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

a kąt $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Moglibyśmy wprowadzić po obliczeniu boku a użyć do obliczenia boku b także wzoru: $b = a \operatorname{ctg} \alpha$, jednakowoż tak nie postępujemy, bo już liczba a jest obliczona niedokładnie, z błędem wynikającym z użycia tablic, a więc b byłoby obliczone jeszcze z mniejszą dokładnością. Taksamo, gdybyśmy przy obliczaniu a popełnili przypadkowo jakiś grubszy błąd, to błąd ten wciągnęlibyśmy niepotrzebnie w dalszy rachunek; chociażbyśmy potem b obliczali zupełnie poprawnie, wynik musiałby być błędny. Ostrożność taką staramy się zachować przy wszystkich ściślejszych obliczeniach trygonometrycznych, nie zawsze jednak jest to możliwe i nie zawsze dogodne. N. p. jeżeli dane są obydwie przyprostokątne: a i b , to obliczamy najpierw kąt α z wzoru $a:b = \operatorname{tg} \alpha$, a później, przy pomocy tego znalezionego α bok c z wzoru: $c = a : \sin \alpha$. (Odstępujemy więc od zasady: wyrażać szukane elementy wprost zapomocą podanych!) Moglibyśmy wprowadzić obliczyć bezpośrednio $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, jednakowoż przy wielocyfrowych a i b ten sposób byłby bardzo niedogodny, ponieważ nie można używać logarytmów (por. jednak uwagę na str. 27).

Po wykonaniu zadania można jeszcze sprawdzić rzetelność wyniku zapomocą pewnych prób, n. p. spróbować, czy $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład. Dane z trójkąta prostokątnego elementy $b = 327.54$ cm, $\alpha = 42^\circ 35' 20''$. Obliczyć pozostałe elementy c , a i β . Trzeba więc wyrazić a i c wprost zapomocą b i α . Otóż:

$$\begin{aligned} a &= b \operatorname{tg} \alpha \\ c &= \frac{b}{\cos \alpha} \\ \beta &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Najłatwiej obliczyć $\beta = 90^\circ - 42^\circ 35' 20''$ czyli $\beta = 47^\circ 24' 40''$. Do obliczenia pozostałych elementów potrzebne są wartości $\operatorname{tg} \alpha$ i $\cos \alpha$, które znajdujemy w tablicach (o odstępach $10''$), przez interpolację:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0.91633$$

$$\begin{array}{r} + 286 \quad 53.6.5' 20'' = 5.36.5.33 \dots = 285.7 \\ \hline = 0.91919 \end{array}$$

$$\cos \alpha = 0.73728 \quad 19.7.5.33 \dots = 105.0 \dots$$

$$\begin{array}{r} - 105 \\ \hline 0.73623 \end{array}$$

$$\text{Wobec tego } a = 327.54 \text{ cm} \cdot 0.91919 = \underline{301.07 \text{ cm}}$$

$$c = 327.54 \text{ cm} : 0.73623 = \underline{444.89 \text{ cm}}$$

Przy użyciu logarytmów unikniemy mozolnych mnożeń i dzielen. Rachunek przedstawi się wtedy w następujący sposób:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = \underline{47^\circ 24' 40''}$$

$$\log a = \log b + \log \operatorname{tg} \alpha$$

$$= 2.51525$$

$$\begin{array}{r} + 9.96340 - 10 \\ \hline = 12.47865 - 10 \end{array}$$

$$\log a = 2.47865$$

$$\begin{array}{r} 857 \dots \dots \dots 3010 \\ \hline 8 : 14 = 0.6 \end{array}$$

$$a = \underline{301.06 \text{ cm}}$$

$$\log c = \log b - \log \cos \alpha$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ = 2.51525 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 9.86701 + 10 \\ \hline = 2.64824 \end{array}$$

$$816 \dots \dots \dots 4448$$

$$8 : 10 = 0.8$$

$$c = \underline{444.88}$$

Rachunki pomocnicze.

$$\log b = 2.51521 \quad \frac{13.0.4}{4.2}$$

$$\begin{array}{r} + 4 \\ \hline = 2.51525 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.96332 - 10 \quad \frac{20.0.42}{8.4}$$

$$\begin{array}{r} + 8 \\ \hline = 9.96340 \end{array}$$

$$\log \cos \alpha = 9.86705 - 10 \quad \frac{0.19.20}{3.8}$$

$$\begin{array}{r} - 4 \\ \hline 9.86701 - 10 \end{array}$$

Próba: $c^2 - a^2 = b^2$ czyli $(c - a) \cdot (c + a)$ ma być równe b^2 .

$$\text{Otóż } 143.82 \cdot 745.94 = 10728 \quad \underline{1.0908}$$

$$b^2 = 10728 \quad \underline{2.4516}$$

} niezgodność występuje więc dopiero

w szóstej cyfrze znaczącej. Przy użyciu logarytmów pięciocyfrowych nie można żądać większej dokładności.

§ 12. Łukowa miara kąta. Wartości funkcji trygonometrycznych dla małych kątów.

Jeżeli w trójkącie prostokątnym jeden kąt ostry jest bardzo mały, czyli jeżeli jedna przyprostokątnia różni się bardzo mało od przeciwprostokątnej, rachunki można znacznie uprościć, nawet tablice funkcji stają się zbędne.

Ponieważ to uproszczenie opiera się na użyciu t. zw. łukowej miary kąta, przeto najpierw zajmiemy się nieco dokładniej tem pojęciem (por. także tom I. str. 160). Dotychczas używaliśmy jako jednostki do mierzenia kąta jednego stopnia, t. j. $\frac{1}{360}$ części kąta pełnego. Umowa ta była jednak zupełnie dowolna; możnaby równie dobrze przyjąć za jednostkę $\frac{1}{400}$ część kąta pełnego (t. j. $\frac{1}{100}$ część kąta prostego), jak to uczyniono we Francji, lub też jakąkolwiek inną część kąta pełnego. W matematyce wyższej i w mechanice używa się jednostki innej, nie podlegającej już żadnej dowolności.

Wiadomo z planimetrii, że przy stałym kącie środkowym α w kole stosunek łuku ℓ_α do promienia r jest liczbą stałą, niezależną od rozmiarów koła a zależną jedynie od wielkości kąta środkowego. Otóż wartość tego stosunku $\ell_\alpha : r$ może służyć do wyrażenia wielkości kąta i to jest właśnie łukowa miara kąta. Wartość tego stosunku $\ell_\alpha : r$ oznaczamy symbolem $\operatorname{arc} \alpha$ (czytaj arcus α , t. j. łuk kąta α). Gdybyśmy użyli koła o promieniu $r = 1$, to wprost $\ell_\alpha = \operatorname{arc} \alpha$.

Można więc także powiedzieć: *łukowa miara kąta jest to łuk należący do tego kąta (jako kąta środkowego w kole o promieniu równym jednostce).*

Wobec tego jednostką do mierzenia kąta będzie taki kąt, dla którego łuk (koła mającego środek w wierzchołku kąta) równa się promieniowi, bo tylko wtedy $\ell_\alpha : r = 1$; tę jednostkę nazywamy radjanem. Radjan możemy wyrazić w stopniach, używając znanej proporcji:

$$\ell_\alpha : 2 r \pi = \alpha : 360^\circ \quad \text{czyli}$$

$$\frac{\ell_\alpha}{r} : 2 \pi = \alpha : 360^\circ \quad \text{czyli}$$

$$(A) \quad \underline{\operatorname{arc} \alpha : 2 \pi = \alpha : 360^\circ}$$

Jeżeli $\operatorname{arc} \alpha = 1$, to z proporcji tej otrzymamy:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2 \pi} = 57^\circ 17' 44.8'' \dots$$

jako wielkość radjanu wyrażoną w stopniach.

W łukowej mierze wyrazi się kąt pełny liczbą 2π , którą otrzymamy z proporcji (A), kładąc $\alpha = 360^\circ$. Zatem $\text{arc } 360^\circ = 2\pi$. Podobnie $\text{arc } 180^\circ = \pi$, $\text{arc } 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Ogólnie:

$$\text{arc } \alpha = \frac{2\pi\alpha}{360^\circ} \text{ lub po uproszczeniu:}$$

$$\text{arc } \alpha = \frac{\pi\alpha}{180^\circ}$$

Wzór ten służy do zamiany miary stopniowej na łukową. Znając dostatecznie dokładnie liczbę

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\dots$$

otrzymamy z powyższego wzoru z łatwością:

$$\text{arc } 1^\circ = 0.01745\ 32925\dots$$

$$\text{arc } 1' = 0.0002908882\dots$$

$$\text{arc } 1'' = 0.0000048481\dots$$

Liczby te ułatwiają wyrażanie w mierze łukowej dowolnego kąta podanego w stopniach, minutach i sekundach.

Odwrotnie, chcąc zamienić miarę łukową na stopniową, obliczamy z proporcji (A) kąt α i otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{\text{arc } \alpha \cdot 180^\circ}{\pi} = \text{arc } \alpha \cdot 57^\circ\ 17'\ 44.8''\dots$$

Używając miary łukowej możemy z łatwością rozwiązywać trójkąty prostokątne o małym kącie ostrym bez używania tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Narysujmy trójkąt prostokątny o małym kącie α , biorąc przeciwprostokątną CA równą jednostce n. p. 1 *dm* (fig. 22). Wtedy $\sin \alpha$ jest

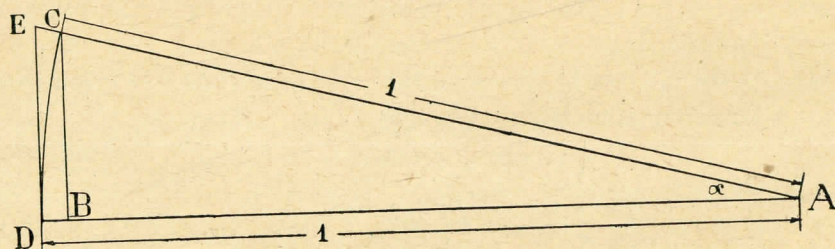


Fig. 22.

liczbą wymiarową boku CB , jako stosunek $CB : CA$. Widzimy jednak, że bok ten bardzo mało różni się od łuku CD , należącego do kąta środkowego α w kole o promieniu 1. (Zbadamy później, ile ta różnica może wynosić). Łuk zaś taki (ściślej: jego liczba wymiarowa przy użyciu pro-

mienia jako jednostki) jest łukową miarą kąta α ; oznaczamy go symbolem: $\text{arc } \alpha$. Więc dla małych kątów $\sin \alpha$ bardzo mało się różni od $\text{arc } \alpha$. Podobną własność ma i $\text{tg } \alpha$. Wykreślmy w punkcie D prostopadłą ED do promienia AD , to $\text{tg } \alpha = \frac{ED}{1}$, więc funkcja tangens jest liczbą wymiarową boku ED . Odcinek ED także bardzo mało się różni od łuku CD , tem mniej, im mniejszy kąt. Używając znaku $\mp$, jako znaku przybliżonej równości, możemy napisać:

$$\text{arc } \alpha \mp \sin \alpha \mp \text{tg } \alpha$$

Możemy więc dla małych kątów zastąpić funkcję sinus lub tangens samym kątem wyrażonym w mierze łukowej.

Do jakich granic ta zgodność wartości sięga, zobaczymy n. p. z tablicy, podającej te 3 wielkości do 4 miejsc dziesiętnych w odstępach $10'$:

α	$\text{arc } \alpha$	$\sin \alpha$	$\text{tg } \alpha$
$0^\circ 0'$	0.0000	0.0000	0.0000
$0^\circ 10'$	0.0029	0.0029	0.0029
$0^\circ 20'$	0.0058	0.0058	0.0058
$0^\circ 30'$	0.0087	0.0087	0.0087
$0^\circ 40'$	0.0116	0.0116	0.0116
$0^\circ 50'$	0.0145	0.0145	0.0145
$1^\circ 0'$	0.0175	0.0175	0.0175
$1^\circ 10'$	0.0204	0.0204	0.0204
$1^\circ 20'$	0.0233	0.0233	0.0233
$1^\circ 30'$	0.0262	0.0262	0.0262
$1^\circ 40'$	0.0291	0.0291	0.0291
$1^\circ 50'$	0.0320	0.0320	0.0320
2°	0.0349	0.0349	0.0349
$2^\circ 10'$	0.0378	0.0378	0.0378
$2^\circ 20'$	0.0407	0.0407	0.0407
$2^\circ 30'$	0.0436	0.0436	0.0437
$2^\circ 40'$	0.0465	0.0465	0.0466
$2^\circ 50'$	0.0495	0.0494	0.0495
3°	0.0524	0.0523	0.0524

Funkcje $\sin \alpha$ i $\text{tg } \alpha$ dla kątów nie większych od 1° różnią się od $\text{arc } \alpha$ dopiero od szóstego miejsca po kropce, dla kątów nie większych od $1'$ dopiero w 12 miejscu dziesiętnym, a dla $\alpha \leq 1''$ jeszcze mniej. Jak to później wykażemy. Otóż z dokładnością do ostatniego miejsca dziesiętnego mamy:

$$\sin 1^\circ = 0.01745 = \text{tg } 1^\circ$$

$$\sin 1' = 0.0002908882 = \text{tg } 1'$$

$$\sin 1'' = 0.0000048481 = \text{tg } 1''$$

Sinus i tangens innych kątów mniejszych od 2° obliczamy mnożąc te liczby przez liczbę sekund i minut, ponieważ tak się oblicza $\text{arc } \alpha$.

Przykłady.

$$1) \quad \sin 12' 30'' \mp \text{arc } 12' 30'' = 12.5 \text{ arc } 1' \\ = 12.5 \cdot 0.000290882 = 0.0036361 \dots$$

2) Jak daleko widać pas czarny 10 cm szeroki na jasnym tle, jeżeli najmniejszy możliwy kąt widzenia wynosi w tych warunkach $20''$?

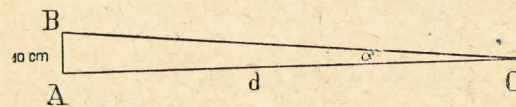


Fig. 23.

Prowadząc od oka promienie widzenia OA i OB , otrzymujemy trójkąt prostokątny. Przyprostokątnia: $10 \text{ cm} = d \cdot \text{tg } \alpha$, ale $\text{tg } \alpha \mp \text{arc } \alpha = \text{arc } 20''$.

Ponieważ $\text{arc } 1'' = 0.0000048481$, to $\text{arc } 20'' = 0.000096976$

Więc $d = 10 \text{ cm} : 0.000096976 \dots = 1031.18 \text{ m}$

3) Spadek drogi wynosi $2\frac{1}{2}\%$. Pod jakim kątem wznosi się ta droga? Z figury 24 widzimy, że

$$\text{tg } \alpha = \frac{2\frac{1}{2}}{100} = 0.025$$

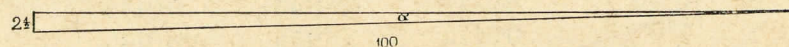


Fig. 24.

Taką samą wartość ma w przybliżeniu $\text{arc } \alpha$.

Więc $\text{arc } \alpha = 0.025$ jednostek miary łukowej. Aby ją zamienić na miarę stopniową, obliczamy α z proporcji (A). str. 43, i otrzymamy:

$$\alpha = 1^\circ 26'$$

4) Trójkąt rysunkowy o kącie prostym zrobiono niedokładnie. Przykładając go do linealu prostego i kreśląc wzdłuż niego linie prostopadłe do linealu w dwóch położeniach zaznaczonych na figurze, widzimy, że

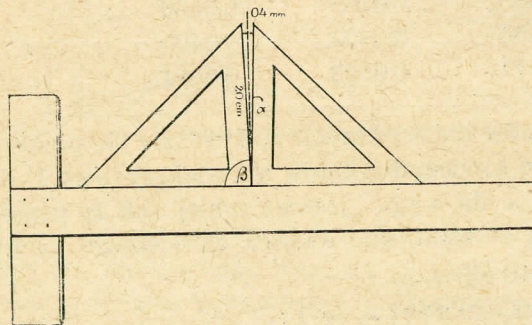


Fig. 25.

w odstępach 20 cm te linie są oddalone o 0.4 mm. O ile różni się kąt β od kąta prostego?

$$\sin \alpha = \frac{0.2}{200} = 0.001 \mp \text{arc } \alpha$$

Z proporcji (A) otrzymamy:

$$\alpha = 3' 26''$$

Taką jest niedokładność kąta prostego.

§ 13. Zadania sprowadzające się do rozwiązania trójkąta prostokątnego.

A) Trójkąt równoramienny.

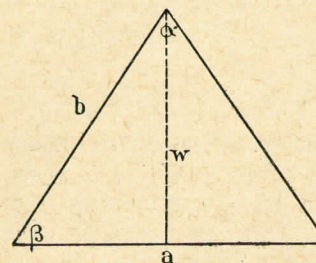


Fig. 26.

Wysokość dzieli trójkąt równoramienny na dwa trójkąty prostokątne o bokach b ,

w , $\frac{a}{2}$ i kątach β i $\frac{\alpha}{2}$.

Znając odpowiednio dobrane dwa z tych elementów (nie mogą być nimi dwa kąty) rozwiążemy z łatwością trójkąt prostokątny a więc i cały trójkąt równoramienny.

N. p. 1) Znając a i β obliczymy:

$$\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \beta, \quad b = \frac{a}{2} : \cos \beta, \quad w = \frac{a}{2} \text{tg } \beta$$

2) Znając b i α , obliczamy:

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{a}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2}, \quad w = b \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (\text{Por. Ćwicz. II. Nr. 13 i 14}).$$

W podobny sposób rozwiązujemy: deltoid, romb, trapez, prostokąt, równoległobok.

B) Koło.

Jeżeli końce jakiejkolwiek cięciwy połączymy z środkiem koła, otrzymamy również trójkąt równoramienny, który rozwiązujemy w sposób podany poprzednio.

Jeżeli znamy promień koła i kąt środkowy, to z trójkąta możemy obliczyć cięciwę i jej odległość od środka:

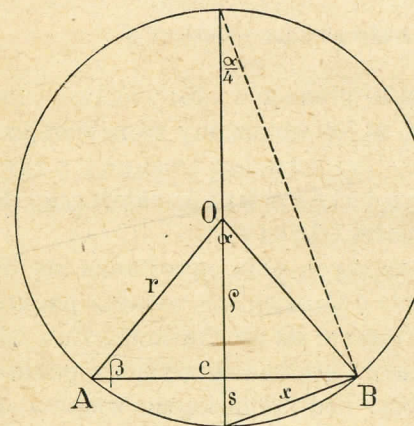


Fig. 27.

$$\frac{c}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2} \text{ więc}$$

$$c = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\rho = r \cos \frac{\alpha}{2}$$

Cięciwa ma więc bliski związek z funkcją sinus. Jeszcze wyraźniej wystąpi ten związek, jeżeli promień koła $r = 1$. Wtedy: $\frac{c}{2} = \sin \frac{\alpha}{2}$.

Więc połowa cięciwy (t. j. jej liczby wymiarowej), w kole o promieniu $= 1$,

równa się wstawie połowy kąta środkowego lub wstawie całego kąta obwodowego, należącego do tej cięciwy. Tablica, podająca wartości cięciw, należących do każdego kąta, zastąpiłaby więc w zupełności tablicę wstaw. N. p. wiedząc, że dla kąta $\alpha = 38^\circ$ cięciwa (w kole o promieniu 1) wynosi 0.65114, wiemy zarazem, że $\sin 19^\circ = 0.32557$.

Najdawniejsze tablice trygonometryczne zawierały właśnie nie *sinusy*, tylko cięciwy. Obliczyli je jeszcze w starożytności Hipparch i Menelaos, do nas jednak doszły dopiero tablice Ptolomeusza (II. wiek po nar. Chr.), twórcy systematycznej trygonometrii. W dziele znanem pod tytułem »Almagest«, które obok astronomji (system Ptolomeusza!) zawierało także trygonometrię, znajdują się wartości cięciw dla wszystkich kątów w odstępach $30'$ z dokładnością do 5 miejsc dziesiętnych. Są to więc zarazem tablice wstaw w odstępach $15'$. Dopiero Hindusi w IV. i V. w. po nar. Chr. wprowadzili połowę cięciwy t. j. sinus do rachunków; od nich pochodzi także nazwa. W języku Hindusów cięciwa znaczy dżiwa; Arabowie przekreśliли słowo cięciwa: dżiba na dżaib t. j. zatoka, po łacinie sinus).

W zastosowaniach technicznych często potrzebny jest odcinek promienia prostopadłego do cięciwy, zawarty między cięciwą a obwodem koła; odcinek ten nazywa się »strzałką« s , łuku AB .

Otóż:

$$s = r - \rho = r (1 - \cos \frac{\alpha}{2})$$

Strzałkę można obliczyć także z proporcji (fig. 27) $s : x = x : 2r$. Ponieważ $x = 2r \sin \frac{\alpha}{4}$, przeto

$$s = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$$

Uwaga. Stąd wynika związek:

$$1 - \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}, \text{ zachodzący dla każdego kąta wklęsłego } \alpha.$$

Przy obliczaniu łuku znamy zwykle promień i albo cięciwę, albo kąt środkowy. Jeżeli znamy kąt środkowy, to łuk obliczamy ze znanej proporcji, jeżeli zaś znamy cięciwę, obliczamy najpierw kąt środkowy z równania (1). Taksamo obliczenie powierzchni odcinka koła, należącego do danego kąta środkowego, wymaga znajomości cięciwy.

Także wiele innych zagadnień, dotyczących koła, sprowadza się do rozwiązania trójkąta prostokątnego. N. p. koło o promieniu r widać z punktu P pod kątem 2α ; obliczyć odległość tego punktu od środka koła! Lub odwrotnie: koło, którego odległość od punktu P jest znana, widać z punktu P pod kątem 2α ; obliczyć promień tego koła! Pod jakim kątem widać koło o promieniu r z odległości d ?

C) Wieloboki umiarowe.

Łącząc końce jednego boku wieloboku umiarowego z jego środkiem, otrzymamy trójkąt równoramienny. Znając liczbę boków: n , znamy zarazem kąt $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Możemy wyrazić b , ρ , lub r zapomocą kąta i innych danych elementów. I tak odczytujemy z fig. 28:

$$\frac{b}{2} = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \rho \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$r = \frac{\rho}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \rho = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = r \cos \frac{\alpha}{2}$$

Na podstawie tych wzorów można wyrazić pole wielokąta umiarowego zapomocą kąta α i jednego z odcinków b , r , ρ . N. p. jako funkcja boku b :

$$P = nb \cdot \frac{\rho}{2} = nb \cdot \frac{b}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{nb^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

jako funkcja promienia r :

$$P = n \cdot 2r \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = nr^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

jako funkcja promienia ρ :

$$P = n \cdot 2\rho \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\rho}{2} = n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Uwaga. Problem podziału koła na dowolną liczbę równych części (por. Planimetria § 72) można rozwiązać trygonometrycznie z dowolnem przybliżeniem. Trzeba znaleźć bok wielokąta umiarowego o odpowiedniej liczbie boków, znając promień koła.

Obliczamy $b = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ i biorąc taki odcinek w rozwartość cyrkla, odcinamy go na kole. Jednakże zarówno potrzebny tu kąt α , jak i $\sin \frac{\alpha}{2}$ nie da się w ogólności otrzymać przy pomocy cyrkla i linji, bez użycia kątomierza. W znaczeniu platońskim konstrukcja ta jest więc nie zawsze możliwa. (Por. Planimetria str. 93 i str. 156).

D) Zastosowania stereometryczne.

Do rozwiązywania trójkątów prostokątnych sprowadza się wiele zagadnień stereometrycznych zwłaszcza, gdy elementami podanymi lub szukanymi są kąty.

Rzuty. Przykład: Znamy kąty trójkąta ostrokątnego α , β , γ i na-

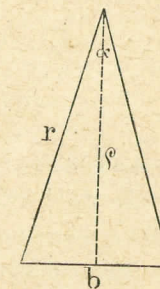


Fig. 28.

chylenie δ płaszczyzny trójkąta do płaszczyzny rzutów (fig. 29); jeden bok AB leży w płaszczyźnie rzutów. Obliczyć kąty α', β', γ' w trójkącie rzuconym.

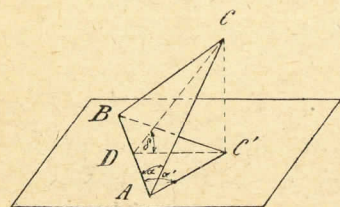


Fig. 29.

Aby obliczyć rzut kąta α , wyrażamy odciinek AD raz z trójkąta ACD , a drugi raz z $AC'D$:

$$AD = CD \operatorname{ctg} \alpha$$

$$AD = C'D \operatorname{ctg} \alpha' = CD \cos \delta \cdot \operatorname{ctg} \alpha'.$$

Z porównania tych dwu wartości otrzymujemy po uproszczeniu przez CD :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \delta \cdot \operatorname{ctg} \alpha' \quad \text{czyli}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \delta$$

Podobnie oblicza się β' a następnie $\gamma' = 180^\circ - (\alpha' + \beta')$. Łatwo też wykazać, że rzut P' pola trójkąta P wynosi $P \cdot \cos \delta$.

Graniastosłupy. Chcąc obliczyć kąt utworzony przez dwie przekątne sześciannu lub prostopadłościanu, bierzemy pod uwagę trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest połowa przekątnej a przyprostokątną połowa krawędzi, wychodzącej z tego samego naroża (narysuj!)

Aby obliczyć objętość prostopadłościanu, w którym znamy n. p. jedną krawędź a i kąty α, β zawarte między tą krawędzią a przekątnymi dwóch ścian, przecinających się wzdłuż tej krawędzi, bierzemy pod uwagę dwa trójkąty prostokątne, których przeciwprostokątnymi są owe przekątne i obliczamy z nich pozostałe krawędzie b i c (narysuj!)

W równoległościanach prostych ale nieprostokątnych często elementem podanym jest kąt α utworzony przez dwie krawędzie podstawy a i b ; wtedy oblicza się wysokość podstawy z odpowiedniego trójkąta prostokątnego.

W graniastosłupach pochyłych i w walcach pochyłych można obliczyć wysokość znając krawędź boczną i jej nachylenie do podstawy.

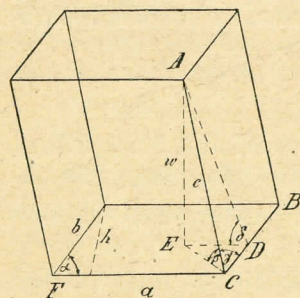


Fig. 30.

Przykład.

W równoległościanie pochyłym znamy trzy krawędzie $a = 8 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$, kąt $\alpha = 56^\circ$ zawarty między krawędziami podstawy a i b (fig. 30) i kąt $\beta = 73^\circ$ nachylenia krawędzi bocznej c do podstawy. Obliczyć objętość.

Z figury widzimy, że $h = b \sin \alpha$, $w = c \sin \beta$ a więc:

$$V = a \cdot h \cdot w = abc \sin \alpha \sin \beta$$

$$V = 8 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \sin 56^\circ \cdot \sin 73^\circ = 228.338 \text{ cm}^3.$$

Gdybyśmy znali jeszcze kąt γ utworzony przez krawędzie b i c , moglibyśmy obliczyć kąt dwuścienny δ , leżący przy krawędzi DC . W tym celu prowadzi się $AD \perp BC$ i łączy się E z D .

Z trójkąta AED otrzymujemy:

$$\sin \delta = \frac{AE}{AD} = \frac{c \sin \beta}{c \sin \gamma} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

N. p. jeżeli $\gamma = 82^\circ$, to $\sin \delta = \sin 73^\circ$; $\sin 82^\circ$ a stąd przy użyciu tablic $\delta = 74^\circ 57' 16''$.

Kreśląc z punktu A prostą prostopadłą do FC moglibyśmy podobnie obliczyć kąt dwuścienny przy krawędzi FC i kąt płaski zawarty między krawędziami AC i FC ; należałoby zacząć rachunek od obliczenia $\sphericalangle ECD$ z trójkąta prostokątnego ECD , a potem użyć kąta $\sphericalangle ECF = 180^\circ - \alpha - \sphericalangle ECD$.

Ostrosłupy. W ostrosłupach występują kąty utworzone przez sąsiednie krawędzie boczne, kąty nachylenia krawędzi bocznych do podstawy, kąty (dwuścienne) nachylenia ścian bocznych do podstawy i ścian bocznych do siebie, kąty podstawy i t.p. O ile który z tych kątów jest elementem podanym lub szukany, używamy rozważań trygonometrycznych.

Przykłady.

1. W ostrosłupie umiarowym czworobocznym znamy krawędź podstawy a i kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy α (fig. 31). Obliczyć powierzchnię i objętość.

Ze stereometrycznych rozważań wiadomo, że

$$P = a^2 + 4a \cdot \frac{h}{2}; \quad V = a^2 \cdot \frac{w}{3}.$$

Z figury odczytujemy:

$$h = \frac{a}{2} : \cos \alpha; \quad w = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

więc

$$P = a^2 + 4a \cdot \frac{a}{4 \cos \alpha} = a^2 \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$V = a^2 \cdot \frac{a}{6} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3}{6} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Uwaga. Kąty β i γ oblicza się z łatwością z trójkątów ABC i AOC , w których $CB = \frac{a}{2}$, $OC = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$.

2. W umiarowym ostrosłupie pięciobocznym (fig. 32) znamy kąt α utworzony przez dwie sąsiednie krawędzie boczne, np. $\alpha = 40^\circ$. Obliczyć kąt dwuścienny β ściany bocznej z podstawą i kąt dwuścienny γ utworzony przez dwie sąsiednie ściany boczne.

Z trójkąta SOD otrzymujemy

$$\cos \beta = OD : SD.$$

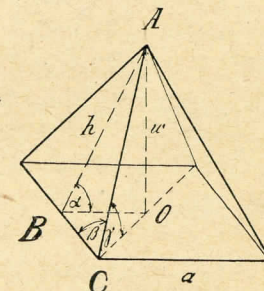


Fig. 31.

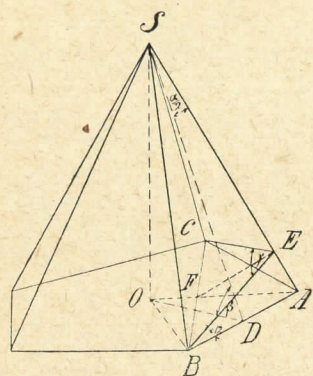


Fig. 32.

Wyrażamy OD i SD zapomocą tegosamego odcinka np. AD , to

$$OD = AD \cdot \text{ctg} \angle AOD = AD \cdot \text{ctg} 36^\circ$$

$$SD = AD \cdot \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Zatem

$$\cos \beta = \frac{\text{ctg} 36^\circ}{\text{ctg} \frac{\alpha}{2}} = \text{ctg} 36^\circ \cdot \text{tg} \frac{\alpha}{2}$$

W naszym przykładzie $\alpha = 40^\circ$, więc $\cos \beta = \text{ctg} 36^\circ \cdot \text{tg} 20^\circ$, a stąd przy pomocy tablic otrzymamy

$$\beta = 60^\circ 32' 9''$$

U w a g a. Gdybyśmy znali jeszcze n. p. krawędź boczną, moglibyśmy obliczyć SD , następnie SO a stąd powierzchnię i objętość bryły.

Celem obliczenia kąta dwuściennego leżącego przy krawędzi SA poprowadźmy przez prostą CB płaszczyznę BCE prostopadłą do krawędzi SA , to $\angle BEC = \gamma$ jest miarą żadanego kąta dwuściennego.

Z trójkąta prostokątnego EFB otrzymujemy:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = FB : EB.$$

Ale

$$FB = AB \cdot \sin \angle BAO = AB \cdot \sin (90^\circ - 36^\circ) = AB \cdot \cos 36^\circ$$

$$EB = AB \cdot \cos \angle EBA = AB \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ albowiem kąty } \angle EBA \text{ i}$$

$\angle ASD$ są równe jako kąty o ramionach zgodnie prostopadłych.

Zatem

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos 36^\circ}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

W naszym przykładzie $\alpha = 40^\circ$ więc $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos 36^\circ}{\cos 20^\circ}$ a stąd

$$\frac{\gamma}{2} = 59^\circ 25' 17'' \text{ czyli } \gamma = 118^\circ 50' 34''.$$

U w a g a. Przy pomocy powyższego wzoru na $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{360^\circ}{2n}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ (gdzie n ozna-

cza liczbę boków podstawy ostrosłupa) można obliczać kąty dwuścienne wielościanów umiarowych (por. ćw. 56–59).

W stożku występuje często jako element podany kąt nachylenia boku do podstawy lub kąt osi z bokiem. Podobne rozważania stosujemy do stożków i ostrosłupów ściętych.

Stożki i ostrosłupy wpisane i opisane na kuli o znanym promieniu oblicza się również łatwo, znając kąt nachylenia boku do podstawy.

W kuli przy obliczeniach długości równoleżników, powierzchni czaszy, pasa, objętości wycinka, odcinka i t. p. trzeba również najczęściej rozwiązać trójkąt prostokątny OBA (fig. 33); jeżeli między elementami podanymi jest kąt φ , (szerokość geograficzna), proste wzory trygonometryczne prowadzą do celu.

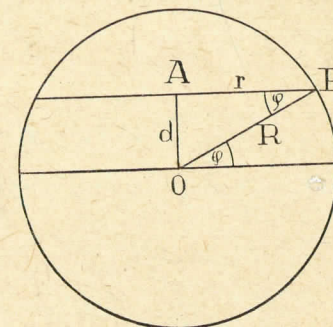


Fig. 33.

E) Rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych przy pomocy prostokątnych.

Jak wiadomo z planimetrii, trójkąt ukośnokątny jest wyznaczony albo 1) zapomocą 2 boków i kąta między nimi zawartego, albo 2) zapomocą boku i 2 kątów, albo 3) zapomocą dwóch boków i kąta leżącego naprzeciw większego z nich, albo 4) zapomocą trzech boków.

W każdym z tych przypadków potrafimy rozwiązać trójkąt, używając pomocniczych trójkątów prostokątnych. Prowadzimy zawsze wysokość tak, aby jeden z powstałych trójkątów prostokątnych zawierał dwa

znane elementy. Da się to łatwo zrobić w przypadku 1) 2) i 3) bez względu na to, czy trójkąt jest ostrokątny, czy też rozwartokątny. W przypadku 4) trzeba by jeszcze zastosować z planimetrii twierdzenie Carnota (por. Planim. str. 153).

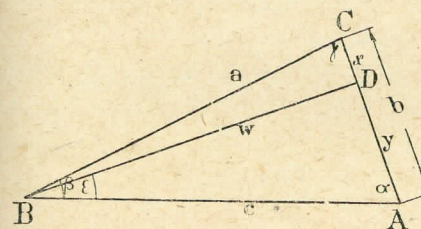


Fig. 34.

Omówmy n.p. przypadek pierwszy z y. W trójkącie ABC (fig. 34) znamy a , b i γ . Prowadzimy wysokość, należącą do boku b . W trójkącie prostokątnym BDC znamy dwa elementy a i γ , potrafimy go więc rozwiązać:

$$w = a \sin \gamma$$

$$x = a \cos \gamma$$

Wobec tego: $y = b - a \cos \gamma$. Teraz przechodząc do drugiego trójkąta prostokątnego BAD , znamy w nim dwie przyprostokątne w i y , obliczamy więc:

$$\text{tg } \alpha = \frac{w}{y} = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma} \text{ a stąd } \alpha \text{ (wzór nieprzydatny do rachunku logarytmicznego).}$$

Ćwiczenia IV.

§ 10–11. 1. Wiedząc, że $\sin \alpha = s$, obliczyć pozostałe funkcje.

2. Wiedząc, że $\cos \alpha = c$, obliczyć pozostałe funkcje.

3. Wykazać, że:

a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$.

b) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

4. W trójkącie prostokątnym boki a , b , c wynoszą:

a) 15, 8, 17, b) 20, 21, 29;

c) 1·2, 3·5 3·7; d) 0·36, 0·319, 0·481:

Obliczyć wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta α i kąty α i β .

5. Obliczyć funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym, w którym znamy:

a) a i w_c (wysokość należąca do przeciwprostokątnej);

b) odcinki p i q utworzone przez w_c na przeciwprostokątnej (p leży przy α , q przy β);

c) pole trójkąta i przeciwprostokątnej.

6. Kąt ostry u podstawy trójkąta prostokątnego podzielono na 3 równe części. Jaki jest stosunek odcinków drugiej przyprostokątnej? Czy mogą być równe?

7. Obliczyć kąty trójkąta prostokątnego, w którym prostopadła z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną dzieli ją według podziału złotego.

8. Rozwiązać bez użycia logarytmów trójkąty prostokątne:

Dane:		Szukane:		
a) $a = 25$,	$\alpha = 10^\circ$	$(\beta = 80^\circ,$	$b = 141\cdot8,$	$c = 144)$
b) $b = 800$,	$\alpha = 81^\circ$	$(\beta = 9^\circ,$	$a = 5048,$	$c = 5115)$
c) $a = 100$,	$\beta = 64^\circ$	$(\alpha = 26^\circ,$	$b = 205,$	$c = 228\cdot3)$
d) $b = 5\cdot44$,	$\beta = 51^\circ$	$(\alpha = 39^\circ,$	$a = 4\cdot406,$	$c = 7)$
e) $c = 1\cdot1$,	$\alpha = 44^\circ$	$(\beta = 46^\circ,$	$a = 0\cdot7645,$	$b = 0\cdot7909)$
f) $c = 400$,	$\beta = 24^\circ$	$(\alpha = 66^\circ,$	$a = 365\cdot6,$	$b = 162\cdot8)$
g) $a = 109$,	$b = 205$	$(\alpha = 28^\circ,$	$\beta = 62^\circ,$	$c = 232\cdot4)$
h) $c = 307$,	$a = 105$	$(\alpha = 20^\circ,$	$\beta = 70^\circ,$	$b = 288\cdot58)$
i) $c = 67$,	$b = 49$	$(\alpha = 43^\circ,$	$\beta = 47^\circ,$	$a = 45\cdot695)$
j) $c = 7\cdot98$,	$\alpha = 39\cdot4^\circ$	$(\beta = 50\cdot6^\circ,$	$a = 5\cdot064,$	$b = 6\cdot165)$
k) $c = 0\cdot857$,	$\beta = 57\cdot3^\circ$	$(\alpha = 32\cdot7^\circ,$	$a = 0\cdot4632,$	$b = 0\cdot7213)$
l) $a = 135$,	$\alpha = 41\cdot2^\circ$	$(\beta = 48\cdot8^\circ,$	$c = 204\cdot9,$	$b = 154\cdot2)$
m) $b = 8\cdot49$,	$\alpha = 24\cdot8^\circ$	$(\beta = 65\cdot2^\circ,$	$c = 9\cdot35,$	$a = 3\cdot922)$
n) $a = 71$,	$c = 73$	$(\alpha = 65\cdot5^\circ,$	$\beta = 24\cdot5^\circ,$	$b = 32\cdot29)$
o) $a = 17\cdot4$,	$b = 47\cdot4$	$(\alpha = 20\cdot2^\circ,$	$\beta = 69\cdot8^\circ,$	$c = 50\cdot43)$

9. Rozwiązać przy użyciu logarytmów trójkąty prostokątne:

Dane:		Szukane:		
a) $c = 3367\cdot237$,	$\alpha = 42^\circ 19' 8\cdot5''$	$(a = 2267\cdot02,$	$b = 2489\cdot76,$	$\beta = 47^\circ 40' 51\cdot5'')$
b) $c = 78\cdot3133$,	$\beta = 72^\circ 30' 44\cdot9''$	$(a = 23\cdot533,$	$b = 74\cdot6939,$	$\alpha = 17^\circ 29' 15\cdot1'')$
c) $a = 145\cdot597$,	$\alpha = 49^\circ 28' 10''$	$(b = 124\cdot486,$	$c = 191\cdot56,$	$\beta = 40^\circ 31' 50'')$
d) $a = 0\cdot915766$,	$\beta = 34^\circ 12' 13\cdot1''$	$(b = 0\cdot62244,$	$c = 1\cdot107275,$	$\alpha = 55^\circ 47' 46\cdot9'')$
e) $b = 2\cdot7664$,	$\alpha = 81^\circ 13' 22''$	$(a = 17\cdot91696,$	$c = 18\cdot12927,$	$\beta = 8^\circ 46' 38'')$
f) $b = 108267$,	$\beta = 35^\circ 23' 30\cdot9''$	$(a = 152392,$	$c = 186936,$	$\alpha = 54^\circ 36' 29\cdot1'')$
g) $a = 0\cdot0769$,	$b = 0\cdot0895$	$(c = 0\cdot118,$	$\alpha = 40^\circ 40' 11\cdot1''$,	$\beta = 49^\circ 19' 48\cdot9'')$
h) $a = 40021\cdot2$,	$c = 40067$,	$(b = 1915\cdot213,$	$\alpha = 87^\circ 15' 36\cdot7''$,	$\beta = 2^\circ 44' 23\cdot3'')$
i) $b = 2\cdot26635$,	$c = 5\cdot89251$	$(a = 5\cdot43924,$	$\alpha = 67^\circ 22' 48\cdot5''$,	$\beta = 22^\circ 37' 11\cdot5'')$

§ 12. 10. Rozwiązać następujące trójkąty prostokątne o małych kątach bez użycia tablic, obierając dowolne dwa elementy jako dane:

a lub c	b	β
57·3	1	1°
2438	1	1'
206265	1	1''
4000	1	51·57''
100	2·02	1°9'5'
30000	27	3'5·6''
171·9	5	1°40'
2738·5	10·154	12'44·7''

§ 13. 11. Rozwiązać trójkąt równoramienny znając:

a) $a = 36\cdot4$ cm,	$b = 5\cdot87$ cm
b) $a = 1$ m,	$\beta = 58^\circ$
c) $a = 0\cdot612$ mm,	$\alpha = 84^\circ 20'$
d) $b = 4\cdot35$ cm,	$\alpha = 42^\circ 38' 10''$
e) $b = 0\cdot02$ m,	$\beta = 5^\circ$
f) $b = 15$ m,	$w = 1$ km
g) $a = 306$ m,	$w = 301$ m
h) $w = 15\cdot34$ cm,	$\alpha = 71^\circ 34' 28''$
i) $w = 0\cdot032865$ km	$\beta = 0^\circ 53' 26\cdot5''$

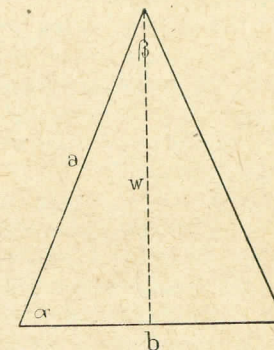


Fig. 37.

12. Kąt 33° u wierzchołka trójkąta równoramiennego o podstawie $b = 12$ cm podzielono na 5 równych części. Obliczyć część środkową i części skrajne podstawy.

13. W trójkąt równoramienny o podstawie $b = 4$ cm i kącie przy podstawie $\alpha = 68^\circ 40'$ wpisano koło; obliczyć pole koła i stosunek pola trójkąta do pola koła.

14. Na kole o promieniu $r = 2$ cm opisano trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie $\alpha = 52^\circ$; obliczyć podstawę trójkąta i cięciwę stycznej równoległą do podstawy.

15. W koło wpisano trójkąt równoramienny o boku $a = 5$ cm i kącie przy podstawie $\alpha = 70^\circ$; obliczyć promień koła.

16. W koło o promieniu $R = 3$ cm wpisano trójkąt równoramienny, mający u wierzchołka kąt $\beta = 37^\circ 40'$. Obliczyć podstawę i pole tego trójkąta.

Koło.

17. Obliczyć cięciwę, należącą do kąta a) $\alpha = 61^\circ$, b) $\alpha = 115^\circ 44'$,

c) $\alpha = 176^\circ 45' 28''$ w kole o promieniu 100 m.

18. Cięciwa 1 m należy do kąta środkowego: a) $\alpha = 54^\circ$; b) $\alpha = 123^\circ 20'$; c) $\alpha = 166^\circ 36' 20''$; obliczyć promień koła.

19. W kole o promieniu 12 cm pewna cięciwa ma długość 10 cm. Jaki łuk odcina ta cięciwa?

20. Rozpiętość (cięciwa) łuku w moście wynosi 40 m, a wysokość 8 m. Obliczyć długość tego łuku i powierzchnię wewnętrznego sklepienia mostu, jeżeli szerokość mostu wynosi 5 m.

21. W kole o promieniu $r = 18$ cm wspiera się na pewnej cięciwie kąt obwodowy 48° ; obliczyć długość tej cięciwy (zbudować na tej cięciwie kąt obwodowy 48° , którego jedno ramię jest średnicą!)

22. Dwa koła o promieniach $a = 2\cdot4$ cm i $b = 1\cdot4$ cm stykają się zewnętrznie; obliczyć kąt utworzony przez wspólne styczne zewnętrzne.

23. Dwa koła o średnicach 80 cm i 30 cm, których środki są oddalone o 504 m, połączono pasem transmisyjnym. Obliczyć długość pasa.

24. Obliczyć strzałkę łuku, należącego do kąta 40° w kole o promieniu 50 m.

25. Aby zmierzyć krzywiznę toru kolejowego, zmierzono odległość 2 punktów toru $d = 30$ m i strzałkę tego łuku $s = 0.5$ m. Obliczyć promień krzywizny trygonometrycznie, za pośrednictwem kąta środkowego.

26. Obliczyć pole odcinka koła o promieniu 634 dm, należącego do kąta środkowego $\alpha = 51^\circ 34'$.

27. Znając pole P odcinka koła i promień koła r , wyprowadzić równanie na obliczenie kąta środkowego, wyrażonego w mierze łukowej.

U w a g a: Otrzymane równanie nie da się rozwiązać elementarnymi sposobami, chyba tylko w przybliżeniu. Jest to równanie przestępne.

Wielokąty umiarowe.

28. Obliczyć bok wielokąta umiarowego, jeżeli liczba boków $n = 48$, a promień koła opisanego $r = 5.8$ cm.

29. Wykonać trygonometrycznie podział koła o promieniu 5 cm: a) na 7 równych części; b) na 13 równych części.

30. Pole 18-boku umiarowego wynosi 336 cm^2 ; obliczyć a) jego bok; b) promień koła wpisanego.

31. Obliczyć pole 25-boku umiarowego o boku $b = 1$ dm.

32. 9-bok umiarowy i 10-bok umiarowy mają równe obwody. W jakim stosunku są ich pola? Które jest większe?

33. Jakie pole ma 14-bok umiarowy, opisany na kole o promieniu 18 cm?

34. Obliczyć stosunek pola wielokąta umiarowego o n bokach wpisanego w koło do pola wiel. um. o tej samej liczbie boków opisanego na tem samym kole. Jakież stąd liczby ograniczające wynikną dla liczby π ? (Wskazówka: porównaj te pola z polem koła).

35. Obliczyć pole pasa, zawartego między obwodem 23-boku wpisanego w koło o promieniu 1 m, a opisanego na tem kole.

Inne zagadnienia planimetryczne.

36. Znając przekątnię d prostokąta i kąt α , jaki ona tworzy z boki, obliczyć pole w liczbach ogólnych.

37. W prostokącie znamy przekątnie: d i kąt φ między nimi zawarty. Obliczyć boki i pole.

38. Przekątne rombu wynoszą $d_1 = 36$ cm, $d_2 = 20$ cm; obliczyć kąty i boki.

39. W równoległoboku znamy dwa boki a , b i kąt α między nimi zawarty. Obliczyć pole.

40. W trapezie równoramiennym znamy dwa boki równoległe $a = 806$ m, $b = 574$ m i kąt przy podstawie $\alpha = 63^\circ 45'$; obliczyć pole i boki nierównoległe.

41. Na kole o promieniu $r = 2.4$ cm opisano trapez równoramienny, w którym kąt przy podstawie $\alpha = 50^\circ$. Obliczyć boki i pole trapezu.

42. W koło o promieniu $R = 3.8$ cm wpisano trapez równoramienny, w którym wysokość $w = 2$ cm a kąt przy podstawie $\alpha = 40^\circ$; obliczyć boki i pole trapezu. (Weź pod uwagę trójkąt równoramienny, którego podstawą jest bok nierównoległy, a wierzchołkiem środek koła).

43. Boki deltoidu wynoszą: $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, a przekątnia 6 cm. Obliczyć kąty!

44. W trapezie znamy podstawę $a = 4.54$ cm, dwa kąty przy niej leżące: $\alpha = 46^\circ 20'$, $\beta = 76^\circ 30'$ i jeden bok nierównoległy np. przy kącie α , bok $b = 3.8$ cm. Obliczyć pozostałe boki i pole. (Odciać trójkąt zapomocą prostej równoległej do boku b).

45. Obierz dowolnie dwa sąsiednie boki i 3 kąty trapezoidu i staraj się go rozwiązać, rozkładając na odpowiednie trójkąty prostokątne i trapezy.

Zagadnienia stereometryczne.

46. Trójkąt, którego jeden bok leży na płaszczyźnie rzutów, a dwa inne są nachylone do niej pod kątami $\alpha' = 47^\circ$, $\beta' = 32^\circ$ jest nachylony do płaszczyzny rzutów pod kątem $\delta = 50^\circ$. Obliczyć kąty tego trójkąta!

47. W prostopadłościanie znamy boki podstawy $a = 8$ cm, $b = 6$ cm i kąt utworzony przez przekątnię podstawy i przekątnię całej bryły $\alpha = 64^\circ$; obliczyć objętość.

48. Pod jakim kątem należy poprowadzić w prostopadłościanie o krawędziach $a = 4.6$ cm, $c = 5.8$ cm przekrój, zawierający bok b , aby bryła odcięta była $\frac{1}{2}$ częścią całej bryły?

49. W równoległościanie prostym o podstawie rombowej poprowadzono przekrój, równoległy do dłuższej przekątnej rombu z tego naroża podstawy, przy którym leży kąt rozwarty rombu. Pod jakim kątem (względem podstawy) wykreślono ten przekrój, jeżeli on jest kwadratem? Znamy kąt ostry rombu $\alpha = 36^\circ$.

50. Graniastosłup pochyły ma za podstawę trójkąt równoboczny o boku 2 dm, a krawędź boczna $b = 6$ m jest nachylona do podstawy pod kątem $\varphi = 69^\circ 32'$. Obliczyć jego objętość!

