

S. STECKEL

ALGEBRA

PODRĘCZNIK DLA LICEÓW
OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH

(KURS DWULETNI)



PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH
WARSZAWA 1949

Biblioteka Pedagogiczna CEN
nr inw.: P - 270



BC p. 270

S. STECKEL

ALGEBRA

PODRĘCZNIK DLA LICEÓW
OGÓLNOKSZTAŁCĄCYCH

(KURS DWULETNI)

WYDANIE NOWE



PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH
WARSZAWA 1949



p. 270

Zatwierdzone pismem Ministerstwa Oświaty
z dnia 24 stycznia 1949 r. Nr VI Oc-2713/48
jako podręcznik dla liceów ogólnokształcących

Wydrukowano do druku: 28. IV. 1949 Zarząd. 335/II — E-01919 Nakład 20 000 egz.
Arkuszy druk: 24 1/4 Pap. druk. sat. w form. 61 x 86 cm, 6 Zamówienie Nr 3474
ZAKŁ. GRAF. PAŃSTWOWYCH ZAKŁADÓW WYDAWNIKOWYCH — BYDGOSZCZ

Podręcznik jest opracowany zgodnie z programem liceów ogólnokształcących z roku 1936.

Na początku każdego paragrafu wskazano, dla jakiego typu liceów jest przeznaczony materiał naukowy tego paragrafu:

- K — typ klasyczny,
- H — typ humanistyczny lub przyrodniczy,
- M — typ matematyczno-fizyczny.

Litera umieszczona w nawiasie (okrągłym) oznacza, że materiał naukowy jest obowiązkowy w odpowiednim typie liceum; natomiast litera umieszczona w klamrze [kwadratowej] oznacza, że materiał naukowy zawiera jeden z tematów pozostawionych w odpowiednim typie liceum do wyboru nauczyciela.

Tak np. [K] (H) (M) oznacza, że dany materiał naukowy w liceum klasycznym jest pozostawiony do uznania nauczyciela, natomiast obowiązuje w liceum humanistycznym lub przyrodniczym, a także w liceum matematyczno-fizycznym. Natomiast symbol [M] oznacza, że dany materiał naukowy zawiera jeden z tematów przeznaczonych w programie liceum matematyczno-fizycznego do wyboru nauczyciela, natomiast w programach pozostałych typów liceum materiał ten jest pominięty.

Oznaczenia powyższe dotyczą nie tylko tekstu paragrafu, ale i następujących po tym paragrafie ćwiczeń.

Ćwiczenia oznaczone gwiazdką * przeznaczone są dla uczniów zdolniejszych.

[: Niektóre trudniejsze sformułowania i dowody są ujęte w klamry. :]

CZĘŚĆ I

ROZDZIAŁ I

Nierówności.

(K) (H) (M)

§ 1. Własności zasadnicze nierówności.

Jeżeli dwie liczby rzeczywiste *) a i b nie są równe, wówczas zachodzi jedna z dwóch ewentualności: albo a jest większe od b (oznaczamy to w ten sposób: $a > b$), albo też a jest mniejsze od b (co oznaczamy w ten sposób: $a < b$).

Jest rzeczą jasną, że nierówność:

$$a > b$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią, a nierówność:

$$a < b$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a - b$ jest liczbą ujemną.

Opierając się na tej prostej uwadze, łatwo ustalamy następujące własności:

Własność I. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego c nierówność:

$$a + c > b + c.$$

*) Liczba rzeczywista jest to liczba wymierna lub niewymierna — dodatnia, ujemna lub zero.

Istotnie, gdy różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią, wówczas także różnica $(a + c) - (b + c)$ jest dodatnia, gdyż:

$$(a + c) - (b + c) = a - b$$

a w myśl założenia jest to liczba dodatnia. Własność tę wyrażamy słowami:

Do obu stron nierówności wolno dodać tę samą liczbę.

Własność II. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego c nierówność:

$$a - c > b - c.$$

Własność II wynika bezpośrednio z własności I, gdyż odjęcie liczby c jest równoważne z dodaniem liczby $-c$. Słowami:

Od obu stron nierówności wolno odjąć tę samą liczbę.

Własność III. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego dodatniego c nierówność:

$$a c > b c.$$

Istotnie, gdy różnica $a - b$ jest dodatnia i c jest liczbą dodatnią, wówczas także różnica $a c - b c$ jest dodatnia, gdyż:

$$a c - b c = c (a - b),$$

iloczyn zaś dwóch liczb dodatnich jest dodatni. Słowami:

Obie strony nierówności wolno pomnożyć przez tę samą liczbę dodatnią.

Własność IV. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego dodatniego c nierówność:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Własność IV wynika bezpośrednio z własności III, gdyż dzielenie przez liczbę dodatnią c jest równoważne z mnożeniem przez liczbę dodatnią $\frac{1}{c}$. Słowami:

Obie strony nierówności wolno podzielić przez tę samą liczbę dodatnią.

Przykład. Nierówność:

$$10 > 7$$

pociąga za sobą nierówności:

$$10 + 4 > 7 + 4, \text{ tj. } 14 > 11$$

$$10 - 4 > 7 - 4, \text{ tj. } 6 > 3$$

$$10 \cdot 4 > 7 \cdot 4, \text{ tj. } 40 > 28$$

$$\frac{10}{4} > \frac{7}{4}, \text{ tj. } 2\frac{1}{2} > 1\frac{3}{4}$$

Własność V. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego ujemnego c nierówność:

$$a c < b c.$$

Istotnie, skoro różnica $a - b$ jest dodatnia, a liczba c jest ujemna, wówczas różnica $a c - b c$ jest ujemna, gdyż

$$a c - b c = c (a - b),$$

iloczyn zaś liczby ujemnej c i dodatniej $a - b$ jest ujemny. Więc:

Mnożąc obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić kierunek nierówności.

Własność VI. Nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego ujemnego c nierówność:

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Własność VI wynika bezpośrednio z własności V, gdyż dzielenie przez liczbę ujemną c jest równoważne mnożeniu przez liczbę ujemną $\frac{1}{c}$. Słowami:

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę ujemną musimy zmienić kierunek nierówności.

Przykład. Nierówność:

$$10 > 7$$

pociąga za sobą nierówność:

$$10 \cdot (-1) < 7 \cdot (-1), \text{ tj. } -10 < -7$$

$$\frac{10}{-2} < \frac{7}{-2}, \text{ tj. } -5 < -3\frac{1}{2}$$

Własność VII. Nierówności:

$$a > b$$

$$c > d$$

pociągają za sobą nierówność:

$$a + c > b + d.$$

Istotnie, skoro obie różnice: $a - b$ i $c - d$ są dodatnie, wówczas także różnica $(a + c) - (b + d)$ jest dodatnia, gdyż

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d),$$

suma zaś dwóch liczb dodatnich jest dodatnia.

Własność VII wyrażamy słowami krótko w ten sposób:

Nierówności tego samego kierunku wolno dodawać stronami.

Własność VIII. Jeżeli liczby: a, b, c, d są dodatnie, wówczas nierówności:

$$a > b$$

$$c > d$$

pociągają za sobą nierówność:

$$ac > bd.$$

Istotnie, wobec $c > 0$, mamy: $ac > bc$, wobec $b > 0$ mamy: $bc > bd$, z czego wynika, że $ac > bd$. Słowami:

Nierówności tego samego kierunku, których lewe i prawe strony są dodatnie, wolno mnożyć stronami.

Przykłady:

1. Nierówności:

$$6 > 4$$

$$1 > -\frac{1}{2}$$

pociągają za sobą nierówność:

$$6 + 1 > 4 - \frac{1}{2}, \text{ tj. } 7 > 3\frac{1}{2}.$$

2. Nierówności:

$$8 > 7$$

$$5 > 4$$

pociągają za sobą nierówność:

$$8 \cdot 5 > 7 \cdot 4, \text{ tj. } 40 > 28.$$

Własność IX. Jeżeli liczby a i b są dodatnie, wówczas nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego naturalnego n nierówność:

$$a^n > b^n.$$

Własność IX wynika, jako łatwy wniosek, z własności VIII.

Własność X. Jeżeli liczby a i b są dodatnie, wówczas nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą dla każdego naturalnego n nierówność:

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Istotnie, gdyby było: $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$, to podnosząc obie strony do n -tej potęgi mielibyśmy, w myśl własności IX: $a \leq b$, co jest sprzeczne z założeniem.

Przykłady:

1. Nierówność:

$$4 > 3,5$$

pociąga za sobą nierówności:

$$4^2 > 3,5^2, \text{ tj. } 16 > 12,25$$

$$4^3 > 3,5^3, \text{ tj. } 64 > 42,875$$

itd.

2. Nierówność:

$$50 > 49$$

pociąga za sobą nierówność:

$$\sqrt{50} > \sqrt{49}, \text{ tj. } \sqrt{50} > 7.$$

Ćwiczenia.

1. Wykaż, że dla każdego a spełnione są nierówności:

$$a) \ 2a + 1 > 2 \left(a + \frac{1}{4}\right)$$

$$b) \ 3a + 5 > 3 \left(a + 1\right) + 1$$

$$c) \ a(a + 2) < a^2 + 2a + 1$$

2. Wykaż, że nierówność:

$$a > 0$$

pociąga za sobą nierówność:

$$6a + 4 > 5a + 4.$$

3. Wykaż, że nierówność:

$$3 < 3 + a^2$$

spełniona jest dla każdego a , różnego od zera.

4. Wykaż, że nierówność:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

jest spełniona, gdy a jest różne od b .

*5. Opierając się na zadaniu poprzednim wykaż, że

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca,$$

gdy liczby a, b, c nie są wszystkie równe.

6. Wykaż, że gdy $a < b$, wówczas:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

7. Wykaż, że gdy $a < b$, wówczas:

$$a < \frac{7a+b}{8} < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+3b}{4} < \frac{a+7b}{8} < b$$

8. Wykaż, że gdy a i b są dodatnie, wówczas nierówność:

$$a > b$$

pociąga za sobą nierówność:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

9. Wykaż, że zachodzi nierówność:

$$3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16$$

(K) (H) (M)

§ 2. Rozwiązywanie nierówności w najprostszych wypadkach.

Zajmiemy się nierównościami, w których czy to strona lewa, czy to prawa lub też obie są wyrażeniami algebraicznymi zawierającymi jedną zmienną.

Mogą zachodzić trzy przypadki następujące:

a) Nierówność jest spełniona dla każdej wartości zmiennej. Taką nierównością jest np. następująca:

$$x + 4 > x + 1.$$

Istotnie, wartość lewej strony jest zawsze większa od wartości strony prawej. Nierówność taką możemy nazywać bezwarunkową.

b) Nierówność nie jest spełniona dla żadnej wartości rzeczywistej zmiennej. Taką nierównością jest np. następująca:

$$x > x + 1.$$

Istotnie, wartość lewej strony jest zawsze mniejsza, a nigdy nie jest większa od wartości strony prawej, a więc dana nierówność nie może być spełniona przy żadnej wartości x . Nierówność taką możemy nazywać sprzeczną.

c) Nierówność spełniona jest tylko dla pewnych wartości zmiennej, dla innych zaś nie. Taką nierównością jest np. następująca:

$$3x - 8 > x + 4.$$

Istotnie, jak łatwo się przekonać, dla $x = 7$ nierówność się spełnia, a dla $x = 5$ nierówność nie jest spełniona. Taką nierówność możemy nazywać warunkową.

Rozwiązać nierówność — to znaczy: znaleźć wszystkie te wartości zmiennej, które tę nierówność spełniają.

Aby rozwiązać powyższą nierówność warunkową:

$$(1) \quad 3x - 8 > x + 4,$$

zastosujemy następujące rozumowanie:

Żałómy, że x oznacza jedną z wartości, spełniających nierówność (1). Odejmując od obu stron tej nierówności wartość x otrzymujemy, w myśl własności II:

$$(2) \quad 3x - x - 8 > 4.$$

Dodając teraz do obu stron nierówności (2) wartość 8 otrzymujemy, w myśl własności I:

$$(3) \quad 3x - x > 4 + 8,$$

czyli:

$$(4) \quad 2x > 12.$$

Dzieląc obie strony nierówności (4) przez dodatnią liczbę 2 otrzymujemy, w myśl własności IV:

$$(5) \quad x > 6.$$

A więc wartość zmiennej x , która spełnia nierówność (1), musi być większa od 6. Ale i odwrotnie: każda wartość x , większa

od 6, spełnia nierówność (1). Łatwo się o tym przekonać wykonując powyższe przekształcenia w odwrotnym porządku, tj. od nierówności (5) do nierówności (1).

Rozwiązaliśmy więc nierówność (1). Jako rozwiązanie otrzymaliśmy zbiór wszystkich liczb większych od 6.

Uwaga. Przy rozwiązywaniu nierówności (1) otrzymaliśmy, jako wynik kolejnych przekształceń, szereg nierówności, które dla lepszej orientacji wypiszemy jeszcze raz:

$$(1) \quad 3x - 8 > x + 4,$$

$$(2) \quad 3x - x - 8 > 4,$$

$$(3) \quad 3x - x > 4 + 8,$$

$$(4) \quad 2x > 12,$$

$$(5) \quad x > 6.$$

Otóż nierówność (2) powstaje z nierówności (1), jeżeli od obu stron tej ostatniej odejmujemy wyraz x , innymi słowy, jeżeli w nierówności (1) przenosimy wyraz x ze strony prawej na lewą ze zmianą znaku. Podobnie nierówność (3) powstaje z nierówności (2), jeżeli do obu stron tej ostatniej dodamy wyraz 8, innymi słowy, jeżeli w nierówności (2) przenosimy wyraz -8 ze strony lewej na prawą ze zmianą znaku. Nierówność (4) powstaje z nierówności (3), jeżeli po lewej stronie tej ostatniej wykonamy redukcję. Wreszcie nierówność (5) powstaje z nierówności (4), jeżeli obie strony tej ostatniej podzielimy przez 2.

Przykład powyższy poucza nas, że przy rozwiązywaniu nierówności wykonujemy szereg przekształceń, przy czym wolno — podobnie jak w równaniach — *przenosić wyrazy z jednej strony na drugą ze zmianą znaku*.

Podamy jeszcze kilka przykładów rozwiązywania nierówności:
1. Rozwiązać nierówność:

$$\frac{2x - 3}{4} < 1.$$

Mnożąc obie strony przez dodatnią liczbę 4 otrzymujemy:

$$2x - 3 < 4.$$

Przenosząc wyraz -3 na stronę prawą ze zmianą znaku mamy:

$$2x < 7.$$

Dzieląc wreszcie obie strony przez dodatnią liczbę 2 otrzymujemy:

$$x < 3\frac{1}{2}.$$

Jako rozwiązanie danej nierówności otrzymaliśmy więc zbiór wszystkich liczb mniejszych od $3\frac{1}{2}$.

2. Rozwiązać nierówność:

$$\frac{10x - 1}{3} > 2x + 1.$$

Aby uwolnić się od ułamka, mnożymy obie strony nierówności przez dodatnią liczbę 3 i otrzymujemy:

$$10x - 1 > 6x + 3.$$

Przenosimy wyraz niewiadomy na lewą stronę, wiadomy zaś na prawą (ze zmianą znaków) i otrzymujemy:

$$10x - 6x > 3 + 1,$$

czyli po redukcji:

$$4x > 4.$$

Dzieląc obie strony nierówności przez dodatnią liczbę 4 otrzymujemy ostatecznie:

$$x > 1.$$

3. Rozwiązać nierówność:

$$\frac{5 + 3x}{2} > \frac{4x - 10}{3} + x.$$

Aby uwolnić się od ułamków, mnożymy obie strony nierówności przez dodatnią liczbę 6 i otrzymujemy:

$$15 + 9x > 8x - 20 + 6x.$$

Porządkujemy nierówność przenosząc wyrazy niewiadome na lewą, a wyraz wiadomy na prawą stronę (oczywiście ze zmianą znaków). Otrzymujemy:

$$9x - 8x - 6x > -20 - 15$$

czyli po redukcji:

$$-5x > -35.$$

Dzieląc obie strony przez ujemną liczbę -5 musimy zmienić kierunek nierówności. Otrzymujemy więc ostatecznie:

$$x < 7.$$

4. Rozwiązać nierówność podwójną:

$$1 < 3x - 8 < 5.$$

Nierówność ta (podwójna) jest równoznaczna z układem dwóch nierówności (pojedynczych):

$$3x - 8 > 1,$$

$$3x - 8 < 5,$$

które jednocześnie winny być spełnione. Rozwiązując pierwszą z tych nierówności otrzymujemy: $x > 3$; rozwiązując drugą otrzymujemy: $x < 4\frac{1}{3}$. Uzgadniając te wyniki otrzymujemy ostatecznie:

$$3 < x < 4\frac{1}{3}.$$

Ćwiczenia.

10. Rozwiąż nierówności:

a) $4x - 3 < x + 6$

b) $5x + 1 < x + 7$

c) $\frac{5}{4}x + 1 > x - 3$

d) $\frac{1}{2}x - 6 > 2x - 8$

e) $\frac{x+1}{6} < x + 2$

f) $\frac{4x+1}{2} > \frac{x+4}{5}$

g) $\frac{3x-7}{2} + x < 2(x-1)$ h) $(x-4)^2 + 6 > x^2 + 2x + 2$

i) $(3x-1)^2 + (4x-1)^2 < (5x-1)^2$

11. Rozwiąż nierówności podwójne:

a) $1 < 3x < 18$ b) $1 < 2x - 5 < 4$

c) $0 < 3x - 1 < 11$ d) $-1 < 5 - 2x < 6$

e) $-5 < \frac{4-x}{3} < 0$

12. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 3.$$

Oblicz, dla jakich wartości x przybiera ta funkcja:

a) wartość większą od 5,

b) wartość mniejszą od -2 ,

c) wartość dodatnią, ale mniejszą od jedności.

13. Wykaż, że nierówność:

$$x^2 + 4 < 4x$$

nie jest spełniona dla żadnego x .

Wskazówka. Przenieść $4x$ z prawej strony na lewą i otrzymać trójmian odpowiednio przekształcić.

14. Dane jest równanie:

$$2x - m = 3(m - 1) - x.$$

1^o. Rozwiąż to równanie (względem x).

2^o. Dla jakich wartości m pierwiastek x tego równania przybiera wartość większą od 1?

15. Dane jest równanie:

$$x^2 - 6x + (m - 1) = 0.$$

1^o. Dla jakich wartości m równanie to posiada dwa pierwiastki?

2^o. Dla jakich wartości m równanie nie posiada żadnego pierwiastka?

[M]

§ 3. Nierówności ułamkowe.

Zajmiemy się teraz nierównościami, w których czy to strona lewa, czy to prawa lub też obie są wyrażeniami ułamkowymi zawierającymi zmienną w mianowniku.

1. Rozwiązać nierówność:

$$\frac{3x - 2}{x - 4} < 1.$$

Przed wszystkim należy zastrzec, że $x - 4 \neq 0$, gdyż w przeciwnym przypadku ułamek powyższy nie miałby sensu liczbowego.

Nie możemy tu uwolnić się od ułamka mnożeniem obu stron nierówności przez $(x - 4)$, gdy wyrażenie $x - 4$ może przybierać zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, wiemy zaś z § 1, że obie strony nierówności wolno mnożyć (albo dzielić) tylko przez liczbę o znanym znaku, tzn. bądź przez liczbę dodatnią (i wówczas zachowujemy kierunek nierówności), bądź przez liczbę ujemną (i wówczas zmieniamy kierunek nierówności na przeciwny).

Damy sobie radę w inny sposób. Przenosimy w danej nierówności wyraz 1 ze strony prawej na lewą i otrzymujemy:

$$\frac{3x - 2}{x - 4} - 1 < 0,$$

skąd po wykonaniu działań mamy:

$$\frac{2x + 2}{x - 4} < 0.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $\frac{1}{2}$ otrzymujemy:

$$\frac{x + 1}{x - 4} < 0.$$

Licznik $x + 1$ przy $x = -1$ staje się równy 0, przy mniejszych wartościach x licznik jest ujemny, a przy większych — dodatni. Co do mianownika $x - 4$ zastrzeżliśmy, że mianownik

nie może przybierać wartości zerowej; otóż przy $x = 4$ mianownik staje się równy 0 i ułamek traci sens liczbowy, przy mniejszych wartościach x mianownik jest ujemny, a przy większych — dodatni.

Otrzymane wyniki zestawiamy w tabelce:*)

	$x + 1$	$x - 4$	$\frac{x + 1}{x - 4}$
$x > 4$	+	+	+
$x = 4$	+	0	#
$-1 < x < 4$	+	-	-
$x = -1$	0	-	0
$x < -1$	-	-	+

Widzimy więc, że dana nierówność spełnia się, gdy

$$-1 < x < 4.$$

2. Rozwiązać nierówność:

$$\frac{4 - 5x}{3 + 2x} < 0.$$

W liczniku i w mianowniku wyłączamy współczynniki przy zmiennej x przed nawias:

$$\frac{-5(x - \frac{4}{5})}{2(x + \frac{3}{2})} < 0.$$

Mnożąc obie strony nierówności przez liczbę ujemną $-\frac{2}{5}$ i zmieniając kierunek nierówności na przeciwny otrzymujemy:

$$\frac{x - \frac{4}{5}}{x + \frac{3}{2}} > 0.$$

*) W tabelce tej wartości x wzrastają z dołu ku górze.

Ułamek ma sens liczbowy, o ile jego mianownik $x + \frac{3}{2}$ nie przybiera wartości zerowej.

Zbadajmy znaki licznika i mianownika. Licznik $x - \frac{4}{5}$ przy $x = \frac{4}{5}$ staje się równy 0, przy mniejszych wartościach x licznik jest ujemny, przy większych — dodatni. Mianownik $x + \frac{3}{2}$ przy $x = -\frac{3}{2}$ staje się równy 0 i ułamek traci sens liczbowy, przy mniejszych wartościach x mianownik jest ujemny, przy większych — dodatni.

Otrzymane wyniki zestawiamy w tabelce:

	$x - \frac{4}{5}$	$x + \frac{3}{2}$	$\frac{x - \frac{4}{5}}{x + \frac{3}{2}}$
$x > \frac{4}{5}$	+	+	+
$x = \frac{4}{5}$	0	+	0
$-\frac{3}{2} < x < \frac{4}{5}$	-	+	-
$x = -\frac{3}{2}$	-	0	#
$x < -\frac{3}{2}$	-	-	+

Z tabelki widzimy, że nierówność nasza jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{albo } x < -\frac{3}{2}, \text{ albo } x > \frac{4}{5}.$$

Ćwiczenia.

18. Rozwiąż nierówności:

- a) $\frac{x-3}{x-5} < 0$ b) $\frac{x-2}{x-1} < 0$ c) $\frac{x-1}{3-4x} > 0$
- d) $\frac{x+1}{2x-3} < 2$ e) $\frac{3x-5}{x} > 2$ f) $\frac{2x}{x-4} > 1$

§ 4. Wartość bezwzględna.

Określenie wartości bezwzględnej.

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej a nazywamy samą liczbę a , gdy a jest nieujemne, zaś liczbę $-a$, gdy a jest ujemne.

Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy: $|a|$.

Mamy więc np.:

$$|5| = 5; \quad |-5| = 5; \quad |0| = 0; \quad |-\frac{2}{9}| = \frac{2}{9}; \quad |-\sqrt{16}| = 4.$$

Oznaczmy przez ε (grecka litera: *epsylon*) liczbę dodatnią. Nierówność:

$$|x| > \varepsilon$$

spełniona jest przez każdą liczbę x większą od ε , a także przez każdą liczbę x mniejszą od $-\varepsilon$.

Nierówność:

$$|x| < \varepsilon$$

spełniona jest przez każdą liczbę x , która jest mniejsza od ε , lecz zarazem większa od $-\varepsilon$.

Nierówności:

$$|x| < \varepsilon \quad \text{i} \quad -\varepsilon < x < \varepsilon$$

są więc równoważne.

Bezwzględna wartość różnicy.

Nierówność:

$$|x - a| < \varepsilon$$

równoważna jest, w myśl powyższej uwagi, nierówności podwójnej:

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon.$$

Rozwiązując tę nierówność otrzymujemy:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Gdy zachodzi nierówność:

$$|x - a| < \varepsilon$$

mówimy, że liczba x różni się od liczby a (lub też liczba a różni się od liczby x) o mniej niż ε .

Poznamy jeszcze dwa ważne wzory dotyczące wartości bezwzględnej iloczynu i sumy.

Bezwzględna wartość iloczynu.

Porównajmy na kilku przykładach liczbowych wartość bezwzględną iloczynu dwóch liczb a i b z iloczynem wartości bezwzględnych tych liczb. Np. dla $a = 8$, $b = -5$ mamy:

$$|ab| = |-40| = 40, \quad |a| \cdot |b| = 8 \cdot 5 = 40,$$

$$\text{czyli: } |ab| = |a| \cdot |b|.$$

Podobnie dla $a = -3$, $b = -4$ mamy:

$$|ab| = |12| = 12, \quad |a| \cdot |b| = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$\text{czyli: } |ab| = |a| \cdot |b|.$$

Przykłady te ilustrują wzór:

$$(6) \quad |ab| = |a| \cdot |b|,$$

który zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b . Wzór ten wynika bezpośrednio z definicji iloczynu liczb rzeczywistych. Wzór (6) możemy wyrazić słowami w sposób następujący:

Wartość bezwzględna iloczynu dwóch liczb jest równa iloczynowi wartości bezwzględnych tych liczb.

Bezwzględna wartość sumy.

Porównajmy teraz na paru przykładach liczbowych wartość bezwzględną sumy dwóch liczb a i b z sumą bezwzględnych wartości tych liczb. Np. dla $a = -2$, $b = -6$ mamy:

$$|a + b| = |-8| = 8, \quad |a| + |b| = 2 + 6 = 8,$$

$$\text{czyli: } |a + b| = |a| + |b|.$$

Natomiast dla $a = 4$, $b = -7$ mamy:

$$|a + b| = |-3| = 3, \quad |a| + |b| = 4 + 7 = 11,$$

$$\text{czyli: } |a + b| < |a| + |b|.$$

Przykłady te ilustrują wzór:

$$(7) \quad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

który, jak łatwo zauważyć, zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b *).

Wzór (7) możemy wyrazić słowami w sposób następujący:

Wartość bezwzględna sumy dwóch liczb jest nie większa od sumy wartości bezwzględnych tych liczb.

Wzory (6) i (7), jak łatwo widzieć, dają się uogólnić na dowolną ilość czynników względnie składników.

Ćwiczenia.

17. Rozwiąż nierówności:

$$a) \quad |x - 1| < \frac{1}{100} \quad b) \quad |x + 5| < 4 \quad c) \quad |3x - 2| < 1$$

$$d) \quad \left| \frac{x - 3}{5} \right| < \frac{1}{5} \quad e) \quad \left| \frac{1}{2}x - 3 \right| > 10 \quad f) \quad |2x + 1| > \frac{1}{2}$$

*18. Oznaczmy przez a i b dwie liczby rzeczywiste nierówne. Wykaż, że większa z tych liczb wyraża się wzorem:

$$\frac{a + b + |a - b|}{2},$$

mniejsza zaś wyraża się wzorem:

$$\frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

*) Znak: „ $\leq$ ” czytamy: „jest mniejsze lub równa się” albo: „jest nie większe”.

ROZDZIAŁ II

Funkcja wykładnicza. Logarytmy.

(K) (H) (M)

§ 5. Potęga o wykładniku wymiernym.

Potęga o wykładniku naturalnym.

Czytelnik zna już z poprzedniej nauki pojęcie potęgi o wykładniku naturalnym.

Jeżeli a oznacza liczbę rzeczywistą, n zaś oznacza liczbę naturalną większą od 1, wówczas rozumiemy przez a^n iloczyn n czynników, z których każdy równy jest a . Liczba a nazywa się podstawą potęgi a^n , liczba n nazywa się wykładnikiem potęgi. Dodatkowo umawiamy się, że przez a^1 rozumiemy liczbę a .

Dla potęg o wykładnikach naturalnych zachodzą, jak wiemy, następujące wzory zasadnicze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Inne wzory dotyczące potęg o wykładnikach naturalnych wynikają już bezpośrednio ze wzorów (1), a w szczególności:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (n > m)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Obecnie rozszerzymy pojęcie potęgi w ten sposób, aby wykładnik potęgowy mógł być zerem, liczbą całkowitą ujemną, albo dowolną liczbą wymierną. Jest rzeczą oczywistą, że dla wykładników niedodatnich lub ułamkowych określenie potęgi jako iloczynu jest bezsensowne, gdyż iloczyn nie może składać się np. z -3 lub $\frac{3}{4}$ czynników. Chcąc określić nowe symbole jak: a^0 , a^1 , $a^{\frac{1}{2}}$ które w dotychczasowym naszym kursie arytmetyki nie występowały, moglibyśmy nadać im dowolne znaczenie: wszak każda definicja jest tylko umową, ustalającą, w jakim sensie zamierzamy posługiwać się pewnym nowym wyrażeniem lub symbolem, który nie wydaje się nam bezpośrednio zrozumiałym.

Przy wyborze określeń kierować się będziemy zasadą, aby wszystkie działania na potęgach o wykładnikach niedodatnich lub niecałkowitych można było wykonywać według tych samych wzorów, które stosują się do potęg o wykładnikach naturalnych. Jest to zasada zachowania praw formalnych arytmetyki; w szczególności z zasady tej wynika, że wzory (1) winny zachować swą ważność również dla potęg o wykładnikach niedodatnich lub niecałkowitych.

Potęga o wykładniku zerowym.

Załóżmy, że podstawa a jest różna od zera. Aby w odpowiedni sposób określić symbol a^0 , weźmy pod uwagę pierwszy ze wzorów (1). Skoro wzór ten ma zachować swą ważność także dla $n = 0$, wówczas winno być: $a^0 \cdot a^m = a^m$, czyli $a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1$. A zatem określiliśmy:

Jeżeli $a \neq 0$, wówczas przez symbol a^0 rozumieć będziemy liczbę 1.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym.

Aby określić symbol a^{-p} , gdzie p jest liczbą naturalną, weźmiemy znów za punkt wyjścia pierwszy ze wzorów (1). Skoro

wzór ten ma zachować swą ważność dla wszelkich wykładników całkowitych (dodatnich, ujemnych i zera), wówczas winno być:

$$a^p \cdot a^{-p} = a^{p-p} = a^0 = 1,$$

czyli

$$a^p \cdot a^{-p} = 1,$$

skąd

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

Zgodnie z tym określamy:

Jeżeli $a > 0$, p zaś jest liczbą naturalną, wówczas przez symbol a^{-p} rozumieć będziemy liczbę $\frac{1}{a^p}$.

Mamy więc np. w myśl powyższych określeń:

$$2^0 = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49},$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81.$$

Potęga o wykładniku ułamkowym dodatnim.

W dalszych naszych rozważaniach będziemy zakładali, że podstawa a jest liczbą dodatnią: $a > 0$. Określimy obecnie potęgę w przypadku, gdy wykładnik potęgowy jest jakimkolwiek ułamkiem $\frac{p}{m}$, gdzie p i m oznaczają liczby naturalne. Za punkt wyjścia weźmiemy teraz drugi ze wzorów (1). Skoro wzór ten ma zachować swą ważność także dla wykładników ułamkowych, wówczas kładąc w nim $n = \frac{p}{m}$, winniśmy otrzymać: $\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^m = a^p$, możemy więc przyjąć: $a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$. Zgodnie z tym określamy:

Jeżeli $a > 0$, a p i m są liczbami naturalnymi, wówczas przez symbol $a^{\frac{p}{m}}$ rozumieć będziemy liczbę $\sqrt[m]{a^p}$ (czyli pierwiastek arytmetyczny m -tego stopnia liczby a^p).

Mamy więc np.:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \quad 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Wartość potęgi o wykładniku ułamkowym zależy od podstawy i od wartości wykładnika, nie zależy natomiast od postaci, w jakiej wykładnik napiszemy. Jeżeli bowiem ułamek nieprzywiedlny $\frac{p}{m}$ zastąpimy dowolnym ułamkiem $\frac{pk}{mk}$ o tej samej wartości (k oznacza liczbę naturalną), wówczas:

$$a^{\frac{pk}{mk}} = \sqrt[mk]{a^{pk}} = \sqrt[m]{\sqrt[k]{a^{pk}}} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{k}}} = a^{\frac{p}{m}}$$

Tak samo łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy wykładnik $\frac{p}{m}$ równy jest liczbie naturalnej n , określenie potęgi o wykładniku ułamkowym pokrywa się ze zwykłym określeniem potęgi o wykładniku naturalnym. Istotnie, skoro $\frac{p}{m} = n$, czyli $p = mn$, mamy:

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p} = \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n$$

Potęga o wykładniku ułamkowym ujemnym.

Określmy wreszcie potęgę w przypadku, gdy wykładnikiem jest ułamek ujemny: $-\frac{p}{m}$ (p i m oznaczają liczby naturalne); za punkt wyjścia weźmiemy pierwszy ze wzorów (1). Skoro wzór ten ma zachować swą ważność także dla dowolnych wykładników ułamkowych, wówczas winno być: $a^{\frac{p}{m}} \cdot a^{-\frac{p}{m}} = a^0 = 1$, czyli

$$a^{-\frac{p}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}. \quad \text{Zgodnie z tym określamy:}$$

Jeżeli $a > 0$, a p i m są liczbami naturalnymi, wówczas przez symbol $a^{-\frac{p}{m}}$ rozumiemy liczbę

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a^p}}$$

Mamy więc np.:

$$81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}, \quad 36^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}.$$

Za pomocą powyższych określeń uogólniliśmy więc pojęcie potęgi liczby dodatniej a w ten sposób, że:

- 1°. Wykładnikiem potęgi może być każda liczba wymierna s .
- 2°. Każdemu wymiernemu s odpowiada ściśle określona wartość potęgi a^s , przy czym wartość ta jest zawsze dodatnia.
- 3°. W przypadku szczególnym, gdy wykładnik s jest liczbą naturalną, potęga a^s sprowadza się do iloczynu s czynników, z których każdy jest równy a (lub do samej liczby a w przypadku, gdy $s = 1$).

Działania na potęgach o wykładnikach wymiernych.

Wykażemy teraz, że dla potęg liczb dodatnich a i b zachodzą wzory zasadnicze:

$$(1^a) \quad \begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \\ (a^r)^s &= a^{rs} \\ (ab)^s &= a^s b^s \end{aligned}$$

przy dowolnych wykładnikach wymiernych r i s .

Ze wzorów zasadniczych (1^a) wynikać będą bezpośrednio inne wzory, dotyczące się działań na potęgach, jak:

$$\begin{aligned} \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^s &= \frac{a^s}{b^s}. \end{aligned}$$

W dowodach opieramy się na znanych nam własnościach pierwiastków i potęg o wykładnikach naturalnych.

Udowodnimy nasamprzód pierwszy ze wzorów (1^a), tj. wzór:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Wzór ten zachodzi na pewno, gdy $r = 0$, gdyż wobec $a^0 = 1$ otrzymujemy wtedy $a^s = a^s$; tak samo łatwo zauważyć, że wzór zachodzi, gdy $s = 0$.

Możemy więc założyć, że $r \neq 0$ i $s \neq 0$. Rozróżnimy trzy przypadki:

- a) $r > 0, s > 0$;
- b) $r < 0, s < 0$;
- c) r i s są różnych znaków.

W przypadku a) możemy położyć: $r = \frac{l}{m}, s = \frac{k}{n}$, gdzie l, m, k, n są liczbami naturalnymi. Otrzymujemy wówczas:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{l}{m}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[m]{a^l} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{ln}} \cdot \sqrt[mn]{a^{km}} = \sqrt[mn]{a^{ln+km}}$$

$$a^{r+s} = a^{\frac{l}{m} + \frac{k}{n}} = a^{\frac{ln+km}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{ln+km}}$$

a zatem: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

W przypadku b) możemy napisać: $r = -\frac{l}{m}, s = -\frac{k}{n}$, gdzie l, m, k, n są liczbami naturalnymi. Otrzymamy wówczas:

$$a^r \cdot a^s = a^{-\frac{l}{m}} \cdot a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^l}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{1}{\sqrt[mn]{a^{ln+km}}}$$

$$a^{r+s} = a^{-\left(\frac{l}{m} + \frac{k}{n}\right)} = a^{-\frac{ln+km}{mn}} = \frac{1}{\sqrt[mn]{a^{ln+km}}}$$

a zatem: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

W podobny sposób możemy sprawdzić wzór: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ w przypadku c), tj. gdy r i s są różnych znaków. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że pierwszy ze wzorów (1^a) zachodzi dla dowolnych wykładników wymiernych r i s .

Udowodnimy teraz drugi ze wzorów (1^a), tj. wzór:

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Gdy $r = 0$ lub $s = 0$, wzór ten zachodzi na pewno, gdyż zarówno lewa strona, jak i prawa strona równa jest wtedy 1. Możemy więc założyć, że $r \neq 0$ i $s \neq 0$. I tutaj wygodnie jest rozpatrzyć poszczególne przypadki w zależności od znaku r i s . Gdy $r > 0$ i $s > 0$, możemy napisać: $r = \frac{l}{m}, s = \frac{k}{n}$, gdzie l, m, k, n są liczbami naturalnymi. Otrzymujemy wówczas:

$$(a^r)^s = \left(a^{\frac{l}{m}}\right)^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{l}{m}}\right)^k} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^l}\right)^k} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{lk}}} = \sqrt[nm]{a^{lk}}$$

$$a^{rs} = a^{\frac{l}{m} \cdot \frac{k}{n}} = a^{\frac{lk}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{lk}}$$

a zatem: $(a^r)^s = a^{rs}$. W zupełnie analogiczny sposób sprawdzamy wzór $(a^r)^s = a^{rs}$ w przypadku, gdy jeden z wykładników r i s lub też oba są ujemne. Dochodzimy w ten sposób do wniosku, że także drugi ze wzorów (1^a) zachodzi dla dowolnych wykładników wymiernych r i s .

Udowodnimy także trzeci ze wzorów (1^a), tj. wzór:

$$(ab)^s = a^s b^s$$

Dla $s = 0$ wzór ten jest oczywisty. Gdy $s > 0$, możemy napisać: $s = \frac{k}{n}$, gdzie k i n są liczbami naturalnymi. Otrzymujemy wówczas:

$$(ab)^s = (ab)^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^k} = \sqrt[n]{a^k b^k}$$

$$a^s \cdot b^s = a^{\frac{k}{n}} \cdot b^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{b^k} = \sqrt[n]{a^k b^k}$$

a zatem: $(ab)^s = a^s b^s$. W zupełnie analogiczny sposób sprawdzamy ten wzór dla $s < 0$. Dochodzimy więc do wniosku, że także trzeci ze wzorów (1^a) zachodzi dla dowolnego wykładnika wymiernego s .

Widzimy więc, że wszystkie działania na potęgach o wykładnikach wymiernych możemy wykonywać według tych samych praw, które stosują się do potęg o wykładnikach naturalnych.

Pierwiastkowanie jako szczególny przypadek potęgowania.

Zauważmy jeszcze, że pierwiastkowanie możemy traktować odciąż jako szczególny przypadek potęgowania, gdyż $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Z tego punktu widzenia wzory (1^a) i (2) zawierają, jako przypadki szczególne, zarówno prawa dotyczące się działań na potęgach o wykładnikach naturalnych, jak i prawa dotyczące się działań na pierwiastkach. Osiąga się przez to ważne uogólnienie, pozwalające połączyć w jednolitą całość naukę o potęgach i o pierwiastkach.

Rozpatrując potęgę o wykładniku wymiernym zakładaliśmy wyrażnie, że podstawa jest liczbą dodatnią. Jeśli bowiem podstawa jest ujemna, wówczas nie zawsze daje się wykonać pierwiastkowanie, tak że np. wyrażenie $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ nie ma dla nas żadnego znaczenia; jeżeli zaś podstawa jest równa 0, wówczas nie daje się wykonać dzielenia, tak że np. wyrażenie: $0^{-1} = \frac{1}{0}$ nie ma żadnego sensu liczbowego.

Porównywanie potęg o jednakowych podstawach.

Udowodnimy jeszcze następującą własność potęgi o wykładniku wymiernym:

Jeżeli podstawa a jest większa niż 1, a wykładnik potęgi s jest liczbą wymierną dodatnią, wówczas potęga a^s jest większa niż 1.

Jeżeli podstawa a jest mniejsza niż 1 (i dodatnia), a wykładnik potęgi s jest liczbą wymierną dodatnią, wówczas potęga a^s jest mniejsza niż 1.

Dowód. Niech będzie $a > 1$ i połączmy: $s = \frac{k}{n}$, gdzie k i n są liczbami naturalnymi. Należy wykazać, że $a^s > 1$. Otóż podnosząc obie strony nierówności $a > 1$ do k -tej potęgi mamy: $a^k > 1$, skąd wyciągając pierwiastek n -tego stopnia otrzymujemy: $\sqrt[n]{a^k} > 1$, czyli $a^s > 1$.

Załóżmy teraz, że $0 < a < 1$ i że s jest liczbą wymierną dodatnią. Skoro $0 < a < 1$, to $\frac{1}{a} > 1$, a zatem, jak wyżej wykazaliśmy: $\left(\frac{1}{a}\right)^s > 1$, czyli: $\frac{1}{a^s} > 1$, skąd wynika, że $a^s < 1$.

Z powyższej własności wynikają łatwo następujące twierdzenia:

Twierdzenie I. *Jeżeli $a > 1$ i liczba wymierna s jest większa niż liczba wymierna r , wówczas także potęga a^s jest większa niż potęga a^r .*

Dowód. Ponieważ $a > 1$ i $s - r > 0$, mamy:

$$a^{s-r} > 1, \text{ skąd: } \frac{a^s}{a^r} > 1, \text{ czyli: } a^s > a^r.$$

Twierdzenie II. *Jeżeli $0 < a < 1$ i liczba wymierna s jest większa niż liczba wymierna r , wówczas potęga a^s jest mniejsza niż potęga a^r .*

Dowód. Ponieważ: $0 < a < 1$ i $s - r > 0$, mamy:

$$a^{s-r} < 1, \text{ skąd: } \frac{a^s}{a^r} < 1, \text{ czyli: } a^s < a^r.$$

Pojęcie potęgi można rozszerzyć jeszcze w ten sposób, aby wykładnik potęgowy mógł być nie tylko liczbą wymierną, ale nawet i niewymierną, czyli dowolną liczbą rzeczywistą. Wyjaśnimy to dokładniej w § następnym.

Ćwiczenia.

19. Oblicz:

- | | | | | |
|------------------------------------|-----------------------|------------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| a) 3^0 | b) 8^0 | c) 2^{-1} | d) 3^{-2} | e) 4^{-3} |
| f) 10^{-3} | g) 10^{-6} | h) 10^{-8} | i) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$ | j) $0,5^{-1}$ |
| k) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ | l) $0,25^{-2}$ | m) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ | n) $8 \cdot 2^{-3}$ | o) $27 \cdot 3^{-4}$ |
| p) $7 \cdot 10^{-4}$ | q) $\frac{1}{8^{-1}}$ | r) $\frac{3}{7^{-2}}$ | s) $\frac{5}{2^{-3}}$ | t) $\frac{9^{-1}}{3^{-4}}$ |

20. Oblicz:

- a) $7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$
 b) $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$
 c) $2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$
 d) $3 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5}$

21. Niżej podane wyrażenia przekształć w ten sposób, aby nie zawierały potęg o wykładnikach ujemnych lub zerowych (podstawy a, b, c, d są tu liczbami dodatnimi):

- a) $a^{-3} b^2$ b) $2a^{-1} b^{-2} c^{-3}$ c) $\frac{a^3 b^{-2}}{c^{-1}}$
 d) $\frac{4a^0 b^2}{c^{-2} d^2}$ e) $\frac{a^{-1} b^{-3}}{c^{-1} d^{-1}}$ f) $\frac{1}{2a^{-1} b^0 c^2}$
 g) $\frac{3^{-2} b}{c^0 d^3}$ h) $\frac{3}{a^{-1} b^{-3} c^{-2} d^{-1}}$ i) $\frac{b^{-1} c^{-1}}{a^{-1} d^{-1}}$

22. Niżej podane wyrażenia przekształć w ten sposób, aby nie zawierały potęg o wykładnikach ujemnych (podstawy a, b, c są tu liczbami dodatnimi):

- a) $\frac{a+b}{a^{-1}+b^{-1}}$ b) $\frac{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}{bc+ca+ab}$
 c) $\frac{a+b+c}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$ d) $(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^{-2}$

23. Wykonaj wskazane działania: 1) stosując określenie potęgi o wykładniku zerowym; 2) zastępując potęgi o wykładnikach ujemnych odpowiednimi potęgami o wykładnikach naturalnych; 3) stosując bezpośrednio wzory dotyczące działań na potęgach. Porównaj otrzymane wyniki (podstawy a, b są tu liczbami dodatnimi):

- a) $a^{-3} \cdot a^5$ b) $a^{-4} \cdot a^{-3}$ c) $a^2 b^{-3} \cdot a^{-3} b$
 d) $a^0 b^{-2} \cdot a^2 b^0$ e) $a^5 : a^{-3}$ f) $a^{-4} : a^{-6}$
 g) $a^0 : b^{-3}$ h) $ab^{-2} : a^{-1}$ i) $(a^{-2})^3$
 j) $(a^3)^{-4}$ k) $(a^{-3})^{-1}$ l) $(a^2 b^{-1})^2$

24. Wykonaj wskazane działania (podstawy a, b, c, d są tu liczbami dodatnimi):

- a) $a^4 b \cdot \frac{1}{2} a^{-3} b$ b) $5ab^{-3} \cdot a^{-2} b^2$
 c) $3a^{-3} b \cdot 2ab^{-1}$ d) $\frac{1}{2} ab^{-1} c^2 \cdot 4bc^{-2}$
 e) $16ab^{-4} : 8a^2 b^{-3}$ f) $\frac{1}{8} a^3 b^{-3} c : \frac{1}{3} abc$
 g) $4a^{-5} b^3 \cdot \frac{a^3 b^{-1}}{2c^{-2}}$ h) $ab : \frac{3c^{-1}}{a^{-1} b^2}$
 i) $\frac{2a^{-4} b^2}{cd^2} : \frac{c^{-2} d}{a^2 b^{-3}}$ j) $(ab^{-2})^{-2} \cdot (ab^2)^{-1}$
 k) $(2ab - 3a^{-1} b^2 + a^2 b^{-1}) \cdot ab$
 l) $(8a^3 b^{-1} - 6a^{-2} b + 4ab^{-2}) : 2ab$
 m) $(a^2 - 3a + 1 + a^{-1} - 2a^{-2}) \cdot (1 + a^{-1})$
 n) $(3 + a^{-2})^2 - (3 - a^{-2})$

25. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{-1} - 1)(x^{-1} + 1)(x^{-2} + 1)(x^{-4} + 1) = x^{-8} - 1$$

26. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{-1} - 1)(x^{-1} + 1)(x^{-2} + 1)(x^{-4} + 1)(x^{-8} + 1) = x^{-16} - 1$$

Jak można tożsamość tę uogólnić?

27. Oblicz:

- a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{\frac{1}{2}}$ c) $25^{\frac{1}{2}}$ d) $8^{\frac{1}{3}}$
 e) $64^{\frac{1}{3}}$ f) $125^{\frac{1}{3}}$ g) $81^{\frac{1}{4}}$ h) $243^{\frac{1}{5}}$
 i) $0,36^{\frac{1}{2}}$ j) $0,49^{\frac{1}{2}}$ k) $0,125^{\frac{1}{3}}$ l) $(\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$
 m) $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$ n) $4^{\frac{3}{2}}$ o) $9^{\frac{3}{2}}$ p) $16^{\frac{3}{4}}$
 q) $0,008^{\frac{2}{3}}$ r) $81^{-\frac{1}{2}}$ s) $100^{-\frac{1}{2}}$ t) $1000^{-\frac{2}{3}}$
 u) $(\frac{1}{8})^{\frac{2}{3}}$ v) $0,09^{-\frac{3}{2}}$ w) $(\frac{9}{25})^{-\frac{1}{2}}$ x) $(\frac{125}{8})^{-\frac{1}{3}}$

28. Niżej podane wyrażenia pierwiastkowe napisz w postaci potęg (zakładamy że a jest liczbą dodatnią):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt{a} & \text{b)} \sqrt[3]{a} & \text{c)} \sqrt[7]{a} & \text{d)} \sqrt{a^5} \\ \text{e)} \sqrt[3]{a^7} & \text{f)} \frac{1}{\sqrt{a}} & \text{g)} \frac{1}{\sqrt[4]{a^2}} & \text{h)} \frac{1}{\sqrt[4]{a^{11}}} \end{array}$$

29. Wykonaj wskazane działania: 1) zastępując potęgi o wykładnikach ułamkowych pierwiastkami; 2) stosując bezpośrednio wzory dotyczące działań na potęgach. Porównaj otrzymane wyniki (zakładamy, że a jest liczbą dodatnią):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} & \text{b)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} & \text{c)} a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} & \text{d)} a \cdot a^{\frac{2}{3}} \\ \text{e)} (a^4)^{\frac{1}{3}} & \text{f)} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6 & \text{g)} \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3 & \text{h)} (a^5)^{-\frac{1}{3}} \end{array}$$

30. Wykonaj wskazane działania (zakładamy, że a, b są liczbami dodatnimi):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2a^{\frac{2}{3}} \cdot 3a^{\frac{1}{3}} & \text{b)} \frac{1}{5} a \cdot 2a^{-\frac{1}{2}} \\ \text{c)} 5a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} & \text{d)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \\ \text{e)} 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} & \text{f)} a^3 b^{-\frac{1}{2}} : a^2 b^{\frac{1}{2}} \\ \text{g)} 10ab^{-\frac{1}{2}} : 5a^{-\frac{1}{2}} b^{-1} & \text{h)} a^{\frac{3}{8}} b^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \\ \text{i)} \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}}\right)^4 & \text{j)} \left(a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}\right)^{12} \\ \text{k)} (a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (a^{\frac{1}{2}} - 1) & \text{l)} (a^{\frac{1}{3}} - 1)^3 \end{array}$$

31. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} - 1) = x - 1$$

32. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} + 1)(x^{\frac{1}{16}} + 1)(x^{\frac{1}{16}} - 1) = x - 1$$

Jak można tożsamość tę uogólnić?

33. Oznaczmy dowolną liczbę wymierną przez s . Opierając się na określeniu potęgi o wykładniku wymiernym wykaż, że $1^s = 1$.

(K) (H) (M)

§ 6. Potęga o wykładniku niewymiernym.

Pojęcie potęgi można, jak wzmiankowaliśmy, uogólnić w ten sposób, aby wykładnikiem potęgi mogła być również liczba niewymierna.

Określenie potęgi o wykładniku niewymiernym wyjaśnimy na przykładzie $3^{\sqrt{2}}$.

Liczba niewymierna $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ wyznacza, jak wiemy z poprzedniej nauki, ciąg przybliżeń dziesiętnych:

$$(\alpha) \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad \dots$$

Utwórzmy teraz następujący ciąg:

$$(\beta) \quad 3^{1,4}, \quad 3^{1,41}, \quad 3^{1,414}, \quad 3^{1,4142}, \quad \dots$$

Wyrazy ciągu (β) są więc potęgami liczby 3 o wykładnikach wymiernych, utworzonych z kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby niewymiernej $\sqrt{2}$. Otóż, jak daje się udowodnić, wyrazy ciągu (β) można uważać również za kolejne przybliżenia (jednak nie dziesiętne) pewnej liczby rzeczywistej g , która różni się od dostatecznie dalekich wyrazów ciągu (β) dowolnie mało.

Symbol $3^{\sqrt{2}}$ określamy jako liczbę równą g .

W podobny sposób określamy potęgę w przypadku, gdy podstawa jest dowolną liczbą dodatnią, a wykładnik potęgi — dowolną liczbą niewymierną. Tym sposobem rozszerzamy pojęcie potęgi liczby dodatniej, tak że wykładnikiem potęgi może być każda liczba rzeczywista (wymierna lub niewymierna).

28. Niżej podane wyrażenia pierwiastkowe napisz w postaci potęg (zakładamy że a jest liczbą dodatnią):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt{a} & \text{b)} \sqrt[3]{a} & \text{c)} \sqrt[7]{a} & \text{d)} \sqrt{a^5} \\ \text{e)} \sqrt[3]{a^7} & \text{f)} \frac{1}{\sqrt{a}} & \text{g)} \frac{1}{\sqrt[4]{a^2}} & \text{h)} \frac{1}{\sqrt[4]{a^{11}}} \end{array}$$

29. Wykonaj wskazane działania: 1) zastępując potęgi o wykładnikach ułamkowych pierwiastkami; 2) stosując bezpośrednio wzory dotyczące działań na potęgach. Porównaj otrzymane wyniki (zakładamy, że a jest liczbą dodatnią):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} & \text{b)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} & \text{c)} a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} & \text{d)} a \cdot a^{\frac{2}{3}} \\ \text{e)} (a^4)^{\frac{1}{3}} & \text{f)} \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^6 & \text{g)} \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^3 & \text{h)} (a^5)^{-\frac{1}{3}} \end{array}$$

30. Wykonaj wskazane działania (zakładamy, że a, b są liczbami dodatnimi):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 2a^{\frac{2}{3}} \cdot 3a^{\frac{1}{3}} & \text{b)} \frac{1}{5} a \cdot 2a^{-\frac{1}{2}} \\ \text{c)} 5a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} & \text{d)} a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \\ \text{e)} 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} & \text{f)} a^3 b^{-\frac{1}{2}} : a^2 b^{\frac{1}{2}} \\ \text{g)} 10ab^{-\frac{1}{2}} : 5a^{-\frac{1}{2}} b^{-1} & \text{h)} a^{\frac{3}{8}} b^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \\ \text{i)} \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}}\right)^4 & \text{j)} \left(a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}\right)^{12} \\ \text{k)} (a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (a^{\frac{1}{2}} - 1) & \text{l)} (a^{\frac{1}{3}} - 1)^3 \end{array}$$

31. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} - 1) = x - 1$$

32. Sprawdź następującą tożsamość (podstawa x jest tu liczbą dodatnią):

$$(x^{\frac{1}{2}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{8}} + 1)(x^{\frac{1}{16}} + 1)(x^{\frac{1}{16}} - 1) = x - 1$$

Jak można tożsamość tę uogólnić?

33. Oznaczmy dowolną liczbę wymierną przez s . Opierając się na określeniu potęgi o wykładniku wymiernym wykaż, że $1^s = 1$.

(K) (H) (M)

§ 6. Potęga o wykładniku niewymiernym.

Pojęcie potęgi można, jak wzmiankowaliśmy, uogólnić w ten sposób, aby wykładnikiem potęgi mogła być również liczba niewymierna.

Określenie potęgi o wykładniku niewymiernym wyjaśnimy na przykładzie $3^{\sqrt{2}}$.

Liczba niewymierna $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ wyznacza, jak wiemy z poprzedniej nauki, ciąg przybliżeń dziesiętnych:

$$(\alpha) 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad \dots$$

Utwórzmy teraz następujący ciąg:

$$(\beta) 3^{1,4}, \quad 3^{1,41}, \quad 3^{1,414}, \quad 3^{1,4142}, \quad \dots$$

Wyrazy ciągu (β) są więc potęgami liczby 3 o wykładnikach wymiernych, utworzonych z kolejnych przybliżeń dziesiętnych liczby niewymiernej $\sqrt{2}$. Otóż, jak daje się udowodnić, wyrazy ciągu (β) można uważać również za kolejne przybliżenia (jednak nie dziesiętne) pewnej liczby rzeczywistej g , która różni się od dostatecznie dalekich wyrazów ciągu (β) dowolnie mało.

Symbol $3^{\sqrt{2}}$ określamy jako liczbę równą g .

W podobny sposób określamy potęgę w przypadku, gdy podstawa jest dowolną liczbą dodatnią, a wykładnik potęgi — dowolną liczbą niewymierną. Tym sposobem rozszerzamy pojęcie potęgi liczby dodatniej, tak że wykładnikiem potęgi może być każda liczba rzeczywista (wymierna lub niewymierna).

Można udowodnić, że działania na potęgach o dowolnych wykładnikach rzeczywistych dają się wykonać według tych samych wzorów, które zostały wyprowadzone dla potęg o wykładnikach wymiernych; w szczególności zachodzą wzory:

$$(3) \quad \begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} \\ (ab)^y &= a^y b^y \\ \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^y &= \frac{a^y}{b^y} \end{aligned}$$

Można również udowodnić następujące twierdzenia, które stanowią uogólnienia tw. I i II na przypadek, w którym wykładniki potęgi są dowolnymi liczbami rzeczywistymi:

Twierdzenie I^a. Jeżeli $a > 1$ i liczba rzeczywista y jest większa niż liczba rzeczywista x , wówczas także potęga a^y jest większa niż potęga a^x .

Twierdzenie II^a. Jeżeli $0 < a < 1$ i liczba rzeczywista y jest większa niż liczba rzeczywista x , wówczas potęga a^y jest mniejsza niż potęga a^x .

Ćwiczenia.

34. Oblicz:

a) $\frac{3^{\sqrt{8}}}{9^{\sqrt{2}}}$

b) $4^{2-\sqrt{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$

35. Wykaż, że $4^{\sqrt{2}} < 8$.

(K) (H) (M)

§ 7. Pojęcie funkcji wykładniczej.

Rozważania tego § poświęcone będą funkcji $y = a^x$ (gdzie a oznacza stałą dodatnią); funkcję tę nazywamy funkcją wykładniczą.

Rozpatrzmy najpierw przykład takiej funkcji, który otrzymamy przyjmując $a = 2$. Funkcja

$$y = 2^x$$

posiada własności następujące:

1^o. Zmienna niezależna x może przybierać każdą wartość rzeczywistą; każdej wartości rzeczywistej x odpowiada oznaczona wartość dodatnia 2^x .

2^o. Większej wartości x odpowiada większa wartość y (obacz § 5, tw. I i § 6, tw. I^a). Własność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $y = 2^x$ jest rosnąca.

3^o. Zauważmy, że $2^1 > 1$, $2^2 > 2$, $2^3 > 3$ itd., i w ogólności: $2^n > n$ przy dowolnej wartości naturalnej n . Nadając zmiennej niezależnej x dostatecznie wielką wartość dodatnią, możemy uzyskać, że funkcja 2^x przybiera wartość dowolnie wielką. Własność tę wyrażamy mówiąc, że 2^x dąży do $+\infty$ (czytaj: do plus nieskończoności), gdy x dąży do $+\infty$.

4^o. Zauważmy, że $2^{-1} < 1$, $2^{-2} < \frac{1}{2}$, $2^{-3} < \frac{1}{3}$ itd., i w ogólności: $2^{-n} < \frac{1}{n}$ przy dowolnej wartości naturalnej n . Nadając zmiennej niezależnej x wartość ujemną o dostatecznie wielkiej wartości bezwzględnej, możemy uzyskać, że funkcja 2^x przybiera wartość dowolnie bliską zera. Własność tę wyrażamy mówiąc, że 2^x dąży do 0, gdy x dąży do $-\infty$ (czytaj: do minus nieskończoności).

5^o. Dla $x = 0$ mamy $y = 1$.

Biorąc pod uwagę własności 1^o–5^o, otrzymujemy następującą tabelkę zmienności funkcji $y = 2^x$:

x	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$
y	0	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

Czytamy to tak: gdy x rośnie od $-\infty$ do 0 i od 0 do $+\infty$, wówczas y rośnie od 0 do 1 i od 1 do $+\infty$.

Rozważmy teraz funkcję wykładniczą $y = (\frac{1}{2})^x$. Między tą funkcją a wyżej omawianą funkcją $y = 2^x$ zachodzi prosty związek:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$$

A więc wartość funkcji $(\frac{1}{2})^x$ jest odwrotnością wartości funkcji 2^x przy tej samej wartości zmiennej niezależnej x . Stąd wynikają natychmiast własności funkcji $y = (\frac{1}{2})^x$:

1°. Każdej wartości rzeczywistej x odpowiada dodatnia wartość funkcji 2^x , a więc każdej wartości rzeczywistej x odpowiada również dodatnia wartość funkcji $(\frac{1}{2})^x$.

2°. Większej wartości x odpowiada większa wartość funkcji 2^x , a więc większej wartości x odpowiada mniejsza wartość funkcji $(\frac{1}{2})^x$. Własność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $y = (\frac{1}{2})^x$ jest malejąca.

3. Nadając zmiennej niezależnej x dostatecznie wielką wartość dodatnią, możemy uzyskać, że funkcja 2^x przybierze wartość dowolnie wielką, a funkcja $(\frac{1}{2})^x$ przybierze wartość dowolnie mało różniącą się od zera. Własność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $y = (\frac{1}{2})^x$ dąży do 0, gdy x dąży do $+\infty$.

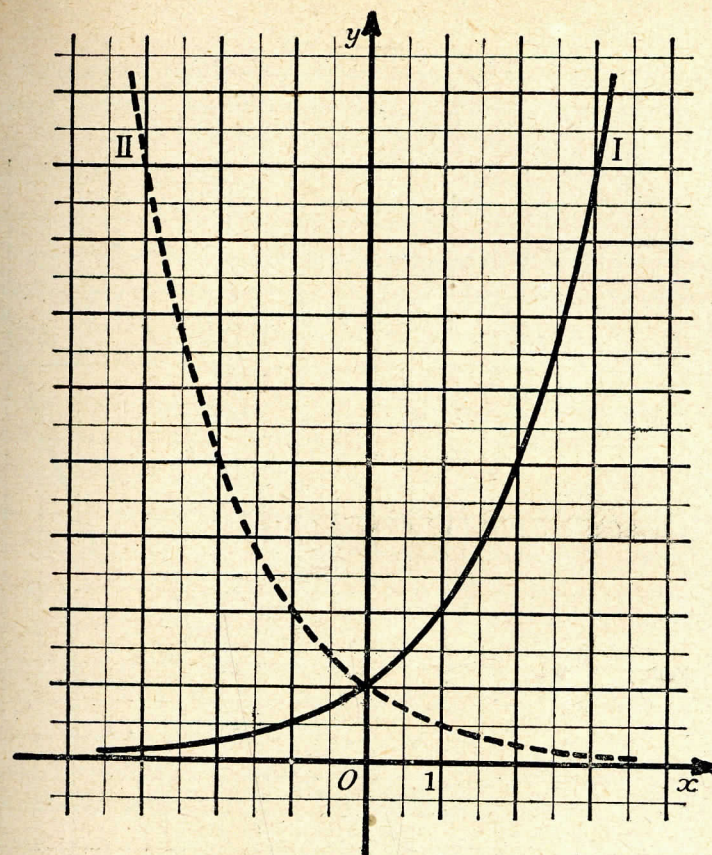
4°. Nadając zmiennej niezależnej x wartość ujemną o dostatecznie wielkiej wartości bezwzględnej, możemy uzyskać, że funkcja 2^x będzie dowolnie mało różniła się od zera, a funkcja $(\frac{1}{2})^x$ przybierze wartość dowolnie wielką. Własność tę wyrażamy mówiąc, że $y = (\frac{1}{2})^x$ dąży do $+\infty$, gdy x dąży do $-\infty$.

5°. Dla $x = 0$ mamy $y = 1$.

Biorąc pod uwagę własności 1° – 5° otrzymujemy więc następującą tabelkę zmienności funkcji $y = (\frac{1}{2})^x$:

x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

Czytamy to tak: gdy x rośnie od $-\infty$ do 0 i od 0 do $+\infty$, wówczas y maleje od $+\infty$ do 1 i od 1 do 0.



Rys. 1.

Wyciągnięta linia na rys. 1 przedstawia wykres funkcji $y = 2^x$.

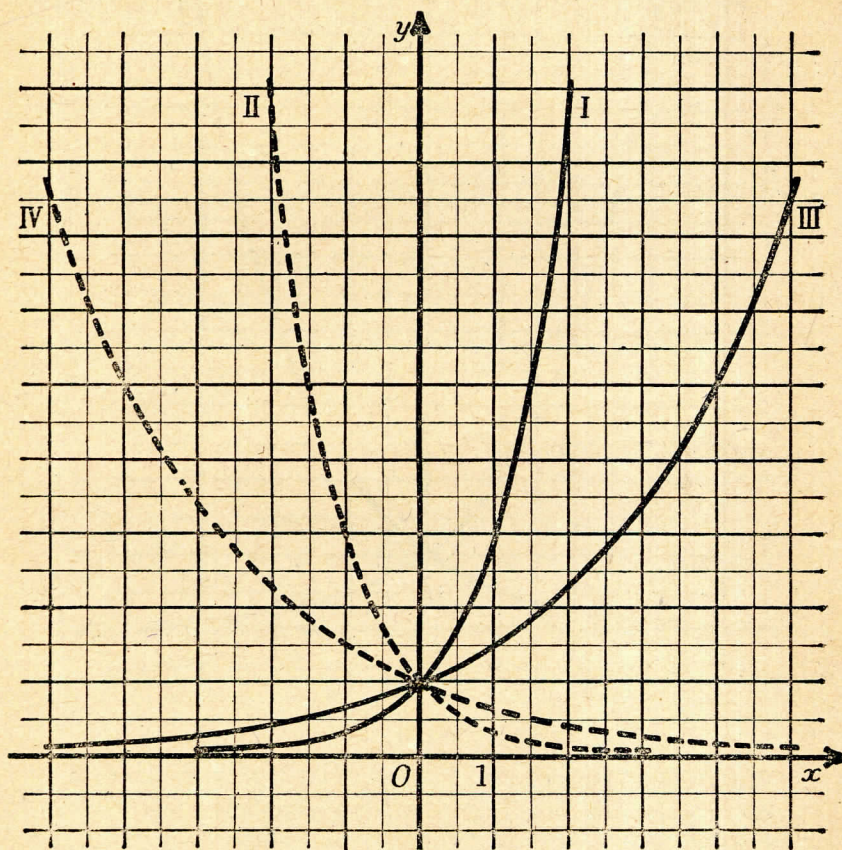
Wykres funkcji $y = (\frac{1}{2})^x$ przedstawia kropkowana linia na rys. 1. Linia $y = (\frac{1}{2})^x$ jest symetryczna do linii $y = 2^x$ względem osi y -ów.

Można w podobny zupełnie sposób rozpatrzeć ogólnie funkcję wykładniczą: $y = a^x$, gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią. Należy tu rozróżnić 3 przypadki:

- a) $a > 1$, b) $a = 1$, c) $0 < a < 1$.

$$a > 1$$

a) Gdy $a > 1$, wówczas funkcja $y = a^x$ jest rosnąca; jej tabelka zmienności jest taka, jak w przypadku funkcji $y = 2^x$.



Rys. 2.

Linia	I	daje	obraz	funkcji	$y = 3^x$
„	II	„	„	„	$y = (\frac{1}{3})^x$
„	III	„	„	„	$y = (\frac{3}{2})^x$
„	IV	„	„	„	$y = (\frac{2}{3})^x$

$$a = 1$$

b) Gdy $a = 1$, wówczas funkcja $y = a^x$ przyjmuje wartość równą 1 dla każdego rzeczywistego x . Wykresem funkcji będzie więc linia prosta, równoległa do osi x -ów, przechodząca przez punkt $(0, 1)$.

$$0 < a < 1$$

c) Gdy $0 < a < 1$, wówczas funkcja $y = a^x$ jest malejąca; jej tabelka zmienności jest taka, jak dla funkcji $y = (\frac{1}{2})^x$.

Na rys. 2 linie kropkowane przedstawiają funkcje:

$$y = (\frac{2}{3})^x \text{ i } y = (\frac{1}{3})^x.$$

Krzywe te są symetryczne względem osi y -ów do krzywych:

$$y = (\frac{3}{2})^x \text{ i } y = 3^x.$$

Ćwiczenia.

36. Przedstaw graficznie funkcje:

$$\text{a) } y = 4^x \quad \text{b) } y = (\frac{1}{10})^x \quad \text{c) } y = 2^{x+1} \quad \text{d) } y = 2^{x-1}$$

*37. Dana jest funkcja:

$$y = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^x$$

gdzie a i p oznaczają liczby dodatnie. Udowodnij, że gdy x wzrasta o 1, wówczas y wzrasta o $p\%$ swej wartości.

*38. Dana jest funkcja:

$$y = a \left(1 - \frac{p}{100} \right)^x$$

gdzie a i p są liczbami dodatnimi oraz $p < 100$. Udowodnij, że gdy x wzrasta o 1, wówczas y zmniejsza się o $p\%$ swej wartości.

*39. Dana jest funkcja:

$$y = a \left(1 + \frac{1}{10} \right)^{10x}$$

przy czym a oznacza liczbę dodatnią. Wykaż, że gdy x wzrasta o $\frac{1}{10}$, wówczas y wzrasta o $\frac{1}{10}$ swej wartości.

§ 8. Logarytmy.

Określenie logarytmu.

Oznaczmy przez a liczbę dodatnią, różną od 1. Gdy x jest daną liczbą rzeczywistą, wówczas potęga a^x przyjmuje, jak wiemy, określoną wartość dodatnią. Oznaczając wartość tę przez p możemy napisać:

$$(4) \quad a^x = p$$

Liczbę x nazywamy wówczas logarytmem liczby p przy podstawie a i piszemy:

$$x = \log_a p$$

Logarytm liczby (dodatniej) p przy podstawie a (dodatniej i różnej od 1) jest to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać daną liczbę p .

Przykłady:

$\log_2 8 = 3,$	ponieważ: $2^3 = 8$
$\log_2 32 = 5,$	ponieważ: $2^5 = 32$
$\log_3 81 = 4,$	ponieważ: $3^4 = 81$
$\log_5 25 = 2,$	ponieważ: $5^2 = 25$
$\log_6 6 = 1,$	ponieważ: $6^1 = 6$
$\log_{10} 1000 = 3,$	ponieważ: $10^3 = 1000$
$\log_{10} 1 = 0,$	ponieważ: $10^0 = 1$
$\log_{10} 0,01 = -2,$	ponieważ: $10^{-2} = 0,01$
$\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2},$	ponieważ: $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$
$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3,$	ponieważ: $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

Oznaczamy, jak wyżej, przez a dowolną liczbę dodatnią różną od 1. Zauważmy, że mamy:

$$\log_a 1 = 0, \quad \text{ponieważ: } a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1, \quad \text{ponieważ: } a^1 = a$$

Logarytm liczby 1 przy każdej podstawie jest równy 0, a logarytm podstawy jest równy 1.

Określiliśmy logarytmy jedynie dla podstaw dodatnich różnych od 1. Liczba 1 nie nadaje się na podstawę logarytmów, gdyż potęga 1^x przyjmuje dla każdego rzeczywistego x jedną i tę samą wartość równą 1.

Zauważmy jeszcze, że możemy mówić jedynie o logarytmach liczb dodatnich, ponieważ potęga a^x , której podstawa jest dodatnia, może przybierać tylko wartości dodatnie.

Można wykazać, że przy danej podstawie a (dodatniej i różnej od 1) istnieje logarytm dla każdej liczby dodatniej p i że logarytm ten jest jednoznacznie określoną liczbą rzeczywistą.

Wyprowadzimy teraz prawa dotyczące działań na logarytmach. Będziemy oczywiście milcząco zakładali, że podstawa logarytmów jest liczbą dodatnią różną od 1, liczby zaś logarytmowane są liczbami dodatnimi.

Logarytm iloczynu.

Udowodnimy najpierw wzór dotyczący logarytmu iloczynu:

$$(5) \quad \log_a (pq) = \log_a p + \log_a q$$

Dowód opiera się na znanych nam własnościach potęg:

Oznaczmy $\log_a p$ przez x , $\log_a q$ przez y . Skoro $\log_a p = x$ i $\log_a q = y$, mamy w myśl określenia logarytmu: $a^x = p$ i $a^y = q$. Mnożąc stronami powyższe równości otrzymujemy:

$$a^{x+y} = pq, \text{ a więc: } \log_a (pq) = x + y,$$

$$\text{czyli: } \log_a (pq) = \log_a p + \log_a q.$$

Wzór (5) daje się oczywiście uogólnić na dowolną ilość czynników; wzór ten możemy wyrazić słowami w sposób następujący:

Logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów poszczególnych czynników.

Logarytm ilorazu.

Udowodnimy teraz wzór dotyczący logarytmu ilorazu:

$$(6) \quad \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$$

Dowód tego wzoru jest zupełnie analogiczny do dowodu wzoru (5).

Niech będzie: $\log_a p = x$, $\log_a q = y$. Mamy więc: $a^x = p$ i $a^y = q$. Dzieląc stronami te równości otrzymujemy:

$$a^{x-y} = \frac{p}{q}, \text{ a więc } \log_a \frac{p}{q} = x - y,$$

$$\text{czyli: } \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q.$$

Wzór (6) wyrażamy słowami:

Logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika.

Logarytm potęgi.

Oznaczmy przez n liczbę naturalną. Stosując wzór (5) otrzymujemy:

$$\log_a (p^n) = \log_a (\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{n \text{ razy}}) = \underbrace{\log_a p + \log_a p + \dots + \log_a p}_{n \text{ razy}} = n \log_a p$$

Mamy więc wzór:

$$\log_a (p^n) = n \cdot \log_a p$$

Wzór ten możemy uogólnić w ten sposób, aby wykładnik potęgowy mógł być dowolną liczbą rzeczywistą:

Oznaczamy dowolną liczbę rzeczywistą przez z . Mamy wykazać, że $\log_a (p^z) = z \log_a p$. Połóżmy: $\log_a p = x$; mamy wówczas: $a^x = p$, skąd: $(a^x)^z = p^z$, czyli: $a^{xz} = p^z$; w myśl określenia logarytmu mamy więc: $\log_a (p^z) = zx$, czyli: $\log_a (p^z) = z \log_a p$.

Wzór:

$$(7) \quad \log_a (p^z) = z \log_a p$$

wyrażamy słowami:

Logarytm potęgi równy jest iloczynowi wykładnika potęgi i logarytmu podstawy potęgi.

Logarytm pierwiastka.

Ze wzoru (7) wynika, jako przypadek szczególny, wzór dotyczący logarytmu pierwiastka. W samej rzeczy, jeżeli $z = \frac{1}{n}$, gdzie n jest liczbą naturalną, to ze wzoru (8) otrzymujemy:

$$\log_a \left(p^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \log_a p, \text{ tzn.: } \log_a \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log_a p.$$

Wzór:

$$(8) \quad \log_a \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \cdot \log_a p$$

wyrażamy słowami:

Logarytm pierwiastka równy jest iloczynowi odwrotności wykładnika pierwiastkowego i logarytmu liczby pierwiastkowanej.

Wyprowadzone wyżej wzory (5) — (8) stosujemy często w odwrotnym kierunku, tj. od strony prawej ku lewej:

$$(5') \quad \log_a p + \log_a q = \log_a (pq)$$

$$(6') \quad \log_a p - \log_a q = \log_a \frac{p}{q}$$

$$(7') \quad z \log_a p = \log_a (p^z)$$

$$(8') \quad \frac{1}{n} \log_a p = \log_a \sqrt[n]{p}$$

Przykłady:

1. Za pomocą wzorów (5) — (8) możemy przekształcić:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{pqr}{st} &= \log_a (pqr) - \log_a (st) = \\ &= (\log_a p + \log_a q + \log_a r) - (\log_a s + \log_a t) = \\ &= \log_a p + \log_a q + \log_a r - \log_a s - \log_a t \end{aligned}$$

2. Tym samym sposobem przekształcamy:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{pq^2r^3}{st^4} &= \log_a p + \log_a (q^2) + \log_a (r^3) - \log_a s - \log_a (t^4) = \\ &= \log_a p + 2 \log_a q + 3 \log_a r - \log_a s - 4 \log_a t. \end{aligned}$$

3. Przekształcimy jeszcze:

$$\begin{aligned}\log_a \frac{p^3 \sqrt{q}}{s^2 \sqrt{t}} &= \log_a p + \log_a \sqrt[3]{q} - \log_a (s^2) - \log_a \sqrt{t} = \\ &= \log_a p + \frac{1}{3} \log_a q - 2 \log_a s - \frac{1}{2} \log_a t\end{aligned}$$

4. Stosując wzory (5') — (8') przekształcamy wyrażenie:

$$\begin{aligned}3 \log_a p + 4 \log_a q - \frac{1}{2} \log_a t &= \log_a (p^3) + \log_a (q^4) - \log_a \sqrt{t} = \\ &= \log_a (p^3 q^4) - \log_a \sqrt{t} = \log_a \frac{p^3 q^4}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

Porównywanie logarytmów (w zależności od podstawy).

Wykażemy jeszcze następującą własność logarytmów:

Jeżeli podstawa logarytmów jest większa od 1, wówczas większej liczbie odpowiada większy logarytm.

Jeżeli podstawa logarytmów jest mniejsza od 1, wówczas większej liczbie odpowiada mniejszy logarytm.

Dowód. Załóżmy, że $a > 1$ oraz $p > q > 0$; należy wykazać, że $\log_a p > \log_a q$. Niechaj będzie: $\log_a p = x$, $\log_a q = y$; mamy więc: $a^x = p$, $a^y = q$, a zatem, w myśl założenia, że $p > q$, mamy: $a^x > a^y$, a stąd wynika, że $x > y$ (gdyby bowiem było $x \leq y$, mielibyśmy w myśl tw. I^a § 6: $a^x \leq a^y$), czyli: $\log_a p > \log_a q$.

Dla podstawy mniejszej od 1 rozumowanie jest podobne.

Ćwiczenia.

40. Oblicz na podstawie określenia logarytmów:

a) $\log_2 2$	$\log_2 4$	$\log_2 8$	$\log_2 64$	$\log_2 \frac{1}{16}$
b) $\log_3 3$	$\log_3 9$	$\log_3 81$	$\log_3 243$	$\log_3 \frac{1}{27}$
c) $\log_5 25$	$\log_5 125$	$\log_5 \frac{1}{5}$	$\log_5 \frac{1}{25}$	$\log_5 1$
d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$	$\log_{\frac{1}{2}} 1$	$\log_{\frac{1}{2}} 2$	$\log_{\frac{1}{2}} 4$

e) $\log_{\frac{1}{10}} 0,1$	$\log_{\frac{1}{10}} 0,01$	$\log_{\frac{1}{10}} 0,001$	$\log_{\frac{1}{10}} 10$	$\log_{\frac{1}{10}} 100$
f) $\log_{\frac{1}{4}} 0,5$	$\log_{\frac{1}{2}} 0,5$	$\log_{\frac{1}{4}} 0,25$	$\log_{\frac{1}{2}} 0,25$	$\log_{\frac{1}{8}} 0,125$

41. Oblicz na podstawie określenia logarytmów:

a) $\log_2 \sqrt{2}$	$\log_2 \sqrt[5]{2}$
b) $\log_{10} \sqrt{10}$	$\log_{10} \sqrt[4]{10}$
c) $\log_{25} 5$	$\log_{25} \sqrt[3]{25}$
d) $\log_2 \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[8]{\frac{8}{27}}$
e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$	$\log_{\frac{1}{10}} \sqrt[3]{10}$
f) $\log_{\frac{1}{8}} 16$	$\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3}$

42. Oblicz na podstawie określenia logarytmów:

a) $\log_2 1024$,	$\log_4 1024$,	$\log_{32} 1024$
b) $\log_3 729$,	$\log_9 729$,	$\log_{27} 729$

43. Oblicz na podstawie określenia logarytmów:

$\log_a 1$	$\log_a a$	$\log_a (a^4)$	$\log_a \frac{1}{a^3}$	$\log_a \sqrt{a}$
	$\log_a \sqrt[3]{a^4}$	$\log_a \frac{1}{\sqrt{a^3}}$		

(przez a oznaczamy liczbę dodatnią, różną od 1).

44. Wyznacz liczbę, której logarytm przy podstawie 4 jest 3.
 45. Wyznacz liczbę, której logarytm przy podstawie 5 jest — 2.
 46. Wyznacz liczbę, której logarytm przy podstawie $\sqrt{10}$ jest 4.
 47. Wyznacz liczbę, której logarytm przy podstawie 8 jest $\frac{1}{3}$.
 48. Przy jakiej podstawie logarytm liczby $\sqrt[3]{2}$ równy jest $\frac{1}{3}$?
 49. Przy jakiej podstawie logarytm liczby 49 równy jest 2?
 50. Przy jakiej podstawie logarytm liczby 6 równy jest $\frac{1}{2}$?
 51. Przy jakiej podstawie logarytm liczby $\frac{1}{64}$ równy jest — 2?

52. Za pomocą twierdzeń o logarytmie iloczynu, ilorazu, potęgi i pierwiastka przekształć wyrażenia następujące (zakładamy, że p, q, r, s, t są liczbami dodatnimi, a zaś jest liczbą dodatnią różną od 1):

a) $\log_a (p^2 r^3)$

b) $\log_a \frac{p^3}{q^5}$

c) $\log_a \frac{1}{pq^2}$

d) $\log_a \frac{pq}{rst}$

e) $\log_a (p^3 \sqrt{q})$

f) $\log_a \sqrt{pqr}$

g) $\log_a \frac{\sqrt{p}}{q^2 r^3}$

h) $\log_a \sqrt[4]{pq^3 r^5}$

i) $\log_a \sqrt{\frac{pq}{rs}}$

j) $\log_a \sqrt[3]{\frac{p^2 q^3}{s^5}}$

k) $\log_a \sqrt{p\sqrt{q}}$

l) $\log_a \sqrt[3]{p\sqrt{st}}$

53. Sprawdź tożsamości (p i q oznaczają dowolne liczby dodatnie, a zaś jest dowolną liczbą dodatnią różną od 1):

a) $\log_{10} p + \log_{10} \frac{10}{p} = 1$

b) $\log_2 p + \log_2 q + \log_2 \frac{8}{pq} = 3$

c) $\log_a p + \log_a \frac{1}{p} = 0$

d) $a^{\log_a p} = p$

54. Sprawdź tożsamości (zakładamy, że wszystkie liczby występujące pod znakiem logarytmu są dodatnie, podstawa zaś a jest liczbą dodatnią różną od 1):

a) $\log_a p - \log_a \sqrt{p} = \frac{1}{2} \log_a p$

b) $2 \log_a (p + q) = \log_a (p^2 + 2pq + q^2)$

c) $\log_a (p - q) + \log_a (p + q) = 2 \log_a p + \log_a \left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)$

d) $\log_a (p - q) + \log_a (p + q) + \log_a (p^2 + q^2) = \log_a (p^4 - q^4)$

55. Wykaż, że:

$\log_2 p > 0$, gdy $p > 1$,

$\log_2 p < 0$, gdy $0 < p < 1$.

*56. Udowodnić, że $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

Wskazówka. Gdyby było: $\log_2 5 = \frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi, moglibyśmy napisać: $2^{\frac{m}{n}} = 5$, czyli: $2^m = 5^n$.

*57. Udowodnić, że $\log_{10} 3$ jest liczbą niewymierną.

(K) (H) (M)

§ 9. Tablice logarytmów.

Cecha logarytmu.

W praktyce mamy przeważnie do czynienia z logarytmami przy podstawie 10; logarytmy takie nazywamy dziesiętnymi. Logarytm liczby p przy podstawie 10 będziemy krótko oznaczali przez $\log p$, czyli opuszczać będziemy oznaczenie podstawy.

Logarytmy dziesiętne liczb takich, jak 10, 100, 1000, 10000 lub 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 (a więc logarytmy potęg liczby 10 o wykładniku całkowitym), możemy łatwo obliczyć. Mamy bowiem:

$\log 10000 = 4$,	ponieważ: $10^4 = 10000$
$\log 1000 = 3$,	ponieważ: $10^3 = 1000$
$\log 100 = 2$,	ponieważ: $10^2 = 100$
$\log 10 = 1$,	ponieważ: $10^1 = 10$
$\log 1 = 0$	ponieważ: $10^0 = 1$
$\log 0,1 = -1$,	ponieważ: $10^{-1} = 0,1$
$\log 0,01 = -2$,	ponieważ: $10^{-2} = 0,01$
$\log 0,001 = -3$,	ponieważ: $10^{-3} = 0,001$
$\log 0,0001 = -4$,	ponieważ: $10^{-4} = 0,0001$

Aby obliczyć logarytmy innych liczb, moglibyśmy zastosować rozumowanie oparte na metodzie kolejnych przybliżeń.

Dla przykładu obliczamy tym sposobem $\log 20$ z dokładnością do 0,01.

Przyjmując: $\log 20 = x$, mamy: $10^x = 20$. Ponieważ $10^1 < 20 < 10^2$, czyli: $10^1 < 10^x < 10^2$, przeto mamy: $1 < x < 2$. Możemy więc napisać:

$$x = 1 + \frac{c}{10}$$

przy czym c oznacza liczbę rzeczywistą większą od 0 a mniejszą od 10.

Mamy więc:

$$10^x = 10^{1 + \frac{c}{10}} = 20,$$

skąd: $10 \cdot 10^{\frac{c}{10}} = 20$, czyli: $10^{\frac{c}{10}} = 2$.

Podnosząc obie strony ostatniej równości do 10-ej potęgi otrzymujemy: $10^c = 2^{10}$. Uwzględniając, że $2^{10} = 1024$, mamy: $10^3 < 10^c < 10^4$, skąd wnioskujemy, że $3 < c < 4$, czyli: $1,3 < x < 1,4$. Możemy tedy napisać:

$$x = 1,3 + \frac{d}{100}$$

przy czym d oznacza liczbę rzeczywistą większą od 0 a mniejszą od 10.

Mamy zatem:

$$10^{1,3 + \frac{d}{100}} = 20,$$

skąd: $10 \cdot 10^{0,3 + \frac{d}{100}} = 20$, czyli: $10^{0,3 + \frac{d}{100}} = 2$.

Podnosząc obie strony równości do 100-ej potęgi otrzymujemy: $10^{30+d} = 2^{100}$. Obliczając 2^{100} przekonywamy się, że jest to liczba 31-cyfrowa, a więc: $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$, skąd: $10^{30} < 10^{30+d} < 10^{31}$, a zatem: $0 < d < 1$; uwzględniając to otrzymujemy: $1,30 < x < 1,31$. Możemy więc napisać:

$$\log 20 = 1,30 \dots$$

Wyznaczanie tym sposobem trzeciej cyfry dziesiętnej wymagałoby już obliczania 2^{1000} .

Przekonywamy się na powyższym przykładzie, że zastosowany tu sposób obliczania logarytmów nie posiada praktycznego znaczenia, ponieważ już przy niewielkich dokładnościach wymaga bardzo żmudnych i długich rachunków.

Mamy jednak inne, dogodniejsze metody obliczania logarytmów. Metody te pozwalają obliczyć logarytmy z dużą dokładnością. Wyniki tych obliczeń zestawiamy w tablicach. W dalszym ciągu będziemy się posługiwali czterocyfrowymi tablicami logarytmów dziesiętnych, w których zanotowane są logarytmy z dokładnością do 0,00005.

Jeżeli dana jest dowolna liczba dodatnia, która nie jest potęgą liczby 10 o wykładniku całkowitym, możemy bardzo łatwo obliczyć, między jakimi dwiema liczbami całkowitymi zawiera się jej logarytm. Weźmy dla przykładu liczbę 247; ponieważ: $10^2 < 247 < 10^3$, mamy: $2 < \log 247 < 3$. Podobnie znajdujemy:

$$\begin{aligned} 1 < \log 38 < 2, & \text{ponieważ: } 10^1 < 38 < 10^2 \\ 0 < \log 6 < 1, & \text{ponieważ: } 10^0 < 6 < 10^1 \\ 3 < \log 2140 < 4, & \text{ponieważ: } 10^3 < 2140 < 10^4 \\ -1 < \log 0,5 < 0, & \text{ponieważ: } 10^{-1} < 0,5 < 10^0 \\ -2 < \log 0,052 < -1, & \text{ponieważ: } 10^{-2} < 0,052 < 10^{-1} \\ 2 < \log 821,8 < 3, & \text{ponieważ: } 10^2 < 821,8 < 10^3 \end{aligned}$$

Możemy wobec tego napisać:

$$\begin{aligned} \log 38 &= 1 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \\ \log 6 &= 0 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \\ \log 2140 &= 3 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \\ \log 0,5 &= -1 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \\ \log 0,052 &= -2 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \\ \log 821,8 &= 2 + m, & \text{przy czym: } 0 < m < 1 \end{aligned}$$

Część całkowitą logarytmu danej liczby (tj. największą liczbę całkowitą, nie większą od logarytmu danej liczby) nazywamy cechą logarytmu tej liczby.

Cechami logarytmów liczb:

$$38 \quad 6 \quad 2140 \quad 0,5 \quad 0,052 \quad 821,8$$

są więc odpowiednio liczby:

$$1 \quad 0 \quad 3 \quad -1 \quad -2 \quad 2$$

Przykłady te ilustrują następującą regułę, którą wygodnie posługiwać się przy obliczaniu cech logarytmów liczb napisanych w układzie dziesiętnym:

Cecha logarytmu liczby większej od 1 jest o 1 mniejsza od ilości cyfr części całkowitej tej liczby.

Cecha logarytmu liczby mniejszej od 1 jest liczbą ujemną, której wartość bezwzględna równa jest ilości zer przed pierwszą cyfrą znaczącą (licząc przy tym i 0 przed przecinkiem).

Dowód tej reguły nie następuje trudności. W samej rzeczy, założmy, że liczba p jest większa od 1 i że część całkowita tej liczby składa się z n cyfr. Mamy wówczas:

$$10^{n-1} \leq p < 10^n,$$

skąd otrzymujemy:

$$n - 1 \leq \log p < n.$$

A więc część całkowita, czyli cecha logarytmu liczby p , równa jest $n - 1$. Udowodniliśmy więc pierwszą część naszej reguły. W podobny zupełnie sposób udowadnia się część drugą.

Gdy liczba p jest potęgą liczby 10 o wykładniku całkowitym, wówczas logarytm liczby p jest liczbą całkowitą; logarytm ten ma więc tę samą wartość, co i cecha logarytmu. Gdy liczba p nie jest potęgą liczby 10 o wykładniku całkowitym, wówczas logarytm liczby p jest większy od cechy logarytmu o liczbę mniejszą od 1.

Mantysa logarytmu.

Różnicę między logarytmem danej liczby a cechą tego logarytmu nazywamy mantysą logarytmu tej liczby.

Mantysa logarytmu danej liczby jest więc liczbą nieujemną, mniejszą od 1, która dodana do cechy logarytmu daje logarytm tej liczby. Jeżeli cechę logarytmu liczby p oznaczmy przez k , mantysę zaś przez m , to możemy napisać:

$$\log p = k + m,$$

przy czym k jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub równą zero), m zaś spełnia warunek: $0 \leq m < 1$.

W tablicach logarytmów znajdujemy tylko mantysy; cechy obliczamy w pamięci według wyżej przytoczonej reguły. W tablicach czterocyfrowych znajdujemy mantysy liczb całkowitych trzycyfrowych (od 100 do 999) z dokładnością do 0,00005.

Możemy jednak za pomocą tych tablic wyznaczyć równie dobrze logarytm dowolnej liczby (dodatniej) o trzech cyfrach znaczących. Wynika to z następującego twierdzenia:

Jeżeli liczbę logarytmowaną pomnożymy lub podzielimy przez naturalną potęgę liczby 10, wówczas zmienia się tylko cecha logarytmu, natomiast mantysa pozostaje ta sama.