* 51. Oś walca pochylego o boku $s = 21$ cm jest nachylona do podstawy pod kątem $72^\circ 14'$; promień podstawy wynosi $r = 6$ cm. Obliczyć objętość!

52. Ostrosłup umiarowy 9-boczny ma krawędź podstawy $k = 5.3$ cm, a krawędź boczną $b = 16.4$ cm. Obliczyć jego powierzchnię i objętość!

53. W ostrosłupie umiarowym 8-bocznym nachylenie krawędzi bocznej do podstawy wynosi 54° , a krawędź podstawy 1 dm. Obliczyć jego objętość!

54. W ostrosłupie 15-bocznym umiarowym o wysokości 2 m wysokość tworzy z wysokością boczną kąt $8^\circ 35'$. Obliczyć powierzchnię i objętość tej bryły!

55. W ostrosłupie umiarowym 12-bocznym, którego objętość $V = 38 \text{ cm}^3$, ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątami $\beta = 75^\circ$; obliczyć krawędź podstawy i powierzchnię.

56. Obliczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami czworoszczanu umiarowego.

57. Znamy krawędź podstawy b i wysokość h naczynia w postaci prostopadłościanu. Wlano wody do wysokości w . O jaki kąt najwyżej można to naczynie obrócić około drugiej krawędzi podstawy, aby się woda nie wylała?

58. Obliczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami dwudziestościanu umiarowego.

59. Obliczyć kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami dwunastościanu umiarowego.

60. Ostrosłup ścięty o podstawach kwadratowych ma krawędź podstawy $k = 8.2$ cm, a krawędź boczna $b = 10$ cm jest nachylona do podstawy pod kątem 80° . Obliczyć jego objętość!

61. Celem zmierzenia objętości kopca w postaci stożka zmierzono obwód jego podstawy $U = 425$ m i nachylenie boku do podstawy $\alpha = 38^\circ$. Obliczyć objętość!

62. Kąt u wierzchołka przecięcia osiowego stożka wynosi 35° , a promień podstawy $r = 3$ dm. Obliczyć powierzchnię i objętość!

63. Obliczyć P i V bryły, jaką zakreśla trójkąt prostokątny, obracający się do koła przeciwprostokątnej. Przeciwprostokątnia $c = 23$ m, a kąt $\alpha = 46^\circ$.

64. W stożku ściętym znamy obwody obu den: $U_1 = 28$ cm, $U_2 = 18$ cm i nachylenie boku do podstawy $\alpha = 51^\circ$. Obliczyć objętość i powierzchnię!

65. W kulę o znanej objętości V wpisano stożek prosty o znanym kącie u wierzchołka α . Obliczyć objętość tego stożka!

66. Na kuli o promieniu $r = 2$ cm opisano ostrosłup umiarowy 5-boczny, w któ-

rym znany kąt utworzony przez dwie sąsiednie krawędzie boczne $\alpha = 46^\circ$. Obliczyć objętość ostrosłupa.

67. W kulę o promieniu $R = 4 \text{ cm}$ wpisano ostrosłup umiarowy 8-boczny, w którym krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem $\delta = 54^\circ$. Obliczyć jego objętość!

68. Znajac promień kuli $R = 36 \text{ cm}$ i kąt u wierzchołka wycinka tej kuli (w przekroju osiowym) $2\varphi = 45^\circ 34'$, obliczyć objętość wycinka i odcinka.

69. Dwa miejsca A i B kuli ziemskiej mają wspólną szerokość geograficzną $\varphi = 50^\circ$, a długości geograficzne $\lambda_1 = 5^\circ$, $\lambda_2 = 40^\circ$. Obliczyć ich odległość $\widehat{AB}$ mierzona na równoleżniku. Następnie obliczyć cięciwę AB i łuk $\widehat{AB}$ koła wielkiego, przechodzącego przez te punkty. Porównać łuki $\widehat{AB}$ i $\widehat{AB'}$ ($R = 6377.4 \text{ km}$).

70. a) Strefa zimna północna zaczyna się w szerokości geograficznej $\varphi = 66^\circ 32' 32''$; promień ziemi wynosi 6370 km . Obliczyć powierzchnię strefy zimnej!

b) Obliczyć powierzchnię strefy umiarkowanej (zaczyna się w szerokości $\varphi = 23^\circ 27' 28''$ a kończy się w $\varphi = 66^\circ 32' 32''$).

Trójkąt ukośnokątny.

71. Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając bok a i dwa kąty przyległe, np. a) $a = 930.5 \text{ cm}$; $\beta = 42^\circ 53'$; $\gamma = 70^\circ 9'$; b) $a = 63.7 \text{ cm}$; $\beta = 125^\circ 30'$; $\gamma = 28^\circ 20'$.

72. Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:

a) $a = 402 \text{ cm}$; $b = 642 \text{ cm}$; $\gamma = 52^\circ 8'$;

b) $a = 8 \text{ m}$; $b = 5.7 \text{ m}$; $\gamma = 130^\circ 18'$.

Obliczyć pole!

73. Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:

$a = 12 \text{ m}$; $b = 9 \text{ m}$; $\alpha = 64^\circ 34'$.

74. Obliczyć kąty trójkąta, którego boki wynoszą:

$a = 18 \text{ cm}$; $b = 10 \text{ cm}$; $c = 15 \text{ cm}$.

Zagadnienia z trygonometrii praktycznej.

U w a g a: W zadaniach 75–82 nie uwzględniać kulistości ziemi.

75. Na szczycie góry znajduje się pal pionowy o znanej długości 8 m ; z pewnego punktu u stóp góry widzimy dolny koniec pala pod kątem wzniesienia $30^\circ 20'$ a górny pod kątem $32^\circ 10'$. Jaka jest wysokość (względna) góry?

76. Z pewnego punktu widać szczyt góry pod kątem α . Zbliżywszy się w kierunku poziomym wprost ku szczytowi o odległość: a widzimy go pod innym kątem β . Obliczyć wysokość względną tej góry. Wykonaj taki pomiar w polu!

77. Celem zmierzenia szerokości rzeki posuwamy się wzdłuż brzegu o odcinek $AB = 48 \text{ m}$; pewien punkt C przeciwnego brzegu widzimy z A w kierunku prostopadłym do AB , a z B pod kątem $ABC = 36^\circ 20'$. Jaka jest szerokość rzeki?

78. Z wieży o znanej wysokości $a = 30 \text{ m}$ widzimy okręt pod kątem depresji $3^\circ 10'$ (kąt poziomu z prostą, łączącą okręt z obserwatorem). Jak daleko jest okręt od podnóża wieży?

79. Podstawa wieży i domu leżą w tym samym poziomie. Wierzchołek wieży o wysokości 42 m widzimy z okna wzniesionego o 12 m nad poziom pod kątem wzniesienia $12^\circ 30'$. Jak daleko jesteśmy od wieży?

80. Z dwóch okien latarni morskiej, leżących pod sobą w odstepie 6 m , widzimy okręt pod kątami: $\alpha = 76^\circ$ i $\beta = 76^\circ 30'$. Jak daleko jest okręt od podnóża wieży?

81. Balon wzleciał pionowo do góry. Obserwator, znajdujący się w odległości 4 km od miejsca wylotu, widzi balon kolejno pod kątami 18° , 20° , 26° . Jak wysoko był balon w tych chwilach obserwacji?

82. Jeden obserwator A spostrzega meteor M w kierunku ściśle południowym pod kątem wzniesienia $\alpha = 54^\circ$, drugi B oddalony od pierwszego o $a = 80 \text{ km}$ na zachód, spostrzega równocześnie ten meteor w płaszczyźnie leżącej pod kątem $\beta = 56^\circ$ na wschód od południka. Jaka jest wysokość meteoru w tej chwili? (por. fig. 38).

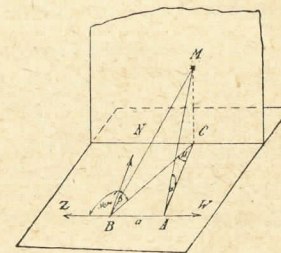


Fig. 38.

Kąt widzenia.

83. Jaki jest kąt widzenia przedmiotu o rozmiarze 72 m z punktu leżącego na osi symetrii tego przedmiotu w odległości 570 m ?

84. Pod jakim kątem widać sygnał, którego długość jest 3000 razy mniejsza od odległości sygnału od obserwatora? (rachunek małymi kątami!)

85. Jak wielka jest średnica ciała niebieskiego, którego kąt widzenia jest $31^\circ 59' 4''$ z odległości $20,665.840 \text{ mil}$. (słońce), (rachunek małymi kątami).

86. Promień ziemi widać by było ze środka słońca pod kątem $8' 8''$. Jaka jest odległość słońca od ziemi? (Promień ziemi $R = 6377 \text{ km}$. Kąt ten $8' 8''$ nazywamy paralaksą słońca).

87. Odległość środka słońca od środka ziemi wynosi 24063.33 promieni ziemskich ($R = 6377 \text{ km}$). Ze środka ziemi widzielibyśmy słońce pod kątem $32^\circ 0' 88''$; pod jakim kątem widzimy je z powierzchni ziemi (kąt ten nazywamy pozorną średnicą słońca)?

88. Planeta Wenus, krążąc dookoła słońca, oddala się od niego dla obserwatora, znajdującego się na ziemi najdalej o kąt $47^\circ 30'$. Znajac odległość słońca S od ziemi $Z: d = 24063.33 \cdot 6377 \text{ km}$, obliczyć odległość słońca od Wener (WS) i odległość ziemi od Wener w chwili, gdy ta planeta jest najbliższą ziemi. (Drogi planet uważamy za koła!)

Rozwiązania ćwiczeń:

- Porównaj wyniki zad. 25 w Ćwiczeniach I. 2. Porównaj wartości z tabelki w § 10. 4. a) $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\cos \alpha = \frac{8}{17}$, $\tg \alpha = \frac{15}{8}$, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{17}{15}$, $\sec \alpha = \frac{17}{8}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{15}$, $\alpha = 61^\circ 55' 38''$, $\beta = 28^\circ 4' 22''$. 4. b) $\sin \alpha = \frac{20}{29}$, $\cos \alpha = \frac{21}{29}$, $\tg \alpha = \frac{20}{21}$, $\alpha = 43^\circ 36' 9''$, $\beta = 46^\circ 23' 51''$. 4. c) $\alpha = 18^\circ 55' 26''$, $\beta = 71^\circ 4' 34''$. 4. d) $\alpha = 48^\circ 27' 38''$, $\beta = 41^\circ 32' 22''$. 5. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - w_c^2}}{a}$, $\cos \alpha = \frac{w_c}{a}$, $\tg \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - w_c^2}}{w_c}$. 5. b) $\sin \alpha = \sqrt{\frac{p}{p+q}}$, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{q}{p+q}}$, $\tg \alpha = \sqrt{\frac{p}{q}}$. 5. c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{c^2 + 4p} + \sqrt{c^2 - 4p}}{2c}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{c^2 + 4p} - \sqrt{c^2 - 4p}}{2c}$, $\tg \alpha = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 16p^2}}{4p}$. 6. $x = b \tg \frac{\alpha}{3}$, $y = b \left(\tg \frac{2\alpha}{3} - \tg \frac{\alpha}{3} \right)$, $z = b \left(\tg \alpha - \tg \frac{2\alpha}{3} \right)$; górny odcinek jest największy, dolny najmniejszy.

7. $\alpha = 51^\circ 49' 33''$. 11. a) $\alpha = 85^\circ 22' 31''$, $\beta = 9^\circ 14' 58''$. 11. b) $\alpha = 61^\circ$, $b = 0.96962$ m. 11. c) $\beta = 11^\circ 20'$, $b = 0.12086$ mm. 11. d) $\alpha = 47^\circ 21' 50''$, $\beta = 85^\circ 12' 20''$, $a = 2.96$ cm. 11. e) $\alpha = 87^\circ 30'$, $a = 0.23$ m. 11. f) $\alpha = 89^\circ 33'$, $\beta = 54'$, $a = 999.47$ m. 11. g) $b = 110.18$ m, $\alpha = 81^\circ 42'$, $\beta = 16^\circ 36'$. 11. h) $\beta = 36^\circ 51' 4''$, $a = 16.169$ cm, $b = 10.221$ cm. 11. i) $\alpha = 89^\circ 33' 16.75''$, $a = 0.032866$ km. 12. $x = 2.33586$ cm (środkowa część), $y = 2.46399$ cm (skrajna część). 13. $P = 5.862$ cm², $s = 1.747$. 14. $b = 8.2012$ cm. $c = 3.15204$ cm. 15. $R = 2.66$ cm. 16. $b = 3.66642$ cm, $P = 9.8528$ cm². 17. a) $c = 101.508$ m. 17. b) $c = 169.362$ m. 17. c) $c = 199.92$ m. 18. a) $r = 1.1013$ m. 18. b) $r = 0.568$ m. 18. c) $r = 0.50343$ m. 19. $t = 10.31$ cm. 20. $t = 44.14$ m, $P = 220.7$ m². 21. $c = 26.75304$ cm. 22. $\alpha = 30^\circ 30' 54''$. 23. $l_1 = 11.82$ m, jeżeli pas biegnie wprost, $l_2 = 11.87$, jeżeli się pas krzyżuje. 24. $s = 3.0155$ m. 25. $r = 225.25$ m. 26. $P = 2.345$ dm². 27. $\text{arc } \alpha - \sin \alpha = \frac{2P}{r^2}$. 28. $b = 0.75864$ cm. 29. a) $b_7 = 4.3388$ cm. 29. b) $b_{13} = 2.3932$ cm. 30. $b_{18} = 3.629$ cm, $r_w = 10.289$ cm. 31. $P = 49.478$ dm². 32. $P_{10} : P_9 = 1.00816$, $P_{10} > P_9$. 33. $P = 14 r_w^2 \cdot \text{tg } \frac{180^\circ}{14} = 1035.342$ cm². 34. $\cos^2 \frac{180^\circ}{n}$. 35. $D = 0.05753$ m². 36. $P = d^2 \sin \alpha \cos \alpha$. 37. $a = d \sin \frac{\varphi}{2}$, $b = d \cos \frac{\varphi}{2}$, $P = \frac{d^2}{2} \sin \varphi$ (por. Ćwicz. II. Zad. 14). 38. $\alpha = 121^\circ 52' 30''$, $\beta = 180^\circ - \alpha$, $a = 20.59$ cm. 39. $P = \text{absin } \alpha$. 40. $c = 262.27$ m, $P = 162307$ m². 41. $a = 10.294$ cm, $b = 2.238$ cm, $c = 6.266$ cm, $P = 30.079$ cm². 42. $a = 6.8405$ cm, $b = 2.0736$ cm, $c = 3.1114$ cm, $P = 8.9141$ cm². 43. $\beta = 44^\circ 2' 50''$, $\alpha = 28^\circ 57' 20''$. 44. $c = 2.8267$ cm, $d = 1.2564$ cm, $P = 7.9663$ cm². 46. $\alpha = 75^\circ 57' 20''$, $\beta = 43^\circ 46' 14''$, $\gamma = 60^\circ 16' 26''$. 47. $V = 984.144$ cm³. 48. $\alpha = 28^\circ 45' 50''$. 49. $x = 71^\circ 2'$. 50. $V = 97.1891$ dm³. 51. $V = 2261.7$ cm². 52. $P = 559.43$ cm², $V = 835.43$ cm³. 53. $V = 1.5278$ dm³. 54. $P = 2.2374$ m², $V = 0.19371$ m³. 55. $a = 1.135$ cm, $P = 29.355$ cm². 56. $\cos \gamma = \frac{1}{3}$, $\gamma = 70^\circ 31' 42''$. 57. $\text{tg } \alpha = 2 (h - w) : b$. 58. $\gamma = 138^\circ 11' 36''$. 59. $\gamma = 116^\circ 33' 44''$. 60. $V = 483.66$ cm³. 61. $V = 253205$ m³. 62. $P = 122.3$ dm², $V = 89.673$ dm³. 63. $P = 1201.6$ m², $V = 3181.6$ m³. 64. $P = 146.8$ cm², $V = 84.04$ cm³. 65. $V_s = \frac{V_k}{4} \sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha) = \frac{V_k}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2})^2$ (por. uwagę w § 13. B.). 66. $V = 81.358$ cm³. 67. $V = 71.447$ cm³. 68. $V_w = 29306$ cm³, $V_o = 22550$ cm³. 69. $\widehat{AB} = 2504.2$ km, $AB = 2465.4$ km, $\widehat{AB} = 2481$ km, $\widehat{AB} < \widehat{AB}$. 70. a) $Z = 21,070.500$ km². 70. b) $U = 132,393.900$ km². 71. a) $\alpha = 66^\circ 58'$, $b = 688.07$ cm, $c = 343.34$ cm. 71. b) $\alpha = 26^\circ 10'$,

- $b = 117.6$ cm, $c = 68.557$ cm. 72. a) $\alpha = 38^\circ 45' 46''$, $\beta = 89^\circ 6' 14''$, $c = 507$ cm, $P = 101871$ cm². 72. b) $\alpha = 29^\circ 18'$, $\beta = 20^\circ 24'$, $c = 12.468$ m, $P = 17.389$ m². 73. $\beta = 42^\circ 38'$, $\gamma = 72^\circ 48'$, $c = 12.693$ m. 74. $\alpha = 89^\circ 44' 32''$, $\beta = 33^\circ 45'$, $\gamma = 56^\circ 30' 28''$. 75. $w = 106.9$ m. 76. $x = \frac{a \text{ tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}$. 77. $AC = 35.3$ m. 78. $d = 542.25$ m. 79. $d = 135.32$ m. 80. $d = 648.7$ m. 81. 1.3 km, 1.456 km, 1.951 km. 82. $w = 74.27$ km. 83. $\alpha = 7^\circ 8'$. 84. $\alpha = 1^\circ 8' 8''$. 85. $2R = 96.150$ mil. 86. $d = 149,480.000$ km. 87. $\beta = 32^\circ 0' 96''$. 88. $a = 6321.93.6377$ km.

Rozdział II.

Rozszerzenie pojęcia funkcji trygonometrycznych i badanie ich własności (gonjometria).

§ 14. Funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 360° .

Zarówno w miernictwie praktycznym i w astronomji, jak i w geometrii naukowej, używa się często układu współrzędnych prostokątnych. Położenie każdego punktu wyznacza się zapomocą jego odległości od dwu stale obranych osi prostopadłych, przyczem te odległości odróżniamy znakami, jak wiadomo z graficznych przedstawień funkcji (por. § 4).

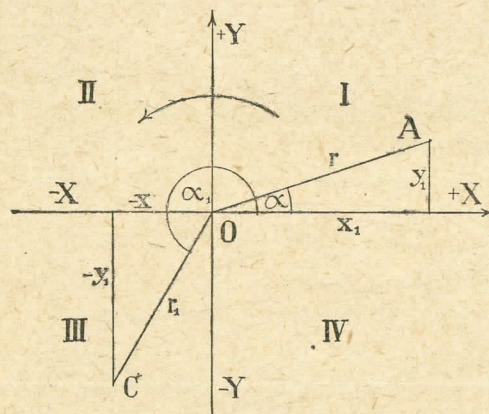


Fig. 39.

Odległości od osi x -ów, zwane rzędnymi, są dodatnie nad nią, a ujemne pod nią; odległości od osi y -ów, zwane odciętymi, są dodatnie na prawo, a ujemne na lewo od osi y . Liczby te nazywamy współrzędnymi prostokątnymi punktu i notujemy to: $A(x_1, y_1)$. Położenie takiego punktu można jednak równie dobrze wyznaczyć zapomocą jego odległości r od początku układu O (bez uwzględnienia znaku) zwanej promieniem wodzącym i zapomocą kąta, jaki ten promień tworzy osią x -ów. Kąt ten liczymy od

dodatniego kierunku osi x -ów w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki zegaru od 0° do 360° . Ćwiartki płaszczyzny, jakie przebiegamy kolejno przy tym obrocie, numerujemy: I. II. III. IV. N.p. dla wyznaczenia punktu A trzeba i wystarczy podać r i α . Liczby te nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu A .

Z figury łatwo odczytujemy, że

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Słowami: **Sinus kąta jest to stosunek rzędnej do promienia wodzącego. Cosinus kąta jest to stosunek odciętej do promienia wodzącego. Tangens kąta jest to stosunek rzędnej do odciętej.**

Takie określenie funkcji trygonometrycznych nie nawiązuje już do trójkąta prostokątnego. Możemy więc mówić o funkcjach kątów nawet rozwartych i wklęsłych. Widzieliśmy zaś przedtem, że takie rozszerzenie jest pożądane przy rozważaniu trójkątów ukośnokątnych. Otóż: *rozszerzamy definicję funkcji trygonometrycznych i nazywamy wstawą (sinus) jakiegokolwiek kąta, już niekoniecznie ostrego, stosunek rzędnej dowolnego punktu, leżącego na ramieniu (ruchomem) tego kąta do odpowiedniego promienia, przyczem rzędną bierzemy z odpowiednim znakiem, a promień zawsze dodatni: jedno ramię nieruchome obieramy przytem na dodatniej części osi odciętych.*

Dostawą (cosinus) nazywamy stosunek odciętej do promienia, a styczną (tangens) stosunek rzędnej do odciętej.

Funkcje secans, cosecans i cotangens określamy jako odwrotności funkcji cosinus, sinus i tangens.

Przy tem nowem określeniu funkcje mogą więc mieć także wartości ujemne.

Okażemy, że między temi nowymi funkcjami dla tego samego kąta zachodzą te same związki zasadnicze, któreśmy wyprowadzili dla kątów ostrych (związki (b) na str. 37).

I tak twierdzenie Pitagorasa:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{daje zawsze}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

bez względu na to, czy x i y mają znaki $+$ czy też $-$.

Funkcja $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$, więc podobnie jak dla kątów ostrych:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2)$$

Wreszcie z określenia funkcji $\sec$, cosec , i ctg wynika:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (4)$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (5)$$

U w a g a. Z wzoru 1) obliczaliśmy $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ jednoznacznie, obecnie zaś należy uwzględnić obydwa znaki pierwiastka, ponieważ $\sin \alpha$ może mieć zarówno wartość dodatnią (dla kątów wypukłych) jak i ujemną (dla kątów wklęsłych).

Zastanówmy się nad przebiegiem każdej funkcji co do znaku i co do wartości bezwzględnej.

a) Z n a k i. Funkcja *sinus*, jako rzędna (w stosunku do promienia), jest liczbą dodatnią w ćwiartce I. i II. (fig. 40) (t. j. dla kątów od 0° do 180°), a ujemną w ćwiartce III. i IV. (t. j. od 180° do 360°).

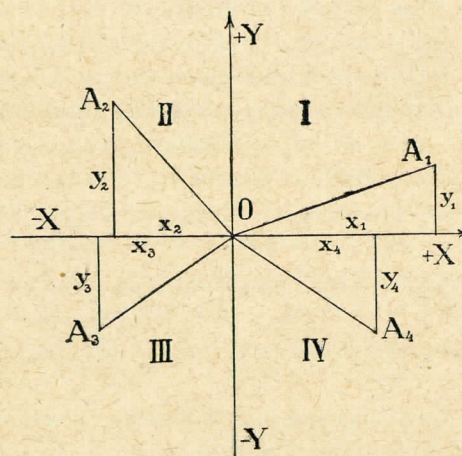


Fig. 40.

Funkcja *cosinus*, jako odcięta (w stosunku do promienia), jest dodatnią w ćwiartce I. i IV. a ujemną w ćwiartkach II. i III.

Funkcja *tangens* jest dodatnia w ćwiartce I. (stosunek dodatniej rzędnej do dodatniej odciętej) i w ćwiartce III. (stosunek ujemnej rzędnej do ujemnej odciętej), ujemna zaś w ćwiartkach II. i IV. jako stosunek dwóch liczb o różnych znakach.

Odwrócenia tych funkcji mają takiesame znaki, jak i same funkcje. Dla łatwiejszego zapamiętania zestawiamy znaki w tabelce:

	$\sin \alpha$ (i $\operatorname{cosec} \alpha$)	$\cos \alpha$ (i $\sec \alpha$)	$\operatorname{tg} \alpha$ (i $\operatorname{ctg} \alpha$)
I.	+	+	+
II.	+	-	-
III.	-	-	+
IV.	-	+	-

b) Aby zbadać przebieg wartości funkcji, obierzmy promień wodzący równy jednostce (n. p. 1 dm). Końce wszystkich promieni wodzących, wychodzących z punktu O, (fig. 41) leżą wtedy na obwodzie koła o promieniu równym jednostce. Wtedy:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{1} = AB = y$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{OB}{1} = OB = x$$

Podobnie dla punktów $A_1, A_2, A_3, \dots$, a więc:

W kole o promieniu równym jednostce liczba wymiarowa rzędnej dowolnego punktu przedstawia sinus odpowiedniego kąta, a odciętej cosinus.

Możnaby też powiedzieć: w kole o promieniu równym jednostce *sinus* kąta jest rzutem odpowiedniego promienia na oś *y*-ów, a *cosinus* na oś *x*-ów.

Jeżeli kąt α wzrasta od 0° począwszy, to sinus (rzędna) wzrasta od wartości 0 do +1, (= OE), którą to wartość osiąga dla $\alpha = 90^\circ$; następnie maleje, a przy $\alpha = 180^\circ$ osiąga znowu wartość zero. Poza 180° sinus maleje dalej, jest bowiem w trzeciej ćwiartce liczbą ujemną; najmniejszą wartość: -1 (= OF) osiąga sinus dla $\alpha = 270^\circ$, a stąd znowu wzrasta do wartości 0, którą osiąga dla $\alpha = 360^\circ$.

Rozważywszy podobnie przebieg funkcji *cosinus* (odciętej), otrzymamy następującą tabelkę:

	0°	I.	90°	II.	180°	III.	270°	IV.	360°
sinus	0	+	+1	+	0	-	-1	-	0
cosinus	+1	+	0	-	-1	-	0	+	1

Co można powiedzieć o przebiegu funkcji $\operatorname{tg} \alpha$ na podstawie tej tabelki?

Jeżelibyśmy rozważali kąty ponad 360° (n. p. kilka całkowitych obrotów promienia OA), to z figury 41. widzimy, że powtórzy się po raz drugi i trzeci i t. d. cały zasób wartości funkcji sinus i cosinus, tak, że:

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha$$

lub ogólniej po wykonaniu obrotów w liczbie l :

$$(6) \begin{cases} \sin(\alpha + 360^\circ \cdot l) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ \cdot l) = \cos \alpha \end{cases}$$

Własność tę nazywamy *perjodycznością* funkcji. Otóż:

Funkcje sinus i cosinus są funkcjami perjodycznymi; perjodem ich jest 360° lub w mierze łukowej 2π , to znaczy: wartości tych funkcji nie zmieniają się, gdy kąt wzrośnie o 360° (czyli 2π).

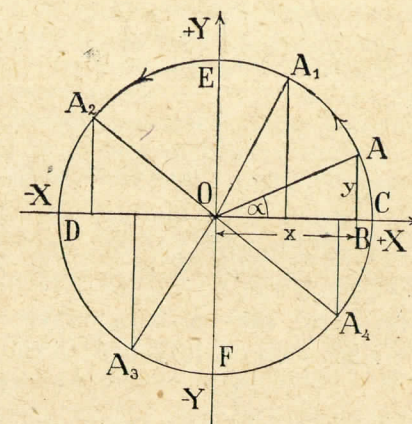


Fig. 41.

U w a g a. Własności takiej nie spotkaliśmy dotychczas przy żadnej funkcji: ani funkcja całkowita wymierna, ani ułamkowa, ani pierwiastek, ani funkcja logarytmiczna nie miały tej własności, aby z wzrostem zmiennej niezależnej powtarzał się cały zasób wartości funkcji w tym samym porządku. Wskutek periodyczności funkcje trygonometryczne znajdują obszernie zastosowanie w badaniu licznych zjawisk przyrody, odbywających się periodycznie (n. p. drgania sprężyste, jak głosowe, świetlne, ruchy wahadłowe, prądy elektryczne przemienne i t. p.).

Obok kątów dodatnich (obróć przeciwny ruchowi wskazówek zeg.) używa się często także kątów ujemnych (obróć zgodny z ruchem wskaz. zeg., na fig. 42. kąt $\angle BOA'$). Funkcjami trygonometrycznymi ($\sin$ i $\cos$) takiego kąta nazywamy także stosunki rzędnej i odciętej dowolnego punktu, leżącego na ruchomym ramieniu tego kąta, do promienia.

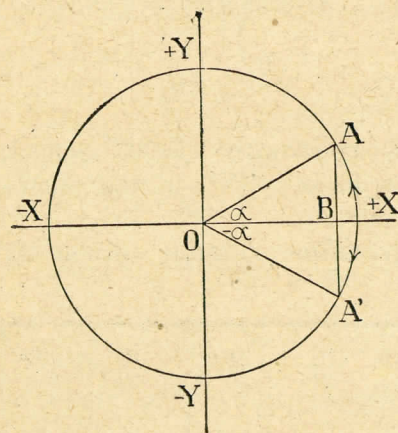


Fig. 42.

Ponieważ promień wraca do pierwotnego położenia, jeżeli wykonamy jeden pełny obrót dodatni, to i współrzędne dowolnego punktu na tym promieniu nie doznają zmiany, a więc:

$$(7) \begin{cases} \sin(-\alpha) = \sin(-\alpha + 360^\circ) \\ \cos(-\alpha) = \cos(-\alpha + 360^\circ) \end{cases}$$

Widzimy stąd, że periodyczność utrzymuje się także dla funkcji kątów ujemnych. Na tej podstawie możemy zawsze funkcję kąta ujemnego zamienić na funkcję kąta dodatniego. N. p. mając obliczyć $\sin(-52^\circ)$, piszemy na podstawie wzorów (7):

$$\sin(-52^\circ) = \sin(-52^\circ + 360^\circ) = \sin 308^\circ$$

$$\text{Podobnie: } \cos(-571^\circ) = \cos(-571^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 149^\circ$$

Prostszy związek między funkcjami kąta ujemnego a dodatniego otrzymamy z rozważania symetrii (fig. 42). Punkt A koła o promieniu 1, leżący na ruchomym ramieniu kąta α i punkt A', leżący na ruchomym ramieniu równego mu kąta ujemnego, leżą symetrycznie względem osi x. Odcięta tych punktów jest więc wspólna, to znaczy:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (8_1)$$

Rzędne różnią się tylko znakiem, więc:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (8_2)$$

Wreszcie przez dzielenie otrzymamy stąd:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (8_3)$$

Narysuj odpowiednią figurę dla kątów rozwartych, wklęsłych!

Otóż: *funkcja kąta ujemnego równa się co do wartości bezwzględnej funkcji kąta dodatniego; co do znaku, to cosinus (i secans) zachowuje znak, inne zaś funkcje zmieniają.*

U w a g a. Funkcja, której wartość nie ulega zmianie, chociaż zmienna niezależna zmieni znak, nazywa się funkcją parzystą (n. p. $y = x^2$); funkcja zaś zmieniająca znak, ale nie zmieniająca wartości bezwzględnej, gdy zmienna niezależna zmieni znak, nazywa się funkcją nieparzystą (n. p. $y = x^3$). W myśl tego określenia $\sin \alpha$ jest funkcją nieparzystą, a $\cos \alpha$ parzystą.

§ 15. Graficzny obraz funkcji sinus i cosinus.

Zbadaliśmy przebieg wartości funkcji $\sin x$ i $\cos x$ przy pomocy koła; wyraźniej wystąpi zbiór tych wartości na graficznym przedstawieniu funkcji:

$$y = \sin x \text{ i } y = \cos x$$

Aby ten obraz otrzymać, trzeba odcinać na osi x-ów kąty, n. p. na każdy stopień 1 mm, jak to uczyniliśmy np. na fig. 11 i 13, a na prostych prostopadłych do osi x-ów odpowiednie wartości funkcji $\sin x$ lub $\cos x$, otrzymane n. p. z fig. 41. Nie wiele zmieni się rysunek, skoro wyrazimy kąty w mierze łukowej, t. j. zapomocą liczby wymiarowej łuku, należącego do danego kąta w kole o promieniu 1. Wtedy, jak wiadomo, (por. § 12) kątowi 360° odpowiada cały obwód koła o promieniu 1, t. j. 2π , kątowi 180° liczba π , kątowi 90° liczba $\frac{\pi}{2}$ i t. d. Jednemu stopniowi odpowiada

$$\frac{2\pi}{360^\circ} = 0.017453 \dots$$

Aby więc przedstawić na rysunku zbiór wartości $\sin x$ dla $x = 0^\circ \dots 360^\circ$, odcinamy na osi x-ów odcinek $2\pi = 6.28318 \dots$, odpowiadający 360° . Połowa tego odcinka t. j. π odpowiada kątowi 180° , $\frac{\pi}{2} \dots 90^\circ$, $\frac{3\pi}{2} \dots 270^\circ$ i t. d. Podzieliwszy każdy odcinek długości $\frac{\pi}{2}$ n. p. na 9 równych części otrzymamy punkty odpowiadające kątom $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots$ i t. d. aż do 360° . W każdym z tych punktów wykreślamy odpowiednią rzędną wziętą z koła o promieniu 1.

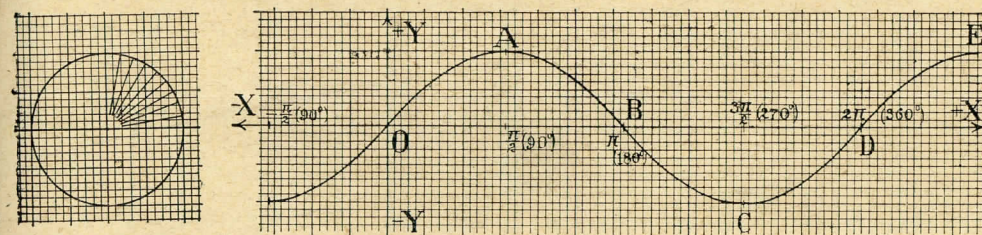


Fig. 43.

Na naszym rysunku (fig. 43) obraliśmy za jednostkę 1 cm. (Narysuj to samo na papierze milimetrowym, obierając za jednostkę 1 dm!) Łącząc

końce rzędnych jedną nieprzerwaną linią, otrzymamy graficzny obraz funkcji:

$$y = \sin x$$

Linję tę możemy przedłużać poza 2π (kąty większe od 360°) i poza punkt 0 (kąty ujemne). Wskutek periodyczności otrzymamy wtedy linję przystającą do $OABCD$. Całą tę linję nieskończoną nazywamy sinusoidą lub linją falową, (ponieważ znajduje zastosowanie w ruchu falowym). Linja ta narysowana dokładnie, na papierze milimetrowym, może zastąpić tablicę funkcji sinus. Jeżeli n. p. $r = 1 \text{ dm}$, to z figury można odczytać jeszcze dosyć dokładnie 0.001 dm ; figura zastępuje wtedy 3-cyfrową tablicę wartości funkcji sinus. Z tego graficznego przedstawienia widzimy, że funkcja sinus zawiera się zawsze w granicach $-1 \dots +1$, i przybiera wszystkie wartości zawarte w tych granicach. Największą wartość: $+1$ t. zw. maximum osiąga dla $x = \frac{\pi}{2}$ czyli 90° , najmniejszą; -1 t. zw. minimum dla $x = \frac{3\pi}{2}$ t. j. 270° . Pomiędzy 0° a 360° linja ta składa się z 4 symetrycznych części OA , AB , BC , CD ; narysowawszy więc jedną część, możemy resztę otrzymać przez symetryczne odbicie, bez pomocy koła lub tablic. Wystarczy więc znać wartości $\sin x$ dla kątów od 0° do 90° ; dalsze otrzyma się z rozważań symetrii.

Do każdej wartości kąta należy tylko jedna wartość funkcji sinus, ale odwrotnie do każdej wartości funkcji sinus należy nieskończenie wiele różnych kątów. Tak n. p. jeżeli $\sin x = \frac{1}{2}$ to x może mieć wartości: 30° , 150° , 390° , ..., -210° , -330° , (por. fig. 44, gdzie linja kropkowana jest narysowana w wysokości $y = \frac{1}{2}$).

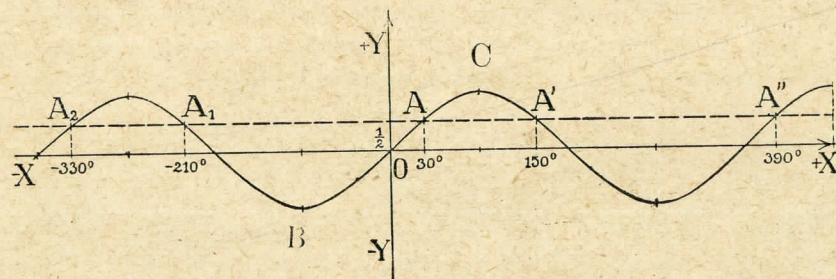


Fig. 44.

Nawet, jeżeli się ograniczymy do kątów wypukłych, t. j. od 0° do 180° , to do każdej wartości funkcji sinus należą dwa różne kąty: x i $180^\circ - x$, z wyjątkiem $\sin x = +1$, do którego należy tylko jeden kąt wypukły $x = 90^\circ$. Na to trzeba bardzo uważać przy wszel-

kich dyskusjach i przy równaniach, w których niewiadoma występuje pod znakiem funkcji sinus.

Wszystkie wartości, dla których $\sin x = \frac{1}{2}$, możemy ująć w jeden wzór ogólny. Widzimy bowiem, że na jednej pełnej fali (na pierwszej) znajdują się tylko dwie z tych wartości: 30° i 150° , ogólnie α i $180^\circ - \alpha$ czyli α i $\pi - \alpha$, należące do punktów A i A' na fig. 44. Wszystkie inne kąty dające tę samą wartość funkcji sinus różnią się od tych dwóch kątów o całkowitą dodatnią lub ujemną wielokrotność liczby 360° czyli 2π (są przesunięte o jeden lub więcej periodów na prawo lub na lewo). A zatem liczby te zawierają się w następujących dwóch szeregach wartości:

$$2n\pi + \alpha \quad \text{ i } \quad 2n\pi + \pi - \alpha$$

przyczem n przebiega wszelkie możliwe liczby całkowite dodatnie i ujemne nie wyłączając zera. Jeżeli więc π występuje parzystą liczbę razy, to kąt α trzeba brać ze znakiem $+$, jeżeli zaś nieparzystą liczbę razy, to występuje $-\alpha$. Razem ujmujemy te dwa szeregi wartości jednym wzorem:

$$(a) \quad x = m \cdot \pi + (-1)^m \cdot \alpha$$

przyczem $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Istotnie, jeżeli m jest liczbą parzystą (ogólnie: $m = 2n$), to $(-1)^m = +1$ i mamy pierwszy szereg wartości: $2n\pi + \alpha$; jeżeli zaś m jest liczbą nieparzystą (ogólnie: $m = 2n + 1$), to $(-1)^m = -1$ i otrzymujemy: $(2n + 1)\pi - \alpha$, czyli drugi szereg wartości: $2n\pi + \pi - \alpha$.

Wzór (a) przedstawia więc już wszystkie wartości x , jakie może przyjmować kąt x w równaniu $\sin x = c$ (c liczba stała), jeżeli znamy jedną z tych wartości: α . W naszym przykładzie $x = m \cdot \pi + (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6}$.

Prosta równoległa do osi x -ów w odstępnie zawartym między -1 a $+1$ przecina tylko raz tę część sinusoidy, która jest zawarta między punktami B i C (na fig. 44). Zawsze więc jeden pierwiastek równania $\sin x = c$ zawiera się między -90° a $+90^\circ$. Ten pierwiastek, najmniejszy co do wartości bezwzględnej, nazywa się pierwiastkiem głównym równania $\sin x = c$.

Przeprowadzając taką samą konstrukcję dla funkcji:

$$y = \cos x$$

przy pomocy koła o promieniu 1, otrzymamy tę samą linję tylko przesuniętą o odcinek $\frac{\pi}{2}$ (t. j. kąt 90°) na lewo (por. fig. 45). Oś y -ów przechodzi przez punkt A . Innymi słowy: piszemy liczby $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$, tam, gdzie były $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$ na sinusoidzie (na fig. 43). Linja ta jest obrazem funkcji cosinus.

Cosinusoida jest więc sinusoidą przesuniętą o $\frac{\pi}{2}$ na lewo. Funkcja cosinus

przybiera podobnie, jak sinus, każdą wartość pomiędzy -1 a $+1$ nieskończenie wiele razy.

N. p. jeżeli $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, to $x = \pm 45^\circ, \pm 315^\circ, \pm 405^\circ, \dots$ (sprawdź, rysując linię równoległą do osi x -ów przez ten punkt cosinusoidy, który odpowiada wartości 45° czyli $\frac{\pi}{2} : 2$).

Wszystkie te wartości mieszczą się we wzorze:

$$x = n \cdot 360^\circ \pm 45^\circ \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

lub

$$x = n \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Ogólnie, jeżeli $\cos x = d$, a α jest jedną z wartości spełniających to równanie, to wszystkie wartości spełniające to równanie mieszczą się we wzorze:

$$(b) \quad x = 2n\pi \pm \alpha \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Jeżeli się jednak ograniczymy do kątów wypukłych t. j. od 0° do 180° ,

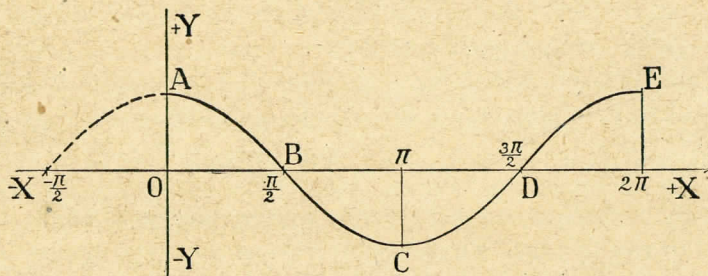


Fig. 45.

to widzimy z figury 45, że do każdej danej wartości funkcji $\cos x$ należy tylko jeden kąt zawarty między 0° a 180° i ten kąt nazywa się pierwiastkiem głównym równania $\cos x = d$.

Uwaga: Za pierwiastek główny nie obieramy tu kąta o najmniejszej wartości bezwzględnej, albowiem wskutek symetrii istnieją tu dwa takie kąty: $+\alpha$ i $-\alpha$ mające ten sam cosinus. Nam zaś chodzi o jednoznaczne wybranie jednego kąta zasadniczego.

Odczytać z graficznego przedstawienia, że $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = +\cos x$!

§ 16. Wzory redukcyjne.

Z graficznego przedstawienia widzieliśmy, że $\cos \alpha$ ma taką samą wartość, jak $\sin(\alpha + 90^\circ)$. Związek ten zachodzi dla wszystkich kątów α dodatnich i ujemnych, wklęsłych i wypukłych. Okażemy to przy pomocy koła o promieniu równym jednostce (fig. 46 a).

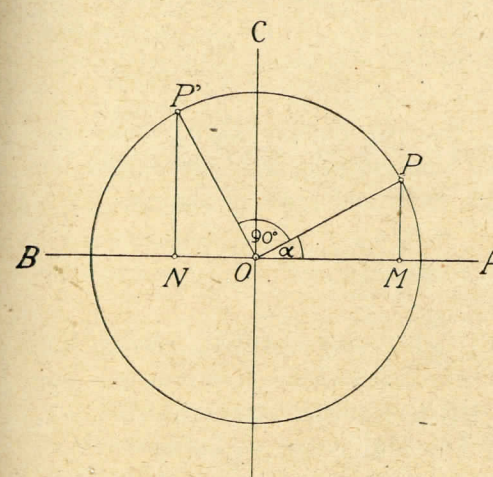


Fig. 46 a.

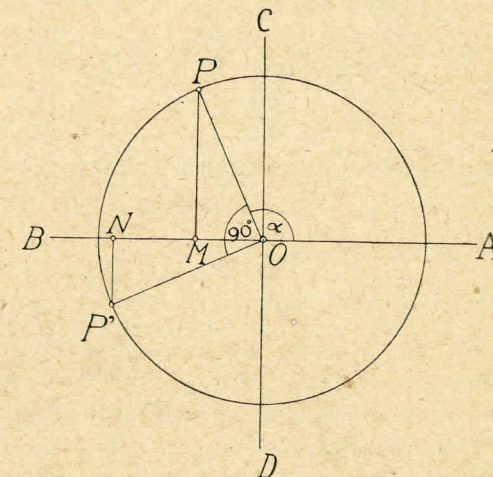


Fig. 46 b.

Weźmy najpierw kąt α ostry (fig. 46 a). Do kąta α należy rzędna MP a odcięta OM , więc $\sin \alpha = MP$, $\cos \alpha = OM$. Aby z kąta α przejść do kąta $90^\circ + \alpha$, obracamy ramię ruchome OP o kąt 90° w kierunku dodatnim, do położenia OP' . Kąt $\angle P'OA = 90^\circ + \alpha$, odcinki zaś NP' i ON przedstawiają wobec tego $\sin(90^\circ + \alpha)$ i $\cos(90^\circ + \alpha)$. Trójkąty prostokątne OMP i ONP' są przystające, bo $\angle NP'O = \alpha$ (ramiona zgodnie prostopadle); a więc $NP' = OM$, przyczem obydwa te odcinki są dodatnie. Zatem

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha \quad (9_1)$$

Z przystawania wynika także $ON = MP$ ale teraz liczba wymiarowa odcinka ON jest liczbą ujemną, a odcinka MP dodatnią, więc

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \quad (9_2)$$

Dzieląc równania (9_1) i (9_2) przez siebie stronami otrzymamy

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (9_3)$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (9_4)$$

Gdyby kąt α był rozwarty (fig. 46 b), to otrzymalibyśmy również dwa trójkąty prostokątne przystające. Teraz funkcja $\sin(90^\circ + \alpha)$ ma wartość ujemną i $\cos \alpha$ również.

Związek (9₁) utrzymuje się zatem bez zmiany. Podobnie $\cos(90^\circ + \alpha)$ jest teraz liczbą ujemną, a $\sin \alpha$ dodatnią, równą co do bezwzględnej wartości, a więc i równanie (9₂) utrzymuje się bez zmiany.

Podobnie łatwo okazać, że te same związki zachodzą dla kątów wklęsłych (t. j. z III. i IV. ćwiartki) tudzież dla kątów ujemnych (wykaż przy pomocy odpowiednich figur!)

Wzory te są więc zupełnie ogólnie prawdziwe dla wszelkich kątów α .

Zawsze więc *sinus* kąta powiększonego o 90° równa się *cosinusowi* kąta mniejszego, co do wartości i co do znaku, a *cosinus* kąta większego równa się przeciwnej wartości *sinusa* kąta mniejszego.

Otóż: *gdy kąt wzrośnie o 90° , to funkcja nowego kąta równa się cofunkcji dawnego kąta co do wartości bezwzględnej, a co do znaku, to $\sin(\alpha + 90^\circ)$ (i cosecans) zachowuje znak, inne zaś funkcje zmieniają.*

Uwaga. Gdybyśmy za $\alpha + 90^\circ$ podstawili β , to za α należy podstawić $\beta - 90^\circ$. Otrzymalibyśmy w ten sposób związek między funkcją kąta zmniejszonego o 90° a funkcją kąta pierwotnego. Wypowiedz te wzory!

Z wzorów tych widzimy najlepiej (na cośmy zwrócili uwagę już przy graficznem przedstawieniu), że do wszelkich obliczeń wystarczą tablice, zawierające wartości funkcji dla kątów ostrych. Funkcje kątów 91° , 92° i t. d. do 180° mają te same wartości bezwzględne, co cofunkcje kątów 1° , 2° ... do 90° , a różnią się tylko znakami. Posuwając się dalej o 90° , otrzymamy wartości funkcji dla kątów od 180° do 270° i t. d.

Stosując wzory (9) do kątów ujemnych, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= -\sin(-\alpha) \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg}(-\alpha) \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg}(-\alpha)\end{aligned}$$

a stąd stosując do prawej strony wzory (8) na str. 68, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}\tag{10}$$

Wyprowadź te wzory wprost, używając koła o promieniu 1, dla kątów ostrych, rozwartych, wklęsłych!

Związki te wyprowadziliśmy dawniej dla kątów ostrych, obecnie wyprowadziliśmy je ogólnie, dla wszelkich kątów. Słowami wyrażamy te związki tak:

Funkcja kąta dopełniającego równa się cofunkcji kąta pierwotnego (co do znaku i co do wartości bezwzględnej).

Ważne są jeszcze równania, zachodzące między funkcjami kątów

spełniających się t. j. kąta α i $180^\circ - \alpha$. Staramy się więc wyprowadzić ogólnie związki między funkcjami kątów spełniających się, t. j. związki między:

$$\sin(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha), \text{ i t. d.}$$

a $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, i t. d.

Związki te wyprowadzimy odrazu ogólnie, nie zważając na to, czy kąt α jest ostry, czy też rozwarty lub wklęsły. Mianowicie przedstawmy $180^\circ - \alpha$ w postaci $90^\circ - \alpha + 90^\circ$, to używając wzorów (9) i (10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin(90^\circ - \alpha + 90^\circ) = +\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= \cos(90^\circ - \alpha + 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha\end{aligned}$$

Stąd zaś przez dzielenie otrzymujemy odpowiednie wzory dla funkcji tangens i cotangens. Mamy więc następujące związki:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha\end{aligned}\tag{11}$$

Funkcja kąta spełniającego się równa się funkcji kąta pierwotnego i to sinus nawet co do znaku, inne zaś funkcje tylko co do wartości bezwzględnej. Wyprowadź te wzory wprost, przy pomocy koła, obracając oś x -ów o kąt 180° wstecz!

Stosując te wzory przy rozwiązywaniu trójkątów ukośnokątnych, przy wysłowieniu twierdzenia Carnota i t. p. (por. str. 54 i 55), nie potrzebujemy już osobno rozważać trójkątów ostrokątnych i rozwartokątnych: wzory będą miały jednakową postać w obydwu przypadkach.

Wzorów tych używamy najczęściej, aby sprowadzić funkcje kąta rozwartego do funkcji kąta ostrych. N. p. mając obliczyć $\sin 137^\circ$ używamy wzoru:

$$\sin 137^\circ = \sin(180^\circ - 137^\circ) = \sin 43^\circ$$

a tę wartość znajdujemy już w tablicach. Podobnie:

$$\cos 152^\circ = -\cos(180^\circ - 152^\circ) = -\cos 28^\circ.$$

Można też użyć wzorów (9), wtedy jednak funkcja przechodzi na cofunkcję.