Dowód. Oznaczmy cechę logarytmu liczby p przez k , mantysę zaś przez m . Możemy wówczas napisać:

$$\log p = k + m,$$

przy czym k jest liczbą całkowitą, a m spełnia warunek: $0 \leq m < 1$.

Jeżeli l jest dowolną liczbą naturalną, znajdujemy:

$$\log (10^l p) = \log (10^l) + \log p = l + k + m = (l + k) + m$$

i:

$$\log \frac{p}{10^l} = \log p - \log (10^l) = k + m - l = (k - l) + m$$

Ponieważ liczby: $l + k$ i $k - l$ są całkowite, a mantysa m spełnia warunek: $0 \leq m < 1$, więc $\log (10^l p)$ ma cechę $l + k$ i mantysę m ; podobnie $\log \frac{p}{10^l}$ ma cechę $k - l$ i mantysę m .

Logarytmy liczb 367, 3,67, 36700, 0,0367, 0,0000367 mają w myśl powyższego twierdzenia tę samą mantysę.

Przykłady:

1. Znaleźć za pomocą tablic $\log 563$.

Cechę logarytmu wyznaczamy w pamięci; ponieważ liczba 563 jest 3-cyfrowa, cecha wynosi 2.

Mantysę znajdujemy w tablicach w sposób następujący: w pierwszej kolumnie pionowej (zwykle oznaczonej literą n) szukamy liczby, utworzonej z dwóch pierwszych cyfr, tj. 56; mantysę logarytmu 563 znajdujemy na przecięciu wiersza poziomego,

w którym znaleźliśmy 56, z kolumną pionową, oznaczoną cyfrą 3. Znajdziemy tam grupę cyfr 7505, co oznacza, że mantysa wynosi 0,7505 (z błędem nie przekraczającym 0,00005). A więc:

$$\log 563 \doteq 2 + 0,7505 = 2,7505^*)$$

2. Znaleźć za pomocą tablic $\log 4,81$.

Ponieważ część całkowita liczby 4,81 zawiera 1 cyfrę, przeto cecha logarytmu wynosi 0.

Mantysa logarytmu liczby 4,81 jest ta sama, co mantysa logarytmu liczby 481; w tablicach znajdziemy: 6821. A zatem:

$$\log 4,81 \doteq 0 + 0,6821 = 0,6821$$

3. Znaleźć za pomocą tablic $\log 0,00279$.

Cecha wynosi -3 . Mantysa logarytmu liczby 0,00279 jest taka, jak mantysa logarytmu liczby 279; w tablicach znajdziemy: 4456. A zatem $\log 0,00279 \doteq -3 + 0,4456$. Zamiast wykonać działanie: $-3 + 0,4456 = -2,5544$, piszemy jego wynik w postaci: $\bar{3},4456$ (znak „ $-$ ” nad cyfrą 3 odnosi się tylko do tej cyfry, cyfry zaś po przecinku dziesiętnym tworzą ułamek dodatni). Piszemy więc ostatecznie:

$$\log 0,00279 \doteq \bar{3},4456$$

4. Znaleźć za pomocą tablic $\log 0,7$.

Cecha wynosi -1 . Mantysa logarytmu liczby 0,7 jest taka, jak mantysa logarytmu liczby 700; w tablicach znajdziemy: 8451. A więc: $\log 0,7 \doteq \bar{1},8451$.

5. Znaleźć za pomocą tablic $\log 905000$.

Cecha wynosi 5. Mantysa logarytmu liczby 905000 jest taka, jak mantysa logarytmu liczby 905; w tablicach znajdujemy: 9566. A zatem: $\log 905000 \doteq 5,9566$.

*) Znak „ $\doteq$ ” oznacza równość przybliżoną.

Aby znaleźć logarytm liczby zawierającej więcej niż trzy cyfry znaczące, stosujemy tzw. interpolację. Wyjaśnimy to na przykładzie $\log 238,4$.

Logarytm liczby 238,4 zawiera się między logarytmem liczby 238 a logarytmem liczby 239. W tablicach znajdujemy (z błędem nie przekraczającym 0,00005):

$$\log 238 \doteq 2,3766, \quad \log 239 \doteq 2,3784.$$

Przyrostowi liczby logarytmowanej o 1 odpowiada tu przyrost mantysy o 0,0018. Jeżeli więc założymy, że logarytm wzrasta tu proporcjonalnie do liczby logarytmowanej (co w rzeczywistości zachodzi tylko w przybliżeniu), to przyrostowi liczby logarytmowanej o 0,4 odpowiada przyrost mantysy o $0,4 \cdot 0,0018$, tj. o 0,00072 lub, po skróceniu do czterech miejsc dziesiętnych: 0,0007. A więc: $\log 238,4 \doteq 2,3766 + 0,0007 = 2,3773$.

Niektóre tablice logarytmów podają gotowe poprawki, pozwalające bez rachunków ubocznych uwzględnić czwartą cyfrę znaczącą.

Powyższa metoda obliczania logarytmów liczb zawierających więcej niż trzy cyfry znaczące daje oczywiście wyniki tylko przybliżone, przy czym (z powodu zastosowania interpolacji) błąd może przekroczyć 0,00005. Wykazano jednak, że w każdym razie błąd nie przekracza 0,0001.

Numerus logarithmi.

Tablicami logarytmów posługujemy się nie tylko do wyznaczania logarytmu danej liczby, ale również do odnajdywania liczby, której logarytm jest dany. Jeżeli $\log x = k$, wówczas mówimy, że $x = N\log k$ (czytaj: *numerus logarithmi k*). Ponieważ, w myśl określenia logarytmu, równość: $\log x = k$ oznacza, że $10^k = x$, zatem: $N\log k = 10^k$. Wynika stąd, że obliczanie $N\log k$, tj. liczby, której logarytm dziesiętny wynosi k , jest równoznaczne z obliczaniem 10^k .

Przykłady:

1. Znaleźć $N\log 1,5752$.

Cecha logarytmu szukanej liczby wynosi 1, a mantysa 0,5752. W tablicach znajdujemy, że mantysie 0,5752 odpowiada grupa

cyfr 376; ponieważ cecha logarytmu wynosi 1, przeto część całkowita szukanej liczby składa się z 2 cyfr. Zatem:

$$\text{Nlog } 1,5752 = 37,6$$

Piszemy znak równości przybliżonej pamiętając, że $\log 37,6$ tylko w przybliżeniu równy jest 1,5752.

2. Znaleźć $\text{Nlog } 2,5198$

Cecha logarytmu szukanej liczby wynosi 2, a mantysa 0,5198. W tablicach znajdujemy, że mantysie 0,5198 odpowiada grupa cyfr 331; ponieważ cecha logarytmu wynosi 2, przeto część całkowita szukanej liczby składa się z 3 cyfr. Zatem:

$$\text{Nlog } 2,5198 = 331$$

3. Znaleźć $\text{Nlog } 4,2833$.

Cecha logarytmu szukanej liczby wynosi 4, a mantysa 0,2833. W tablicach znajdujemy, że mantysie 0,2833 odpowiada grupa cyfr 192; ponieważ cecha logarytmu wynosi 4, przeto część całkowita szukanej liczby składa się z 5 cyfr. Zatem:

$$\text{Nlog } 4,2833 = 19200$$

4. Znaleźć $\text{Nlog } \bar{2},3075$.

Cecha logarytmu szukanej liczby wynosi — 2, a mantysa 0,3075. Mantysie 0,3075 odpowiada grupa cyfr 203; ponieważ cecha logarytmu wynosi — 2, przeto należy przed pierwszą cyfrą wypisać dwa zera i po pierwszym zerze dać przecinek dziesiętny:

$$\text{Nlog } \bar{2},3075 = 0,0203$$

5. Znaleźć $\text{Nlog } (-2,0535)$.

Liczbę — 2,0535 nadajemy taką postać, aby łatwo było odczytać cechę i mantysę; piszemy:

$$-2,0535 = (-2,0535 + 3) - 3 = 0,9465 - 3 = \bar{3},9465$$

Postępując jak w przykładzie 4, znajdziemy:

$$\text{Nlog } (-2,0535) = \text{Nlog } \bar{3},9465 = 0,00881$$

Powyższe przykłady pouczają, że cecha logarytmu wyznacza rząd wielkości liczby logarytmowanej, mantysa zaś wyznacza kolejne cyfry, z jakich składa się liczba logarytmowana.

Jeżeli przy wyszukiwaniu liczby, której logarytm jest dany, nie znajdziemy odnośnej mantysy w tablicach, stosujemy interpolację. Wyjaśnimy to na przykładzie $\text{Nlog } 2,4507$.

Mantysa 0,4507 w tablicach nie znajduje się. Najbliższą mantysą mniejszą od danej jest 0,4502; odpowiada jej grupa cyfr 282. Najbliższą mantysą większą od danej jest 0,4518; odpowiada jej grupa cyfr 283. Mamy więc:

$$\text{Nlog } 2,4502 = 282, \quad \text{Nlog } 2,4518 = 283.$$

Szukany $\text{Nlog } 2,4507$ jest przeto liczbą pośrednią pomiędzy 282 i 283. Przyrostowi logarytmu o 0,0016 odpowiada tu przyrost liczby logarytmowanej o 1. Jeżeli więc założymy, że liczba logarytmowana wzrasta proporcjonalnie do logarytmu (co w rzeczywistości zachodzi tylko w przybliżeniu), to możemy wnioskować, że przyrostowi logarytmu o 0,0001 odpowiada przyrost liczby logarytmowanej o $\frac{1}{16}$, a zatem przyrostowi logarytmu o 0,0005 (tj. od wartości 2,4502 do wartości danej 2,4507) odpowiada przyrost liczby logarytmowanej o $\frac{5}{16}$, tj. o 0,31... Obliczoną poprawkę zaokrąglamy do jednego tylko miejsca po przecinku (a więc do 0,3), dalsze bowiem nie miałyby żadnego znaczenia z powodu błędów, którymi obciążone są już same logarytmy. Mamy więc:

$$\text{Nlog } 2,4507 = 282 + 0,3 = 282,3.$$

Uwaga. Podkreślamy jeszcze raz, że za pomocą tablic możemy wyznaczyć tylko przybliżoną wartość liczby, której logarytm jest dany. Otóż wykazano, że przy użyciu tablic czterocyfrowych możemy wydobyć pierwsze cztery cyfry znaczące szukanej liczby z taką dokładnością, że błąd nie przekracza 2,5 jednostek tego rzędu, który odpowiada czwartej cyfrze. Jeżeli np. znaleźliśmy (stosując interpolację) $\text{Nlog } 2,8707 = 742,5$, wówczas błąd nie przekracza 0,25, tak że dokładna wartość $\text{Nlog } 2,8707$ zawiera się pomiędzy 742,25 a 742,75.

Zamiana podstawy logarytmów.

Rozpatrywaliśmy tu bliżej tablicę logarytmów dziesiętnych. Mając taką tablicę, możemy już z łatwością obliczać logarytmy przy jakiegokolwiek podstawie, odmiennej od 10. Wyjaśnimy to na przykładzie $\log_3 11$. Aby wyznaczyć ten logarytm, połączmy: $\log_3 11 = x$; mamy więc w myśl określenia logarytmu: $3^x = 11$. Skoro liczby 3^x i 11 są równe, więc także równe są ich logarytmy dziesiętne: $\log(3^x) = \log 11$, skąd: $x \log 3 = \log 11$,

$$\text{a zatem } x = \frac{\log 11}{\log 3}.$$

W tablicach znajdujemy: $\log 11 \doteq 1,0414$, $\log 3 \doteq 0,4771$, więc: $x \doteq \frac{1,0414}{0,4771} \doteq 2,183$, czyli: $\log_3 11 \doteq 2,183$.

Zbadamy teraz tę rzecz ogólnie. Przypuśćmy, że mamy tablicę logarytmów, obliczonych dla pewnej podstawy a i chcemy przy jej pomocy wyznaczyć logarytm liczby p przy jakiegokolwiek innej podstawie b . Rozumujemy zupełnie tak samo jak w powyższym przykładzie. Połączmy: $\log_b p = x$; mamy więc w myśl określenia logarytmu: $b^x = p$. Skoro liczby b^x i p są równe, więc także równe są ich logarytmy obliczone dla podstawy a , czyli: $\log_a(b^x) = \log_a p$, skąd otrzymujemy: $x \log_a b = \log_a p$, a zatem:

$$x = \frac{\log_a p}{\log_a b}$$

Mamy więc:

$$(10) \quad \log_b p = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a p$$

Aby przejść od logarytmu jakiejś liczby przy podstawie a do logarytmu tej liczby przy podstawie b , wystarczy pierwszy logarytm pomnożyć przez odwrotność logarytmu liczby b przy podstawie a .

Liczbę $\frac{1}{\log_a b}$, przez którą należy pomnożyć logarytmy przy podstawie a , aby otrzymać logarytmy przy podstawie b , nazywamy modulem zamiany logarytmów przy podstawie a na logarytmy przy podstawie b .

Logarytmy wprowadzili do matematyki Szkot Neper i Szwajcar Bürgi na początku XVII stulecia.

Pierwszy z nich obliczył logarytmy dla podstawy:

$$a = \left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

drugi dla podstawy:

$$b = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}$$

Pierwszą tablicę logarytmów dziesiętnych ogłosił Briggs w roku 1617; tablica ta zawierała logarytmy liczb całkowitych od 1 do 1000. W roku 1642 ogłosił Briggs tablicę logarytmów dziesiętnych liczb od 1 do 20 000 i od 90 000 do 100 000; tablica ta była 14-cyfrowa. Logarytmy dziesiętne nazywamy też inaczej logarytmami Briggsa; niekiedy nazywamy je logarytmami zwyczajnymi. W rozważaniach teoretycznych występują logarytmy przy podstawie $e = 2,7182818284590\dots$; logarytmy te nazywamy naturalnymi. Istnieją w matematyce dogodne metody obliczania logarytmów naturalnych; mnożąc logarytmy naturalne przez odpowiedni moduł wyznaczamy logarytmy dziesiętne.

Ćwiczenia.

58. Wyznacz za pomocą tablic logarytmu (dziesiętne) liczb następujących:

a) 9	b) 13	c) 20	d) 33	e) 41
f) 83	g) 105	h) 383	i) 444	j) 815
k) 1245	l) 2046	m) 3346	n) 4883	o) 6773
p) 7459	q) 8003	r) 9119	s) 43481	t) 85586

59. Wyznacz za pomocą tablic logarytmu (dziesiętne) liczb następujących:

a) 43	b) 4,3	c) 0,43	d) 0,043	e) 43000
f) 673	g) 6730	h) 67,3	i) 6,73	j) 0,673
k) 2,87	l) 0,000287	m) 0,287	n) 287000	o) 28,7
p) 343,6	q) 0,3436	r) 3,436	s) 34360	t) 0,03436

60. Wyznacz za pomocą tablic logarytmu (dziesiętne) liczb następujących:

a) 0,6	b) 0,63	c) 0,638	d) 0,6384
e) 7	f) 7,4	g) 7,44	h) 7,448
i) 80	j) 86	k) 86,3	l) 86,38
m) 300	n) 330	o) 333	p) 333,3
q) 0,005	r) 0,0057	s) 0,00578	t) 0,005786

61. Wyznacz za pomocą tablic logarytmu (dziesiętne) liczb następujących:

- | | | | |
|------------|-----------|-----------|----------|
| a) 87,2 | b) 0,0228 | c) 828000 | d) 3,42 |
| e) 23,46 | f) 8,232 | g) 0,348 | h) 56000 |
| i) 0,00002 | j) 1,284 | k) 561,3 | l) 0,085 |

62. Wyznacz za pomocą tablic:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) Nlog 1,5465 | b) Nlog 2,6075 | c) Nlog 0,7251 |
| d) Nlog 3,4116 | e) Nlog 1,5211 | f) Nlog 2,8102 |
| g) Nlog 0,9159 | h) Nlog 3,7427 | i) Nlog 2,2718 |
| j) Nlog 4,5527 | k) Nlog 1,5740 | l) Nlog 1,1335 |

63. Wyznacz za pomocą tablic:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| a) Nlog 2,1313 | b) Nlog 1,2562 | c) Nlog 3,2940 |
| d) Nlog 0,4570 | e) Nlog 1,6142 | f) Nlog 1,7304 |
| g) Nlog 2,6940 | h) Nlog 3,5601 | i) Nlog 2,9958 |
| j) Nlog 4,1424 | k) Nlog 4,0808 | l) Nlog 5,8085 |

64. Wyznacz za pomocą tablic:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) Nlog (— 1,1530) | b) Nlog (— 0,5243) |
| c) Nlog (— 0,3420) | d) Nlog (— 2,1013) |
| e) Nlog (— 1,9296) | f) Nlog (— 3,7331) |
| g) Nlog (— 2,7091) | h) Nlog (— 0,1593) |

65. Wyznacz za pomocą tablic:

- | | | |
|----------------|-----------------|------------------|
| a) log (log 2) | b) log (log 50) | c) log (log 614) |
|----------------|-----------------|------------------|

66. Wyznacz za pomocą tablic:

- | | | |
|----------------|----------------|-------------------|
| a) $\log_5 23$ | b) $\log_7 86$ | c) $\log_2 10,78$ |
|----------------|----------------|-------------------|

67. Wiedząc, że $\log_a b = m$, $\log_a c = n$, oblicz: $\log_b c$ i $\log_c b$.

68. Oblicz bez pomocy tablic:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) $\log 2 + \log 5$ | b) $\log 25 + \log 4$ |
| c) $\log 700 - \log 7$ | d) $\log 125 + 3 \log 2$ |

e) $1 + \log 4 + 2 \log 5$

f) $2 \log 7 - \log 49$

g) $2 \log 50 - \log 25$

h) $\log 330 - 2 \log 11 + \log 3\frac{2}{3}$

i) $\log 0,5 + \log \frac{1}{5}$

j) $\log \frac{4}{25} - \log 16$

k) $\log \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \log 64$

l) $\log 3000 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 27$

69. Oblicz bez pomocy tablic:

- | | | |
|-------------|---------------|----------------------------|
| a) Nlog 2 | b) Nlog (— 1) | c) Nlog (— 3) |
| d) Nlog 1,5 | e) Nlog 2,5 | f) Nlog (— $\frac{3}{2}$) |

70. Wiedząc, że $\log 2 = m$, oblicz:

- | | | | |
|----------|-----------|-----------|------------|
| a) log 5 | b) log 40 | c) log 16 | d) log 3,2 |
|----------|-----------|-----------|------------|

71. Wiedząc, że $\log 2 = m$, $\log 3 = n$, oblicz:

- | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| a) log 6 | b) log 24 | c) log 48 | d) log 36 |
| e) log 120 | f) log 5400 | g) log 96 | h) log 72 |
| i) log 2,4 | j) log 0,36 | k) log 0,06 | l) log 1,44 |
| m) log 45 | n) log 135 | o) log 1,5 | p) log 40,5 |

72. Sprawdź następujące równości (bez pomocy tablic):

a) $\log 2 = 7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

b) $\log 3 = 11 \log \frac{16}{15} + 8 \log \frac{25}{24} + 5 \log \frac{81}{80}$

c) $\log 5 = 16 \log \frac{16}{15} + 12 \log \frac{25}{24} + 7 \log \frac{81}{80}$

Wskazówka: $\frac{16}{15} = \frac{2^4}{3 \cdot 5}$, $\frac{25}{24} = \frac{5^2}{2^3 \cdot 3}$, $\frac{81}{80} = \frac{3^4}{2^4 \cdot 5}$.

73. Do pomiarów wysokości gór posługujemy się wzorem:

$$H = 18430 \cdot (\log S - \log P),$$

przy czym H oznacza wysokość góry w metrach, a S i P oznaczają jednocześnie zmierzone ciśnienie powietrza u stóp i na szczycie góry.

Na podstawie tego wzoru oblicz wysokość góry, jeżeli ciśnienie powietrza u stóp góry wynosi 754 mm słupa rtęci, na szczycie zaś 688 mm.

§ 10. Zastosowania logarytmów.

W § 8 udowodniliśmy, że logarytm iloczynu równy jest sumie logarytmów poszczególnych czynników, logarytm ilorazu równy jest różnicy logarytmów dzielnej i dzielnika, logarytm potęgi równy jest iloczynowi wykładnika potęgi i logarytmu podstawy potęgi i wreszcie logarytm pierwiastka równy jest iloczynowi odwrotności wykładnika pierwiastkowego i logarytmu liczby podpierwiastkowej. Z tych twierdzeń korzystamy celem dogodnego i szybkiego obliczania iloczynów, ilorazów, potęg i pierwiastków przy użyciu tablic logarytmów dziesiętnych. Wyjaśnimy to na kilku przykładach:

1. Obliczyć:

$$x = 6,274 \cdot 4,285 \cdot 0,807$$

Obliczamy najpierw $\log x$. Otrzymujemy:

$$\log x = \log 6,274 + \log 4,285 + \log 0,807$$

W tablicach czterocyfrowych znajdujemy:

$$\log 6,274 \doteq 0,7976$$

$$\log 4,285 \doteq 0,6319$$

$$\log 0,807 \doteq \bar{1},9069$$

Mamy zatem:

$$\log x \doteq 0,7976 + \bar{0},6319 + \bar{1},9069 = 1,3364$$

skąd:

$$x \doteq N \log 1,3364 \doteq 21,69$$

Widzimy więc, że zamiast wykonywania żmudnych mnożeń wyznaczaliśmy z tablic logarytmu czynników, dodaliśmy te logarytmy i następnie wyznaczaliśmy z tablic $N \log$. Jest rzeczą jasną, że tym sposobem znaleźliśmy tylko przybliżoną wartość szukanego iloczynu, ale w praktyce najczęściej taka tylko nam jest potrzebna. Gdybyśmy byli wykonali mnożenie bezpośrednio, otrzymalibyśmy: $x = 21,69546063$. Znaleziona przez nas wartość przybliżona ma więc cztery cyfry dokładne.

2. Obliczyć:

$$x = \frac{481,2}{5,263}$$

Obliczamy najpierw $\log x$. Otrzymujemy:

$$\log x = \log 481,2 - \log 5,263$$

W tablicach znajdujemy:

$$\log 481,2 \doteq 2,6823$$

$$\log 5,263 \doteq 0,7212$$

Mamy zatem:

$$\log x \doteq 2,6823 - 0,7212 = 1,9611$$

skąd:

$$x \doteq N \log 1,9611 \doteq 91,44$$

Aby uniknąć odejmowania logarytmów, co jest zwłaszcza wtedy niewygodne, gdy logarytm dzielnika jest większy od logarytmu dzielnej, zastępujemy często dzielenie mnożeniem przez odwrotność dzielnika. Dogodnie jest przy tym wprowadzić pojęcie kologarytmu.

Kologarytmem danej liczby dodatniej q nazywamy logarytm odwrotności tej liczby; zgodnie z tym piszemy:

$$\text{colog } q = \log \frac{1}{q} = -\log q$$

Kologarytmy piszemy, podobnie jak logarytmy, w postaci sumy części całkowitej i części ułamkowej *niewjemnej*.

Jeżeli logarytm liczby q ma cechę k i mantysę m (różną od zera), wówczas mamy:

$$\begin{aligned} \text{colog } q &= -\log q = -(k + m) = -k - m = \\ &= -(k + 1) + (1 - m) \end{aligned}$$

Jeżeli więc cechę logarytmu powiększymy o 1 i otrzymaną liczbę weźmiemy ze znakiem przeciwnym, wówczas otrzymamy

część całkowitą kologarytmu; część ułamkową kologarytmu otrzymamy odejmując mantysę logarytmu od jedności (czyli uzupełniając ją do jedności), np.:

$$\begin{aligned}\log 384 &\doteq 2,5843, & \text{colog } 384 &\doteq \bar{3},4157 \\ \log 0,0342 &\doteq \bar{2},5340, & \text{colog } 0,0342 &\doteq 1,4660\end{aligned}$$

Użycie kologarytmów upraszcza nieco rachunek, jak uczy taki przykład:

3. Obliczyć:

$$x = \frac{41,3 \cdot 6,78}{717,4}$$

Obliczamy najpierw $\log x$. Otrzymujemy:

$$\log x = \log 41,3 + \log 6,78 - \log 717,4$$

czyli:

$$\log x = \log 41,3 + \log 6,78 + \text{colog } 717,4$$

W tablicach znajdujemy:

$$\begin{aligned}\log 41,3 &\doteq 1,6160 \\ \log 6,78 &\doteq 0,8312 \\ \log 717,4 &\doteq 2,8557\end{aligned}$$

Mając $\log 717,4$ obliczamy $\text{colog } 717,4$:

$$\text{colog } 717,4 \doteq \bar{3},1443$$

Mamy zatem:

$$\log x \doteq 1,6160 + 0,8312 + \bar{3},1443 = \bar{1},5915$$

skąd:

$$x \doteq N \log \bar{1},5915 \doteq 0,3904$$

4. Obliczyć:

$$x = 1,05^{30}$$

Obliczamy najpierw $\log x$. Otrzymujemy:

$$\log x = 30 \log 1,05$$

W tablicach znajdujemy:

$$\log 1,05 \doteq 0,0212$$

Mamy zatem:

$$\log x \doteq 30 \cdot 0,0212 = 0,6360$$

skąd:

$$x \doteq N \log 0,6360 \doteq 4,325$$

5. Obliczyć:

$$x = \sqrt[5]{3}$$

Logarytmując dostajemy:

$$\log x = \frac{1}{5} \log 3 \doteq \frac{0,4771}{5} \doteq 0,0954$$

skąd:

$$x \doteq N \log 0,0954 \doteq 1,246$$

6. Obliczyć:

$$x = \sqrt[4]{0,0234}$$

Logarytmując dostajemy:

$$\log x = \frac{1}{4} \log 0,0234 \doteq \frac{\bar{2},3692}{4} = \bar{1},5923$$

skąd:

$$x \doteq N \log \bar{1},5923 \doteq 0,3911$$

Uwaga. Dzielenie $\bar{2},3692 : 4$ wykonujemy tak:

$$\begin{aligned}\bar{2},3692 : 4 &= (-2 + 0,3692) : 4 = \\ &= (-4 + 2,3692) : 4 = -1 + 0,5923 = \bar{1},5923\end{aligned}$$

7. Obliczyć:

$$x = \frac{8,82 \sqrt{0,811}}{1,46^4}$$

Logarytmując otrzymujemy:

$$\log x = \log 8,82 + \frac{1}{3} \log 0,811 - 4 \log 1,46$$

czyli:

$$\log x = \log 8,82 + \frac{1}{3} \log 0,811 + 4 \text{ colog } 1,46$$

W tablicach znajdujemy:

$$\log 8,82 \doteq 0,9455$$

$$\log 0,811 \doteq \bar{1},9090$$

$$\log 1,46 \doteq 0,1644$$

Mając $\log 1,46$ obliczamy $\text{colog } 1,46$:

$$\text{colog } 1,46 \doteq \bar{1},8356$$

Mamy zatem:

$$\log x \doteq 0,9455 + \frac{1}{3} \cdot \bar{1},9090 + 4 \cdot \bar{1},8356 \doteq 0,2576$$

skąd:

$$x \doteq N \log 0,2576 \doteq 1,81$$

Cały rachunek zapisujemy praktycznie w sposób następujący:

$$\begin{array}{rcl} & \log 8,82 \doteq 0,9455 & \\ \log 0,811 \doteq \bar{1},9090 & \frac{1}{3} \log 0,811 \doteq \bar{1},9697 & \\ \log 1,46 \doteq 0,1644 & \text{colog } 1,46 \doteq \bar{1},8356 & 4 \text{ colog } 1,46 \doteq \bar{1},3424 \\ & \log x \doteq 0,2576 & \\ & x \doteq 1,81 & \end{array}$$

Jeżeli wyrażenie, którego wartość mamy obliczyć, jest ujemne (np. $-\sqrt[3]{42,57}$), wówczas znajdujemy za pomocą rachunku logarytmicznego wartość bezwzględną tego wyrażenia (a więc $\sqrt[3]{42,57}$), a następnie otrzymany wynik bierzemy ze znakiem „—“.

Omówiliśmy wyżej stosowanie logarytmów do obliczania takich wyrażeń, w których występują działania mnożenia, dzielenia, potęgowania i pierwiastkowania. Omówimy teraz na przykładzie postępowanie w przypadku, gdy w danym wyrażeniu występują także działania dodawania i odejmowania.

8. Obliczyć:

$$x = 24,31^2 + 18,85^2 - 25,32^2$$

Logarytm sumy lub różnicy nie daje się przekształcić na wyrażenie prostsze, nie możemy więc bezpośrednio obliczyć loga-

rytmu liczby x . Tu znajdujemy (przy użyciu tablic logarytmów) po kolei wartości kwadratów: $24,31^2$, $18,85^2$, $25,32^2$ i następnie obliczamy x stosując dodawanie i odejmowanie.

Otrzymujemy:

$$24,31^2 \doteq 591,0 \quad 18,85^2 \doteq 355,3 \quad 25,32^2 \doteq 641,1$$

a zatem:

$$x \doteq 591,0 + 355,3 - 641,1 = 305,2$$

Czasem wygodnie jest dane wyrażenie najpierw odpowiednio przekształcić, aby ułatwić stosowanie rachunku logarytmicznego. Przekonamy się o tym na następującym przykładzie:

9. Obliczyć:

$$x = \sqrt{7,326^2 - 5,834^2}$$

Różnicę kwadratów: $7,326^2 - 5,834^2$ przekształcamy w znany sposób na iloczyn; dostajemy:

$$\begin{aligned} 7,326^2 - 5,834^2 &= (7,326 + 5,834) \cdot (7,326 - 5,834) = \\ &= 13,16 \cdot 1,492 \end{aligned}$$

Mamy więc:

$$x = \sqrt{13,16 \cdot 1,492}$$

Logarytmując otrzymujemy:

$$\log x = \frac{1}{2} (\log 13,16 + \log 1,492) \doteq 0,6465$$

skąd znajdujemy:

$$x \doteq 4,431$$

Posługując się tablicami logarytmów możemy, jak wiemy, wyznaczyć tylko przybliżone wartości poszukiwanych liczb. Gdy w rachunku jakimś występują przybliżenia zamiast wartości dokładnych, staramy się także oszacować błąd, jakim obarczony jest wynik rachunku. Wyjasnimy to na prostym przykładzie:

10. Obliczyć:

$$x = \frac{48,4 \cdot \sqrt{3,678}}{2,412}$$

Logarytmując dostajemy:

$$\log x = \log 48,4 + \frac{1}{2} \log 3,678 + \text{colog } 2,412$$

W tablicach znajdujemy:

$$\log 48,4 \doteq 1,6848,$$

przy czym błąd przybliżenia, jak wiemy, nie przekracza 0,00005; następnie znajdujemy:

$$\log 3,678 \doteq 0,5657;$$

tym razem błąd może być większy niż 0,00005 (ponieważ wykonano interpolację), ale błąd ten nie przekracza 0,0001; w końcu znajdujemy:

$$\log 2,412 \doteq 0,3824,$$

a zatem:

$$\text{colog } 2,412 \doteq \bar{1},6176$$

z błędem nie przekraczającym 0,0001.

Otrzymujemy więc na $\log x$ wartość:

$$1,6848 + \frac{1}{2} \cdot 0,5657 + \bar{1},6176$$

z błędem nie przekraczającym sumy błędów popełnionych przy obliczaniu poszczególnych składników, czyli nie przekraczającym liczby:

$$0,00005 + \frac{1}{2} \cdot 0,0001 + 0,0001$$

Możemy więc napisać:

$$\log x \doteq 1,5852$$

z błędem nie przekraczającym 0,0002, czyli:

$$1,5850 \leq \log x \leq 1,5854$$

Stąd wynika, że:

$$(11) \quad N\log 1,5850 \leq x \leq N\log 1,5854$$

Z tablic znajdujemy stosując interpolację:

$$N\log 1,5850 \doteq 38,46,$$

$$N\log 1,5854 \doteq 38,49,$$

przy czym błędy nie mogą, jak wiemy *), przekroczyć 2,5 jednostek tego rzędu, który odpowiada czwartej cyfrze znaczącej szukanej liczby, a więc w tym wypadku błędy nie przekraczają 0,025.

Mamy więc:

$$(12) \quad 38,435 \leq N\log 1,5850 \leq 38,485$$

$$(13) \quad 38,465 \leq N\log 1,5854 \leq 38,515$$

Biorąc pod uwagę nierówności (11), (12) i (13) dostajemy ostatecznie:

$$38,435 \leq x \leq 38,515$$

Wartość dokładna liczby x jest więc zawarta między 38,435 a 38,515.

*) Obacz „Uwagę” na str. 57.

Ćwiczenia.

74. Oblicz za pomocą tablic logarytmów:

a) $8,37 \cdot 6,45$

b) $1,44 \cdot 0,0888$

c) $589,8 \cdot 0,00836$

d) $0,8235 \cdot 0,8513$

e) $2,342 \cdot 3,81 \cdot 1,813$

f) $0,056 \cdot 0,0338 \cdot 232,2$

g) $\frac{46,6}{32,4}$

h) $\frac{503}{218,2}$

i) $\frac{6,76}{10,83}$

j) $\frac{234,4}{31,81}$

k) $\frac{0,007342}{0,00123}$

l) $\frac{33,5}{0,09113}$

m) $\frac{2,47}{328,7}$

n) $\frac{4,21 \cdot 12,08}{5,47}$

o) $\frac{22,86 \cdot 0,054}{0,372}$

p) $\frac{0,0153}{28,5 \cdot 0,0243}$

q) $\frac{42,3 \cdot 81,6}{3,57 \cdot 130,9}$

r) $\frac{903,8 \cdot 0,0515}{3,49 \cdot 2,169}$

75. Oblicz za pomocą tablic logarytmów:

a) $0,434^2$

b) $4,23^3$

c) $1,03^{28}$

d) $1,04^{16}$

e) $\left(\frac{18}{23}\right)^4$

f) $\left(\frac{5}{21}\right)^3$

g) $\sqrt[5]{7}$

h) $\sqrt[3]{4}$

i) $\sqrt[5]{12,3}$

j) $\sqrt[6]{0,38}$

k) $\sqrt[4]{31,6}$

l) $\sqrt[3]{\frac{37}{15}}$

76. Oblicz za pomocą tablic logarytmów:

a) $\sqrt[3]{43,8 \cdot 2,08}$

b) $8,09 \cdot 0,372^3$

c) $0,0208 \cdot \sqrt{9,193}$

d) $3,41^2 \cdot \sqrt{925}$

e) $\frac{3,14^2 \cdot \sqrt{61,2}}{\sqrt[3]{20,08}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{40,8 \cdot 9,32}{0,936}}$

g) $\sqrt[3]{6,62} \cdot \sqrt{0,526}$

77. Oblicz za pomocą tablic logarytmów, ile cyfr zawierają następujące liczby:

- a) 2^{100} b) 3^{100} c) 4^{1000} d) 3^{1000}

78. Oblicz za pomocą tablic logarytmów pole kwadratu o boku 8,372 cm.

79. Oblicz za pomocą tablic logarytmów bok kwadratu, którego pol: wynosi 813 cm^2 .

80. Oblicz za pomocą tablic logarytmów pole trójkąta, w którym długość podstawy wynosi 24,3 cm, a wysokość 23,16 cm.

81. Oblicz za pomocą tablic logarytmów pole trójkąta równobocznego o boku 3,1 cm.

82. Oblicz za pomocą tablic logarytmów pole trójkąta o bokach: 6,72 cm, 8,21 cm i 7,14 cm.

83. Oblicz za pomocą tablic logarytmów objętość sześcianu, którego krawędź wynosi $3,082 \text{ cm}$.

84. Oblicz za pomocą tablic logarytmów krawędź sześcianu, którego objętość wynosi 158 cm^3 .

85. Oblicz za pomocą tablic logarytmów pole powierzchni i objętość kuli o promieniu 4,63 cm.

86. Oblicz za pomocą tablic logarytmów objętość walca, w którym promień podstawy wynosi 2,6 cm, a wysokość 5,21 cm.

87. Wiedząc, że metr jest równy $\frac{1}{10\,000\,000}$ ćwiartki południka ziemskiego, oblicz objętość kuli ziemskiej. (Zastosować tablice logarytmów).

88. Obliczyć ciężar prostopadłościanu aluminiowego o wymiarach 3,8 cm, 4,8 cm i 6,2 cm, jeżeli wiadomo, że ciężar właściwy aluminium wynosi $2,58 \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$. (Zastosować tablice logarytmów).

89. Udowodnić, że zachodzą następujące wzory dla kologarytmów (p i q oznaczają liczby dodatnie):

$$\text{colog } (pq) = \text{colog } p + \text{colog } q$$

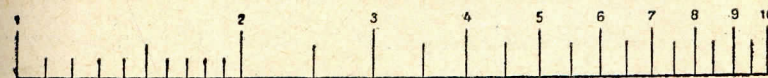
$$\text{colog } \frac{p}{q} = \text{colog } p - \text{colog } q$$

$$\text{colog } (p^z) = z \text{colog } p$$

[M]

§ 11. Suwak logarytmiczny.

Do szybkiego i praktycznego wykonywania rachunków (zwłaszcza mnożenia i dzielenia) używany jest powszechnie przyrząd, zwany suwakiem logarytmicznym. Aby zrozumieć zasadę tego przyrządu, musimy naprzód poznać tzw. skalę logarytmiczną.



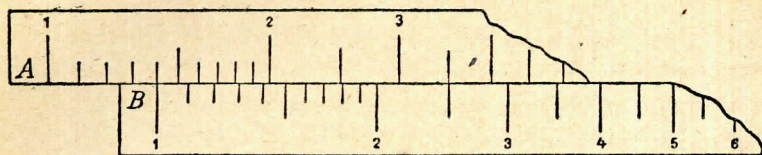
Rys. 3.

Odlóżyśmy na prostej OA (rys. 3), począwszy od punktu O , kolejno odcinki stanowiące takie części decymetra, ile wynoszą: $\log 1$, $\log 2$, $\log 3$, ...; końce tych odcinków oznaczamy liczbami: 1, 2, 3, ... Tak samo odlóżyśmy odcinki, których długości wyrażone w decymetrach wynoszą: $\log 1,1$, $\log 1,2$, $\log 1,3$, $\log 1,4$, ... Aby otrzymać skalę jeszcze gęstsza, można także odlóżyć odcinki, które w decymetrach odpowiadają liczbom: $\log 1,12$, $\log 1,14$, $\log 1,16$, ... Skalibrowana w ten sposób skala nazywa się skalą logarytmiczną, gdyż odległość kreski skali, której odpowiada liczba x , od początku skali (oznaczonego liczbą 1) równa się $\log x$ (przy wyborze decymetra za jednostkę długości). Można oczywiście także sporządzić skalę logarytmiczną obierając, zamiast 1 dcm, inną stosowną jednostkę długości.

Weźmy teraz dwie listewki A i B , wykreślmy na każdej z nich jak najstarannie skalę logarytmiczną (przy tej samej jednostce długości) i umieścimy listewkę B pod listewką A w ten sposób, aby można było jedną skalę przesunąć względem drugiej (obacz rys. 4 na następnej stronicy).

Listewki A i B z wykreślonymi na nich skalami logarytmicznymi przedstawiają uproszczony model suwaka logarytmicznego. Suwak ten zawiera, oprócz dwóch skal logarytmicznych, jeszcze inne skale, służące do obliczania pierwiastków, funkcji trygonometrycznych itd. Za pomocą suwaka można wykonywać obliczenia, oczywiście tylko przybliżone.

Stopień przybliżenia jest zależny od dokładności i gęstości odnośnych skal.



Rys. 4.

Mając do wykonania mnożenie np. $1,4 \cdot 2,5$ wyszukujemy na górnej skali kreskę, której odpowiada liczba 1,4, następnie przesuwamy dolną skalę tak, aby jej początek (oznaczony liczbą 1) znalazł się dokładnie pod kreską 1,4 skali górnej, wyszukujemy na dolnej skali kreskę 2,5 i wreszcie odczytujemy na górnej skali kreskę umieszczoną nad kreską 2,5 skali dolnej; w danym wypadku znajdujemy: 3,5. Znaleziona wartość 3,5 jest równa szukanemu iloczynowi $1,4 \cdot 2,5$, gdyż:

$$\log 1,4 + \log 2,5 = \log (1,4 \cdot 2,5)$$

W podobny zupełnie sposób można wykonać także dzielenie.

Ćwiczenia.

90. Na dłuższym pasku kartonu odkładamy począwszy od obranego punktu kolejno odcinki równe (w centymetrach) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ itd. i końce odcinków oznaczamy liczbami 1, 2, 3, 4 itd. W podobny sposób odkładamy także kwadraty wartości pośrednich. Tak skalibrowana skala nazywa się skalą kwadratową. Jak można za pomocą dwóch skal, jednej normalnej a drugiej kwadratowej, wykonywać działania podnoszenia do kwadratu i wyciągania pierwiastka kwadratowego?

[M]

§ 12. Równania wykładnicze i logarytmiczne.

Równania wykładnicze.

Równanie, w którym niewiadoma występuje w wykładniku potęgi, nazywamy równaniem wykładniczym. W niektórych wypadkach można równanie wykładnicze rozwiązać sposobem elementarnym. Rozważmy kilka przykładów:

1. Rozwiązać równanie:

$$(14) \quad 2^{x^2 - 13x + 29} = 128$$

Ponieważ: $128 = 2^7$, równanie (14) przybiera postać:

$$(14a) \quad 2^{x^2 - 13x + 29} = 2^7$$

Lewa strona równania (14^a) jest potęgą liczby 2 o wykładniku: $x^2 - 13x + 29$, prawa zaś strona jest potęgą liczby 2 o wykładniku 7. Aby te potęgi były równe, potrzeba i wystarcza, aby ich wykładniki były równe, tzn. aby było:

$$x^2 - 13x + 29 = 7$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy: $x_1 = 2$, $x_2 = 11$. Pierwiastkami równania wykładniczego (14) są więc liczby: 2 i 11.

2. Rozwiązać równanie:

$$(15) \quad 3^{2x} + 3^{2x+1} + 3^{2x+2} + 3^{2x+3} + 3^{2x+4} = 363$$

Uwzględniając, że:

$$3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3, \quad 3^{2x+2} = 3^{2x} \cdot 3^2, \quad 3^{2x+3} = 3^{2x} \cdot 3^3, \quad 3^{2x+4} = 3^{2x} \cdot 3^4,$$

możemy równanie (15) napisać w postaci:

$$(15a) \quad 3^{2x} + 3^{2x} \cdot 3 + 3^{2x} \cdot 9 + 3^{2x} \cdot 27 + 3^{2x} \cdot 81 = 363$$

lub:

$$(15b) \quad 3^{2x} (1 + 3 + 9 + 27 + 81) = 363$$

czyli:

$$(15c) \quad 3^{2x} = 3$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy: $x = \frac{1}{2}$.

3. Rozwiązać równanie:

$$(16) \quad 9^x - 5 \cdot 3^x = 266$$

Uwzględniając, że $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$, możemy równaniu (16) nadać postać:

$$(16a) \quad (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x = 266$$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą: $z = 3^x$. Pisząc w równaniu (16^a) niewiadomą z zamiast 3^x , otrzymujemy równanie:

$$(16b) \quad z^2 - 5z = 266$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy: $z_1 = -14$, $z_2 = 19$.

Musi więc być:

$$3^x = -14 \text{ albo } 3^x = 19$$

Pierwsze z tych równań nie spełnia się dla żadnego rzeczywistego x , gdyż potęga liczby dodatniej nie może być liczbą ujemną.

Aby rozwiązać równanie:

$$3^x = 19$$

logarytmujemy (przy zasadzie 10) obie strony równania i otrzymujemy:

$$x \log 3 = \log 19$$

skąd:

$$x = \frac{\log 19}{\log 3}$$

Pierwiastkiem równania (16) jest więc liczba: $\frac{\log 19}{\log 3}$

Równania logarytmiczne.

Równanie, w którym niewiadoma występuje pod znakiem logarytmu, nazywamy równaniem logarytmicznym. Podamy dwa przykłady rozwiązywania takich równań.

1. Rozwiązać równanie:

$$(17) \quad \log_2 (2x - 3) + \log_2 \frac{2x + 3}{5} = 3$$

Jeżeli liczba x spełnia równanie (17), wówczas liczba ta spełnia także równanie:

$$(17^a) \quad \log_2 \left[(2x - 3) \cdot \frac{2x + 3}{5} \right] = 3$$

gdyż suma logarytmów może być napisana jako logarytm iloczynu. Stosując określenie logarytmu, możemy równanie (17^a) napisać w postaci:

$$(17^b) \quad \frac{(2x - 3) \cdot (2x + 3)}{5} = 2^3$$

czyli:

$$(17^c) \quad 4x^2 - 9 = 40$$

skąd otrzymujemy: $x_1 = -\frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$.

Jeżeli więc równanie (17) posiada rozwiązanie, to rozwiązaniem może być tylko: albo liczba $-\frac{7}{2}$, albo liczba $\frac{7}{2}$. Za pomocą podstawienia sprawdzamy, czy istotnie te liczby spełniają równanie (17). Otóż liczba $-\frac{7}{2}$ równania (17) nie spełnia, gdyż wyrażenia: $2x - 3$ i $\frac{2x + 3}{5}$ przybierają dla $x = -\frac{7}{2}$ wartości ujemne, a logarytm liczby ujemnej jest dla nas symbolem pozbawionym sensu. Natomiast, jak łatwo sprawdzić, liczba $\frac{7}{2}$ spełnia równanie (17). A zatem jedynym pierwiastkiem równania (17) jest liczba $\frac{7}{2}$.

2. Rozwiązać równanie:

$$(18) \quad 2 \log (x - 1) = \log \frac{3x}{10} + \log \left(2x - \frac{7}{3} \right)$$

Jeżeli liczba x spełnia równanie (18), wówczas spełnia ona także równanie:

$$(18^a) \quad \log (x - 1)^2 = \log \left[\frac{3x}{10} \left(2x - \frac{7}{3} \right) \right]$$

jak wynika ze znanych nam praw dotyczących działań na logarytmach.

Uwzględniając, że logarytmy dwóch liczb równe są wtedy i tylko wtedy, gdy same liczby są równe, możemy napisać:

$$(18^b) \quad (x - 1)^2 = \frac{3x}{10} \left(2x - \frac{7}{3} \right)$$

skąd otrzymujemy: $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = 2$. Jeżeli więc równanie (18) posiada rozwiązania, to rozwiązaniem może być tylko liczba $\frac{5}{4}$ albo liczba 2. Za pomocą podstawienia sprawdzamy, że istotnie obie te liczby równanie (18) spełniają.

3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \log x - \log y = 2 \log 2 - \log 3 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie:

$$\log \frac{x}{y} = \log 4 - \log 3$$

czyli:

$$\log \frac{x}{y} = \log \frac{4}{3}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

Układ nasz sprowadza się do układu:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

skąd ostatecznie otrzymujemy: $x = 24$, $y = 18$.

Za pomocą podstawienia sprawdzamy, że wartości te spełniają dany układ równań.

W szczególności mamy:

$$\begin{aligned} \log 24 - \log 18 &= \log (2^3 \cdot 3) - \log (2 \cdot 3^2) = \\ &= (3 \log 2 + \log 3) - (\log 2 + 2 \log 3) = \\ &= 2 \log 2 - \log 3. \end{aligned}$$

Ćwiczenia.

91. Rozwiąż równania:

a) $4^{2x-5} = 256$

b) $3^{5x^2-11x-2} = \frac{1}{81}$

c) $\frac{11^{x^2+1}}{121^{2x}} = \frac{1}{1331}$

d) $2^{5x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{x-2}$

e) $3^{x^2-2} \cdot 9^{x+3} = 27^{x+2}$

92. Rozwiąż równania:

a) $3^x + 3^{x+2} = 3\frac{1}{3}$

b) $5^x - 5^{x-2} = 24$

c) $2^{x+1} + 2^{x+3} + 320 = 2^{x+2} + 2^{x+4}$

d) $2 \cdot 3^{2x-5} + 3^{2x-3} = 33$

*e) $4^x - 3^{x-2} = 5 \cdot 3^{x-1} + 4^{x-1}$

93. Rozwiąż równania:

a) $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$

b) $2^{x+1} + 4^x = 80$

c) $3^{x+1} + 9^x = 108$

d) $16^{x+1} + 1 = 17 \cdot 4^x$

*e) $7^{2x+1} + 5 = 36 \cdot 7^x$

94. Rozwiąż układy równań:

*a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 19 \\ 2^{2x} + 3^{2y} = 265 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 4^{x-3y} = 16 \\ \frac{8^{2y-x}}{32^{y-2x}} = 4^{11} \end{cases}$

95. Rozwiąż równania:

a) $\log_3 (5x+1) - \log_3 (x-1) = 2$

b) $\log x + \log (x+6) = \log (x+1) + \log (x+3)$

c) $\frac{1}{2} \log (x-16) + \frac{1}{2} \log (x+16) = 1 + \log 3$

d) $\log (2x+1) - \log (x+11) = \log (x-2) - \log (x-1)$

e) $3 \log (x+1) = \log (x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$

96. Rozwiąż równania:

a) $\frac{3 - 2(\log x)^2}{\log x} = 5$

b) $\frac{1}{2} \log x (\log x + 4) = 5 + \log \sqrt{x}$

97. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} 2 \log x + 3 \log y = 11 \\ 7 \log x - 2 \log y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \log 6 \end{cases}$

ROZDZIAŁ III

Ciągi liczbowe.

(K) (H) (M)

§ 13. Pojęcie ciągu.

Możemy skierować nasze myśli ku pewnemu przedmiotowi, niech będzie oznaczony np. literą a ; możemy następnie zwrócić naszą myśl ku przedmiotowi b , a potem ku przedmiotowi c itd. Wyliczając w myśli przedmioty a , b , c itd. jeden po drugim, w porządku dokładnie ustalonym, dochodzimy do utworzenia pojęcia ciągu tych przedmiotów. Przebiegając w myśli te same przedmioty, lecz w innym niż poprzednio porządku, otrzymujemy ciąg, który uważamy za różny od poprzedniego. Przedmioty a , b , c itd. nazywamy wyrazami ciągu. W naukach matematycznych rozpatrujemy ciągi, których wyrazami są liczby, punkty, funkcje, figury geometryczne i inne pojęcia w tych naukach używane. I tak mówimy o ciągach liczb, punktów, o ciągach funkcyj, figur itp. W tej książce będziemy zajmowali się ciągami liczb rzeczywistych.

Podajemy przede wszystkim kilka przykładów ciągów liczb:

- (1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- (2) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33.
- (3) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
- (4) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...
- (5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- (6) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, \dots$

Ciągi (1), (2), (3) są skończone, gdyż ilość wyrazów każdego z tych ciągów daje się wyrazić określoną liczbą naturalną. I tak ciąg (1) składa się z 9 wyrazów, ciąg (2) z 11 wyrazów, ciąg (3) z 10 wyrazów. Każdy ciąg skończony posiada więc wyraz ostatni.

Weźmy natomiast pod uwagę ciąg (4) składający się z liczb naturalnych nieparzystych, uporządkowanych według wielkości. Kropki po wyrazie 15 oznaczają, że 15 nie jest wyrazem ostatnim danego ciągu, lecz po tym wyrazie następują dalsze i że w ogóle ciąg nie posiada wyrazu ostatniego. Ciąg taki nazywamy ciągiem nieskończonym. Nieskończone są tak samo ciągi (5) i (6). Możemy ogólnie określić:

Ciąg nazywamy skończonym, jeżeli ilość wszystkich jego wyrazów daje się wyrazić pewną liczbą naturalną n .

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n odpowiada określony wyraz ciągu, wówczas ciąg nazywamy nieskończonym.

Ciąg skończony jest w zupełności określony, jeżeli dane jest prawo konstrukcji jego kolejnych wyrazów albo jeżeli wszystkie jego wyrazy są wymienione indywidualnie w kolejnym ich porządku (co — przynajmniej teoretycznie — zawsze jest rzeczą możliwą). W przypadku ciągu nieskończonego nie można wymienić indywidualnie wszystkich jego wyrazów, pozostaje wtedy tylko możliwość określenia ciągu przez podanie prawa konstrukcji jego kolejnych wyrazów. Prawo to jest np. odnośnie do ciągu (5) bardzo proste i natychmiast widoczne: wyraz zajmujący w ciągu n -te miejsce równy jest liczbie $\frac{1}{n}$. Niemniej proste jest prawo konstrukcji ciągu (6): n -ty jego wyraz jest kwadratem n -tej z kolei liczby naturalnej i równy jest n^2 .

Jeżeli rozpatrywany jest ciąg liczb, możemy jego wyraz pierwszy oznaczyć przez a_1 , drugi przez a_2 itd.; ogólnie: n -ty wyraz ciągu oznaczamy przez a_n . Ciąg ten zapiszemy wtedy w postaci następującej:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Prawo konstrukcji ciągu często najwygodniej podać w ten sposób, że wyrażamy a_n jako funkcję wskaźnika n , gdyż wtedy, mając dany numer wyrazu n , możemy bezpośrednio obliczyć wyraz ciągu odpowiadający temu numerowi. I tak dla ciągów (5), (6) otrzymujemy następujące wzory:

$$a_n = \frac{1}{n} \quad [\text{ciąg (5)}]$$

$$a_n = n^2 \quad [\text{ciąg (6)}]$$

Nie należy jednak sądzić, że takie określenie ciągu nieskończonego za pomocą wzoru jest zawsze możliwe. Np. dla ciągu:

$$(7) \quad 1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, \dots$$

w którym są podane przybliżenia dziesiętne liczby $\sqrt{2}$, uporządkowane według ilości cyfr dziesiętnych, nie potrafimy podać wyrażenia, pozwalającego przy danym n obliczyć bezpośrednio a_n , tj. n -te z kolei przybliżenie $\sqrt{2}$.

Prawo konstrukcji ciągu może być zupełnie dowolne. W szczególności nie jest konieczne, aby wyrazy występujące w różnych miejscach ciągu (którym odpowiadają różne numery porządkowe) miały wartości różne. Ciąg może nawet posiadać wszystkie wyrazy równe, jak np. ciąg następujący:

$$1, \sqrt{1}, \sqrt[3]{1}, \sqrt[4]{1}, \dots$$

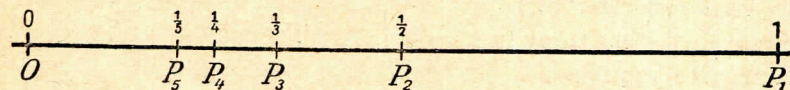
tj. ciąg:

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

Ciąg liczb możemy uzmysłowić geometrycznie, przyporządkując jego wyrazom odpowiednie punkty na osi liczbowej. I tak wyrazom kolejnym ciągu:

$$(8) \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

przyporządkujemy punkty: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$ (rys. 5).



Rys. 5

Otrzymujemy w ten sposób ciąg punktów:

$$(8a) \quad P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$$

który jest geometrycznym obrazem ciągu liczb (8).

Ciąg nieskończony:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

będziemy oznaczali krótko symbolem $\{a_n\}$. Symbol ciągu $\{a_n\}$ należy naturalnie odróżniać od symbolu a_n , który oznacza n -ty wyraz ciągu.

Ciąg liczb $\{a_n\}$ nazywamy rosnącym, jeżeli każdy jego wyraz jest mniejszy od wyrazu następnego, czyli jeżeli dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność:

$$a_n < a_{n+1}$$

Ciąg liczb $\{a_n\}$ nazywamy malejącym, jeżeli każdy jego wyraz jest większy od wyrazu następnego, czyli jeżeli dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność:

$$a_n > a_{n+1}$$

Przykłady. Każdy z ciągów:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$$

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

$$0,3, 0,33, 0,333, \dots$$

jest, jak widać bezpośrednio, rosnący, każdy zaś z ciągów:

$$-1, -2, -3, -4, \dots$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4, \dots$$

jest malejący. Ciąg:

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

nie jest ani rosnący, ani malejący, gdyż pierwszy jego wyraz jest większy od drugiego, drugi zaś jest mniejszy od trzeciego itd.

Rozwiążemy teraz następujące zadania:

I. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$, określony wzorem:

$$a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$$

jest malejący.

Ciąg jest malejący, gdy dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność:

$$a_n > a_{n+1}$$

Zbadamy więc różnicę: $a_n - a_{n+1}$. Mamy:

$$a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{3(n+1)+4} = \frac{2n+5}{3n+7}$$

a więc:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2n+5}{3n+7} = \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}$$

Dla każdego naturalnego n obie liczby: $3n+4$ i $3n+7$ są oczywiście dodatnie, a zatem ich iloczyn $(3n+4)(3n+7)$ jest również liczbą dodatnią, skąd wynika natychmiast, że

$$a_n - a_{n+1} > 0$$

a więc:

$$a_n > a_{n+1}$$

Ponieważ nierówność ta zachodzi dla każdego naturalnego n , ciąg rozpatrywany jest malejący.

II. Wykazać, że ciąg nieskończony:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

jest ciągiem rosnącym.

Jeżeli oznaczymy n -ty wyraz tego ciągu przez a_n , wówczas mamy:

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

a więc:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

skąd wynika, że dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność

$$a_n - a_{n+1} < 0$$

czyli:

$$a_n < a_{n+1}$$

co było do okazania.

Ćwiczenia.

98. Podaj wzór na n -ty wyraz a_n ciągu, tak aby wzór ten sprawdzał się dla pierwszych czterech wyrazów ciągu:

a) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, ...

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...

c) $\frac{1 \cdot 2}{1^2 + 2^2}$, $\frac{2 \cdot 3}{2^2 + 3^2}$, $\frac{3 \cdot 4}{3^2 + 4^2}$, $\frac{4 \cdot 5}{4^2 + 5^2}$, ...

d) 2, 4, 8, 16, ...

e) 3, 6, 9, 12, ...

99. Udowodnij, że n -ty wyraz ciągu nieskończonego:

$$-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$$

równy jest $(-1)^n$.

100. Udowodnij, że n -ty wyraz ciągu nieskończonego:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

jest:

$$\frac{1 + (-1)^n}{2}$$

101. Dany jest ciąg nieskończony $\{a_n\}$ określony za pomocą wzoru:

$$a_n = 3n - 2$$

Oblicz: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{24}, a_k, a_{2k}, a_{2k+3}$.

102. Dany jest ciąg nieskończony $\{a_n\}$, określony za pomocą wzoru:

$$a_n = 4^n$$

Oblicz: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_k, a_{k+2}$.

103. Dany jest ciąg nieskończony $\{a_n\}$, określony za pomocą wzoru:

$$a_n = n^3 - n^2$$

Oblicz: $a_1, a_2, a_3, a_7, a_{10}, a_{n+1}, a_{2n}$.

104. Dany jest ciąg nieskończony $\{a_n\}$, określony za pomocą wzoru:

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$$

Oblicz: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_8, a_{20}, a_{k-1}, a_{k+3}, a_{2k}$.

105. Wykaż, że ciągi nieskończone $\{a_n\}$, określone za pomocą wzorów:

a) $a_n = n - \frac{1}{2}$

b) $a_n = 3n - 1$

c) $a_n = \frac{5n+1}{2}$

d) $a_n = n^2 + 1$

e) $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$

są rosnące.

106. Wykaż, że ciągi nieskończone $\{a_n\}$, określone za pomocą wzorów:

a) $a_n = 20 - n$

b) $a_n = \frac{n+2}{n}$

c) $a_n = \frac{3n+2}{5n+3}$

są malejące.

107. W dany okrąg koła wpisujemy trójkąt foremny i długość jego obwodu oznaczamy przez u_1 ; następnie wpisujemy w ten okrąg sześciokąt foremny i długość jego obwodu oznaczamy przez u_2 ; następnie wpisujemy w okrąg dwunastokąt foremny i długość jego obwodu oznaczamy przez u_3 itd. Podwajając za każdym razem ilość boków wpisanego wielokąta foremnego otrzymujemy ciąg nieskończony:

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Wykaż, że ciąg ten jest rosnący. (Korzystać z pewnika, że suma dwóch boków trójkąta jest większa od boku trzeciego).

108. W dany okrąg koła wpisujemy trójkąt foremny i pole jego oznaczamy przez p_1 ; następnie wpisujemy w ten okrąg sześciokąt foremny i pole jego oznaczamy przez p_2 ; następnie wpisujemy w okrąg dwunastokąt foremny i pole jego oznaczamy przez p_3 itd. Podwajając za każdym razem ilość boków wpisanego wielokąta foremnego otrzymujemy ciąg nieskończony:

$$p_1, p_2, p_3, \dots$$

Wykaż, że ciąg ten jest rosnący.

[K] (H) (M)

§ 14. Postęp arytmetyczny.

Określenie postępu arytmetycznego.

Ciąg (skończony lub nieskończony) liczb, w którym każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez dodanie jednej i tej samej liczby d , nazywamy postępem arytmetycznym. Liczbę d nazywamy różnicą postępu.

Przykłady:

1. Ciąg liczb naturalnych nieparzystych:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$

jest postępowaniem arytmetycznym o różnicy 2, ponieważ:

$$1 + 2 = 3; \quad 3 + 2 = 5; \quad 5 + 2 = 7; \quad 7 + 2 = 9; \\ 9 + 2 = 11 \text{ itd.}$$

2. Kolejne wielokrotności trzech:

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

tworzą postęp arytmetyczny o różnicy 3.

3. Ciąg nieskończony:

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots$$

jest postępowaniem arytmetycznym o różnicy -1 .

4. Liczby następujące:

$$10, 9\frac{1}{2}, 9, 8\frac{1}{2}, 8, 7\frac{1}{2}, 7, 6\frac{1}{2}, 6, 5\frac{1}{2}$$

tworzą postęp arytmetyczny o różnicy $-\frac{1}{2}$, złożony z 10 wyrazów.

5. Ciąg nieskończony:

$$1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, \dots$$

jest postępowaniem arytmetycznym o różnicy $\sqrt{2}$.

6. Postęp arytmetyczny tworzą też wyrazy ciągu:

$$7, 7, 7, 7, 7, \dots$$

różnicą tego postępu jest liczba 0.

Gdy różnica postępu jest dodatnia, wówczas każdy wyraz następny jest większy od poprzedniego, postęp jest rosnący; gdy zaś różnica postępu jest ujemna, każdy wyraz następny jest mniejszy od poprzedniego, postęp jest malejący; wreszcie gdy różnica postępu równa się 0, postęp składa się z równych wyrazów.

Wzór na ogólny wyraz postępu arytmetycznego.

Weźmy pod uwagę postęp arytmetyczny:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

o różnicy równej d . Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że dla każdego naturalnego n zachodzi wzór:

$$(9) \quad a_n = a_1 + (n - 1) d$$

[: Istotnie, gdyby wzór (9) dla pewnych wskaźników n nie zachodził, wówczas istniałby pomiędzy tymi wskaźnikami wskaźnik najmniejszy. Niechaj k oznacza najmniejszą wartość wskaźnika n , przy której wzór (9) nie zachodzi. Wówczas dla wskaźnika $k - 1$ wzór (9) zachodziłby; mielibyśmy więc:

$$a_{k-1} = a_1 + (k - 2) d$$

Dodając do obu stron tej równości d , otrzymalibyśmy:

$$a_{k-1} + d = a_1 + (k - 2) d + d$$

czyli:

$$a_k = a_1 + (k - 1) d,$$

co byłoby sprzeczne z założeniem, że wzór (9) nie zachodzi dla wskaźnika k . Wynika stąd, że wzór (9) zachodzi dla każdego naturalnego n . :]

Wzór (9) możemy wyrazić słowami w ten sposób:

Aby otrzymać n -ty wyraz postępu arytmetycznego, dodajemy do pierwszego wyrazu $(n - 1)$ razy wziętą różnicę postępu.

Rozwiążemy teraz następujące zadania:

I. Obliczyć 26-ty wyraz postępu arytmetycznego:

$$1, 7, 13, 19, 25, \dots$$

Mamy tutaj: $a_1 = 1$, $d = 6$, $n = 26$. Stosując wzór (9) otrzymujemy:

$$a_{26} = 1 + 25 \cdot 6 = 151$$

II. Wyznaczyć postęp arytmetyczny, którego siódmym wyraz wynosi 32, a osiemnasty 87.

Postęp będzie wyznaczony, jeżeli obliczymy jego pierwszy wyraz a_1 i różnicę d . Wyrażając ze wzoru (9) siódmy i osiemnasty wyraz przez a_1 i d otrzymujemy:

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_{18} = a_1 + 17d$$

Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 32 \\ a_1 + 17d = 87 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ znajdujemy:

$$a_1 = 2, \quad d = 5.$$

Poszukiwany więc postęp jest następujący:

$$2, 7, 12, 17, 22, \dots$$

Interpolacja za pomocą postępu arytmetycznego.

Pomiędzy liczby a i b wstawić n liczb w taki sposób, aby łącznie z liczbami a i b utworzyły postęp arytmetyczny (a więc, by a było pierwszym, b ostatnim wyrazem tego postępu).

Oznaczmy różnicę poszukiwanego postępu przez d . Ponieważ postęp składa się z $(n + 2)$ wyrazów, b zaś jest ostatnim jego wyrazem, zatem b jest wyrazem postępu o wskaźniku: $n + 2$. Stosując wzór (9) otrzymujemy:

$$b = a + (n + 1) d$$

skąd:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

Mając różnicę d , możemy wypisać kolejne wyrazy szukanego postępu:

$$a, \quad a + \frac{b - a}{n + 1}, \quad a + \frac{2(b - a)}{n + 1}, \quad \dots, \quad a + \frac{n(b - a)}{n + 1}, \quad b$$

Wstawienie pomiędzy liczby dane innych liczb w ten sposób, aby utworzył się postęp arytmetyczny, nazywamy interpolacją za pomocą postępu arytmetycznego.

Przytoczmy jeszcze dwa przykłady interpolacji.

1. Przypuśćmy, że w pewnej miejscowości mierzono temperaturę powietrza w odstępach 4-godzinnych, a mianowicie o godz. 0, 4, 8, 12, 16, 20 i 24. Wyniki pomiarów przedstawia tabelka:

Czas w godzinach	0	4	8	12	16	20	24
Temperatura w st. Cels.	4,8	3,6	5,2	7,2	7,0	6,8	4,9

Należy obliczyć, jaka była temperatura o godz. 5, 6 i 7. Skoro nie znamy dokładnie prawa, według którego zmieniała się tego dnia temperatura powietrza, może naturalnie być tylko mowa o obliczaniu przybliżonych wartości nieznanymi temperatur. Otóż najprostszym założeniem będzie, że między godziną 4 i 8 temperatura zmieniała się w taki sposób, że równym okresom czasu odpowiadały jednakowe zmiany temperatury. Opierając się na takim przypuszczeniu możemy znaleźć przybliżone wartości nieznanymi temperatur, wstawiając pomiędzy liczby 3,6 i 5,2 (tj. znane wartości temperatury o godz. 4 i 8) trzy liczby, które by łącznie z liczbami 3,6 i 5,2 utworzyły postęp arytmetyczny. Otrzymujemy postęp następujący:

$$3,6, \quad 4, \quad 4,4, \quad 4,8, \quad 5,2.$$

A zatem przybliżona wartość temperatury o godzinie piątej wynosi 4°C , o godzinie szóstej $4,4^{\circ}\text{C}$, o godzinie siódmej $4,8^{\circ}\text{C}$.

2. Poniższa tabelka zawiera wartości pierwiastków sześciennych liczb naturalnych od 1 do 100 z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych:

n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$
1	1,0000	26	2,9625	51	3,7084	76	4,2358
2	1,2599	27	3,0000	52	3,7325	77	4,2543
3	1,4422	28	3,0366	53	3,7563	78	4,2727
4	1,5874	29	3,0723	54	3,7798	79	4,2908
5	1,7100	30	3,1072	55	3,8030	80	4,3089
6	1,8171	31	3,1414	56	3,8259	81	4,3267
7	1,9129	32	3,1748	57	3,8485	82	4,3445
8	2,0000	33	3,2075	58	3,8709	83	4,3621
9	2,0801	34	3,2396	59	3,8930	84	4,3795
10	2,1544	35	3,2711	60	3,9149	85	4,3968
11	2,2240	36	3,3019	61	3,9365	86	4,4140
12	2,2894	37	3,3322	62	3,9579	87	4,4310
13	2,3513	38	3,3620	63	3,9791	88	4,4480
14	2,4101	39	3,3912	64	4,0000	89	4,4647
15	2,4662	40	3,4200	65	4,0207	90	4,4814
16	2,5198	41	3,4482	66	4,0412	91	4,4979
17	2,5713	42	3,4760	67	4,0615	92	4,5144
18	2,6207	43	3,5034	68	4,0817	93	4,5307
19	2,6684	44	3,5303	69	4,1016	94	4,5468
20	2,7144	45	3,5569	70	4,1213	95	4,5629
21	2,7589	46	3,5830	71	4,1408	96	4,5789
22	2,8020	47	3,6088	72	4,1602	97	4,5947
23	2,8439	48	3,6342	73	4,1793	98	4,6104
24	2,8845	49	3,6593	74	4,1983	99	4,6261
25	2,9240	50	3,6840	75	4,2172	100	4,6416

Zastosujemy interpolację celem obliczenia pierwiastka sześciennego liczby 73,3. Z tabelki odczytujemy:

$$\sqrt[3]{73} \doteq 4,1793 \quad \sqrt[3]{74} \doteq 4,1983$$

Liczy:

$$\sqrt[3]{73} \quad \sqrt[3]{73,1} \quad \sqrt[3]{73,2} \quad \dots \quad \sqrt[3]{73,9} \quad \sqrt[3]{74}$$

nie tworzą postępu arytmetycznego, ponieważ odnośne różnice nie są dokładnie równe. Jeżeli jednak wstawimy pomiędzy liczby 4,1793 i 4,1983 dziewięć liczb, tworzących łącznie z liczbami 4,1793 i 4,1983 postęp arytmetyczny, wówczas otrzymamy przybliżone wartości liczb:

$$\sqrt[3]{73,1} \quad \sqrt[3]{73,2} \quad \dots \quad \sqrt[3]{73,9}$$

Różnica tego postępu wynosi:

$$(4,1983 - 4,1793) : 10 = 0,0019$$

Przybliżoną wartością $\sqrt[3]{73,3}$ jest czwarty wyraz tego postępu, który równa się: $4,1793 + 3 \cdot 0,0019$, a więc: 4,185. Błąd jest mniejszy niż 0,001, gdyż podnosząc do sześciannu liczby: 4,185 i 4,186 otrzymujemy:

$$4,185^3 = 73,297031625 < 73,3$$

$$4,186^3 = 73,349586856 > 73,3$$

skąd:

$$4,185 < \sqrt[3]{73,3} < 4,186$$

Suma wyrazów postępu arytmetycznego.

Rozpatrzmy postęp arytmetyczny.

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Sumę pierwszych n wyrazów postępu oznaczmy przez s_n :

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Chodzi o to, aby wyrazić s_n przez a_1 , a_n i n . W tym celu piszemy:

$$(10) \quad \begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ s_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Dodając stronami obie równości (10) i łącząc przy tym wyrazy, podpisane pod sobą, w sumy częściowe, otrzymujemy:

$$(11) \quad 2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1).$$

Otóż łatwo zauważyć, że wszystkie sumy, zawarte w nawiasach, mają jednakową wartość. Pierwsza z nich bowiem ma wartość: $a_1 + a_n$. W drugiej składnik a_2 równa się $a_1 + d$ (jeżeli przez d oznaczymy różnicę postępu), a składnik a_{n-1} równa się $a_n - d$, a zatem $a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$. W trzeciej sumie składnik a_3 równa się $a_2 + d$, składnik zaś a_{n-2} równa się $a_{n-1} - d$, a zatem $a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$. Rozumując tak dalej, dochodzimy do wniosku, że każda suma częściowa, zawarta w nawiasie, posiada wartość równą $a_1 + a_n$. Biorąc to pod uwagę, otrzymujemy z równości (11):

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

czyli:

$$(12) \quad s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Wzór (12) możemy napisać także w postaci:

$$(12a) \quad s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Biorąc pod uwagę, że wyrażenie:

$$\frac{a_1 + a_n}{2}$$

jest średnią arytmetyczną pierwszego i ostatniego wyrazu postępu, możemy powiedzieć:

Suma pierwszych n wyrazów postępu arytmetycznego równa jest iloczynowi liczby n przez średnią arytmetyczną pierwszego i n -tego wyrazu postępu.

Obliczmy dla przykładu sumę pierwszych n liczb w ciągu liczb naturalnych.

Stosując wzór (12) otrzymujemy, że suma ta wynosi:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

np. suma liczb naturalnych $1 + 2 + 3 + \dots + 50$ równa się:

$$\frac{50 \cdot (50 + 1)}{2} = 1275$$

Obliczmy teraz sumę n pierwszych z rzędu liczb naturalnych nieparzystych. Liczby te tworzą postęp arytmetyczny, w którym wyraz pierwszy $a_1 = 1$, różnica $d = 2$. Aby obliczyć n -ty wyraz a_n , stosujemy wzór (9) i otrzymujemy:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$$

Oznaczając szukaną sumę przez s_n otrzymujemy:

$$s_n = n \cdot \frac{1 + (2n - 1)}{2} = n^2$$

We wzorze (12) suma s_n wyrażona jest przez wyraz pierwszy, wyraz n -ty oraz ilość wyrazów. Możemy jednak także wyrazić tę sumę przez wyraz pierwszy, różnicę postępu oraz ilość wyrazów. W tym celu wystarczy podstawić we wzorze (12) zamiast a_n wartość określoną przez wzór (9). Otrzymujemy po łatwym przekształceniu:

$$(12b) \quad s_n = n a_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

Ćwiczenia.

109. Wypisz 10 początkowych wyrazów postępu arytmetycznego, w którym pierwszy wyraz a_1 i różnica d wynoszą:

- a) $a_1 = 7, \quad d = 3$
- b) $a_1 = 30, \quad d = -4$
- c) $a_1 = -2, \quad d = \frac{1}{2}$
- d) $a_1 = a, \quad d = b$
- e) $a_1 = x + y, \quad d = y$
- f) $a_1 = a - b, \quad d = a + b$

110. Oblicz n -ty wyraz postępu arytmetycznego:

- a) 5, 11, 17, ...
- b) 5, -4, -13, ...
- c) 0,5, 0,507, 0,514, ...
- d) $a, \frac{a+b}{2}, b, \dots$

111. Oblicz n -ty, $(n+1)$ -szy i $(n+k)$ -ty wyraz postępu arytmetycznego:

- a) 1, 9, 17, ...
- b) $1+3a, 4+3a, 7+3a, \dots$

112. Ile wynosi n -ta z kolei liczba naturalna, która dzielona przez 7 daje resztę 3?

113. Ile wynosi $(n+1)$ -sza z kolei liczba naturalna, która dzielona przez 4 daje resztę 1?

114. Ósmy wyraz postępu arytmetycznego wynosi 37, jedenasty zaś wyraz równa się 52. Wyznacz ten postęp i oblicz n -ty jego wyraz.

115. Trzeci wyraz postępu arytmetycznego wynosi 27, dwunasty zaś wyraz równa się 144. Wyznacz ten postęp i oblicz $(n+1)$ -szy jego wyraz.

116. Wyznacz postęp arytmetyczny, którego pierwszy wyraz równa się A , a jedenasty wyraz równa się B .

117. Wyznacz postęp arytmetyczny, którego n -ty wyraz równa się A , a m -ty wyraz równa się B . (Zakładamy, że $n \neq m$).

118. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym suma pierwszego i czwartego wyrazu wynosi 25, a różnica siódmego i trzeciego wyrazu wynosi 12.

119. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym suma dwóch pierwszych wyrazów wynosi 0, a suma czwartego i siódmego wyrazu wynosi -48.

120. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym suma trzeciego i piątego wyrazu wynosi 5, a iloczyn drugiego i czwartego wyrazu wynosi $\frac{15}{4}$.

121. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym suma drugiego i trzeciego wyrazu wynosi 17, a iloczyn trzeciego i czwartego wyrazu wynosi 130.

122. Drugi wyraz postępu arytmetycznego wynosi 10, piąty wyraz 28, a ostatni wyraz 58. Oblicz wyraz pierwszy oraz ilość wyrazów postępu.

123. Udowodnić, że każdy wyraz postępu arytmetycznego (z wyjątkiem pierwszego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

124. Dana jest funkcja:

$$f(x) = ax + b$$

Udowodnić, że ciąg:

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

jest postępowym arytmetycznym. Kiedy postęp ten jest rosnący, kiedy malejący, a kiedy składa się z równych wyrazów?

*125. Dana jest funkcja:

$$f(x) = 3x - 2$$

oraz postęp arytmetyczny:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Udowodnić, że ciąg:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

jest również postępowym arytmetycznym.

*126. Dana jest funkcja:

$$f(x) = ax + b$$

oraz postęp arytmetyczny:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

Udowodnić, że ciąg:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$$

jest również postępowym arytmetycznym.

*127. Dane są dwa postępy arytmetyczne:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

oraz dwie liczby rzeczywiste A i B . Wykaż, że ciąg $\{u_n\}$ określony za pomocą wzoru:

$$u_n = Aa_n + Bb_n$$

jest postępowym arytmetycznym.

*128. Dany jest ciąg kwadratów liczb naturalnych:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

Wykazać, że kolejne różnice wyrazów tego ciągu:

$$4-1, 9-4, 16-9, 25-16, \dots$$

tworzą postęp arytmetyczny.

*129. Dana jest funkcja kwadratowa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Udowodnić, że ciąg różnic:

$$f(2) - f(1), f(3) - f(2), f(4) - f(3), \dots$$

jest postępem arytmetycznym.

130. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym iloczyn wyrazu drugiego i trzeciego wynosi 120, a suma pierwszych siedmiu wyrazów wynosi 98.

131. W postępie arytmetycznym skończonym o różnicy 4 wyraz pierwszy wynosi 5, a suma wszystkich wyrazów wynosi 1890. Oblicz ostatni wyraz postępu.

132. W postępie arytmetycznym złożonym z 15 wyrazów ostatni wyraz wynosi 71, suma zaś wszystkich wyrazów wynosi 540. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę postępu.

133. Suma pewnej ilości wyrazów postępu arytmetycznego o różnicy 4 jest o 400 mniejsza od sumy tej samej ilości następnych wyrazów. Oblicz ilość wyrazów.

*134. Wyznacz postęp arytmetyczny, w którym dla każdego n :

$$a) s_n = Cn^2$$

$$b) s_n = 3n^2 + 5n$$

(Przez s_n oznaczamy sumę pierwszych n wyrazów postępu).

135. Mając dwa postępy arytmetyczne:

$$\begin{matrix} 1, & 4, & 7, & \dots \\ 20, & 21, & 22, & \dots \end{matrix}$$

oblicz, jaką jednakową ilość wyrazów początkowych należy wziąć z każdego postępu, aby suma wyrazów pierwszego postępu była równa sumie wyrazów drugiego postępu.

136. Boki trójkąta prostokątnego, którego obwód wynosi 3 s, tworzą postęp arytmetyczny. Oblicz boki tego trójkąta.

137. Boki trójkąta prostokątnego tworzą postęp arytmetyczny. Oblicz stosunek przystosowanych do przeciwprostokątnej.

138. Boki prostokąta i jego przekątna tworzą postęp arytmetyczny; pole prostokąta wynosi 108 cm². Oblicz boki tego prostokąta.

139. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2m \\ -x + 4y + z = 8 \\ 2x - y - z = m - 8 \end{cases}$$

Rozwiąż ten układ i następnie zbadaj, dla jakiej wartości m pierwiastki x, y, z tworzą postęp arytmetyczny.

*140. Oznaczamy przez s_n sumę n pierwszych wyrazów dowolnego postępu arytmetycznego. Dowieść, że:

$$s_{n+3} - s_n = 3(s_{n+2} - s_{n+1}).$$

*141. Temperatura wrzenia wody zależy, jak wiadomo, od ciśnienia. Pod ciśnieniem równym 760 mm rtęci woda wrze w temperaturze 100°C, pod ciśnieniem mniejszym w niższej temperaturze, a pod ciśnieniem większym w wyższej temperaturze. Poniższa tabelka zawiera kilka wartości ciśnienia i odpowiadające im wartości temperatury wrzenia wody:

Ciśnienie mm	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780
Temperatura wrzenia °C	96,92	97,32	97,71	98,11	98,49	98,88	99,96	99,63	100,00	100,37	100,73

Oblicz za pomocą interpolacji temperaturę wrzenia wody pod ciśnieniem 736 mm i pod ciśnieniem 774 mm (z dokładnością do jednej setnej stopnia Cels.).

[H] [M]

§ 15. Ciągi arytmetyczne wyższych rzędów.

Zajmiemy się teraz obliczeniem sumy kwadratów pierwszych n liczb naturalnych, czyli sumy:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Składniki tej sumy nie tworzą postępu arytmetycznego, nie możemy więc oczywiście korzystać ze wzoru (12).

Celem obliczenia tej sumy zastosujemy tożsamość następującą:

$$(13) \quad (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

którą czytelnik sprawdzi przez wykonanie działań wskazanych

po stronie lewej. Podstawiając we wzorze (13) $x = 1$, następnie $x = 2$ itd., w końcu $x = n$, otrzymujemy następujące n równości:

$$(14) \quad \begin{aligned} 2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ (n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Dodamy teraz stronami równości (14). Po stronie lewej zniósą się wszystkie wyrazy oprócz $(n+1)^3$ i -1^3 , po stronie prawej łączymy w sumy częściowe wyrazy podpisane pod sobą. Otrzymujemy w ten sposób:

$$(15) \quad (n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= s_n \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= s_n^{(2)} \end{aligned}$$

Sumę s_n obliczamy ze wzoru (12) i otrzymujemy:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Podstawiając tę wartość do równości (15) otrzymujemy:

$$(16) \quad (n+1)^3 - 1^3 = 3 s_n^{(2)} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

a więc:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 s_n^{(2)} + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

skąd łatwo obliczamy:

$$(17) \quad s_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

lub inaczej:

$$(18) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Otrzymaliśmy więc wzór, pozwalający obliczyć sumę kwadratów pierwszych n liczb naturalnych.

Obliczmy dla przykładu sumę:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$$

Stosując wzór (18) otrzymujemy, że suma ta ma wartość 338 350. Nie znając wzoru (18), musielibyśmy stracić dużo czasu dla obliczenia tej sumy.

Wyprowadzimy jeszcze wzór na sumę sześcianów pierwszych n liczb naturalnych. Przez mnożenie znajdujemy, że:

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

stad:

$$(19) \quad (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Podstawiając w tożsamości (19) $x = 1$, następnie $x = 2$ itd., w końcu $x = n$, otrzymujemy następujące n równości:

$$(20) \quad \begin{aligned} 2^4 - 1^4 &= 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ 3^4 - 2^4 &= 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ 4^4 - 3^4 &= 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\ 5^4 - 4^4 &= 4 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 1 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ (n+1)^4 - n^4 &= 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Dodamy teraz stronami równości (20). Po stronie lewej zniósą się wszystkie wyrazy oprócz $(n+1)^4$ i -1^4 ; po stronie prawej łączymy w sumy częściowe wyrazy podpisane pod sobą. Przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n \\ s_n^{(2)} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 \\ s_n^{(3)} &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 s_n^{(3)} + 6 s_n^{(2)} + 4 s_n + n,$$

a więc:

$$(21) \quad n^4 + 4 n^3 + 6 n^2 + 4 n = 4 s_n^{(3)} + 6 s_n^{(2)} + 4 s_n + n.$$

Uwzględniając, że:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$s_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i podstawiając te wartości do równości (21) otrzymujemy po łatwym rachunku:

$$(22) \quad s_n^{(3)} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

lub inaczej:

$$s_n^{(3)} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = s_n^2$$

a więc:

$$(23) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \dots + n]^2$$

Suma trzecich potęg pierwszych z kolei n liczb naturalnych równa się kwadratowi sumy pierwszych potęg tych n liczb naturalnych.

W podobny sposób możemy obliczyć sumę czwartych itd. potęg pierwszych z kolei n liczb naturalnych.

Ćwiczenia.

*142. Oblicz sumę:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1)$$

Wskazówka. Zastosować przekształcenie: $n(n+1) = n^2 + n$

*143. Udowodnij, że zachodzi następująca tożsamość:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Wskazówka. Zastosować przekształcenie:

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

*144. Oblicz sumę:

$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + (n+1) \cdot n^2$$

Wskazówka. Zastosować przekształcenie: $(n+1)n^2 = n^3 + n^2$

[K] (H) (M)

§ 16. Postęp geometryczny.

Określenie postępu geometrycznego.

Ciąg (skończony lub nieskończony) liczb, w którym każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez jedną i tę samą liczbę q , nazywamy postępem geometrycznym. Liczbę q nazywamy ilorazem postępu.

Przykłady:

1. Ciąg nieskończony:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

którego wyrazy są kolejnymi potęgami liczby 2, jest postępem geometrycznym o ilorazie 2, ponieważ:

$$2 \cdot 2 = 4, \quad 4 \cdot 2 = 8, \quad 8 \cdot 2 = 16, \quad 16 \cdot 2 = 32 \text{ itd.},$$

a zatem także:

$$\frac{4}{2} = 2, \quad \frac{8}{4} = 2, \quad \frac{16}{8} = 2, \quad \frac{32}{16} = 2 \text{ itd.}$$

2. Ciąg nieskończony:

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$$

jest postępem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{2}$.

3. W ciągu nieskończonym:

$$16, 24, 36, 54, 81, 121\frac{1}{2}, \dots$$

każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez $\frac{3}{2}$. Ciąg ten jest więc postępem geometrycznym o ilorazie $\frac{3}{2}$.

4. Ciąg nieskończony:

$$1, -3, 9, -27, 81, \dots$$

jest postępem geometrycznym o ilorazie -3 .

5. Również ciągi następujące są postępami geometrycznymi:

$$7, -7, 7, -7, 7, -7, \dots$$

$$8, 8, 8, 8, 8, 8, \dots$$

Iloraz pierwszego postępu wynosi -1 , iloraz drugiego 1 .

Postęp geometryczny może być rosnący, jak wskazują przykłady 1 i 3, albo też malejący, jak poucza przykład 2, albo też może nie być ani rosnący, ani malejący, jak widać z przykładu 4. Jeżeli pierwszy wyraz postępu jest dodatni, wówczas postęp jest rosnący, gdy jego iloraz jest większy od jedności, a malejący, gdy iloraz jest dodatni, ale mniejszy od jedności.

Wzór na wyraz ogólny postępu geometrycznego.

Weźmy pod uwagę postęp geometryczny:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

o ilorazie q . Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ a_3 &= a_2 q = a_1 q^2 \\ a_4 &= a_3 q = a_1 q^3 \\ a_5 &= a_4 q = a_1 q^4 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Widzimy zatem, że dla $n = 2, 3, 4, \dots$ zachodzi wzór:

$$(24) \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

[Istotnie, gdyby wzór (24) dla pewnych wskaźników n nie zachodził, wówczas istniałby pomiędzy tymi wskaźnikami wskaźnik najmniejszy; oznaczmy go przez k . Dla wskaźnika: $k-1$ wzór (24) zachodziłby; mielibyśmy więc:

$$a_{k-1} = a_1 q^{k-2}$$

Mnożąc obie strony tej równości przez q otrzymalibyśmy:

$$a_{k-1} \cdot q = a_1 q^{k-2} \cdot q$$

czyli:

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

co byłoby sprzeczne z założeniem, że wzór (24) nie zachodzi dla wskaźnika k . Wynika stąd, że wzór (24) zachodzi dla każdego naturalnego n . :]

Wzór (24) możemy wyrazić słowami w ten sposób:

Aby otrzymać n -ty wyraz postępu geometrycznego, mnożymy pierwszy wyraz przez iloraz postępu podniesiony do potęgi o wykładniku $(n-1)$.

Suma wyrazów postępu geometrycznego.

Niech będzie dany postęp geometryczny:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

o ilorazie q . Sumę pierwszych n wyrazów tego postępu oznaczmy przez s_n :

$$(25) \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Chodzi o to, aby wyrazić s_n przez a_1, q i n . Gdy q równa się 1 , wówczas wszystkie wyrazy postępu są równe a_1 , a zatem: $s_n = na_1$. Możemy więc w dalszym ciągu założyć, że $q \neq 1$. Wyrażając każdy składnik, występujący w sumie (25), przez a_1, q i n za pomocą wzoru (24), otrzymujemy:

$$(26) \quad s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

Pomnożymy obie strony równości (26) przez q . Otrzymamy:

$$(27) \quad q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n$$

Równości (27) i (26) dają:

$$q s_n - s_n = (a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n) - (a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1})$$

czyli po redukcji po stronie prawej:

$$(28) \quad q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1$$

a zatem:

$$(29) \quad s_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1)$$

Aby obliczyć s_n , podzielimy obie strony równości (29) przez $(q-1)$, co możemy uczynić, ponieważ $q-1 \neq 0$. Otrzymamy wówczas:

$$(30) \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rozwiążemy teraz następujące zadania:

I. Wyznaczyć postęp geometryczny, którego czwarty wyraz wynosi 54, szósty zaś wyraz 486.

Postęp będzie wyznaczony, jeżeli obliczymy jego pierwszy wyraz a_1 oraz iloraz q . Wyrażając ze wzoru (24) czwarty i szósty wyraz przez a_1 i q , otrzymujemy:

$$a_4 = a_1 q^3$$

$$a_6 = a_1 q^5$$

Mamy więc układ równań:

$$(31) \quad \begin{cases} a_1 q^3 = 54 \\ a_1 q^5 = 486 \end{cases}$$

Dzieląc odpowiednio obie strony tych równań otrzymujemy: $q^2 = 9$, czyli: $q = -3$ albo $q = 3$. Podstawiając do pierwszego z równań (31) $q = -3$ otrzymujemy: $a_1 = -2$, podstawiając zaś $q = 3$ otrzymujemy: $a_1 = 2$. Istnieją więc dwa postępy, spełniające warunki naszego zadania, a mianowicie:

$$i \quad \begin{array}{l} -2, 6, -18, 54, -162, 486, \dots \\ 2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots \end{array}$$

II. Postęp geometryczny o ilorazie 0,2 składa się z pięciu wyrazów. Suma wszystkich wyrazów wynosi 124,96. Obliczyć wyraz ostatni.

Obliczymy najpierw pierwszy wyraz postępu a_1 . Stosując wzór (30) mamy:

$$124,96 = a_1 \cdot \frac{0,2^5 - 1}{0,2 - 1}$$

stąd:

$$a_1 = 100$$

Mając pierwszy wyraz a_1 , obliczamy piąty wyraz a_5 ze wzoru (24) i otrzymujemy:

$$a_5 = 100 \cdot 0,2^4 = 0,16$$

III. Ile początkowych wyrazów postępu geometrycznego, którego pierwszy wyraz wynosi 7, a iloraz 2, należy dodać, aby otrzymać sumę 1799?