Kąty wklęsłe sprowadzamy najpierw do wypukłych, korzystając z periodyczności funkcji, a potem stosujemy wzory (11), o ile otrzymamy kąt rozwarty.

Dalszem zastosowaniem tych wzorów jest zmiana znaku funkcji. Jeżeli z jakiegoś rachunku wypadnie na $\cos \alpha$ lub $\operatorname{tg} \alpha$ wartość ujemna, to, aby można było użyć tablic, które zawierają same dodatnie wartości, zastępujemy kąt α kątem spełniającym: $180^\circ - \alpha$. Wtedy $\cos$ lub tg ma

wartość dodatnią; znajdujemy w tablicach kąt $180^\circ - \alpha$, a z niego otrzymujemy sam kąt α . N. p.:

$$\operatorname{tg} \alpha = -0.40741 \quad \text{to}$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = +0.40741.$$

W tablicach znajdujemy: $180^\circ - \alpha = 22^\circ 10'$, więc

$$\alpha = 157^\circ 50'.$$

Dla funkcji sinus zdarza się to nierównie rzadziej; wtedy trzeba użyć wzoru:

$$\sin (360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{lub}$$

$$\cos (\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzory na $\sin (180^\circ + \alpha)$, $\sin (270^\circ - \alpha)$, $\sin (270^\circ + \alpha)$, i dla innych funkcji tryg. Trzeba tylko rozłożyć kąty na:

$$90^\circ + (90^\circ + \alpha), \quad 90^\circ + (180^\circ - \alpha), \quad 90^\circ + (180^\circ + \alpha)$$

i bez żadnych rozważań geometrycznych zastosować wzory (9) i (11). Ostatecznie otrzymamy związki zestawione w następującej tabelce:

$x =$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
$\sin x =$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x =$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x =$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x =$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Wszystkie te wzory nazywamy *wzorami redukcyjnymi*, ponieważ przy ich użyciu można sprowadzić obliczenie funkcji dowolnego kąta do obliczenia funkcji kąta ostrego.

§ 17. Graficzne przedstawienie funkcji tangens i pozostałych funkcji.

Własności funkcji tangens wynikają już z własności funkcji sinus i cosinus, których ilorazem jest tangens. Jaśniej jednak wystąpi przebieg tej funkcji, jeżeli i ją rozważymy przy pomocy koła o promieniu 1. Określiliśmy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1}$$

Aby przedstawić $\operatorname{tg} \alpha$ jako liczbę wymiarową jednego odcinka przy użyciu tej samej jednostki, którejśmy używali dla $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, staramy się mianownik tego ułamka t. j. x_1 uczynić $= 1$. W tym celu powiększamy trójkąt OAB (fig. 47) tak, aby podstawa była równa promieniowi, który obraliśmy $= 1$, a wtedy druga przyprostokątna leży na stycznej do koła.

$$\text{Wtedy: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{s}{OC} = \frac{s}{1} = s$$

Otóż: **odcinek stycznej do koła na końcu ramienia nieruchomego**, sięgający od ramienia nieruchomego do ruchomego, **przedstawia tangens kąta** (ściślej: liczba wymiarowa tego odcinka przedstawia wartość $\operatorname{tg} \alpha$). Stąd też pochodzi nazwa: styczna (tangens) kąta.

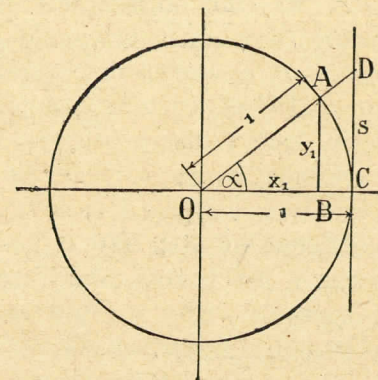


Fig. 47.

Uwaga. Z tej figury można także odczytać przebieg funkcji secans α , bo

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{OA}{x_1} = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD. \quad \text{Więc liczba wymiarowa odcinka siecznej przedstawia funkcję secans } \alpha, \text{ skąd też pochodzi nazwa tej funkcji.}$$

Nie potrzeba więc odtąd dwóch odcinków: x i y dla rozważania przebiegu funkcji tangens, wystarczy jeden odcinek: s .

Dla kątów rozwartych trzeba by ramię OA' (fig. 48) przedłużyć wstecz, (za jednostkę długości obraliśmy na tej fig. 1 cm) poza punkt O ; otrzymamy wtedy odcinek s' stycznej, leżący pod osią x -ów, a więc ujemny, zgodnie z dawniejszym oznaczeniem znaku (w drugiej ćwiartce tangens ujemny!) W ćwiartce III. także należy przedłużyć ramię ruchome wstecz; wartość funkcji tangens jest znowu dodatnia MT'' . W ćwiartce IV tangens jest ujemny.

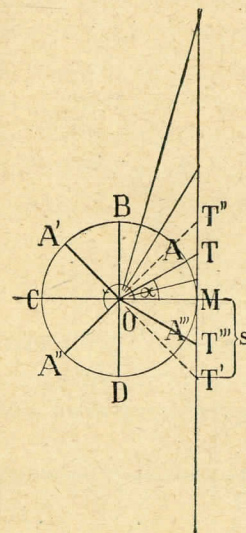


Fig. 48.

Gdy $\alpha = 0^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Gdy α wzrasta, rośnie i $\operatorname{tg} \alpha$ i to bardzo szybko. Gdy α dąży do 90° , tangens α wzrasta nieograniczenie, pozostając zawsze liczbą dodatnią: mówimy, że $\operatorname{tg} \alpha$ dąży do $+\infty$. Gdy α przekroczy nieznacznie 90° , $\operatorname{tg} \alpha$ ma wielką (co do bezwzględnej wartości) wartość ujemną. Gdyby kąt α zbliżał się do 90° , malejąc, wartość $\operatorname{tg} \alpha$ byłaby ujemna i wzrastałaby nieograniczenie co do wartości bezwzględnej. A więc $\operatorname{tg} \alpha$ dąży do $-\infty$, gdy kąt dąży do 90° malejąc (od kątów rozwartych).

W punkcie odpowiadającym kątowi 90° następuje skok wartości funkcji tangens od $+\infty$ do $-\infty$.

Poza 90° tangens jest ujemne i maleje co do bezwzględnej wartości, a więc wzrasta w znaczeniu algebraicznym (podnosi się!) Dla $\alpha = 180^\circ$ jest $tg \alpha = 0$, a stąd znowu wzrasta, dążąc do $+\infty$, gdy α zbliża się do 270° . Poza 270° znowu $tg \alpha$ rośnie od bardzo wielkich wartości ujemnych do zera przy 360° . Widzimy więc, że dla kątów 90° i 270° tangens α nie ma żadnej określonej wartości. Obraz funkcji jest w tym miejscu przerywany, funkcja jest nieciągła dla wartości 90° i 270° . Podobnie zachowuje się $tg \alpha$ dla kątów $90^\circ + 2 \cdot 180^\circ$, $90^\circ + 3 \cdot 180^\circ$ i t. d. ogólnie dla kątów: $90^\circ + l \cdot 180^\circ$, gdzie l jest liczbą całkowitą. Poza tymi punktami tangens zawsze wzrasta przy wzrastaniu kąta, przebiegając wszystkie możliwe wartości rzeczywiste: od $-\infty$ do $+\infty$.

Jeszcze wyraźniej wystąpi przebieg wartości funkcji tangens na graficznym przedstawieniu (fig. 49). Obieramy znowu miarę łukową (jednostką długości jest na rysunku odcinek 1 cm) i w punktach odpowiadających

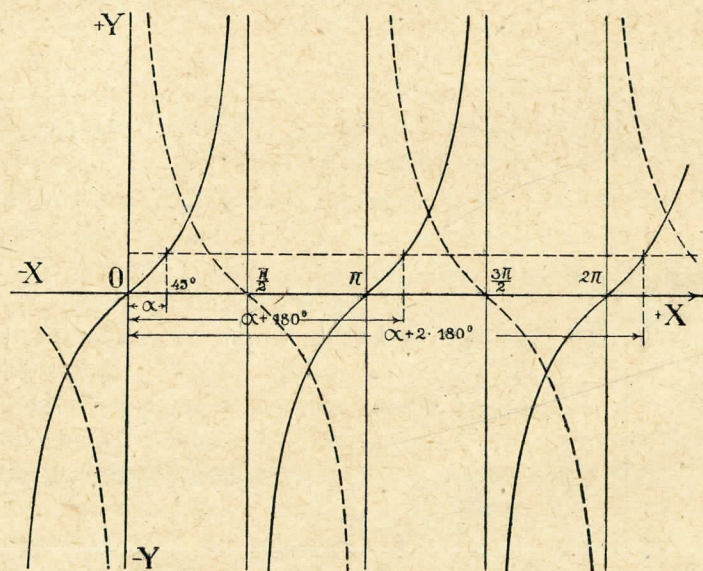


Fig. 49.

kątom: 10° , 20° , 30° ,... wykreślamy rzędne, których wielkości i kierunki bierzemy z fig. 48 (odcinki stycznej). Otrzymaną linię złożoną z kilku oddzielnych gałęzi nazywamy tangensoidą. Przedłużając obraz poza 2π i poza 0 spostrzeżemy, że wartości $tg \alpha$ powtarzają się periodycznie co 180° (π).

Otóż: *perjodem funkcji tangens jest 180° czyli π .*

Z figury widzimy, że dla każdego kąta — z wyjątkiem 90° i $90^\circ + l \cdot 180^\circ$ — tangens ma tylko jedną wartość. Natomiast do jednej wartości funkcji tangens należy nieskończenie wiele różnych kątów: α , $\alpha \pm 180^\circ$, $\alpha \pm 360^\circ$,... $\alpha \pm l \cdot 180^\circ$.

Ogólnie, używając miary łukowej, możemy ten zbiór kątów napisać w postaci:

$$(c) \quad x = \alpha + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Wzór ten zawiera wszystkie kąty x spełniające warunek $tg x = k$, wyrażone zapomocą jednego z tych kątów: α .

Z pomiędzy tych wszystkich kątów jeden leży zawsze w przedziale od -90° do $+90^\circ$ i ten kąt (najmniejszy co do wartości bezwzględnej) nazywamy pierwiastkiem głównym równania $tg x = k$.

Kreśląc w punktach $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ i t. d. prostopadłe do osi x -ów, otrzymujemy linie, do których tangensoida zbliża się nieograniczenie. Linie takie nazywają się: asymptoty (ledwoniestyczne). Są one pomocne przy wykreślaniu tangensoidy.

Wykreśl przy pomocy fig. 48. obraz graficzny funkcji secans.

Przebieg funkcji $ctg \alpha$ można otrzymać przez proste przekształcenie tangensoidy, opierając się na znanym wzorze:

$$y = ctg x = -tg (90^\circ + x)$$

Trzeba więc tangensoidę przesunąć o 90° t. j. o $\frac{\pi}{2}$ na lewo i obrócić

całą linię około osi x -ów tak, aby każda rzędna zmieniała znak. Otrzymana linia (kropkowana na fig. 49) jest obrazem funkcji $ctg x$. Przebieg funkcji $tg \alpha$ i $ctg \alpha$ możemy zestawzić w następującej tabelce;

$\alpha =$	0°	I.	90°	II.	180°	III.	270°	IV.	360°
$tg \alpha$	0	+	$\pm\infty$	-	0	+	$\pm\infty$	-	0
		wzrasta		wzrasta		wzrasta		wzrasta	
$ctg \alpha$	$\pm\infty$	-	0	-	$\pm\infty$	+	0	-	$\pm\infty$
		maleje		maleje		maleje		maleje	

U w a g a. Niezależnie od tangensoidy moglibyśmy otrzymać cotangensoidę wprost z koła o promieniu 1. Wykreślamy styczną do koła w punkcie F (fig. 50).

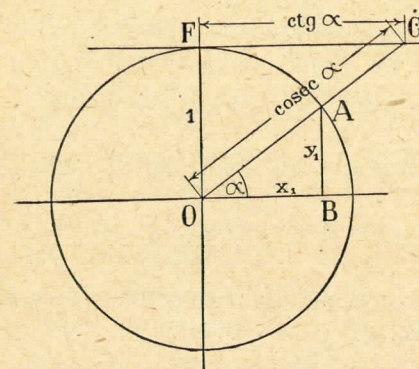


Fig. 50.

Z podobieństwa trójkątów OAB i OFG otrzymujemy:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{FG}{FO} = \frac{FG}{1},$$

a stosunek ten jest zarazem tangens kąta α . Więc liczba wymiarowa odcinka FG przedstawia wartość $\text{ctg } \alpha$ (w I. i III. ćwiartce na prawo od punktu F , w II. i IV. na lewo). Podobnie można wywnioskować, że liczba wymiarowa odcinka OG przedstawia cosecans kąta. Wykonaj przy pomocy takiego koła konstrukcję contangensoidy, cosecansoidy!

§ 18. Zasadnicze prawo rzutów.

Przy rozważaniu trójkątów prostokątnych wspominaliśmy, że rzut (prostokątny) jakiegokolwiek odcinka na linię prostą lub na płaszczyznę równa się długości tego odcinka pomnożonej przez *cosinus* kąta nachylenia, przyczem ten kąt był zawsze ostry. Obecnie weźmiemy pod uwagę ogólniejszy przypadek, mianowicie rzut wektora a , t. j. odcinka pojmowanego wraz z kierunkiem, na oś, to znaczy na linię prostą, na której odróżniliśmy zwrot dodatni i ujemny (np. oś x -ów, oś y -ów i t. p.). Kąt takiego wektora z dodatnim zwrotem osi może przybierać wszelkie wartości od 0° do 360° . Np. na fig. 51, wektor $\vec{a}$ tworzy z osią x -ów kąt ostry α (taki bowiem kąt

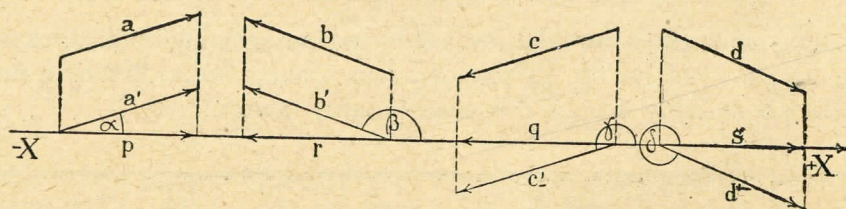


Fig. 51.

tworzy z osią x równy mu wektor $\vec{a}$; wektory tylko wtedy nazywamy równymi, jeżeli leżą na prostych równoległych, są zwrócone w tę samą stronę i mają długości równe), wektor $\vec{b}$ tworzy z osią x -ów kąt rozwarty β , wektory zaś $\vec{c}$ i $\vec{d}$ kąty wklęsłe γ i δ .

U w a g a. Odcinek rzucany i oś nie muszą leżeć na jednej płaszczyźnie.

Utwórzmy rzut każdego z tych wektorów na oś x , zachowując odpowiedni zwrot; mianowicie zwrot rzutu jest kierunkiem od rzutu punktu

początkowego wektora, do rzutu końcowego punktu. Rzut p wektora $\vec{a}$ i rzut s wektora $\vec{d}$ (fig. 51) mają zwrot dodatni, a więc i ich liczby wymiarowe są dodatnie, rzuty zaś wektorów $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tworzących kąty większe od 90° a mniejsze od 270° , są ujemne. Zasadnicze prawo rzutów opiewa:

Rzut każdego wektora na oś równa się co do wielkości i co do znaku długości tego wektora, pomnożonej przez cosinus kąta, jaki ten wektor tworzy z osią (z jej dodatnim zwrotem; kąt dodatni liczy się przeciwnie do obrotu wskazówek zegara). Oznaczamy długość wektora $\vec{a}$ braną bezwzględnie literą a , długość (bezwzględną) rzutu tego wektora literą b a wielkość rzutu z uwzględnieniem znaku literą p , to twierdzenie nasze można napisać w postaci:

$$p = a \cdot \cos \alpha \quad (12)$$

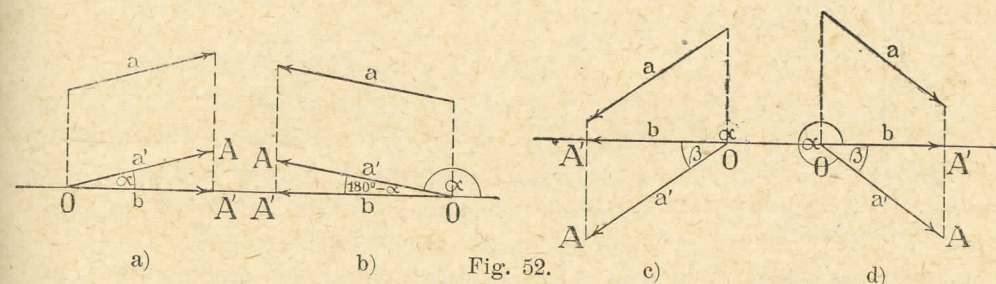


Fig. 52.

I tak: a) Jeżeli kąt jest ostry, to rzut $p = +b$. Z trójkąta prostokątnego OAA' (fig. 52 a) wynika, że $b = a' \cos \alpha = a \cos \alpha$, więc: $p = a \cos \alpha$.

b) Jeżeli wektor tworzy z osią kąt rozwarty, to rzut ma zwrot ujemny, więc: $p = -b$.

Ale $b = a \cos (180^\circ - \alpha) = -a \cos \alpha$, więc: $p = a \cos \alpha$.

c) Jeżeli kąt jest większy od 180° ale mniejszy od 270° , to $p = -b$. Ale (fig. c) $b = a \cos \beta = a \cos (\alpha - 180^\circ) = a \cos (180^\circ - \alpha) = -a \cos \alpha$. Więc $p = a \cos \alpha$.

d) Jeżeli kąt jest większy od 270° a mniejszy od 360° , to rzut $p = +b$. Ale:

$$b = a \cos \beta = a \cos (360^\circ - \alpha) = a \cos (-\alpha) = a \cos \alpha.$$

Więc i w tym przypadku: $p = a \cos \alpha$.

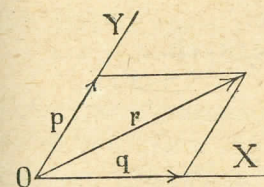


Fig. 53.

KOWICKI. GEOMETRIA.

Prawo rzutów jest więc ogólnie udowodnione. W zastosowaniach trzeba często znaleźć rzut kilku wektorów.

Wykażemy, że rzuty kilku wektorów można zastąpić rzutem jednego wektora wypadkowego i odwrotnie: rzut jednego wektora można zastąpić sumą rzutów wektorów składowych.

Uwaga. Wektorem wypadkowym dwu wektorów nazywamy — jak wiadomo z planimetrii — przekątnię równoległoboku utworzonego z tych 2 wektorów: początkiem przekątnej jest punkt, w którym się schodzą początki obydwu wektorów składowych. Jeżeli by wektory składowe nie schodziły się swymi początkami, przesuwamy jeden z nich równolegle tak, aby miały wspólny początek. Rozkład wektora wykonuje się, obierając jakieś dwa kierunki OX i OY z punktu początkowego i kreśląc z końca danego wektora linie równoległe do tych kierunków (fig. 53). Wektory p i q otrzymane w ten sposób na liniach OX i OY są wektorami składowymi.

Udowodnimy to prawo dla dwóch wektorów. Nazwijmy odpowiednio $A'B'C'D'$ rzuty punktów A, B, C, D . Chcemy wykazać, że zawsze $A'C' + A'B' = A'D'$. Otóż, ponieważ wektory AB i CD są równe co do kierunku i co do wielkości, to ich rzuty są równe, więc:

$$A'B' = C'D'$$

Zatem:

$$A'C' + A'B' = A'C' + C'D' = A'D'$$

Tak jest, jeżeli rzuty B' i C' leżą po tej samej stronie punktu A' . Wykazać, że ta sama równość zachodzi i wtedy, gdy $B'C'$ leżą po przeciwnych stronach punktu A' ! Stąd już łatwo przejść do 3 i więcej wektorów.

Trygonometrycznie wyrażamy to prawo wektorów składowych i wypadkowych równaniem:

$$c \cdot \cos(cx) = a \cos(ax) + b \cos(bx)$$

przyczem (cx) , (ax) , i (bx) oznaczają kąty wektorów c, a, b , z osią x (a oznacza długość wektora AB , $b \dots AC$, $c \dots AD$). Prawo to można też wysłowić tak: rzut odcinka łączącego dwa dowolne punkty (np. A i D) można zastąpić rzutem dowolnej linii łamanej (np. ACD) łączącej te dwa punkty i odwrotnie rzut linii łamanej można zastąpić rzutem odcinka, łączącego jej końce.

Możemy więc celem znalezienia rzutu jednego wektora, mającego kierunek dla nas niedogodny, zastąpić go dwoma wektorami składowymi o kierunkach dogodnych, utworzyć rzuty tych wektorów i znaleźć ich sumę (z uwzględnieniem znaku!). Odwrotnie postępujemy mając znaleźć rzut kilku wektorów. Zastosowanie tego prawa znajdziemy w następnym ustępie.

§ 19. Teorem dodawania funkcji trygonometrycznych.

Zbadaliśmy już, jak się zachowują funkcje trygonometryczne, jeżeli kąt wzrośnie o 90° i wyprowadziliśmy z tego wiele ważnych związków. Teraz zajmiemy się zagadnieniem ogólniejszym: pytamy, jak się zmienia wartości funkcji trygonometrycznych, jeżeli kąt α wzrośnie o jakikolwiek inny

kąt β , czyli, jeżeli dodamy do α kąt β . Chcemy więc obliczyć $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ i t. d. ... znając $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$ i t. d. ... t. j. funkcję sumy wyrazić zapomocą funkcji dodajników. Wzory, jakie otrzymamy, nazywamy teoremem dodawania. (N. p. dla funkcji wykładniczej znamy już teorem dodawania: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, funkcja zaś logarytmiczna nie posiada prostego teoremu dodawania).

Obróćmy układ współrzędnych (X, Y) o kąt α (fig. 55); otrzymamy nowe osie OX' i OY' . W tym nowym układzie obierzmy prostą OA , tworzącą z nową osią kąt β i na niej dowolny punkt A . Współrzędne OB i BA tego punktu w dawnym układzie oznaczamy literami x, y a współrzędne OB' i $B'A$ w nowym układzie, po obrocie, x', y' . Oznaczając odległość tego punktu A od początku układu literą r mamy według definicji funkcji trygonometrycznych:

$$\frac{y}{r} = \sin(\alpha + \beta), \quad \frac{x}{r} = \cos(\alpha + \beta),$$

$$\frac{y'}{r} = \sin \beta, \quad \frac{x'}{r} = \cos \beta.$$

Aby uzyskać związek między $\cos(\alpha + \beta)$ a funkcjami $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ i $\cos \beta$ wystarczy wyrazić dawne współrzędne x, y zapomocą nowych x', y' . Weźmy pod uwagę odciętą x i obliczmy x w dwa sposoby: raz jako rzut wektora OA na oś x -ów, to

$$x = r \cos(\alpha + \beta)$$

a drugi raz jako rzut linii łamanej $OB'A$, łączącej te same punkty O i A , na tę samą oś x -ów, to teraz

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos(90^\circ + \alpha)$$

(oś OY' i równoległy do niej odcinek y' tworzą z dawną osią x -ów kąt $90^\circ + \alpha$). Ale według wzoru redukcyjnego (9₂) na str. 73, $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, więc

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad (a)$$

Wzór ten służy do obliczenia odciętej dowolnego punktu w dawnym układzie, jeżeli znamy jego współrzędne w nowym układzie i kąt obrotu; ma on obszerne zastosowanie w geometrii analitycznej.

Wprowadzając tu za x , x' i y' ich wartości wynikające z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymamy:

$$r \cdot \cos(\alpha + \beta) = r \cdot \cos \beta \cos \alpha - r \sin \beta \sin \alpha$$

a po uproszczeniu przez r

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (13_2)$$

Uwaga: Na figurze 55 użyliśmy kątów ostrych α i β , jednakże cały tok rozumowania odnosi się do wszystkich możliwych kątów. Narysuj odpowiednie figury, jeżeli jeden z kątów jest rozwarty, obydwa rozwarte, jeden wklęsły, jeden ujemny i t. p.

Wyprowadziliśmy więc **teorem dodawania dla funkcji cosinus** ogólnie dla wszystkich kątów α i β .

Uwaga. Podstawiając za $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, a za $\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \beta}$ mogliśmy wyrazić $\cos(\alpha + \beta)$ zapomocą samych dostaw.

Stąd już łatwo przejść do teoremów dodawania dla innych funkcji, opierając się na związku $\cos(\varphi + 90^\circ) = -\sin \varphi$.

Zastosujmy wzór (13₂) do kąta $[(\alpha + 90^\circ) + \beta]$, to

$$\cos(\alpha + 90^\circ + \beta) = \cos(\alpha + 90^\circ) \cos \beta - \sin(\alpha + 90^\circ) \sin \beta$$

czyli $\cos(90^\circ + \alpha + \beta) = -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

lub zmieniając znaki i stosując do prawej strony prawo dodawania kąta 90° , t. j. wzór (9₂), otrzymamy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (13_1)$$

Jest to **teorem dodawania dla funkcji sinus**.

Wzór ten możnaby wyprowadzić także wprost z fig. 55, tworząc rzut wektora OA na oś y -ów i rzut linii łamanej $OB'A$ na tę samą oś. Otrzymalibyśmy najpierw na obliczenie y wzór

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (b)$$

a stąd już łatwo otrzymać (13₁).

Uwaga: Inny sposób dowodzenia teoremu dodawania (prostszy, ale dłuższy!) podajemy w ćwiczeniach V. Nr. 23, 24, 25. Twierdzenie to jest także w ścisłym związku z twierdzeniem Ptolemeusza (por. § 32).

Dzieląc równanie (13₁) przez (13₂), otrzymamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Dzieląc licznik i mianownik przez $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ i uwzględniając, że $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (13_3)$$

Jest to **teorem dodawania dla funkcji tangens**.

Jeżeli jeden z kątów jest prosty, np. $\alpha = 90^\circ$, to dowodzenie nasze nie utrzymuje się, bo $\cos \alpha = 0$, a więc dzielenie przez $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ nie jest wtedy dozwolone.

Wtedy jednak teorem dodawania wynika odrazu z wzoru (9₃),

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) = -\operatorname{ctg} \beta$$

bo Podobna uwaga dotyczy przypadku, gdy $\alpha + \beta = 90^\circ$.

(Z teoremów dodawania widzimy, że żadna funkcja trygonometryczna nie ma tej własności, aby $f(\alpha + \beta)$ była wprost równa $f(\alpha) + f(\beta)$!).

Z tych wzorów możnaby już także wyprowadzić teoremy dodawania dla pozostałych funkcji, ale są one mniej ważne.

Wzory te odnoszą się do wszelkich kątów bez ograniczeń. Zastosujmy je do kątów α i $360^\circ - \beta$, to:

$$\sin(\alpha + 360^\circ - \beta) = \sin \alpha \cos(360^\circ - \beta) + \cos \alpha \sin(360^\circ - \beta).$$

Wskutek periodyczności funkcji otrzymujemy stąd:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

czyli:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (14_1)$$

Podobnie wyprowadza się dla funkcji cosinus i tangens wzory:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (14_2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (14_3)$$

Teoremy dodawania stanowią podstawę do badania własności funkcji trygonometrycznych. Zawierają one w sobie przeważną ilość wzorów, któreśmy poprzednio wyprowadzili.

N. p. wzory z § 16 na $f(90^\circ - \alpha)$, $f(90^\circ + \alpha)$, $f(180^\circ - \alpha)$, otrzymamy z nich, kładąc kolejno za α kąty 90° , 90° , 180° , a za β kąty $-\alpha$, $+\alpha$, $-\alpha$. Także twierdzenie Pitagorasa mieści się w tych teoremach (podstaw we wzorze 14₂: $\alpha = \beta$!).

Przy pomocy tych wzorów wyprowadzimy szereg nowych związków, bardzo ważnych dla dokładniejszego zbadania natury funkcji i dla ich zastosowań.

§ 20. Mnożenie i dzielenie kąta.

Znając funkcje jakiegokolwiek kąta możemy znaleźć funkcje kąta dwa razy większego, 3 razy większego i t. d. i odwrotnie znając funkcje jakiegoś kąta możemy znaleźć funkcje połowy tego kąta, trzeciej części tego kąta i t. d.

Mnożenie i dzielenie kąta przez 2:

Podstawmy w teoremach dodawania (13) kąt $\alpha = \beta$.

Wtedy:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

czyli:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (15_1)$$

Podobnie:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (15_2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (15_3)$$

Jeżeli kąt 2α nazwiemy γ , to $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ i mamy:

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \gamma &= \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (a)$$

W tej formie używa się bardzo często wzorów (15). Służą one wtedy do wyrażenia funkcji całego kąta zapomocą funkcji połówek kąta.

Uwaga. Przy pomocy tych wzorów można wszystkie funkcje wyrazić przez $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. Kładąc $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = t$, otrzymamy $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2t}{1-t^2}$, a dzieląc równania na $\sin \gamma$ i $\cos \gamma$ przez $1 = \sin^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, otrzymamy $\sin \gamma = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \gamma = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Inne funkcje są odwrotnościami tych trzech. Widzimy więc, że zapomocą $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ wszystkie funkcje kąta γ wyrażają się jednoznacznie i wymiennie (bez drugich pierwiastków!).

Wzory te mają ciekawy związek z trójkątami, których wszystkie boki wyrażają się w liczbach całkowitych przy obraniu odpowiedniej wspólnej jednostki mierniczej; są to t. zw. trójkąty Pitagorasa lub egipskie. Podstawiając mianowicie w tych wzorach za t dowolny ułamek właściwy wymierny, otrzymujemy na γ kąt należący właśnie do jednego z takich trójkątów egipskich prostokątnych. Jeżeli bowiem którykolwiek bok, n. p. a wyraża się liczbą wymierną, to ponieważ wobec powyższych wzorów także $\sin \gamma$ i $\cos \gamma$ będą wymierne, a więc i boki b i c (bo $b = a : \operatorname{tg} \gamma$, $c = a : \sin \gamma$); wszystkie boki wyrażają się więc liczbami wymiernymi. Powiększając taki trójkąt tyle razy, ile wynosi wspólny mianownik tych trzech liczb: a, b, c , otrzymamy oczywiście znowu trójkąt prostokątny o tym samym kącie γ , boki jego wyrażają się już jednak liczbami całkowitymi.

N. p. jeżeli $t = \frac{1}{2}$, to biorąc $c = 1$ otrzymamy $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{3}{4}$, a stąd otrzymamy trójkąt egipski o bokach $c' = 5$, $a' = 4$, $b' = 3$. Biorąc $c = 1$ a $t = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ i t. d. otrzymamy trójkąty o bokach:

$$\begin{aligned} c' &= 13, a' = 12, b' = 5 \\ c' &= 17, a' = 8, b' = 15. \end{aligned}$$

Z trójkątów prostokątnych o bokach wymiernych można składać ukośnokątne o bokach wymiernych. Odrazu można otrzymać wszystkie trójkąty Pitagorasa prostokątne z wzorów: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, biorąc za m, n dowolne liczby całkowite.

Przy pomocy wzorów (a) możemy otrzymać odwrotnie funkcje połówek kąta wyrażone przez funkcje całego kąta.

Do tego celu używamy twierdzenia Pitagorasa:

$$1 = \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \text{ i wzoru}$$

$$\cos \gamma = \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

Dodając te równania stronami, otrzymamy:

$$2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 1 + \cos \gamma \text{ a stąd:}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} \quad (16_1)$$

Odejmując dane równania stronami, otrzymujemy:

$$2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \cos \gamma \text{ a stąd:}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{2}} \quad (16_2)$$

Wreszcie dzieląc $\sin \frac{\gamma}{2}$ przez $\cos \frac{\gamma}{2}$ mamy:

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}} \quad (16_3)$$

Co się tyczy znaku, to jeżeli mamy kąt γ , znak jest oznaczony, wiemy bowiem, do której ćwiartki należy $\frac{\gamma}{2}$; jeżeli jednak znamy tylko $\cos \gamma$, to możliwe są obydwa znaki, albowiem do jednej wartości $\cos \gamma$ należą kąty: γ_1 (ostry) i $360^\circ - \gamma_1$, $360^\circ + \gamma_1$ i t. d. (por. str. 72), a więc $\frac{\gamma}{2}$ może być kątem ostrym $\frac{\gamma_1}{2}$, lub rozwartym $180^\circ - \frac{\gamma_1}{2}$, i t. d. a więc znak każdej funkcji może być $+$ lub $-$.

Polowiąc kąt kilkakrotnie, moglibyśmy obliczyć funkcje trygonometryczne dowolnie małego kąta, wychodząc n. p. z kąta 90° , dla którego znamy:

$$\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0;$$

cały rachunek polega na kilkakrotnym wyciąganiu pierwiastka. Używając następnie teoremu dodawania, możnaby obliczyć funkcje kąta, składającego się z dowolnej liczby tych małych części, t. j. kąta zbliżającego się dowolnie do każdego z góry podanego kąta. Przez to zaś obliczylibyśmy zarazem z dowolnym przybliżeniem funkcje podanego kąta.

Potrącanie kąta i podział kąta na trzy równe części.

Znając $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$, chcemy obliczyć $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ i odwrotnie. Wychoząc z teoremu dodawania otrzymamy:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha = \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

a podstawiając za $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, otrzymamy ostatecznie:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

Podobnie wyprowadza się:

$$\sin 3\alpha = -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

Jeżeli teraz chcemy odwrotnie wyrazić $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ zapomocą $\cos 3\alpha$ i $\sin 3\alpha$, t. j. znając funkcje kąta $3\alpha = \beta$, znaleźć funkcje trzeciej części kąta: $\frac{\beta}{3}$, to należy rozwiązać równanie trzeciego stopnia. N. p. dla *cosinus*: znane $\cos 3\alpha$ oznaczamy literą a , a szukane $\cos \alpha$ literą x , to mamy rozwiązanie równanie:

$$4x^3 - 3x = a. \text{ (Dla sinus otrzymalibyśmy } 4x^3 - 3x = -a\text{).}$$

Otóż: *problem podziału kąta na 3 części prowadzi do równania trzeciego stopnia.*

Gdybyśmy rozwiązali to równanie, t. j. znaleźli $x = \cos \frac{\beta}{3}$, to wykreślając (fig. 56.) w kole o promieniu 1 kąt β i odcinając na nieruchomym

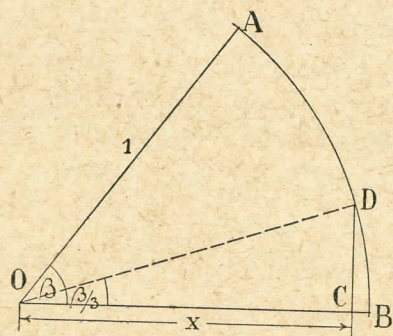


Fig. 56.

ramieniu odcinek $x = \cos \frac{\beta}{3}$ otrzymalibyśmy z łatwością sam kąt $\frac{\beta}{3}$. Trzeba tylko na końcu C odcinka x poprowadzić prostą prostopadłą do ramienia nieruchomego i punkt D, w którym ta prostopadła przecina koło, połączyć z O.

Wykazano jednak, że ten problem 3-go stopnia nie da się rozwiązać przy użyciu samych drugich pierwiastków, lub interpretując to geometrycznie: nie da się rozwiązać jedynie przy użyciu cyrkla

i linealu, konstrukcją platońską.

Natomiast da się rozwiązać to zagadnienie przy użyciu trzecich pierwiastków.

U w a g a. Mimoto usiłowano — napróżno — zagadnienie to rozwiązać przy pomocy linji i cyrkla, zapomocą skończonej liczby konstrukcji. Przez długie wieki problem podziału kąta na trzy części był — obok kwadratury koła — ulubionym zagadnieniem matematyków. Obmyślano też rozmaite mechanizmy do wykonania tego zagadnienia i wprowadzono rozmaite linje krzywe, ułatwiające konstrukcję. Do zajmowania się tą

kwestję przyczyniło się i to, że do obliczenia tablic funkcji trygonometrycznych potrzebna jest znajomość wartości $\sin 1^\circ$ i $\cos 1^\circ$. Otóż z planimetrycznych rozważań można obliczyć *sinus* i *cosinus* kątów 18° i 15° przy pomocy dziesięciokąta i dwunastokąta umiarowego (por. str. 7). Używając wzorów na $\sin(\alpha - \beta)$ i $\cos(\alpha - \beta)$ możemy stąd następnie obliczyć:

$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ) \text{ i} \\ \cos 3^\circ &= \cos(18^\circ - 15^\circ)\end{aligned}$$

Pozostaje jeszcze do rozwiązania zadanie: obliczyć $\sin 1^\circ$ i $\cos 1^\circ$, znając $\sin 3^\circ$ i $\cos 3^\circ$, a więc podział kąta 3° na trzy równe części.

Dopiero z końcem XVIII. wieku poznano, że nie obejdzie się przy tem zadaniu bez trzecich pierwiastków, a więc, że niemożliwa jest dla tego zagadnienia konstrukcja platońska.

W podobny sposób rozważa się zagadnienia podziału kąta na dowolną liczbę równych części.

§ 21. Nierówności dla funkcji sinus. Obliczenie tablic.

Mając obliczone wartości funkcji trygonometrycznych dla 1° , $1'$ lub $1''$, możemy obliczyć kolejno wartości funkcji dla wszystkich większych kątów w odstępach 1° , $1'$ lub $1''$ przy pomocy teoremu dodawania, a więc używając tylko czterech działań arytmetycznych.

N. p. znając $\sin 1^\circ$ i $\cos 1^\circ$, obliczymy:

$$\sin 2^\circ = 2 \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ; \cos 2^\circ = \cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ, \text{ potem rozwinie } \sin 3^\circ = \sin(2^\circ + 1^\circ), \text{ i } \cos 3^\circ = \cos(2^\circ + 1^\circ) \text{ i t. d.}$$

Widzieliśmy jednak, że już ściśle obliczenie funkcji 1° sprawia znaczne trudności, a jeszcze większe mielibyśmy dla $1'$ lub $1''$. Jednakowoż przy tak małych kątach możemy się oprzeć na innej zasadzie. Wyprowadzimy mianowicie pewne ważne nierówności dla $\sin x$.

Narysujmy koło o promieniu 1 i kąt ostry x . Wykreślmy linje, których liczby wymiarowe dają $\sin x$ i $\tan x$. Liczba wymiarowa łuku AD jest łukową miarą kąta x . Porównajmy pola trójkątów OAD i OCD i pole wycinka $\widehat{OAD}$ (fig. 57).

$$\begin{aligned}OAD &< \widehat{OAD} < OCD \text{ czyli} \\ AB \cdot \frac{OD}{2} &< \widehat{AD} \cdot \frac{OD}{2} < CD \cdot \frac{OD}{2}\end{aligned}$$

Upraszczając przez $\frac{OD}{2}$ otrzymamy:

$$AB < \widehat{AD} < CD \text{ czyli}$$

$$\sin x < x < \tan x \quad (17)$$

Dla każdego kąta ostrego jest więc sinus tego kąta mniejszy od kąta wyrażonego w mierze łukowej, a ten kąt mniejszy od tangensa kąta. (Na

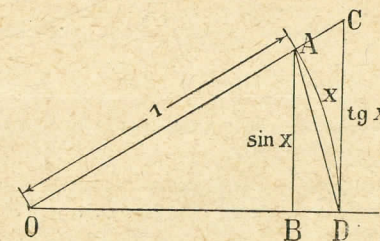


Fig. 57.

obrazie graficznym: prosta $y=x$ biegnie powyżej sinusoidy: $y=\sin x$ a poniżej tangensoidy: $y=\operatorname{tg} x$ dla kątów ostrych. Narysuj!

Wartość $\sin x$ jest więc ograniczona z góry; aby ją ograniczyć także z dołu, wychodzimy z wzoru:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

Ale według wzoru (17) mamy:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}, 1 - \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

A więc: $\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$ czyli ostatecznie:

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

Otóż $\sin x$ dla kątów ostrych zawiera się między następującymi wartościami:

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{4} \quad (18)$$

Różnica wartości ograniczających wynosi $\frac{x^3}{4}$, jeżeli więc za $\sin x$ weźmiemy wartość przybliżoną x , popełnimy błąd mniejszy co do bezwzględnej wartości od $\frac{x^3}{4}$ (kąt x wyrażony w mierze łukowej!).

Zastosujmy to przybliżenie do kąta 1° . W mierze łukowej:

$$x : 2\pi = 1^\circ : 360^\circ, \text{ stąd } x = 0.0174532925 \dots \text{ więc}$$

$$x < 0.02$$

Biorąc x za $\sin x$ popełniamy więc przy kątach nie przenoszących 1° błąd mniejszy od $\frac{x^3}{4}$ t. j. mniejszy od $\frac{0.02^3}{4} = \frac{0.000008}{4} = 0.000002$. Błąd ten da się więc odczuć dopiero na szóstym miejscu po kropce dziesiętnej. Jeszcze korzystniejsze będzie to przybliżenie dla kąta $1'$. W ten sam sposób, jak dla 1° , obliczymy, że biorąc x za $\sin x$, popełniamy wtedy błąd mniejszy od 0.000000000007 , a więc błąd dający się odczuć dopiero na dwunastym miejscu po kropce dziesiętnej. Przy kącie $1''$ błąd ten może wystąpić dopiero na siedemnastym miejscu po kropce. (Por. § 12).

Otóż biorąc za podstawę rachunku n. p. wartość;

$$\sin 1' \neq \operatorname{arc} 1' = 0.0002908882 \quad (\text{porównaj str. 45})$$

popełniamy błąd dopiero w dalszych miejscach dziesiętnych, nie wypisanych tutaj. Obliczamy stąd $\cos 1'$ przy pomocy wzoru:

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'}$$

a potem przy pomocy teoremu dodawania: $\sin 2'$, $\cos 2'$, $\sin 3'$, $\cos 3'$ i t. d. Dalsze wartości należy skrócić do mniejszej liczby miejsc dziesiętnych, ponieważ przy rachunku błędy wzrastają.

Skoro dojdziemy do jakiegoś kąta, którego funkcje znamy ściśle, wprost z rozważań planimetrycznych (n. p. do kąta 3° , 15° , 60° i t. p.) poprawiamy końcowe miejsca i liczymy dalej wzorami na $\sin(\alpha + 1')$, $\cos(\alpha + 1')$ i t. d.

Uwaga. Przy takich rachunkach z korzyścią można używać wzoru: $\sin(n+1) \cdot 1' = 2 \sin n \cdot 1' \cos 1' - \sin(n-1) \cdot 1'$, zwanego wzorem Simpsona. Wzór ten otrzymuje się przez dodanie wzorów na $\sin(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha - \beta)$ i podstawienie $\beta = 1'$, $\alpha = n \cdot \beta = n \cdot 1'$.

Tak powstały tablice w historycznym rozwoju trygonometrii. Dzisiaj jednak posiadamy o wiele dogodniejsze sposoby. Analiza wyższa podaje szeregi nieskończone, pozwalające obliczyć funkcje trygonometryczne każdego dowolnego kąta z dowolną dokładnością (n. p. do 30 miejsc dziesiętnych, do czego omówione sposoby nie nadają się zupełnie) i to wprost, bez obliczenia wartości poprzednich. Jeżeli mianowicie kąt x jest wyrażony w mierze łukowej, to wprost:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

Wykazano, że szeregi te są zbieżne (t. j. suma dąży do skończonej granicy, gdy liczba wyrazów wzrasta nieograniczenie) dla wszelkich wartości x ; kilka wyrazów szeregu wystarczy, aby otrzymać już bardzo dokładnie wartości tych funkcji. N. p. dla kątów nie przekraczających 45° — a takie tylko trzeba brać pod uwagę przy sporządzaniu tablic — piąty wyraz szeregu wpływa dopiero na miejsca dalsze od szóstego miejsca po kropce dziesiętnej.

Historyczne uwagi o tablicach funkcji trygonometrycznych.

Wspominaliśmy już, że pierwszą tablicę funkcji sinus, a właściwie tablicę cięciw, podał astronom Ptolomeusz w II. wieku po nar. Chr. Indyjskie tablice funkcji sinus nie były dokładniejsze; dopiero Arabowie posunęli naprzód trygonometrię wogóle, a w szczególności obliczenie tablic. Abul Wafa (X. wiek po nar. Chr.) podał tablice funkcji sinus, cosinus, tangens i cotangens w odstępach $15'$ z dokładnością 7 miejsc dziesiętnych; on też pierwszy używał koła o promieniu 1. Prace te poszły w wiekach średnich przeważnie w zapomnienie; dopiero w epoce odrodzenia powstają dokładniejsze tablice: Regiomontana (Müllera) i Kopernika (wiek XV.), a najdokładniejsze podał uczeń i przyjaciel Kopernika: Rheticus (czytaj: Retikus) narodowości niemieckiej, profesor akademii krakowskiej (od r. 1559 do 1574). Obliczył on wartości wszystkich 6 funkcji trygonometrycznych w odstępach $10''$ z dokładnością 10 miejsc dziesiętnych. Do wykonania tej olbrzymiej pracy opłacał Rheticus z własnych funduszy przez 12 lat kilku nastu rachmistrzów, a mimoto dopiero po jego śmierci ukończono pracę i wydano ją pod tytułem: »Opus palatinum«. Wszystkie późniejsze tablice były tylko poprawniej-

szemi — najczęściej skróconemi — wydaniem tego epokowego dzieła. Wiek XVII przyniósł odkrycie logarytmów. Neper, twórca logarytmów, wprowadził je właśnie dla ułatwienia rachunków trygonometrycznych. Sporządził on pierwsze tablice logarytmów funkcji trygonometrycznych w odstępach 1' z dokładnością 10 miejsc dziesiętnych. Wszystkie te rachunki wykonywano bardzo mozolnie opierając się na teoremie dodawania. Dopiero szeregi trygonometryczne, odkryte przez Newtona (koniec XVII. i początek XVIII. wieku), ułatwiły znacznie pracę i dały możliwość szybkiej kontroli rachunku. W r. 1794 wydał Vega wielkie tablice logarytmów funkcji trygonometrycznych w odstępach 10" do 10 miejsc dziesiętnych. Dalsza praca polegała już tylko na prostowaniu błędów, w tych tablicach zawartych.

Z wzoru (18) wysnuliśmy wniosek, że dla małych kątów $\sin x$ zbliża się do x . Ścisłej to zbliżanie się możemy określić, przechodząc do granicy.

I tak dzieląc tę nierówność (18) przez x , otrzymamy:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{4}$$

Jeżeli kąt x maleje i dąży do zera, to $1 - \frac{x^2}{4}$ dąży do 1; a więc $\frac{\sin x}{x}$ zawiera się stale między dwoma wyrażeniami, dążącymi do 1, musi zatem i samo dążyć do 1. Piszemy to:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (19)$$

Granica wyrażenia $\frac{\sin x}{x}$, gdy kąt x dąży do zera, jest liczbą 1.

Teraz już możemy zrozumieć drogę prowadzącą do zbudowania szeregów na $\sin x$ i $\cos x$. Otóż podobnie do wzorów na $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ rozwija się wzory na $\sin 4\alpha$ i t.d. i otrzymuje się ogólnie:

$\sin n\alpha = n \sin \alpha \cos^{n-1} \alpha - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 \alpha \cos^{n-3} \alpha + \dots$. Kładąc tu $n\alpha = x$, sprowadzamy ten wzór do postaci:

$$\sin x = x \cdot \cos^{n-3} \alpha \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) - \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{n-1} \alpha \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^3 + \dots$$

Jeżeli n rośnie nieograniczenie przy stałym x , to α dąży do zera (bo $\alpha = \frac{x}{n}$), a więc $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ dąży do 1; wszystkie potęgi $\cos \alpha$ dążą do 1, a α , 2α do zera i z całego wzoru zostaje:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

przyczem szereg jest nieskończony.

Zupełnie podobnie wyprowadza się szereg na $\cos x$.

§ 22. Zamiana sum i różnic na iloczyny.

Teorem dodawania oddaje wielkie usługi, jeżeli chcemy użyć logarytmów do obliczeń trygonometrycznych. Często mamy do czynienia z sumami lub różnicami dwóch funkcji, co — jak wiadomo — jest powodem znacznych niedogodności przy logarytmowaniu. Wykażemy jednakże, że takie sumy (różnice) można zamienić na iloczyny. Weźmy najpierw sumę:

$$\sin \gamma + \sin \delta$$

$$\text{Podstawmy: } \left. \begin{array}{l} \gamma = \alpha + \beta \\ \delta = \alpha - \beta \end{array} \right\} \text{ to } \left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\gamma + \delta}{2} \\ \beta = \frac{\gamma - \delta}{2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Wtedy } \sin \gamma + \sin \delta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Podstawiając za α i β wartości, otrzymamy ostatecznie:

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \quad (20_1)$$

Mamy więc sumę dwóch funkcji zamienioną na iloczyn. Podobnie wykazuje się prawdziwość wzorów:

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \quad (20_2)$$

$$\cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \quad (20_3)$$

$$\cos \gamma - \cos \delta = -2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \quad (20_4)$$

Wzorów tych używa się także, aby wyrażenia: $1 + \sin \delta$, $1 - \sin \delta$, $1 + \cos \delta$, $1 - \cos \delta$ zamienić na iloczyny. Wtedy trzeba zamiast 1 postawić $\sin 90^\circ$ lub $\cos 0^\circ$.

Przy pomocy tych wzorów i wzoru (19) możemy obliczyć szybkość wzrastania (pochodną) funkcji trygonometrycznych, t.j. granicę, do jakiej dąży stosunek przyrostu funkcji do przyrostu kąta, gdy przyrost kąta dąży do zera.

Jeżeli kąt wzrośnie od wartości x do $x + \delta$, to $\sin x$ wzrośnie od $\sin x$ do $\sin(x + \delta)$. Przyrost funkcji $\sin x$ wynosi więc:

$$\sin(x + \delta) - \sin x \text{ czyli po zastosowaniu wzoru } (20_1)$$

$$2 \sin \frac{\delta}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\delta}{2} \right)$$

25. Wiedząc, że teorem dodawania jest prawdziwy dla kątów ostrych, rozszerzyć to prawo na kąty większe, używając wzorów redukcyjnych (na powiększanie kąta o 90°).