Oznaczmy szukaną ilość wyrazów przez n . Stosując wzór (30) otrzymujemy:

$$1799 = 7 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

stąd:

$$(32) \quad 2^n = 258$$

Ponieważ $2^8 = 256$, a $2^9 = 512$, nie istnieje taka liczba naturalna, która by spełniała równanie (32), a że ilość wyrazów musi być liczbą naturalną, przeto nasze zadanie nie posiada rozwiązania. (Gdy dodajemy 8 wyrazów rozpatrywanego postępu, wówczas otrzymujemy sumę mniejszą od 1799, gdy zaś dodajemy 9 wyrazów, wówczas otrzymujemy sumę większą od 1799; sumy 1799 otrzymać nie możemy).

Nierówność Bernoulli'ego.

Na zakończenie wyprowadzimy jeszcze pewne twierdzenie, z którego skorzystamy w § 18.

Oznaczmy przez δ liczbę dodatnią i rozpatrzmy postępy:

$$(33) \quad 1, 1 + \delta, (1 + \delta)^2, (1 + \delta)^3, \dots$$

$$(34) \quad 1, 1 + \delta, 1 + 2\delta, 1 + 3\delta, \dots$$

Pierwszy z tych postępow jest postępow geometrycznym o ilorazie $1 + \delta$, drugi jest postępow arytmetycznym o różnicy δ ; pierwsze i drugie wyrazy obu postępow są sobie równe. Otóż wykażemy, że poczynszy od wyrazu trzeciego, każdy wyraz pierwszego postępu (geometrycznego) jest większy od odpowiedniego wyrazu drugiego postępu (arytmetycznego). Innymi słowy, udowodnimy następujące twierdzenie:

Jeżeli δ oznacza liczbę dodatnią, a n liczbę naturalną większą od jedności, wówczas:

$$(35) \quad (1 + \delta)^n > 1 + n\delta$$

[: Dowód. Stosując wzór na sumę n wyrazów postępu geometrycznego otrzymujemy:

$$1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \dots + (1 + \delta)^{n-1} = \frac{(1 + \delta)^n - 1}{\delta}$$

Lewa strona tej równości jest sumą n składników, z których pierwszy równa się 1, pozostałe zaś są większe od 1; wartość tej sumy jest zatem większa niż n .

Uwzględniając to, otrzymujemy nierówność: $\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} > n$,
stad: $(1+\delta)^n - 1 > n\delta$, czyli: $(1+\delta)^n > 1 + n\delta$. :]

Nierówność (35) jest w matematyce znaną pod nazwą nierówności Bernoulli'ego.

Ćwiczenia.

145. Wypisz 5 początkowych wyrazów postępu geometrycznego, w którym pierwszy wyraz a_1 i iloraz q wynoszą:

- a) $a_1 = 2$, $q = 3$
- b) $a_1 = 4$, $q = -2$
- c) $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$
- d) $a_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$
- e) $a_1 = 1$, $q = ab$
- f) $a_1 = 3$, $q = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)
- g) $a_1 = 1 + t^2$, $q = \sqrt{1 + t^2}$

146. Oblicz n -ty wyraz postępu geometrycznego:

- a) 3, 15, 75, ...
- b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{32}$, ...
- c) a , ab^2 , ab^4 , ...

147. Wyznacz postęp geometryczny, którego trzeci wyraz równa się $\frac{20}{9}$, a piąty wyraz $\frac{80}{81}$.

148. Wyznacz postęp geometryczny, którego trzeci wyraz równa się 12, a ósmy wyraz $\frac{3}{8}$.

149. Różnica między drugim a pierwszym wyrazem postępu geometrycznego wynosi 0,8, różnica zaś między trzecim a pierwszym wyrazem wynosi 1,76. Wyznacz ten postęp.

*150. Z beczki zawierającej 100 kg czystego alkoholu wylano 2 kg i dolano 2 kg wody; następnie znowu wylano 2 kg mieszaniny i dolano 2 kg wody itd. Ile zostało w beczce alkoholu, gdy czynność tę powtórzono 2, 3, ..., n razy?

151. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów postępu geometrycznego:

- a) 4, 12, 36, 108, ...
- b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$
- c) 3, $3\sqrt{2}$, 6, $6\sqrt{2}$, ...

152. Suma n początkowych wyrazów postępu geometrycznego o ilorazie 3 równa jest s . Oblicz k -ty wyraz tego postępu.

153. Suma wszystkich wyrazów postępu geometrycznego skończonego o pierwszym wyrazie równym 25 i ilorazie 3 wynosi 1000. Oblicz ilość wyrazów.

154. Suma wszystkich wyrazów postępu geometrycznego skończonego o pierwszym wyrazie równym 18 i ilorazie -2 wynosi 198. Oblicz ilość wyrazów.

155. Suma wszystkich wyrazów postępu geometrycznego skończonego o pierwszym wyrazie równym 32 i ilorazie $\frac{3}{2}$ wynosi 665. Oblicz ilość wyrazów.

156. Dany jest postęp geometryczny skończony o parzystej ilości wyrazów, którego pierwszy wyraz jest różny od 0. Udowodnić, że stosunek sumy wyrazów o numerach porządkowych parzystych do sumy wyrazów o numerach porządkowych nieparzystych jest równy ilorazowi postępu.

157. Dane są dwie liczby dodatnie a i b . Wyznacz taką liczbę dodatnią x , aby ciąg:

$$a, x, b$$

był postępow geometrycznym. (Liczbę x nazywamy średnią geometryczną liczb a i b).

158. Pomiędzy liczby 32 i 500 wstaw dwie liczby x i y w taki sposób, aby ciąg:

$$32, x, y, 500$$

był postępow geometrycznym.

159. Pomiedzy liczby 4 i 8 wstaw cztery liczby x, y, z, t w taki sposób, aby ciąg:

$$4, x, y, z, t, 8$$

był postępem geometrycznym.

160. Pomiedzy liczby 2 i 30 wstaw dwie liczby w taki sposób, aby trzy pierwsze utworzyły postęp geometryczny, a trzy ostatnie postęp arytmetyczny.

161. Pierwsze wyrazy dwóch postępow — arytmetycznego i geometrycznego — są jednakowe i każdy z nich równa się 8; drugie wyrazy obu postępow są również jednakowe. Stosunek trzeciego wyrazu postępu arytmetycznego do trzeciego wyrazu postępu geometrycznego wynosi $\frac{16}{25}$. Wyznacz oba postępy.

162. Trzy liczby, z których druga jest o 16 większa od pierwszej, a trzecia o 80 większa od drugiej, tworzą postęp geometryczny. Wyznacz te liczby.

163. Stosunek sumy trzech pierwszych wyrazów postępu geometrycznego do sumy pierwszego i trzeciego wyrazu wynosi $\frac{19}{13}$. Oblicz iloraz postępu.

164. Suma trzech liczb, tworzących postęp arytmetyczny, wynosi 24. Jeżeli do pierwszej liczby dodamy 1, do drugiej 2, do trzeciej 35, otrzymamy postęp geometryczny. Wyznacz te liczby.

165. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ -2x + y + z = 6m \\ x - y + z = 4m + 1 \end{cases}$$

Rozwiąż ten układ i następnie zbadaj, dla jakiej wartości m pierwiastki x, y, z tworzą postęp geometryczny.

166. Na jednym ramieniu kąta 45° obrano w odległości a od wierzchołka punkt A_1 ; z punktu A_1 wykreślono odcinek $A_1 B_1$ prostopadły do drugiego ramienia; z punktu B_1 wykreślono odcinek $B_1 A_2$ prostopadły do pierwszego ramienia; z punktu A_2 wykreślono odcinek $A_2 B_2$ prostopadły do drugiego ramienia itd.

10. Udowodnić, że długości odcinków

$$A_1 B_1, B_1 A_2, A_2 B_2, B_2 A_3, \dots$$

tworzą postęp geometryczny.

20. Obliczyć sumę n kolejnych odcinków otrzymanego ciągu.

167. Długości krawędzi prostopadłościanu tworzą postęp geometryczny. Objętość prostopadłościanu wynosi 1000 cm^3 , a pole całej powierzchni prostopadłościanu wynosi 700 cm^2 . Oblicz długości krawędzi.

168. Dany jest postęp geometryczny:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Wykazać, że różnice:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$$

tworzą również postęp geometryczny.

169. Wykazać, że ciąg $\{a_n\}$ określony za pomocą wzoru:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^n$$

jest postępem geometrycznym.

170. Dane są dwa postępy geometryczne:

$$\begin{matrix} i & a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ & b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots \end{matrix}$$

o jednakowym ilorazie. Wykazać, że wówczas sumy:

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n, \dots$$

tworzą postęp geometryczny.

*171. Dane są dwa postępy geometryczne:

$$\begin{matrix} i & a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ & b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots \end{matrix}$$

Wykazać, że iloczyny:

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots, a_n b_n, \dots$$

tworzą również postęp geometryczny.

*172. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli ciąg nieskończony:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

jest postępowaniem arytmetycznym, a liczba a jest dodatnia, to ciąg nie-
skończony:

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \dots, a^{x_n}, \dots$$

jest postępowaniem geometrycznym.

[H] [M]

§ 17. Procent składany.

Kapitalizacja odsetek.

Postęp geometryczny występuje w zagadnieniach, w których chodzi o obliczanie procentu składanego. Przypomnijmy pojęcie procentu składanego.

Przypuśćmy, że złożyliśmy w banku 2000 zł na 5%. Po upływie jednego roku odsetki wynoszą 100 zł i — skoro właściciel kapitału dochodu tego nie pobiera — zostają dopisane do kapitału, tak że od początku drugiego roku leży już w banku nie kwota 2000 zł, lecz 2100 zł, i od tej kwoty oblicza się odsetki za drugi rok. Odsetki za drugi rok wynoszą więc 105 zł i z końcem drugiego roku zostają dopisane do kapitału 2100 zł, tak że od początku trzeciego roku leży już w banku kwota 2205 zł. Odsetki za trzeci rok wynoszą więc 110,25 zł, tak że po dopisaniu ich do kapitału mamy z końcem trzeciego roku już kwotę 2315,25 zł, itd.

Jeżeli więc kapitał złożony jest na procent, a odsetki zostają co roku (lub co pół roku, lub w ogóle w ustalonych równych okresach czasu) dopisywane do kapitału, wówczas mówimy, że kapitał złożony jest na procent składany. Dołączanie dochodu do kapitału nazywamy kapitalizacją dochodu, a okres czasu, po którym dochód zostaje do kapitału dołączony, nazywamy się okresem kapitalizacji.

Rozwiążemy teraz zadanie następujące:

Kapitał k złożono w banku na procent składany, stopa procentowa wynosi $p\%$, okres kapitalizacji wynosi rok. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał po upływie n lat?

Oznaczmy wartość kapitału po upływie jednego roku przez k_1 , po upływie dwóch lat przez k_2 itd., po upływie n lat przez k_n . Odsetki za pierwszy rok wynoszą $\frac{kp}{100}$, tak że po dopisaniu ich do kapitału k otrzymujemy kwotę:

$$k + \frac{kp}{100} = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Możemy więc napisać:

$$(36) \quad k_1 = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

Tak samo mamy:

$$k_2 = k_1 + \frac{k_1 p}{100} = k_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$k_3 = k_2 + \frac{k_2 p}{100} = k_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3$$

$$k_4 = k_3 + \frac{k_3 p}{100} = k_3 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^4$$

.....

.....

Widzimy więc, że dla każdego naturalnego n zachodzi wzór:

$$(37) \quad k_n = k \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

Wzór (37) jest zasadniczym wzorem rachunku procentu składanego.

Jeżeli stopa procentowa wynosi $p\%$, a okres kapitalizacji jeden rok, wówczas otrzymujemy wartość kapitału po upływie n lat mnożąc wartość początkową kapitału przez n -tą potęgę liczby $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Liczbę: $1 + \frac{p}{100}$ nazywamy czynnikiem procentowym.

Liczby :

$$k, k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$$

tworzą postęp geometryczny, którego iloraz równy jest czynnikowi procentowemu.

We wzorze (37) występuje wyrażenie: $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Np. dla $p = 3$ i $n = 15$ przybiera ono wartość $1,03^{15}$. Obliczanie tej liczby za pomocą wielokrotnego mnożenia jest rzeczą bardzo żmudną i wymagałoby dużo czasu i cierpliwości *). Toteż posługujemy się w praktyce zazwyczaj tabelami, w których możemy bezpośrednio odczytać (z dokładnością do kilku miejsc dziesiętnych) wartości wyrażenia: $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, a także jego odwrotności:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

dla różnych wartości p i n . Podajemy niżej dla przykładu tabelę, w której uwzględnione są wartości $p = 3, 4, 5$ oraz $n = 1, 2, \dots, 30$.

*) Przy pomocy logarytmów obliczenie to nie przedstawia oczywiście trudności.

Tabela do obliczania procentów składanych.

$q^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ = wartość jednostki kapitału po n latach $\frac{1}{q^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ = wartość jednostki kapitału przed n laty.						
n	$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	q	$\frac{1}{q^n}$	q^n	$\frac{1}{q^n}$	q^n	$\frac{1}{q^n}$
1	1,03000	0,97087	1,04000	0,96154	1,05000	0,95238
2	06090	94260	08160	0,92456	10250	90703
3	09273	91514	12486	88900	15763	86384
4	12551	88849	16986	85480	21551	82270
5	15927	86261	21665	82193	27628	78353
6	19405	83748	26532	79031	34010	74622
7	22987	81309	31593	75992	40710	71068
8	26677	78941	36857	73069	47746	67684
9	30477	76642	42331	70259	55133	64461
10	1,34392	0,74409	1,48024	0,67556	1,62889	0,61391
11	38423	72242	53945	64958	71034	58468
12	42576	70138	60103	62460	79586	55684
13	46853	68095	66507	60057	88565	53032
14	51259	66112	73168	57748	97993	50507
15	55797	64186	80094	55526	2,07893	48102
16	60471	62317	87298	53391	18287	45811
17	65285	60502	94790	51337	29202	43630
18	70243	58739	2,02582	49363	40662	41552
19	75351	57029	10685	47464	52695	39573
20	1,80611	0,55368	2,19112	0,45639	2,65330	0,37689
21	86029	53755	27877	43883	78596	35894
22	91610	52189	36992	42196	92526	34185
23	97359	50669	46472	40573	3,07152	32557
24	2,03279	49193	56330	39102	22510	31007
25	09378	47761	66584	37512	38636	29530
26	15659	46369	77247	36069	55567	28124
27	22129	45019	88337	34682	73346	26785
28	28793	43708	99870	33348	92013	25509
29	35657	42435	3,11865	32065	4,11614	24295
30	2,42726	0,41199	3,24340	0,30832	4,32194	0,23138

W tabeli tej (na str. 113) czynnik procentowy został oznaczony literą q , a więc

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Wzór (37) przybiera wówczas postać

$$k_n = k q^n$$

i stąd odwrotnie:

$$k = k_n \cdot \frac{1}{q^n}$$

Przykłady:

1. Kapitał 6000 zł oddano na procent składany na przeciąg 8 lat. Obliczyć końcową wartość kapitału, jeżeli stopa procentowa wynosi 4%, a okres kapitalizacji jeden rok.

Stosując wzór (37) otrzymujemy:

$$k_8 = 6000 \cdot 1,04^8 \text{ zł}$$

Z tabeli odczytujemy: $1,04^8 = 1,36857$ (z dokładnością do 5 miejsc dziesiętnych), a zatem $k_8 = 6000 \cdot 1,36857 \text{ zł} = 8211,42 \text{ zł}$. Więc końcowa wartość kapitału wynosi 8211 zł 42 gr.

2. Jaki kapitał należy złożyć w banku na procent składany, aby przy stopie procentowej 4% i rocznym okresie kapitalizacji po dziesięciu latach otrzymać 10 000 zł?

Tu znana jest wartość końcowa kapitału, natomiast nieznana jest jego wartość początkowa. Stosując wzór (37) otrzymujemy:

$$10\ 000 = k \cdot 1,04^{10}$$

stąd obliczamy:

$$k = \frac{10\ 000}{1,04^{10}} = 10\ 000 \cdot \frac{1}{1,04^{10}}$$

Z tabeli odczytujemy: $\frac{1}{1,04^{10}} = 0,67556$ (z dokładnością do 5 miejsc dziesiętnych), a zatem $k = 10\ 000 \cdot 0,67556 = 6755,6$. Należy więc w banku złożyć 6755 zł 60 gr.

3. Pień drzewa ściętego w zimie 1945/46 roku miał $1,702 \text{ m}^3$ objętości. Według słojuw drewna oraz według rozmieszczenia sęczków na pniu ustalono, że w zimie 1935/36 pień miał $1,351 \text{ m}^3$ drewna. Obliczyć przyrost drewna w ostatnim roku wegetacji drzewa.

Uważamy, że roczny przyrost drewna jest w każdym roku proporcjonalny do objętości pnia drzewnego i że procent przyrostu drewna w kolejnych latach jest stały. Przyrosty te kapitalizują się, przy czym okresem kapitalizacji jest naturalny okres wegetacji — rok.

We wzorze $k_n = k q^n$ mamy dane:

$$k = 1,351, n = 10, k_{10} = 1,702,$$

a chcemy obliczyć q . Stosując logarytmy obliczamy

$$\log q = \frac{\log k_{10} - \log k}{10} = \frac{0,2310 - 0,1307}{10} = 0,0103,$$

skąd $q = 1,024$, a więc $p = 2,4\%$.

Ze wzoru $k_{10} = k_9 q$ obliczymy $k_9 = 1,662 \text{ m}^3$, a następnie obliczymy ostatni przyrost: $k_{10} - k_9 = 0,040 \text{ m}^3$.

4. Wzór $k_n = k q^n$ stosuje się również w obliczeniach demograficznych — w założeniu, że roczny przyrost ludności jest w stałym stosunku do ogółu ludności.

Rozwiążmy zadanie: W roku 1923 Kraków miał 183,4 tys. mieszkańców, a w roku 1939 miał 259,3 tys. Ile ludności miał przypuszczalnie Kraków w roku 1931?

Ze wzoru $k_{1939} = k_{1923} q^{16}$ obliczymy $\log q = 0,0094$, a następnie ze wzoru $k_{1931} = k_{1923} q^8$ otrzymamy

$$k_{1931} = 218,1 \text{ tys.}$$

Uwaga. Spis ludności z r. 1931 wykazał 219,3 tys.

Ćwiczenia.*)

173. Do jakiej wysokości wzrośnie kapitał 14 000 zł, złożony na 8% po upływie 15 lat?

174. Do jakiej wysokości wzrośnie kapitał 8 500 zł, złożony na 7% po upływie 12 lat?

175. Jaki kapitał, złożony na 4%, wzrośnie po upływie 13 lat do wysokości 16 650,70 zł?

176. Jaki kapitał, złożony na $4\frac{1}{2}\%$, wzrośnie po upływie 10 lat do wysokości 15 529,70 zł?

177. Do jakiej wysokości wzrośnie kapitał 8 000 zł, złożony w banku na 12 lat, jeżeli bank płacił w ciągu pierwszych trzech lat 6%, w ciągu zaś następnych dziewięciu lat 5%?

178. Do jakiej wysokości wzrośnie kapitał a , leżący na $p\%$ przez n lat, a następnie na $q\%$ przez m lat?

179. Pewien kapitał leżał na $p\%$ przez n lat, a następnie na $(p+1)\%$ przez $(n+1)$ lat i wzrósł do wysokości równej A . Obliczyć początkową wartość kapitału.

180. Bank przyjął sumę 50 000 zł jako wkładkę na 4% i pożyczył tę sumę na 5%. Ile bank zarobił na tym w przeciągu 10 lat?

*181. Masa drewna pewnego obszaru lasu wynosiła 3460 m³. Po upływie 10 lat, w ciągu których nie było wyrębu, masa drewna wzrosła do 4776 m³. Jaka będzie przypuszczalna masa drewna po upływie dalszych 9 lat?

*182. Uzasadnić, dlaczego w przykładzie 4 na str. 115 liczba k_{1931} musi być średnią geometryczną liczb k_{1923} i k_{1939} (a nie np. ich średnią arytmetyczną).

*183. W roku 1921 Warszawa miała 937 000 mieszkańców, a w roku 1939 ludność Warszawy wynosiła 1 289 000. W którym roku przypuszczalnie ludność Warszawy przekroczyła milion?

184. Jeśli gaz znajduje się pod stałym ciśnieniem, to podniesienie temperatury o 1°C powoduje powiększenie objętości gazu o $\frac{1}{273}$. Pewna ilość gazu przy 0°C pod ciśnieniem normalnym zajmuje objętość 1000 litrów. Obliczyć objętość tego gazu przy 100°C pod ciśnieniem niezmiennym, stosując wzór $k_t = k_0 q^t$, gdzie $q = 1 + \frac{1}{273}$.

*) Przy rozwiązywaniu ćwiczenia 173 i następnych należy posługiwać się stosowną tabelą do obliczania procentów składanych lub też logarytmami. Za okres kapitalizacji przyjąć jeden rok.

[K] (H) (M)

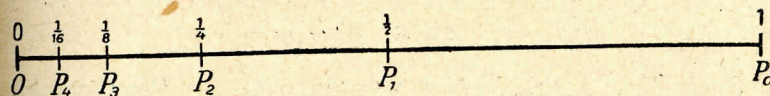
§ 18. Postęp geometryczny nieskończony zbieżny.

Granica ciągu.

Rozważmy postęp geometryczny nieskończony :

$$(41) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

i przedstawmy wyrazy jego graficznie, przyporządkując im punkty na osi liczbowej (rys. 6).



Rys. 6.

Łatwo zauważymy, że punkty odpowiadające wyrazom naszego ciągu skupiają się przy punkcie zerowym. Postaramy się zauważoną własność ciągu (41) wyrazić ścisłym językiem matematycznym.

Zbadajmy, które wyrazy ciągu (41) różnią się od 0 mniej niż o $\frac{1}{10}$. Otóż wyrazy: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ różnią się od zera oczywiście więcej niż o $\frac{1}{10}$, natomiast wszystkie dalsze wyrazy: $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$, tj. wszystkie wyrazy ciągu (41), począwszy od czwartego, różnią się od zera mniej niż o $\frac{1}{10}$.

Zbadajmy teraz, które wyrazy ciągu (41) różnią się od 0 mniej niż o $\frac{1}{100}$. Otóż wyrazy: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ różnią się od zera oczywiście więcej niż o $\frac{1}{100}$, natomiast wszystkie pozostałe wyrazy: $\frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \dots$, tj. wszystkie wyrazy ciągu (41), począwszy od siódmego, różnią się od 0 mniej niż o $\frac{1}{100}$.

Tak samo przekonamy się, że wszystkie wyrazy ciągu (41), począwszy od dziesiątego, różnią się od 0 mniej niż o $\frac{1}{1000}$.

Gdybyśmy w powyższym rozumowaniu zastąpili małą liczbę $\frac{1}{1000}$ przez jeszcze mniejszą: $\frac{1}{10000}$, moglibyśmy się podobnie przekonać, że wszystkie wyrazy ciągu (41), począwszy od określonego wyrazu (a mianowicie czternastego), różnią się od 0 mniej niż o $\frac{1}{10000}$.

Można ogólnie wykazać, że jakkolwiek małą byśmy obrali liczbę dodatnią ε , to wszystkie wyrazy ciągu (41), począwszy od pewnego wyrazu, różnią się od 0 o mniej niż ε .

Krócej mówiąc, można wykazać, że ciąg (41) posiada tę własność, że wszystkie dostatecznie dalekie jego wyrazy różnią się od 0 dowolnie mało.

Własność tę wyrażamy mówiąc, że ciąg (41) dąży do 0, albo ma granicę równą 0, i piszemy:

$$\frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad \text{albo:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Znak „lim“ jest skróceniem wyrazu łacińskiego *limes* (granica).

Rozważmy teraz postęp geometryczny nieskończony:

$$(42) \quad q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$$

złożony z kolejnych potęg liczby rzeczywistej q .

Dla $q = \frac{1}{2}$ postęp ten jest identyczny z wyżej rozpatrywanym postępem (41).

Dla $q = \frac{1}{3}$ otrzymujemy postęp następujący:

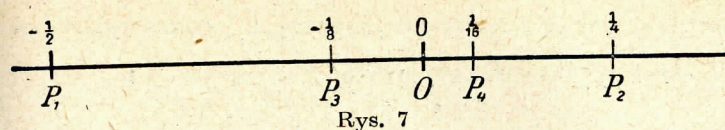
$$(43) \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \dots$$

Łatwo widzieć, że postęp ten dąży do 0; wyrazy jego szybko maleją, dostatecznie dalekie jego wyrazy różnią się od 0 dowolnie mało.

Dla $q = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy postęp następujący:

$$(44) \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

Postęp ten również dąży do 0; wyrazy jego są naprzemian ujemne i dodatnie, dostatecznie dalekie wyrazy różnią się od 0 dowolnie mało.



Rys. 7

Rys. 7 przedstawia wyrazy tego postępu na osi liczbowej; punkty odpowiadające kolejnym wyrazom postępu przeskakują naprzemian z jednej strony 0 na drugą, lecz zbliżają się do 0 nieograniczenie.

Powyższe przykłady ilustrują następujące twierdzenie, które daje się zupełnie ściśle udowodnić:

Jeżeli $-1 < q < +1$, wówczas postęp geometryczny:

$$(45) \quad q, q^2, q^3, \dots$$

dąży do 0.

[Dowód. Niech będzie dana dowolnie mała liczba dodatnia ε . Należy wykazać, że wszystkie dostatecznie dalekie wyrazy ciągu (45) różnią się od 0 o mniej niż ε .

Otóż, wobec: $|q| < 1$ mamy: $\frac{1}{|q|} > 1$, czyli: $\frac{1}{|q|} = 1 + \delta$, przy czym δ oznacza liczbę dodatnią.

Stosując nierówność Bernoulli'ego dla $n = 2, 3, 4, \dots$ mamy: $\frac{1}{|q|^n} = (1 + \delta)^n > 1 + n\delta$, skąd oczywiście wynika, że dla każdego naturalnego n spełniona jest nierówność:

$\frac{1}{|q|^n} > n\delta$, a zatem także: $|q|^n < \frac{1}{n\delta}$, czyli: $|q^n| < \frac{1}{n\delta}$. Gdy n

będzie dostatecznie wielkie (a mianowicie, gdy $n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$), wówczas, jak łatwo widzieć, $\frac{1}{n\delta}$ będzie mniejsze niż ε , a więc także:

$|q^n|$ będzie mniejsze niż ε .]

Geometryczna interpretacja postępu geometrycznego.

Rozważmy nieskończony postęp geometryczny :

$$(46) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

i utwórzmy kolejne sumy jego wyrazów (kolejne sumy częściowe):

$$(47) \quad \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &\dots \\ s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Stosując wzór na sumę n wyrazów postępu geometrycznego otrzymujemy :

$$(48) \quad s_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Wynika stąd oczywiście, że dla n dostatecznie wielkiego suma s_n różni się od 1 dowolnie mało. Wyrażamy to mówiąc, że ciąg $\{s_n\}$ dąży do 1 lub ma granicę równą 1, i piszemy :

$$s_n \rightarrow 1 \quad \text{lub} \quad \lim s_n = 1.$$

Doszliśmy więc do następującego wyniku : Gdy ilość kolejnych wyrazów postępu (46) rośnie nieskończenie, wówczas suma ich dąży do 1. Wynik ten zapiszemy w postaci następującej :

$$(49) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Wzór (49) wyraża więc, że :

1^o) ilekolwiek dodamy kolejnych wyrazów postępu :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

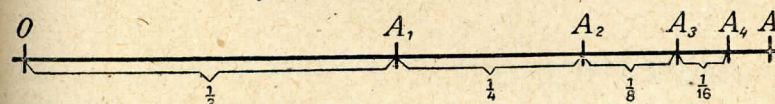
to zawsze otrzymamy sumę mniejszą od 1;

2^o) im więcej weźmiemy wyrazów, tym mniej suma tych wyrazów różnić się będzie od 1;

3^o) jeżeli dodamy dostatecznie wielką ilość składników, otrzymamy sumę różniącą się od 1 dowolnie mało.

Mamy tutaj przykład pouczający, że: *suma dodatnich składników nie musi wzrastać nieskończenie, gdy ilość składników rośnie nieskończenie, lecz może dążyć do granicy skończonej.*

Bardzo ciekawa jest interpretacja geometryczna wzoru (49):



Rys. 8.

Na odcinku OA równym jednemu decymetrowi (rys. 8) odkładamy odcinek $OA_1 = \frac{1}{2}$ dcm. Następnie dodajemy do OA_1 odcinek $A_1A_2 = \frac{1}{4}$ dcm; otrzymamy odcinek $OA_2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$ dcm. Do OA_2 dodajemy odcinek $A_2A_3 = \frac{1}{8}$ dcm; otrzymamy odcinek $OA_3 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ dcm. Do OA_3 dodajemy odcinek $A_3A_4 = \frac{1}{16}$ dcm; otrzymamy odcinek $OA_4 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16})$ dcm. Postępując tak dalej, posuwamy się coraz dalej w prawo, nie posuwamy się jednak w nieskończoność, ale pozostajemy zawsze po lewej stronie punktu A , podchodząc zresztą do tego punktu dowolnie blisko.

Przytoczmy jeszcze słynny sofizmat *Zenona* (greckiego filozofa z V wieku przed Nar. Chr.) o Achillesie i żółwiu, który rzekomo sprowadza do absurdu twierdzenie zdrowego rozsądku, a którego analiza prowadzi do szeregu geometrycznego:

Achilles nie dogoni żółwia. Przypuśćmy, że żółw wyprzedza Achillesa o 20 kroków i że Achilles porusza się 20 razy szybciej od żółwia. Gdy Achilles zrobi 20 kroków, żółw posunie się o krok naprzód; gdy Achilles zrobi jeden krok, żółw posunie się o $\frac{1}{20}$ kroku; gdy Achilles zrobi $\frac{1}{20}$ kroku, żółw posunie się o $\frac{1}{400}$ kroku itd. w nieskończoność, więc Achilles nigdy żółwia nie dogoni.

Zenon błędnie rozumuje, że droga, jaką Achilles musi przebiec aż do spotkania się z żółwiem, jest nieskończenie wielka; tymczasem droga ta wynosi ilość kroków równą sumie szeregu nieskończonego: $20 + 1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{400} + \dots$, czyli $21\frac{1}{19}$ kroków. Po przebyciu tej drogi Achilles dogoni żółwia.

Mimo tak prostej interpretacji matematycznej jest jednak paradoks Zenona ciekawy z punktu widzenia filozoficznego.

Szereg geometryczny nieskończony zbieżny.

Przejdźmy teraz do rozważań o charakterze ogólniejszym. Niech będzie dany dowolny ciąg nieskończony liczb:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

i napiszmy wyrażenie:

$$(50) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Wyrażenie takie nazywamy szeregiem nieskończonym; liczby: $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazywamy wyrazami szeregu.

Utwórzmy kolejne sumy częściowe:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Zdarzyć się może, że ciąg $\{s_n\}$ dąży do pewnej granicy skończonej s , gdy n rośnie nieograniczenie, innymi słowy, że dla dostatecznie wielkiego n suma s_n różni się od s dowolnie mało. Mówimy wówczas, że szereg:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

jest zbieżny i liczbę s nazywamy sumą szeregu; piszemy wtedy:

$$(51) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots = s$$

Wyżej wykazaliśmy, że szereg:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

którego wyrazy tworzą postęp geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$, jest zbieżny i że sumą tego szeregu jest liczba 1.

Można wykazać, że każdy szereg nieskończony:

$$(52) \quad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$$

którego wyrazy tworzą postęp geometryczny o ilorazie q takim, że $|q| < 1$, jest zbieżny.

Stosując wzór na sumę n wyrazów postępu geometrycznego mamy:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

Wobec założenia, że $|q| < 1$, mamy: $q^n \rightarrow 0$, z czego nie trudno wywnioskować, że także: $\frac{a_1 q^n}{1 - q} \rightarrow 0$ i $s_n \rightarrow \frac{a_1}{1 - q}$.

Szereg nieskończony (52), którego wyrazy tworzą postęp geometryczny, nazywamy szeregiem geometrycznym. Możemy więc powyższe rozważanie streścić w ten sposób:

Szereg geometryczny:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$$

dla którego $|q| < 1$, jest zbieżny, a suma jego wynosi $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

Dla $|q| < 1$ mamy zatem wzór:

$$(53) \quad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$$

W myśl wzoru (53) mamy więc np.:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}$$

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{1}{3}$$

Ćwiczenia.

185. Oblicz sumy nieskończonych szeregów geometrycznych:

a) $12 + 6 + 3 + \dots$ e) $2 + 0,2 + 0,02 + \dots$

b) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$ f) $0,8 + 0,32 + 0,128 + \dots$

c) $3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{16} - \dots$ g) $0,9 - 0,09 + 0,009 - \dots$

d) $1 + \frac{7}{8} + \frac{49}{64} + \dots$ h) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$

186. Wyznacz postęp geometryczny nieskończonego malejącego, którego pierwszy wyraz wynosi:

a) 4, b) -2, c) 1, d) 8, e) -2, f) -10,

a suma dąży odpowiednio do granicy:

a) 5, b) 6, c) -5, d) 6, e) -8, f) -8.

187. Napisz daną liczbę:

a) 7, b) 12, c) -3, d) 8, e) -10, f) $2(\sqrt{2} + 1)$

w postaci szeregu geometrycznego nieskończonego, którego iloraz odpowiednio wynosi:

a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{3}$, c) $-\frac{2}{3}$, d) $\frac{3}{4}$, e) $\frac{4}{5}$, f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

188. W kwadracie o boku a połączono środki sąsiednich boków, w powstałym kwadracie połączono znów środki sąsiednich boków itd. Do jakiej granicy dąży suma obwodów kwadratów, gdy ilość kwadratów rośnie w ten sposób nieskończenie?

*189. Dany jest kąt $AOB = 60^\circ$. Wykreślono koło o promieniu R styczne do ramion tego kąta; następnie wykreślono drugie koło (o mniejszym promieniu), styczne do pierwszego koła i ramion kąta; następnie wykreślono trzecie koło, styczne do drugiego koła i ramion kąta itd. Do jakiej granicy dąży: a) suma obwodów kół; b) suma pól kół, gdy ilość kół rośnie w ten sposób nieskończenie?

190. Na jednym ramieniu kąta 45° obrano w odległości a od wierzchołka punkt A_1 ; z punktu A_1 wykreślono odcinek A_1B_1 prostopadły do drugiego ramienia; z punktu B_1 leżącego na drugim ramieniu wykreślono odcinek B_1A_2 prostopadły do pierwszego ramienia; z punktu A_2 na pierwszym ramieniu wykreślono odcinek A_2B_2 prostopadły do drugiego ramienia itd. Do jakiej granicy dąży suma wyżej opisanych odcinków: $A_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2 + \dots$, gdy ilość odcinków rośnie nieskończenie?

[H] (M)

§ 19. Ułamki okresowe.

Ułamki dziesiętne okresowe.

Wzór (53) możemy zastosować do zamiany ułamka dziesiętnego okresowego na ułamek zwyczajny.

Przypomnijmy przede wszystkim w kilku słowach pojęcie ułamka dziesiętnego okresowego.

Chcąc ułamek zwyczajny $\frac{l}{m}$ zamienić na dziesiętny, dzielimy, jak wiadomo, licznik l przez mianownik m . Jeżeli dzielenie kończy się, otrzymujemy jako iloraz ułamek dziesiętny skończony, np. $\frac{5}{16} = 0,3125$ lub $\frac{7}{40} = 0,175$; zachodzi to wtedy, gdy ułamek $\frac{l}{m}$ jest nieskracalny i mianownik m nie ma innych czynników pierwszych oprócz 2 i 5. Gdy dzielenie nie kończy się, otrzymujemy jako iloraz ułamek dziesiętny nieskończony (tzn. o nieskończonej ilości cyfr dziesiętnych), w którym pewna cyfra lub grupa cyfr stale się powtarza, np.

$$\frac{2}{3} = 0,66666666 \dots$$

$$\frac{3}{11} = 0,27272727 \dots$$

$$\frac{5}{6} = 0,83333333 \dots$$

Ułamek taki nazywamy ułamkiem okresowym, a cyfrę lub grupę cyfr, która się powtarza, nazywamy jego okresem.

Że ułamek dziesiętny otrzymany przy dzieleniu l przez m , o ile jest nieskończony, musi też być okresowy, widzimy w sposób następujący: Otóż kolejne reszty otrzymane przy dzieleniu l przez m są wszystkie mniejsze niż m , a zatem różnych reszt jest najwyżej $m - 1$ (reszta 0 jest niemożliwa, skoro dzielenie się nie kończy). Z tego wynika natychmiast, że najdalej m -ta z kolei reszta musi być równa jednej z reszt poprzednich, a że jednakowym resztom odpowiadają jednakowe cyfry w ilorazie, więc cyfry te muszą od pewnego miejsca powtarzać się pojedynczo lub grupami.

Zamiana ułamka okresowego na ułamek zwykły.

Po tych uwagach wstępnych podamy kilka przykładów zastosowania wzoru (53) do obliczania wartości ułamka dziesiętnego okresowego.

1. Ułamek okresowy: $0,777 \dots$, którego okresem jest cyfra 7, daje się, jak łatwo spostrzec, napisać w postaci szeregu geometrycznego nieskończonego: $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$; wartość tego ułamka jest więc równa sumie powyższego szeregu.

Stosując wzór (53) otrzymujemy:

$$\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

a zatem: $0,777 \dots = \frac{7}{9}$

2. Ułamek okresowy: $0,51515151 \dots$, którego okresem jest grupa cyfr 51, daje się napisać w postaci następującego szeregu geometrycznego nieskończonego:

$$\frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \dots$$

Stosując wzór (53) otrzymujemy:

$$\frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \dots = \frac{\frac{51}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$$

a zatem: $0,515151 \dots = \frac{17}{33}$

3. Ułamek okresowy: $0,733333333 \dots$, którego okresem jest cyfra 3, daje się napisać w postaci następującej:

$$\frac{7}{10} + \left(\frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \right)$$

Stosując wzór (53) do szeregu geometrycznego objętego nawiasem otrzymujemy:

$$\frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots = \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

a zatem: $0,7333 \dots = \frac{7}{10} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

4. Oznaczmy przez A, B, C dowolne cyfry pozycyjnego układu dziesiętkowego, czyli dowolne spośród liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Obliczmy wartość ułamka okresowego:

$$0,ABCABCABC \dots$$

Ułamek ten można napisać w postaci:

$$(1) \quad \frac{ABC}{1000} + \frac{ABC}{1000000} + \frac{ABC}{1000000000} + \dots$$

przy czym symbol ABC oznacza liczbę trzycyfrową, złożoną z A setek, B dziesiątek i C jedności, tzn.:

$$ABC = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C$$

Obliczając sumę nieskończonego postępu geometrycznego (1) otrzymujemy:

$$\frac{\frac{ABC}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{ABC}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{ABC}{999}$$

Stąd reguła: jeżeli w ułamku okresowym między przecinkiem dziesiętnym a pierwszym okresem nie ma cyfr obcych, to dany ułamek okresowy można zamienić na ułamek zwyczajny, biorąc w liczniku jeden okres, a w mianowniku liczbę napisaną tylu dziesiątkami, ile jest cyfr w okresie.

$$\text{Np. } 0,ABCABCABC \dots = \frac{ABC}{999}$$

$$0,037037037 \dots = \frac{037}{999} = \frac{1}{27}$$

5. Rozważmy z kolei ułamek okresowy mieszany, tzn. taki ułamek, w którym okres nie zaczyna się bezpośrednio po przecinku dziesiętnym, np.

$$0,ABCDEDEDE \dots,$$

gdzie A, B, C, D, E oznaczają dowolne cyfry pozycyjnego układu dziesiętkowego.

Ułamek powyższy można napisać w postaci:

$$\frac{ABC}{1000} + \frac{DE}{100000} + \frac{DE}{10000000} + \frac{DE}{1000000000} + \dots$$

gdzie symbole ABC i DE oznaczają liczby:

$$ABC = A \cdot 100 + B \cdot 10 + C$$

$$DE = D \cdot 10 + E$$

W rozwinięciu powyższego ułamka okresowego mieszanego mamy na początku wyraz:

$$\frac{ABC}{1000},$$

a dalej idzie postęp geometryczny nieskończenie malejący, którego pierwszy wyraz równy jest

$$\frac{DE}{100000},$$

a ilorazem jest ułamek $\frac{1}{100}$.

Sumując ten postęp geometryczny nieskończony zbieżny, otrzymujemy:

$$\frac{\frac{DE}{100000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{DE}{100000}}{\frac{99}{100}} = \frac{DE}{99000}$$

Ostatecznie mamy:

$$0,ABCDEDEDE \dots =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ABC}{1000} + \frac{DE}{99000} = \frac{99 \cdot ABC + DE}{99000} = \\ &= \frac{(100 - 1) \cdot ABC + DE}{99000} = \frac{100 \cdot ABC + DE - ABC}{99000} = \\ &= \frac{ABC00 + DE - ABC}{99000} = \frac{ABCDE - ABC}{99000} \end{aligned}$$

Stąd reguła: jeżeli w ułamku dziesiętnym okresowym między przecinkiem dziesiętnym a pierwszym okresem są cyfry obce, to w celu zamiany danego ułamka okresowego mieszanego na ułamek zwyczajny należy od liczby stojącej przed drugim okresem odjąć liczbę stojącą przed pierwszym okresem — i to będzie licznik, a w mianowniku należy wziąć liczbę napisaną tylu dziesiątkami, ile jest cyfr w okresie, i zakończoną tylu zerami, ile jest cyfr między przecinkiem dziesiętnym a pierwszym okresem.

$$\text{Np. } 0,ABCDEDEDE \dots = \frac{ABCDE - ABC}{99000}$$

$$0,41666 \dots = \frac{416 - 41}{900} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$$

Z rozważań powyższych wypływa wniosek, że każdy ułamek okresowy jest liczbą wymierną.

Ćwiczenia.

191. Zamień następujące ułamki okresowe na ułamki zwykłe:

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| a) 0,111... | b) 3,66... |
| c) 0,7555... | d) 2,373737... |
| e) 1,02717171... | f) 0,123123123... |
| g) 4,999... | h) 1,0999... |
| i) 0,285714285714285714... | |

192. Oblicz wartość ułamka okresowego:

$$0,AAAAAA\dots,$$

gdzie A oznacza dowolną cyfrę pozycyjnego układu dziesiętkowego. Zastosuj rozwiązanie w przypadku, gdy A oznacza cyfrę 9.

193. Oblicz wartość ułamka okresowego mieszanego:

$$0,ABCCCC\dots,$$

gdzie A, B i C oznaczają dowolne cyfry pozycyjnego układu dziesiętkowego.

Zastosuj rozwiązanie w przypadku, gdy $A = 2$, $B = 4$, $C = 9$.

194. Oblicz wartość ułamka okresowego mieszanego:

$$0,00ABCABCABC\dots,$$

gdzie A, B, C oznaczają dowolne cyfry pozycyjnego układu dziesiętkowego.

Zastosuj rozwiązanie w przypadku, gdy $A = 9$, $B = 2$, $C = 5$.

[H] [M]

§ 20. Indukcja zupełna.

Metoda indukcji matematycznej.

W matematyce odgrywa wielką rolę pewna metoda dowodu, znana pod nazwą indukcji zupełnej albo indukcji matematycznej. Na czym polega istota tej metody, wyjaśnimy nasamprzód na prostym przykładzie.

Mamy udowodnić następujące twierdzenie:

Dla każdej liczby naturalnej n mały wzór:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Dowód:

1°. Dla $n = 1$ wzór nasz jest prawdziwy, gdyż: $1 = \frac{1^2 + 1}{2}$

2°. Załóżmy, że wzór nasz jest prawdziwy dla liczby naturalnej k ; wykażemy, że jest on wówczas także prawdziwy dla $(k + 1)$. Istotnie, jeżeli przy pewnym naturalnym k zachodzi równość:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k^2 + k}{2},$$

wówczas, dodając do obu stron tej równości liczbę $(k + 1)$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{k^2 + k}{2} + k + 1 = \\ &= \frac{(k + 1)^2 + (k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Otóż z powyższego (1° i 2°) wnioskujemy, że nasz wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej n . Gdyby bowiem dla pewnych liczb naturalnych n nasz wzór nie był prawdziwy, wówczas pomiędzy tymi liczbami, dla których dany wzór byłby fałszywy, istniałaby liczba najmniejsza n_0 (liczba n_0 byłaby w każdym razie większa niż 1, gdyż dla $n = 1$ wzór nasz jest prawdziwy). Dla liczby naturalnej $n = n_0 - 1$ byłby więc nasz wzór jeszcze prawdziwy, a dla $n = n_0$ już fałszywy, co jak widzieliśmy, jest niemożliwe.

Możemy zastosowaną tu zasadę indukcji zupełnej wyśłowić w sposób następujący:

Jeżeli mamy pewne twierdzenie T , w którym jest mowa o liczbie naturalnej n , takie że:

1°. twierdzenie T jest prawdziwe dla $n = 1$,

2°. prawdziwość twierdzenia T dla liczby naturalnej k pociąga za sobą jego prawdziwość dla $(k + 1)$,

wówczas twierdzenie T jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n .

Przykłady stosowania indukcji matematycznej.

Przytoczymy jeszcze kilka przykładów stosowania indukcji zupełnej.

I. Udowodnimy następujące twierdzenie :

Dla każdej liczby naturalnej n mamy wzór :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

D o w ó d :

1^o. Dla $n = 1$ wzór nasz jest prawdziwy, gdyż :

$$1^2 = \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1}{6}$$

2^o. Załóżmy, że wzór nasz jest prawdziwy dla pewnej liczby naturalnej k :

$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$$

Mamy wykazać, że wzór nasz jest prawdziwy dla następnej z kolei liczby naturalnej $(k + 1)$, a mianowicie :

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + (k + 1)^2 = \frac{2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + (k + 1)}{6}$$

Otóż prawą stronę równości (2) możemy przekształcić w sposób następujący :

$$\begin{aligned} & \frac{2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + (k + 1)}{6} = \\ & = \frac{2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + k + 1}{6} = \\ & = \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} = \\ & = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + \frac{6k^2 + 12k + 6}{6} = \\ & = \frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6} + (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Zgodnie z założeniem (1), zamiast $\frac{2k^3 + 3k^2 + k}{6}$ można podstawić sumę :

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2$$

W ten sposób okazuje się, że prawa strona równości (2) jest równa stronie lewej, co było do okazania.

W myśl zasady indukcji wnosimy więc, że wzór nasz jest prawdziwy dla każdego naturalnego n .

II. Udowodnimy następujące twierdzenie :

Liczba $10^n - 1$ jest podzielna przez 9 dla każdego naturalnego n .

D o w ó d :

1^o. Dla $n = 1$ nasze twierdzenie jest prawdziwe, gdyż liczba $10^1 - 1$ jest oczywiście podzielna przez 9.

2^o. Załóżmy, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k , czyli że liczba $10^k - 1$ jest podzielna przez 9. Mamy wykazać, że twierdzenie jest także prawdziwe dla $(k + 1)$.

Otóż, jak łatwo spostrzec, mamy :

$$10^{k+1} - 1 = 9 \cdot 10^k + (10^k - 1),$$

zatem liczba $10^{k+1} - 1$ jest, jako suma dwóch liczb podzielnych przez 9, także podzielna przez 9.

W myśl zasady indukcji wnosimy stąd, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla każdego naturalnego n .

III. Zastosujemy jeszcze indukcję dla dowodu następującego twierdzenia :

Dla każdej liczby naturalnej n mamy nierówność :

$$2^n > n$$

D o w ó d:

1°. Dla $n = 1$ twierdzenie nasze jest prawdziwe, gdyż $2^1 > 1$.

2°. Załóżmy, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k . Wykażemy, że jest ono także prawdziwe dla $(k + 1)$.

W samej rzeczy, mnożąc obie strony nierówności $2^k > k$ przez 2, otrzymujemy:

$$2^{k+1} > 2k = k + k \geq k + 1, \text{ a więc: } 2^{k+1} > k + 1.$$

W myśl zasady indukcji wnosimy stąd, że nierówność $2^n > n$ zachodzi dla każdego naturalnego n .

Uwaga. W § 14 wyprowadziliśmy wzór pozwalający obliczyć n -ty wyraz postępu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz i różnica są dane; w podobny sposób wyprowadziliśmy w § 16 wzór, pozwalający obliczyć n -ty wyraz postępu geometrycznego, którego wyraz pierwszy i iloraz są dane. Jeżeli czytelnik uważnie przeczyta teraz odnośne dowody, przekona się, że były one właściwie również oparte na zasadzie indukcji.

Zauważmy jeszcze, iż może się zdarzyć, że pewne twierdzenie jest prawdziwe dla bardzo wielu kolejnych liczb naturalnych, lecz nie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej. Oto bardzo pouczający przykład takiego twierdzenia:

„Liczba: $n^2 - n + 41$ jest liczbą pierwszą“ (tj. podzielna tylko przez 1 i siebie samą).

Dla $n = 1, 2, 3, \dots, 40$ twierdzenie powyższe jest prawdziwe, jak daje się łatwo sprawdzić. Natomiast dla $n = 41$ jest ono fałszywe, gdyż liczba $41^2 - 41 + 41$, czyli 41^2 jest liczbą złożoną.

*

Odkrycie zasady indukcji matematycznej przypisujemy Pascalowi, wybitnemu filozofowi i matematykowi francuskiemu z XVII stulecia.

Ćwiczenia.

195. Udowodnić metodą indukcji zupełnej wzór następujący:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

196. Udowodnić metodą indukcji zupełnej wzór następujący:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

197. Udowodnić metodą indukcji zupełnej, że liczba $10^n - 4$ jest podzielna przez 6 dla każdego naturalnego n .

198. Udowodnić metodą indukcji zupełnej, że liczba $2^{2n} + 5$ jest podzielna przez 3 dla każdego naturalnego n .

199. Uzasadnić następujące uogólnienie zasady indukcji:

Jeżeli mamy pewne twierdzenie T takie, że:

1°. *twierdzenie T jest prawdziwe dla liczby naturalnej a ,*

2°. *prawdziwość twierdzenia T dla liczby naturalnej k pociąga za sobą jego prawdziwość dla $(k + 1)$,*

wówczas twierdzenie T jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq a$.

ROZDZIAŁ IV

Wielomiany.

(M)

§ 21. Działania na wielomianach.

Wiadomości wstępne o wielomianach.

W rozdziale tym zajmiemy się wielomianami, które zawierają potęgi jednej tylko zmiennej x , a więc wielomianami takimi jak :

- (1) $ax + b$
 - (2) $ax^2 + bx + c$
 - (3) $ax^3 + bx^2 + cx + d$
 - (4) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
- itd.

Zakładamy, że zmienna x może przybierać każdą wartość rzeczywistą, współczynniki zaś a , b , c , d itd. oznaczają liczby rzeczywiste stałe.

Jeżeli $a \neq 0$, wówczas mówimy, że wielomian (1) jest pierwszego stopnia, wielomian (2) drugiego stopnia, wielomian (3) trzeciego stopnia itd. Ogólnie wielomian :

$$(5) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

gdzie $a_0 \neq 0$, nazywamy wielomianem n -tego stopnia. Przez stopień wielomianu rozumiemy więc najwyższy ze stopni wyrazów wielomianu, przy którym współczynnik nie jest równy zeru.

Jest pożyteczne wprowadzić również pojęcie wielomianu stopnia zerowego: przez wielomian stopnia zerowego rozumiemy liczbę stałą (a więc niezależną od x).

W wielomianie niektóre współczynniki mogą być równe zeru, tzn. niektóre wyrazy mogą wcale nie występować. I tak np. wielomian 7 stopnia :

$$(6) \quad 2x^7 - 5x^6 + 3x^3 - 8x + 1$$

nie zawiera wyrazów 5, 4 i 2 stopnia.

Wielomian zwykle porządkujemy wedle malejących wykładników potęgi możemy go jednak także uporządkować wedle rosnących wykładników potęgi. Gdy np. wielomian :

$$(7) \quad x^3 - 7x^2 + x + 2$$

uporządkujemy wedle rosnących wykładników potęgi, otrzymamy wielomian :

$$(7a) \quad 2 + x - 7x^2 + x^3$$

Dwa wielomiany, które różnią się co najwyżej порядkiem wyrazów, które więc składają się z tych samych wyrazów, nazywamy r ó w n y m i (identycznymi).

Wielomian jest f u n k c j ą zmiennej x , która dla każdego rzeczywistego x przyjmuje określoną wartość rzeczywistą. Wielomiany będziemy dla krótkości oznaczali przez : $A(x)$, $B(x)$, $F(x)$, $G(x)$ itp.

Jeżeli wielomian $F(x)$ przybiera dla pewnej wartości zmiennej $x = a$ wartość równą 0, to mówimy, że a jest pierwiastkiem (lub miejscem zerowym) wielomianu $F(x)$. I tak np. liczby 2 i 3 są pierwiastkami wielomianu :

$$F(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6,$$

gdyż :

$$F(2) = 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

i

$$F(3) = 3^4 - 5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

Powtórzymy i zarazem uzupełnimy nasze wiadomości dotyczące się działań na wielomianach.

Dodawanie wielomianów.

Mając dwa wielomiany możemy utworzyć ich *sumę*, dodając wszystkie ich wyrazy i redukując wyrazy podobne. Jeżeli np.

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

$$B(x) = -x^3 + 8x^2 - 3x + 4$$

wówczas mamy :

$$A(x) + B(x) = (x^3 - 3x^2 + x - 1) + (-x^3 + 8x^2 - 3x + 4) = x^3 - 3x^2 + x - 1 - x^3 + 8x^2 - 3x + 4 = 5x^2 - 2x + 3$$

W zupełnie analogiczny sposób tworzymy sumę trzech, czterech itd. wielomianów.

Suma wielomianów jest wielomianem, którego stopień jest nie większy od najwyższego ze stopni składników.

Odejmowanie wielomianów.

Aby utworzyć *różnicę* dwóch wielomianów, dodajemy do wyrazów odjemnej wyrazy odjemnika ze znakami przeciwnymi i redukujemy wyrazy podobne. Jeżeli np.

$$A(x) = x^3 - x^2 + 6x + 2$$

$$B(x) = x^2 - x + 7$$

wówczas mamy :

$$A(x) - B(x) = (x^3 - x^2 + 6x + 2) - (x^2 - x + 7) = x^3 - x^2 + 6x + 2 - x^2 + x - 7 = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

Różnica wielomianów jest wielomianem, którego stopień jest nie większy od wyższego ze stopni odjemnej i odjemnika.

Mnożenie wielomianów.

Aby utworzyć *iloczyn* dwóch wielomianów, mnożymy każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego i otrzymane iloczyny dodajemy. Przy wykonywaniu rachunku często wygodnie jest wyrazy podobne podpisywać pod sobą dla łatwiejszej ich redukcji.

Mając np. pomnożyć wielomian :

$$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$$

przez wielomian

$$B(x) = x^2 - x + 3$$

mnożymy wyrazy wielomianu $A(x)$ przez x^2 , następnie przez $-x$ i wreszcie przez 3, podpisując za każdym razem podobne wyrazy pod sobą, i przeprowadzamy redukcję.

Rachunek przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + x - 4) \cdot (x^2 - x + 3) \\ x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x^2 \\ - x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x \\ + 3x^3 - 6x^2 + 3x - 12 \\ \hline x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 7x - 12 \end{array}$$

Mamy więc :

$$A(x) \cdot B(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 11x^2 + 7x - 12$$

Aby utworzyć iloczyn trzech wielomianów, mnożymy którekolwiek dwa czynniki i otrzymany iloczyn mnożymy przez trzeci czynnik. W zupełnie analogiczny sposób tworzymy iloczyn czterech, pięciu itd. wielomianów.

Iloczyn wielomianów jest wielomianem, którego stopień jest równy sumie stopni poszczególnych czynników.

Iloczyn czynników liniowych.

Ważnym przypadkiem szczególnym iloczynu jest iloczyn dwumianów stopnia pierwszego (czyli czynników *liniowych*).

Jeżeli pomnożymy n dwumianów pierwszego stopnia:

$$x - a_1, x - a_2, \dots, x - a_n,$$

wówczas otrzymany iloczyn

$$A(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

jest wielomianem n -tego stopnia. Iloczyn ten przybiera wartość równą zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z jego czynników jest zerem, a więc gdy x równe jest jednej z liczb:

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Liczbę te są więc *pierwiastkami* wielomianu $A(x)$.

Dzielenie wielomianów.

Jeżeli wielomian $A(x)$ jest iloczynem dwóch wielomianów $B(x)$ i $Q(x)$, a więc jeżeli:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x),$$

wówczas mówimy, że wielomian $A(x)$ jest podzielny przez wielomian $B(x)$, a wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem dzielenia $A(x)$ przez $B(x)$.

Dzielenie wielomianów objaśnimy najpierw na prostym przykładzie.

1. Mamy podzielić wielomian: *)

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 15$$

przez dwumian:

$$B(x) = x - 3.$$

Rachunek wykonujemy w sposób następujący:

1^o. Dzielimy wyraz najwyższego stopnia wielomianu $A(x)$, tj. $2x^3$, przez wyraz najwyższego stopnia dwumianu $B(x)$, tj. x ; jako iloraz znajdujemy $2x^2$; znaleziony iloraz $2x^2$ mnożymy przez dzielnik $B(x)$ i powstały iloczyn odejmujemy od dzielnej $A(x)$; dostajemy:

$$(8) \quad A(x) - 2x^2 B(x) = x^2 + 2x - 15$$

Otrzymany wielomian

$$A_1(x) = x^2 + 2x - 15,$$

który już nie zawiera wyrazu 3 stopnia, nazywamy pierwszą resztą.

2^o. Z resztą $A_1(x)$ postępujemy zupełnie tak samo jak poprzednio z dzielnią $A(x)$. A więc dzielimy wyraz najwyższego stopnia reszty $A_1(x)$, tj. x^2 , przez wyraz najwyższego stopnia

*) Wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ są tutaj uporządkowane wedle malejących wykładników potęgi. Gdyby były inaczej uporządkowane, należałoby je dla łatwiejszego wykonania dzielenia przede wszystkim tak właśnie uporządkować.

dzielnika $B(x)$, tj. x ; znaleziony iloraz x mnożymy przez dzielnik $B(x)$ i powstały iloczyn odejmujemy od $A_1(x)$; dostajemy:

$$(9) \quad A_1(x) - x B(x) = 5x - 15$$

Otrzymany wielomian

$$A_2(x) = 5x - 15,$$

który nie zawiera już wyrazu 2 stopnia, nazywamy drugą resztą.

3^o. Postępujemy, jak poprzednio. Wyraz najwyższego stopnia reszty $A_2(x)$, tj. $5x$, dzielimy przez wyraz najwyższego stopnia dzielnika $B(x)$, tj. x ; znaleziony iloraz 5 mnożymy przez dzielnik $B(x)$ i powstały iloczyn odejmujemy od $A_2(x)$; dostajemy:

$$(10) \quad A_2(x) - 5 B(x) = 0$$

Od dzielnej $A(x)$ odjęliśmy więc najpierw $2x^2 B(x)$, następnie $x B(x)$, wreszcie $5 B(x)$ i otrzymaliśmy jako różnicę (ostatnią resztę): 0. Mamy przeto:

$$A(x) - B(x) \cdot (2x^2 + x + 5) = 0$$

czyli:

$$A(x) = B(x) \cdot (2x^2 + x + 5)$$

Ilorazem dzielenia $A(x)$ przez $B(x)$ jest więc wielomian:

$$Q(x) = 2x^2 + x + 5$$

Rachunek powyższy zapisujemy w sposób następujący:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 5x^2 + 2x - 15) : (x - 3) = 2x^2 + x + 5 \\ - 2x^3 + 6x^2 \\ \hline + x^2 + 2x - 15 \\ - x^2 + 3x \\ \hline + 5x - 15 \\ - 5x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$- x B(x)$$

$$- 5 B(x)$$

Powyższe postępowanie przypomina dzielenie liczb naturalnych wielocyfrowych.

2. Podamy jeszcze taki przykład dzielenia wielomianów:

$$\begin{array}{r}
 (3x^5 - x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8) : (x^3 - x + 2) = 3x^2 - x + 4 \\
 \underline{-3x^5 + 3x^3 - 6x^2} \\
 -x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 8 \\
 \underline{+ x^4 - x^2 + 2x} \\
 + 4x^3 - 4x + 8 \\
 \underline{-4x^3 + 4x - 8} \\
 0
 \end{array}$$

Jeżeli wielomian $Q(x)$ jest ilorazem dzielenia wielomianu $A(x)$ przez wielomian $B(x)$, wówczas stopień jego równy jest różnicy stopni wielomianów $A(x)$ i $B(x)$.

W powyższych dwóch przykładach dzielenia wielomianów otrzymaliśmy jako ostatnią resztę 0. Nie zawsze jednak przy dzieleniu wielomianu stopnia wyższego przez wielomian stopnia niższego otrzymujemy resztę zero. Objasnimy to na przykładzie dzielenia wielomianu:

$$A(x) = x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 21x + 1$$

przez wielomian:

$$B(x) = x^2 - 2x + 3$$

Stosując wyżej poznanej postępowanie do tych wielomianów otrzymujemy:

$$\begin{array}{r}
 (x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 14x^2 + 21x + 1) : (x^2 - 2x + 3) = x^3 - x^2 + 6x + 1 \\
 \underline{-x^5 + 2x^4 - 3x^3} \qquad \qquad \qquad -x^3B(x) \\
 -x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 21x + 1 \\
 \underline{+ x^4 - 2x^3 + 3x^2} \qquad \qquad \qquad + x^2B(x) \\
 + 6x^3 - 11x^2 + 21x + 1 \\
 \underline{- 6x^3 + 12x^2 - 18x} \qquad \qquad \qquad -6xB(x) \\
 + x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{- x^2 + 2x - 3} \qquad \qquad \qquad -1B(x) \\
 + 5x - 2
 \end{array}$$

Ostatnia reszta $5x - 2$ jest wielomianem stopnia niższego od dzielnika, nie możemy więc naszego rachunku dalej prowadzić.

Od dzielnej $A(x)$ odjęliśmy kolejno: $x^3B(x)$, $-x^2B(x)$, $6xB(x)$, $1 \cdot B(x)$ i otrzymaliśmy jako różnicę (ostatnią resztę): $5x - 2$. Mamy więc:

$$A(x) - B(x) \cdot (x^3 - x^2 + 6x + 1) = 5x - 2$$

czyli:

$$A(x) = B(x) \cdot (x^3 - x^2 + 6x + 1) + (5x - 2)$$

Wielomian $x^3 - x^2 + 6x + 1$ jest tu ilorazem niezupełnym, a $5x - 2$ jest resztą.

Oznaczając iloraz niezupełny przez $Q(x)$, resztę przez $R(x)$, możemy napisać:

$$(11) \qquad A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

3. Zastosujemy teraz nasze postępowanie do dzielenia wielomianu 2 stopnia:

$$A(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

przez wielomian 2 stopnia:

$$B(x) = x^2 + 1$$

Otrzymujemy:

$$\begin{array}{r}
 (2x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 1) = 2 \\
 \underline{-2x^2 - 2} \\
 + 3x - 1
 \end{array}$$

Mamy więc:

$$2x^2 + 3x + 1 = (x^2 + 1) \cdot 2 + (3x - 1)$$

Iloraz niezupełny jest więc liczbą stałą: 2 (czyli jest wielomianem stopnia zerowego), a reszta $3x - 1$ jest dwumianem stopnia pierwszego.

4. Rozważmy jeszcze przykład następujący:

$$\begin{array}{r}
 (3x^2 + 3x + 5) : (x + 1) = 3x \\
 \underline{-3x^2 - 3x} \\
 + 5
 \end{array}$$

Mamy tu:

$$3x^2 + 3x + 5 = (x + 1) \cdot 3x + 5$$

Ilorazem niezupełnym jest wielomian (jednomian) stopnia pierwszego, resztą zaś jest liczba stała 5 (czyli wielomian stopnia zerowego).

Powyższe przykłady prowadzą nas do następującego wniosku:

Mając dwa wielomiany $A(x)$ i $B(x)$, przy czym stopień wielomianu $A(x)$ nie jest niższy od stopnia wielomianu $B(x)$, można znaleźć takie wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$, aby było:

$$(12) \quad A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

i aby wielomian $R(x)$ był stopnia niższego od stopnia wielomianu $B(x)$.

Opisane wyżej działanie, za pomocą którego mając $A(x)$ i $B(x)$ obliczamy $Q(x)$ i $R(x)$, nazywamy **dzieleniem** $A(x)$ przez $B(x)$; $Q(x)$ nazywamy **ilorazem** (zupełnym lub niezupełnym), $R(x)$ nazywamy **resztą**. Reszta $R(x)$ może być w pewnych przypadkach wielomianem stopnia zerowego, czyli liczbą stałą, w szczególności może być także zerem.

Gdy reszta $R(x)$ jest zerem, wówczas wzór (12) daje się napisać w postaci:

$$(12^a) \quad A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

czyli $A(x)$ jest podzielne przez $B(x)$.

Uwaga. Można dowieść, iż dzielenie wielomianów jest działaniem jednoznacznym, tzn. że mając dzielną $A(x)$ i dzielnik $B(x)$, można w jeden tylko sposób znaleźć iloraz $Q(x)$ i resztę $R(x)$.

Ćwiczenia.

200. Dany jest wielomian:

$$F(x) = x^3 - 2x^2 - x - 3.$$

Oblicz: $F(0)$, $F(-2)$, $F(3)$, $F(\sqrt{2})$.

201. Dany jest wielomian:

$$F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3.$$

Oblicz: $F(1)$, $F(2)$, $F(\frac{1}{2})$, $F(1 + \sqrt[3]{2})$.

202. Dany jest wielomian:

$$F(x) = x^4 - 6x^2 + 7.$$

Oblicz: $F(\sqrt{3})$, $F(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $F(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

203. Dany jest wielomian:

$$F(x) = 2x^3 - 3x^2 + (1 + \sqrt{2})x - 1.$$

Oblicz: $F(\sqrt{2})$, $F(1 + \sqrt{2})$, $F(3 - \sqrt{2})$.

204. Dany jest trójmian:

$$F(x) = 3x^2 + bx + c.$$

Wyznacz b i c w taki sposób, aby było:

$$F(1) = 3, \quad F(-1) = 0.$$

205. Dany jest trójmian:

$$F(x) = ax^2 + bx + c.$$

Wyznacz a , b i c w taki sposób, aby było:

$$F(1) = 6, \quad F(2) = 24, \quad F(3) = 56.$$

206. Dany jest wielomian:

$$F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Wyznacz a , b i c w taki sposób, aby było:

$$F(-1) = 1, \quad F(2) = 13, \quad F(\frac{1}{2}) = -\frac{43}{8}.$$

*207. Dany jest wielomian:

$$F(x) = ax^2 + bx + c,$$

dla którego: $F(1) = k + 2$, $F(\frac{1}{3}) = k$, $F(-\frac{1}{3}) = k - 2$.

Wykaż, że wielomian ten jest stopnia pierwszego.

208. Wykaż, że liczby 4 i 5 są pierwiastkami wielomianu:

$$x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 9x + 20.$$

209. Wykaż, że wielomian:

$$x^4 + x^2 + 1$$

nie posiada pierwiastków rzeczywistych.

210. Wykonaj mnożenia wielomianów:

$$a) (x^3 - 4x^2 + x - 7) \cdot (3x^2 - 8x + 1)$$

$$b) (x^2 - x\sqrt{2} + 1) \cdot (x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

$$c) (x^2 + \frac{1 + \sqrt{17}}{2}x + 2) \cdot (x^2 + \frac{1 - \sqrt{17}}{2}x + 2)$$

- d) $(x-1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{4})$
 e) $(x-1) \cdot (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$
 f) $(x-a) \cdot (x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a^n)$

211. Wykaż, że pierwiastkami wielomianu:

$$F(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

są liczby: 1, 2, 3, 4.

212. Wykaż, że pierwiastkami wielomianu:

$$F(x) = (2x-1)(3x-1)(4x-1)$$

są liczby: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

213. Wykaż, że jedynym pierwiastkiem wielomianu:

$$F(x) = (x-5)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$$

jest liczba 5.

214. Wielomian:

$$F(x) = (x-k_1)^2 + (x-k_2)^3 \dots + (x-k_n)^2$$

sprowadź do postaci: $ax^2 + bx + c$.

215. Wielomian:

$$F(x) = (x-k_1)^3 + (x-k_2)^3 + \dots + (x-k_n)^3$$

sprowadź do postaci: $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

216. Wielomian:

$$F(x) = (x-a)(x-\beta)(x-\gamma)$$

daje się sprowadzić do postaci: $x^3 + px^2 + qx + r$.

Wyraź p, q, r przez a, β, γ .

217. Wielomian:

$$F(x) = (x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

daje się sprowadzić do postaci: $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$.

Wyraź p, q, r, s przez a, β, γ, δ .

218. Wykonaj dzielenia wielomianów:

- a) $(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3) : (x-1)$
 b) $(x^5 - x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 5x - 2) : (x-2)$
 c) $(x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 15x - 6) : (x-2)$
 d) $(3x^4 - 8x^3 + 4x + 1) : (3x+1)$
 e) $(4x^5 - 11x^4 + 10x^3 + x^2 - 7x + 3) : (4x-3)$
 f) $(x^4 + x^3 - 12x^2 + 7x - 1) : (x^2 + 4x - 1)$
 g) $(x^3 + 5x^2 - x + 30) : (x^2 - x + 5)$

- h) $(x^5 + 2x^3 - 2x^2 + x - 2) : (x^2 + x + 2)$
 i) $(x^{10} + 4x^8 + 2x^6 + x^4 + 3x^2 + 1) : (x^2 + 1)$
 j) $(8x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 3) : (8x^3 - x + 3)$
 k) $(8x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2) : (4x^3 + x - 2)$
 l) $(x^3 - \frac{11}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}) : (x - \frac{3}{2})$
 m) $(x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2x - 4) : (2x + 4)$
 n) $(4x^3 + 4x^2 - 3x - 3) : (2x + \sqrt{3})$
 o) $(x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$
 p) $(x^3 - ax^2 - ax + a^2) : (x-a)$
 q) $(x^5 - 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 + (a+1)x - a) : (x-1)$
 r) $(x^{19} - 2x^{18} - 3x^{17} + x + 1) : (x+1)$
 s) $(x^{n+1} - 2x^n - 3x^{n-1} + x + 1) : (x+1)$
 t) $[6x^4 + x^3 + (5a-1)x^2 + a^2] : (2x^2 + x + a)$

219. Wykonaj dzielenia wielomianów:

- a) $(x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x+2)$
 b) $(x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 7) : (x-5)$
 c) $(10x^5 - 9x^4 + 9x^3 + 3x^2 - x + 8) : (2x^2 - x + 1)$
 d) $(12x^4 - 7x^3 - 31x^2 + 11x + 14) : (4x^2 - x - 8)$
 e) $(x^7 + 3x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x + 1) : (x^3 + 2x - 2)$
 f) $(x^{12} - x^7 - x^5 + x^3 + 1) : (x^7 - 1)$
 g) $(2x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + 7) : (x-4)$
 h) $(x^3 - 3ax^2 + 4a^2x - a^3) : (x-a)$
 i) $[3x^4 + 2x^3 + (a-4)x^2 + ax + 3a] : (x^2 + x - 1)$
 j) $(x^5 + 2) : (x+1)$
 k) $(x^9 - 3x^7 + 2x^5 + x^2 + 1) : (x^2 - 1)$
 l) $(x^{n+4} - 3x^{n+2} + 2x^n + x^2 + 1) : (x^2 - 1)$
 (n oznacza tu liczbę naturalną większą od 2).

220. Wykonaj dzielenie:

$$(6x^3 - 8x^2 + x + a) : (x-2).$$

Dla jakiej wartości a otrzymujemy resztę równą 0?

221. Wykonaj dzielenie:

$$(x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx + c) : (x^3 + 5x^2 + 6x + 2).$$

Dla jakich wartości a, b i c otrzymujemy przy każdej wartości x resztę równą 0?

222. Wykonaj dzielenie:

$$(ax^4 + bx^3 + 1) : (x^2 - 2x + 1).$$

Dla jakich wartości a i b otrzymujemy przy każdej wartości x resztę równą 0?

*223. Wykonaj dzielenie:

$$(x^3 + px^2 + qx + r) : (3x^2 + 2px + q).$$

Jakie warunki muszą spełniać liczby p, q, r , aby przy każdej wartości x reszta była równa 0?

224. Udowodnij twierdzenie:

Jeżeli wielomian $A(x)$ jest podzielny przez wielomian $B(x)$, a wielomian $B(x)$ jest podzielny przez trzeci wielomian $C(x)$, wówczas wielomian $A(x)$ jest podzielny przez wielomian $C(x)$.

225. Udowodnij twierdzenie:

Jeżeli wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ są podzielne przez wielomian $C(x)$, wówczas iloczyn $A(x) \cdot B(x)$ jest podzielny przez $[C(x)]^2$.

226. Udowodnij twierdzenie:

Jeżeli wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ są podzielne przez wielomian $C(x)$, wówczas suma $A(x) + B(x)$ oraz różnica $A(x) - B(x)$ są podzielne przez $C(x)$.

(M)

§ 22. Podzielność wielomianu $P(x)$ przez $(x - a)$.

Niech będzie dany wielomian $F(x)$ oraz dwumian stopnia pierwszego: $x - a$. Dzieląc wielomian $F(x)$ przez $x - a$ otrzymujemy jako iloraz wielomian $Q(x)$, którego stopień jest o 1 niższy od stopnia wielomianu $F(x)$, oraz resztę, która jest wielomianem stopnia zerowego, czyli liczbą stałą. Jeżeli resztę oznaczamy przez R , możemy napisać:

$$(13) \quad F(x) = (x - a)Q(x) + R$$

Podstawiając $x = a$ otrzymujemy:

$$(14) \quad F(a) = R$$

Reszta otrzymana przy dzieleniu wielomianu $F(x)$ przez $x - a$ jest równa $F(a)$, tj. wartości, którą wielomian $F(x)$ przybiera dla $x = a$.

Jeżeli w szczególności wielomian $F(x)$ jest podzielny przez $x - a$, wówczas reszta $R = 0$, a zatem w myśl (14): $F(a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem (miejsцем zerowym) wielo-

mianu $F(x)$. Odwrotnie: jeżeli a jest pierwiastkiem (miejsцем zerowym) wielomianu $F(x)$, wówczas $F(a) = 0$, czyli, w myśl (14): $R = 0$, a zatem wielomian $F(x)$ jest podzielny przez $x - a$. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Na to, aby wielomian $F(x)$ był podzielny przez dwumian pierwszego stopnia $x - a$, potrzeba i wystarcza, aby liczba a była pierwiastkiem wielomianu $F(x)$.

Przykłady:

1. Obliczyć resztę otrzymaną przy dzieleniu wielomianu:

$$F(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$$

przez dwumian:

$$x - 2.$$

Oznaczając szukaną resztę przez R , mamy:

$$R = F(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 + 5,$$

a więc:

$$R = 7.$$

2. Zbadać, czy wielomian:

$$F(x) = x^4 - 12x^2 - 13x - 12$$

jest podzielny przez dwumiany:

$$x - 4, x - 3, x + 3, x + 4.$$

Musimy zbadać, czy liczby: 4, 3, -3, -4 są pierwiastkami wielomianu $F(x)$. Podstawiając w tym wielomianie zamiast x kolejno wartości: 4, 3, -3, -4, mamy:

$$F(4) = 4^4 - 12 \cdot 4^2 - 13 \cdot 4 - 12 = 0$$

$$F(3) = 3^4 - 12 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 - 12 = -78$$

$$F(-3) = (-3)^4 - 12 \cdot (-3)^2 - 13 \cdot (-3) - 12 = 0$$

$$F(-4) = (-4)^4 - 12 \cdot (-4)^2 - 13 \cdot (-4) - 12 = 104$$

Liczby 4 i -3 są więc pierwiastkami wielomianu $F(x)$, liczby zaś 3 i -4 nie są pierwiastkami tego wielomianu. Wielomian $F(x)$ jest zatem podzielny przez dwumiany: $x - 4$ i $x + 3$, natomiast przez dwumiany: $x - 3$ i $x + 4$ nie jest podzielny.

Niech będzie dany wielomian $F(x)$ i założmy, że wielomian ten jest podzielny zarówno przez $x - a$, jak i przez $x - \beta$, przy czym a i β oznaczają liczby różne od siebie. Łatwo wykazać, że wówczas wielomian $F(x)$ jest podzielny także przez iloczyn $(x - a)(x - \beta)$.

W samej rzeczy, wobec podzielności $F(x)$ przez $x - a$, możemy napisać:

$$(15) \quad F(x) = (x - a) Q(x),$$

gdzie $Q(x)$ jest pewnym wielomianem, stopnia o 1 niższego od wielomianu $F(x)$. Wobec podzielności $F(x)$ przez $x - \beta$, jest liczba β pierwiastkiem wielomianu $F(x)$. Mamy zatem:

$$F(\beta) = 0, \text{ czyli } (\beta - a) Q(\beta) = 0.$$

Ponieważ $\beta - a \neq 0$, musi być: $Q(\beta) = 0$, czyli liczba β jest również pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$. Z tego wynika oczywiście, że wielomian $Q(x)$ jest podzielny przez $x - \beta$. Możemy więc napisać:

$$(16) \quad Q(x) = (x - \beta) Q_1(x),$$

gdzie $Q_1(x)$ jest pewnym wielomianem, stopnia o 1 niższego od $Q(x)$.

Biorąc pod uwagę (15) i (16) otrzymujemy:

$$(17) \quad F(x) = (x - a)(x - \beta) Q_1(x),$$

a więc wielomian $F(x)$ jest podzielny przez $(x - a)(x - \beta)$.

Za pomocą rozumowania zupełnie analogicznego do powyższego udowadniamy następujące twierdzenie ogólniejsze:

Jeżeli wielomian $F(x)$ jest podzielny przez każdy z dwumianów pierwszego stopnia:

$$x - a_1, x - a_2, \dots, x - a_n,$$

przy czym: $a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami różnymi od siebie, wówczas wielomian $F(x)$ jest także podzielny przez iloczyn:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Z twierdzenia tego skorzystamy w § następnym.

Ćwiczenia.

227. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

przez dwumiany:

$$a) x - 1 \quad b) x + 2 \quad c) x - \frac{1}{2} \quad d) x - \frac{3}{2}$$

228. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$x^4 - x^3 + 7x^2 + x - 9$$

przez dwumiany:

$$a) x + 1 \quad b) x - \frac{2}{3} \quad c) x - 3 \quad d) x + \frac{1}{2}$$

229. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$16x^4 + 8x^3 + 29x^2 + 16x - 6$$

przez dwumiany:

$$a) x - 1 \quad b) x - \frac{1}{4} \quad c) x + \frac{3}{4} \quad d) x + 2$$

230. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 10$$

przez dwumiany:

$$a) x - 1 \quad b) x - \sqrt{2} \quad c) x + \sqrt{2} \quad d) x + 3$$

231. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$2x^3 - (2a + 1)x^2 + (a + 3)x - 3a$$

przez dwumiany:

$$a) x - 1 \quad b) x - 2 \quad c) x - a \quad d) x - 2a$$

232. Oblicz reszty otrzymane przy dzieleniu wielomianu:

$$x^3 + x^2 - 7x + 3$$

przez dwumiany:

$$a) x - \sqrt{3} \quad b) x - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c) x + 3 \quad d) x + (\sqrt{2} - 1)$$

233. Zbadaj, czy wielomian:

$$4x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 8x + 3$$

jest podzielny przez dwumiany:

$$a) x - \frac{1}{2} \quad b) x - \frac{3}{2} \quad c) x + 5 \quad d) x + \frac{5}{2}$$

234. Zbadaj, czy wielomian

$$15x^6 - 8x^5 + 16x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 1$$

jest podzielny przez dwumiany:

- a) $x - \frac{1}{3}$ b) $x - \frac{1}{5}$ c) $x + 1$ d) $x - 1$

235. Zbadaj, czy wielomian:

$$x^3 - 22x^2 + 71x + 238$$

jest podzielny przez dwumiany:

- a) $x - 5$ b) $x - 7$ c) $x - 17$ d) $x + 2$

236. Zbadaj, czy wielomian:

$$x^4 - 17x^2 - 60$$

jest podzielny przez dwumiany:

- a) $x - \sqrt{2}$ b) $x + \sqrt{2}$ c) $x - 2\sqrt{5}$ d) $x + 2\sqrt{5}$

237. Zbadaj, dla jakiej wartości k wielomian:

$$x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + k$$

jest podzielny przez dany dwumian:

- a) $x - 1$ b) $x + 1$ c) $x - 2$ d) $x + 2$

238. Dla jakich wartości k i l wielomian:

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + kx + l$$

jest podzielny przez iloczyn:

$$(x - 1)(x - 3)?$$

239. Dla jakich wartości k , l i m wielomian:

$$x^4 - 3x^3 + kx^2 + lx + m$$

jest podzielny przez iloczyn:

$$(x + 1)(x - 2)(x - 4)?$$

240. Dla jakich wartości k wielomian:

$$x^3 + k^2x^2 - 4kx - 5$$

jest podzielny przez $(x - 2)$?

241. Wykazać, że wielomian:

$$x^n - 1 \quad (n : \text{dowolna liczba naturalna})$$

jest podzielny przez $(x - 1)$.

242. Wykazać, że wielomian:

$$x^n + 1$$

jest podzielny przez $(x + 1)$, gdy n jest liczbą naturalną nieparzystą, natomiast nie jest podzielny przez $(x + 1)$, gdy n jest liczbą naturalną parzystą.

243. Wykazać, że wielomian:

$$x^n - a^n$$

(n : dowolna liczba naturalna)

jest podzielny przez $(x - a)$.

244. Wykazać, że wielomian:

$$x^{2n-1} + a^{2n-1}$$

(n : dowolna liczba naturalna)

jest podzielny przez $(x + a)$.

245. Wykazać, że wielomiany:

a) $px^3 + qx^2 + qx + p$

b) $px^4 + qx^3 - qx - p$

c) $px^5 + qx^4 + rx^3 + rx^2 + qx + p$

d) $px^6 + qx^5 + rx^4 - rx^2 - qx - p$

są podzielne przez $(x + 1)$.

246. Wykazać, że wielomiany:

a) $px^3 + qx^2 - qx - p$

b) $px^4 + qx^3 - qx - p$

c) $px^5 + qx^4 + rx^3 - rx^2 - qx - p$

d) $px^6 + qx^5 + rx^4 - rx^2 - qx - p$

są podzielne przez $(x - 1)$.

*247. Pewien wielomian $F(x)$ daje przy dzieleniu przez $(x - 1)$ resztę 2, a przy dzieleniu przez $(x - 2)$ resztę 5. Jaką resztę otrzymamy przy dzieleniu tego wielomianu przez iloczyn: $(x - 1)(x - 2)$?

Wskazówka. Dzieląc $F(x)$ przez wielomian drugiego stopnia: $(x - 1)(x - 2)$ otrzymujemy jako iloraz niepełny pewien wielomian $Q(x)$ oraz jako resztę pewien wielomian kształtu: $kx + l$. Możemy wówczas napisać:

$$F(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + kx + l.$$

*248. Pewien wielomian $F(x)$ daje przy dzieleniu przez $(x - a)$ resztę p , a przy dzieleniu przez $(x - b)$ resztę q .

Jaką resztę otrzymamy przy dzieleniu tego wielomianu przez iloczyn: $(x - a)(x - b)$? (Zakładamy, że $a \neq b$).

249. Wyznaczyć liczby wymierne k i l w taki sposób, aby wielomian:

$$x^4 + 2x^2 + kx + l$$

był podzielny przez $(x - \sqrt{2})$.

250. Wyznaczyć liczby wymierne k i l w taki sposób, aby wielomian:

$$x^3 + 2x^2 + kx + l$$

był podzielny przez $(x - \sqrt{3})$.

(M)

§ 23. Przykłady rozkładu wielomianu na czynniki liniowe i kwadratowe.

O pierwiastkach wielomianu.

Równanie:

(18) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$,
gdzie współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a_0 \neq 0$, nazywamy równaniem algebraicznym n -tego stopnia.

Rozwiązać równanie algebraiczne, to znaczy znaleźć wszystkie wartości niewiadomej x , które spełniają równanie. Pierwiastki równania (18) są więc identyczne z pierwiastkami wielomianu:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Przede wszystkim zajmiemy się pytaniem, ile pierwiastków rzeczywistych posiadać może wielomian n -tego stopnia.

Dwumian pierwszego stopnia (liniowy):

$$ax + b \quad (a \neq 0)$$

posiada dokładnie jeden pierwiastek, gdyż równanie:

$$ax + b = 0$$

spełnione jest przez jedną i tylko jedną wartość:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ilość pierwiastków rzeczywistych trójmianu drugiego stopnia (kwadratowego):

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

jest, jak wiemy, zależna od znaku wyróżnika $b^2 - 4ac$, a mianowicie:

- 1) gdy wyróżnik jest dodatni,
trójmian posiada 2 różne pierwiastki,

- 2) gdy wyróżnik jest zerem,
trójmian posiada 1 pierwiastek,
- 3) gdy wyróżnik jest ujemny,
trójmian nie posiada pierwiastka.

Możemy więc powiedzieć, że trójmian drugiego stopnia posiada co najwyżej dwa pierwiastki.

Udowodnimy następujące twierdzenie ogólniejsze:

Wielomian n -tego stopnia posiada co najwyżej n różnych pierwiastków.

D o w ó d. Niech będzie dany wielomian n -tego stopnia $F(x)$ i założmy, że wielomian ten posiada k różnych pierwiastków: $a_1, a_2, \dots, a_k$. Wielomian $F(x)$ jest wówczas podzielny przez każdy z dwumianów stopnia pierwszego:

$$x - a_1, \quad x - a_2, \quad \dots \quad x - a_k,$$

a zatem także przez ich iloczyn:

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k).$$

Możemy więc napisać:

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) Q(x),$$

przy czym $Q(x)$ jest pewnym wielomianem stopnia $n - k$. Uwzględniając, że stopień wielomianu $Q(x)$ nie może być niższy od 0, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{skąd:} \quad n - k &\geq 0, \\ k &\leq n. \end{aligned}$$

Udowodniliśmy tym samym nasze twierdzenie.

Wielomian złożony z czynników liniowych.

Rozważmy wielomian n -tego stopnia:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

i założmy, że wielomian ten posiada n różnych pierwiastków:

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Z założenia tego wynika, że wielomian $F(x)$ jest podzielny przez iloczyn:

$$(19) \quad (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

Ponieważ iloczyn (19) jest także wielomianem n -tego stopnia, więc iloraz otrzymany przy dzieleniu $F(x)$ przez ten iloczyn jest wielomianem stopnia zerowego, czyli liczbą stałą. Oznaczając tę liczbę przez c , możemy napisać:

$$(20) \quad F(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

lub też:

$$(21) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

Wyraz n -tego stopnia wielomianu napisanego po lewej stronie (21) jest równy $a_0 x^n$, a wyraz n -tego stopnia wielomianu napisanego po prawej stronie (21) jest, jak łatwo zauważyć, równy $c x^n$. Ponieważ oba wzmiankowane wielomiany są równe (identyczne), czyli składają się z jednakowych wyrazów, więc: $c = a_0$. Uwzględniając to, możemy ostatecznie napisać:

$$(22) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

Rozłożyliśmy więc wielomian (18) na n czynników stopnia pierwszego (liniowych).

Jeżeli więc wielomian n -tego stopnia posiada n różnych pierwiastków, to możemy go przedstawić w postaci iloczynu n różnych czynników stopnia pierwszego.

Przykłady:

1. Trójmian stopnia drugiego:

$$3x^2 - 7x + 2$$

posiada, jak łatwo obliczyć, dwa pierwiastki: $\frac{1}{3}$ i 2.

Możemy zatem napisać:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$$

2. Wielomian stopnia trzeciego:

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12$$

posiada, jak łatwo się przekonać, trzy pierwiastki: -1 , 3 i 4.

Możemy zatem napisać:

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = (x + 1)(x - 3)(x - 4)$$

Nierozkładalne czynniki kwadratowe.

Rozważmy jeszcze kilka przypadków rozkładu wielomianu na czynniki:

1. Wielomian stopnia trzeciego:

$$(23) \quad x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

posiada, jak łatwo się przekonać przez podstawienie, pierwiastek: $x = 1$. Wielomian ten jest więc podzielny przez dwumian $(x - 1)$; wykonując odnośne dzielenie otrzymujemy iloraz: $x^2 - x + 1$.

Mamy więc:

$$(24) \quad x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x - 1)(x^2 - x + 1)$$

Trójmian $x^2 - x + 1$ nie daje się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego, ponieważ jego wyróżnik jest ujemny, a zatem trójmian ten pierwiastków rzeczywistych nie posiada. Rozłożyliśmy więc wielomian (23) na dwa czynniki, z których jeden jest stopnia pierwszego, drugi zaś stopnia drugiego. Ze wzoru (24), który ten rozkład przedstawia, łatwo wywnioskować, że jedynym pierwiastkiem wielomianu (23) jest liczba 1.

2. Wielomian:

$$(25) \quad x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

posiada, jak można się przekonać przez podstawienie, pierwiastek: $x = 3$. Wielomian ten jest więc podzielny przez dwumian $(x - 3)$; wykonując odnośne dzielenie otrzymujemy iloraz: $x^2 - 4x + 4$.

Mamy więc:

$$(26) \quad x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 3)(x^2 - 4x + 4)$$

Trójmian $x^2 - 4x + 4$, którego wyróżnik jest 0, daje się rozłożyć na dwa równe czynniki stopnia pierwszego; w samej rzeczy:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

Biorąc to pod uwagę, możemy napisać:

$$(27) \quad x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 3)(x - 2)^2$$

Rozłożyliśmy więc wielomian (25) na trzy czynniki stopnia pierwszego, z których dwa są jednakowe. Ze wzoru (27), który ten rozkład przedstawia, łatwo wywnioskować, że wielomian (25) posiada dwa różne pierwiastki: 3 i 2.

3. Wielomian stopnia czwartego:

$$(28) \quad x^4 + 9x^2 + 25$$

przybiera dla każdego x wartość dodatnią, nie posiada więc żadnego pierwiastka rzeczywistego i nie możemy go przeto rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego (liniowe). Możemy go jednak z łatwością rozłożyć na dwa czynniki stopnia drugiego (kwadratowe), jak poucza przekształcenie:

$$x^4 + 9x^2 + 25 = (x^4 + 10x^2 + 25) - x^2 = (x^2 + 5)^2 - x^2 = (x^2 + 5 - x)(x^2 + 5 + x)$$

Ponieważ trójmiany: $x^2 - x + 5$ i $x^2 + x + 5$ dalej rozłożyć się nie dają, mamy ostatecznie:

$$(29) \quad x^4 + 9x^2 + 25 = (x^2 - x + 5)(x^2 + x + 5)$$

4. Wielomian stopnia piątego:

$$(30) \quad x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1$$

posiada, jak łatwo się przekonać, pierwiastek: $x = 1$. Wielomian ten jest podzielny przez $(x - 1)$; wykonując odnośne dzielenie otrzymujemy iloraz: $x^4 + 2x^2 + 1$. Mamy więc:

$$(31) \quad x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 + 2x^2 + 1)$$

czyli:

$$(32) \quad x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)^2$$

Czynnik kwadratowy: $x^2 + 1$ nie daje się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego. Rozłożyliśmy więc ostatecznie wielomian (30) na trzy czynniki: jeden liniowy i dwa kwadratowe,

Powyższe przykłady ilustrują następujące twierdzenie, które daje się zupełnie ściśle udowodnić:

Każdy wielomian stopnia trzeciego i wyższego daje się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego lub drugiego.