26. Wyprowadzić teorem dodawania dla funkcji cotangens!

27. Znając funkcje kąta 18° i kąta 15° , obliczyć funkcje:

a) kąta 33° ; b) kąta 3° .

(Dane: $\sin 18^\circ = 0.30902$, $\cos 18^\circ = 0.95106$, $\operatorname{tg} 18^\circ = 0.32492$)

$\sin 15^\circ = 0.25882$, $\cos 15^\circ = 0.96593$, $\operatorname{tg} 15^\circ = 0.26795$)

28. Biorąc wartości $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ z tabelki w § 9, obliczyć $\sin 3^\circ$ do 7 miejsc dziesiętnych.

29. Wykazać, że

$$\frac{\pi}{180} > \sin 1^\circ > \frac{1}{3} \sin 3^\circ$$

i wyznaczyć wartość tych liczb ograniczających do 7 znaków dziesiętnych (za $\sin 3^\circ$ wziąć wartość wynikającą z ćwicz. 28).

30. Wykazać, że:

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$

b) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$

c) $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$

31. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta 10° , wiedząc, że:

$$\cos 20^\circ = 0.93969.$$

32. Obliczyć funkcje trygonometryczne kąta 6° , wiedząc, że:

$$\sin 3^\circ = 0.052336.$$

33. Wyrazić $\sin 3\alpha$ zapomocą $\sin \alpha$.

34. Wyprowadzić równanie podziału kąta na 5 równych części:

$$\cos 5\alpha = 5 \cos \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 16 \cos^5 \alpha$$

35. Wychodząc z wartości $\cos 90^\circ$, obliczyć:

$$\cos 45^\circ, \cos 22^\circ 30', \cos 11^\circ 15' \text{ i t. d. ...}$$

$$(\text{Otrzymamy ogólnie } \cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots}}})$$

36. Wykazać, że

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x + \pi}{2} \\ = 2^3 \sin \frac{x}{4} \sin \frac{x + \pi}{4} \sin \frac{x + 2\pi}{4} \sin \frac{x + 3\pi}{4}.$$

37. Wykazać, że: a) $\operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

b) $\operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

c) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

d) $\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ (użyć wzoru c)

e) $1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos \alpha}$

38. Wykazać, że: a) $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

b) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$

39. Wzór $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ sprowadzić przez podstawienie $\operatorname{tg} a \cdot \cos \gamma = \operatorname{tg} \varphi$ do formy:

$$\cos c = \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}$$

przydatnej do rachunku logarytmicznego.

40. Zastosować wynik poprzedniego zadania do wartości: $a = 47^\circ$, $b = 103^\circ$, $\gamma = 51^\circ$. Obliczyć c !

41. Udowodnić, że $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \cdot \sin (\alpha - \beta)$.

42. Wyrazić $\operatorname{tg} (\alpha + \beta + \gamma)$ zapomocą $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ i $\operatorname{tg} \gamma$.

§ 21. 43. Obliczyć $\sin 1''$ do 15 miejsc dziesiętnych:

$$(\pi = 3.14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ \dots)$$

44. O ile różni się od liczby 1 stosunek $\frac{\sin x}{\arcsin x}$ dla kątów 1° , $1'$, $1''$?

45. Udowodnić prawdziwość następujących wzorów (zwanych wzorami Simpsona):

$$\sin (n+1) \cdot \alpha = 2 \cos \alpha \sin n \alpha - \sin (n-1) \alpha$$

$$\cos (n+1) \cdot \alpha = 2 \cos \alpha \cos n \alpha - \cos (n-1) \alpha$$

Przy pomocy tych wzorów obliczono tablice funkcji trygonometrycznych, biorąc np. $\alpha = 10''$, a za n kolejno 1, 2, 3, ..., 6, 7, ...

46. Obliczyć funkcje trygonometryczne 2° , 3° , 4° , znając $\sin 1^\circ = 0.017453$, $\cos 1^\circ = 0.99985$.

§ 22. 47. Udowodnić, że: $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$
 $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$

48. Używając wzorów poprzedniego zadania, wykonać mnożenie: $0.47971 \cdot 0.59248$ przy pomocy tablicy wartości funkcji $\sin$ i $\cos$.

(Wskazówka: uważając te liczby za $\sin \alpha$ i $\sin \beta$, znaleźć w tablicach α i β i obliczyć na podstawie znalezionych kątów wartość prawej strony).

49. Wykazać, że dla $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ zachodzi związek:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$

b) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$

50. Wyrażenie:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$$

zamienić na iloczyn, jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

51. Wykazać, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, to

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

52. Wykazać, że:

a) $\sin (30^\circ + \alpha) + \sin (30^\circ - \alpha) = \cos \alpha$;

b) $\cos (30^\circ - \alpha) - \cos (30^\circ + \alpha) = \sin \alpha$;

c) $\sin (30^\circ + \alpha) = \sin (30^\circ - \alpha) + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha$;

d) $\sin (30^\circ + \alpha) = \sqrt{3} \cdot \sin (60^\circ + \alpha) - \sin (90^\circ - \alpha)$.

(Wzoru c) używa się, aby obliczyć wartości funkcji $\sin$ dla kątów od 30° do 60° , jeżeli znamy wartości $\sin$ dla kątów od 0° do 30°).

53. Wykazać, że:

$$\sin (60^\circ + \alpha) = \sin (60^\circ - \alpha) + \sin \alpha.$$

(Wzoru tego używa się, aby obliczyć $\sin x$ dla $x = 60^\circ \dots 90^\circ$, jeżeli znamy $\sin x$ dla $x = 0^\circ \dots 60^\circ$).

54. Udowodnić, że:

$$\sin x + \sin(36^\circ - x) + \sin(72^\circ + x) = \sin(36^\circ + x) + \sin(72^\circ - x)$$

wiedząc, że $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

55. Wykazać, że:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos(x+b) + \cos(x+2b) + \cos(x+3b) + \cos(x+4b) = \\ = \frac{\sin \frac{5}{2}b \cdot \cos(x+2b)}{\sin \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Wskazówka: Pomnożyć obie strony przez $\sin \frac{b}{2}$ i każdy wyraz lewej strony przedstawić jako różnicę 2 sinusów.

55. a) Wyprowadzić dla funkcji sinus wzór podobny, jak w zad. 55 dla cosinus.

56. Wykazać, że pochodną funkcji:

$$\text{a) } \cos x \text{ jest } -\sin x; \quad \text{b) } \operatorname{tg} x \text{ jest } \frac{1}{\cos^2 x}$$

Rozwiązanie ćwiczeń.

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}; \quad \text{b) } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = \\ = \frac{-3}{\sqrt{13}}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}; \quad \text{c) } \sin \alpha = \frac{-8}{\sqrt{73}}, \cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{73}}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{3}; \quad \text{d) } \sin \alpha = \\ = \frac{-6}{\sqrt{52}}, \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{52}}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}. \quad 2. +, -, +, -, -, -. \quad 3. \text{ Cosinus, tan-} \end{aligned}$$

gens, cotangens i secans jednoznacznie, a sinus i cosecans dwuznacznie.

4. Sinusoida będzie powiększeniem fig. 43. 5. a) Sinusoida przesunięta o $\frac{\pi}{6}$ na lewo (w kierunku ujemnym); b) sinusoida przesunięta o 3 jednostki

na lewo; c) sinusoida przesunięta o $2\frac{1}{2}$ jednostki na prawo. 6. a) Długość fali jest 2 razy mniejsza a wysokość taka sama, jak dla pierwotnej sinusoidy $y = \sin x$; b) Długość fali wynosi 1 i wysokość 1; c) Długość fali wynosi 3, wysokość 1; d) Długość fali wynosi 0.01, wysokość 1. 7. a) Fala jest przesunięta o 4 jednostki na lewo, długość wynosi π , a wysokość i każda rzędna są powiększone trzykrotnie; b) Fala przesunięta o $\frac{3}{4}$ na prawo, długość wynosi 0.01 a wysokość 1600π ; c) m oznacza przesunięcie na lewo, n skrócenie długości fali a p powiększenie każdej rzędnej sinusoidy $y = \sin x$; d) przesunięcie fali na lewo $\frac{\tau}{T}$, długość fali τ , wy-

sokość a . 8—11. Obrazy powstają z odpowiednich sinusoid przez przesunięcie na lewo o długość $\frac{\pi}{2}$.

$$12. \text{ a) } x = n \cdot 360^\circ \pm 15^\circ 30' \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$\text{b) } x = n \cdot 360^\circ \pm 147^\circ 40' \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$13. \text{ a) } x = m \cdot \pi + (-1)^m \cdot \frac{\pi}{8} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$\text{b) } x = m \cdot \pi - (-1)^m \cdot \frac{3\pi}{4} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$14. \text{ a) } \cos 210^\circ = -0.86603 \text{ (dlaczego znak } -?), \operatorname{tg} 210^\circ = 0.57735, \operatorname{ctg} 210^\circ = 1.73205; \quad \text{b) } \sin \alpha = \pm 0.94281, \operatorname{tg} \alpha = \mp 2.82843, \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$= \mp 0.3714; \quad \text{c) } \operatorname{ctg} 195^\circ = 2 + \sqrt{3}, \sin 195^\circ = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}, \cos 195^\circ =$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}; \quad \text{d) } \operatorname{tg} \alpha = 0.4, \sin \alpha = -0.37139, \cos \alpha = -0.92848. \quad 15. \text{ a) }$$

$$0.70711, -0.24192, -0.70711, 0.52992; \quad \text{b) } -0.13917, -0.90631, 0.24192, 0.62166; \quad \text{c) } -0.70021, -1.53986, -2.47509, -4.10299; \quad \text{d) } -9.51436, 3.07768, -4.33148, 1.56858. \quad 16. \text{ a) b) Porównaj tabelkę w § 16-tym.}$$

$$17. \text{ a) } x = 22^\circ, 158^\circ, 382^\circ, \dots - 202^\circ, -338^\circ, \dots \text{ ogólnie: } x = m \cdot 180^\circ + \\ + (-1)^m \cdot 22^\circ; \quad \text{b) } x = m \cdot 180^\circ + (-1)^m \cdot 11^\circ 32' 2''; \quad \text{c) } x = n \cdot 360^\circ \pm 66^\circ 6' 6''; \\ \text{d) } x = n \cdot 360^\circ \pm 125^\circ 10'; \quad \text{e) } x = 137^\circ + n \cdot 180^\circ; \quad \text{f) } x = 48^\circ 44' 34'' + n \cdot 180^\circ; \\ \text{g) } x = 159^\circ 59' + n \cdot 180^\circ; \quad \text{h) } x = 121^\circ 41' + n \cdot 180^\circ. \quad 18. \text{ a) } x = n \cdot 360^\circ \pm \\ \pm 50^\circ 45' 52''; \quad \text{b) } x = 31^\circ 36' 53'' + n \cdot 180^\circ, \quad \text{c) } x = -47^\circ 21' \frac{1}{2} + n \cdot 180^\circ,$$

$$\text{d) } 32^\circ 28' 32'' + n \cdot 180^\circ. \quad 20. 1 + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} =$$

$$= 0. \quad 21. 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos 2 \cdot \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} = 0. \quad 22. R_x =$$

$$= 5.13089 \text{ kg}, \quad R = 46.96515 \text{ kg}. \quad 26. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \quad 27. \text{ a) }$$

$$\sin 33^\circ = 0.54464, \cos 33^\circ = 0.83867, \operatorname{tg} 33^\circ = 0.64941; \quad \text{b) } \sin 3^\circ = 0.05234, \cos 3^\circ = 0.99863, \operatorname{tg} 3^\circ = 0.05241. \quad 28. 0.0523360. \quad 29. 0.0174533 > \sin 1^\circ >$$

$$0.0174453. \quad 31. \sin 10^\circ = 0.17365, \cos 10^\circ = 0.98481, \operatorname{tg} 10^\circ = 0.17633. \quad 32. \sin 6^\circ = 0.10453, \cos 6^\circ = 0.99452, \operatorname{tg} 6^\circ = 0.1051. \quad 33. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha -$$

$$-4 \sin^3 \alpha. \quad 35. \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}, \cos 22^\circ 30' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cos 11^\circ 15' =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}. \quad 40. (\varphi = 34^\circ 0' 49''), c = 72^\circ 50' 25''. \quad 42. \operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma}. \quad 43. \sin 1'' = 0.000004848136811.$$

44. Bezwzględna wartość różnicy wynosi 0.000762... dla 1° , 0.0000000213... dla $1'$, 0.000000000059... dla $1''$. 46. Wyniki sprawdzić w tablicach (np. w tablicy I na stronie 10). 48. 0.28422. 49. a) Wskazówka: za $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ podstawić wartość z wzoru (13₃) a następnie wyrazić $\alpha + \beta$ przez γ ;

b) Wskazówka: sprowadzić wszystko do funkcji tg i za $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ pod-

stawić wartość z wzoru (13₃). 50. $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. 52. c) Wskazówka: przenieść $\sin(30^\circ - \alpha)$ na pierwszą stronę i zastosować wzór (20₂); d) Wskazówka: przenieść $\sin(90^\circ - \alpha)$ na pierwszą stronę i zastosować wzór (20₂). 56. b) Wskazówka: zastosować do różnicy dwóch tangensów wzór z ćwiczenia 38.

§ 23. Równania gonjometryczne.

Równania, w których niewiadoma występuje pod znakiem funkcji trygonometrycznych, nazywamy równaniami gonjometrycznymi. Równania takie posiadają nieskończenie wiele rozwiązań, a więc należą do równań przestępnych, każde bowiem równanie algebraiczne posiada tylko skończoną liczbę pierwiastków. Weźmy n.p. najprostsze równanie gonjometryczne:

$$\sin x = 0 \quad (1)$$

Wiemy, że oprócz $x_1 = 0$, spełniają to równanie także kąty:

$$x_2 = +180^\circ, x_3 = -180^\circ, x_4 = +360^\circ, x_5 = -360^\circ, \dots$$

ogólnie: $x = n \cdot 180^\circ$ (lub w mierze łukowej $x = n \cdot \pi$), gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną. Geometrycznie możemy używać te rozwiązania w następujący sposób: liczby spełniające równanie (1), spełniają także układ równań:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = 0 \end{cases}$$

a więc są wspólnymi punktami linii $y = \sin x$ t.j. sinusoidy i linii $y = 0$ t.j. osi x -ów. Na figurze 59 są takimi punktami:

$A, B, C, D, \dots, E, F, \dots$

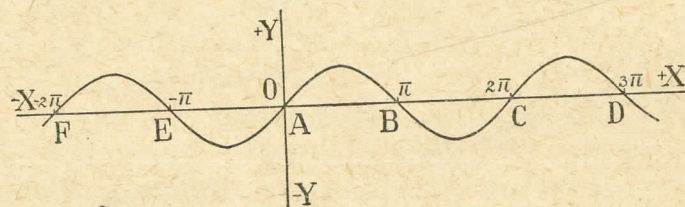


Fig. 59.

Odpowiadają one wartościom:

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$$

Ogólne rozwiązanie ma więc postać:

$$x = n \cdot \pi$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, ujemną lub zerem, t.j. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

W podobny sposób możnaby rozwiązać równania:

$$\sin x = m, \quad \operatorname{tg} x = c \quad \text{i t. d.}$$

opierając się na wzorach (a) (b) (c) z §§ 15 i 17 lub graficznie (porównaj figurę 44 w § 15)...

Zajmiemy się tu tylko niektórymi typami takich równań, ponieważ rozwiązywanie ogólnych równań gonjometrycznych sprawia wielkie trudności, nawet przy użyciu analizy wyższej.

1. Równania typów:

$$\sin ax = \sin bx \quad \dots \dots \dots (r)$$

$$\cos cx = \cos dx \quad \dots \dots \dots (s)$$

$$\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx \quad \dots \dots \dots (t)$$

rozwiązuje się bezpośrednio przez zastosowanie wzorów (a), (b), (c) z § 15 i 17. Jeżeli bowiem dwa kąty ax i bx dają tę samą wartość funkcji sinus, to są związane wzorem $ax = n\pi + (-1)^n bx$, przyczem $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, a stąd już łatwo obliczyć x . Podobnie z warunku (s) wynika $cx = 2n\pi \pm dx$, a z warunku (t) wynika $px = n\pi + qx$.

Przykład. Rozwiązać równanie:

$$\sin 2x = \sin 3x$$

Stosując wzór (a) z § 15 otrzymujemy:

$$3x = n\pi + (-1)^n 2x.$$

Dla n parzystego, t. j. dla $n = 2m$ jest $(-1)^n = +1$ i otrzymamy po uporządkowaniu: $x = 2m\pi$.

Dla n nieparzystego t. j. dla $n = 2m + 1$ jest $(-1)^n = -1$ i otrzymamy po uporządkowaniu: $x = (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{5}$

Wszystkie rozwiązania naszego równania są więc zawarte we wzorach:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2m\pi \\ x_2 &= (2m + 1) \cdot \frac{\pi}{5} \end{aligned} \right\} \text{ przyczem } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

lub w mierze katowej (ponieważ $\frac{\pi}{5}$ odpowiada 36°):

$$x_1 = 0, \pm 360^\circ, \pm 2 \cdot 360^\circ, \pm 3 \cdot 360^\circ, \dots$$

$$x_2 = \pm 36^\circ, \pm 3 \cdot 36^\circ, \pm 5 \cdot 36^\circ, \dots$$

Jeżeli po jednej stronie równania występuje funkcja, a po drugiej stronie cofunkcja, to zamieniamy cofunkcję na funkcję kąta dopełniającego i sprowadzamy takie równanie do poprzedniego typu.

Przykład.

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{ctg} 5x$$

Przekształcamy to równanie na:

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)$$

a stąd na podstawie wzoru (c) z § 17 otrzymujemy:

$$4x = n\pi + \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)$$

a więc

$$\underline{x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{18}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Wobec tego, że $\frac{\pi}{18}$ odpowiada 10° stopniom w mierze stopniowej, otrzymujemy następujący szereg rozwiązań:

$$x = \pm 10^\circ, \pm 30^\circ, \pm 50^\circ, \dots$$

2. Jeżeli w równaniu występuje kilka funkcji tego samego kąta x , a nie występuje sam kąt x , *wyrażamy wszystkie funkcje zapomocą jednej funkcji* n. p. zapomocą $\sin x$. To się da zawsze zrobić przy użyciu co najwyżej drugich pierwiastków. Wprowadzając nową zmienną, n. p. $\sin x = y$, otrzymujemy równanie algebraiczne na y . Rozwiązując je, otrzymujemy wartości funkcji $\sin x$, jednak tylko te wartości y są przydatne, które są rzeczywiste i zawarte w granicach $-1 \dots +1$. Następnie znajdujemy samo x z tablic trygonometrycznych i z wzorów (a), (b), (c) z §§ 15 i 17, podających wszystkie kąty, należące do tej samej wartości funkcji.

rzyk ady. a) Rozwiązać równanie:

$$\operatorname{tg} x = \cos x$$

Wyrażamy $\operatorname{tg} x$ przez $\sin x$ i $\cos x$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

stąd

$$\sin x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \sin x = 1$$

Kładąc $\sin x = y$ otrzymujemy równanie algebraiczne:

$$y^2 + y = 1$$

stąd według znanej reguły:

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Pierwsza wartość jest jednak nieprzydatna, bo $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$ a musi

bć zawsze $\sin x > -1$. Z drugiej wartości:

$$y_2 = 0.61803$$

otrzymujemy: $\sin x = 0.61803$, a stąd jeden kąt (wartość główna): $x = 38^\circ 10' 24''$. Wszystkie kąty mające tę samą wartość funkcji sinus są zawarte w ogólnym wzorze:

$$\underline{x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 38^\circ 10' 24''} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

lub w dwóch prostszych wzorach:

$$x = \begin{cases} 38^\circ 10' 24'' + m \cdot 360^\circ \\ 141^\circ 49' 36'' + m \cdot 360^\circ \end{cases} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Graficznie rozwiązalibyśmy to równanie, znajdując punkty przecięcia tangensoidy: $y = \operatorname{tg} x$ z cosinusoidą $y = \cos x$. Odcięte x tych punktów przecięcia są pierwiastkami danego równania. (Narysuj!).

b) Rozwiązać równanie:

$$\operatorname{ctg} x - \cos x = 1 - \sin x$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x = 1 - \sin x$$

$$\cos x (1 - \sin x) = \sin x (1 - \sin x)$$

$$(\pm \sqrt{1 - \sin^2 x} - \sin x) (1 - \sin x) = 0$$

$$(\pm \sqrt{1 - y^2} - y) (1 - y) = 0$$

Stąd albo: $1 - y = 0$ czyli $\underline{y = 1}$

$$\text{albo: } \pm \sqrt{1 - y^2} - y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{czyli } \pm \sqrt{1 - y^2} &= y \\ 1 - y^2 &= y^2 \\ y &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Otóż albo $\sin x = 1$ a stąd $x = 90^\circ$, ogólnie:

$$\underline{x_1 = 90^\circ + n \cdot 360^\circ} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

albo $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a stąd $x = 45^\circ$ i $x = 180^\circ - 45^\circ$ a ogólnie:

$$\begin{aligned} x_2 &= 45^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x_3 &= 135^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

albo wreszcie $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ a stąd $x = -45^\circ$ i $x = -135^\circ$ a ogólnie:

$$\begin{aligned} x_4 &= -45^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x_5 &= -135^\circ + n \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

Niektóre z tych wartości są jednak nieprzydatne, bo nie spełniają pierwotnego równania, a mianowicie wartości x_3 i x_4 spełniają tylko równanie $-\operatorname{ctg} x + \cos x = 1 - \sin x$, (prowadzące go do tego samego równania końcowego dla zmiennej y). Wszystkie pierwiastki są zatem zawarte we wzorach x_1 , x_2 i x_5 .

U w a g a: Można by także rozwiązać nasze równanie bez wprowadzania zmiennej y , rozkładając $\cos x (1 - \sin x) = \sin x (1 - \sin x)$ na dwa prostsze równania $1 - \sin x = 0$ i $\cos x - \sin x = 0$.

Gdybyśmy się ograniczyli do kątów dodatnich, wypukłych, otrzymalibyśmy tylko:

$$x_1 = 90^\circ, x_2 = 45^\circ.$$

c) O wiele dogodniej rozwiązuje się takie równania, wyrażając wszystkie funkcje przez $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, co prowadzi do wyrażeń wymiernych, bez drugich pierwiastków i bez podwójnych znaków, (por. str. 86). Znalazłszy wartości t , znajdujemy w tablicach kąt $\frac{x}{2}$ do każdej danej wartości t (bez ograniczenia do przedziału $-1 \dots +1$, jak dla funkcji sinus).

Przykład:

$$1 + \cos x = \sqrt{3} (\sin x + \operatorname{tg} x)$$

Nazwijmy $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Podstawiając (str. 86) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t = 1$$

a stąd: $t = -\sqrt{3} \pm 2$, więc $t_1 = \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} = +0.26795 \dots$

$$t_2 = \operatorname{tg} \frac{x_2}{2} = -3.73205 \dots = -\operatorname{tg} (180^\circ - \frac{x_2}{2})$$

Z pierwszej wartości otrzymamy:

$$\frac{x_1}{2} = 15^\circ \quad \text{ogólnie: } \frac{x_1}{2} = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\text{więc: } x_1 = 30^\circ, \quad \text{ogólnie: } x_1 = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$$

Z drugiej wartości:

$$180^\circ - \frac{x_2}{2} = 75^\circ, \quad \text{ogólnie: } 180^\circ - \frac{x_2}{2} = 75^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\text{czyli: } x_2 = 210^\circ, \quad \text{ogólnie: } x_2 = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$$

8) Często można sobie ułatwić rozwiązanie równania przez *użycie teoremu dodawania*, zwłaszcza w postaci, pozwalającej sumy i różnice zamieniać na iloczyny. N. p.:

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin x.$$

Zamiast rozwijać $\sin 4x$ i $\sin 2x$ i zastępować funkcję $\cos x$ wyrażeniem:

$$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}, \text{ lub } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \text{ stosujemy do lewej strony wzór (20}_2\text{)}$$

str. 93, i otrzymujemy:

$$2 \sin \frac{2x}{2} \cdot \cos \frac{6x}{2} = \sin x, \text{ czyli}$$

$$2 \sin x \cdot \cos 3x = \sin x$$

$$\sin x (2 \cos 3x - 1) = 0.$$

Więc albo: $\sin x = 0$, stąd $x = 0^\circ, \pm 180^\circ$, ogólnie $x = n \cdot 180^\circ$

$$\text{albo: } 2 \cos 3x - 1 = 0, \text{ czyli } \cos 3x = \frac{1}{2},$$

$$\text{a więc: } 3x = \pm 60^\circ, \text{ ogólnie } 3x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\text{a stąd: } x = \pm 20^\circ, \text{ lub ogólnie}$$

$$x = \pm 20^\circ + n \cdot 120^\circ \dots (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

4) Równania postaci ogólnej:

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (1)$$

łatwo się rozwiązuje przy pomocy teoremu dodawania. Gdyby zamiast a i b wystąpiły współczynniki $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$, moglibyśmy lewą stronę sprowadzić do postaci:

$$\sin (x + \varphi)$$

Aby to uzyskać, położmy:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \quad (2)$$

Wtedy równanie (1) przechodzi na:

$$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi \text{ czyli}$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi \quad (3)$$

To równanie rozwiązujemy już przy pomocy tablic, ponieważ znamy wartość wyrażenia $\frac{c}{a} \cos \varphi$. Kąt φ oblicza się bowiem poprzednio z równania (2).

Ten sposób postępowania nazywamy metodą kąta pomocniczego.

U w a g a: Aby rozwiązanie było możliwe, musimy otrzymać na $\sin (x + \varphi)$ wartość zawartą w granicach $-1 \dots +1$, musi więc być $\frac{c}{a} \cos \varphi$ zawarte w tych granicach, a więc $\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leq 1$; wyrażając tu $\cos^2 \varphi$ przez $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{b^2}{a^2}$ otrzymamy $\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leq 1$ jako warunek możliwości równania (1).

Przykład. 6 $\sin x + 5 \cos x = 7$

Kładziemy: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{5}{1}$

W tablicach znajdujemy $\varphi = 39^\circ 48' 21''$

Więc: $\sin(x + \varphi) = \frac{7}{8} \cdot \cos 39^\circ 48' 21''$

$$\log \sin(x + \varphi) = 9.95243 - 10$$

$$x + \varphi = 63^\circ 40' \text{ ogólnie } 63^\circ 40' + n \cdot 360^\circ$$

$$\text{lub: } = 116^\circ 20' \quad \text{»} \quad 116^\circ 20' + n \cdot 360^\circ$$

Stąd: $x_1 = 23^\circ 51' 39''$, lub ogólnie $23^\circ 51' 39'' + n \cdot 360^\circ$

$$x_2 = 76^\circ 31' 39'', \quad \text{»} \quad 76^\circ 31' 39'' + n \cdot 360^\circ$$

5) Z równań gonjometrycznych o dwóch niewiadomych najważniejsze są takie układy równań, w których jedno równanie zawiera same kąty, a drugie same funkcje trygonometryczne kątów. Zwłaszcza często zdarzają się równania, z których jedno jest sumą (lub różnicą) dwóch nieznanymi kątów; wtedy staramy się obliczyć różnicę (lub sumę) tych kątów.

Przykłady.

Obliczyć kąty ostre (dodatnie i ujemne), spełniające następujący układ równań:

$$a) \begin{cases} x + y = 40^\circ \\ \sin x + \sin y = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Zamieniając drugie równanie na iloczyn otrzymamy:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{4}{5} \text{ czyli}$$

$$2 \sin 20^\circ \cos \frac{x-y}{2} = \frac{4}{5}$$

Stąd obliczymy przy pomocy tablic:

$$\frac{x-y}{2} = 67^\circ 3' 20'' \text{ lub } -67^\circ 3' 20'' \text{ i ich perjodyczne powtórzenia. Stąd otrzymamy (ograniczając się do kątów ostrych):}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} &= 67^\circ 3' 20'' \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} &= 20^\circ \end{aligned} \right\} \text{ tudzież } \left. \begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} &= -67^\circ 3' 20'' \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} &= 20^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{x = 87^\circ 3' 20''} \qquad \underline{x = -47^\circ 3' 20''}$$

$$\underline{y = -47^\circ 3' 20''} \qquad \underline{y = 87^\circ 3' 20''}$$

b) Znajac sumę dwóch kątów i stosunek wstaw tych kątów, obliczyć je.

$$(1) \quad \begin{cases} x + y = a \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{p} \end{cases}$$

Chcemy, znając $x + y$, znaleźć $x - y$. W tym celu stosujemy do drugiego równania znane twierdzenie z nauki o proporcjach.

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{m - p}{m + p}$$

Przy pomocy wzorów (20₁) i (20₂) przekształcamy to wyrażenie na:

$$\frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{m-p}{m+p}$$

czyli:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{m-p}{m+p}$$

a stąd:

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{m-p}{m+p} \cdot \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \quad (2)$$

Ponieważ znamy $x + y = a$ i liczby m, p , przeto całą prawą stronę możemy obliczyć. Przy pomocy tablic znajdziemy z tego wzoru $\frac{x-y}{2}$, a wtedy w połączeniu z $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$, otrzymamy kąty x i y .

U w a g a. Aby rozwiązanie było możliwe, nie może być $x + y = 0$ ani 180° , chyba gdyby było: $\frac{m}{p} = \pm 1$. Z równaniem tem spotkamy się jeszcze w dalszym ciągu nauki, przy rozwiązywaniu trójkątów i czworokątów.

Przerobione tu przykłady są tylko specjalnymi przypadkami równań gonjometrycznych. Istnieją jednak równania, których nie można rozwiązać żadną z podanych metod.

Takiem jest n. p. sławne równanie Keplera (XVII. wiek):

$$a x + b \sin x = c \cdot \pi$$

(gdzie a, b, c są liczbami znanymi, stałymi). Równanie to nasunęło się Keplerowi przy badaniu kształtu drogi Marsa. Do takich równań stosuje się metody graficzne lub metody kolejnych przybliżeń.

N. p. równanie Keplera:

$$x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{2}{3} \pi$$

możemy rozwiązać graficznie, badając punkty przecięcia się sinusoidy: $y = \frac{1}{2} \sin x$ z linią prostą $y = -x + \frac{2}{3} \pi$, albowiem wartości x , spełniające równocześnie te obydwie równania, spełniają także równanie dane i odwrotnie. Wykonaj odpowiedni rysunek!

Ćwiczenia VI.

1. Rozwiązać równania: $\cos x = 0$ i $\operatorname{tg} x = 0$ rachunkiem i graficznie.

2. Rozwiązać rachunkiem i graficznie równanie:

$$a) \sin x = \frac{3}{4}; \quad b) \cos x = -\frac{1}{5}; \quad c) \operatorname{tg} x = 10.$$

3. Rozwiązać rachunkiem i graficznie równanie:

a) $\sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right) = -\frac{3}{8}$; b) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.32$; c) $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$ używając

miary łukowej.

Używając wyników zadań 46 i 47 z ćwiczeń V rozwiązać równania:

d) $\sin \alpha + \sin(\alpha + x) + \sin(\alpha + 2x) = 0$;

e) $\cos \alpha + \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + 2x) = 0$.

Rozwiązać następujące równania gonjometryczne:

4. $\cos 7x = \cos 4x$.

5. $\cos x = \sin x$.

6. $\sin 2x = \cos 3x$.

7. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$.

8. $2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3$.

9. $6 \operatorname{ctg}^2 x - 4 \cos^2 x = 1$.

10. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$.

11. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \operatorname{tg} x = 2$.

12. $\operatorname{tg} x + 2 \sqrt{3} \cos x = 0$.

13. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$.

14. $\sin x - \cos x = \sqrt{6} \sin \frac{x}{2} - 1$.

15. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

16. $\sin 3x = 2 \sin x$.

17. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.5$.

18. $\frac{1}{2} \cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

19. $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$. Dyskusja!

20. $\frac{1}{\sin x} = 2 \cos 2x + 4 \cos^2 x$.

21. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4 \sin 2x$.

22. $8 \sin x + 5 \cos x = 6$.

23. $5 \sin x + 12 \cos x = 13$.

24. $\sin(x + 20^\circ) + \cos(x - 20^\circ) = \cos(x + 20^\circ)$.

25. $4(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = \cos 2x$.

26. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} x$.

27. $\cos x - \cos 3x = \cos 5x$.

28. $6(\cos x + \sin x) = 5(1 + \sin 2x)$.

29. $x + y = 42^\circ$
 $\sin x - \sin y = 0.32423$.

30. $x + y = 74^\circ$
 $\cos x + \cos y = 1.55634$.

31. $x - y = 30^\circ$
 $\cos x - \cos y = \frac{1}{3}$.

32. $x + y = 150^\circ$
 $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{2}$.

33. $x - y = 15^\circ$
 $\frac{\sin x}{\sin y} = 0.35355$.

34. $x + y = 62^\circ 40'$

$\operatorname{tg} x = \frac{637}{2000}$
 $\operatorname{tg} y = \frac{637}{2000}$

35. Rozwiązać graficznie równanie Keplera:

$a x + b \sin x = c \pi$

obierając: a) $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{5}{8}$.

b) $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{5}{2}$, $c = \frac{5}{8}$,

przy użyciu miary łukowej dla kąta x .

36. Kładąc w dowolnem równaniu drugiego stopnia

$a x^2 + b x + c = 0$

$x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$, sprowadzić je do formy:

$A \cos y + B \sin y = C$.

Rozwiązując drugie równanie trygonometryczne, obliczyć rozwiązanie równania pierwszego.

N. p.: $7.351 x^2 - 3.475 x - 8.431 = 0$.

37. Rozwiązać układ równań:

$r \cos \varphi = a$

$r \sin \varphi = b$ (obliczyć r i φ),

przyczem $a = 12.88$, $b = 8.219$.

38. Rozwiązać według r , ϑ i φ układ trzech równań:

$r \cos \vartheta \cos \varphi = a$

$r \cos \vartheta \sin \varphi = b$

$r \sin \vartheta = c$ (obliczyć r , ϑ i φ),

przyczem $a = 5$, $b = 12$, $c = 84$.

Rozwiązania ćwiczeń.

1. $x = (2n + 1) \cdot 90^\circ$, $x = n \cdot 180^\circ$. 2. a) $x = 180^\circ \cdot n + (-1)^n 48^\circ 35' 26''$;
b) $x = \pm 101^\circ 32' 12'' + n \cdot 360^\circ$; c) $x = 84^\circ 17' 21'' + n \cdot 180^\circ$. 3. a) $x = -$
 $- [n \cdot 180^\circ + 36^\circ + (-1)^n 22^\circ 1' 27'']$; b) $x = \pm 71^\circ 20' 13'' + 22^\circ 30' + n \cdot 180^\circ$;
c) $x = -30^\circ 39' 30'' + n \cdot 180^\circ$. d) $x_1 = \frac{2n\pi}{3}$, $x_2 = n\pi - \alpha$; e) $x_1 = \frac{2n\pi}{3}$,
 $x_2 = (2n + 1) \frac{\pi}{2} - \alpha$. 4. $x_1 = \frac{2n\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2n\pi}{11}$. 5. $x = m\pi + \frac{\pi}{4}$. 6. $x_1 =$
 $= \frac{2m\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$, $x_2 = 2m\pi - \frac{\pi}{2}$. 7. $x = n\pi$. 8. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$. 9. $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.
10. $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 11. $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 12. $x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$. 13. $x = n\pi +$
 $+ (-1)^n \frac{\pi}{6}$. 14. $x_1 = 2n\pi$, $x_2 = 30^\circ + n \cdot 720^\circ$, $x_3 = 150^\circ + n \cdot 720^\circ$.
15. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$. 16. $x_1 = n\pi$, $x_2 = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. 17. $x_1 = 63^\circ 26' 6'' + n \cdot 180^\circ$,

$x_2 = 26^\circ 31' 54'' + n \cdot 180^\circ$. 18. $x_1 = \pm 53^\circ 38' + n \cdot 360^\circ$, $x_2 = \pm 147^\circ 28' + n \cdot 360^\circ$. 19. $\operatorname{tg} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; równanie jest tylko wtedy roz-

wiązalne, gdy $b^2 > 4ac$. 20. $x = n \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{18}$. 21. Wskazówka: spro-

wadzić wszystkie funkcje do funkcji $\sin 2x$; $x = (4m + 1) \cdot \frac{\pi}{8}$. 22. $x_1 =$

$= 7^\circ 29' 19'' + n \cdot 360^\circ$, $x_2 = 108^\circ 30' 3' + n \cdot 360^\circ$. 23. $x = 22^\circ 37' 11'' + n \cdot 360^\circ$

24. Wskazówka: $\cos(x - 20^\circ)$ przenieść na drugą stronę i zastosować wzór (20₄) a następnie sprowadzić wszystkie funkcje do funkcji cotangens;

$x = n \cdot 180^\circ - 11^\circ 53' 42''$. 25. $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$. 26. Wskazówka: sprowa-

dzić wszystkie funkcje do $\operatorname{tg} x = y$ i uwolnić od mianownika; otrzymamy na y równanie: $y(4y^4 - y^2 - 1) = 0$; $x_1 = n\pi$, $x_2 = \pm 38^\circ 40' 7'' + n \cdot 180^\circ$.

27. $x_1 = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $x_2 = n \cdot \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}$. 28. Wskazówka: zastąpić $\cos x$ przez

$\sin(90^\circ - x)$, a 1 przez $\sin 90^\circ$ i zastosować po obu stronach wzór (20₁);

$x_1 = (4n + 3) \cdot \frac{\pi}{4}$, $x_2 = 18^\circ 3' 8'' + n \cdot 360^\circ$, $x_3 = 76^\circ 56' 52'' + n \cdot 360^\circ$.

29. $x_1 = 31^\circ + n \cdot 360^\circ$, $y_1 = 11^\circ - n \cdot 360^\circ$; $x_2 = 191^\circ + n \cdot 360^\circ$, $y_2 = -$

$-149^\circ - n \cdot 360^\circ$. 30. $x_1 = 50^\circ + n \cdot 360^\circ$, $y_1 = 24^\circ - n \cdot 360^\circ$; $x_2 = 24^\circ +$

$+n \cdot 260^\circ$, $y_2 = 50^\circ - n \cdot 360^\circ$. 31. $x_1 = -25^\circ 5' 12'' + n \cdot 360^\circ$, $y_1 = -$

$-55^\circ 5' 12'' + n \cdot 360^\circ$; $x_2 = 235^\circ 5' 12'' + n \cdot 360^\circ$, $y_2 = 205^\circ 5' 12'' + n \cdot 360^\circ$.

32. $x = 23^\circ 47' 37'' - n \cdot 180^\circ$, $y = 126^\circ 12' 23'' + n \cdot 180^\circ$. 33. $x = -7^\circ 54' 41'' +$

$+n \cdot 180^\circ$, $y = -22^\circ 54' 41'' + n \cdot 180^\circ$. 34. $x_1 = 17^\circ 40' - n \cdot 360^\circ$, $y_1 = 45^\circ +$

$+n \cdot 360^\circ$; $x_2 = -45^\circ - n \cdot 360^\circ$, $y_2 = 107^\circ 40' + n \cdot 360^\circ$. 35. a) $x = 1.67 \dots$

(lub w mierze stopniowej około $101\frac{1}{2}^\circ$). b) $x_1 = 1.117 (64^\circ)$, $x_2 = 2.304 (132^\circ)$;

prócz tego jest kilka wartości $x > 360^\circ$. 36. Wskazówka: po pomnożeniu

przez $\cos^2 \frac{y}{2}$ zastosować wzory (16₁) i (16₂); otrzymamy $\varphi = 77^\circ 34' 57''$;

$x_1 = -0.86$, $x_2 = 1.333$. 37. Wskazówka: podzieliwszy drugie równanie

przez pierwsze otrzymamy na obliczenie kąta φ równanie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

$r = 15.28$, $\varphi = 32^\circ 33'$. 38. Wskazówka: podzielić drugie równanie przez pierwsze, obliczyć stąd φ a następnie przy pomocy $\sin \varphi$ obliczyć $r \cos \varphi$ z drugiego równania. Dobierając trzecie równanie sprowadzamy zagadnienie do przykładu 37. $r = 85$, $\varphi = 81^\circ 12'$, $\varphi = 86^\circ 36'$.

Rozdział III.

Rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych.

§ 24. Twierdzenie wstaw.

Przy rozwiązywaniu trójkątów prostokątnych widzieliśmy, że trójkąty ukośnokątne można rozwiązywać, rozkładając je na prostokątne. Metoda ta jest jednak niedogodna do rachunku logarytmicznego i wymaga osobnych rozważań dla trójkątów rozwartokątnych. Wyprowadzimy obecnie wzory ogólne, wychodząc z ogólnych rozważań matematycznych.

Ponieważ z sześciu elementów trójkąta trzy są wyznaczone zapomocą trzech pozostałych (dobranych według czterech przypadków przystawiania), przeto muszą istnieć trzy niezależne związki między elementami trójkąta. Znamy jeden związek między kątami trójkąta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dwa pozostałe związki otrzymamy, wyrażając wysokość trójkąta dwoma sposobami.

$$\begin{aligned} w_c &= a \cdot \sin \beta \\ w_c &= b \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad \text{a stąd:}$$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny przy B , to

$w_c = a \sin(180^\circ - \beta)$, ale $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$, więc i wtedy także $w_c = a \sin \beta$; podobnie, jeżeli α jest rozwarty. Proporcja utrzymuje się więc bez zmiany także dla trójkątów rozwartokątnych. Prowadząc wysokość w_b , należącą do boku b , udowodnimy w ten sam sposób, że

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

Proporcje te nazywamy twierdzeniem wstaw (sinusów) i wypowiadamy je słowami:

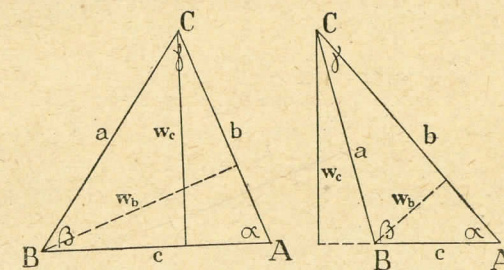


Fig. 60.

Boki trójkąta mają się do siebie, jak wstawy kątów przeciwległych.

Twierdzenie to odnosi się zarówno do trójkątów ostrokątnych jak i do prostokątnych i rozwartokątnych. Piszemy je zwykle w postaci:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (21)$$

Wraz z równaniem: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ mamy trzy związki, które wystarczają do rozwiązania trójkąta we wszystkich przypadkach. Wszystkie inne związki, zachodzące między elementami trójkąta, o których będziemy w dalszym ciągu mówili, są tylko wynikiem tych trzech równań. Dlatego nazywamy te równania zasadniczym układem równań dla trójkąta ukośnokątnego. Okazaliśmy dotychczas, że, jeżeli a, b, c są bokami a α, β, γ kątami trójkąta, to spełniają się równania (21) i $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Nasuwa się pytanie odwrotne: jeżeli jakieś dowolne liczby $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ spełniają te trzy równania, czy można je uważać za liczby wymiarowe trzech boków i trzech kątów trójkąta? Okażemy, że tak jest zawsze, o ile te liczby są dodatnie.

Dowód. Zbudujmy trójkąt, w którym kąty wynoszą α, β i γ , co jest możliwe, i to na nieskończenie wiele sposobów, bo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i są liczbami dodatnimi. Z pośród tych trójkątów wybieramy ten, którego bok przeciwległy kątowi α wynosi a . Pozostałe boki tego trójkąta oznaczmy b_1 i c_1 . Do tego trójkąta, jak do każdego innego, stosuje się twierdzenie wstaw, t. j.

$$b_1 : a = \sin \beta : \sin \alpha \quad \text{czyli}$$

$$b_1 = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

Ale na podstawie równania (21) także liczba b , spełnia taki sam związek, a więc $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ a stąd wynika $b = b_1$.

Tak samo stwierdzamy, że $c = c_1$, a więc istotnie liczby $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ są bokami i kątami trójkąta (tego mianowicie trójkąta, któryśmy właśnie wyznaczyli).

Zobaczmy, jak się przedstawia rozwiązanie trójkąta przy użyciu tych równań w każdym z czterech przypadków.

§ 25. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku (II) i (III) (por. Planimetria str. 42, 45).

Dany bok i dwa kąty (II przypadek przystawania) np. a, β, γ . Kąt α obliczamy z równania $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Następnie obliczamy boki b i c z równań

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\text{Więc:} \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}; \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Obydwa wzory są przydatne do rachunku logarytmicznego.

Dane dwa boki i kąt większemu z nich przeciwległy (III przypadek przystawania), n. p. a, b i α przyczem $a > b$.

Kąt β otrzymamy z proporcji $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$

$$\text{Stąd} \quad \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} \quad (1)$$

Ponieważ $a > b$ to tembardziej $a > b \sin \alpha$, bo $\sin \alpha$ jest ułamkiem właściwym, a więc prawa strona jest liczbą dodatnią mniejszą od 1, a więc istnieje kąt β , spełniający to równanie.

Do jednej wartości $\sin \beta$ należą jednak dwa kąty wklęsłe: jeden ostry β , a drugi rozwarty $\beta' = 180^\circ - \beta$. Otóż z tych dwóch kątów wybieramy ostry, ponieważ musi być $\alpha > \beta$ (bo $a > b$). Gdyby zaś β był kątem rozwartym, to α także i mielibyśmy w trójkącie dwa kąty rozwarte. Obliczywszy β znajdujemy kąt γ z równania $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, a przy pomocy tej wartości obliczamy bok c z proporcji.

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma.$$

W tym przypadku, podobnie jak w (II), można cały rachunek przeprowadzić przy pomocy logarytmów.

Gdyby kąt leżał naprzeciw mniejszego boku, t. j. gdyby było $a < b$, to:

$$1) \text{ mogłoby się zdarzyć, że } \frac{b \sin \alpha}{a} > 1, \text{ więc}$$

na $\sin \beta$ otrzymalibyśmy wartość większą od 1; to zaś jest niemożliwe.

Wtedy więc kąt β nie istnieje. Łatwo to zrozumieć przy pomocy fig. 61. Widzimy, że

$$b \sin \alpha = w$$

Mielibyśmy więc $\frac{b \sin \alpha}{a} > 1$ czyli $\frac{w}{a} > 1$, t. j. $w > a$. Wysokość jednak jako najkrótsza droga z punktu C do boku c nie może być większa od żadnego boku.

2) Gdyby $\frac{b \sin \alpha}{a} = 1$, to $w = a$, mielibyśmy więc trójkąt prostokątny o ile tylko α jest kątem ostrym. Wtedy $\sin \beta = 1$, więc $\beta = 90^\circ$.

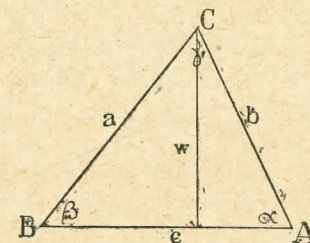


Fig. 61.

3) Gdyby $\frac{b \sin \alpha}{a} < 1$, (iloraz ten jest naturalnie liczbą dodatnią, więc > -1) to z równania (1) znaleźlibyśmy na kąt β dwie różne wartości, które obydwie czynią zadość warunkom zadania.

Mamy bowiem w założeniu $b > a$, więc $\beta > \alpha$, a to wskazuje, że kąt β może być zarówno ostry, jak i rozwarty, kąt zaś α jest zawsze ostry, jako kąt leżący naprzeciw mniejszego boku trójkąta; (nie można więc n. p. obierać $a = 5 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $\alpha = 105^\circ$!). W planimetrii sprawdza się dwuznaczność konstrukcyjnie. Z elementów a , b , α , przyczem $a < b$ ale $> w_c$, można bowiem zbudować dwa różne trójkąty ABC i $AB'C$ (por. fig. 62). Kąt leżący naprzeciw większego boku b może być ostry β , lub rozwarty $\beta' = 180^\circ - \beta$.

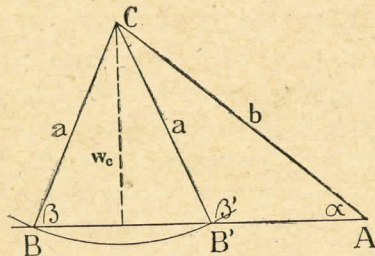


Fig. 62.

Z figury tej widać zarazem, że jest tylko jedno rozwiązanie, gdy $w_c = a$, a niema żadnego, gdy $w_c < a$. Pominęliśmy przypadek $a = b$, wtedy jednak do obliczenia kąta β nie trzeba używać twierdzenia wstaw, bo wprost musi być $\alpha = \beta$. Jeżeli przytem α jest kątem ostrym, to wartość $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ jest dodatnia a i bok c da się wtedy obliczyć (jak?) a więc istnieje jeden

tylko trójkąt, spełniający dane warunki. Jeżeli zaś $\alpha \geq 90^\circ$, to niema rozwiązania, bo na γ wypada wartość ujemna.

Wyniki całej tej dyskusji możemy ująć w następującą tabelkę:

Dane a , b , α .

$a > b$ jedno rozwiązanie

$a = b \begin{cases} \alpha < 90^\circ & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha \geq 90^\circ & \text{niema rozwiązania} \end{cases}$

$a < b \begin{cases} b \sin \alpha > a & \text{niema rozwiązania} \\ b \sin \alpha = a & \begin{cases} \alpha < 90^\circ & \text{jedno rozwiązanie} \\ \alpha \geq 90^\circ & \text{niema rozwiązania} \end{cases} \\ b \sin \alpha < a & \begin{cases} \alpha < 90^\circ & \text{dwa rozwiązania} \\ \alpha \geq 90^\circ & \text{niema rozwiązania} \end{cases} \end{cases}$

Przykłady.

a) Dane $a = 18 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 63^\circ 20'$.

Więc $a > b$. Rozwiązać trójkąt!