Twierdzenie to należy do najbardziej zasadniczych wyników nauki matematycznej; nazywamy je twierdzeniem podstawowym algebry. Dowód tego twierdzenia wymaga stosowania głębszych środków analizy matematycznej i dlatego też go pominiemy. Pierwszy dowód tego twierdzenia podał Karol Fryderyk Gauss, jeden z najznakomitszych matematyków czasów nowożytnych, w swojej rozprawie doktorskiej w roku 1799. W roku 1816 Gauss podał jeszcze dwa inne dowody twierdzenia podstawowego. Inne wreszcie dowody pochodzą od Cauchy'ego, Weierstrassa, Lipschitza i Gordana, znakomitych matematyków XIX stulecia.

Wielokrotne pierwiastki wielomianu.

Jeżeli w rozkładzie wielomianu $F(x)$ na czynniki występuje czynnik $(x - a)$, wówczas liczba a jest, jak wiemy, pierwiastkiem wielomianu $F(x)$. Jeżeli w tym rozkładzie czynnik $(x - a)$ występuje jeden raz, mówimy, że a jest pierwiastkiem pojedynczym wielomianu $F(x)$; jeżeli czynnik $(x - a)$ występuje dwa razy, mówimy, że a jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $F(x)$; jeżeli czynnik $(x - a)$ występuje trzy razy, mówimy, że a jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $F(x)$ itd. Możemy ogólnie określić:

Jeżeli w rozkładzie na czynniki wielomianu $F(x)$ czynnik $(x - a)$ występuje k razy, jeżeli więc wielomian $F(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^k$, natomiast nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$, wówczas mówimy, że liczba a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $F(x)$.

Przykłady:

1. Wyżej rozpatrywaliśmy rozkład wielomianu (25) na czynniki. Otrzymaliśmy:

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 3)(x - 2)^2$$

Liczba 3 jest więc pierwiastkiem pojedynczym, a liczba 2 pierwiastkiem podwójnym tego wielomianu.

2. Wielomian: $x^5 + 3x^4 - 8x^2 - 9x - 3$ daje się, jak łatwo sprawdzić, rozłożyć na czynniki w sposób następujący:

$$x^5 + 3x^4 - 8x^2 - 9x - 3 = (x + 1)^3 (x + \sqrt{3}) (x - \sqrt{3}).$$

Liczba -1 jest więc pierwiastkiem potrójnym, a liczby: $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu.

Ćwiczenia.

251. Rozłóż następujące wielomiany na czynniki:

- | | |
|-----------------------|-------------------------------|
| a) $2x^2 - 30x + 112$ | b) $6x^2 - 13x + 6$ |
| c) $7x^2 - 20x - 3$ | d) $x^3 - x^2 - 20x$ |
| e) $x^4 - 13x^2 + 36$ | f) $x^4 - 27x^2 + 50$ |
| g) $x^4 - 10x^2 + 25$ | h) $x^4 - (1 + a^2)x^2 + a^2$ |

252. Rozłóż następujące wielomiany na czynniki:

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| a) $x^3 - 5x^2 + 17x$ | b) $x^4 + 8x^2 + 16$ |
| c) $x^4 + 3x^2 - 28$ | d) $3x^4 + 4x^2 + 1$ |
| e) $x^4 - k^4$ | f) $x^4 + (k^2 - 2)x^2 - 2k^2$ |

253. Każdy z następujących wielomianów rozłóż na czynniki, mając dany jeden jego pierwiastek a :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $x^3 - 14x^2 + 43x - 30$ | $(a = 1)$ |
| b) $5x^3 - x^2 - 14x - 8$ | $(a = -1)$ |
| c) $x^3 - 10x^2 + 32x - 32$ | $(a = 2)$ |
| d) $2x^3 + 21x^2 + 60x + 25$ | $(a = -\frac{1}{2})$ |
| e) $x^3 - 2x^2 + x - 36$ | $(a = 4)$ |
| f) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 2x - 6$ | $(a = 3)$ |
| g) $x^5 + 2x^4 - 16x - 32$ | $(a = -2)$ |

254. Każdy z następujących wielomianów rozłóż na czynniki, mając dane dwa jego pierwiastki a i β :

- | | |
|--------------------------------------|------------------------|
| a) $6x^4 + 41x^3 + 36x^2 - 89x + 30$ | $(a = -3, \beta = -5)$ |
| b) $x^4 - 3x^3 - 53x^2 + 111x - 56$ | $(a = +1, \beta = +8)$ |
| c) $x^4 - 2x^2 - 11x - 30$ | $(a = -2, \beta = +3)$ |

255. Rozłóż następujące wielomiany na czynniki:

- a) $x^4 + 2x^2 + 9$ b) $x^4 + 7x^2 + 16$ c) $x^4 + 3x^2 + 25$

Wskazówka: $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2 = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$.

256. Sprawdź następujące tożsamości:

- a) $x^4 + 2 = (x^2 + x \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{2}})(x^2 - x \sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{2}})$
b) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1)$
c) $x^5 + 1 = (x + 1)(x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x + 1)$

257. Wykaż, że jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu:

$$x^5 - 3x^4 + x - 3$$

jest liczba 3.

258. Wykaż, że jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu:

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 2$$

jest liczba 2.

259. Wykaż, że wielomian:

$$x^6 - x^4 + 3x^2 - 3$$

posiada tylko dwa pierwiastki rzeczywiste: -1 i 1 .

260. Wykaż, że liczba 1 jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu:

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x + 2.$$

Znajdź pozostałe jego pierwiastki.

261. Wykaż, że liczby 5 i -1 są podwójnymi pierwiastkami wielomianu:

$$x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25.$$

262. Wyznacz p i q w taki sposób, aby liczba 2 była podwójnym pierwiastkiem wielomianu:

$$x^3 + 4x^2 + px + q.$$

*263. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli wielomian $x^3 + px + q$ posiada pierwiastek podwójny, wówczas:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

§ 24. Pierwiastki wymierne równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych.

Zajmiemy się teraz równaniami algebraicznymi, których współczynniki są liczbami całkowitymi. Udowodnimy następujące twierdzenie:

Jeżeli liczba całkowita a , różna od zera, jest pierwiastkiem równania:

$$(34) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

o współczynnikach całkowitych, wówczas wyraz wolny a_n jest podzielny przez a .

D o w ó d. Skoro a jest pierwiastkiem równania (34), mamy:

$$(35) \quad a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a + a_n = 0,$$

skąd otrzymujemy:

$$(36) \quad a_n = -(a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a),$$

czyli:

$$(37) \quad \frac{a_n}{a} = -(a_0 a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + \dots + a_{n-1}).$$

Ponieważ prawa strona równości (37) jest liczbą całkowitą, zatem także lewa strona jest liczbą całkowitą, a więc a_n jest podzielne przez a .

Twierdzenie powyższe w wielu wypadkach prowadzi do rozwiązania równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych.

Przykłady:

1. Znaleźć pierwiastki całkowite równania:

$$(38) \quad 6x^3 - 17x^2 + 11x - 2 = 0.$$

W myśl twierdzenia wyżej udowodnionego, pierwiastkiem całkowitym tego równania może być tylko dzielnik (dodatni lub ujemny) wyrazu wolnego, tj. jedna z liczb:

$$1, 2, -1, -2.$$

Przez podstawienie łatwo sprawdzamy, że liczby 1, -1, -2 nie spełniają równania (38), natomiast liczba 2 równanie to spełnia. Jedynym więc pierwiastkiem całkowitym równania (38) jest liczba 2.

Mając już jeden pierwiastek równania (38), z łatwością znajdujemy pozostałe jego pierwiastki. Lewa strona tego równania jest bowiem podzielna przez $(x - 2)$; wykonując odnośne dzielenie otrzymujemy iloraz: $6x^2 - 5x + 1$. Możemy zatem równaniu (38) nadać postać:

$$(39) \quad (x - 2)(6x^2 - 5x + 1) = 0$$

Rozwiązując równanie:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$

otrzymujemy dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Zatem równanie (38) posiada trzy pierwiastki:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 2.$$

2. Znaleźć pierwiastki całkowite równania:

$$(40) \quad x^4 - 5x^3 + x^2 + 11x + 4 = 0$$

Wypisujemy dzielniki (dodatnie i ujemne) wyrazu wolnego, tj. liczby:

$$1, 2, 4, -1, -2, -4$$

i sprawdzamy, które z nich spełniają równanie (40); przekonujemy się, że liczby 4 i -1 równanie to spełniają, natomiast liczby 1, 2, -2, -4 równania nie spełniają. Jedynymi więc pierwiastkami całkowitymi równania (40) są liczby: 4 i -1.

Mając dwa pierwiastki równania (40), znajdujemy pozostałe jego pierwiastki jak w przykładzie poprzednim, a więc stosując rozkład lewej strony równania na czynniki. Znajdziemy w ten sposób, że równanie (40) posiada 4 pierwiastki:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_4 = 1 + \sqrt{2}.$$

[: Mając równanie algebraiczne o współczynnikach całkowitych, możemy także za pomocą skończonej ilości prób znaleźć wszystkie jego pierwiastki wymierne. Udowodnimy mianowicie następujące twierdzenie.

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{r}{s}$, różny od zera, jest pierwiastkiem równania:

$$(41) \quad a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

o współczynnikach całkowitych, wówczas wyraz wolny a_n jest podzielny przez r , a współczynnik a_0 jest podzielny przez s .

Dowód.

Ponieważ liczba $\frac{r}{s}$ jest pierwiastkiem równania (41), mamy:

$$(42) \quad a_0 \frac{r^n}{s^n} + a_1 \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{r}{s} + a_n = 0$$

stąd mnożąc obie strony przez s^n otrzymujemy:

$$(43) \quad a_0 r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + a_{n-1} r s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

czyli:

$$(44) \quad a_n s^n = - (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + a_{n-1} r s^{n-1})$$

i dzieląc obie strony przez r :

$$(45) \quad \frac{a_n s^n}{r} = - (a_0 r^{n-1} + a_1 r^{n-2} s + \dots + a_{n-1} s^{n-1})$$

Prawa strona równości (45) jest liczbą całkowitą, zatem także jej lewa strona musi być liczbą całkowitą. Ponieważ ułamek $\frac{r}{s}$ jest nieskracalny, czyli liczby s i r są pierwsze względem siebie, zatem także liczby s^n i r są pierwsze względem siebie, z czego wynika, że a_n jest podzielne przez r .

Aby wykazać, że a_0 jest podzielne przez s , bierzemy za punkt wyjścia znowu równość (43). Przekształcając tę równość otrzymujemy:

$$(46) \quad a_0 r^n = - (a_1 r^{n-1} s + \dots + a_{n-1} r s^{n-1} + a_n s^n)$$

czyli dzieląc obie strony przez s :

$$(47) \quad \frac{a_0 r^n}{s} = - (a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r s^{n-2} + a_n s^{n-1})$$

Prawa strona równości (47), a zatem także jej strona lewa jest liczbą całkowitą, ponieważ liczby r^n i s są pierwsze względem siebie, zatem a_0 jest podzielne przez s .

Dla przykładu znajdziemy wszystkie pierwiastki wymierne równania:

$$(48) \quad 11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6 = 0.$$

Pierwiastek wymierny równania (48), o ile istnieje, może być napisany w postaci $\frac{r}{s}$, gdzie liczba względna r jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) liczby 6, a liczba naturalna s jest dzielnikiem liczby 11. Dzielnikami liczby 6 są: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6; dzielnikami naturalnymi liczby 11 są: 1 i 11. Pierwiastki wymierne równania (48) muszą więc znajdować się albo pośród liczb:

$$1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6,$$

albo też pośród liczb:

$$\frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{2}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{6}{11}.$$

Za pomocą podstawienia przekonywamy się, że pośród tych liczb tylko liczby: -1 i $\frac{2}{11}$ spełniają równanie (48). A zatem jedynymi pierwiastkami wymiernymi równania (48) są liczby: -1 i $\frac{2}{11}$.

Mając już dwa pierwiastki równania (48), możemy też znaleźć pozostałe jego pierwiastki rozkładając, jak wyżej, lewą stronę równania na czynniki. Otrzymamy w ten sposób, że równanie (48) posiada cztery pierwiastki:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{2}{11}; \quad x_3 = -\sqrt{3}; \quad x_4 = \sqrt{3}.$$

Równanie algebraiczne o współczynnikach wymiernych daje się, jak łatwo zauważyć, sprowadzić do równania o współczynnikach całkowitych. Możemy zatem posługując się powyższą metodą znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne dowolnego równania algebraicznego o współczynnikach wymiernych. Głębiej sięgające metody rozwiązywania równań algebraicznych pozna czytelnik poświęcając się wyższemu studium matematycznym. Nauka o rozwiązywaniu równań algebraicznych stanowi przedmiot algebry wyższej, jednego z licznych działów matematyki.]

Ćwiczenia.

264. Rozwiąż równania:

a) $4x^3 - 21x^2 + 29x - 6 = 0$

b) $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 = 0$

c) $4x^3 - 8x^2 - 11x - 3 = 0$

d) $x^3 + 7x^2 + 4x + 28 = 0$

- e) $x^3 - 10x^2 - 10x - 11 = 0$
 f) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$
 g) $7x^3 - 3x^2 + 3x - 7 = 0$
 h) $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$
 i) $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$
 j) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$
 k) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5 = 0$
 l) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 6x - 8 = 0$
 m) $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 + 15x - 15 = 0$
 n) $x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 6 = 0$
 o) $x^9 - 2x^8 + 3x^5 - 6x^4 + 3x - 6 = 0$

265. Wyznacz pierwiastki całkowite równania:

$$x^6 + 3x^5 + 7x^4 - 7x^2 - 3x - 1 = 0.$$

266. Wykaż, że równanie:

$$x^5 - 7x^3 + x^2 - x + 2 = 0$$

nie posiada pierwiastków całkowitych.

*267. Wyznacz pierwiastki wymierne równania:

$$9x^4 - 9x^3 + 11x^2 - 9x + 2 = 0.$$

*268. Rozwiąż równanie:

$$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0.$$

*269. Wykaż, że równanie:

$$2x^3 - 4x + 1 = 0$$

nie posiada pierwiastków wymiernych.

*270. Wykaż, że każdy pierwiastek wymierny równania:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

271. Boki trójkąta tworzą postęp arytmetyczny o różnicy równej 1 cm, a pole tego trójkąta wynosi $\frac{3}{4}\sqrt{15}$ cm². Oblicz boki trójkąta.

272. Objętość walca obrotowego wynosi π cm³, powierzchnia zaś całkowita ma 9π cm². Oblicz promień podstawy walca.

(M)

§ 25. Układy równań algebraicznych.

Wielomiany takie, jak :

$$(49) \quad 3x^2 + 4y^2 - 5xy + 6x + 7y - 1$$

$$(50) \quad x^3 - y^3 + 5y^2 + 3$$

$$(51) \quad 4x^3y^2 - 5x^2y + y^3 - 2$$

zawierają dwie zmienne x i y . Wielomian (49) jest drugiego stopnia, wielomian (50) trzeciego stopnia, wielomian (51) piątego stopnia*). Przez stopień wielomianu rozumiemy (podobnie jak w przypadku wielomianu zawierającego jedną tylko zmienną) najwyższy ze stopni wyrazów wielomianu. Wielomiany zawierające dwie zmienne x i y będziemy dla krótkości oznaczali przez $A(x, y)$, $B(x, y)$ itp.

Układ dwóch równań o dwóch niewiadomych:

$$(52) \quad \begin{cases} A(x, y) = 0 \\ B(x, y) = 0 \end{cases}$$

gdzie $A(x, y)$ i $B(x, y)$ oznaczają wielomiany, nazywamy układem równań algebraicznych.

Rozwiązaniem układu (52) nazywamy każdą taką parę liczb (α, β) , że dla $x = \alpha$ i $y = \beta$ oba równania (52) spełniają się. Rozwiązać układ (52), to znaczy znaleźć wszystkie jego rozwiązania.

Co się tyczy ilości rozwiązań układu równań algebraicznych, to zachodzić mogą trzy przypadki następujące:

a) Układ nie posiada żadnego rozwiązania. Takim układem jest np. następujący:

$$(53) \quad \begin{cases} x^2 - 3y^2 + 3xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy + 1 = 0 \end{cases}$$

Istotnie, gdyby (x_0, y_0) było rozwiązaniem tego układu, to mielibyśmy:

$$\begin{cases} x_0^2 - 3y_0^2 + 3x_0y_0 - 2 = 0 \\ y_0^2 - x_0y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

*) Przez stopień jednomianu $ax^m y^n$ (ze względu na x i y) rozumiemy, jak wiadomo, liczbę: $m + n$.

Mnożąc obie strony drugiej z tych równości przez 3 i dodając następnie równości stronami, otrzymalibyśmy:

$$x_0^2 + 1 = 0$$

czyli:

$$x_0^2 = -1,$$

co jest oczywiście niemożliwe, gdyż kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny.

b) Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Takim układem jest np. następujący:

$$(54) \quad \begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

W samej rzeczy, łatwo wykazać, iż każda para wartości (x_0, y_0) , która spełnia pierwsze z równań (54), spełnia także drugie z tych równań. Jeżeli bowiem para wartości (x_0, y_0) spełnia pierwsze równanie:

$$y_0 - x_0 - 1 = 0,$$

to możemy napisać:

$$y_0 = x_0 + 1;$$

stąd, podnosząc obie strony do kwadratu, otrzymujemy:

$$y_0^2 = x_0^2 + 2x_0 + 1,$$

czyli:

$$y_0^2 - x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0,$$

a więc para wartości (x_0, y_0) spełnia także i drugie równanie. Pierwsze z równań (54) spełnia się jednak dla nieskończenie wielu par wartości; wystarczy bowiem przyjąć: $x = a$, $y = a + 1$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą, aby było ono spełnione. Każda taka para wartości spełnia także i drugie równanie.

c) Układ posiada skończoną ilość rozwiązań. Takim układem jest np. następujący:

$$(55) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$$

Zalóżmy, że (x, y) oznacza parę wartości spełniającą układ (55). Wyrażając z drugiego równania y przez x mamy:

$$(55^a) \quad y = \frac{5}{x};$$

podstawiając tę wartość do pierwszego równania otrzymujemy:

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0.$$

Równanie to posiada cztery pierwiastki:

$$x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = -5; x_4 = 5.$$

Mając te wartości niewiadomej x , obliczamy ze wzoru (55^a) odpowiednie wartości niewiadomej y ; otrzymujemy:

$$y_1 = -5; y_2 = 5; y_3 = -1; y_4 = 1.$$

Jeżeli więc układ (55) posiada rozwiązania, to rozwiązaniami mogą być tylko pary następujące:

$$(-1, -5); (1, 5); (-5, -1); (5, 1).$$

Przez podstawienie sprawdzamy, że każda z tych par spełnia układ (55). A zatem układ ten posiada cztery rozwiązania.

Omówimy na kilku przykładach najczęściej stosowane metody rozwiązywania układów równań algebraicznych.

1. Rozwiązać układ równań:

$$(56) \quad \begin{cases} 12x^2 - y^2 - 2xy + 6x + 6y - 45 = 0 \\ x^2 - x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Zalóżmy, że układ ten posiada rozwiązanie i że (x, y) oznacza parę wartości spełniającą ten układ. Ponieważ w drugim równaniu występuje y tylko w pierwszej potęgze, możemy łatwo wyrazić z tego równania y przez x :

$$(56^a) \quad y = x^2 - x + 3.$$

Podstawiając tę wartość do pierwszego równania, otrzymujemy po wykonaniu redukcji:

$$(56^b) \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Równanie to posiada cztery pierwiastki:

$$x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = -3; x_4 = 3.$$

Ze wzoru (56^a) obliczamy odpowiednie wartości y :

$$y_1 = 9; \quad y_2 = 5; \quad y_3 = 15; \quad y_4 = 9.$$

Jeżeli układ więc (56) posiada rozwiązania, to rozwiązaniami mogą być tylko pary następujące:

$$(-2, 9); (2, 5); (-3, 15); (3, 9).$$

Za pomocą podstawienia przekonamy się, że każda z tych par spełnia rozpatrywany układ równań. Układ ten posiada więc cztery rozwiązania.

2. Rozwiązać układ równań:

$$(57) \quad \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ y^3 - 7x^3 - 3xy - 11x^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

Układ ten rozwiążemy zupełnie takim samym sposobem, jaki zastosowaliśmy w przykładzie poprzednim. Z pierwszego równania wyrażamy y przez x :

$$(57^a) \quad y = 2x + 1.$$

Podstawiając tę wartość do drugiego równania, otrzymujemy po wykonaniu redukcji:

$$(57^b) \quad x^3 - 5x^2 + 3x + 4 = 0.$$

Równanie to posiada, jak łatwo sprawdzić, pierwiastek całkowity, równy 4. Mając już jeden pierwiastek równania (57^b), możemy z łatwością znaleźć pozostałe jego pierwiastki. Dzieląc wielomian $x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ przez $(x - 4)$, otrzymujemy iloraz: $x^2 - x - 1$. Możemy więc równaniu (57^b) nadać postać:

$$(x - 4)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Stąd z łatwością obliczymy, że równanie (57^b) posiada trzy pierwiastki:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \quad x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ze wzoru (57^a) obliczamy odpowiednie wartości y :

$$y_1 = 9; \quad y_2 = 2 - \sqrt{5}; \quad y_3 = 2 + \sqrt{5}.$$

Jeżeli więc układ (57) posiada rozwiązania, to rozwiązaniami mogą być tylko pary następujące:

$$(4, 9); \quad \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right); \quad \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right).$$

Za pomocą podstawienia przekonamy się, że każda z tych par rzeczywiście spełnia układ (57). Układ ten posiada więc trzy rozwiązania.

W powyższych dwóch przykładach zastosowaliśmy do rozwiązania układu równań algebraicznych tzw. metodę podstawiania. Polega ona na tym, że z jednego równania wyrażamy jedną niewiadomą przez drugą, np. y przez x , i otrzymane wyrażenie podstawiamy do drugiego równania otrzymując w ten sposób równanie z jedną niewiadomą x . Jeżeli to równanie potrafimy rozwiązać, możemy wówczas również obliczyć odpowiednie wartości niewiadomej y . Przez podstawienie sprawdzamy, które z obliczonych w ten sposób możliwych par wartości (x, y) dany układ rzeczywiście spełniają. Metodą podstawiania posługujemy się najczęściej wtedy, gdy w jednym z równań co najmniej jedna niewiadoma występuje tylko w pierwszej potęgze, gdyż wtedy możemy łatwo tę niewiadomą wyrazić przez drugą.

3. Rozwiązać układ równań:

$$(58) \quad \begin{cases} y^2 - 6x^2 + xy - 3x + 7 = 0 \\ 2y^2 - 13x^2 + 2xy + y - 7x + 15 = 0 \end{cases}$$

Zalóżmy, że układ ten posiada rozwiązania i że (x, y) oznacza parę wartości spełniającą ten układ. Ponieważ w każdym z równań (58) występują obie niewiadome w drugiej potęgze, rugujemy najpierw z obu tych równań kwadrat jednej niewiadomej za pomocą metody przeciwnych współczynników. Aby np. wyrugować y^2 , mnożymy obie strony pierwszego równania przez -2 i otrzymane równanie dodajemy do drugiego równania. Otrzymujemy po dokonaniu redukcji:

$$-x^2 - x + y + 1 = 0.$$

Z równania tego, w którym y występuje tylko w pierwszej potęgze, wyrażamy y przez x :

$$(58^a) \quad y = x^2 + x - 1$$

Podstawiając tę wartość do pierwszego z równań (58) otrzymujemy po wykonaniu redukcji:

$$(58^b) \quad x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 6x + 8 = 0$$

Równanie to posiada, jak łatwo sprawdzić, pierwiastki całkowite: -4 i 1 . Mając już dwa pierwiastki równania (58^b), możemy z łatwością obliczyć pozostałe jego pierwiastki. Dzieląc wielomian: $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 6x + 8$ przez iloczyn: $(x + 4)(x - 1)$, otrzymujemy iloraz: $x^2 - 2$. Możemy więc równaniu (58^b) nadać postać:

$$(x + 4)(x - 1)(x^2 - 2) = 0$$

Stąd z łatwością obliczymy, że równanie (58^b) posiada cztery pierwiastki:

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -\sqrt{2}; \quad x_4 = \sqrt{2}.$$

Ze wzoru (58^a) obliczamy odpowiednie wartości y ; otrzymujemy:

$$y_1 = 11; \quad y_2 = 1; \quad y_3 = 1 - \sqrt{2}; \quad y_4 = 1 + \sqrt{2}.$$

Rozwiązaniami układu (58) mogą zatem być tylko pary następujące:

$$(-4, 11); (1, 1); (-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}); (\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}).$$

Za pomocą podstawienia przekonamy się, że każda z tych par rzeczywiście spełnia układ (58). Układ ten posiada więc cztery rozwiązania.

4. Rozwiązać układ równań:

$$(59) \quad \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 4x + \frac{1}{2}y - 7 = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 + 6x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Zastosujemy tutaj, jak w przykładzie poprzednim, metodę przeciwnych współczynników. Aby wyrugować x^2 , mnożymy obie strony pierwszego z równań (59) przez 3, obie zaś strony drugiego równania mnożymy przez -2 i otrzymane rów-

nia dodajemy stronami. Otrzymujemy po wykonaniu redukcji równanie, w którym znika również x i występuje już tylko niewiadoma y :

$$y^2 + 5\frac{1}{2}y - 3 = 0.$$

Równanie to posiada dwa pierwiastki: $\frac{1}{2}$ i -6 . Aby obliczyć odpowiednie wartości niewiadomej x , podstawiamy do jednego z równań (59), np. do pierwszego równania, najpierw $y = \frac{1}{2}$, a następnie $y = -6$. Podstawiając $y = \frac{1}{2}$ otrzymujemy równanie:

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

którego pierwiastkami są liczby: -3 i 1 . Podstawiając zaś $y = -6$ otrzymujemy równanie:

$$x^2 + 2x + 49 = 0,$$

które nie posiada pierwiastków rzeczywistych. A zatem rozwiązaniami układu (59) mogą być tylko pary następujące:

$$(-3, \frac{1}{2}) \text{ i } (1, \frac{1}{2}).$$

Łatwo sprawdzamy, że każda z tych par spełnia rzeczywiście układ (59). Układ ten posiada więc dwa rozwiązania.

Aby rozwiązać dany układ równań algebraicznych, często wygodnie bywa równania najpierw odpowiednio przekształcić albo wprowadzić pomocnicze niewiadome. Wyjaśnimy to na prostych przykładach:

5. Rozwiązać układ równań:

$$(60) \quad \begin{cases} xy + x + y + 17 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 32 = 0 \end{cases}$$

Zastosujemy tutaj następujące przekształcenie: obie strony pierwszego równania mnożymy przez 2 i tak otrzymane równanie dodajemy stronami do drugiego równania; dostajemy wówczas:

$$2xy + x^2 + y^2 + 2(x + y) + (x + y) + 2 = 0,$$

czyli:

$$(x + y)^2 + 3(x + y) + 2 = 0.$$

Kładąc w tym równaniu $x + y = z$ otrzymujemy:

$$z^2 + 3z + 2 = 0,$$

skąd obliczamy: $z_1 = -1$, $z_2 = -2$. Mamy więc:

albo $x + y = -1$, albo $x + y = -2$.

Każde z tych równań o dwóch niewiadomych możemy teraz skombinować z jednym z równań układu (60), np. z równaniem pierwszym. Tym sposobem sprowadzamy rozwiązywanie układu (60) do rozwiązywania dwóch prostszych układów:

$$(60^a) \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ xy + x + y + 17 = 0 \end{cases}$$

i

$$(60^b) \quad \begin{cases} x + y = -2 \\ xy + x + y + 17 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując układ (60^a) otrzymujemy rozwiązania:

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{65}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \right) \text{ i } \left(\frac{-1 + \sqrt{65}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{65}}{2} \right);$$

rozwiązując zaś układ (60^b) otrzymujemy rozwiązania:

$$(-5, 3) \text{ i } (3, -5).$$

Łatwo sprawdzamy, że każda z powyższych par spełnia oba równania układu (60).

6. Rozwiązać układ równań:

$$(61) \quad \begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 16 \\ 2x^2 - 3xy - y^2 = 4 \end{cases}$$

Zauważmy, jeżeli para wartości (x, y) spełnia układ (61), to $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Wprowadzamy tu jako pomocniczą niewiadomą stosunek $\frac{y}{x}$.

Kładąc $\frac{y}{x} = t$, mamy: $y = tx$. Podstawiając w obu równaniach (61) wyrażenie tx zamiast y otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 - x^2t + 2x^2t^2 = 16 \\ 2x^2 - 3x^2t - x^2t^2 = 4 \end{cases}$$

czyli:

$$(61^a) \quad \begin{cases} x^2(1 - t + 2t^2) = 16 \\ x^2(2 - 3t - t^2) = 4 \end{cases}$$

Dzieląc te równania stronami otrzymujemy:

$$\frac{1 - t + 2t^2}{2 - 3t - t^2} = 4$$

Stąd obliczamy: $t_1 = -\frac{7}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Podstawiając do jednego z równań (61^a) wartość $t = -\frac{7}{3}$, dostajemy dwie wartości niewiadomej x :

$$x_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Z zależności: $y = tx$ obliczamy odpowiednie wartości y .

$$y_1 = \frac{7\sqrt{2}}{4}, \quad y_2 = -\frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

Podstawiając $t = \frac{1}{2}$, otrzymujemy w podobny sposób inne dwie wartości niewiadomej x :

$$x_3 = -4, \quad x_4 = 4,$$

i odpowiednie wartości y :

$$y_3 = -2, \quad y_4 = 2.$$

Rozwiązaniami układu (61) mogą zatem być tylko następujące pary:

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{4} \right); \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{7\sqrt{2}}{4} \right); (-4, -2); (4, 2)$$

Za pomocą podstawienia z łatwością sprawdzimy, że każda z tych par rzeczywiście spełnia układ (61). Układ ten posiada zatem cztery rozwiązania.

Sposób rozwiązywania układu równań, wyjaśniony na powyższym przykładzie, upraszcza rachunek wówczas, gdy w obu równaniach układu wszystkie wyrazy zawierające niewiadome x i y (oprócz wyrazów wolnych) są jednorodne, tzn. są jednomianami tego samego stopnia ze względu na niewiadome x i y .

Na zakończenie naszych rozważań o układach równań algebraicznych podamy jeszcze łatwy przykład rozwiązywania układu trzech równań o trzech niewiadomych.

Mamy rozwiązać układ następujący:

$$(62) \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz - xz = 5 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyrażamy z przez x i y :

$$(62^a) \quad z = 6 - x - y$$

Otrzymane wyrażenie podstawiamy do drugiego i trzeciego równania; po wykonaniu redukcji dostajemy:

$$(62^b) \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + xy - 6x + 6y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11 = 0 \end{cases}$$

Sprowadziliśmy więc rozwiązywanie układu (62) o trzech niewiadomych do rozwiązywania układu (62^b) o dwóch niewiadomych. Układ (62^b) posiada dwa rozwiązania:

$$(x_1 = 1, y_1 = 2), \quad (x_2 = 3, y_2 = 2).$$

Mając wartości niewiadomych x i y , znajdujemy odpowiednie wartości niewiadomej z ze wzoru (62^a):

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 1.$$

Rozwiązaniami układu (62) mogą więc być tylko następujące trójki:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3) \text{ i } (x_2, y_2, z_2) = (3, 2, 1).$$

Łatwo sprawdzamy, że każda z tych trójek spełnia rzeczywiście układ (62). Układ ten posiada więc dwa rozwiązania.

Ćwiczenia.

273. Rozwiąż układy równań:

- $2x^2 + xy + y - 26 = 0, \quad x + y - 5 = 0$
- $x^2 + 25y^2 - 10 = 0, \quad 3x - 5y - 8 = 0$
- $x^2 - y^2 - 45 = 0, \quad xy + 14 = 0$
- $xy + x = 15, \quad x^2y^2 - x^2 = 153$
- $x^3 - y^3 = 218, \quad x - y = 2$
- $x^3 + y^3 - 6xy + 1 = 0, \quad x + y - 5 = 0$

274. Rozwiąż układy równań: *)

- $2x^2 + 3y^2 = 72, \quad 3x^2 - 2y^2 = 4$
- $2x^2 + 3x + 4y = 35, \quad x^2 + 4x + 5y = 31$
- $3y^2 + 5x^2 + 13x - 4 = 0, \quad y^2 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$
- $x^2 + 3y^2 + 4x - 24y - 9 = 0, \quad 2x^2 - 5y^2 + 8x + 40y - 150 = 0$
- $2x^2 - 3y^2 + 4x + y + 8 = 0, \quad 3x^2 - 4y^2 + 6x - 5y - 3 = 0$
- $2y^2 + 3x^2 + 4y + 8x - 9 = 0, \quad 3y^2 + 4x^2 + 6y + 10x - 15 = 0$

*275. Rozwiąż układy równań: *)

- $y^2 + 4x^2 - 5xy + 9x = 9, \quad y^2 + 5x^2 - 5xy + 9x - y = 8$
- $\begin{cases} y^2 - 13xy + 24x^2 + 16y - 59x + 31 = 0 \\ y^2 - 13xy + 21x^2 + 17y - 58x + 32 = 0 \end{cases}$

*276. Rozwiąż układy równań: *)

- $x^2 - xy + 4y^2 = 6, \quad 2x^2 + 5xy = 18$
- $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2, \quad 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 15$
- $x^2 - 2xy + 2y^2 = 18, \quad 2x^2 + xy - 7y^2 = 27$
- $x^2 + xy + y^2 = 19, \quad 3x^2 + 2y^2 = 35$
- $x^4 = 544 + y^4, \quad x^2 + y^2 = 34$
- $x^3 + y^3 = 186 - 2xy(x + y), \quad x + y = 6$

*277. Rozwiąż układy równań:

- $y^3 - x^3 + x^2 + y^2 - 58x + 84 = 0, \quad y - 2x + 1 = 0$
- $x^3 + 2y^3 - 3xy + x^2 - y^2 - 84 = 0, \quad y + x = 2$
- $y^2 + 13x^2 - 7xy - 28x - 3 = 0, \quad y - x^2 + 3 = 0$
- $y^2 + 5x^2 = 14, \quad yx - 2x^2 = 1$
- $y^4 - 12xy^3 + 44x^2y^2 - 12x^3y - 69x^4 = 3, \quad y - x = 1$
- $x^4 - 2x^2y - x^2 + 8y - 12 = 0, \quad y - 2x = 0$

*278. Rozwiąż układ równań:

$$y^4 - x^4 = 15, \quad y - x = 1.$$

*279. Wykaż, że układ równań:

$y^4 - x^4 + 2y^3 - x^3 - 3y^2 - 3x^2 - 20y - 5x - 90 = 0, \quad y = 2x$ nie posiada rozwiązań wymiernych. (Rozwiązaniem wymiernym układu nazywamy parę liczb wymiernych (α, β) spełniającą układ).

280. Wykaż, że następujące układy równań posiadają nieskończenie wiele rozwiązań:

- $y - x = 2, \quad y^3 - x^3 - 6y^2 + 12x + 16 = 0$
- $(2x - y + 1)(3x + 2y + 1) = 0, \quad (2x - y + 1)(5x - 4y - 9) = 0$
- $y^2 - x^2 - 4y - 6x = 5, \quad y^2 - x^2 - 3y - 7x = 10$

*) Zadania nr 274, 275 i 276 wymagają uprzedniego opracowania § 24: „Pierwiastki wymierne równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych”.

281. Wykaż, że następujące układy równań nie posiadają rozwiązań:

- a) $y = 3x + 1, y^2 - 9x^2 - 2y + 3 = 0$
 b) $y + x = 0, x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y - x - y + 1 = 0$
 c) $y^2 - yx^2 + 2x^2 + 2 = 0, y - x^2 + 2 = 0$

282. Wykaż, że układ równań:

$$A(x, y) = 0, y = f(x)$$

jest równoważny *) układowi:

$$A(x, f(x)) = 0, y = f(x)$$

283. Wykaż, że układ równań:

$$A(x, y) = 0, B(x, y) = 0$$

jest równoważny układowi:

$$A(x, y) + k B(x, y) = 0, B(x, y) = 0$$

(k oznacza liczbę stałą).

*284. Rozwiąż układy równań:

- a) $z(x + y) = 35, z(x + z) = 40, y(x + y) = 28$
 b) $x + y + z = 14, xyz = 70, y^2 - xz = 11$
 c) $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 26, x^3 + y^3 + z^3 = 36$

*285. Oblicz boki trójkąta prostokątnego wiedząc, że jego obwód wynosi 70 cm, pole zaś 210 cm².

286. Powierzchnia całkowita prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 78 cm², a przekątna prostopadłościanu ma $\sqrt{43}$ cm. Oblicz krawędzie prostopadłościanu.

(M)

§ 26. Nierówności algebraiczne stopnia drugiego.

Jeżeli $F(x)$ jest wielomianem n -tego stopnia, wówczas każdą z nierówności:

$$F(x) > 0 \text{ i } F(x) < 0$$

nazywamy nierównością algebraiczną n -tego stopnia.

Rozwiązać nierówność algebraiczną, to znaczy znaleźć wszystkie wartości rzeczywiste x spełniające nierówność. W roz-

*) Dwa układy równań nazywamy równoważnymi, gdy każde rozwiązanie pierwszego układu jest rozwiązaniem drugiego i na odwrót.

dziale I poznaliśmy sposób rozwiązywania nierówności pierwszego stopnia. Rozpatrzmy teraz z kolei nierówności drugiego stopnia:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ i } ax^2 + bx + c < 0 \quad (a \neq 0).$$

Mamy zatem zbadać, dla jakich wartości rzeczywistych x trójmian kwadratowy:

$$(63) \quad F(x) = ax^2 + bx + c$$

przyjmuje wartość dodatnią, dla jakich zaś wartość ujemną.

Załóżmy, że współczynnik a jest liczbą dodatnią. Rozróżnimy trzy przypadki, a to zależnie od wartości wyróżnika trójmianu, tj. wyrażenia: $b^2 - 4ac$.

a) Wyróżnik trójmianu, jest liczbą dodatnią. Wówczas trójmian posiada dwa pierwiastki rzeczywiste α i β (zakładamy, że $\alpha < \beta$) i daje się rozłożyć na czynniki liniowe według wzoru:

$$(64) \quad F(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Ze wzoru (64) łatwo możemy wywnioskować, jakiego znaku jest badany trójmian kwadratowy dla różnych wartości zmiennej x przy $a > 0$. A mianowicie:

- 1) gdy $x < \alpha$, wówczas: $x - \alpha < 0, x - \beta < 0$,
a zatem: $F(x) > 0$;
- 2) gdy $x = \alpha$, wówczas: $F(x) = 0$;
- 3) gdy $\alpha < x < \beta$, wówczas: $x - \alpha > 0, x - \beta < 0$,
a zatem: $F(x) < 0$;
- 4) gdy $x = \beta$, wówczas: $F(x) = 0$;
- 5) gdy $x > \beta$, wówczas: $x - \alpha > 0, x - \beta > 0$,
a zatem: $F(x) > 0$.

W rozpatrywanym przez nas przypadku mamy więc:

$$F(x) > 0, \quad \text{gdy } x < \alpha, \text{ albo } x > \beta,$$

$$F(x) < 0, \quad \text{gdy } \alpha < x < \beta.$$

b) Wyróżnik trójmianu jest zerem. Trójmian posiada wówczas jeden pierwiastek podwójny α i daje się rozłożyć na czynniki według wzoru:

$$(65) \quad F(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

Ze wzoru tego wynika natychmiast, że przy $a > 0$ trójmian $F(x)$ przybiera wartość dodatnią dla każdego rzeczywistego x różnego od a .

c) Wyróżnik trójmianu jest ujemny. Trójmian wówczas nie posiada pierwiastków rzeczywistych i na czynniki liniowe rozłożyć się nie daje. Przekształcimy trójmian $F(x)$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} F(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Oznaczając wyróżnik trójmianu: $b^2 - 4ac$ przez D , możemy napisać:

$$(66) \quad F(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right]^*.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku zakładamy, że $D < 0$, zatem: $-\frac{D}{4a^2} > 0$, więc z tego wynika, że przy $a > 0$ trójmian $F(x)$ przybiera wartość dodatnią dla każdego rzeczywistego x .

Za pomocą zupełnie analogicznego rozumowania możemy zbadać znak trójmianu kwadratowego:

$$F(x) = ax^2 + bx + c$$

w przypadku, gdy współczynnik a jest liczbą ujemną. Przy założeniu: $a < 0$ otrzymujemy następujące wyniki:

*) Wyrażenie: $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right]$ nazywamy kanoniczną postacią trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$.

a) Gdy wyróżnik jest dodatni, gdy zatem trójmian posiada dwa pierwiastki rzeczywiste α i β ($\alpha < \beta$), wówczas:

$$\begin{aligned} F(x) &> 0, & \text{gdy } \alpha < x < \beta, \\ F(x) &< 0, & \text{gdy } x < \alpha \text{ albo } x > \beta. \end{aligned}$$

b) Gdy wyróżnik jest zerem, gdy zatem trójmian posiada jeden pierwiastek podwójny α , wówczas $F(x)$ przybiera wartość ujemną dla każdego rzeczywistego x różnego od α .

c) Gdy wyróżnik jest ujemny, wówczas $F(x)$ przybiera wartość ujemną dla każdego rzeczywistego x .

Przykłady:

1. Rozwiązać nierówność:

$$(67) \quad 2x^2 < 15x - 7$$

Przenosząc wyrazy z prawej strony na lewą nadajemy nierówności (67) postać następującą:

$$(67^a) \quad 2x^2 - 15x + 7 < 0$$

Ponieważ wyróżnik trójmianu $2x^2 - 15x + 7$ jest dodatni, przeto trójmian ten posiada dwa pierwiastki; obliczając te pierwiastki otrzymujemy: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 7$. Możemy więc nierówności (67^a) nadać postać:

$$(67^b) \quad 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 7) < 0$$

Nierówność ta spełnia się, gdy:

$$\frac{1}{2} < x < 7$$

2. Rozwiązać nierówność:

$$(68) \quad 9x^2 + 6x + 1 > 0$$

Ponieważ wyróżnik trójmianu $9x^2 + 6x + 1$ jest zerem, przeto trójmian ten posiada jeden pierwiastek podwójny; obliczając ten pierwiastek otrzymujemy: $\alpha = -\frac{1}{3}$. Możemy więc nierówności (68) nadać postać:

$$(68^a) \quad 9 \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 > 0$$

Nierówność ta spełnia się dla każdego x różnego od $-\frac{1}{3}$.

3. Rozwiązać nierówność:

$$(69) \quad 2x < 5 + x^2$$

Przenosząc wyrazy z prawej strony na lewą nadajemy nierówności (69) postać:

$$(69^a) \quad -x^2 + 2x - 5 < 0$$

Mnożąc obie strony nierówności przez -1 i zmieniając kierunek nierówności na przeciwny, otrzymujemy:

$$(69^b) \quad x^2 - 2x + 5 > 0$$

Wyróżnik trójmianu $x^2 - 2x + 5$ jest ujemny; stąd wniosek, że trójmian ten przybiera wartość dodatnią dla każdego rzeczywistego x , innymi słowy nierówność (69^b) spełnia się dla każdego rzeczywistego x .

4. Rozwiązać nierówność:

$$(70) \quad x^2 - x + 1 < 0$$

Wyróżnik trójmianu $x^2 - x + 1$ jest ujemny; stąd wniosek, że trójmian ten przybiera wartość dodatnią dla każdego rzeczywistego x , innymi słowy nierówność (70) nie spełnia się dla żadnego rzeczywistego x .

Ćwiczenia.

287. Rozwiąż nierówności:

- $x^2 + 26x < 15x$
- $x^2 > 4x + 21$
- $4x^2 - 9 < 0$
- $3x^2 + x > 0$
- $5x^2 - 2x < 0$
- $x + 35 < 6x^2$
- $x^2 > \frac{x + 10}{3}$
- $10(x + 1) > x(x + 33)$
- $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 > x^2 + 4x + 12$
- $\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{8} > x$
- $2 + (x + 1)^2 < 2(6 + x)$
- $7x(3 - 7x) > 3(3 - 7x)$
- $2x^2 + 5 > x(x + 3) + 4$
- $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 1 > 0$
- $x(x - 1) + 6(x + 1) < (x + 1)^2 - (x - 2)^2$

288. Rozwiąż nierówności podwójne:

- $3 < x^2 - 2x < 24$
- $0 < 12x - x^2 < 20$

289. Rozwiąż nierówności: *)

- $\frac{x - 3}{x^2 - x + 4} > 0$
- $\frac{3x^2 - 11}{3x - 5} < \frac{8}{3}$
- $\frac{2x - 1}{x^2 - 3x} < 0$
- $\frac{3x}{x^2 - 6x + 5} > -1$
- $\frac{x^2 - 7x + 10}{10 - 3x} < 0$
- $\frac{x + 1}{8} < \frac{2}{x - 5}$

290. Dane jest równanie:

$$x^2 - 2mx + (3m + 4) = 0.$$

- Dla jakich wartości m równanie to posiada 2 pierwiastki rzeczywiste?
- Dla jakich wartości m równanie to nie posiada żadnego pierwiastka rzeczywistego?