Z proporcji $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ otrzymujemy:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

lub po podstawieniu:

$$\sin \beta = 0.49646.$$

$$\text{Stąd: } \underline{\beta = 29^\circ 46'}$$

$$\text{lub } (\beta = 150^\circ 14')$$

Ponieważ $a > b$, to i $\alpha > \beta$, więc tylko pierwsza wartość kąta β jest rozwiązaniem naszego zadania. Znając β otrzymamy: $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ więc $\gamma = 86^\circ 54'$, a przy pomocy tej wartości:

$$c = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta} \text{ czyli } c = 20.113 \text{ cm.}$$

$$\text{b) } a = 3.65 \text{ cm}, b = 4.08 \text{ cm}, \alpha = 71^\circ 48' 20''.$$

Tutaj $a < b$

Z równania: $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ otrzymamy po podstawieniu i zlogarytmowaniu:

$$\log \sin \beta = 0.02609$$

Więc $\log \sin \beta > 0$, zatem otrzymalibyśmy $\sin \beta > 1$, a to niemożliwe. Nie istnieje więc trójkąt o takich elementach a , b , α .

$$\text{c) } a = 3.65 \text{ cm}, b = 4.08 \text{ cm}, \alpha = 52^\circ 36' 30''$$

Tutaj także $a < b$

Z równania $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ otrzymamy teraz

$$\log \sin \beta = 9.94847 - 10$$

więc

$$\underline{\beta = 62^\circ 38' 18''}$$

albo

$$\underline{\beta' = 180^\circ - \beta = 117^\circ 21' 42''}$$

Możliwe są obydwie wartości, bo obydwie są większe od kąta α . Na podstawie tych wartości otrzymujemy:

$$\underline{\gamma = 64^\circ 45' 12''}$$

$$\underline{\gamma' = 10^\circ 1' 48''}$$

Używając tych obydwu wartości otrzymamy wreszcie z proporcji:

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

$$\underline{c = 4.1552 \text{ m}}$$

$$\underline{c' = 1.0073 \text{ m}}$$

Rozwiąż to zadanie konstrukcyjnie!

§ 26. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku (I). Twierdzenie stycznych.

Dane są dwa boki a , b i kąt γ między nimi zawarty.

Z równania:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

wynika

Jest to jedno równanie, służące do obliczenia kątów α i β ; drugie otrzymujemy z twierdzenia wstaw:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

Gdy z tych dwóch równań znajdziemy kąty, obliczymy bok c także przy pomocy twierdzenia wstaw:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Trzeba więc przedewszystkiem rozwiązać układ równań gonjometrycznych:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

Układ taki rozwiązywalibyśmy już (str. 106, przykład b) i otrzymaliśmy — stosując twierdzenie o sumie i różnicy wyrazów proporcji — wzór:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (22)$$

Wzór ten nazywamy twierdzeniem stycznych i wypowiadamy go tak:

Suma dwóch boków trójkąta ma się tak do ich różnicy, jak tangens połowy sumy kątów przeciwległych do tangensa połowy różnicy tych kątów.

Łatwo sprawdzić, że wzór ten stosuje się także do elementów a , c , α , γ , jakoteż do b , c , β , γ .

Twierdzenie to, jakkolwiek ułatwia bardzo rozwiązywanie trójkątów, nie ma jednak tak zasadniczego znaczenia, jak twierdzenie wstaw. Jest ono bowiem tylko inną postacią tego twierdzenia, jest jego przeróbką gonjometryczną. Podaje ono tak samo, jak twierdzenie sinusów, związek między dwoma bokami i dwoma kątami przeciwległymi.

Z proporcji (22) obliczamy:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Ale
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

więc
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

i otrzymujemy ostatecznie:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \quad (22_1)$$

Z tego wzoru obliczymy $\frac{\alpha - \beta}{2}$, ponieważ strona prawa jest liczbą znaną. Mając zaś obok tego $\frac{\alpha + \beta}{2}$, obliczymy kąty α i β , a znając α , obliczymy $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

Okażemy później, że bok c można wyrazić także wprost, jako funkcję elementów a , b , γ .

Przykład. Dane: $a = 18.6 \text{ m}$, $b = 15.4 \text{ m}$, $\gamma = 56^\circ 18'$.

Obliczamy najpierw:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \frac{123^\circ 42'}{2} = 61^\circ 51'$$

Stosujemy wzór (22₁).

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{3.2}{34} \cdot \operatorname{ctg} 28^\circ 9'$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} &= 0.50515 \\ &+ 10.27159 - 10 \\ &= 10.77674 - 10 \\ &- 1.53148 \\ &= 9.24526 - 10 \\ &= 484 \dots 9^\circ 58' \\ &4200 : 1.23 = 34'' \\ &510 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 9^\circ 58' 34''$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 61^\circ 51'$$

$$\alpha = 71^\circ 49' 34''$$

$$\beta = 51^\circ 52' 26''$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\begin{array}{r}
 \log c = 1.26951 \\
 \hline
 9.92010 - 10 \\
 11.18961 - 10 \\
 - 9.97777 + 10 \\
 \hline
 = 1.21184 \\
 165 \dots 1628 \\
 19_0 : 27 = 0.7 \qquad \underline{c = 16.287 \text{ cm.}}
 \end{array}$$

§ 27. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku (IV). Twierdzenie Carnota.

Znane są boki trójkąta: a, b, c ; chcemy obliczyć kąty.

Możnaby wyjść znowu z twierdzenia wstaw. Mamy wtedy na obliczenie 3 kątów układ 3 równań gonjometrycznych:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Rugujemy kąt γ , podstawiając $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ czyli $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$. Mamy wtedy do rozwiązania układ dwóch równań gonjometrycznych:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{a} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{\pm \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \beta} + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \beta} \\ \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \end{array} \right.$$

Rugując z tych równań kąt β otrzymamy po wykonaniu rachunków:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Z tego równania można obliczyć kąt α , znając boki a, b, c .

Związek między trzema bokami i kątem możemy wyprowadzić bez pomocy twierdzenia wstaw wprost z trójkąta.

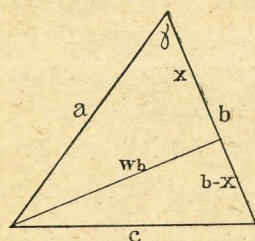


Fig. 63.

więc:

Prowadzimy w tym celu wysokość w_b i obliczamy bok c .

$$c^2 = w_b^2 + (b - x)^2$$

$$\text{Ale } w_b = a \cdot \sin \gamma$$

$$x = a \cos \gamma$$

$$\text{Więc: } c^2 = a^2 \sin^2 \gamma + (b - a \cos \gamma)^2 \quad \text{czyli:}$$

$$c^2 = a^2 \sin^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma$$

Ale:

$$a^2 \sin^2 \gamma + a^2 \cos^2 \gamma = a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (23)$$

Podobnie prowadząc wysokość w_c i w_a , udowadniamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad (23_1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (23_2)$$

Jeżeliby którykolwiek kąt, np. γ był rozwarty (narysuj!), to otrzymalibyśmy $+2ab \cos(180^\circ - \gamma)$, czyli także $-2ab \cos \gamma$ i podobnie dla α, β .

Z tych wzorów można obliczyć $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, znając trzy boki, a w tablicach znajdziemy wtedy α, β, γ . Wzory te nazywamy **twierdzeniem dostaw lub twierdzeniem Carnota**. Są one uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa; istotnie, jeśli kąt $\gamma = 90^\circ$, to $\cos \gamma = 0$ i wzór (23) przechodzi na twierdzenie Pitagorasa:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Twierdzenie to poznaliśmy już w planimetrii w postaci geometrycznej (str. 153, tom I).

Równania (23) dadzą się wprawdzie wyprowadzić z twierdzenia wstaw drogą czysto rachunkową. Różnią się one jednak od zasadniczego systemu równań (21) tem, że każde z nich podaje związek między 3 bokami a jednym kątem, podczas kiedy tamte podawały związek 2 boków z 2 kątami. Całe badanie trójkątów ukośnokątnych możnaby rozpocząć od tych równań (23), a wtedy twierdzenie wstaw i związek $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ byłyby ich wynikiem (por. ćw. VII, Nr. 10).

W każdym z czterech przypadków rozwiązywania trójkątów możnaby używać tylko twierdzenia Carnota. Np. znając a, α i β obliczylibyśmy b i c z równań (23₁) (23₂), a przy pomocy tych wartości γ z równania (23). Jednakowoż twierdzenie Carnota jest dogodnie tylko w przypadku IV. W przypadku zaś I. używa się go czasem do obliczenia jednego tylko boku c z elementów a, b, γ . Można również okazać, podobnie jak to uczyniliśmy dla twierdzenia wstaw, że układ równań (23) jest warunkiem dostatecznym, aby istniał trójkąt o bokach a, b, c i kątach α, β, γ . Opierając się na nierówności $\cos \alpha > -1$ okazuje się mianowicie, że $a < b + c$ i podobnie dla innych boków; można więc z tych boków zbudować jakiś trójkąt o kątach $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Następnie okazuje się przy pomocy równań (23), że $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta, \gamma_1 = \gamma$.

rzykład: $a = 6, b = 7, c = 4$.

Z równań (23) otrzymujemy:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{czyli po podstawieniu } \cos \alpha = \frac{29}{56} \\ \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{» » » } \cos \beta = \frac{3}{48} \\ \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{» » » } \cos \gamma = \frac{69}{84} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 \log \cos \alpha = 11.46240 - 10 \\
 \hline
 1.74819 \\
 9.71421 - 10 \\
 \hline
 14 \dots 58^\circ 49' \\
 7_{00} : 35 = 20
 \end{array}$$

$$\underline{\alpha = 58^\circ 48' 40''}$$

$$\begin{array}{r}
 \log \cos \beta = 10.47712 - 10 \\
 \hline
 1.68124 \\
 8.79588 - 10
 \end{array}$$

$$\underline{\beta = 86^\circ 25'}$$

Inne kąty spełniające te równania są ujemne lub większe od 180° , a więc nie nadają się do utworzenia trójkąta.

$\begin{array}{r} \log \cos \gamma = 11.83885 - 10 \\ \underline{1.92428} \\ 9.91457 - 10 \\ \underline{451 \dots 34^\circ 47'} \\ 6_{00} : 15 = 40 \\ \hline \gamma = 34^\circ 46' 20'' \end{array}$	Próba: $\begin{array}{r} \alpha + \beta + \gamma = 58^\circ 48' 40'' \\ \quad \quad \quad 86^\circ 25' \\ \quad \quad \quad \underline{34^\circ 46' 20''} \\ \hline = 180^\circ \end{array}$
---	---

Gdyby liczby a, b, c były wielocyfrowe, rachunek ten przedstawiałby wielkie niedogodności, ponieważ wyrażenie: $b^2 + c^2 - a^2$ nie da się obliczyć przy pomocy logarytmów. Możemy jednak przekształcić wyrażenia (a) tak, że będą dogodne do rachunku, a zarazem symetryczne, łatwe do zapamiętania. Oznaczmy połowę obwodu trójkąta literą: s , to

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2s \\ -a + b + c &= 2(s - a) \\ a - b + c &= 2(s - b) \\ a + b - c &= 2(s - c). \end{aligned}$$

Obliczmy $\cos \frac{\alpha}{2}$ według znanego wzoru (str. 87):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Podstawiając tu wartość za $\cos \alpha$, otrzymamy:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{4bc}}$$

$$\text{czyli} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad (24 \text{ b})$$

Podobnie obliczymy:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad (24 \text{ a})$$

Najbardziej zaś symetryczny wzór otrzymamy na $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, dzieląc $\sin \frac{\alpha}{2}$ przez $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Podobnie:

$$(24) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases}$$

Wzory te nazywamy wzorami połówkowymi. Są one tylko inną postacią twierdzenia Carnota. (Znak pierwiastka jest zawsze $+$, bo kąty trójkąta są mniejsze od 180° , więc ich połówki mniejsze od 90°).

Aby ich użyć do rachunku logarytmicznego, wystarczy znać cztery logarytmy (liczb $s, s-a, s-b, s-c$) do obliczenia wszystkich trzech kątów trójkąta.

Przykład:

$a = 58.37$	
$b = 49.25$	
$c = 70.18$	
$2s = 177.80$	
$s = 88.90$	$\log s = 1.94890$
$s - a = 30.53$	$\log (s - a) = 1.48473$
$s - b = 39.65$	$\log (s - b) = 1.59824$
$s - c = 18.72$	$\log (s - c) = 1.27231$

Wobec tego:

$$\operatorname{logtg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} [\log (s - b) + \log (s - c) - \log s - \log (s - a)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [19.43692 - 20] = 9.71846 - 10 \\ &\quad \quad \quad \underline{33 \dots 27^\circ 36'} \\ &\quad \quad \quad 13_{00} : 51 = 25 \\ &\quad \quad \quad \hline &\quad \quad \quad 280 \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha = 55^\circ 12' 50''}$$

$$\operatorname{logtg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} [19.20990 - 20]$$

$$= 9.60495 - 10$$

$$\frac{\beta}{2} = 21^\circ 56'$$

$$\underline{\beta = 43^\circ 52'}$$

$$\log \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} (19.86176 - 20) = 9.93088 - 10$$

$$\frac{73}{1500} : 43 = 35$$

$$\frac{210}{210}$$

$$\gamma = 80^{\circ} 55' 10''$$

Próba:	55° 12' 50''
	43° 52'
	80° 55' 10''
	180° — —

§ 28. Pole trójkąta.

Pole trójkąta można wyrazić wprost, zapomocą danych elementów, bez obliczania wysokości trójkąta.

Najprościej wyraża się pole w przypadku (I), t. j. jeżeli są podane dwa boki i kąt pomiędzy nimi zawarty: a, b, γ . Uważając b za podstawę i kreśląc odpowiednią wysokość w_b , otrzymamy: $w = a \sin \gamma$, więc:

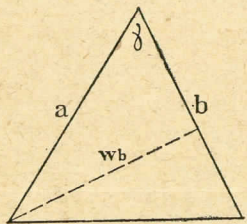


Fig. 64.

$$P = \frac{ab}{2} \sin \gamma \quad (5)$$

Wzór ten utrzymuje się także dla rozwartego kąta γ .

Pole trójkąta równa się połowie iloczynu 2 boków i wstawy kąta między nimi zawartego.

Wobec tego pole każdego równoległoboku, wyrażone zapomocą dwóch sąsiednich boków a, b i kąta między nimi zawartego γ , wynosi:

$$P = ab \sin \gamma$$

każdy bowiem równoległobok składa się z dwóch przystających trójkątów o elementach a, b, γ .

Do obliczenia pola trójkąta używa się w trygonometrii najczęściej tego wzoru (25). Nawet jeżeli są podane inne elementy, obliczamy najpierw a, b i γ a potem stosujemy wzór (25).

Np. znając a, β, γ (przypadek II.), obliczyć pole trójkąta. We wzorze (25) brak tylko b . Z twierdzenia sinusów:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \text{ więc}$$

$$P = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

a kładąc $\alpha = 180^{\circ} - (\beta + \gamma)$ otrzymujemy

$$P = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$$

W przypadku (IV) znamy a, b, c . Do zastosowania wzoru (25) brak nam jeszcze $\sin \gamma$. Poznaliśmy na str. 120 wzory na $\sin \frac{\gamma}{2}$ i $\cos \frac{\gamma}{2}$; wobec tego rozwijamy $\sin \gamma$ na $2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$, to $P = ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

Podstawiając po prawej stronie wartości z wzorów połówkowych otrzymamy:

$$P = ab \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

czyli ostatecznie:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (26)$$

Doszliśmy w ten sposób do znanego z planimetrii (str. 153 Tom I.) wzoru Herona na pole trójkąta. Widzimy stąd, że trygonometryczne przekształcenia mogą służyć do dowodzenia prawd czysto planimetrycznych nawet takich, w których niema wcale mowy o kątach.

§ 29. Koło opisane na trójkącie i koło wpisane.

Chcemy obliczyć promień koła opisanego na trójkącie, znając elementy trójkąta. Poprowadźmy średnicę z któregośkolwiek wierzchołka, np. z C . Drugi koniec D średnicy połączmy z innym wierzchołkiem np. z B . Otrzymamy w ten sposób trójkąt prostokątny CDB , z którego odczytujemy:

$$2R = \frac{a}{\sin \angle BDC}$$

Ale $\angle BDC = \alpha$, ponieważ wspiera się na tym samym łuku, co kąt $\angle A$. Więc:

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Podobnie wykazuje się, że $2R = \frac{b}{\sin \beta}$ lub $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$. Zestawiając te wzory, otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R. \quad (24_1)$$

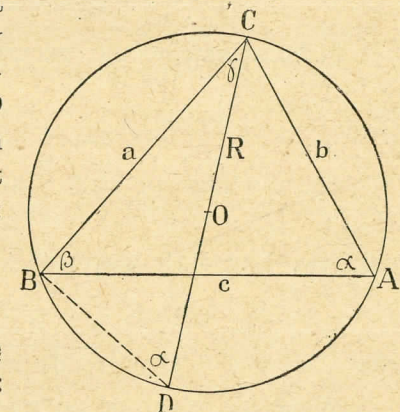


Fig. 65.

Stosunek boku trójkąta do wstawy kąta przeciwległego równa się średnicy koła opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie to jest tylko uzupełnieniem twierdzenia wstaw. Wykazaliśmy dawniej, że stosunek boku trójkąta do wstawy przeciwległego kąta jest równy dla każdego boku; obecnie wykazaliśmy, czemu się równa wartość tego stosunku. Równania tego używa się naturalnie nie tylko do obliczenia $2R$, jeżeli są dane elementy trójkąta, ale i odwrotnie: do obliczenia boków i kątów trójkąta, jeżeli między danymi elementami jest promień koła opisanego.

Jak twierdzenie wstaw jest związane z promieniem koła opisanego, tak znowu twierdzenie dostaw wiąże się z promieniem koła wpisanego. Widzimy mianowicie z fig. 66., że

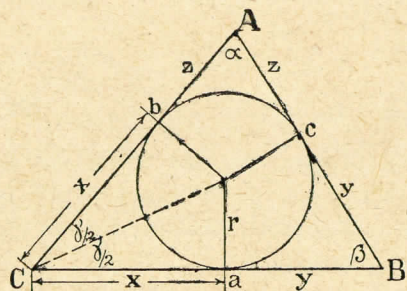


Fig. 66.

$$r = x \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad (a)$$

Aby obliczyć część x boku a , zauważmy, że odcinki stycznych z punktu poza kołem są równe, więc odpowiedni odcinek boku b wynosi także x ; podobnie y , y i z , z .

Wobec tego obwód trójkąta $2s$ wynosi:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 2s. \text{ Stąd:} \\ x &= s - (y + z) \text{ czyli:} \\ x &= s - c. \end{aligned}$$

Podstawiając to we wzorze (a) otrzymamy:

$$r = (s - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Podstawiając tu za $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ znaną z twierdzenia połówkowego (t. j. z prze-

róbki tw. Carnota!) wartość $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$, otrzymamy:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (27)$$

Wzór ten różni się od wzoru Herona tem tylko, że s występuje jako mianownik, a nie jako czynnik. Możemy więc napisać:

$$r = \frac{P}{s}$$

co także planimetrycznie łatwo udowodnić.

§ 30. Symetralna kąta w trójkącie.

Oznaczmy literą s_a symetralną kąta α (jej odcinek na fig. 67. zawarty wewnątrz trójkąta). Z twierdzenia wstaw otrzymujemy:

$$s_a : b = \sin \gamma : \sin \delta$$

$$\text{przyczem } \delta = \beta + \frac{\alpha}{2}$$

W ten sposób wyraża się odcinek s_a za pomocą jednego boku i kątów.

Używając twierdzenia wstaw, możemy również obliczyć x i y :

$$x : c = \sin \frac{\alpha}{2} : \sin (180^\circ - \delta)$$

$$\text{czyli: } x : c = \sin \frac{\alpha}{2} : \sin \delta$$

$$\text{Podobnie: } y : b = \sin \frac{\alpha}{2} : \sin \delta$$

Z tych dwóch proporcji wynika ważny wniosek:

$$\begin{aligned} x : c &= y : b \text{ lub} \\ x : y &= c : b. \end{aligned}$$

Odcinki, na jakie dzieli symetralna kąta wewnętrznego przeciwległy bok trójkąta, tak się mają do siebie, jak przyległe boki.

Otrzymaliśmy więc znowu twierdzenie planimetryczne, odnoszące się do odcinków, a nie do kątów, drogą trygonometryczną.

Uwaga: Do tego twierdzenia można dojść także bez pomocy trygonometrii, z twierdzeń o podobieństwie trójkątów: trzeba poprowadzić przez punkt C prostą równoległą do s_a i przedłużyć AB . (Por. Planimetria str. 134 ćw. 62a)

Proporcja ta w połączeniu z równaniem: $x + y = a$ pozwala wyrazić x i y przy pomocy samych boków trójkąta:

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

Możemy jednak także odcinek s_a symetralnej wyrazić za pomocą boków. Z twierdzenia Carnota otrzymujemy bowiem:

$$\begin{aligned} s_a^2 &= b^2 + y^2 - 2by \cos \gamma & \text{a z drugiej strony:} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \text{ więc } 2b \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a}. \end{aligned}$$

Podstawiając tę wartość i wartość $y = \frac{ab}{b+c}$ we wzorze na s_a , otrzymamy po uporządkowaniu:

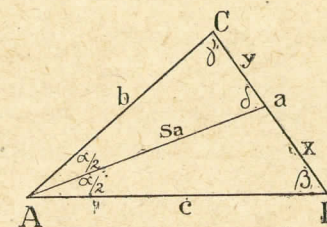


Fig. 67.

$$s_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

gdzie s oznacza połowę obwodu trójkąta.

Obliczmy także dla symetralnej kąta zewnętrznego (fig. 68) wartość odcinków x' i y' .

Z proporcji:

$$x':c = \sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \varepsilon$$

$$y':b = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \varepsilon$$

uwzględniając, że

$$\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{i } \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$$

otrzymamy $x':y' = c:b$.

Otrzymaliśmy więc proporcję taką samą, jak dla odcinków utworzonych przez symetralną kąta wewnętrznego. Porównując te obydwie proporcje, otrzymujemy nową proporcję:

$$x:y = x':y'$$

Gdybyśmy zważali także na znak, trzeba by drugiej stronie dać znak: — (podział zewnętrzny odcinka a). Otóż odcinek a został podzielony wewnątrz symetralną kąta wewnętrznego w tym samym stosunku, jak zewnętrznie symetralną kąta zewnętrznego. (Można to udowodnić także bez pomocy trygonometrii). Podział taki nazywamy — jak wiadomo z planimetrii — podziałem harmonicznym. Udowodnione twierdzenie możemy więc także tak wypowiedzieć:

Symetralna kąta wewnętrznego i przyległego mu kąta zewnętrznego w trójkącie dzielą przeciwległy bok harmonicznie.

Na tem prawie można oprzeć konstrukcję podziału harmonicznego dowolnego odcinka.

Podobne rozważania można nawiązać do linii dośrodkowej trójkąta, t. j. do prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem boku przeciwległego. Z figury 69. widzimy, że

$$d_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos \beta$$

Stosując twierdzenie Carnota do obliczenia iloczynu $ac \cos \beta$ z całego trójkąta, otrzymamy po wykonaniu rachunków:

$$d_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

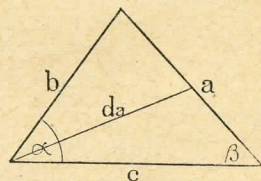


Fig. 69.

Dośrodkowa jest więc wyrażona zapomocą trzech boków trójkąta. Stąd łatwo obliczyć położenie środka ciężkości.

Wykaż, że zawsze jest $d_a \geq s_a$, sprowadzając wzór na d_a do postaci podobnej, jak wzór na s_a !

§ 31. Przykłady rozwiązywania trójkątów z elementów, które nie są ich bokami lub kątami.

Z planimetrii wiadomo, że trójkąt można zbudować konstrukcyjnie nie tylko z boków i kątów, ale także z innych dobranych odpowiednio elementów, n. p. z trzech wysokości, z obwodu i kątów i t. p.

Każde takie zagadnienie da się także rozwiązać rachunkiem przy pomocy twierdzeń trygonometrycznych o rozwiązywaniu trójkątów. I tak wspominaliśmy już, że znając kąty trójkąta i promień koła opisanego możemy obliczyć boki. Okażemy jeszcze na kilku przykładach, w jaki sposób należy postępować przy takich problemach.

1) *Rozwiązać trójkąt, znając dwa boki a, b i wysokość h_a , do jednego z nich leżącą.* (Por. Tom I. Planimetria str. 99).

N. p. $a = 14$ cm, $b = 5$ cm, $h = 4$ cm.

Z figury odczytujemy, że

$$\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$$

$$\text{Więc } \sin \gamma = \frac{4}{5} = 0.8$$

Z tego równania otrzymujemy na kąt γ dwie wartości (mniejsze od 180°):

$$\underline{\gamma_1 = 53^\circ 7' 50''} \text{ i } \underline{\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 = 126^\circ 52' 10''}$$

Otrzymamy więc dwa trójkąty, czyniące zadość warunkom zadania, zgodnie z wynikiem determinacji planimetrycznej (por. str. 99. Tom I.).

Pozostałe elementy c, α, β obliczymy już przy pomocy tych danych a, b, γ . (Przypadek I).

Bok c można jednak także wyrazić wprost zapomocą danych elementów: a, b, h_a . Mianowicie:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\text{Ale } \cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \pm \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}} \text{ więc;}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2ab \sqrt{1 - \frac{h_a^2}{b^2}} \text{ czyli:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \sqrt{b^2 - h_a^2}$$

Podstawiając dane wartości, otrzymamy:

$$\underline{c_1 = \sqrt{137} = 11.705 \text{ cm}} \quad \underline{c_2 = \sqrt{305} = 17.464 \text{ cm.}}$$

Kąt β można teraz obliczyć z równania: $\sin \beta = \frac{h_a}{c}$. Otrzymamy stąd na kąt β po dwie wartości dla c_1 i dla c_2 , ale tylko dwie z tych czterech są przydatne;

$$\underline{\beta_1 = 19^\circ 59'} \text{ i } \underline{\beta_2 = 13^\circ 14' 25''}$$

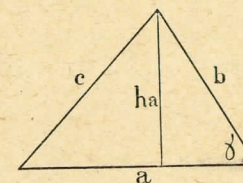


Fig. 70.

Aby zadanie było rozwiązalne, nie można brać elementów a , b i h_a zupełnie dowolnie, musimy bowiem otrzymać na $\sin \gamma$ wartość nie większą od 1. Musi więc być $h_a \leq b$, co w naszym przykładzie jest spełnione.

Wogóle przy zadaniach tego rodzaju należy zwracać uwagę na to, aby elementy podane do wyznaczenia trójkąta nie były od siebie zależne. Tak n. p. nie wystarczą elementy γ , h_a , b , bo wskutek związku $\sin \gamma = \frac{h_a}{b}$ dwa z tych elementów wyznaczają już trzeci. Do wyznaczenia zaś trójkąta potrzeba trzech niezależnych od siebie elementów. Podobnie nie nadają się do wyznaczenia trójkąta trzy elementy: R (promień koła opisanego), a i α , bo są związane równaniem (24₁) $\dots 2R = \frac{a}{\sin \alpha}$; także

wzór $r = (s - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ poucza, że nie można obierać elementów $s - c$, r , γ i możnaby wymienić wiele innych podobnych związków. Taki element, związany z dwoma innymi, nazywa się »datum« t. j. dany, albowiem jest już podany przez podanie tamtych dwóch elementów.

2) *Rozwiązać trójkąt, znając sumę dwóch boków $a + b = m$, trzeci bok c i kąt γ , leżący naprzeciw tego boku.* (Podobne zagadnienie rozwiązywaaliśmy konstrukcyjnie w planimetrii. Tom I. str. 101).

Wyrażamy boki a i b zapomocą c , γ , według twierdzenia wstaw, to równanie $a + b = m$ przejdzie na

$$\frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = m$$

lub

$$c(\sin \alpha + \sin \beta) = m \sin \gamma$$

Przekształcając wyrażenie w nawiasach według wzoru (20₁) a $\sin \gamma$ według wzoru (15 a) otrzymamy:

$$2c \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = m \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \quad (a)$$

Ponieważ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, to $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, więc:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Upraszczając obydwie strony równania (a) przez $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, otrzymujemy:

$$c \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = m \sin \frac{\gamma}{2} = (a + b) \sin \frac{\gamma}{2}$$

lub w formie proporcji:

$$(a + b) : c = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\gamma}{2} \quad (29_1)$$

Z tego równania możemy już obliczyć $\alpha - \beta$, a ponieważ znamy $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, otrzymamy obydwa kąty α i β . Wzór ten jednak zawiera w sobie dwuznaczność. Zarówno $\alpha - \beta$, jak i $\beta - \alpha$ spełniają tę proporcję, bo $\cos(-x) = \cos x$. Otrzymamy więc na α i β po dwie wartości (symetrycznie).

Boki a i b możemy następnie obliczyć przy pomocy twierdzenia wstaw.

Sprawdzić konstrukcyjnie, że to zagadnienie ma dwa rozwiązania! Fig. 71. (Trójkąt pomocniczy z elementów m , c , $\frac{\gamma}{2}$ wypada dwuznacznie: ABD , $A'BD$!) Wyprowadzić wzór (29₁) wprost z figury pomocniczej!

Wzór 29₁, podający związek między sześcioma elementami trójkąta, jest nieraz przydatny do rozwiązywania trójkąta. Nazywamy go: twierdzeniem Mollweide'go (r. 1809). Używa się go zwłaszcza w połączeniu z drugą podobną proporcją Mollweide'go:

$$(a - b) : c = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2} \quad (29_2)$$

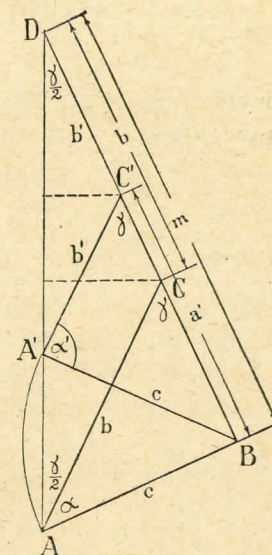


Fig. 71.

którą dowodzi się zupełnie tą samą drogą, jak proporcję (29₁). Wzory te przydają się zwłaszcza do próby, czy trójkąt jest dobrze rozwiązany, zawierają bowiem naraz wszystkich sześć elementów trójkąta.

Aby zadanie było wogóle rozwiązalne, musi wypaść na $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ wartość nie większa od 1, a więc podane elementy $a + b$, γ i c muszą spełniać następujący warunek:

$$\frac{(a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}{c} \leq 1 \quad \text{czyli} \quad (a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq c.$$

Warunek ten można także wyprowadzić wprost z konstrukcji: aby koło zakresłone promieniem c z punktu B przecięło bok AD trójkąta pomocniczego, musi być c nie mniejsze od prostopadłej odległości punktu B od prostej AD . Odległość ta wynosi $(a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$, jak to wynika z trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej BD (na figurze trzeba by dorysować linię prostopadłą z punktu B do prostej AD).

Jeżeli $(a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = c$, mamy tylko jedno rozwiązanie, jeżeli zaś $(a + b) \cdot \sin \frac{\gamma}{2} < c$, mamy dwa rozwiązania ABC i $A'BC'$, trójkąty te jednak są przystające.

3) Dany obwód trójkąta $2s$ i kąty α, β (a zarazem i γ); rozwiązać trójkąt i obliczyć pole. (Tom I. Planimetria, str. 103. ćwicz. 41).

Mamy obliczyć trzy boki. W równaniu:

$$a + b + c = 2s$$

wyrażamy wszystkie niewiadome zapomocą jednej niewiadomej, n. p. a i kątów używając twierdzenia wstaw:

$$a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2s$$

czyli: $a(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 2s \sin \alpha$

Aby ten wzór uczynić przydatnym do rachunku logarytmicznego, zamieniamy sumy na iloczyny:

$$a \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \right) = 2s \sin \alpha$$

Wyrażając $\sin \gamma$ zapomocą połówek i upraszczając przez 2, otrzymamy:

$$a \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) = s \sin \alpha$$

Ale $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ więc:

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2} \quad \text{a} \quad \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}$$

Otóż: $a \cos \frac{\gamma}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = s \sin \alpha$

Stąd: $a \cos \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 2s \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

Po uproszczeniu przez $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ otrzymamy ostatecznie:

$$a = \frac{s \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \quad (b)$$

Podobne wzory otrzymamy na obliczenie b i c .

Do tych wzorów można także dojść wprost z rozważania konstrukcji (fig. 72), budując trójkąt pomocniczy o podstawie $DE = 2s$ a kątach przy podstawie: $\angle E = \frac{\alpha}{2}$, $\angle D = \frac{\beta}{2}$ i kreśląc symetralne boków DC i EC . Z trójkąta CAE otrzymamy:

$$a : (c + b) = \sin \frac{\alpha}{2} : \sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right)$$

czyli: $(2s - a) : a = \sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) : \sin \frac{\alpha}{2}$

Stosując znane z nauki o proporcjach twierdzenie o sumie wyrazów pierwszego i drugiego stosunku, otrzymamy:

$$2s : a = \left[\sin \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right] : \sin \frac{\alpha}{2}$$

a stąd łatwo otrzymać wzór (b).

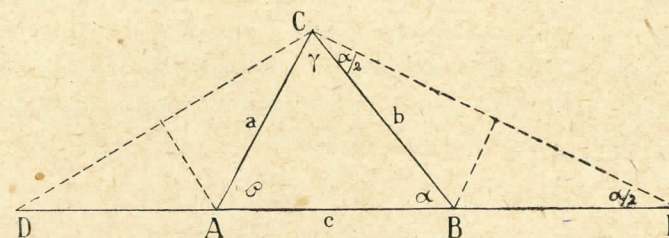


Fig. 72.

Na podstawie znalezionych wartości a, b obliczymy pole z wzoru:

$$P = \frac{ab}{2} \sin \gamma$$

$$P = \frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{s \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin \gamma}{2}$$

Podstawiając za $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ otrzymamy po uproszczeniu:

$$P = s^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Podobne zagadnienia możemy tworzyć w wielkiej ilości, kombinując odpowiednio po trzy elementy (por. ćw. 39); trzeba tylko zważać na to, aby żaden z trzech elementów nie był *danym (datum)* zapomocą dwóch pozostałych.

W ogólności każde takie zagadnienie sprowadza się do problemu czysto rachunkowego: tworzy się równania zawierające elementy podane i szukane i rozwiązuje się układ takich równań. Otrzymujemy układ złożony najwyżej z sześciu równań (sześć równań dostaniemy wtedy, jeżeli żaden z podanych elementów nie jest bokiem ani kątem trójkąta), a następnie przez eliminację (rugowanie) redukujemy ten układ do mniejszej liczby równań. Ostatecznie dochodzi się najczęściej do układów równań postaci:

$$\begin{array}{c|c|c} x \pm y = p & x \pm y = p & x \pm y = p \\ \sin x \pm \sin y = q & \sin x \cdot \sin y = q & \frac{\sin x}{\sin y} = q \end{array}$$

których rozwiązywanie omawialiśmy w § 23.

Uwaga: często okazuje się dogodnym wprowadzenie jako zmiennej pośredniej, pomocniczej, promienia R koła opisanego, wtedy bowiem boki a, b, c wyrażają się prostymi, symetrycznymi wzorami:

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma.$$

Po otrzymaniu ostatecznych wzorów na rozwiązanie każdego zagadnienia, należy przeprowadzić szczegółową dyskusję, czyli t. zw. determinację; podobnie, jak w zagadnieniach konstrukcyjnych. Należy mianowicie zbadać: 1-o pod jakimi warunkami rozwiązanie jest możliwe i 2-o ile rozwiązań posiada dane zagadnienie.

§ 32. Rozwiązywanie czworokątów.

Do rozwiązania czworokąta trzeba 5 elementów. Jeżeli bowiem rozłożymy czworokąt na dwa trójkąty przez poprowadzenie przekątnej, to jeden trójkąt jest wyznaczony zapomocą 3 elementów, a drugi ma już jeden element znany z pierwszego trójkąta, mianowicie element wspólny. Potrzeba więc jeszcze tylko 2 elementów do wyznaczenia drugiego trójkąta.

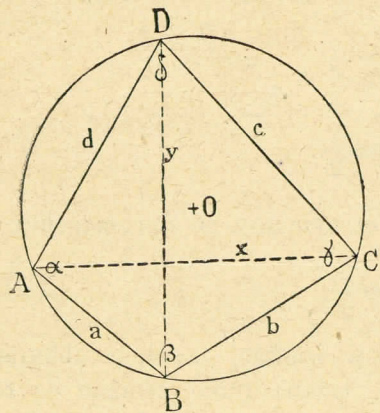


Fig. 73.

Możnaby wyprowadzić pewne ogólne związki między elementami czworokąta, podobne do twierdzenia wstaw, jednakże łatwiej jest rozwiązać każdy trójkąt składowy osobno. Kilka przykładów rozwiązywania czworokątów omówimy w rozdziale następnym, poświęconym miernictwu (n. p. problem Snelliusa, Hansena i t. p.). Rozumowanie całe znacznie się upraszcza, jeżeli czworokąt jest wpisany w koło. Ponieważ w takim czworokącie $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$ (por. Tom I, str. 82), przeto do wyznaczenia czworokąta w koło wpisanego wystarczą jeszcze 4 elementy. Najsymetryczniej przedstawia się rachunek, jeżeli znamy cztery boki. Obliczając przekątnie BD zapomocą twierdzenia Carnota (fig. 73) z obydwu trójkątów, otrzymujemy $a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$, ale $\cos \gamma = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. Podstawiając tę wartość, otrzymamy:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)}$$

i podobnie dla innych kątów.

Wzory te można sprowadzić do formy podobnej, jak wzory połówkowe dla trójkąta, kładąc $a + b + c + d = 2s$. Po wykonaniu podobnych rachunków, jak na str. 120, otrzymamy:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc+ad}} \quad \text{i} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{bc+ad}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$$

a stąd

Na podstawie tych wzorów otrzymamy na pole wzór:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

podobny do wzoru Herona.

Wyprowadź wzory:

$$x = \sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}$$

wyrażające przekątne zapomocą boków!

(Wyrazić x i y zapomocą tw. Carnota i podstawić za $\cos \alpha, \cos \beta$ wartości).

Tworząc iloczyn przekątnej otrzymamy z poprzednich wzorów:

$$xy = ac + bd$$

Jest to twierdzenie Ptolomeusza: w każdym czworokącie wpisanym w koło iloczyn przekątnej równa się sumie iloczynów boków przeciwległych. Twierdzenie to można udowodnić także planimetrycznie, opierając się na podobieństwie trójkątów.

Ptolomeusz używał tego twierdzenia zamiast teoremu dodawania do obliczenia tablicy funkcji sinus a raczej: tablicy cięciw. Przy pomocy twierdzenia Ptolomeusza można zresztą udowodnić teorem dodawania. W tym celu wpisuje się w koło o średnicy $2R = 1$ czworokąt, którego jedną przekątnią jest średnica a dwa boki wychodzące z tego samego wierzchołka, co przekątnia, tworzą z nią kąty α i β i leżą po przeciwnych jej stronach. Narysuj!

Cwiczenia VII.

§ 24. 1. Jaką postać przybiera twierdzenie wstaw dla trójkątów prostokątnych?

2. Opierając się na twierdzeniu: »Symetralna kąta w trójkącie dzieli bok przeciwny na odcinki proporcjonalne do przyległych boków«, udowodnić twierdzenie wstaw.

3. Wykazać, że, jeżeli kąt α wyrażony w mierze łukowej wzrośnie o mały kąt w , (tak mały, że można przyjąć $\cos w = 1, \sin w = w$, według § 12 i 21), a boki a i b nie ulegną zmianie, to kąt β wzrośnie w przybliżeniu o $x = \frac{w \cdot b}{a} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$.

4. Wykazać, że jeżeli boki i kąty trójkąta są podane z błędami $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, (w mierze łukowej) tak małymi, że iloczyny tych błędów można zaniedbać, a do kątów można zastosować rachunek małymi kątami (tj. $\cos x = 1, \sin x = x$), to błędy te są związane równaniami przybliżonami:

$$\frac{a_1}{a} - \alpha_1 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b_1}{b} - \beta_1 \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{c_1}{c} - \gamma_1 \quad \operatorname{ctg} \gamma.$$

25. 5. Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| a) $a = 48.3 \text{ m}$ | $\beta = 28^\circ 31'$ | $\gamma = 67^\circ 15'$ |
| b) $b = 3.654 \text{ m}$ | $\alpha = 109^\circ 20'$ | $\gamma = 32^\circ 28'$ |
| c) $c = 0.437 \text{ m}$ | $\beta = 58^\circ 19'$ | $\gamma = 96^\circ 30'$ |
| d) $a = 0.39065 \text{ km}$ | $\alpha = 115^\circ 36' 40''$ | $\beta = 25^\circ 4' 32''$ |
| e) $a = 223 \text{ km}$ | $\alpha = 3^\circ 42' 25''$ | $\beta = 8^\circ 32''$ |

6. Rozwiązać trójkąt ukośnokątny, znając:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---------------------------------------|
| a) $a = 85 \text{ m}$ | $b = 63 \text{ m}$ | $\alpha = 83^\circ 20'$ |
| b) $a = 6.34 \text{ cm}$ | $c = 9.065 \text{ cm}$ | $\gamma = 124^\circ 18'$ |
| c) $b = 29.36 \text{ mm}$ | $c = 36.45 \text{ mm}$ | $\beta = 47^\circ 20'$ (konstrukcja!) |
| d) $a = 6.7452 \text{ m}$ | $b = 6.8965 \text{ m}$ | $\alpha = 36^\circ 25' 46''$ |

7. Zbadać, czy istnieje trójkąt, którego elementy wynoszą:

- | | | |
|-----------------------|--------------------|-----------------------------|
| a) $a = 18 \text{ m}$ | $b = 25 \text{ m}$ | $\alpha = 46^\circ 30'$ |
| b) $a = 18 \text{ m}$ | $b = 25 \text{ m}$ | $\alpha = 46^\circ 3' 15''$ |
| c) $a = 18 \text{ m}$ | $b = 25 \text{ m}$ | $\alpha = 45^\circ$ |

§ 26—28. 8. Rozwiązać trójkąt, znając:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|------------------------------|
| a) $a = 78.3 \text{ cm}$ | $b = 59.2 \text{ cm}$ | $\gamma = 124^\circ 15'$ |
| b) $a = 0.059 \text{ cm}$ | $c = 0.31 \text{ cm}$ | $\beta = 68^\circ 23' 10''$ |
| c) $b = 4.3057 \text{ m}$ | $c = 0.9368 \text{ m}$ | $\alpha = 91^\circ 48' 15''$ |

9. Wyprowadzić z twierdzenia wstaw twierdzenie Carnota.

10. Wyprowadzić z twierdzenia Carnota twierdzenie wstaw. Wskazówka: $\cos \alpha$ i $\cos \beta$ znalezione z twierdzenia Carnota podstawić we wzorze

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta}}$$

11. Wyprowadzić twierdzenie Carnota z twierdzeń o rzutach: $c = a \cos \beta + b \cos \alpha$ i t. d.

12. Znając a , b i α rozwiązać trójkąt, używając tylko twierdzenia Carnota (dwuznaczność!).

13. Wykazać, że z twierdzeń połówkowych wynikają znane własności trójkąta: $a + b > c$, $a - b < c$, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

14. Wykazać, że jeżeli boki trójkąta a , b są podane z błędami a_1 , b_1 a kąt γ (w mierze łukowej) z błędem γ_1 , przyczem błędy są tak małe, że ich kwadraty i iloczyny można zaniedbać a do kąta γ_1 można zastosować rachunek małymi kątami (§ 12 i 21), to błąd w obliczeniu boku c wynosi w przybliżeniu $x = a_1 \cos \beta + b_1 \cos \alpha + \gamma_1 b \sin \alpha$.

15. W trójkątach podobnych boki mają się do siebie, jak 7:9:12. Obliczyć kąty tych trójkątów.

16. Rozwiązać trójkąt znając:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $a = 8 \text{ cm}$, | $b = 7 \text{ cm}$, | $c = 6 \text{ cm}$. |
| b) $a = 8.5 \text{ cm}$, | $b = 10.6 \text{ cm}$, | $c = 9.8 \text{ cm}$. |
| c) $a = 834.9 \text{ km}$, | $b = 567.2 \text{ km}$, | $c = 743.1 \text{ km}$. |
| d) $a = 0.18526 \text{ m}$, | $b = 0.096437 \text{ m}$, | $c = 0.11092 \text{ m}$. |

17. Obliczyć pole trójkąta znając:

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| a) $a = 12.3 \text{ cm}$, | $b = 15.6 \text{ cm}$ | $\gamma = 52^\circ 40'$ |
| b) $b = 0.46 \text{ m}$, | $c = 0.32 \text{ m}$ | $\gamma = 106^\circ 15' 20''$ |
| c) $a = 100 \text{ m}$ | $\alpha = 47^\circ 27'$ | $\gamma = 86^\circ 53'$ |
| d) $b = 0.5346 \text{ m}$ | $\alpha = 72^\circ 18' 20''$ | $\gamma = 43^\circ 33' 10''$ |
| e) $a = 408 \text{ m}$ | $b = 41 \text{ m}$ | $c = 401 \text{ m}$ |
| f) $a = 53.342 \text{ m}$ | $b = 38.765 \text{ m}$ | $c = 40.923 \text{ m}$. |

18. W równoległoboku znamy przekątnię $d = 12 \text{ m}$ i kąty, jakie ta przekątnia tworzy z bokami $\varphi = 26^\circ$, $\psi = 55^\circ$; obliczyć boki i pole.

19. W równoległoboku znamy dwa sąsiednie boki a , b i kąt α między nimi zawarty; obliczyć przekątnie. Obrac a , b , α dowolnie!

20. **Tabela rozwiązanych trójkątów.** Obierając dowolnie 3 elementy z jednego wiersza obliczyć trzy pozostałe.

a	b	c	α	β	γ
150	25	145	$96^\circ 43' 58.5''$	$9^\circ 31' 38.2''$	$73^\circ 44' 23.3''$
795	567.678	663.986	$79^\circ 59'$	$44^\circ 41'$	$55^\circ 20'$
4527	3465	4449	$68^\circ 29' 15''$	$45^\circ 24' 18''$	$66^\circ 6' 27''$
22.45	0.59525	21.569	$165^\circ 22' 26''$	$0^\circ 23' 20''$	$14^\circ 14' 14''$
485	840	1272.15	$12^\circ 13' 33.6''$	$21^\circ 31'$	$146^\circ 15' 26.4''$
83.856	85.153	65.696	$66^\circ 5' 10''$	$68^\circ 10' 24''$	$45^\circ 44' 26''$
360	309	$\begin{cases} 615.67 \\ 55.41 \end{cases}$	$\begin{cases} 24^\circ 57' 56'' \\ 155^\circ 2' 4'' \end{cases}$	$21^\circ 14' 25''$	$\begin{cases} 133^\circ 47' 39'' \\ 3^\circ 43' 31'' \end{cases}$
83512	76725	$\begin{cases} 160252 \\ 6795.9 \end{cases}$	$\begin{cases} 0^\circ 0' 22.86'' \\ 179^\circ 59' 37.14'' \end{cases}$	$0^\circ 0' 21''$	$\begin{cases} 179^\circ 59' 16.14'' \\ 0^\circ 0' 1.86'' \end{cases}$
0.695	0.345	$\begin{cases} 0.88365 \\ 0.41192 \end{cases}$	$\begin{cases} 46^\circ 52' 10'' \\ 133^\circ 7' 50'' \end{cases}$	$21^\circ 14' 25''$	$\begin{cases} 111^\circ 53' 25'' \\ 25^\circ 37' 45'' \end{cases}$
43	50	57	$46^\circ 49' 35''$	$57^\circ 59' 44''$	$75^\circ 10' 41''$
61	106	151	$18^\circ 44'$	$33^\circ 55' 30''$	$127^\circ 20' 30''$
14.493	55.4363	66.9129	$8^\circ 20'$	$33^\circ 40'$	138°
15.47	17.39	22.88	$42^\circ 30' 44''$	$49^\circ 25' 49''$	$88^\circ 3' 27''$

21. W równoległoboku znamy bok $a = 10 \text{ m}$, przekątnie $d = 14 \text{ m}$ i kąt $\varphi = 36^\circ 8' 20''$ utworzony przez obydwie przekątnie. Obliczyć drugi bok i drugą przekątnię.

22. Znając dwie przekątnie: $d_1 = 6.8 \text{ m}$ i $d_2 = 5.4 \text{ m}$ równoległoboku i jeden bok $a = 4 \text{ m}$, obliczyć drugi bok i kąty równoległoboku.

23. W trapezie równoramiennym znamy przekątnię i kąty, jakie ona tworzy z sąsiednimi bokami: $d = 0.327 \text{ cm}$, $\alpha = 20^\circ 37' 10''$, $\beta = 61^\circ 45'$. Obliczyć boki tego trapezu.

24. W trapezie znamy boki równoległe $a = 3 \text{ m}$, $b = 1.6 \text{ m}$, jeden z boków nierównoległych $c = 0.8 \text{ m}$ i kąt między bokiem a i c : $\delta = 70^\circ 52' 40''$. Obliczyć czwarty bok i pole.

25. Rozwiązać trapez równoramienny, znając mniejszy z boków równoległych $b = 28 \text{ cm}$, kąt przy nim leżący $\beta = 102^\circ 46' 20''$ i przekątnię $d = 50 \text{ cm}$.

26. Znając boki trapezu, obliczyć jego kąty i przekątnie; za boki obrac dowolne liczby.

27. W dowolnym czworokącie znamy dwie przekątnie p , q i kąt φ między nimi zawarty. Obliczyć pole tego czworokąta!

28. Który trójkąt ma największe pole z pomiędzy wszystkich trójkątów o dwóch danych bokach? (n. p. $a = 50 \text{ m}$, $b = 36 \text{ m}$).

29. Pod jakim kątem widać z punktu przecięcia się dwóch kół o promieniach: $r_1 = 5.32 \text{ cm}$ i $r_2 = 7.44 \text{ cm}$, których środki są oddalone o 10 cm , odcinek łączący środki?

30. Trzy koła o promieniach $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 2 \text{ cm}$, $r_3 = 3 \text{ cm}$ stykają się zewnętrznie; obliczyć pole między temi kołami zawarte.

§ 29—30. 31. Obliczyć promień koła opisanego na trójkącie, w którym znany: $b = 15 \text{ cm}$ $\beta = 72^\circ 7'$.

32. Punkt A jest oddalony od punktu B o 35 m , a od punktu C o 29 m . Kierunki AB i AC tworzą kąt $\alpha = 115^\circ 30'$. Obliczyć promień koła przechodzącego przez te 3 punkty.

33. Sieczna i styczna koła przecinają się pod kątem $\alpha = 68^\circ 18' 50''$; część siecznej, leżąca wewnątrz koła: $a = 5.6612 \text{ km}$ a część od obwodu koła do stycznej: $b = 2.8425 \text{ km}$. Obliczyć promień koła.

34. Wpisać w koło o promieniu 10 cm trójkąt o kątach: $\alpha = 43^\circ 23'$ i $\beta = 123^\circ 10'$. Obliczyć jego boki i pole.

35. Jakie największe koło można wyciąć z trójkąta o boku $a = 12 \text{ cm}$, i kątach $\beta = 32^\circ$, $\gamma = 68^\circ$.

36. Obliczyć pole trójkąta o kątach $\alpha = 112^\circ$, $\beta = 48^\circ$, znając promień koła wpisanego $r = 1.7396 \text{ cm}$.

37. Rozwiązać trójkąt znając:

- $a = 3.6 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$ i dośrodkową boku a : $d_a = 3.8 \text{ cm}$ (konstrukcja!)
- $a = 485 \text{ cm}$, $\gamma = 21^\circ 31'$ i dośrodkową boku c : $d_c = 420 \text{ cm}$ (konstrukcja!)
- $\alpha = 56^\circ 48'$, $\beta = 42^\circ 52'$ i symetralną $s_a = 23 \text{ cm}$ kąta α .
- $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 2 : 4 : 5$, i symetralną $s_c = 1 \text{ m}$ kąta γ .

§ 31. 38. Rozwiązać trójkąt, znając:

- $c = 4 \text{ cm}$ $b = 4.8 \text{ cm}$ $w_c = 3 \text{ cm}$
 - $c = 0.36 \text{ m}$ $w_a = 0.3 \text{ m}$ $w_b = 0.28 \text{ m}$ (konstrukcja!)
 - $w_c = 15.4 \text{ cm}$ $\alpha = 35^\circ 24'$ $\beta = 61^\circ 44'$
 - $c = 4.753 \text{ cm}$ $w_c = 3.345 \text{ cm}$ $\gamma = 50^\circ 26'$
- (Wskazówka: $a^2 + b^2$ wyrazić zapomocą twierdzenia Carnota a za iloczyn $a \cdot b$ podstawić wartość z pola trójkąta). Konstrukcja!
- $w_a = 5 \text{ cm}$ $w_b = 6 \text{ cm}$ $w_c = 8 \text{ cm}$

Wskazówka: wyrazić pole P w trzy sposoby. Obliczyć:

$a + b + c$, $a + b - c$, ... i podstawić we wzór połówkowy na $\tan \frac{\alpha}{2}$, to P odpadnie). Konstrukcja polega na proporcji $a : b : c = \frac{1}{w_a} : \frac{1}{w_b} : \frac{1}{w_c}$; wykonuje się metodą figur podobnych.

39. Obierając dowolnie trzy niezależne elementy z pośród podanych poniżej rozwiązać trójkąt.

$a = 170 \text{ cm}$	$w_a = 122.4 \text{ cm}$	$d_a = 215.03 \text{ cm}$
$b = 153 \text{ »}$	$w_b = 136 \text{ »}$	$d_b = 224.41 \text{ »}$
$c = 289 \text{ »}$	$w_c = 72 \text{ »}$	$d_c = 72.62 \text{ »}$
$\alpha = 28^\circ 4' 21''$	$R = 180.625 \text{ cm}$	$s_a = 194.1 \text{ »}$
$\beta = 25^\circ 3' 27''$	$r = 34 \text{ cm}$	$s_b = 208.98 \text{ »}$
$\gamma = 126^\circ 52' 12''$	$P = 10404 \text{ cm}^2$	$s_c = 72.025 \text{ »}$

(w oznacza wysokość, d linie środkową a s symetralną kąta).

40. Rozwiązać trójkąt znając:

- $a + b = 7.5 \text{ cm}$, $c = 2.4 \text{ cm}$, $\alpha = 48^\circ 20'$

(Wskazówka: obliczamy s , $s - c$ i z wzorów połówkowych otrzymamy:

$$\tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{s - c}{s}, \text{ a stąd kąt } \beta).$$

- $a + b = 48.6 \text{ m}$, $c = 21.8 \text{ m}$, $\gamma = 45^\circ 30'$

(Por. przykład 2, str. 128).

- $c = 10 \text{ cm}$, kąt przeciwnieległy $\gamma = 22^\circ$ i promień koła wpisanego $r = 4 \text{ cm}$.

- $a - b = 1.2 \text{ cm}$, $c = 8.5 \text{ cm}$, $\gamma = 28^\circ 35'$

(Wyrazić a i b przy pomocy twierdzenia wstaw!)

- $a - b$, promień koła opisanego R i kąt γ .

- $a + b$, c i promień koła wpisanego r .

- $a + b$, pole P i promień koła wpisanego r .

- $a - b$, w_a , w_b .

41. Rozwiązać trójkąt znając:

- $2s = a + b + c = 30 \text{ m}$, $\alpha = 53^\circ 40'$, $\beta = 71^\circ 20'$.

- $2s = a + b + c = 10 \text{ m}$, pole $P = 3 \text{ m}^2$ i wysokość $w_b = 2 \text{ m}$.

- $2s = a + b + c = 5.86 \text{ m}$, wysokość $w_c = 1 \text{ m}$ i kąt $\gamma = 34^\circ 40'$.

42. Wykazać, że dla promieni ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 kół wpisanych od zewnątrz (t. j. w przestrzenie otwarte, zawarte między jednym bokiem a przedłużeniem dwóch innych) zachodzą związki:

$$a) (s - a) \rho_1 = (s - b) \rho_2 = (s - c) \rho_3 = P$$

$$b) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_1}{s}.$$

43. Wykazać, że między promieniami kół wpisanych od zewnątrz, promieniem koła wpisanego ρ i promieniem koła opisanego R zachodzi związek:

$$a) \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 - \rho = 4R.$$

$$b) \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}$$

$$c) \rho \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = P^2$$

- Przy pomocy wzorów b) i c) okazać, że

$$P = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\sqrt{\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3}}$$

44. Rozwiązać trójkąt znając promienie kół wpisanych od zewnątrz: ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 (Por. ćw. 42).

45. Jeżeli w trójkącie proste przedzielające trzy kąty (dowolnie) przecinają się w jednym punkcie S , to między odcinkami boków trójkąta d , e , f , g , h , i , (po porządku!) zachodzi następujący związek: $d \cdot f \cdot h = e \cdot g \cdot i$ (Twierdzenie Ceva'y). Udowodnić! (przy pomocy wzorów na pole).

46. Jeżeli dowolna prosta przecina dwa boki AB i BC trójkąta ABC i przedłużenie 3 boku AC w punktach D , E , F , to zawsze zachodzi następujący związek między odcinkami: $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$ (Twierdzenie Menelaosa).

47. Wykazać, że w każdym trójkącie istnieje punkt, mający tę własność, że proste, łączące go z wierzchołkami, są jednakowo nachylone do trzech boków. (Kąt nachylenia ω spełnia równanie: $\cotg \omega = \cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma$. Jest to tak zwany punkt Brocard'a).

§ 32. 48. Obliczyć kąty i pole czworokąta wpisanego w koło znając jego boki: $a = 3.5 \text{ cm}$, $b = 2.6 \text{ cm}$, $c = 4.7 \text{ cm}$, $d = 8.6 \text{ cm}$. Obliczyć także promień koła!

49. Obliczyć boki czworokąta opisanego na kole o promieniu $\rho = 3 \text{ cm}$ znając jego kąty: $\alpha = 106^\circ$, $\beta = 52^\circ$, $\gamma = 74^\circ$, $\delta = 128^\circ$.

50. Rozwiązać czworokąt znając jego boki i przekątnię: $a = 26 \text{ cm}$, $b = 32 \text{ cm}$, $c = 24 \text{ cm}$, $d = 18 \text{ cm}$, $e = 36 \text{ cm}$.

51. Obliczyć objętość graniastosłupa trójbocznego znając krawędź boczną $k = 17 \text{ dm}$, jej nachylenie do podstawy $\varphi = 60^\circ$, tudzież kąty $\alpha = 63^\circ 20'$, $\beta = 40^\circ 30'$ podstawy i promień koła na niej opisanego: $r = 6 \text{ dm}$.

52. Obliczyć objętość ostrosłupa trójbocznego, w którym krawędzie boczne są równe i wynoszą po: $k = 8 \text{ cm}$, znając oprócz tego: a) bok i dwa kąty podstawy: $a = 5 \text{ cm}$, $\beta = 28^\circ 30'$, $\gamma = 94^\circ 20'$; b) trzy boki podstawy $a = 14 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$.

Uwaga: Wysokość trafia w środek koła opisanego, ponieważ krawędzie boczne są równe.

53. Obliczyć objętość stożka pochyłego znając:
 a) oś a , promień podstawy r , i kąt nachylenia osi do podstawy α ; obliczyć także najkrótszy i najdłuższy bok stożka: b_1 i b_2 .
 b) bok najdłuższy b_2 i kąty: φ i ψ nachylenia boków b_1 i b_2 (najkrótszego i najdłuższego) do podstawy.
 54. Obliczyć powierzchnię i objętość bryły obrotowej, zakreślonej obrotem trójkąta około boku c znając:
 a) $c = 15 \text{ cm}$, $\alpha = 54^\circ 51' 20''$, $\beta = 43^\circ 15' 30''$.
 b) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $\gamma = 106^\circ 24'$.
 c) $\alpha = 75^\circ 40'$, $\beta = 45^\circ 20'$ i promień koła wpisanego $\rho = 4 \text{ cm}$.
 55. W stożku ściętym pochyłym znamy średnice podstaw: $2R = 5.2 \text{ cm}$, $2r = 1.6 \text{ cm}$, przekątnie $d = 4.8 \text{ cm}$ przekroju, zawierającego najkrótszy i najdłuższy bok, tudzież nachylenie $\varphi = 75^\circ 20'$ tej przekątnej do podstawy. Obliczyć objętość tego stożka ściętego.

Rozwiązania ćwiczeń.

1. $a : b : c = \sin \alpha : \cos \alpha : 1$. 2. Wskazówka: z punktu D , w którym symetralna kąta γ przecina bok c , wykreślić prostopadłe DE i DF do boków a i b , to $DE = DF$ i t. d. 3. Wskazówka: we wzorze $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ podstawić $\beta + x$ za β , a $\alpha + w$ za α i rozwinąć według teoremu dodawania a następnie odjąć obustronnie pierwotny wzór. 4. Wskazówka: we wzór $a \sin \beta = b \sin \alpha$ podstawić $a + a_1$, $b + b_1$, $\beta + \beta_1$, $\alpha + \alpha_1$, za a , b , β , α , rozwinąć według teoremu dodawania i odjąć pierwotne równanie; opuściwszy $a_1 \beta_1 \cos \beta$ i $b_1 \alpha_1 \cos \alpha$ podzielić obustronnie przez pierwotne równanie. 5. a) $\alpha = 84^\circ 14'$, $c = 44.769 \text{ m}$, $b = 23.177 \text{ m}$. b) $\beta = 38^\circ 12'$, $c = 3.1718 \text{ m}$, $a = 5.5735 \text{ m}$. c) $\alpha = 25^\circ 11'$, $a = 0.18715 \text{ m}$, $b = 0.37428 \text{ m}$. d) $\gamma = 40^\circ 18' 48''$, $b = 0.1836 \text{ km}$, $c = 0.28027 \text{ km}$. e) $\gamma = 168^\circ 17' 3''$, $b = 502.12 \text{ km}$, $c = 731.8 \text{ km}$. 6. a) $\beta = 47^\circ 24' 16''$, $\gamma = 49^\circ 15' 44''$, $c = 64.844 \text{ m}$. b) $\alpha = 35^\circ 17' 37''$, $\beta = 20^\circ 24' 23''$, $b = 3.8262 \text{ cm}$. c) $\alpha_1 = 66^\circ 45' 38''$, $\gamma_1 = 65^\circ 54' 22''$, $a_1 = 36.708 \text{ mm}$; $\alpha_2 = 18^\circ 34' 22''$, $\gamma_2 = 114^\circ 5' 38''$, $a_2 = 12.768 \text{ mm}$. d) $\beta_1 = 37^\circ 23' 3''$, $\gamma_1 = 106^\circ 11' 11''$, $c_1 = 10.908 \text{ m}$; $\beta_2 = 142^\circ 36' 57''$, $\gamma_2 = 0^\circ 57' 27''$, $c_2 = 0.1898 \text{ m}$. 7. a) $\alpha = 46^\circ 30'$ niemożliwe; b) $\alpha = 46^\circ 3' 15''$ możliwe: $\beta = 90^\circ$, istnieje tylko jedno rozwiązanie; c) $\alpha = 45^\circ$: istnieją dwa rozwiązania: $\beta_1 = 79^\circ 8' 50''$, $\beta_2 = 100^\circ 51' 10''$. 8. a) $\alpha = 32^\circ 4' 37''$, $\beta = 23^\circ 40' 23''$, $c = 121.87 \text{ cm}$. b) $\alpha = 10^\circ 46' 26''$, $\gamma = 100^\circ 50' 24''$, $b = 0.29343 \text{ cm}$. c) $\beta = 71^\circ 34' 45''$, $\gamma = 16^\circ 37'$, $a = 4.536 \text{ m}$. 9. Por. §. 27. 11. Wskazówka: utworzywszy równania rzutów dla boków a , b , c pomnożyć je odpowiednio przez: $-a$, b , c i dodać do siebie stronami. 12. $c = b \left(\cos \alpha \pm \sqrt{\frac{a}{b} + \cos^2 \alpha} - 1 \right)$. 13. Wskazówka: zastosować wzór (24 b) do $\cos \frac{\gamma}{2}$ i $\cos \frac{\alpha}{2}$ i żądać, aby pod pierwiastkiem było wyrażenie dodatnie, to otrzymamy nierówności $a + b > c$

i $a - b < c$. Równanie dla kątów otrzymuje się, wykazując, że $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{180^\circ - \gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$; trzeba zastosować wzory (13₃) (24). 14. Por. ćw. 4.

Wskazówka: podstawić we wzór $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ wartości: $a + a_1$, $b + b_1$, $c + x$, $\gamma + \gamma_1$, za a , b , c , γ i po rozwinięciu odjąć pierwotne równanie; opuszczając kwadraty i iloczyny błędów otrzymamy

$$x = \frac{a - b \cos \gamma}{c} \cdot a_1 + \frac{b - a \cos \gamma}{c} \cdot b_1 + \gamma_1 b \sin \alpha$$

Stosując tu prawo rzutów (z ćwiczenia 11) otrzymamy żądany wzór. 15. $\alpha = 35^\circ 25' 53''$, $\beta = 48^\circ 11' 22''$, $\gamma = 96^\circ 22' 45''$. 16. a) $\alpha = 75^\circ 31' 20''$, $\beta = 57^\circ 54' 34''$, $\gamma = 46^\circ 34' 6''$; b) $\alpha = 49^\circ 3' 18''$, $\beta = 70^\circ 23' 2''$, $\gamma = 60^\circ 33' 40''$; c) $\alpha = 77^\circ 53' 20''$, $\beta = 41^\circ 37' 26''$, $\gamma = 60^\circ 29' 14''$; d) $\alpha = 126^\circ 28' 32.8''$, $\beta = 24^\circ 44' 40.6''$, $\gamma = 28^\circ 46' 44.6''$. 17. a) $P = 76.284 \text{ cm}^2$; b) $P = 0.070658 \text{ cm}^2$; c) $P = 4847.7 \text{ m}^2$; d) $P = 0.10424 \text{ m}^2$; e) $P = 8160 \text{ m}^2$; f) $P = 788.83 \text{ m}^2$. 18. $a = 9.9532 \text{ m}$, $b = 5.326 \text{ m}$, $P = 52.352 \text{ m}^2$. 19. Zastosować twierdzenie Carnota. 21. $b = 20.827 \text{ m}$, $d_2 = 29.522 \text{ m}$. 22. $b = 4.6582 \text{ m}$, $\alpha = 76^\circ 45' 20''$, $\beta = 180^\circ - \alpha$. 23. $a = 0.32148 \text{ cm}$, $b = 0.29063 \text{ cm}$, $c = 0.11619 \text{ cm}$. 24. $d = 1.1034 \text{ m}$, $P = 1.7385 \text{ m}^2$. 25. $c = 35.694 \text{ cm}$, $a = 43.782 \text{ cm}$. 26. Wskazówka: do obliczenia kątów służy trójkąt pomocniczy o bokach $a - b$, c , d (a i b boki równoległe, przypadek IV-ty). Następnie oblicza się przekątnie na podstawie I. przypadku. 27. $P = \frac{pq}{2} \cdot \sin \varphi$. 28. Trójkąt prostokątny.

29. $\alpha = 101^\circ 54' 54''$. 30. $p = 0.4642 \text{ cm}^2$. Wskazówka: od pola trójkąta odjąć pola trzech wycinków; kąty trójkąta obliczyć według przypadku IV. 31. $R = 7.8808 \text{ cm}$. 32. $R = 30.035 \text{ m}$. 33. $R = 4.15 \text{ hm}$. Wskazówka: odcinek c stycznej oblicza się z proporcji $b : c = c : (a + b)$, następnie kąt β utworzony przez sieczną i cięciwę łączącą punkt styczności z końcem siecznej. Z trójkąta wpisanego w koło otrzymamy następnie R . 34. $a = 13.738 \text{ cm}$, $b = 16.742 \text{ cm}$, $c = 4.6519 \text{ cm}$, $p = 26.748 \text{ cm}^2$. 35. $r = 2.4145 \text{ cm}$, Wskazówka: r oblicza się z wzoru $a = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. 36. $P = 26 \text{ cm}^2$. Wskazówka: wyrazić a i b za pomocą r , α , β , γ i podstawić we wzór (25). Po uporządkowaniu otrzymamy: $P = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. 37. a) $\alpha = 50^\circ 28'$, $\beta = 70^\circ 32'$, $\gamma = 59^\circ$, $b = 4.4 \text{ cm}$. a) $\alpha = 114^\circ 36' 32''$, $\beta = 43^\circ 52' 28''$, $b = 369.73 \text{ cm}$, $c = 195.65 \text{ cm}$. Wskazówka: z punktu E , w którym linia środkowa trafia bok c , prowadzimy $ED \parallel AC$ i rozwiązujemy trójkąt CDE (III-ci przypadek); ponieważ $DE = \frac{b}{2}$, to a , b , γ są znane (przyp. I). c) $\gamma = 80^\circ 20'$, $a = 27.177 \text{ cm}$, $b = 22.095 \text{ cm}$, $c = 32.018 \text{ cm}$. d) $a = 1.2792 \text{ m}$, $b = 2.5584 \text{ m}$,

$c = 3.198 \text{ m}$, $\alpha = 22^\circ 19' 54''$, $\beta = 49^\circ 27' 34''$, $\gamma = 108^\circ 12' 32''$. Wskazówka: wartości $b = 2a$, $c = 2.5a$ wstawiamy we wzór na s_c i obliczamy stąd a .
38. a) Dwa rozwiązania: $\beta = 99^\circ 41' 54''$ lub $22^\circ 59' 48''$, $\gamma = 41^\circ 37' 6''$ lub $15^\circ 41' 12''$, $\alpha = 38^\circ 41'$ lub $141^\circ 19'$, $a = 3.0435 \text{ cm}$ lub 7.679 cm . b) $\alpha = 51^\circ 3'$, $\beta = 56^\circ 23'$, $\gamma = 72^\circ 34'$, $a = 0.2934 \text{ m}$, $b = 0.3144 \text{ m}$. c) $a = 17.485 \text{ cm}$, $b = 26.585 \text{ cm}$, $c = 29.95 \text{ cm}$. d) $\alpha = 96^\circ 28' 30''$, $\beta = 33^\circ 5' 30''$, $a = 6.1263 \text{ cm}$, $b = 3.3664 \text{ cm}$. e) $\alpha = 85^\circ 18' 58''$, $\beta = 56^\circ 9' 18''$, $\gamma = 38^\circ 31' 44''$, $a = 9.6322 \text{ cm}$, $b = 8.0268 \text{ cm}$, $c = 6.0201 \text{ cm}$.
40. a) $\beta = 97^\circ 53' 4''$, $\gamma = 33^\circ 46' 56''$, $a = 3.2243 \text{ cm}$, $b = 4.2757 \text{ cm}$. b) $\alpha = 97^\circ 41' 35''$, $\beta = 36^\circ 48' 25''$, $a = 30.29 \text{ m}$, $b = 18.31 \text{ m}$. Uwaga: Biorąc

$\frac{\alpha - \beta}{2} = -30^\circ 26' 35''$ otrzymamy drugie rozwiązanie. c) $\alpha = 91^\circ 33'$, $\beta = 66^\circ 27'$,

$a = 26.685 \text{ cm}$, $b = 24.471 \text{ cm}$. Wskazówka: z wzoru $r = (s - c) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ oblicza

się $a + b$ a następnie stosuje się wzór (29₁) do obliczenia różnicy kątów. d) $\alpha = 83^\circ 34' 16''$, $\beta = 67^\circ 50' 44''$, $a = 17.655 \text{ cm}$, $b = 16.455 \text{ cm}$. e) Wskazówka: uwzględniając (24₁) otrzymamy na obliczenie $\alpha - \beta$ z (29₂) wzór $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{4R \sin \frac{\gamma}{2}}$. f) Wskazówka: z wzoru $r = (s - c) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ obliczamy

... następnie postępujemy tak, jak w przykładzie 2. na str. 128. g) Wskazówka: obliczając c z równania $P = (a + b + c) \cdot \frac{r}{2}$ sprowadzamy to zagadnienie do poprzedniego. h) Wyrażając a , b zapomocą w_b , w_a i $\sin \gamma$ otrzymujemy na obliczenie γ wzór $\sin \gamma = \frac{w_b - w_a}{a - b}$; a i b obliczy się następnie

bezpośrednio z w_a i w_b . Pozostaje rozwiązać trójkąt z elementów a , b , γ .
41. a) $a = 9.396 \text{ m}$, $b = 11.05 \text{ m}$, $c = 9.554 \text{ m}$. b) $b = 3 \text{ m}$, $a = 4.6619 \text{ m}$, $c = 2.3381 \text{ m}$, $\alpha = 121^\circ 11' 45''$, $\beta = 33^\circ 23' 57''$, $\gamma = 25^\circ 24' 18''$. Wskazówka: z pola i z w_b oblicza się $b = 3 \text{ m}$; wobec tego $a + c = 7 \text{ m}$. Wyrażając pole wzorem Herona otrzymamy stąd $a \cdot c = 10.9$ a z tych dwóch równań obliczymy a i c . c) $\alpha = 124^\circ 4' 14''$, $\beta = 21^\circ 15' 46''$, $a = 2.7583 \text{ m}$, $b = 1.2075 \text{ m}$.
 $c = 1.8942 \text{ m}$. Wskazówka: z wzoru $P = r \cdot s = s(s - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ otrzymamy

podstawiając $P = \frac{c \cdot w_c}{2}$ na c wartość $\frac{2s^2}{w_c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + 2s}$. Mając c obliczymy

$a + b = 2s - c$ i zastosujemy wzór (29₁). **42.** a) Wskazówka: środek O' koła wpisanego od zewnątrz łączymy z A , B , C i wyrażamy pole trójkąta ABC zapomocą pól trójkątów $O'AB$, $O'AC$, $O'BC$:

$$P = O'AC + O'AB - O'BC = \frac{b \cdot \rho_1}{2} + \frac{c \cdot \rho_1}{2} - \frac{a \cdot \rho_1}{2} = \rho_1(s - a).$$

b) Z wzorów poprzedniego ćwiczenia otrzymamy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ stosując wzory (24) i (26). **43.** a) Wyrażając ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 zapomocą wzorów z ćwiczenia 42. a), a $\rho = \frac{P}{s}$, sprowadzamy lewą stronę do wspólnego mianownika. Upraszczamy

przez P , uwzględniając wzór Herona i po redukcji otrzymamy $\frac{a \cdot b \cdot c}{P}$ a to jest równe $4R$, jak to wynika z wzoru 24 i 25. b) Zastosować wzory z ćw.

42. a. i $\rho = \frac{P}{s}$. c) Zastosować wzory z ćwicz. 42. a, wzór 26 i $\rho = \frac{P}{s}$

44. Wskazówka: obliczyć ρ z 43. b, a. następnie P z 43. c; wtedy z 42 a, obliczy się $s - a$, $s - b$, $s - c$ a stąd boki (np. $b = s - a + s - c$). Kąty najłatwiej obliczyć następnie z 42. b.

$$a = \frac{\rho_1(\rho_2 + \rho_3)}{\sqrt{\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \rho_2 \rho_3}}.$$

45. Oznaczamy literami D , E , F punkty, w których te proste przetną boki c , b , a . Tworzymy iloczyn pól trójkątów, $SAD \cdot SCE \cdot SBF = \frac{dw_1}{2} \cdot \frac{fw_2}{2} \cdot \frac{hw_3}{2}$ i wyrażamy te pola wzorami (25). Stosując to samo do

trzech pozostałych trójkątów, okażemy po uproszczeniu przez $\frac{w_1 \cdot w_2 \cdot w_3}{8}$,

że $d \cdot f \cdot h = c \cdot g \cdot i$. **46.** Oznaczając literami D , E , F punkty, w których poprzeczna przecina boki a , b , c , obliczamy ilorazy pól trójkątów: $\frac{BDF}{CDE} \cdot \frac{CDE}{AEF} \cdot \frac{AEF}{BDF}$. Iloczyn tych 3 ułamków jest $= 1$. Wyrażamy pola wzorem (25), to

po uproszczeniu przez $DF \cdot ED \cdot EF$ otrzymamy żądany związek. **47.** Łączymy uważany punkt z wierzchołkami trójkąta i jeden z takich odcinków,

n. p. SA wyrażamy z dwóch sąsiednich trójkątów zapomocą twierdzenia

wstaw, to $\frac{c \sin(\beta - \omega)}{\sin \beta} = \frac{b \sin \omega}{\sin \alpha}$. Kładąc tu $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$ i rozwijając $\sin(\beta - \omega)$

otrzymamy $\operatorname{ctg} \omega - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma \sin \alpha}$. W końcu za $\sin \beta$ podstawiamy

$\sin(\alpha + \gamma)$. **48.** $\alpha = 47^\circ 20' 10''$, $\beta = 141^\circ 4'$, $\gamma = 180^\circ - \alpha$, $\delta = 180^\circ - \beta$, $P = 15.56 \text{ cm}^2$, $R = 4.794 \text{ cm}$. Wskaz.: dla obliczenia R podstawić we wzór

$2R = \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{y}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$ wartości z § 32. **49.** $a = 3.724 \text{ m}$, $b = 8.412 \text{ m}$,

$c = 10.132 \text{ m}$, $d = 5.444 \text{ m}$. **50.** $\alpha = 69^\circ 11' 30''$, $\beta = 78^\circ 35''$, $\gamma = 103^\circ 43' 30''$, $\delta = 108^\circ 26'$. **51.** $V = 597.35 \text{ dm}^3$. **52.** a) $V = 17.521 \text{ cm}^3$. b) $V = 302.93 \text{ cm}^3$.

$$53. a) V = \frac{r^2 \pi a \sin \alpha}{3}, b_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \alpha}, b_2 = \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \alpha}.$$

$$b) V = \frac{b_2^3 \pi \cdot \sin^2(\varphi + \psi) \cdot \sin \varphi}{12 \cdot \sin^2 \psi}. \quad 54. a) P = 607.45 \text{ cm}^2, V = 1132.4 \text{ cm}^3.$$

b) $P = 92.722 \text{ cm}^2, V = 11.344 \text{ cm}^3$. Wskazówka: obliczyć najpierw c, α i β . Można także otrzymać wprost P i V wyrażone zapomocą danych elementów, wyrażając c z twierdzenia Carnota a r z wzoru $\frac{c \cdot r}{2} = \frac{a b}{2} \sin \gamma$, podającego pole trójkąta w dwa sposoby. c) $P = 62.494 \text{ cm}^2, V = 540.66 \text{ cm}^3$, ogólnie:

$$P = \frac{\pi \rho^2}{\sin \frac{\gamma}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$V = \frac{\pi \rho^3}{3 \sin \frac{\gamma}{2}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$

$$55. V = 47.558 \text{ cm}^3.$$

Rozdział IV.

Zastosowanie trygonometrii do miernictwa.

§ 33. O zadaniach i metodach miernictwa.

Zadaniem miernictwa jest mierzenie i przedstawianie na rysunku części powierzchni ziemi t. j. sporządzanie planów, o ile chodzi o małe obszary lub kart geograficznych, jeżeli chodzi o większe obszary.

Mierzenie wszystkich odcinków i kątów potrzebnych do narysowania planu, tak zwane zdejmowanie planu, sprawia nie raz niepokonane trudności wskutek przeszkód terenu a w każdym razie pochłania bardzo wiele czasu. Dlatego poprzestajemy na mierzeniu kilku elementów koniecznych a inne obliczamy trygonometrycznie. (Jeżeli nie chodzi o wielką dokładność, poprzestajemy na konstrukcji rysunkowej).

Zwyczajnie staramy się mierzyć jak najmniej długości, ponieważ ściśle pomiary długości są bardzo męczące, natomiast mierzymy jak najwięcej kątów, do czego posiadamy bardzo dogodne i dokładne przyrządy (węgielnice, pryzmaty, teodolity i t. p.).

Fig. 74. przedstawia jeden z takich przyrządów, zwany przyrządem uniwersalnym. Lunetę ruchomą około

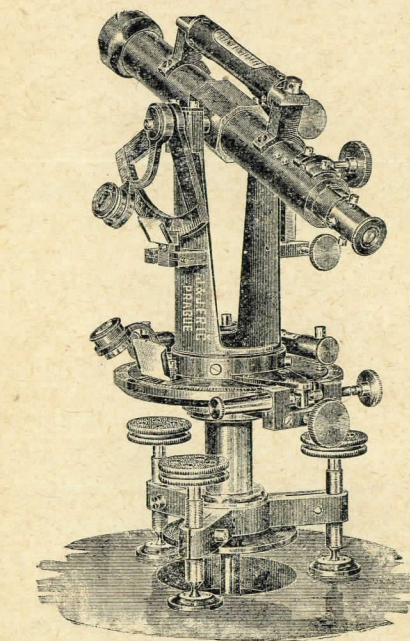


Fig. 74.

osi poziomej i pionowej zwracamy na dany punkt; wskazówki przytwierdzone odpowiednio do lunety posuwają się po kole poziomem i pionowym,

opatrzonem podziałką kątową. Na tych kołach odczytujemy kąty mierzone w płaszczyźnie poziomej i pionowej. Ścisłe odczytanie kąta umożliwiają małe lunetki i noniusze, umieszczone na kole poziomem i pionowym a do dokładnego ustawienia lunety i usztywnienia w danym położeniu służą odpowiednie śruby. Śrubami przytwierdzonemi do nóżek przyrządu ustawia się cały przyrząd tak, aby koło poziome było ściśle w poziomie (a zarazem pionowe w płaszczyźnie pionowej); do sprawdzenia tego poziomego położenia służą t. zw. libelle (czyli wagi wodne).

Jeżeli przy pomiarach nie chodzi o wielką dokładność, możemy mierzyć także odległości przy pomocy lunety przyrządu uniwersalnego. Do tego celu służą trzy nitki równoległe, umieszczone w okularze lunety. Odstęp ich jest tak dobrany, że gdy n. p. na oddalonej podziałce odczy-

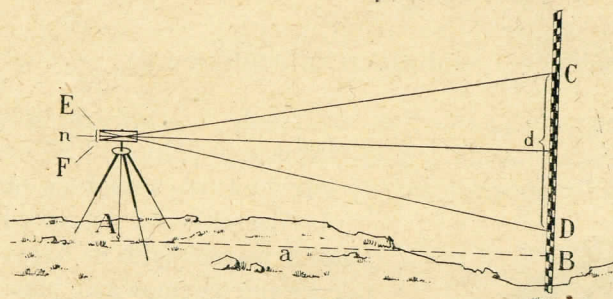


Fig. 75.

tamy 5 cm między skrajnemi nitkami w lunecie, to odległość tej podziałki wynosi 100.5 cm = 5 m. Chcąc więc zmierzyć odległość a od punktu A do B, (fig. 75.) ustawiamy w B podziałkę pionową (t. zw. łatę mierniczą) a w punkcie A przyrząd uniwersalny i patrzymy, ile centymetrów podziałki CD mieści się między nitkami E i F w lunecie. Wtedy odległość

$$a = 100 \cdot d$$

Postępowanie takie nazywamy tachymetrią (szybkie mierzenie); jest ono niedokładne, popelnia się błąd przeciętnie 0.2%, mierzonej długości, (t. j. na 1 km błąd 2 m), jak wykazała praktyka miernicza. Dlatego przy ściślejszych pomiarach mierzy się długość wprost, przykładając odpowiednią miarę (taśmę mierniczą). Wszystkie te pomiary wchodzą w zakres miernictwa praktycznego.

Trygonometrii przypada w udziale zadanie: przy pomocy odległości i kątów, otrzymanych z pomiaru, obliczyć inne potrzebne elementy. Zajmiemy się najpierw obliczaniem wysokości, później zaś obliczaniem poziomych odległości.

§ 34. Obliczanie wysokości względnej.

1. Obliczyć wysokość względną przedmiotu, którego podstawa jest dostępna a wierzchołek niedostępny. Chcemy więc znaleźć wzniesienie punktu C ponad poziom AB: w tym celu mierzymy odległość poziomą punktu A od przedmiotu BC i kąt α , zawarty między poziomem a kierunkiem widzenia wierzchołka C. Jest to t. zw. kąt wzniesienia punktu C.

Z trójkąta prostokątnego ABC wynika:

$$w = a \operatorname{tg} \alpha$$

Fig. 76.

Wzoru tego używa się tylko dla odległości nie przekraczających $\frac{1}{2}$ km.

Dla większych odległości trzeba już zwrócić uwagę na kulistość ziemi. Aby zmierzyć wysokość MC (fig. 77) mierzymy łuk a i kąt α . Ramię AB tego kąta (poziom punktu A) nie jest wtedy prostopadłe do BC. Mamy więc do czynienia z trójkątem ukośnokątnym ABC, w którym znamy bok $AB = R \operatorname{tg} \gamma$, (R promień ziemi 6377.4 km, γ różnica kierunku pionów punktów A i M, którą obliczamy z łuku $\hat{a}$, bo $\hat{a} : 2 R \pi = \gamma : 360^\circ$) kąt α i kąt $\beta = 90^\circ + \gamma$, jako kąt zewnętrzny w trójkącie prostokątnym AOB. Możemy więc obliczyć bok BC; doliczywszy do niego odcinek x, zawarty między styczną AB a prawdziwym poziomem punktu M, otrzymamy żadaną wysokość MC. Poprawkę x otrzymamy z następującego oczywistego wzoru:

$$x = OB - R = \frac{R}{\cos \gamma} - R$$

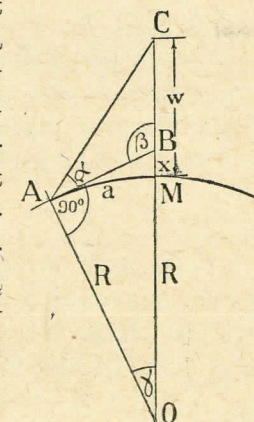


Fig.

2. Obliczenie wysokości przedmiotu, którego pod-

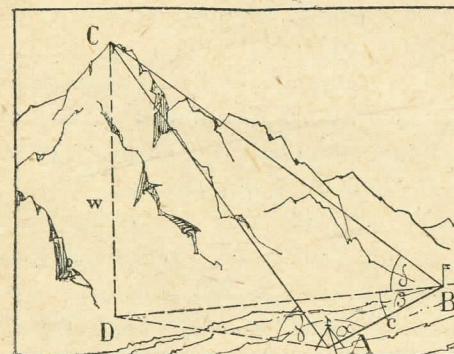


Fig. 78.

stawa, zarówno jak i wierzchołek są niedostępne. Chcemy znaleźć wzniesienie punktu C (fig. 78.) ponad poziom punktu A, z którego widać wierzchołek C. Posuwamy się od punktu A do dowolnego innego punktu B, leżącego w tym samym poziomie, po linii prostej i mierzymy odległość $AB = c$. Znajdując się w punkcie A, mierzymy kąt γ t. j. kąt wzniesienia wierzchołka C i kąt dwusieczny α zawarty między płaszczyzną pionową, zawie-

rającą punkt C , a płaszczyzną pionową zawierającą punkt B . Obydwa te pomiary można wykonać przyrządem uniwersalnym: kąt γ odczytamy na kole pionowym a kąt α na kole poziomym (por. fig. 74).

Podobne dwa kąty δ i β mierzymy w punkcie B .

Znamy więc z bezpośredniego mierzenia elementy:

$$c, \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Trójkąt DAB możemy więc rozwiązać; otrzymamy:

$$AD = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Znając AD , możemy obliczyć z trójkąta prostokątnego CAD :

$$w = AD \operatorname{tg} \gamma$$

Więc ostatecznie:

$$w = \frac{c \sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Dla sprawdzenia oblicza się jeszcze DB i wyraża się w zapomocą kąta δ i boku DB . Zgodność obydwu wyników dowodzi poprawności rachunku.

Jeżeli punkt B leży na innym poziomie, aniżeli punkt A , to mierzymy c, γ , a oprócz tego kąty $\sphericalangle CAB = \varphi$ i $\sphericalangle CBA = \chi$, nie leżące już ani w płaszczyźnie pionowej ani w poziomej. Obliczamy CA z trójkąta CAB a następnie CD z trójkąta prostokątnego CAD . Otrzymamy ostatecznie wzór:

$$w = \frac{c \sin \gamma \sin \chi}{\sin (\varphi + \chi)}$$

Jaki wzór otrzymamy, jeżeli punkty A, B i C leżą w tej samej płaszczyźnie pionowej a A i B na tym samym poziomie? Jakie pomiary należy wykonać, jeżeli B leży wyżej od A , ale w tej samej płaszczyźnie pionowej, co A i C ? Uwzględnić kulistość ziemi!

Uwaga. Mierzenie wysokości wprost, przy posuwaniu się po terenie pochylonym zapomocą lat mierniczych, nazywamy niwelacją.

§ 35. Obliczanie odległości poziomych.

1. *Odległość punktu dostępnego od punktu niedostępnego (ale widocznego).*

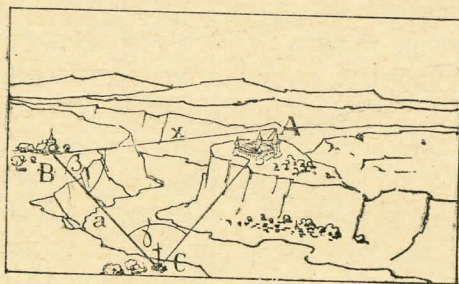


Fig. 79.

Chcemy obliczyć odległość: x punktu B od punktu A , do którego nie można się dostać z przyrządami mierniczymi (fig. 79).

W tym celu wytyczamy dowolną prostą BC ukośnie i mierzymy odcinek jej: a .

Następnie mierzymy kąt β , zawarty między wytyczoną prostą BC a idealnym kierunkiem BA i podobnie kąt γ przy wierzchołku C .

Z trójkąta ABC otrzymujemy:

$$x : a = \sin \gamma : \sin [180^\circ - (\beta + \gamma)]$$

czyli:

$$x = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

2. *Odległość dwóch punktów niedostępnych (ale widzialnych) od siebie.*

a) Celem zmierzenia odległości AB (fig. 80) punktów, do których się nie możemy dostać, wytyczamy dowolną linię prostą CD na terenie dostępnym i mierzymy na niej odcinek a , przy czym CD i AB nie muszą leżeć na jednej płaszczyźnie. Na końcach tego odcinka mierzymy pięć kątów: $\beta, \gamma, \delta, \sphericalangle ACD = \varepsilon$ i $\sphericalangle BDC = \zeta$, między kierunkami CD, AC, BC, AD i BD .

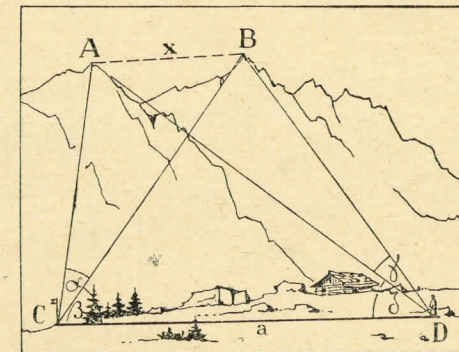


Fig. 80.

Z trójkąta ACD obliczamy:

$$AD = \frac{a \sin \varepsilon}{\sin (\varepsilon + \delta)}$$

z trójkąta zaś CDB :

$$BD = \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \zeta)}$$

Znając w trójkącie ABD boki AD i BD i kąt γ między nimi zawarty, obliczamy bok x np. przy pomocy twierdzenia Carnota.

$$x = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \gamma}.$$

Jak należy postępować, aby można cały rachunek przeprowadzić przy pomocy logarytmów?

Dla sprawdzenia można także obliczyć najpierw AC i BC a potem x przy pomocy tych boków i kąta α , który trzebaby zmierzyć osobno, jako 7-my element.

b) Gdyby punkty A, B, C i D leżały na jednej płaszczyźnie, to cały pomiar uprościłby się znacznie. W miernictwie praktycznym istotnie chodzi zawsze o odległości sprowadzone do jednego poziomu; kąty mierzy się wtedy na kole poziomym. W tym specjalnym przypadku — najpospolitszym w praktyce — mierzymy tylko 5 elementów: a, α, β, γ i δ (por. fig. 80) Z trójkąta CAD obliczamy:

$$AD = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \delta)}$$

a z trójkąta CDB :

$$BD = \frac{a \sin \beta}{\sin(\gamma + \beta + \delta)}$$

a następnie postępujemy, jak w poprzednim przypadku.

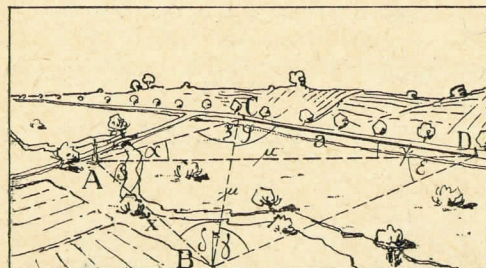


Fig. 81.

$= a$, (fig. 81) znaleźliśmy się następnie w punktach A i B , leżących w tej samej płaszczyźnie, co CD . Chcemy obliczyć ich odległości od siebie, nie wracając do punktów C i D . (Np. widzimy odległość dwóch słupów kilometrowych C i D na gościńcu z punktów A i B , z których nie można się dostać ani do gościńca, ani nawet w prostej linii od A do B wskutek jakiejś przeszkody, którą trzeba by okrążyć). Mierzymy w punktach A i B kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zaznaczone na figurze 81. W czworokącie $ABCD$ znamy więc pięć elementów:

$$a, \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Znamy więc także kąty:

$$\varepsilon = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta)$$

$$\zeta = 180^\circ - (\alpha + \beta + \delta)$$

Chcemy wyrazić bok x np. z trójkąta ABC ; trzeba więc znać przynajmniej jeden jego bok np. AC . Ten bok obliczylibyśmy z trójkąta ACD , gdybyśmy w nim znali oprócz kąta α jeszcze jeden kąt np. ψ . Podobnie można by x obliczyć zapomocą boku BD , gdybyśmy znali w trójkącie BDC kąt φ .

Kąty φ i ψ będziemy obliczali równocześnie. Sumę ich znamy, bo

$$\varphi + \psi = 180^\circ - \mu, \text{ i } \beta + \delta = 180^\circ - \mu \text{ więc:}$$

$$\varphi + \psi = \beta + \delta.$$

Drugie równanie do wyznaczenia kątów φ i ψ otrzymamy wyrażając bok x przez bok a i kąty raz za pośrednictwem boku BD , drugi raz za pośrednictwem boku AC .

Otóż z twierdzenia wstaw otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} x : BD &= \sin \varepsilon : \sin \beta \\ BD : a &= \sin \varphi : \sin \gamma \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{mnożąc te proporcje} \\ \text{przez siebie otrzymamy:} \end{array}$$

$$(a) \quad \frac{x}{a} = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \varepsilon}{\sin \beta \cdot \sin \gamma}$$

Podobnie z proporcji:

$$\begin{aligned} x : AC &= \sin \zeta : \sin \delta \\ AC : a &= \sin \psi : \sin \alpha \end{aligned} \text{ wynika:}$$

$$(b) \quad \frac{x}{a} = \frac{\sin \psi \cdot \sin \zeta}{\sin \alpha \cdot \sin \delta}$$

Z porównania tych dwóch wartości $\frac{x}{a}$ otrzymamy:

$$\frac{\sin \varphi \cdot \sin \varepsilon}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{\sin \psi \cdot \sin \zeta}{\sin \alpha \cdot \sin \delta}$$

$$\text{czyli: } \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \beta \sin \gamma \sin \zeta}{\sin \alpha \sin \delta \sin \varepsilon} = t$$

Prawa strona zawiera same znane wielkości, więc liczba t jest znana.

W ten sposób uzyskaliśmy drugie równanie dla obliczenia kątów φ i ψ . Taki układ równań gonjometrycznych rozwiązaliśmy już (§ 23. Przykład 5b).

Obliczamy różnicę $\varphi - \psi$ z równania:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{t - 1}{t + 1} \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{t - 1}{t + 1} \operatorname{tg} \frac{\beta + \delta}{2}$$

Znając sumę $\varphi + \psi$ i różnicę $\varphi - \psi$, obliczymy łatwo same kąty φ i ψ . Przy pomocy tych kątów możemy obliczyć żadaną odległość x (z wzoru (a) lub (b)).

W miernictwie nazywa się to zagadnienie »wcinaniem się wstecz« od dwóch znanych punktów C, D do dwóch punktów A i B .

Nazwę tę można by tak tłumaczyć: znajdując się w punktach C i D o znanej odległości nie wykonywaliśmy żadnych pomiarów (nie mogliśmy np. obrać odpowiednich widocznych dobrze punktów A i B) posuwając się wprzód od znanego terenu do nieznanego; dopiero znalazłszy się w punktach A i B zwróciliśmy przyrządy miernicze wstecz do punktów zbadanych już przedtem.

Zagadnienie to rozwiązał z początkiem XVII. wieku Snellius z Holandji, twórca nowoczesnego miernictwa. Hansen, którego imieniem ten problem nazwano, podał tylko dogodniejszy sposób obliczenia szukanej odległości.

Jeśli punkty A, B i C, D nie leżą na jednej płaszczyźnie, to obliczamy rzuty ich odległości na jedną płaszczyznę, np. na płaszczyznę poziomą, a wtedy i kąty mierzymy odrazu tylko na kole poziomem.

Podobna uwaga dotyczy i następnego zagadnienia.

4. *Zagadnienie Snelliusa (Pothenot'a)*. Do podobnego równania goniometrycznego prowadzi zagadnienie Snelliusa, które jest wcinaniem się wstecz od trzech znanych punktów A, B, C do jednego punktu P .

Znamy wzajemne położenie (odległości i kąty) trzech punktów (fig. 82) A, B, C a chcemy obliczyć odległość czwartego punktu P , leżącego w tej samej płaszczyźnie, od nich, mierząc tylko kąty w punkcie P , w którym się znajdujemy (nie wracając do punktów A, B, C).

Znamy: a, b, γ i zmierzone: α, β .

Obliczyć: x, y, z .

Zagadnienie to jest także jednym z przypadków rozwiązywania czworokąta.

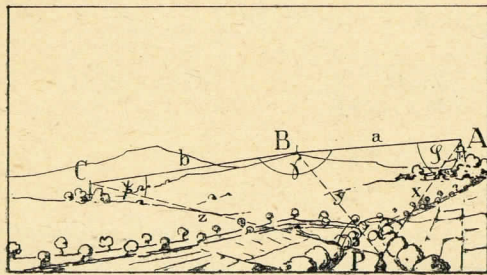


Fig. 82.

Do obliczenia boków x, y, z przy pomocy twierdzenia wstaw brak nam tylko kątów φ i ψ . Widzimy więc, że cała trudność polega na ułożeniu i rozwiązaniu równań, zawierających kąty φ i ψ , zupełnie podobnie jak w zagadnieniu Hansena.

Z figury widzimy, że:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) \quad (1)$$

a więc znamy sumę kątów. Aby otrzymać drugi związek między kątami φ i ψ , wyrażamy bok y z trójkątów PBA i BCP zapomocą twierdzenia wstaw:

$$\frac{y}{a} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \quad \frac{y}{b} = \frac{\sin \psi}{\sin \beta}$$

Z porównania tych dwóch wartości y otrzymamy:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = t \quad (2)$$

Mając te dwa równania (1) i (2), postępujemy dalej zupełnie tak samo, jak w zadaniu Hansena.

Uwaga. Punkt P może leżeć także wewnątrz trójkąta ABC i to jest przypadek najpospolitszy w praktyce.

Suma $\varphi + \psi$ nie może być 180° , bo wtedy także byłoby $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i czworokąt $ABCD$ byłby w koło wpisany. Położenie punktu P nie byłoby więc wyznaczone zapomocą kątów α i β , bo każdy punkt leżący na obwodzie koła opisanego na tym czworokącie, spełniałby warunki zadania.

Zagadnienie to jest niezmiernie ważne przy rysowaniu szczegółów kart geograficznych i planów, o czym będziemy mówili w następnym ustępie.

§. 36. Triangulacja.

Jeżeli mamy zdjąć plan jakiegoś większego obszaru (płaskiego), obieramy najpierw odpowiednio gęstą sieć punktów $A, B, C, D, \dots$ i zaznaczamy je na terenie przez wbicie pala lub sygnału.

Są to tak zwane punkty triangulacyjne (oznaczone na mapach trójkątem: $\triangle$). Mierzmy bardzo dokładnie jedną długość n. p. $AB = p$ (fig. 83) i nazywamy ją podstawą sieci triangulacyjnej.

Następnie mierzymy z każdego punktu triangulacyjnego kąty do wszystkich innych widocznych punktów, n. p. kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$. Na podstawie tych pomiarów możemy już obliczyć trygonometrycznie wszystkie boki trójkątów ABC, BCD, BDE, EDF i t. p.

Używając tylko twierdzenia wstaw możemy każdy bok wyrazić jako funkcję podstawy p i kątów. N. p. aby obliczyć bok KI , obliczamy z trójkąta ABC bok BC , następnie z dalszych trójkątów kolejno CD, DG, GF, FH, HI i wreszcie IK .

W ten sposób znane są wszystkie boki i wszystkie kąty całej sieci. Dla sprawdzenia pomiarów mierzy się prócz AB jeszcze jeden lub dwa inne odcinki (postawy drugorzędne). Całe to postępowanie nazywamy triangulacją.

Jest ono pomysłem Snelliusa (1617), który po raz pierwszy wykonał taki pomiar celem zmierzenia pewnej znanej części południka (n. p. $1/50$ części południka) a zatem: obwodu ziemi. Jeżeli uwzględnimy kulistość ziemi, triangulacja staje się nieco trudniejsza (jest już zagadnieniem trygonometrii na kuli, czyli trygonometrii sferycznej), jednakowoż aż do 200 km^2 suma kątów w trójkącie na kuli ziemskiej różni się od 180° a kąt mniejszy od $1''$, można więc ten błąd zaniedbać przy pomiarach niewielkich powierzchni.

Fig. 84. podaje sieć triangulacyjną Galicji z uwzględnieniem pomiarów aż do r. 1912.

Mając ten szkielet, chcemy w każdy trójkąt sieci wrysować szczegóły (rzeki, drogi, stawy, drzewa, domy itp.). Jeżeli w jakimś trójkącie sieci n. p. w GDF , mamy umieścić punkt P , to do znalezienia

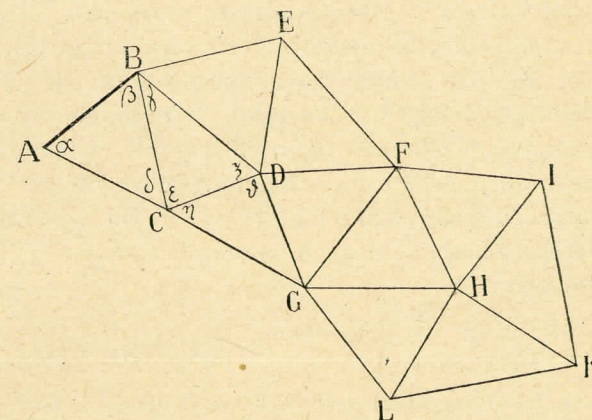


Fig. 83.

7. Szczyt wieży widzimy pod kątem wzniesienia 4° a zbliżywszy się poziomo o 1 km — pod kątem 5° ; ile km mamy jeszcze do podnóża wieży?

8. Zbliżając się do góry mierzymy w pewnym punkcie A kąt wzniesienia szczytu $\alpha = 22^\circ 15'$. Posunawszy się o 200 m wprost ku górze po stoku nachylonym pod kątem $\varphi = 16^\circ 20'$ do punktu B , mierzymy znowu kąt wzniesienia szczytu $\beta = 28^\circ 25'$. Obliczyć wysokość tej góry względem punktu A .

9. Z balonu M spostrzegamy po tej samej stronie dwa punkty A i B , oddalone od siebie o 1 km a leżące w jednym poziomie, pod kątami depresji $67^\circ 30'$ i $35^\circ 15'$. Obliczyć wysokość, w jakiej się balon znajduje i odległość balonu od miejsc A i B .

10. Dom, stojący tuż u stóp góry, rzuca na jej stok cień 8 m długi, gdy promienie słońca padają pod kątem $54^\circ 15' 20''$ (względem poziomu). Znajac spadek stoku w kierunku cienia: $\alpha = 25^\circ$, obliczyć wysokość domu.

§ 35. 11. a) Celem zmierzenia szerokości rzeki zmierzono wzdłuż brzegu odcinek $AB = 400\text{ m}$; z punktów A i B zmierzono kąty, zawarte między linią AB i kierunkami AC i BC ku pewnemu punktowi przeciwnego brzegu $\alpha = 69^\circ 8'$, $\beta = 47^\circ 13'$. Obliczyć szerokość rzeki.

b) Z okrętu pływającego w kierunku południowo-wschodnim, tworzącym kąt 25° z południkiem, spostrzegamy latarnię morską w kierunku północno-wschodnim pod kątem 20° względem południka. Po przepłynięciu 2 km spostrzegamy latarnię wprost na północ. Ile wynosi odległość okrętu od latarni w końcowym punkcie drogi?

12. Między punktami A i B znajduje się staw. Aby zmierzyć ich odległość, obrano trzeci punkt C , z którego można wytyczyć proste AC i BC . Obliczyć odległość AB , zmierzwszy $AC = 581\text{ m}$, $BC = 467\text{ m}$ i $\angle ACB = 95^\circ 40'$.

13. a) Odległość ziemi Z od słońca S wynosi 149.5 milionów kilometrów a odległość Marsa M od słońca jest 1.5237 razy większa. Jaka jest odległość ziemi od Marsa, gdy proste MS i ZS tworzą kąt 143° ?

b) W pewnej chwili proste, łączące słońce z ziemią i Jowiszem, tworzą kąt 78° ; odległość ziemi od słońca $d = 149.5$ milionów kilometrów a Jowisza od słońca jest 5.2028 razy większa. Jaka będzie odległość ziemi od Jowisza po roku, jeżeli ziemia w ciągu roku wykonuje jeden zupełny obieg około słońca a Jowisz tylko $\frac{1}{11.862}$ część obiegu?

14. Proste łączące planety ze słońcem tworzyły dnia 1 stycznia 1902 r. kąty: α z prostą łączącą słońce z ziemią. Za dodatni kierunek kąta obieramy kierunek ruchu planet dookoła słońca (t. j. od zachodu ku wschodowi). Znajac ich odległości d od słońca i czasy obiegu t , można obliczyć odległość planet od ziemi w dowolnej chwili. N. p. obliczyć odległość ziemi od Merkurego i Urana dnia 1 stycznia 1920 r.

	α	d	t
Merkury	-173°	0.3871 r	0.2408 roku
Wenus	-27°	0.7233 »	0.6152 »
Ziemia	0°	1.0000 »	1.0000 »
Mars	-143°	1.5237 »	1.8808 »
Jowisz	-160°	5.2028 »	11.862 »
Saturn	-168°	9.5389 »	29.457 »
Uran	$+154^\circ$	19.1833 »	84.020 »
Neptun	-10°	30.055 »	164.767 »

Odległość ziemi od słońca $r = 149,500,000\text{ km}$.

15. Celem zmierzenia odległości dwóch niedostępnych punktów A i B (n. p. dwóch wysp) obrano na przedłużeniu prostej AB punkt C i z boku drugi punkt D . Zmierzono $CD = 2.3\text{ km}$ i kąty: $\angle BCD = 105^\circ 22'$, $\angle ADC = 35^\circ 10'$ i $\angle BDA = 29^\circ 24'$. Obliczyć odległość AB .

16. Aby zmierzyć wzajemne odległości trzech punktów niedostępnych (tworzących trójkąt) A , B , C , obrano dwa punkty M i N na przedłużeniu boków AC i BC . Zmierzono $MN = 556.5\text{ m}$, $\angle BMN = 31^\circ 25' 20''$, $\angle BMA = 40^\circ 11' 30''$, $\angle ANM = 27^\circ 9' 50''$, $\angle ANB = 48^\circ 10' 10''$. Obliczyć odległości AC , BC , AB .

Uwaga. Najpierw obliczyć AC i BC tak, jak w zadaniu 15 a potem rozwiązać trójkąt ABC .

17. Dwa miejsca A , B przedzielone górą, mamy połączyć linią kolejową w prostej linii. Obieramy punkt P , z którego widać A i B i mierzymy:

$$PA = 2275\text{ m}, PB = 3567\text{ m} \text{ i } \angle APB = 104^\circ 10' 20''.$$

Obliczamy $\angle A$, $\angle B$ i AB . Wytyczywszy na podstawie znanych kątów A i B kierunek od A ku B aż do punktu M , leżącego przy samej górze i od B ku A do punktu N , leżącego tuż przy górze, mierzymy jeszcze kąty:

$$\angle APM = 23^\circ 4' 25'' \text{ i } \angle BPN = 31^\circ 25' 45''$$

Obliczyć długość tunelu.

18. Obliczyć odległość dwóch punktów niedostępnych wcinając się wprzód (por. fig. 80), na podstawie pomiarów:

$$a) \alpha = 392\text{ m}, \alpha = 48^\circ 20', \beta = 40^\circ 15', \gamma = 53^\circ 26', \delta = 51^\circ 20';$$

b) jeżeli linia CD , przedłużona, przecięłaby AB pomiędzy A i B , to mierzymy: $CD = 2370\text{ m}$, $\angle ACD = 34^\circ 18'$, $\angle BCD = 40^\circ 37'$, $\angle ADC = 107^\circ 45'$ i $\angle BDC = 102^\circ 21'$.

19. Obliczyć odległość dwóch punktów A i B wcinając się wstecz (por. fig. 81) na podstawie pomiarów:

$$a) CD = 1\text{ km}, \alpha = 63^\circ 12', \beta = 15^\circ 27', \gamma = 34^\circ 9', \delta = 44^\circ 13';$$

b) jeżeli punkty C i D leżą po przeciwnych stronach prostej AB , jakie pomiary należy wykonać?

20. Trzy punkty A , B , C (n. p. wieże trzech kościołów w mieście) mają odległości znane;

$$AB = 1.357\text{ km}, AC = 2.834\text{ km}, BC = 1.709\text{ km}.$$

Znajduję się w jakimś punkcie P , mierzę kąty;

$$\angle APB = 93^\circ 45' 28'', \text{ i } \angle APC = 143^\circ 26' 17''.$$

W jakiej odległości znajduję się od punktów A , B , C ? (Por. (fig. 82).

Konstrukcja! (Użyć kół, których cięciwami są AB i AC !).

21. Obliczyć położenie punktu, z którego widać boki trójkąta $a = 80\text{ m}$ i $b = 130\text{ m}$, tworzące ze sobą kąt 115° , pod kątami $84^\circ 20'$ i $132^\circ 50'$.

§ 36. 22. Celem poprowadzenia tunelu w terenie górzystym między punktami A i F założono siatkę triangulacyjną o podstawie $AB = 320.43\text{ m}$, złożoną z trójkątów: ABC kątach: $\angle A = 83^\circ 7' 20''$, $\angle B = 48^\circ 39' 40''$, $\angle C = 48^\circ 13'$; ACD o kątach: $\angle A' = 61^\circ 59' 10''$, $\angle C' = 80^\circ 22' 30''$, $\angle D = 37^\circ 38' 20''$; CDE o kątach: $\angle C'' = 56^\circ 45' 50''$, $\angle D' = 78^\circ 13' 50''$, $\angle E = 45^\circ 0' 20''$ i z trójkąta DEF o kątach: $\angle E' = 92^\circ 41' 30''$, $\angle F = 55^\circ 45' 40''$ i $\angle D'' = 31^\circ 32' 50''$. Obliczyć długość tunelu i kąt osi tunelu z bokiem AD .

23. Berlin ma szerokość geograficzną $\varphi_1 = 52^\circ 30' 17''$ a Przylądek Dobrej Nadziei, leżący na tym samym południku: $\varphi_2 = -33^\circ 56' 3''$. Astronomowie Lalande i Lacaille obserwowali (w r. 1752) w tych punktach równocześnie księżyc w chwili, gdy prze-

chodził przez południk niebieski. W Berlinie widać było księżyc oddalony o kąt $z_1 = 32^\circ 3' 51''$ od zenitu a na Przylądku Dobrej Nadziei o kąt $z_2 = 55^\circ 42' 48''$. Obliczyć odległość księżyca od środka ziemi, znając promień ziemi $R = 6377 \text{ km}$.

U w a g a. Trzeba rozwiązać czworokąt znając dwa boki i trzy kąty, metodą podobną do zagadnienia Snelliusa.

24. Celem zmierzenia odległości dwóch miejsc bardzo dalekich A i M posuwamy się po linii łamanej $ABCDEFM$, mierząc długości i kąty w każdym miejscu zwrotu (kąty leżący na prawo od linii łamanej).

$AB = 3.4 \text{ km}$, $\sphericalangle ABC = 165^\circ 20'$, $BC = 2.1 \text{ km}$, $\sphericalangle BCD = 145^\circ 10'$, $CD = 2.6 \text{ km}$, $\sphericalangle CDE = 208^\circ 30'$, $DE = 1 \text{ km}$, $\sphericalangle DEF = 245^\circ 50'$, $EF = 1.4 \text{ km}$.

Obliczyć odległość AF .

U w a g a. Trzeba rozwiązywać trójkąty ABC , ACD i t. d. lub obliczyć rzut całej linii łamanej na jeden z boków i jego przedłużenie, n. p. na AB i na prostopadłą do niego oś AY .

Rozwiązania ćwiczeń:

1. a) $w = 58.2 \text{ m}$, b) $w = 59.7 \text{ m}$. 2. $w = 38.868 \text{ m}$. 3. $BC = 1211.5 \text{ m}$. 4. $w = 214.25 \text{ m}$. 5. $w = 964.36 \text{ m}$. 6. Wskazówka: obliczywszy AC z trójkąta ADC otrzymamy następnie w z trójkąta ABC na podstawie twierdzenia Carnota. 7. $x = 3.9816 \text{ km}$. 8. $w = 147.58 \text{ m}$. 9. $w = 999.26 \text{ m}$, $AM = 1081.6 \text{ m}$, $BM = 1781.4 \text{ m}$. 10. $w = 13.455 \text{ m}$. 11. a) $s = 306.56 \text{ m}$; b) $d = 4.135 \text{ km}$. 12. $AB = 780.5 \text{ m}$. 13. a) $MZ = 358.65$ milionów kilometrów; b) $JZ = 836.18$ milionów kilometrów. 14. $MZ = 1.117 \text{ r}$, $ZU = 84.65 \text{ r}$. Wskazówka: Merkury wykonuje w ciągu roku 4 pełne obroty i $55^\circ 1'$ a więc w 18 latach 74 pełnych obrotów i $270^\circ 18'$. Odjawszy 173° otrzymamy jako kąt kierunków SM i SZ $97^\circ 18'$. Z trójkąta MZS obliczymy przy pomocy twierdzenia Carnota MZ . 15. $AB = 1.839 \text{ km}$. 16. $AB = 401.73 \text{ m}$, $AC = 730.03 \text{ m}$, $BC = 665.28 \text{ m}$. 17. $MN = 1656.1 \text{ m}$. 18. a) $AB = d = 495.2 \text{ m}$; b) $AB = 4573 \text{ m}$. 19. a) $AB = 1.0438 \text{ km}$; b) Należy zmierzyć CD , tudzież kąty DAB i BAC przy A , a kąty DBA i ABC przy B . 20. $PA = x = 0.74891 \text{ km}$, $PB = y = 1.0836 \text{ km}$, $PC = z = 2.1971 \text{ km}$. 21. $PA = x = 80.371 \text{ m}$, $PB = y = 9.8136 \text{ m}$, $PC = z = 78.668 \text{ m}$. 22. $AF = 1140.5 \text{ m}$, $\sphericalangle AFD = 14^\circ 14' 16''$. 23. $d = 58.251$ $R = 371.490 \text{ km}$. 24. $AF = 9.24 \text{ km}$.

Rozdział V.¹⁾

Trygonometria sferyczna.

§ 37. Cel trygonometrii sferycznej. Uwagi historyczne.

W planimetrii sprowadza się obliczenie kątów, odcinków i pól rozmaitych figur do rozwiązywania trójkątów płaskich t. j. do trygonometrii płaskiej. Dla stereometrii takim zasadniczym utworem — jak trójkąt w planimetrii — jest kąt bryłowy trójsścienny.

Aby obliczyć kąty i krawędzie jakichkolwiek wielościanów, trzeba się najpierw nauczyć rozwiązywać naroża trójsścienne, t. j. mając dane trzy z pomiędzy kątów płaskich lub dwuściennych, obliczyć trzy pozostałe. Stereometria poucza bowiem, że do wyznaczenia naroża trójsściennego są potrzebne i wystarczają trzy elementy; w nauce geometrii wykresnej poznaje się graficzny, konstrukcyjny sposób rozwiązywania tych zagadnień.

Badanie naroża trójsściennego można jednak zawsze zastąpić badaniem trójkąta sferycznego. Zakreślmy w tym celu kulę, której środek leży w wierzchołku badanego naroża (fig. 86) a promień kuli przyjmijmy za jednostkę. Ściany naroża przecinają wtedy kulę wzdłuż łuków kół wielkich, bo ich płaszczyzny przechodzą przez środek kuli; powstaje więc na kuli trójkąt ograniczony łukami kół wielkich a taki tylko trójkąt nazwalimy trójkątem sferycznym (por. Tom I. Stereometria, str. 292).

Boki tego trójkąta sferycznego są łukami należącymi do kątów środkowych a, b, c , t. j. do kątów płaskich naroża.

Znając kąty a, b, c , obliczymy te łuki ze znanej proporcji:

$$l : 2r\pi = a : 360^\circ.$$

¹⁾ Cały ten rozdział jest przeznaczony dla oddziałów matematyczno-przyrodniczych szkół średnich.

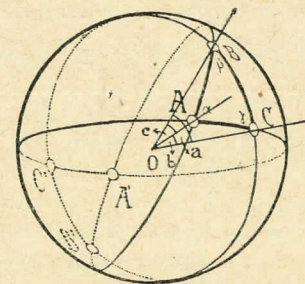


Fig. 86.

Odwrotnie: znając długość tych łuków, możemy łatwo obliczyć kąty środkowe z tej samej proporcji (musimy jeszcze znać promień, który zwykle obieramy $= 1$). Dlatego długość tych łuków wyrażamy zawsze w stopniach, pamiętając o tem, że 1° odpowiada długości $\frac{2r\pi}{360^\circ}$. Używając tej miary stopniowej dla łuków, widzimy, że łuk ma tyle stopni, ile odpowiedni kąt środkowy (jest to odwrócenie łukowej miary kąta).

Otóż: boki trójkąta sferycznego są równe kątom płaskim naroża (wyrażają się równą liczbą stopni).

Co się tyczy kątów dwuściennych naroża, to są one równe kątom α, β, γ trójkąta sferycznego. Dowód: kąty linii krzywych przecinających się ze sobą mierzymy zapomocą kątów, utworzonych przez styczne do tych linii krzywych w ich punkcie przecięcia. Styczne zaś w punkcie np. A do kół AC i AB są prostopadłe do promienia OA i leżą w płaszczyznach OAB i OAC a więc ich kąt jest miarą kąta dwuściennego, utworzonego przez płaszczyzny OAB i OAC (por. Tom I. Stereometria, str. 195).

Doszliśmy więc do wniosku: *zamiast badać naroże trójsienne, możemy badać odpowiedni trójkąt sferyczny na kuli: jego boki wyrażone w mierze stopniowej są kątami płaskimi naroża a jego kąty są kątami dwuściennymi naroża.*

Naukę o rozwiązywaniu trójkątów sferycznych a zarazem kątów bryłowych trójsiennych nazywamy trygonometrią sferyczną.

Trygonometria sferyczna ma zastosowanie nie tylko, jako metoda badania brył, ale także bezpośrednio, jako badanie figur, znajdujących się na powierzchni kuli.

Wszystkie większe pomiary wykonywane na powierzchni ziemi, a więc zdjęcia większych terenów, konstrukcje map i t. p. są pomiarami figur sferycznych. Cała więc geodezja (t. zw. geodezja wyższa) opiera się na trygonometrii sferycznej.

W zastosowaniach astronomicznych obserwujemy wszystko na pozornym sklepieniu niebios, które się nam przedstawia jako kula. Aby ocenić wzajemne położenie ciał niebieskich, łączymy je (w myśli) łukami kół wielkich i obliczamy kąty i boki tych trójkątów sferycznych. Ścisłej biorąc mamy tu do czynienia także z narożami trójsiennymi: oko jest wierzchołkiem tego naroża a proste łączące oko z trzema ciałami niebieskimi są krawędziami. Jakkolwiek dla przeważnej ilości gwiazd nie znamy ich odległości od ziemi nawet w przybliżeniu, jednakowoż możemy mierzyć i obliczać kąty płaskie i dwuścienne tego naroża i w ten sposób przecież dowiadujemy się wiele o wzajemnem położeniu gwiazd, a przedewszystkiem możemy badać ruchy, t. j. zmiany tego położenia, o ile się nie odbywają wzdłuż kierunku widzenia.

Zamiast oka obserwatora można obierać za wierzchołek tego naroża środek ziemi wskutek olbrzymiej odległości gwiazd (jednakowoż przy badaniu księżyca i planet zmiana ta nie jest dozwolona, wskutek ich małej odległości od ziemi).

Cały rozwój trygonometrii, a zwłaszcza tr. sferycznej, zawdzięczamy właśnie temu zastosowaniu do astronomji. Trygonometria sferyczna rozwinęła się nawet wcześniej od płaskiej a przez długie wieki, aż do XVII. wieku naszej ery, stanowiła także jeden z działów astronomji. Ptolemeusz, twórca dawniejszego geocentrycznego po-

glądu na świat, był zarazem twórcą trygonometrii. Wszystkie twierdzenia i tablice trygonometryczne służyły mu tylko do rozwiązywania trójkątów sferycznych, potrzebnych w astronomji. Tak samo traktowali trygonometrię Hindusi, Arabowie i Persowie a tradycje te przechowały się aż do czasów nowożytnych.

Nasz wielki Kopernik w sławnym dziele: »De revolutionibus orbium coelestium« w r. 1543, w którym buduje heliocentryczny pogląd na świat, obalając system Ptolemeusza, zajmuje się również bardzo obszernie trygonometrią (rozdziały 12. 13 i 14). Znajdujemy tam np. po raz pierwszy dowodzenie twierdzeń o trójkątach sferycznych przy pomocy naroża trójsiennego.

Tworzy to jednak tylko wstęp do astronomji.

W tym samym wieku XVI wydaje pierwszą książkę poświęconą samej trygonometrii J. Müller, zwany: Regiomontanus i odtąd zaczyna się samodzielny rozwój tej nauki, jako gałęzi geometrii a nie astronomji.

§ 38. Elementarne własności trójkątów sferycznych.

Będziemy się zajmowali tylko takimi trójkątami sferycznymi, których każdy bok i każdy kąt jest mniejszy od 180° .

Każdy taki trójkąt mieści się cały na jednej półkuli, ponieważ żaden bok nie może zawierać punktów przeciwległych, t. j. odległych o 180° . Do badania naroży trójsiennych wystarczają takie trójkąty zupełnie. Nazywamy je zwyczajnymi trójkątami sferycznymi.

W każdym zwyczajnym trójkącie sferycznym suma boków jest mniejsza od 360° , ponieważ taką własność mają kąty płaskie naroża trójsiennego (Tom I. str. 202), suma zaś kątów jest większa od 180° a mniejsza od 540° , jako suma kątów dwuściennych naroża trójsiennego.

Nie mamy więc dla trójkątów sferycznych takiego prostego związku między kątami, jak dla trójkąta płaskiego. W stereometrii udowadnia się, że w narożu trójsiennem suma dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego; stosując to do trójkątów sferycznych, powiemy:

W trójkącie sferycznym suma dwóch boków jest większa od trzeciego (łuk koła wielkiego jest najkrótszą drogą na powierzchni kuli!). Podobnie przenosimy ze stereometrii twierdzenia: Naprzeciw równych boków leżą równe kąty i odwrotnie. Naprzeciw większego kąta leży większy bok i odwrotnie.

Na podstawie tych twierdzeń możemy udowodnić pewne ważne nierówności.

Jeżeli w trójkącie sferycznym suma dwóch boków jest większa (równa lub mniejsza) od 180° , to i suma kątów przeciwległych musi być większa (równa lub mniejsza) od 180° .

Dla dowodu przedłużamy boki b i c poza punkty B, C aż do przecięcia się w punkcie A' , przeciwległym punktowi A ¹⁾. Otrzymamy w ten sposób trójkąt $A'BC$, uzupełniający pierwotny trójkąt do dwukąta sferycznego AA' . Jeżeli $a + b < 180^\circ$, czyli $a < 180^\circ - b$, to z trójkąta uzupełniającego wynika, że i kąt:

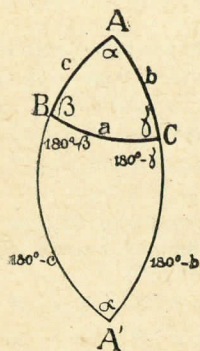


Fig. 87.

$$\alpha < 180^\circ - \beta, \text{ czyli} \\ \alpha + \beta < 180^\circ.$$

Podobnie wykazuje się równoczesność znaków „ $=$ ” lub „ $>$ ”.

Z tego twierdzenia znowu łatwo wyprowadzić wnioski:

a) Przeciwprostokątnia c trójkąta sferycznego prostokątnego zawiera się zawsze między przyprostokątnią a a jej spełnieniem.

Mianowicie:

Jeżeli a jest kątem ostrym, to $180^\circ - a > c > a$.

Jeżeli a jest kątem rozwartym, to $180^\circ - a < c < a$.

b) Jeżeli przyprostokątnia jest większa (równa lub mniejsza) od 90° , to i kąt naprzeciw niej leżący jest większy (równy lub mniejszy) od 90° .

Ważnym środkiem pomocniczym do badania naroża trójsięnnego było jego naroże biegunowe (Tom I. str. 201), t. j. naroże, którego krawędzie są prostopadłe do ścian danego naroża.

Widzieliśmy, że kąty płaskie naroża biegunowego spełniały się do 180° z kątami dwusiecznymi naroża pierwotnego, a kąty dwusieczne z kątami płaskimi. Najwygodniej jest wykreślić naroże biegunowe w wierzchołku pierwotnego naroża; wtedy na kuli otrzymamy drugi trójkąt sferyczny, zwany trójkątem biegunowym. Np. do naroża $O(ABC)$ (fig. 88) wykreśliśmy naroże biegunowe $O(A'B'C')$, t. j. $OB' \perp AOC$, $OC' \perp AOB$, $OA' \perp BOC$. Trójkąt $A'B'C'$ jest biegunowy do trójkąta ABC . Między kątami α', β', γ' i bokami a', b', c' , nowego naroża a elementami pierwotnego naroża zachodzą więc związki:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 180^\circ - a & a' &= 180^\circ - \alpha \\ \beta' &= 180^\circ - b & b' &= 180^\circ - \beta \\ \gamma' &= 180^\circ - c & c' &= 180^\circ - \gamma \end{aligned}$$

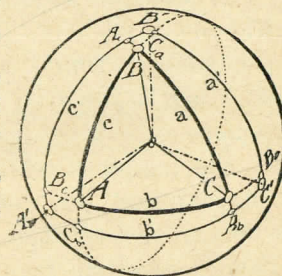


Fig. 88.

Trójkąta biegunowego używa się, aby w jakimkolwiek twierdzeniu o trójkącie sferycznym pomieniać boki z kątami. Np. jeżeli znajdziemy wzór, wyrażający kąt zapomocą trzech boków, to przenosząc ten wzór na trójkąt biegunowy, otrzymamy wzór na bok, wyrażony zapomocą

¹⁾ Fig. 87 przedstawia trójkąt sferyczny w rzucie stereograficznym: wtedy łuki kół przedstawiają się jako koła. W rzucie prostokątnym lub w perspektywie równoległej łuki te byłyby przeważnie elipsami. Ta sama uwaga dotyczy figur 90 i 92.

trzech kątów (ściślej: na spełnienie boku, wyrażone zapomocą spełnień trzech kątów).

Inny przykład: wiemy, że zawsze $a + b > c$. Stosując to do trójkąta biegunowego otrzymamy $a' + b' > c'$, czyli:

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta > 180^\circ - \gamma, \text{ a stąd} \\ \alpha + \beta < 180^\circ + \gamma, \text{ słowami:}$$

W każdym trójkącie sferycznym suma dwóch kątów jest mniejsza, aniżeli trzeci, powiększony o 180° .

§ 39. Związki między elementami trójkąta sferycznego.

Wiadomo ze stereometrii, że naroże trójsięnnie, a więc i trójkąt sferyczny, jest wyznaczone zapomocą trzech elementów. (Por. Tom I. str. 199). Mogą nimi być: 1) trzy boki, 2) trzy kąty, 3) dwa boki i kąt między nimi zawarty, 4) dwa kąty i bok między nimi zawarty, 5) dwa boki i kąt leżący naprzeciw tego boku, który jest bliższy 90° , 6) dwa kąty i bok leżący naprzeciw tego kąta, który jest bliższy 90° .

Znając takie 3 elementy potrafimy zbudować całe naroże, t. j. otrzymać trzy pozostałe elementy. Muszą więc istnieć jakieś związki, jakieś równania, między elementami trójkąta, pozwalające z 3 danych elementów obliczyć 3 pozostałe. Wystarczą trzy takie równania niezależne od siebie, ponieważ w każdym takim zadaniu chodzi o obliczenie trzech niewiadomych.

Szukajmy związku między trzema bokami a kątem, odpowiadającego twierdzeniu Carnota w trygonometrii płaskiej. Weźmyż pod uwagę trójkąt sferyczny ABC wraz z narożem $O(ABC)$, należącym do niego. Założmy początkowo, że kąty b i c są ostre. Łuki $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ są wyrażone w stopniach, więc $\sphericalangle COB = a$, $\sphericalangle COA = b$, $\sphericalangle BOA = c$.

Wykreślmy jeszcze kąt α (utworzony przez styczne do łuków w punkcie A). Ponieważ kąty b i c są ostre, to styczne AP i AQ przetną przedłużone krawędzie OB i OC po stronie punktów B i C . Trójkąty OAP i OAQ są prostokątne przy A , ponieważ styczna jest prostopadła do promienia.

Obliczmy bok x z trójkątów PQO i PQA używając twierdzenia Carnota, to:

$$\begin{aligned} x^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos \sphericalangle POQ \\ x^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

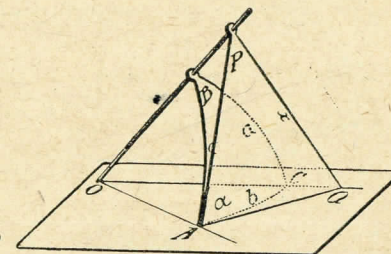


Fig. 89.

Kąt $\angle POQ = \alpha$. Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy

$$(OP^2 - AP^2) + (OQ^2 - AQ^2) - 2 OP \cdot OQ \cdot \cos \alpha + 2 AP \cdot AQ \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\text{czyli } OA^2 + OA^2 = 2 \cdot OP \cdot OQ \cos \alpha - 2 AP \cdot AQ \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Stąd } \cos \alpha = \frac{OA \cdot OA}{OP \cdot OQ} + \frac{AP \cdot AQ}{OP \cdot OQ} \cdot \cos \alpha$$

Wartości stosunków $\frac{OA}{OP} \cdot \frac{OA}{OQ} \cdot \frac{AP}{OP} \cdot \frac{AQ}{OQ}$ odczytujemy z trójkątów prostokątnych, jako funkcje trygonometryczne odpowiednich kątów i otrzymujemy ostatecznie:

$$\cos \alpha = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (30)$$

Ten związek między trzema bokami a kątem nazywamy **twierdzeniem dostaw** (cosinusów) dla boków trójkąta sferycznego. Jest to twierdzenie zasadnicze dla całej trygonometrii sferycznej.

Wyprowadziliśmy to twierdzenie pod założeniem: $b < 90^\circ$, $c < 90^\circ$; stosuje się ono jednakże także do boków rozwartych.

Dowód: a) Jeżeli $b > 90^\circ$ ale $c < 90^\circ$, to przedłużając boki a i b poza punkty A i B (fig. 90), otrzymamy uzupełniający trójkąt sferyczny ABC' o bokach $a' = 180^\circ - a$, $b' = 180^\circ - b$, $c' = c$.

Boki b' i c' są mniejsze od 90° , możemy więc zastosować do trójkąta ABC' twierdzenie dostaw:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha$$

czyli:

$$\cos (180^\circ - a) = \cos (180^\circ - b) \cos c + \sin (180^\circ - b) \sin c \cos (180^\circ - \alpha)$$

A stąd wynika:

$$-\cos a = -\cos b \cdot \cos c - \sin b \sin c \cdot \cos \alpha$$

$$\text{lub: } \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

A więc między bokami i kątami trójkąta ABC zachodzi także związek (30), chociaż b jest większy od 90° .

b) Podobnie udawadnia się, jeżeli b i c są rozwarte (przedłuża się b i c poza B i C).

Stosując to samo rozumowanie do kątów β i γ , otrzymamy trzy związki:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned} \quad (30)$$

Dostawa każdego boku równa się iloczynowi dostaw dwóch pozostałych boków, powiększonemu o iloczyn utworzony z wstaw tych boków i z dostawy kąta między nimi zawartego.

Równania te tworzą dla trygonometrii sferycznej system zasad-

niczy, to znaczy wystarczająco i są niezbędne do rozwiązywania trójkątów sferycznych we wszystkich przypadkach.

Wszystkie inne związki, jakie można wyprowadzić dla elementów trójkąta sferycznego, są konsekwencjami (wynikiem) tych trzech równań, dadzą się z nich wyprowadzić bez rozważań geometrycznych, przez same algebraiczne przekształcenia.

Przypadek 1. Jeżeli są dane trzy boki trójkąta sferycznego, obliczamy kąty z równań (30):

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

Wzory te niewygodne do rachunku logarytmicznego przekształca się — podobnie jak w trygonometrii płaskiej — na wzory połówkowe:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-a)}} \quad (31)$$

i podobnie dla kątów β i γ , przy czym s oznacza połowę sumy boków.

Dowód:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos \alpha + (\sin b \sin c - \cos b \cos c)}{2 \sin b \sin c}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos a - \cos (b+c)}{2 \sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{-2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{a-b-c}{2}}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{-a+b+c}{2}}{\sin b \sin c}} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$$

Przypadek 2. Dane trzy kąty, obliczyć trzy boki. Twierdzenie dostaw przedstawia wtedy układ trzech równań gonjometrycznych o 3 niewiadomych a, b, c , występujących pod znakiem funkcji sinus lub cosinus. Rozwiązanie tych równań sprawia jednak znaczne trudności, dlatego przekształcimy je na inne, wyrażające wprost związek między jednym bokiem a trzema kątami.

Moglibyśmy wprost wyrugować z tych trzech równań (30) kąty b i c , to pozostałby jeden związek między α , β , γ i a . Prościej jednak dojdziemy do celu biorąc do pomocy trójkąt biegunowy.

Zastosujemy twierdzenie dostaw do trójkąta biegunowego t. j. trójkąta o bokach.

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = 180^\circ - \alpha \\ b' = 180^\circ - \beta \\ c' = 180^\circ - \gamma \end{array} \right. \quad \text{i kątach:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = 180^\circ - a \\ \beta' = 180^\circ - b \\ \gamma' = 180^\circ - c \end{array} \right.$$

to:

$$\begin{aligned} \cos a' &= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha', \text{ czyli} \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= \cos(180^\circ - \beta) \cos(180^\circ - \gamma) \\ &+ \sin(180^\circ - \beta) \sin(180^\circ - \gamma) \cos(180^\circ - a) \end{aligned}$$

czyli po zmianie znaku:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Postępując podobnie z bokami b' i c' otrzymamy:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ \cos \beta &= -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned} \quad (32)$$

Jest to twierdzenie dostaw dla kątów trójkąta sferycznego.

Wypowiedz je słowami!

Twierdzenie to może zupełnie zastąpić układ równań (30); może ono służyć także za punkt wyjścia dla całej trygonometrii sferycznej i pozwala rozwiązywać trójkąty we wszystkich przypadkach.

Najlepiej nadaje się to twierdzenie w przypadku 2, t. j. do obliczenia boków, jeżeli znane są trzy kąty.

Otrzymamy bowiem z równań (32)

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

i podobnie dla boków b i c .

Wyrażenia te również można zamienić na dogodne wzory połówkowe:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}}$$

gdzie σ oznacza połowę sumy kątów. Dowód przeprowadza się tak samo, jak dla boków lub też stosując wzór (31) do trójkąta biegunowego.

Przypadek 3. Jeżeli są dane *dwa boki i kąt między nimi zawarty*, n. p. a , b i γ , to obliczamy najpierw bok c z twierdzenia dostaw, a znając już boki a , b , c , obliczamy kąty α i β również z twierdzenia dostaw (możemy użyć wzorów połówkowych).

Przypadek 4. Znamy *dwa kąty i bok między nimi zawarty*, np. β , γ , a . Obliczamy trzeci kąt z wzoru:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

a mając już trzy kąty, postępujemy tak samo, jak w przypadku drugim.

Przypadek 5. Znamy *dwa boki i kąt leżący naprzeciw jednego z nich*, np. a , b , α . Z twierdzenia dostaw $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ możemy obliczyć $\cos c$, wyrażając także $\sin c$ zapomocą funkcji cosinus: $\sin c = \sqrt{1 - \cos^2 c}$. Mamy wtedy równanie drugiego stopnia na obliczenie wartości $\cos c$, otrzymamy więc w ogólności dwie wartości $\cos c$. Istotnie w tym przypadku zadanie ma w ogólności dwa rozwiązania, podobnie jak w trzecim przypadku w planimetrii. Po obliczeniu boku c , mamy znowu podobnie, jak w pierwszym przypadku, trzy boki znane. Kąty obliczy się więc z twierdzenia dostaw dla boków. Posiadamy jednak dogodniejsze sposoby rozwiązywania trójkątów w przypadku 5, polegające bądźto na twierdzeniach o prostokątnym trójkącie sferycznym, bądźto na ogólnych wzorach, podobnych do twierdzenia tangensów i sinusów w trygonometrii płaskiej.

Przypadek 6. Znamy *dwa kąty i bok leżący naprzeciw jednego z nich*, np. α , β i a . Używając twierdzenia dostaw dla kątów:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

rozumujemy tak samo, jak w przypadku 5. Metoda bezpośrednia jest tu równie niedogodna, jak w przypadku 5.

Obok związków między trzema bokami i kątem, tudzież trzema kątami i bokiem istnieją także związki między dwoma bokami i dwoma kątami przeciwległymi, odpowiadające twierdzeniu wstaw z trygonometrii płaskiej.

Związki te możemy wyprowadzić z równań zasadniczych (31) drogą przekształceń gonjometrycznych.

Z równań:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta \end{aligned}$$

tworzymy sumę i różnicę $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$, wyłączamy $\cos a + \cos b$ i $\cos a - \cos b$ przed nawias i mnożymy obydwa równania stronami.

Otrzymamy:

$$(\cos^2 a - \cos^2 b) (1 - \cos^2 c) = (\sin^2 b \cos^2 \alpha - \sin^2 a \cos^2 \beta) \sin^2 c,$$

a stąd, wyrażając wszystko zapomocą funkcji sinus, otrzymamy:

$$\sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta$$

czyli:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} \quad \text{i podobnie} \quad \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

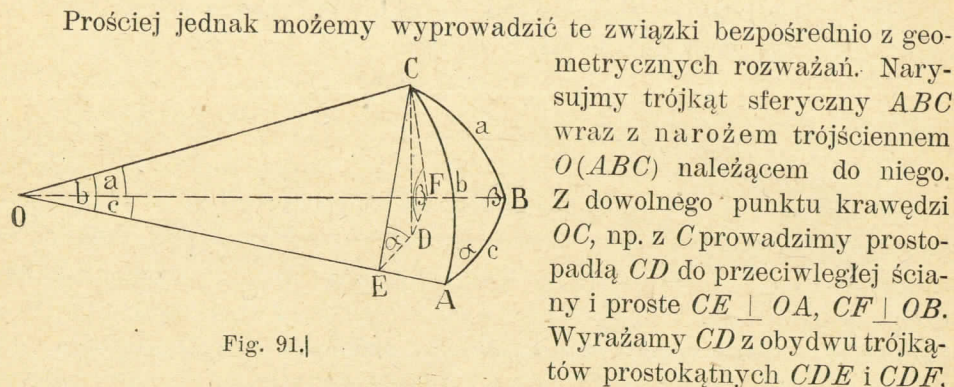


Fig. 91.

Otóż:

$$CD = CE \cdot \sin \alpha = CO \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

$$CD = CF \cdot \sin \beta = CO \cdot \sin a \cdot \sin \beta$$

Z porównania tych dwóch wyrażeń wynika:

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha$$

czyli:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

Prowadząc podobnie prostopadłą od krawędzi OB na płaszczyznę COA , otrzymamy:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

Obydwa te związki możemy napisać w postaci proporcji bieżącej:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (33)$$

Wstawy boków mają się do siebie, jak wstawy kątów przeciwległych.

Jest to twierdzenie wstaw dla trójkątów sferycznych. Równania (33) same nie wystarczają do rozwiązania trójkąta sferycznego, brak bowiem trzeciego związku, odpowiadającego twierdzeniu $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ w trygonometrii płaskiej; tutaj dla kątów mamy tylko nierówność: $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ a nie mamy żadnego równania.

Twierdzenia tego używa się zawsze w przypadku 5. i 6., t. j. *aby z dwóch boków i kąta przeciwległego otrzymać drugi kąt przeciwległy, lub też, aby z dwóch kątów i boku przeciwległego obliczyć drugi bok.*

U w a g a: Ponieważ do danej wartości $\sin x$ należą dwa kąty wypukłe x , jeden ostry a drugi rozwarty, przeto zarówno w przypadku 5. jak i 6. otrzymamy w ogólności dwa rozwiązania. Dyskusja podobna, jak dla przypadku trzeciego w trygonometrii płaskiej.

Także w przypadku 3. (a, b, γ) po obliczeniu trzeciego boku i w przypadku 4. (α, β, c) po obliczeniu trzeciego kąta zapomocą twierdzenia dostaw, oblicza się pozostałe elementy twierdzeniem wstaw; rachunek jest wtedy o wiele prostszy, aniżeli przy użyciu twierdzenia dostaw lub nawet twierdzenia połówkowego.

Jednakże mimo użycia twierdzeń dostaw, połówkowych i twierdzenia wstaw, bardzo zawiłe przedstawia się zupełne rozwiązanie trójkąta w 5-tym i 6-tym przypadku. Znając bowiem dwa boki i dwa kąty naprzeciw nich leżące, nie potrafimy w prosty sposób obliczyć trzeciego boku lub trzeciego kąta.

Używaliśmy do tego równania drugiego stopnia, np. dla boku c :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sqrt{1 - \cos^2 c} \cos \alpha$$

Wyliczenie kąta c z tego równania sprawia znaczne trudności rachunkowe. Trudności te omijamy, rozkładając trójkąt sferyczny na dwa trójkąty sferyczne prostokątne i używając do rozwiązania trójkąta prostokątnego specjalnych wzorów, które omówimy w następnym ustępie.

Pole trójkąta sferycznego. W stereometrii udowadnia się (Tom I. str. 297), że pole trójkąta sferycznego wyraża się wzorem:

$$P = \frac{R^2 \pi e}{180^\circ}$$

gdzie R oznacza promień kuli, na której trójkąt sferyczny leży a e oznacza przepełnienie sferyczne, t. j. nadwyżkę sumy kątów trójkąta sferycznego ponad 180° :

$$e = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

Do obliczenia pola trójkąta sferycznego trzeba więc znać trzy kąty; jeżeli są podane inne elementy, rozwiązujemy najpierw trójkąt. Pole trójkąta sferycznego na kuli o promieniu 1 przyjmuje się za miarę rozwarłości naroża trójsięnnego.

§ 40. Trójkąt sferyczny prostokątny.

W trójkącie sferycznym prostokątnym jeden element $\gamma = 90^\circ$ jest zawsze znany; do wyznaczenia takiego trójkąta wystarczą więc zawsze dwa elementy, podobnie jak w trygonometrii płaskiej dla trójkąta prostokątnego.

Wszystkie wzory, odnoszące się do trójkąta sferycznego, upraszczają się znacznie, jeżeli trójkąt jest prostokątny.

Podstawiając wartość $\gamma = 90^\circ$ we wzorach: (30), (32).

(33), otrzymamy:

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (1)$$

z trzeciego wzoru systemu (30); w inne wzory tego systemu kąt γ nie wchodzi.

Z wzorów (32) otrzymamy:

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a \quad (2)$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos b \quad (3)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \quad (4)$$



Fig. 92.

Z twierdzenia sinusów:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

$$\sin b = \sin c \cdot \sin \beta \quad (6)$$

Wypowiedz słowami! Wzory te odpowiadają wzorom $a = c \sin \alpha$, $b = c \sin \beta$ trygonometrii płaskiej.

U w a g a. Wszystkie te wzory można także wyprowadzić wprost geometrycznie, używając naroża trójsiennego o dwóch ścianach prostopadłych.

W trójkącie prostokątnym jest 5 elementów zmiennych: a, b, c, α, β ; kombinując je po 3, otrzymujemy 10 różnych kombinacji. Związki (1)–(6) zawierają sześć z tych kombinacji, brak jeszcze czterech: a, b, α ; a, b, β ; a, c, β ; b, c, α .

Otrzymujemy je przez gonjometryczne przekształcenie; np. aby otrzymać związek między elementami a, b, β , podstawiamy w równaniu (5) zamiast $\sin c$ wartość $\frac{\sin \beta}{\sin b}$ z wzoru (6), a zamiast $\sin \alpha$ wartość $\frac{\cos \beta}{\cos b}$ z wzoru (3).

Otrzymamy w ten sam sposób jeszcze cztery związki:

$$\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} \beta \quad (7)$$

$$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} \alpha \quad (8)$$

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c \quad (9)$$

$$\cos \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c \quad (10)$$

Używając tych dziesięciu związków, można już każdy element wyrazić wprost zapomocą każdych dwóch innych (np. α zapomocą β i c ze związku 4, a zapomocą b i α ze związku 2 i t. p.).

Wzory te dość trudno zachować w pamięci. Można je jednak ujednolicić, wprowadzając zamiast przyprostokątnej a i b ich dopełnienia: $a' = 90^\circ - a$, $b' = 90^\circ - b$. Wtedy funkcje zmieniają się na cofunkcje i otrzymujemy:

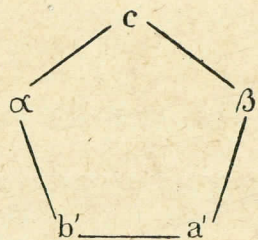


Fig. 93.

$$\cos c = \sin a' \sin b'$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

$$\cos a' = \sin c \sin \alpha$$

$$\cos a' = \operatorname{ctg} b' \operatorname{ctg} \beta$$

$$\cos b' = \sin c \sin \beta$$

$$\cos b' = \operatorname{ctg} a' \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin a'$$

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} b' \operatorname{ctg} c$$

$$\cos \beta = \sin \alpha \sin b'$$

$$\cos \beta = \operatorname{ctg} a' \operatorname{ctg} c$$

Ustawiamy elementy c, α, β, b', a' w pięciokątny schemat według fig. 93, to wszystkie wzory możemy ująć w następującą **regułę (Nepera)**:

Dostawa jakiegokolwiek elementu równa się iloczynowi wstaw elementów przeciwległych lub iloczynowi dotychczasowych elementów przyległych.

Przy pomocy tej reguły łatwo rozwiązać trójkąt sferyczny prostokątny we wszystkich sześciu przypadkach. Ponieważ każdy ukośnokątny trójkąt sferyczny można rozłożyć na dwa prostokątne przez poprowadzenie odpowiedniej wysokości (sferycznej), przeto reguła Nepera może zastąpić zasadnicze wzory (30), (32), (33). Często też w praktyce używa się tego sposobu rozwiązywania trójkątów sferycznych ukośnokątnych, zwłaszcza w przypadkach 3. 4. 5. i 6.

§ 41. Zastosowanie trygonometrii sferycznej do zagadnień stereometrycznych.

Przykład 1. Obliczyć rzut znanego kąta a na dowolną płaszczyznę, znając kąty nachylenia b' i c' jego ramion do tej płaszczyzny. W mierzeniu nazywamy to zagadnienie »sprowadzeniem kąta do poziomu«.

W narożu trójsiennym $A(BCD)$ znamy trzy kąty płaskie a więc w odpowiednim trójkącie sferycznym znamy trzy boki:

$$\sphericalangle CAB = a$$

$$\sphericalangle CAD = 90^\circ - c' = c$$

$$\sphericalangle BAD = 90^\circ - b' = b$$

Mamy obliczyć kąt dwuścienny α leżący przy krawędzi $A'D$, jest on bowiem równy kątowi $C'A'B'$, t. j. szukanemu rzutowi kąta a na płaszczyznę p . Z trzech boków trójkąta sferycznego oblicza się kąt (przypp.1) albo zapomocą twierdzenia dostaw:

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
albo wygodniej z twierdzenia połówkowego:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

Przykład 2. W czwororościanie nieumiarowym znamy trzy krawędzie jednego naroża: m, n i p i trzy kąty płaskie a, b, c utworzone przez te krawędzie. Obliczyć objętość czwororościanu.

Pole podstawy obliczymy według znanego wzoru trygonometrii płaskiej:

$$D = \frac{m \cdot n}{2} \sin c$$

Dla obliczenia wysokości DH prowadzimy (fig. 95) płaszczyznę DHE prostopadłą do krawędzi AC . Kąt $DEH = \alpha$, który powstał przy krawędzi AC ,

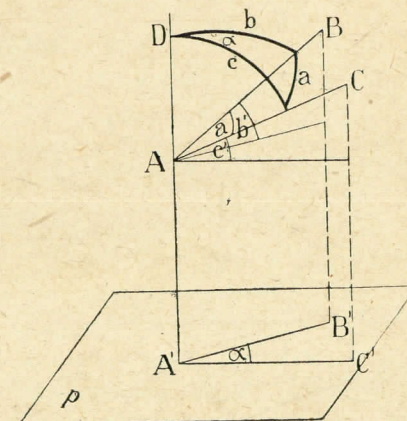


Fig. 94.

jest miarą kąta dwuściennego ścian CAB i CAD , należących do znanego naroża A . Z trójkąta DHE otrzymamy:

$w = ED \cdot \sin \alpha$ a wyrażając ED z trójkąta DAE , otrzymujemy:

$$w = p \cdot \sin b \cdot \sin \alpha.$$

Kąt dwuścienny α możemy obliczyć z naroża A znając w nim trzy kąty płaskie a, b, c (przypadek 1). Przy pomocy twierdzeń połówkowych otrzymujemy:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

Podstawiając te wartości w

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

otrzymamy:

$$w = \frac{2 p \sin b}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

Ponieważ zaś objętość

$$V = D \cdot \frac{w}{3}, \text{ przeto}$$

$$V = \frac{1}{3} m n p \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

W podobny sposób oblicza się objętość graniastosłupa trójbocznego, jeżeli znamy trzy krawędzie schodzące się w jednym narożu i kąty między nimi zawarte, tudzież objętość dowolnego równoległościanu, ponieważ można go rozłożyć na dwa przystające graniastosłupy trójboczne.

Przykład 3. Pewien kryształ należący do układu różnoosiowego (trzy osie prostopadłe i połowiące się, ale każda innej długości) ma postać podwójnego ostrosłupa czworobocznego. Zmierzono dwa kąty dwuścienne leżące przy krawędziach bocznych; obliczyć kąt dwuścienny leżący przy podstawie, tudzież stosunki długości osi (parametry). Wystarczy rozważyć jedną ćwiartkę górnego ostrosłupa, n.p. $OABC$ (fig. 96). Biorąc pod uwagę naroże trójsienne $A(OBC)$ znamy w nim trzy kąty dwuścienne:

$$\sphericalangle(AO) = 90^\circ, \sphericalangle(AC) = \frac{\beta}{2}$$

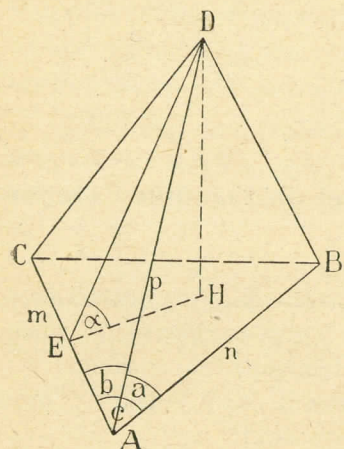


Fig. 95.

jest połową zmierzonego kąta dwuściennego a podobnie $\sphericalangle(AB) = \frac{\alpha}{2}$. Możemy więc obliczyć boki trójkąta sferycznego $O'B'C$ (przypadek 2), t. j. kąty płaskie naroża $A(OBC)$. Obliczamy a i b . Przechodząc do naroża $C(AOB)$ znamy w nim teraz kąty dwuścienne:

$$\sphericalangle(CA) = \frac{\beta}{2}, \sphericalangle(CO) = 90^\circ$$

i kąt płaski zawarty między krawędziami CA i CO : $\sphericalangle OCA = 90^\circ - a$. Rozwiązując to naroże (przypadek 4), obliczymy żądany drugi kąt dwuścienny: $\sphericalangle(CB) = \frac{\gamma}{2}$.

Aby znaleźć stosunek osi:

$m:n:p = BO:CO:AO$, wyrażamy BO i CO z trójkątów prostokątnych AOB i AOC :

$$BO = AO \cdot \operatorname{tg} b \quad CO = AO \cdot \operatorname{tg} a$$

więc

$$m:n:p = \operatorname{tg} b : \operatorname{tg} a : 1.$$

Ponieważ zaś znamy kąty b i a z rozwiązania naroża $A(OBC)$, obliczymy łatwo $m:n:p$.

N. p. jeżeli $\alpha = 75^\circ 23' 42''$ } otrzymamy najpierw z naroża $A(OBC)$
 $\beta = 137^\circ 50' 30''$ }

$$b = 53^\circ 59' 31''$$

$$a = 32^\circ 14''$$

potem z naroża $C(AOB)$

$$\underline{\gamma = 120^\circ 43' 28''}$$

Wreszcie: $m:n:p = 1.3750:0.53075:1$.

Aby obliczyć rozmiary kryształu, musielibyśmy znać przynajmniej jedną długość.

Cale zadanie przedstawia się o wiele prościej przy użyciu prostokątnych trójkątów sferycznych.

Wykonaj zadanie odwrotne: znamy dla kryształów siarki stosunki osi $m:n:p = 0.8138:1:1.9076$; obliczyć kąty płaskie i dwuścienne!

§ 42. Zastosowanie trygonometrii sferycznej do zagadnień geograficznych.

Przykład 1. Znając długość i szerokość geograficzną dwóch punktów na kuli ziemskiej obliczyć ich odległość mierzona po kole wielkim. Niech λ_1 i λ_2 oznaczają długości geograficzne a φ_1 i φ_2 szerokości geograficzne miejsc A i B (fig. 97). Koło $NESW$ niech przedstawia południk początkowy,

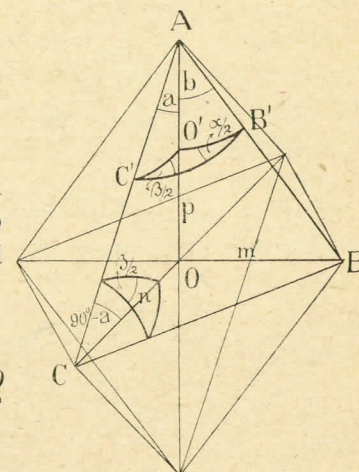


Fig. 96.

zerowy (t. j. przechodzący n. p. przez Ferro lub Greenwich) a N biegun północny. Wykreślając południki miejsc A i B , tudzież łuk koła wielkiego łączącego te punkty, otrzymamy trójkąt sferyczny NAB . Znamy w nim dwa boki: $AN = 90^\circ - \varphi_1$, $BN = 90^\circ - \varphi_2$ i kąt między nimi zawarty $\sphericalangle ANB = \lambda_2 - \lambda_1$. (Przypadek 3). Mamy obliczyć trzeci bok: $AB = c$. Stosując twierdzenie dostaw dla boków otrzymamy:

$$\cos c = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$

czyli:

$$\cos c = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Obliczywszy stąd kąt c , otrzymamy długość łuku AB z proporcji:

$$\widehat{AB} : 2R\pi = c : 360^\circ$$

przyczem R oznacza promień ziemi. Z tem zagadnieniem wiąże się obliczenie pola trójkąta sferycznego na powierzchni ziemi (każdy zaś wielokąt można rozłożyć na trójkąty), jeżeli znamy długość i szerokość geograficzną każdego wierzchołka A, B, C . Łącząc te punkty z biegunem północnym, otrzymamy trzy trójkąty sferyczne, z których obliczymy według poprzedniego zadania boki AB, AC, BC . Następnie rozwiązując trójkąt ABC (przypadek 1), otrzymamy kąty $\sphericalangle A, \sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ a zapomocą kątów pole:

$$P = \frac{R^2 \pi e}{180^\circ} \text{ gdzie } e = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C - 180^\circ.$$

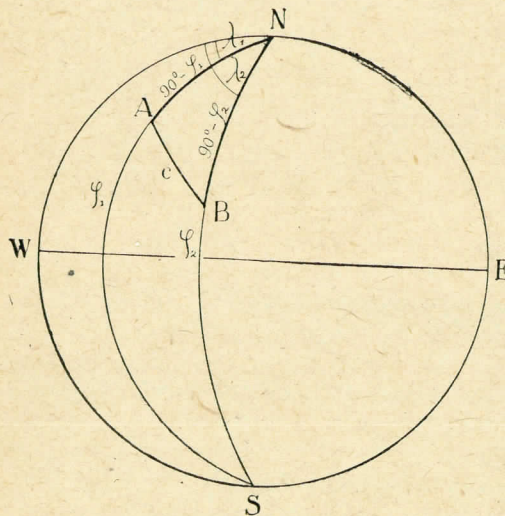


Fig. 97.

§ 43. Zastosowanie trygonometrii sferycznej do astronomji.

Orientacja na sklepieniu niebieskiem. Wskutek obrotu ziemi około osi od zachodu ku wschodowi wydaje się nam, że całe sklepienie niebieskie przedstawiające się nam jako kula) wraz z gwiazdami obraca się od wschodu ku zachodowi. Przy tym obrocie dwa punkty są nieruchome: punkty, w których przedłużona oś ziemi przecina sklepienie niebieskie. Punkty te (fig. 98) nazywamy biegunem północnym P i południowym P' niebieskim. (Biegun północny leży, jak wiadomo, w pobliżu gwiazdy polarnej).

Koło, w którym przedłużona płaszczyzna równika ziemskiego przecina sklepienie niebieskie, nazywamy równikiem niebieskim. Na figurze jest

to koło $EA WB$. Przedłużenie płaszczyzny stycznej do kuli ziemskiej O w punkcie obserwacji przecina sklepienie niebieskie wzdłuż koła $NES W$, zwanego horyzontem. (Kulę ziemską przyjmujemy na rysunku za punkt). Punkt Z , w którym przecina sklepienie niebieskie przedłużony promień ziemi należący do punktu obserwacji, nazywamy zenitem a przeciwny punkt N' : nadirem. Koło wielkie przechodzące przez biegun północny niebieski P i przez zenit Z jest południkiem niebieskim dla danego miejsca obserwacji. Powstaje on przez rozszerzenie płaszczyzny południka

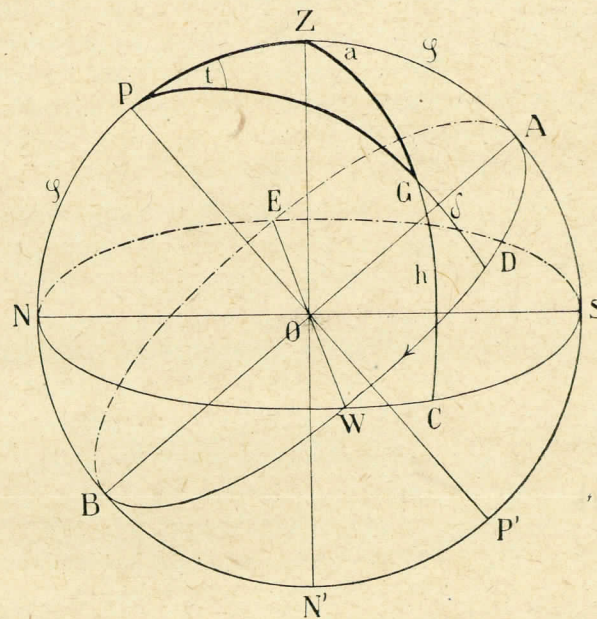


Fig. 98.

ziemskiego. Punkty N, S, E, W na horyzoncie oznaczają północ, południe, wschód i zachód.

Wskutek pozornego obrotu sklepienia niebieskiego każdy punkt równika przebiega w 24 godzinach (gwiazdowych) koło wielkie a każdy inny punkt sklepienia niebios opisuje koło małe równoległe do równika. Gwiazda wschodzi ponad horyzont, przebiega swój łuk dzienny i zachodzi, o ile nie leży w pobliżu bieguna północnego (wtedy przez cały dzień jest nad poziomem) lub w pobliżu bieguna południowego niebieskiego (wtedy przez cały dzień krąży pod poziomem danego miejsca). Położenie jakiegokolwiek gwiazdy G znamy, jeżeli znamy łuk $h = GC$ koła wielkiego, łączącego zenit z gwiazdą, zwany wysokością gwiazdy i kąt a , zawarty między łukiem ZC a południkiem ZS , zwany azymutem gwiazdy.

Można jednakże także inaczej określić położenie gwiazdy, biorąc za stałe koło równik zamiast horyzontu a za punkt stały biegun zamiast zenitu. Wtedy położenie gwiazdy wyznaczają: łuk $\delta = GD$, należący do koła wielkiego, które łączy biegun północny z gwiazdą, zwany: *zbozczeniem gwiazdy* (zbozczenie od równika!) i kąt t , zawarty między kołem PG a południkiem PZS , zwany kątem godzinnym gwiazdy. Kąt ten zmienia się proporcjonalnie do czasu wskutek obrotu. Liczy się ten kąt od południka ku zachodowi jako dodatni zgodnie z dziennym ruchem sklepienia niebieskiego. Gdy gwiazda jest w najwyższym punkcie swej drogi (góruje, przechodzi przez południk), kąt godzinny $t = 0$. Kąt ten nawet zwykle podaje się w godzinach i minutach (gwiazdowych) zamiast w stopniach, przyczem 1 godz. = 15° (dlaczego?), 1 min. = $15'$, 1 sek. = $15''$.

Na sklepieniu niebieskim można odczytać szerokość geograficzną dla miejsca obserwacji. Szerokość geograficzna jest to kąt zawarty między promieniem ziemi danego miejsca a płaszczyzną równika, t. j. kąt między kierunkiem OZ a OA . Na sklepieniu niebieskim odpowiada temu kątowi łuk $AZ = \varphi$. Łatwo wykazać, że $AZ = PN$ t. j. szerokość geograficzna równa się kątowi wzniesienia bieguna północnego niebieskiego ponad horyzont (wysokość bieguna).

Przy badaniu biegu i położenia gwiazd najważniejszy jest trójkąt sferyczny PZG (biegun — zenit — gwiazda). Boki tego trójkąta — jak odczytujemy z figury 98 — wynoszą:

$$PZ = 90^\circ - \varphi; \quad ZG = 90^\circ - h; \quad PG = 90^\circ - \delta$$

a kąty:

$$\sphericalangle P = t, \quad \sphericalangle Z = 180^\circ - a.$$

Bardzo wiele zagadnień astronomicznych polega na rozwiązaniu tego trójkąta. Po tych objaśnieniach dopiero możemy przejść do rozwiązywania zadań z tej dziedziny.

Przykład 1. Znajac wysokość h i azymut: a jakiejś gwiazdy obliczyć jej zbozczenie δ i kąt godzinny t . Znamy prócz tego szerokość geograficzną φ miejsca obserwacji.

W trójkącie PZG znamy dwa boki $90^\circ - h$, $90^\circ - \varphi$ i kąt między nimi zawarty: $180^\circ - a$. (Przypadek 3).

Trzeci bok obliczamy z twierdzenia dostaw:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - h) \cos(180^\circ - a)$$

czyli:

$$(1) \quad \sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$

Znajac zaś δ obliczamy kąt godzinny t przy pomocy twierdzenia wstaw:

$$\sin t : \sin(180^\circ - a) = \sin(90^\circ - h) : \sin(90^\circ - \delta)$$

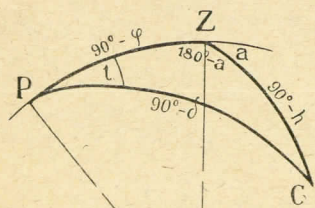


Fig. 99.

Stąd:

$$\sin t = \frac{\sin a \cos h}{\cos \delta}$$

Zastosowanie. Przy pomocy teodolitu łatwo jest zmierzyć dla słońca kąt wzniesienia i azymut każdego dnia. Czyniąc takie obserwacje przez cały rok i obliczając δ , znamy zbozczenie słońca od równika niebieskiego w każdym dniu, jakkolwiek bezpośrednio trudno byłoby zmierzyć w dzień położenie słońca względem innych gwiazd. W ten sposób np. otrzymano dla słońca w dniach:

$$21/\text{III} \quad \delta = 0^\circ$$

$$21/\text{VI} \quad \delta = 23^\circ 27' 13''$$

$$23/\text{IX} \quad \delta = 0^\circ$$

$$21/\text{XII} \quad \delta = -23^\circ 27' 13''$$

Dla gwiazd stałych zbozczenie jest zawsze stałe (są zawsze w takiej samej odległości sferycznej od równika), a zmienia się tylko kąt godzinny. Zbozczenia te są spisane w tablicach astronomicznych dla wszystkich znanych gwiazd.

Przykład 2. Obliczanie czasu z obserwacji ciał niebieskich. Miarą czasu w życiu codziennym jest czas (pozornego) obrotu słońca dookoła ziemi t. j. doba słoneczna. W astronomji jednak używa się innej miary czasu, jednostajniejszej, mianowicie: doby gwiazdowej; jest to czas obiegu dowolnej gwiazdy stałej dookoła ziemi. Za początek doby gwiazdowej przyjęto chwilę górowania tak zwanego punktu barana F (fig. 100) czyli punktu wiosennego porównania dnia z nocą, leżącego na równiku (w tym miejscu, gdzie się równik przecina z ekliptyką t. j. z drogą słońca dookoła ziemi). Znajac wysokość h punktu barana, możemy obliczyć czas gwiazdowy, t. j. kąt godzinny T barana, (ile godzin upłynęło od górowania punktu barana). Ponieważ punkt F leży na równiku, przeto jego zbozczenie $\delta = 0$, a więc w trójkącie PZG bok $PG = PF = 90^\circ - \delta = 90^\circ$.

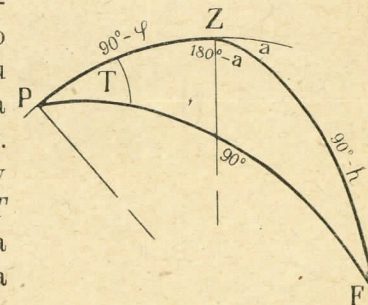


Fig. 100.

Znamy w trójkącie PZF trzy boki: 90° , $90^\circ - h$ i $90^\circ - \varphi$. Z twierdzenia dostaw obliczymy kąt T :

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi) \sin 90^\circ \cos T$$

lub:

$$\sin h = \cos \varphi \cos T \text{ a stąd:}$$

$$\cos T = \frac{\sin h}{\cos \varphi}$$

Znajac kąt T w stopniach wyrażamy go w godzinach i znajdujemy w ten sposób, jaka jest godzina doby gwiazdowej. Taki sam kąt godzinny mają wszystkie punkty południka PF .

Możemy jednak czas gwiazdowy odczytać także z każdej innej gwiazdy, jeżeli tylko znamy jej położenie względem punktu barana a mianowicie: jeżeli wiemy, o ile ona jest wysunięta na wschód lub na zachód od punktu barana. Kąt α , jaki tworzy południk PG danej gwiazdy z południkiem PF punktu barana (por. fig. 101), nazywamy wznoszeniem prostem tej gwiazdy lub rektascenzją. Kąt ten liczy się od punktu barana począwszy ku wschodowi, a więc przeciwnie, jak kąt godzinny, od 0° do 360° . Kąt ten, podobnie jak zboczenie δ , jest stały dla każdej

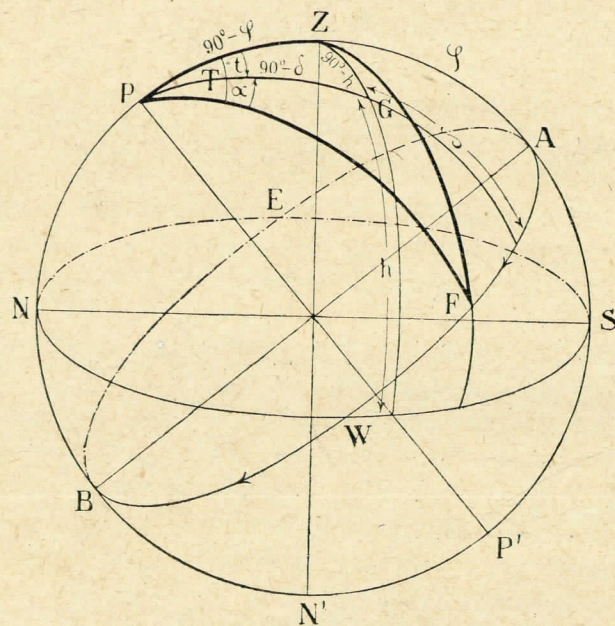


Fig. 101.

gwiazdy, nie zmienia się przy obrocie sklepienia niebieskiego. W tablicach astronomicznych spisane są obok kątów δ także α dla wszystkich ważniejszych gwiazd. Znaając te wartości, możemy użyć każdej gwiazdy do oznaczenia czasu.

Zmierzywszy wysokość gwiazdy h , dla której znamy zboczenie δ i rektascencję α , chcemy obliczyć czas gwiazdowy.

Chodzi nam więc o kąt godzinny T punktu barana. Z figury 101 widzimy, że:

$$T = \alpha + t$$

gdzie t oznacza kąt godzinny danej gwiazdy. Mamy więc obliczyć t . W trójkącie zasadniczym PZG znamy trzy boki:

$$PZ = 90^\circ - \varphi; PG = 90^\circ - \delta; ZG = 90^\circ - h.$$

Z twierdzenia dostaw obliczamy kąt t :

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cos t.$$

Stąd:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

U w a g a. Rozumowania tego nie można bez zmiany zastosować do słońca, ponieważ jego rektascenzja α zmienia się, zwiększa się codziennie przeciętnie prawie o 1° (ściślej 0.985°). Słońce porusza się po sklepieniu niebieskiem w kierunku przeciwnym do dziennego ruchu wszystkich gwiazd i spażnia się wskutek tego codziennie prawie o 4 minuty względem innych gwiazd. Spażnianie to jednak nie odbywa się jednostajnie.

Przykład 3. Obliczyć czas wschodu i zachodu jakiejś gwiazdy znając jej zboczenie (i znając szerokość geograficzną miejsca obserwacji). Przy wschodzie, zarówno jak i przy zachodzie, wzniesienie gwiazdy nad poziom $h = 0$. Wierzchołek trójkąta PZG leży wtedy na horyzoncie (por. fig. 102). Znamy trzy boki $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PG = 90^\circ - \delta$, $ZG = 90^\circ - h = 90^\circ$. Mamy obliczyć kąt godzinny t .

Z twierdzenia dostaw:

$$\cos 90^\circ = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t$$

stąd:

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

Równanie to spełniają kąty t i $360^\circ - t$ (t wschód; $360^\circ - t$ zachód).

Obliczywszy kąt godzinny, dostaniemy czas gwiazdowy wschodu i zachodu z wzoru:

$$T = \alpha + t.$$

Podwójny kąt godzinny tworzy tak zwany: łuk dzienny gwiazdy. Gwiazda przebiega łuk koła małego $G'KG$.

W podobny sposób można obliczyć, w którym miejscu horyzontu gwiazda wschodzi i zachodzi. W tym celu trzeba znać jej azymut (odchylenie od południka) dla $h = 0$. Z trójkąta PZG , w którym znamy trzy boki, obliczamy kąt $180^\circ - a$ z wzoru:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi) \sin 90^\circ \cdot \cos(180^\circ - a)$$

stąd:

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

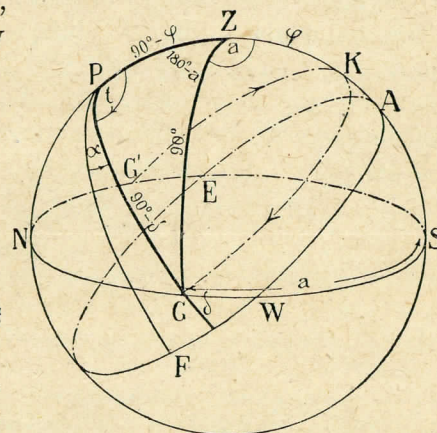


Fig. 102.

Otrzymamy stąd dwie wartości na azymut: a i $360^\circ - a$, z których jedna odpowiada punktowi wschodu, druga punktowi zachodu. Odejmując od tych kątów 90° i 270° , otrzymamy odległość (wyrażoną w stopniach) punktu wschodu i zachodu gwiazdy od kierunku wschodniego i zachodniego na horyzoncie, t. j. łuki GW i $G'E$.

Dla słońca czas wschodu i zachodu trudniej jest obliczyć, ponieważ we wzorze:

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

zboczenie δ zmienia się nie tylko z każdym dniem ale z każdą chwilą. W przybliżeniu obliczy się t biorąc z kalendarza astronomicznego δ dla danego dnia. Otrzymamy w ten sposób przybliżony gwiazdowy czas wschodu i zachodu słońca, który możemy następnie zamienić na czas słoneczny.

Długość najkrótszego dnia w roku (21/XII i 21/VI) obliczymy z uwagi, że wtedy zboczenie $\delta = \pm 23^\circ 27' = \pm \varepsilon$, więc

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} (\pm \varepsilon)$$

Otrzymamy stąd dwie wartości t dla najkrótszego i dwie dla najdłuższego dnia. Ich suma da długość dnia, wyrażoną w godzinach gwiazdowych. Aby je zamienić na godziny słoneczne (nieco dłuższe), należy liczbę godzin gwiazdowych pomnożyć przez liczbę 0.9972696..., wyrażającą stosunek czasu słonecznego (średniego) do czasu gwiazdowego (365.242... dni słonecznych = 366.242... dni gwiazdowych).

Ćwiczenia IX.

§ 37—38. 1. Ile km wynoszą boki trójkąta sferycznego, leżącego na kuli ziemskiej: $R=6377.4 km$, jeżeli kąty płaskie odpowiedniego naroża trójsięnnego wynoszą: $\alpha = 28^\circ 10'$, $b = 132^\circ 40'$, $c = 84^\circ 20'$?

2. Odległości trzech miejsc kuli ziemskiej (mierzone po kołach wielkich) wynoszą $a = 100 km$, $b = 250 km$, $c = 140 km$; wyrazić te łuki w stopniach (obwód ziemi $2R\pi = 40000 km$).

3. Narysować na kuli trzy koła wielkie nie należące do tej samej osi; wykazać, że pomiędzy 8 trójkątami sferycznymi o trzech wierzchołkach wspólnych, które w ten sposób otrzymamy, znajduje się zawsze jeden taki, którego każdy bok i każdy kąt jest mniejszy od 180° .

4. Wykazać, że przeciwprostokątnia trójkąta sferycznego prostokątnego jest zawsze zawarta między przyprostokątnią a jej spełnieniem do 180° .

5. Z każdego wierzchołka dowolnego trójkąta sferycznego zakreślić koło promieniem (sferycznym) 90° i wykazać, że powstały trójkąt jest biegunowy do pierwotnego.

§ 39—40. 6. Wyprowadzić z twierdzenia dostaw dla boków twierdzenie wstaw.

7. Wyprowadzić wprost z figury dla trójkąta sferycznego prostokątnego związki:

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$$

8. W rozwinięciu $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ według teoremu dodawania podstawić wartości z wzorów półwinkowych. Po redukcji mają wypaść wzory:

$$\frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a + b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a - b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin \frac{a + b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

zwane wzorami Delambre'a.

9. Dzieląc wzory poprzedniego zadania parami, wyprowadzić proporcje podobne do twierdzenia stycznych (proporcje Nepera).

10. Wykazać, że promień sferyczny koła wpisanego w trójkąt sferyczny wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \rho = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin (s - a) = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s}}$$

U w a g a. Środek tego koła leży w punkcie, w którym się przecinają koła wielkie, połowiące kąty trójkąta sferycznego.

11. Wyprowadzić dla promienia sferycznego koła opisanego na trójkącie sferycznym wzór:

$$\operatorname{ctg} r = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{-\cos \sigma}}$$

12. Udowodnić, że kąty α , β , γ dowolnej prostej z trzema osiami prostopadłami, wychodzącymi z dowolnego jej punktu, są związane warunkiem:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

13. Trzy prostopadłe do siebie promienie kuli o promieniu $1 m$ wyznaczają ósmą część kuli (>oktant<). Obrac punkt P na kuli tak, aby odległości sferyczne od dwóch wierzchołków tego trójkąta wynosiły $0.88 m$ i $0.94 m$. Obliczyć odległość sferyczną P od trzeciego wierzchołka.

14. Rozwiązać trójkąt sferyczny prostokątny znając:

$$a) \alpha = 38^\circ 42', \quad b = 78^\circ 38'$$

$$(\text{Odp.: } c = 78^\circ 36' 21''$$

$$\alpha = 39^\circ 28' 12''$$

$$\beta = 81^\circ 32' 58'')$$

$$b) c = 103^\circ 27', \quad a = 126^\circ 45'$$

$$(\text{Odp.: } b = 67^\circ 7' 34''$$

$$\alpha = 124^\circ 31' 39''$$

$$\beta = 71^\circ 19' 48'')$$

$$c) c = 37^{\circ} 48' 5'', \alpha = 123^{\circ} 17' 14''$$

$$\begin{aligned} (\text{Odp.: } \beta &= 140^{\circ} 16' 32'' \\ \alpha &= 149^{\circ} 10' 43'' \\ b &= 156^{\circ} 56' 20'') \end{aligned}$$

$$d) \alpha = 68^{\circ} 35' 52'', \beta = 46^{\circ} 48' 7''$$

$$\begin{aligned} (\text{Odp.: } b &= 44^{\circ} 45' 24'' \\ c &= 74^{\circ} 58' 55'' \\ \alpha &= 77^{\circ} 34' 21'') \end{aligned}$$

$$e) \alpha = 128^{\circ} 16' 40'', \alpha = 115^{\circ} 24' 20''$$

$$\begin{aligned} (\text{Odp.: } b_1 &= 142^{\circ} 59' \\ c_1 &= 60^{\circ} 20' 58'' \\ \beta_1 &= 136^{\circ} 10' 2''; \\ b_2 &= 37^{\circ} 0' 16'' \\ c_2 &= 119^{\circ} 29' 2'' \\ \beta_2 &= 43^{\circ} 49' 58'') \end{aligned}$$

$$f) \alpha = 142^{\circ} 21' 30'', \beta = 107^{\circ} 0' 51''$$

$$\begin{aligned} (\text{Odp.: } a &= 145^{\circ} 54' 11'' \\ b &= 118^{\circ} 37' 40'' \\ c &= 66^{\circ} 37' 29'') \end{aligned}$$

15) Rozwiązać trójkąt sferyczny ukośnokątny znając:

$$a) a = 40^{\circ} 29', b = 58^{\circ} 10', c = 34^{\circ} 3'$$

(Odpowiedź: $\alpha = 47^{\circ} 8' 24'', \beta = 106^{\circ} 25' 4'', \gamma = 39^{\circ} 12' 38''$).

$$b) \alpha = 118^{\circ} 42' 38'', \beta = 108^{\circ} 35' 24'', \gamma = 132^{\circ} 32' 46''$$

(Odpowiedź: $a = 112^{\circ} 17' 14'', b = 89^{\circ} 27' 52'', c = 128^{\circ} 59' 26''$).

$$c) a = 70^{\circ} 20' 50'', b = 38^{\circ} 28', \gamma = 52^{\circ} 30'$$

(Odpowiedź: $\alpha = 107^{\circ} 47' 5'', \beta = 38^{\circ} 58' 25'', c = 51^{\circ} 41' 14''$).

$$d) c = 142^{\circ} 30' 45'', \alpha = 138^{\circ} 54' 56'', \beta = 135^{\circ} 34' 37''$$

(Odpowiedź: $a = 111^{\circ} 12' 23'', b = 96^{\circ} 47' 13'', \gamma = 154^{\circ} 35' 40''$).

$$e) a = 29^{\circ} 54' 40'', b = 147^{\circ} 27' 17'', \alpha = 65^{\circ} 58' 21''$$

(Odpowiedź: $\beta_1 = 80^{\circ} 11', c_1 = 171^{\circ} 2' 10'', \gamma_1 = 163^{\circ} 25' 8'',$
 $\beta_2 = 99^{\circ} 49', c_2 = 159^{\circ} 49' 14'', \gamma_2 = 140^{\circ} 50' 36''$).

$$f) \alpha = 102^{\circ} 18' 22'', \beta = 132^{\circ} 43' 39'', a = 63^{\circ} 14' 11''$$

$$(\text{Odpowiedź: } b = 137^{\circ} 50', c = 137^{\circ} 32' 51'', \gamma = 132^{\circ} 23' 20'').$$

§ 41. 16. Ile wynoszą kąty dwuścienne w dwunastościanie umiarowym? (Kąty płaskie wynoszą po 108°).

17. W narożu trójsściennem kryształu zmierzono trzy kąty dwuścienne: wynoszą po 120° . Obliczyć kąty płaskie.

18. Obliczyć rzut kąta 54° na płaszczyznę, do której jedno ramię jest nachylone pod kątem 48° a drugie pod kątem 65° .

19. Zmierzono kąt wzniesienia dwóch gwiazd: $\alpha = 34^{\circ} 28', \beta = 63^{\circ} 50'$ i kąt zawarty między promieniami łączącymi oko z temi gwiazdami $\varphi = 38^{\circ} 24'$. Sprowadzić ten kąt do poziomu (t. j. podać różnicę azymutów tych gwiazd).

20. Znajac wszystkie krawędzie czworoboku nieumiarowego obliczyć jego powierzchnię i objętość: $a = 5 \text{ cm}, b = 9 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm}, d = 12 \text{ cm}, e = 10 \text{ cm}, f = 11 \text{ cm}$.

21. W umiarowym ostrosłupie czworobocznym krawędzie podstawy wynoszą po 10 cm i wysokość 10 cm . Obliczyć kąt dwuścienny przy krawędzi bocznej.

22. Znajac stosunki osi krystalograficznych dla siarki:

$$m:n:p = 0:8138:1:19076$$

obliczyć kąty płaskie i dwuścienne ostrosłupa podwójnego czworobocznego.

§ 42. 23. Obliczyć odległość miast o znanej długości i szerokości geograficznej:

$$a) \text{Kraków } (\varphi_1 = 50^{\circ} 3' 36'', \lambda_1 = 19^{\circ} 57' 41'')$$

$$\text{Paryż } (\varphi_2 = 49^{\circ} 50' 13'', \lambda_2 = 2^{\circ} 20' 15'');$$

$$b) \text{Lwów—Warszawa } (\varphi \text{ i } \lambda \text{ odczytaj z mapy!});$$

$$c) \text{Londyn } (\varphi_1 = 51^{\circ} 31' 30'', \lambda_1 = -0^{\circ} 9' 24''),$$

$$\text{Wenecja } (\varphi_2 = 45^{\circ} 25' 50'', \lambda_2 = 12^{\circ} 21' 14'').$$

24. Obliczyć pole trójkąta sferycznego na kuli ziemskiej, którego wierzchołkami są: Poznań, Wilno, Kijów. Dane λ i φ odczytaj z mapy Polski. Jaką część całej kuli ziemskiej zajmuje ten trójkąt?

25. Jaki błąd popełniamy obliczając powierzchnię trójkąta o bokach 400 km na kuli ziemskiej jako płaszczyznę?

26. Koło wielkie przecina równik pod kątem $\varepsilon = 23^{\circ} 37'$. Pod jakim kątem przetnie to koło równoleżnik leżący w szerokości geograficznej $\varphi = 10^{\circ}$?

27. Okręt płynie po kole wielkim z portu o współrzędnych λ_1, φ_1 do portu o współrzędnych λ_2, φ_2 . W jakiej szerokości geograficznej przetnie okręt południk o znanej długości geograficznej λ ? n.p. Nowy York ($\lambda_1 = -73^{\circ} 55', \varphi_1 = 40^{\circ} 43'$), Kapstadt ($\lambda_2 = -18^{\circ} 25', \varphi_2 = -33^{\circ} 55'$). W jakiej szerokości geograficznej przetnie okręt południk zerowy? W jakiej długości geograficznej przetnie równik?

§ 43. 28. Zmierzono wysokość pewnej gwiazdy $h = 35^{\circ} 46' 28''$ i azymut $a = 76^{\circ} 45' 26''$. Obliczyć jej zboczenie i kąt godziny znając szerokość geograficzną miejsca obserwacji $\varphi = 50^{\circ} 20'$.

29. Gwiazda Arctur ma zboczenie $\delta = 19^{\circ} 42'$. Obserwator znajdujący się w szerokości geograficznej $\varphi = 34^{\circ} 16'$ widzi tę gwiazdę pod kątem wzniesienia $h = 27^{\circ} 56'$. Obliczyć kąt godzinny i azymut tej gwiazdy.

30. Celem oznaczenia szerokości geograficznej pewnego miejsca zmierzono dla gwiazdy Rigel (zboczenie jej $\delta = -8^{\circ} 19'$) kąt godzinny $t = 0^{\text{h}} 11^{\text{m}} 20^{\text{s}}$ i wysokość $h = 45^{\circ} 45'$. Jaka jest szerokość geograficzna tego miejsca?

32. W miejscu o znanej szerokości geograficznej $\varphi = 50^{\circ}$ zmierzono kąt godzinny $t = 8^{\text{h}} 25^{\text{m}}$ i zboczenie $\delta = 45^{\circ} 20'$ pewnej gwiazdy. Obliczyć jej azymut i wysokość. O ile powinny się odchylić igła magnetyczna od płaszczyzny ZGO (fig. 98), gdyby jej deklinacja była $= 0$?

32. Aby zbadać, która jest godzina czasu gwiazdowego w Warszawie ($\varphi = 52^{\circ} 13' 5''$), zwrócono lunetę na punkt barana. Wysokość tego punktu była $h = 21^{\circ} 43' 30''$; która godzina była wtedy?

33. Gwiazda o znanym zboczeniu $\delta = 34^{\circ} 36' 15''$ i znanej rektascenzji $\alpha = 28^{\circ} 47' 30''$ znajduje się w wysokości $h = 45^{\circ} 39' 10''$. Obliczyć czas gwiazdowy, znając szerokość geograficzną miejsca obserwacji: $\varphi = 49^{\circ}$. (Na takich spostrzeżeniach polega poprawienie zegarów).

34. Obliczyć czas wschodu i zachodu słońca w dniu, w którym jego zboczenie wynosi $16^{\circ} 24' 5''$ dla Krakowa ($\varphi = 50^{\circ} 3' 36''$). W którym miejscu horyzontu słońce wtedy wschodzi? Jaki jest łuk dzienny słońca?

Rozwiązania ćwiczeń:

$$1. a' = 3135.2 \text{ km}, b' = 14766 \text{ km}, c' = 9386.8 \text{ km}$$

$$2. a^0 = 54', b^0 = 2^0 15', c^0 = 1^0 15' 36''.$$

3. Wskazówka: od jednego wierzchołka do drugiego można się dostać albo drogą najkrótszą, albo jej dopełnieniem do 360° . Kombinując drogi najkrótsze z ich dopełnieniami otrzymamy 8 trójkątów. Rozważyć osobno trójkąty o 3 bokach większych od 180° , potem o dwóch bokach $> 180^{\circ}$ i o 1 boku $> 180^{\circ}$.

4. Wskazówka: jeżeli $\alpha < 90^\circ$, to $a < c$. Dodając do pierwszej nierówności obustronnie 90° otrzymamy $\alpha + 90^\circ < 180^\circ$ a stąd — wobec twierdzenia udowodnionego w § 38 — $a + c < 180^\circ$ czyli $c < 180^\circ - a$. Podobnie dla $\alpha > 90^\circ$.

5. Wskazówka: (por. fig. 88) $\gamma' = \angle C' = C_a B A C_b$, bo C' jest biegunem koła $C_a B A C_b$. Ale $C_b A = 90^\circ - AB$, $C_a B = 90^\circ - AB$ a więc $C_a B A C_b = 90^\circ - AB + AB + 90^\circ - AB = 180^\circ - AB = 180^\circ - c$.

6. Wskazówka: wykonać rachunki zaznaczone na str. 165.

7. Wskazówka: wykreślić naroże trójsienne $O(ABC)$ o kącie dwuciennym prostym przy OC i odpowiedni trójkąt sferyczny, podobnie jak na fig. 91. Z wierzchołka B trójkąta sferycznego wykreślić $BD \perp OC$ i $BE \perp OA$. Wyrażając $\cos c$ z trójkąta OBE a boki OE i OB z trójkątów OED i OBD , otrzymamy $\cos c = \cos a \cdot \cos b$. Podobnie dowodzi się inne związki.

9. Dzieliąc 1-sze równanie przez 2-gie, 3-cie przez 4-te, 3-cie przez 1-sze i 4-te przez 2-gie otrzymamy cztery wzory Nepera. Np.

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}}$$

10. Wskazówka: ze środka O koła wpisanego wykreślamy łuk $\rho = OD$ prostopadłe do boku AB . Rozwiązujemy trójkąt sferyczny prostokątny OAD (§ 40, wzór 7). Podobnie jak w § 29 wykazujemy, że $AD = s - a$.

11. Wskazówka: ze środka O koła opisanego wykreślamy łuk $OD \perp AB$ i łuk $OA = r$. Rozwiązując trójkąt prostokątny OAD (§ 40, wzór 9) otrzymamy $\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \cos \angle DAO$. Oznaczając $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$, okazujemy, że $\angle DAO = \sigma - \gamma$. Następnie stosujemy do $\operatorname{tg} \frac{c}{2}$ wzór połówkowy dla boków (z § 39).

12. Wskazówka: z dowolnego punktu P prostej wykreślić prostopadłe do trzech płaszczyzn, wyznaczonych przez osie i uzupełnić figurę do prostopadłościanu. $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$, gdzie x, y, z są rzutami odcinka OP na osie. Wstawiając $x = OP \cdot \cos \alpha$ i t. d. otrzymamy żądany wzór.

13. Wskazówka; wyrazić dane łuki w stopniach. Łącząc P ze środkiem O kuli stosujemy do prostej OP wzór z poprzedniego ćwiczenia. $d = 1.052 \text{ m}$.

15. a) $P = 0.22285$. 16. $\alpha = 116^\circ 33' 54''$; wykreślić kulę około jednego naroża, to otrzymamy trójkąt sferyczny o znanych bokach.

17. $a = 109^\circ 28' 17''$. 18. $\alpha = 107^\circ 38' 52''$. 19. $\varphi' = 40^\circ 42' 42''$.

20. Wskazówka: obliczyć najpierw kąty płaskie w jednym narożu a następnie zastosować wzór na V z § 41. $V = 35.188 \text{ cm}^3$.

21. Wskazówka: rozwiązać naroże (czyli odp. trójkąt sferyczny) utworzone przez dwie krawędzie boczne i wysokość, obliczywszy poprzednio kąt zawarty między wysokością a krawędzią boczną. $\alpha = 101^\circ 32'$.

22. $a = 75^\circ 39' 34''$, $b = 68^\circ 53' 34''$, $c = 35^\circ 26' 52''$, $\alpha = 85^\circ 9' 20''$, $\beta = 106^\circ 22' 4''$, $\gamma = 143^\circ 22' 56''$.

23. a) $\widehat{KP} = 1259.6 \text{ km}$. 23. b) $\widehat{LW} = 341 \text{ km}$. 23. c) $d = 1155.7 \text{ km}$.

24. $P = 171150 \text{ km}^2$, $s = 1:2986$. Wskazówka: obliczyć boki PK , PW , KW według § 42 a następnie kąty z twierdzenia połówkowego.

25. Wskazówka: obliczyć najpierw pole P_1 trójkąta płaskiego równobocznego o boku 400 km a następnie rozwiązać trójkąt sferyczny o bokach 400 km , t. j. $a = 3^\circ 36'$. Otrzymamy $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ 1' 56''$ a stąd pole P_2 . Różnica $d = P_1 - P_2 = 665 \text{ km}^2$.

26. Wskazówka: rozwiązać trójkąt prostokątny o kącie ostrym ε i przyprostokątnej przeciwległej φ ; drugi kąt ostry wynosi $90^\circ - \alpha$. $\alpha = 21^\circ 19'$.

27. $\varphi = -20^\circ 32' 48''$, $\lambda = -20^\circ 28' 30''$. Wskazówka: w trójkącie sferycznym: biegun północny (N) — Nowy York (A) — Kapstat (B) obliczyć bok $AB = 112^\circ 56'$, a następnie $\angle BAN = 115^\circ 48' 50''$.

W trójkącie ANC , gdzie C jest punktem przecięcia linii AB z południkiem zerowym, obliczamy $\angle ACN = 46^\circ 46' 30''$ a następnie $NC = 110^\circ 32' 48''$; $\varphi = 90^\circ - NC$.

Do obliczenia położenia punktu D , w którym AB przecina równik, rozwiązuje się trójkąt NAD , w którym znamy $NA = 90^\circ - \varphi_1$, $ND = 90^\circ$ i $\angle A = 115^\circ 48' 50''$. Otrzymamy $\angle AND = 53^\circ 26' 30''$, a stąd λ .

28. $\delta = 19^\circ 21'$, $t = 56^\circ 50'$. 29. $t = 69^\circ 0' 27''$, $a = 95^\circ 46'$.

30. $\varphi = 36^\circ 30' 45''$. Wskazówka: po obliczeniu kąta a z twierdzenia wstaw wykreślić wysokość sferyczną GA z punktu G na (przedłużony) bok PZ i z trójkątów sferycznych prostokątnych obliczyć PA i ZA , to $90^\circ - \varphi = PZ = PA - ZA$.

31. $h = 16^\circ 7'$, $a = 36^\circ 9' 48''$. Igła magnetyczna odchyli się o kąt a od płaszczyzny ZGO .

32. $T_1 = 3^h 31^m 17^s$, $T_2 = 24^h - T_1$.

33. $T_1 = 5^h 47^m 2^s$, $T_2 = 22^h 3^m 18^s$.

34. $7^h 22^m 16^s$ czasu gwiazdowego przed południem i po południu. Łuk dzienny $2t = 221^\circ 8' 10''$. $GW = GE = 26^\circ 5' 35''$.

WSKAZÓWKI BIBLIOGRAFICZNE DO DALSZYCH STUDJÓW.

Do pogłębienia studjum trygonometrii posiadamy liczne podręczniki zarówno w naszym języku jak i w językach obcych. I tak obszerniejszy — choć nieco starszy — wykład naszego przedmiotu podaje:

A. Czajewicz. *Trygonometria płaska i kulista.* Warszawa, 1891 (Biblioteka matematyczno-fizyczna. Serja III. Tom VI).

Jeszcze głębiej sięga obszerniejszy podręcznik **W. Hobsona**, którego przekład z języka angielskiego przyswojono naszej literaturze, p. t.

E. W. Hobson. *Trygonometria płaska* (przełożył W. Wojtowicz). Warszawa 1917.

Z podręczników obcych można polecić następujące:

C. Bourlet *Leçons de trigonometrie rectiligne.* 3 éd. Paris, 1908.

R. Moritz. *Plane trigonometry.* New-York, 1911.

G. M. Testi. *Trigonometria piana e sferica.* Livorno, 1905.

Zwięzły ale bardzo dobry podręcznik trygonometrii ukazał się w známym zbiorze Göschena p. t.

G. Hessenberg. *Ebene und sphärische Trigonometrie.* Leipzig. 2. Aufl. 1904 (Sammlung Göschel Nr. 99).

Obszerny rozdział poświęcono trygonometrii w podręczniku matematyki elementarnej p. t.

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. T. 2-gi. **H. Weber und J. Wellstein.** 2. Aufl. Leipzig, 1907. (str. 301–438).

Wszystkie wymienione dotychczas podręczniki zajmują się głównie teoretyczną stroną przedmiotu, zwracając mało uwagi na potrzeby inżyniera, geometry, astronoma, słowem na stosowaną matematykę. Pod względem praktycznym najwięcej można się nauczyć z doskonałej książki **Hammera**, p. t.

E. Hammer. *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* Stuttgart. 3. Auflage. 1907.

Istnieją również obszerne zbiory zadań z trygonometrii, n. p.:

F. Reidt. *Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie.* 2 tomy. 5. wydanie Lipsk, 1907.

H. Lieber und F. v. Lühmann. *Trigonometrische Aufgaben.* 3. Aufl. Wiele interesujących ćwiczeń zwłaszcza ze stereometrii można też znaleźć w podręczniku polskim p. t.

Z. Gabszewicz. *Trygonometria.* Wyd. 2. Warszawa, 1918.

Do historii trygonometrii posiadamy specjalne dwutomowe dzieło p. t.

A. v. Braunmühl. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Leipzig, 1900, 1903.

SPIS RZECZY.

Rozdział I. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

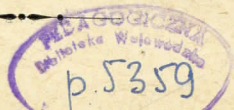
	Strona
§ 1. Wstęp	3
§ 2. Związki między elementami trójkąta prostokątnego	4
§ 3. Sinus (wstawa) kąta ostrego	6
§ 4. O graficznem przedstawieniu funkcji	11
§ 5. Graficzne przedstawienie funkcji sinus i interpolacja tablic	14
§ 6. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych przy pomocy funkcji sinus	16
Ćwiczenia I	18
§ 7. Dostawa kąta (cosinus kąta)	20
Ćwiczenia II	24
§ 8. Styczna kąta (tangens kąta)	26
§ 9. Dotyczna (cotangens) i pozostałe funkcje	31
Ćwiczenia III	34
§ 10. Zestawienie określeń i zasadniczych własności funkcji trygonometrycznych	37
§ 11. Systematyczne rozwiązywanie trójkątów prostokątnych	39
§ 12. Łukowa miara kątów. Wartości funkcji trygonometrycznych dla małych kątów	43
§ 13. Zadania sprowadzające się do rozwiązania trójkąta prostokątnego	47
Ćwiczenia IV	56

Rozdział II. Rozszerzenie pojęcia funkcji trygonometrycznych i badanie ich własności (gonjometrija).

§ 14. Funkcje trygonometryczne kątów 0° do 360°	64
§ 15. Graficzny obraz funkcji sinus i cosinus	69
§ 16. Wzory redukcyjne	73
§ 17. Graficzne przedstawienie funkcji tangens i pozostałych funkcji	76
§ 18. Zasadnicze prawo rzutów	80
§ 19. Teorem dodawania funkcji trygonometrycznych	82
§ 20. Mnożenie i dzielenie kąta	85
§ 21. Nierówności dla funkcji sinus. Obliczenie tablic	89
§ 22. Zamiana sum i różnic na iloczyny	93
Ćwiczenia V	94
§ 23. Równania gonjometryczne	100
Ćwiczenia VI	107

Rozdział III. Rozwiązywanie trójkątów ukośnokątnych.

§ 24. Twierdzenie wstaw	111
§ 25. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku II i III	112
§ 26. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku I. Twierdzenie stycznych	116



	Stronā
§ 27. Rozwiązywanie trójkątów w przypadku IV. Twierdzenie Carnot'a	118
§ 28. Pole trójkąta	122
§ 29. Koło opisane na trójkącie i koło wpisane	123
§ 30. Symetralna kąta w trójkącie	125
§ 31. Przykłady rozwiązywania trójk. z elementów, które nie są ich bokami lub kątami	127
§ 32. Rozwiązywanie czworokątów	132
Ćwiczenia VII	133

Rozdział IV. Zastosowanie trygonometrii do miernictwa.

§ 33. O zadaniach i metodach miernictwa	143
§ 34. Obliczanie wysokości względnej	145
§ 35. Obliczanie odległości poziomych	146
§ 36. Triangulacja	151
Ćwiczenia VIII	152

Rozdział V. Trygonometria sferyczna.

§ 37. Cel trygonometrii sferycznej. Uwagi historyczne	157
§ 38. Elementarne własności trójkątów sferycznych	159
§ 39. Związki między elementami trójkątów sferycznych	161
§ 40. Trójkąt sferyczny prostokątny	167
§ 41. Zastosowanie trygonometrii sferycznej do zagadnień stereometrycznych . .	169
§ 42. Zastosowanie trygonometrii do zagadnień geograficznych	171
§ 43. Zastosowanie trygonometrii sferycznej do astronomji	172
Ćwiczenia IX	178
Wskazówki bibliograficzne do dalszych studjów	184
Spis rzeczy	185