291. Dane jest równanie:

$$x^2 + (m + 1)x + (m + 3) = 0.$$

- Dla jakich wartości m równanie to posiada 2 pierwiastki rzeczywiste?
- Dla jakich wartości m równanie to nie posiada żadnego pierwiastka rzeczywistego?

292. Dane jest równanie:

$$x^2 - 4x + m^2 = 0.$$

- Dla jakich wartości m równanie to posiada jeden pierwiastek lub dwa pierwiastki rzeczywiste?
- Dla jakich wartości m równanie to nie posiada żadnego pierwiastka rzeczywistego?

293. Wykaż, że równanie:

$$2x^2 - mx + (m - 3) = 0$$

dla każdej wartości m posiada dwa pierwiastki rzeczywiste.

294. Wykaż, że równanie:

$$x^2 + (m - 1)x + (3m^2 + 1) = 0$$

nie posiada pierwiastków rzeczywistych dla żadnej wartości m .

*) Zadanie nr 289 wymaga uprzedniego opracowania § 3 w rozdziale I.: „Nierówności ułamkowe”.

295. Wyznacz m w taki sposób, aby nierówność:

$$x^2 + 5mx + 1 > 0$$

była spełniona dla każdej wartości x .

296. Wyznacz m w taki sposób, aby nierówność:

$$x^2 + (2m - 1)x + (m + \frac{1}{2}) > 0$$

była spełniona dla każdej wartości x .

*297. Wykaż, że nierówność:

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 1 > 0$$

spełniona jest dla wszelkich wartości x i y .

*298. Wykaż, że nierówność:

$$3x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 1 > 0$$

spełniona jest dla wszelkich wartości x i y .

[M]

§ 27. Nierówności algebraiczne wyższych stopni.

Rozwiązywanie nierówności algebraicznych stopnia trzeciego i wyższego sprowadzamy do rozwiązywania nierówności stopnia pierwszego i drugiego. Każdy bowiem wielomian stopnia trzeciego i wyższego daje się, w myśl twierdzenia podstawowego algebry, rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego i drugiego. Jeżeli potrafimy ten rozkład skutecznie, wówczas badanie znaku wielomianu sprowadza się już do badania znaku poszczególnych czynników otrzymanych przy rozkładzie, a więc do rozwiązywania nierówności pierwszego i drugiego stopnia. Wyjaśnimy to na dwóch prostych przykładach.

1. Rozwiązać nierówność:

$$(71) \quad x^3 - 2x^2 + 4x - 3 > 0$$

Wielomian napisany po lewej stronie nierówności (71) posiada, jak łatwo się przekonać, pierwiastek $x = 1$. Wielomian ten jest więc podzielny przez $(x - 1)$; wykonując odnośne dzielenie otrzymujemy jako iloraz: $x^2 - x + 3$. Mamy więc rozkład na czynniki:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 3)$$

Możemy więc nierówności (71) nadać postać:

$$(71^a) \quad (x - 1)(x^2 - x + 3) > 0$$

Trójmian $x^2 - x + 3$ posiada wyróżnik ujemny i przybiera wartość dodatnią dla każdego rzeczywistego x ; aby więc nierówność (71^a) była spełniona, potrzeba i wystarcza, aby czynnik $(x - 1)$ był dodatni, tzn. aby $x > 1$.

2. Rozwiązać nierówność:

$$(72) \quad x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 > 0$$

Wielomian napisany po lewej stronie nierówności (72) posiada, jak łatwo się przekonać, cztery pierwiastki: 1, 2, 3, 4. Mamy zatem rozkład na czynniki:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Możemy więc nierówności (72) nadać następującą postać:

$$(72^a) \quad (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$$

Badamy znaki czynników: $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ i $(x - 4)$ dla różnych wartości zmiennej x i stąd wyznaczamy znak iloczynu: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

Otrzymane wyniki zestawiamy w poniższej tabelce (w tabelce tej wartości zmiennej x wznoszą od dołu tabelki ku górze):

	$x-1$	$x-2$	$x-3$	$x-4$	$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$x > 4$	+	+	+	+	+
$x = 4$	+	+	+	0	0
$3 < x < 4$	+	+	+	-	-
$x = 3$	+	+	0	-	0
$2 < x < 3$	+	+	-	-	+
$x = 2$	+	0	-	-	0
$1 < x < 2$	+	-	-	-	-
$x = 1$	0	-	-	-	0
$x < 1$	-	-	-	-	+

Widzimy więc, że nasza nierówność spełnia się, gdy:

albo $x < 1$, albo $2 < x < 3$, albo $x > 4$.

Ćwiczenia.

299. Rozwiązać nierówności:

- a) $(4x + 1)(x^2 + 1) < 0$
- b) $(2x - 5)(x^2 + x + 2) > 0$
- c) $(2x - 1)(5x - 1)(7x - 1) > 0$
- d) $x^4 - 10x^2 + 9 < 0$
- e) $(x^2 - x + 3)(x^2 - 11) < 0$
- f) $(x^2 + x + 4)(x^2 - x + 2) < 0$
- g) $(x + 3)(x - 1)(x - 2)(x - 4) > 0$
- h) $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^8 + 1)(x^{16} + 1) < 0$
- i) $x^3 - x^2 + x - 6 > 0$
- j) $4x^3 - 3x - 1 < 0$
- k) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 < 0$
- l) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 < 0$

300. Boki trójkąta tworzą postęp geometryczny. Jaki warunek musi spełniać iloraz tego postępu?

—————

CZĘŚĆ II

ROZDZIAŁ V

Funkcje zmiennej rzeczywistej.

(K) (H) (M)

§ 28. Pojęcie funkcji.

Przykłady funkcji.

Jednym z najważniejszych pojęć matematyki jest pojęcie funkcji.

Do pojęcia funkcji dochodzimy badając zależność zachodzącą pomiędzy wielkościami. Zdarzyć się może, że zależność pomiędzy dwiema zmiennymi wielkościami x i y jest taka, iż każdej wartości zmiennej x (wziętej z pewnego zbioru tych wartości) odpowiada określona wartość zmiennej y . Mówimy wówczas, że wielkość y jest funkcją wielkości x ; x nazywamy zmienną niezależną, a y zmienną zależną.

Podajemy kilka przykładów funkcji:

1. Pole kwadratu jest funkcją długości jego obwodu. Jeżeli długość obwodu kwadratu oznaczamy przez x cm, a jego pole przez y cm², mamy wówczas:

$$(1) \quad y = \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

Każdej wartości (dodatniej) zmiennej niezależnej x odpowiada jedna i tylko jedna wartość zmiennej zależnej y .

2. Objętość sześcianu jest funkcją długości jego krawędzi. Jeżeli długość krawędzi sześcianu oznaczmy przez x cm, a jego objętość przez y cm³, wówczas mamy:

$$(2) \quad y = x^3$$

Danej wartości (dodatniej) zmiennej niezależnej x odpowiada jedna i tylko jedna wartość zmiennej zależnej y .

3. Potęga jest funkcją wykładnika potęgi (przy danej podstawie). Jeżeli jako podstawę przyjmujemy liczbę 10, wykładnik potęgi oznaczmy przez x , a potęgę przez y , wówczas możemy napisać:

$$(3) \quad y = 10^x$$

Danej wartości rzeczywistej (dodatniej, ujemnej lub równej zeru) zmiennej niezależnej x odpowiada jedna i tylko jedna wartość zmiennej zależnej y .

4. Droga przebyta przez ciało spadające swobodnie w danej miejscowości jest funkcją czasu spadania. Jeżeli przyspieszenie ziemskie w danej miejscowości wynosi $981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$, czas spadania x sek, a droga przebyta y cm, wówczas mamy (jak wiemy z mechaniki):

$$(4) \quad y = 490,5 x^2$$

Mając wartość zmiennej niezależnej x możemy za pomocą wzoru (4) obliczyć odpowiednią wartość zmiennej zależnej y .

5. Ciśnienie powietrza w danej miejscowości jest funkcją czasu. Nie możemy podać wzoru matematycznego wyrażającego zależność pomiędzy ciśnieniem y a czasem x . Możemy jednak dla obranego okresu czasu zależność tę zbadać na drodze doświadczalnej (empirycznej) za pomocą odpowiedniego przyrządu (barografu).

Obszar zmienności.

Niech będzie dana dowolna funkcja; oznaczmy, jak wyżej, zmienną niezależną przez x , a zmienną zależną przez y . Wartości, które może przybierać zmienna niezależna x , tworzą pewien zbiór X , który nazywamy obszarem zmienności zmiennej x ; wartości, które przyjmuje zmienna y , tworzą również pewien zbiór Y , który nazywamy zbiorem wartości funkcji.

Gdy dla pewnej funkcji zbiór X jest obszarem zmienności zmiennej niezależnej x , wówczas mówimy, że funkcja ta jest określona w zbiorze X (tzn. jest określona dla każdej liczby należącej do zbioru X).

Przykłady:

1. Pole koła jest funkcją jego promienia. Oznaczając promień przez x cm, a pole przez y cm², możemy napisać:

$$(5) \quad y = \pi x^2$$

Zmienna niezależna x może przybierać każdą wartość dodatnią, nie może natomiast przybierać wartości ujemnej, ani zerowej; jej obszarem zmienności jest więc zbiór wszystkich liczb dodatnich.

2. Sinus kąta jest funkcją kąta. Oznaczając kąt przez x , a jego sinus przez y , możemy napisać:

$$(6) \quad y = \sin x$$

Kąt x (jako miara obrotu) może przybierać każdą wartość rzeczywistą, możemy więc powiedzieć, że obszarem zmienności zmiennej x jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

3. Wzór

$$(7) \quad y = \frac{3}{x}$$

określa funkcję, w której zmienna niezależna x przybierać może każdą wartość dodatnią lub ujemną, natomiast dla $x = 0$ wzór (7) traci sens; obszarem zmienności x jest więc zbiór wszystkich liczb rzeczywistych różnych od 0.

4. Rozpatrzmy funkcję określoną wzorem:

$$(8) \quad y = \sqrt{x - 3}$$

Wzór (8) posiada sens wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie podpierwiastkowe $x - 3$ jest nieujemne, tzn. gdy $x \geq 3$.

Obszarem zmienności zmiennej x jest więc zbiór liczb nie mniejszych od 3.

Określenie funkcji.

Funkcja jest określona, gdy podane jest prawo ustalające zależność pomiędzy zmienną niezależną x a zmienną zależną y . Prawo to najczęściej wyrażone jest za pomocą wzoru, pozwalającego obliczyć wartość y , gdy dana jest wartość x . Dla określenia funkcji podanie takiego wzoru nie jest jednak konieczne, wystarczy bowiem po prostu ustalić, jakie wartości zmiennej y odpowiadają poszczególnym wartościom zmiennej x .

Przykłady:

1. Określmy funkcję w sposób następujący:

a) gdy x jest liczbą wymierną, wówczas y równe jest 1;

b) gdy x jest liczbą niewymierną, wówczas y równe jest 0.

Powyższe warunki istotnie określają pewną funkcję, gdyż pozwalają one każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkować jednoznacznie określoną wartość y (a mianowicie wartość 1 lub 0, zależnie od tego, czy x jest wymierne czy niewymierne). Mamy więc np.:

$$\text{gdy } x = 5, \quad \text{to } y = 1$$

$$\text{gdy } x = \frac{3}{2}, \quad \text{,, } y = 1$$

$$\text{gdy } x = \sqrt{2}, \quad \text{,, } y = 0$$

$$\text{gdy } x = \pi, \quad \text{,, } y = 0$$

Rozpatrywana funkcja jest określona w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

2. Określmy funkcję przez warunki następujące:

$$\text{a) gdy } -1 \leq x < 0, \quad \text{wówczas } y = \frac{1-x}{x}$$

$$\text{b) gdy } x = 0, \quad \text{wówczas } y = 0$$

$$\text{c) gdy } 0 < x \leq 1, \quad \text{wówczas } y = \frac{1+x}{x}$$

Powyższe warunki pozwalają każdej liczbie x , spełniającej nierówność $-1 \leq x \leq 1$, przyporządkować jedną i tylko jedną wartość y . Rozpatrywana funkcja jest więc określona dla powyższych wartości zmiennej x .

3. Określmy funkcję przez warunki następujące:

$$\text{a) gdy } 0 \leq x < 1, \quad \text{wówczas } y = 1$$

$$\text{b) gdy } x \geq 1, \quad \text{wówczas } y = x$$

Powyższe warunki pozwalają każdej liczbie nieujemnej przyporządkować jedną i tylko jedną wartość y . Rozpatrywana funkcja jest więc określona w zbiorze wszystkich liczb nieujemnych.

Po tych uwagach wstępnych możemy przystąpić do ogólnego określenia pojęcia funkcji.

Niech będzie dany pewien zbiór liczb rzeczywistych, który oznaczamy przez X . Przyporządkujemy każdej liczbie x należącej do zbioru X jedną i tylko jedną wartość y (przy czym dwóm różnym liczbom x_1 i x_2 niekoniecznie muszą być przyporządkowane różne wartości). Mówimy wówczas, że prawo, ustalające to przyporządkowanie, określa pewną funkcję w zbiorze X (tzn. określa funkcję dla wszystkich liczb należących do zbioru X). Wartość y , przyporządkowaną liczbie x , oznaczamy przez $f(x)$; możemy wówczas funkcję wyrazić w sposób następujący:

$$y = f(x)$$

Jeżeli rozpatrujemy kilka funkcji, to dla odróżnienia jednej od drugiej posługujemy się oznaczeniami:

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad y = h(x), \quad y = F(x) \text{ itp.}$$

Tablice funkcyjne i wykresy.

Do praktycznego przedstawienia przebiegu funkcji służą:

a) tablice funkcyjne i b) wykresy.

Tablica funkcyjna zawiera w rubrykach wartości zmiennej zależnej y obok odpowiednich wartości zmiennej niezależnej x .

Dla przykładu podajemy tablicę dla funkcji:

$$y = \sqrt{x}$$

obliczoną dla kilku wartości zmiennej niezależnej:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	1,000	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414

Wartości y , zawarte w tej tablicy, są przybliżone z dokładnością do 0,0005.

Oto jeszcze jeden przykład tablicy funkcyjnej. Masa 1 litra wody destylowanej zależy, jak wiemy, od temperatury, czyli jest

funkcją temperatury. Poniższa tabelka zawiera wartości masy 1 litra wody destylowanej w różnych temperaturach; wartości te zostały otrzymane za pomocą odpowiednich pomiarów.

Temper. $x^{\circ}\text{C}$	Masa $y\text{ kg}$
0	0,99987
1	0,99993
2	0,99997
3	0,99999
4	1,00000
5	0,99999
6	0,99997
7	0,99993
8	0,99988
9	0,99981
10	0,99973

Tablica funkcyjna zawiera wartości funkcji oczywiście tylko dla skończonej ilości wartości zmiennej niezależnej. Funkcje, z którymi mamy w praktyce do czynienia, mają jednak tę własność, że małym zmianom zmiennej x odpowiadają małe, w przybliżeniu do nich proporcjonalne zmiany zmiennej y . Jeżeli więc w tablicy odstępów zmiennej x są niewielkie, wówczas posługując się *i n t e r p o l a c j ą* możemy obliczyć przybliżone wartości funkcji dla pośrednich, w tablicy nie uwzględnionych, wartości x . Odpowiednio sporządzona tablica funkcyjna przedstawia nam w ten sposób ogólny przebieg funkcji. Do najbardziej rozpowszechnionych tablic funkcyjnych należą tablice logarytmów, tablice funkcji trygonometrycznych, tablice kwadratów, sześciatów, pierwiastków itp., poza tym tablice fizyczne, astronomiczne i różnego rodzaju tablice statystyczne.

Drugim sposobem przedstawienia przebiegu funkcji jest *w y k r e s*. Jak sporządza się wykres, wie czytelnik z nauki poprzedniej, możemy więc ograniczyć się do kilku uwag.

Mając wykonać wykres funkcji:

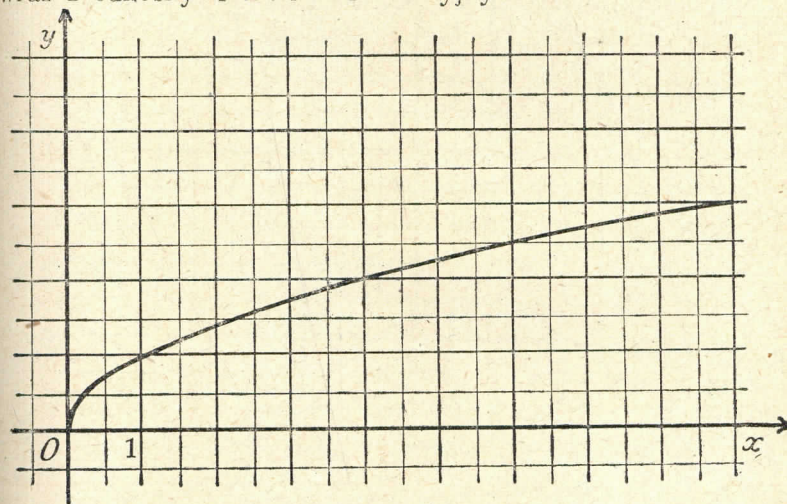
$$y = f(x).$$

kreśliśmy prostokątny układ współrzędnych XOY , oieramy kierunek dodatni na osiach OX i OY oraz stosowną jednostkę długości i wyznaczamy odpowiednią ilość punktów o współrzędnych (x, y) , przy czym $y = f(x)$; tak otrzymane punkty leżą na linii, która jest obrazem geometrycznym funkcji; jeżeli więc wyznaczone punkty leżą dość gęsto i jeżeli funkcja ma tę własność, że małym zmianom x odpowiadają małe zmiany y , to łącząc te punkty linią otrzymujemy żądany wykres. Wykres taki jest oczywiście tylko przybliżonym obrazem geometrycznym danej funkcji, gdyż (pomijając nawet niedokładność przyrządów rysunkowych) tylko skończona ilość jego punktów została ściśle wyznaczona.

Dla przykładu podajemy wykresy funkcji:

$$y = \sqrt{x} \text{ i } y = \frac{x^3}{10},$$

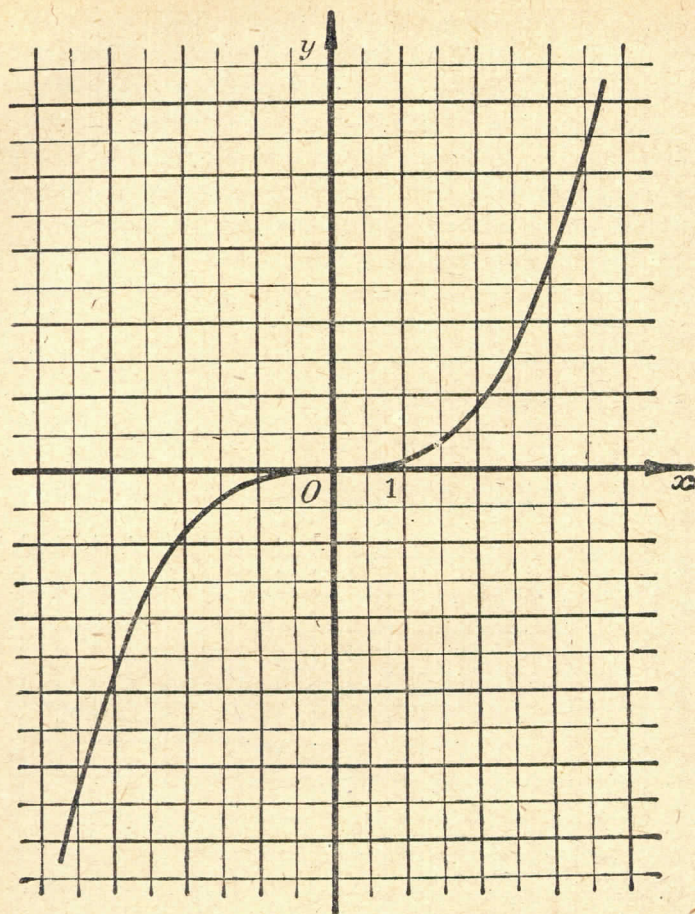
wraz z odpowiednimi tablicami funkcyjnymi:



Rys. 9.

Wykres funkcji $y = \sqrt{x}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{x}$	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16



Rys. 10.

Wykres funkcji $y = \frac{x^8}{10}$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{x^8}{10}$	-12,5	-6,4	-2,7	-0,8	-0,1	0	0,1	0,8	2,7	6,4	12,5

Rozważmy jeszcze funkcję:

$$y = E(x)$$

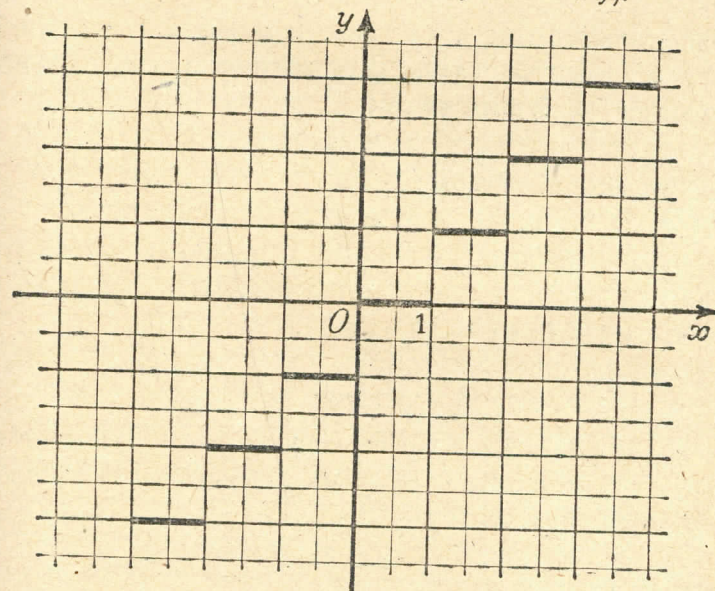
określoną w sposób następujący:

a) gdy x jest liczbą całkowitą, wówczas $E(x) = x$

b) gdy x nie jest liczbą całkowitą, wówczas $E(x)$ równe jest największej liczbie całkowitej mniejszej od x .

$E(x)$ oznacza więc największą liczbę całkowitą nie większą od x . *)

Mamy np.: $E(3) = 3$, $E(3,6) = 3$, $E(\frac{1}{6}) = 0$, $E(-2) = -2$, $E(-2\frac{1}{2}) = -3$, $E(-\frac{1}{5}) = -1$. Rys. 11 przedstawia wykres tej funkcji. Wykres (linia schodkowa) składa się z oddzielnych, nie połączonych ze sobą odcinków.***) Dla każdego całkowitego x mamy skok funkcji (nagłą zmianę wartości y).



Rys. 11.

Wykres funkcji $y = E(x)$

*) Symbol $E(x)$ pochodzi od francuskiego wyrazu *entier* (całkowity).

**) Zauważmy, że każdy z tych odcinków pozbawiony jest jednego końca (mianowicie prawego).

Funkcja rosnąca i malejąca.

Często rozważamy funkcje, określone w jakimś przedziale. Sprecyzujemy przede wszystkim pojęcie przedziału. Jeżeli a i b oznaczają liczby rzeczywiste, przy czym $a < b$, wówczas zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek:

$$a \leq x \leq b$$

nazywamy przedziałem (a, b) ; liczby a i b nazywamy końcami przedziału; o każdej liczbie przedziału odmiennej od jego końców mówimy, że leży wewnątrz przedziału. Obrazem geometrycznym przedziału jest, jak łatwo zauważyć, odcinek osi liczbowej.

O funkcji:

$$y = f(x)$$

określonej w przedziale (a, b) mówimy, że jest w tym przedziale rosnąca, jeżeli dla każdej pary wartości x_1 i x_2 należących do przedziału (a, b) nierówność:

$$x_1 < x_2$$

pociąga za sobą nierówność:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Innymi słowy, funkcja jest rosnąca w przedziale (a, b) , jeżeli większej z dwóch jakichkolwiek wartości x tego przedziału odpowiada też większa wartość y .

O funkcji:

$$y = f(x)$$

określonej w przedziale (a, b) mówimy, że jest w tym przedziale malejąca, jeżeli dla każdej pary wartości x_1 i x_2 należących do przedziału (a, b) nierówność:

$$x_1 < x_2$$

pociąga za sobą nierówność:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

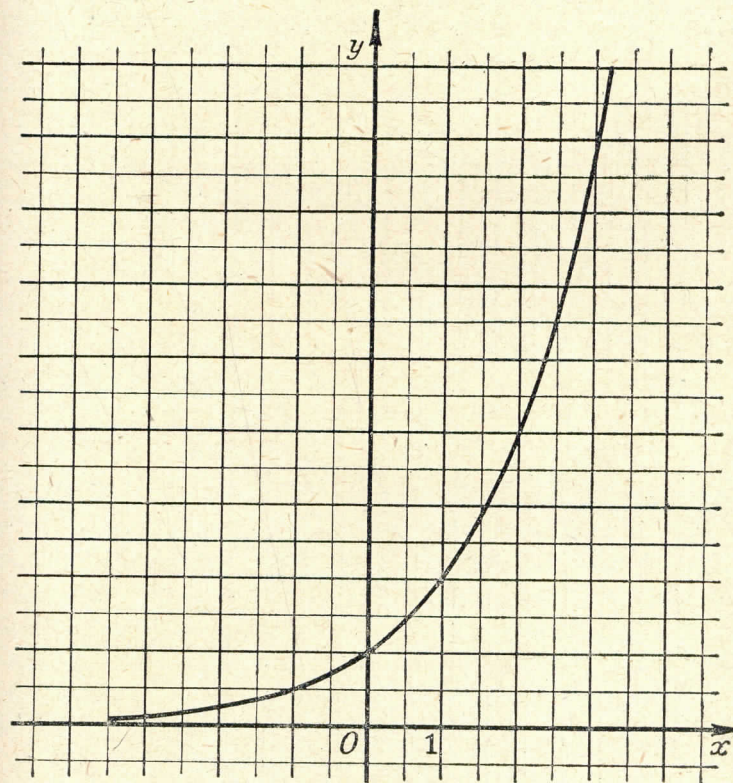
Innymi słowy, funkcja jest malejąca w przedziale (a, b) , jeżeli większej z dwóch jakichkolwiek wartości x tego przedziału odpowiada mniejsza wartość y .

Przykłady:

1. Funkcja:

$$y = 2^x$$

jest rosnąca w każdym przedziale (czyli jest, jak krótko mówimy, funkcją rosnącą). Wykres tej funkcji (rys. 12) jest linią, która wznosi się do góry, gdy posuwamy się w dodatnim kierunku osi x .



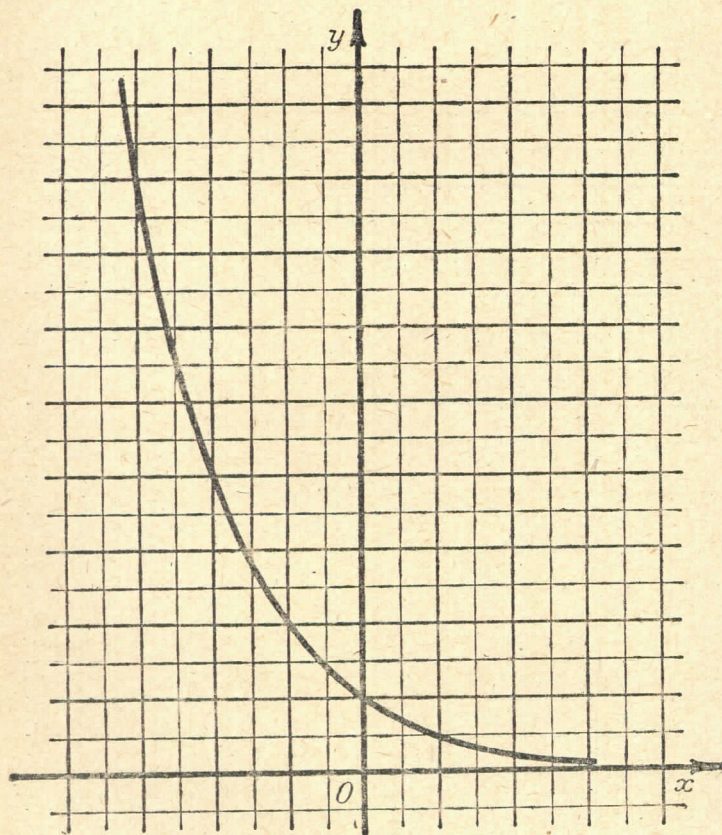
Rys. 12.

Wykres funkcji $y = 2^x$

2. Funkcja:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

jest malejąca w każdym przedziale (czyli jest, jak mówimy krótko, funkcją malejącą). Wykres tej funkcji (rys. 13) jest linią, która opada ku dołowi, gdy posuwamy się w dodatnim kierunku osi x .



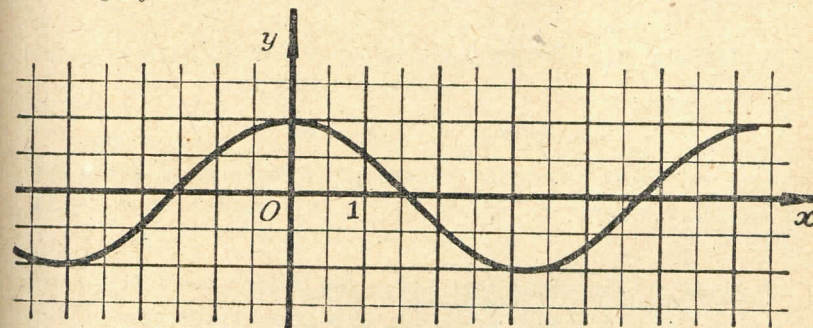
Rys. 13.

Wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3. Funkcja:

$$y = \cos x$$

jest malejąca w przedziale $(0, \pi)$, rosnąca w przedziale $(\pi, 2\pi)$, znów malejąca w przedziale $(2\pi, 3\pi)$ itd. Wykres tej funkcji (rys. 14) jest linią, która naprzemian opada ku dołowi i wznosi się do góry.



Rys. 14.

Wykres funkcji $y = \cos x$

Funkcja złożona.

Na zakończenie omówimy jeszcze pojęcie funkcji złożonej. Przypuśćmy, że mamy trzy zmienne: y , u , x , tak ze sobą związane, że y jest funkcją u , a u jest funkcją x . Możemy więc napisać:

$$y = F(u), \quad u = f(x).$$

Każdej wartości x , dla której jest określona druga funkcja, odpowiada więc zupełnie oznaczona wartość u ; każdej zaś wartości u , dla której jest określona pierwsza funkcja, odpowiada zupełnie oznaczona wartość y . Jeżeli funkcja $y = F(u)$ jest określona dla tych wartości u , które przyjmuje funkcja $u = f(x)$, wówczas możemy zmienną y uważać wprost za funkcję zmiennej x . Mówimy wtedy, że zmienna y jest funkcją złożoną zmiennej x . Ze wzorów:

$$y = F(u), \quad u = f(x)$$

otrzymujemy, po wyrugowaniu zmiennej pomocniczej u , wzór określający bezpośrednio zależność y od x :

$$y = F(f(x))$$

Przykłady:

1. Funkcje:

$$y = \sqrt[3]{u}, \quad u = x^2$$

określają zależność pomiędzy zmienną y i zmienną x , którą wyrazić możemy wzorem:

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

Funkcja ta jest określona dla każdego rzeczywistego x .

2. Funkcje:

$$y = \log u, \quad u = \sin x$$

określają zależność pomiędzy zmienną y i zmienną x , którą wyrazić możemy wzorem:

$$y = \log \sin x$$

Funkcja ta określona jest tylko dla takich wartości x , dla których $\sin x$ jest liczbą dodatnią (gdyż logarytm określiliśmy tylko dla liczb dodatnich).

3. Funkcje:

$$y = 2^u, \quad u = \sqrt{x}$$

określają zależność pomiędzy zmienną y a zmienną x , którą wyrazić możemy wzorem:

$$y = 2^{\sqrt{x}}$$

Funkcja ta jest określona dla każdej nieujemnej wartości x .

*

Pojęcie zależności funkcjonalnej wprowadził do matematyki wybitny matematyk i filozof Leibniz w końcu XVII stulecia. Nowoczesną definicję funkcji (jako przyporządkowania) zawdzięczamy matematykowi Lejeune-Dirichletowi z XIX stulecia.

Ćwiczenia.

301. Wyraż pole trójkąta foremnego jako funkcję jego wysokości.
302. Wyraż pole sześciokąta foremnego jako funkcję jego obwodu.
303. Wyraż objętość sześcianu jako funkcję jego przekątnej.

304. Wyraż objętość kuli jako funkcję pola jej powierzchni.

305. W trójkąt równoramienny, którego ramię jest równe 10 cm, a podstawa równa się 12 cm, wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie, a pozostałe dwa wierzchołki leżą na ramionach trójkąta. Wyraż obwód i pole prostokąta jako funkcje jego wysokości.

306. W trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w taki sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie, a pozostałe dwa wierzchołki leżą na ramionach trójkąta. Wyraż obwód i pole prostokąta jako funkcje jego wysokości (a i h przyjąć za stałe).

307. Trójkąt równoramienny o podstawie AB równej a i wysokości CD równej h przecięto prostą równoległą do podstawy i punkty E i F przecięcia tej prostej z ramionami trójkąta połączono z punktem D . Wyraż pole trójkąta EDF jako funkcję boku EF (a i h przyjąć za stałe).

308. W półkolu o średnicy AB równej 2 dcm wykreślono cięciwę $A'B'$ równoległą do średnicy i punkty A' i B' połączono odpowiednio z punktami A i B . Wyraż pole trapezu $AA'B'B$ jako funkcję jego wysokości.

309. Do półkola o średnicy $AB = 2R$ poprowadzono styczne w punktach A i B . Przez punkt zmienny położony na półkolu poprowadzono styczną, przecinającą powyższe dwie styczne odpowiednio w punktach A' i B' . Wyraż odcinek BB' jako funkcję odcinka AA' , przyjmując R za wielkość stałą.

310. W półkolu o średnicy $AB = 2R$ wykreślono cięciwę AC nachyloną do średnicy pod kątem x i rzut AC' tej cięciwy na średnicę oznaczono przez y . Wyraż y jako funkcję x , przyjmując R za wielkość stałą.

311. W koło, którego pole wynosi S , wpisano trójkąt równoramienny. Wyraż pole tego trójkąta jako funkcję kąta zawartego między ramionami trójkąta (S przyjąć za wielkość stałą).

312. W stożek, którego wysokość oraz średnica podstawy równe są $2R$, wpisano walec. Wyraż objętość walca jako funkcję jego wysokości, przyjmując R za wielkość stałą.

313. Trójkąt równoramienny, którego ramię wynosi 10 cm, a kąt zawarty między ramionami jest x , obraca się dookoła ramienia. Wyraż objętość oraz pole całej powierzchni bryły, powstałej z obrotu, jako funkcje kąta x .

314. Prostokąt o stałym obwodzie $2p$ obraca się dookoła jednego z boków. Bok prostokąta prostopadły do osi obrotu równy jest x . W wyniku obrotu prostokąta powstanie walec. Wyraż pole powierzchni całkowitej tego walca jako funkcję x .

315. Pomiędzy zmiennymi u i v zachodzi zależność:

$$(u - 1)(v + 1) = v - 2u$$

Wyraż: a) u jako funkcję v ; b) v jako funkcję u .

316. Pomiędzy zmiennymi x i y zachodzi zależność:

$$y^2 + 4x^2 - 4xy + 2y - 4x + 1 = 0$$

Wyraż y jako funkcję x .

317. Dwie siły 3 kg i 4 kg działają w jednym i tym samym punkcie. Wyraż wielkość wypadkowej tych sił jako funkcję kąta zawartego między ich kierunkami.

318. Wyraż czas swobodnego spadku ciała jako funkcję wysokości, z jakiej ono spada. (Przyspieszenie ziemskie równe jest g . Oporu powietrza nie uwzględniamy).

319. Po równi pochyłej o długości l zsuwa się ciało. Wyraż czas, który ciało zużywa na zsuniecie się po równi, jako funkcję kąta nachylenia równi względem poziomu. (Przyjąć l za wielkość stałą. Przyspieszenie równe jest g . Tarcia i oporu powietrza nie uwzględniamy).

320. Wyznacz, w jakim obszarze określone są funkcje dane za pomocą wzorów:

$$a) y = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$b) y = \frac{2}{x - 1}$$

$$c) y = x + \sqrt{1 + x^2}$$

$$d) y = \frac{x - 2}{x + 3}$$

$$e) y = \frac{1}{3}\sqrt{x - 2}$$

$$f) y = \frac{1}{(x - 1)(x - 4)}$$

$$g) y = \frac{5x - 2}{x^2 - 9}$$

$$h) y = \frac{x^2}{x^2 - 10x + 21}$$

$$i) y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$$

$$j) y = \sqrt{2x - 5} + \sqrt{3x - 7}$$

$$k) y = \sqrt{2x - 9} + \sqrt{6 - x}$$

$$l) y = \sqrt{\frac{x}{x^2 + 2}}$$

$$m) y = \sqrt{\frac{x - 3}{x - 4}}$$

$$n) y = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

$$o) y = \frac{\sqrt{3x - 8}}{x - 4}$$

$$p) y = \frac{1}{|x|}$$

$$q) y = \frac{2}{x + |x|}$$

$$r) y = \frac{x}{|x| - 1}$$

$$s) y = \log(x - 2)$$

$$t) y = \log x + \log(5 - x)$$

$$u) y = \log(x^4 + 1)$$

$$v) y = \sqrt{\log x}$$

$$w) y = \sqrt{\log(x - 9)}$$

$$x) y = \frac{1}{\cos x}$$

$$y) y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$z) y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

821. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

Wykaż, że dla każdego x zachodzi związek:

$$f(-x) = -f(x)$$

822. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

Wykaż, że dla każdego x zachodzi związek:

$$f(-x) = f(x)$$

823. Dana jest funkcja:

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

Wykaż, że dla każdego x zachodzi związek:

$$f(-x) = -f(x)$$

824. Dana jest funkcja:

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 4x^4 - 6x^6$$

Wykaż, że dla każdego x zachodzi związek:

$$f(-x) = f(x)$$

825. Dana jest funkcja:

$$f(x) = ax + b$$

Wykaż, że dla dowolnych liczb x_1 i x_2 zachodzi związek:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

326. Wykonaj wykresy funkcyj:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = x^2 + 2 & \text{b) } \bar{y} = 2x \sqrt{x} & \text{c) } y = \sqrt{x+1} \\ \text{d) } y = |x| & \text{e) } y = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| & \text{f) } y = |\sin x| \\ \text{g) } y = \log_2 x & \text{h) } y = \frac{1}{x^2} & \text{i) } y = \frac{1}{|x|} \\ & \text{j) } y = \sqrt{2x} \end{array}$$

*327. Przez $E(x)$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x . Wykonaj wykresy funkcyj:

$$\text{a) } y = x - E(x) \quad \text{b) } y = E(\sqrt{x}) \quad \text{c) } y = E\left(\frac{x}{2}\right)$$

328. Wykonaj wykres funkcji $y = f(x)$, określonej w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ f(x) &= 4 - 2x & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

329. Wykonaj wykres funkcji $y = f(x)$, określonej dla $x \geq 0$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) &= \frac{8}{x} & \text{dla } x > 2 \end{aligned}$$

330. Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = ax + b$$

jest rosnąca w każdym przedziale, gdy $a > 0$, natomiast jest malejąca w każdym przedziale, gdy $a < 0$.

331. Wykaż, że funkcja:

$$y = \frac{1}{x}$$

jest malejąca w każdym przedziale nie zawierającym 0.

332. Wykaż, że funkcja:

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

jest malejąca w każdym przedziale zawierającym tylko liczby ujemne, natomiast jest rosnąca w każdym przedziale zawierającym tylko liczby dodatnie.

333. Załóżmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są rosnące w przedziale (a, b) . Udowodnij, że wówczas funkcja $f(x) + g(x)$ jest również rosnąca w przedziale (a, b) .

334. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziale (a, b) i że funkcja ta przybiera w tym przedziale wartości nieujemne. Udowodnij, że wówczas funkcja $\sqrt{f(x)}$ jest również rosnąca w przedziale (a, b) .

335. Funkcje: $y = u^3$, $u = \frac{1}{2}x$ wyznaczają funkcję złożoną. Podać wykres tej funkcji.

336. Funkcje: $y = u^2$, $u = \sin x$ wyznaczają funkcję złożoną. Podać wykres tej funkcji.

*337. Funkcje: $y = \sqrt{u}$, $u = \log x$ wyznaczają funkcję złożoną.

1^o. W jakim obszarze funkcja ta jest określona?

2^o. Podać wykres tej funkcji.

(K) (H) (M)

§ 29. Granica funkcji.

Pojęcie granicy funkcji.

Niech będzie dana funkcja: $y = \frac{x+5}{2}$. Dla $x = 3$ mamy $y = 4$. Wykażemy teraz, że gdy x przybiera wartości dostatecznie mało różniące się od 3, wówczas y przybiera wartości dowolnie mało różniące się od 4. W samej rzeczy, obierzmy dowolnie małą liczbę dodatnią ε i zbadajmy, dla jakich wartości x zmienna y różni się od 4 o mniej niż ε , tzn. dla jakich wartości x spełnia się nierówność: $|y - 4| < \varepsilon$. Mamy:

$$|y - 4| = \left| \frac{x+5}{2} - 4 \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right| = \frac{|x-3|}{2}$$

Z tego wynika natychmiast, że $|y - 4| < \varepsilon$, skoro tylko:

$$|x - 3| < 2\varepsilon$$

Istotnie więc y różni się od 4 dowolnie mało (o mniej niż ε), gdy tylko x różni się od 3 dostatecznie mało (o mniej niż 2ε). Własność tę wyrażamy mówiąc, że y dąży do 4, gdy x dąży do 3, albo też, że granicą funkcji jest 4, gdy x dąży do 3. Zapisujemy to w ten sposób:

$$y \rightarrow 4, \text{ gdy } x \rightarrow 3$$

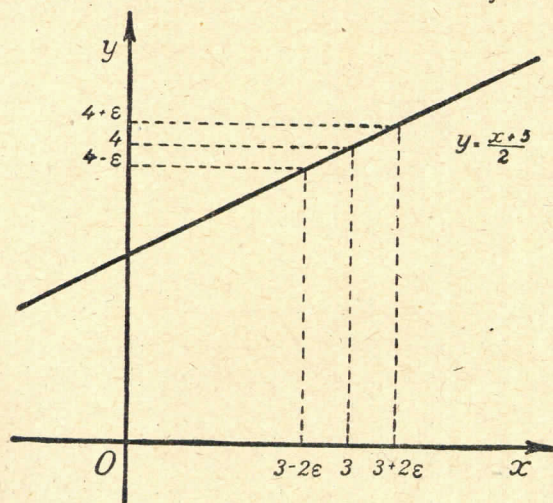
albo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} y = 4$$

Powyższą własność możemy obrazowo przedstawić w sposób następujący:

Rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{x+5}{2}$ (rys. 15).

Obieramy dowolnie małą liczbę dodatnią ε i kreślimy dwie proste równoległe do osi x w odległościach: $4 - \varepsilon$ i $4 + \varepsilon$ od tej osi. Każdy punkt wykresu leżący między tymi równoległymi ma rzędną y różniącą się od 4 o mniej niż ε . Punktem tym odpowiadają odcięte x różniące się od 3 o mniej niż 2ε .



Rys. 15.

Rozważmy jeszcze jeden przykład.

Niech będzie dana funkcja: $y = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$.

Funkcja ta określona jest dla każdego $x \neq \frac{3}{2}$. Dla $x = \frac{3}{2}$ funkcja nie jest określona; gdyż symbol $\frac{0}{0}$ nie ma określonego sensu.

Zbadajmy, jakie wartości przyjmuje y , gdy x przybiera wartości dostatecznie małe różniące się od $\frac{3}{2}$. Dla $x \neq \frac{3}{2}$ możemy zastosować następujące przekształcenie:

$$\frac{4x^2 - 9}{2x - 3} = \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{2x - 3} = 2x + 3$$

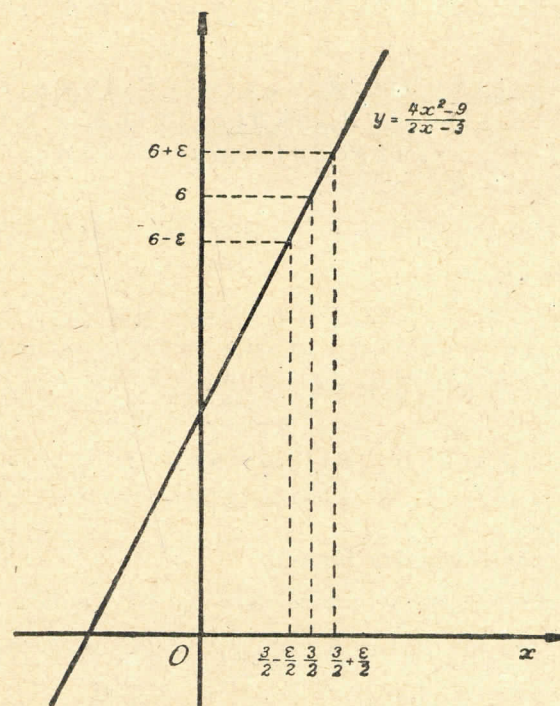
Mamy zatem (dla $x \neq \frac{3}{2}$) równanie: $y = 2x + 3$. Stąd łatwo wywnioskować, że gdy x przybiera wartości dostatecznie małe różniące się od $\frac{3}{2}$, wówczas y przyjmuje wartości dowolnie małe różniące się od 6. W samej rzeczy, mamy:

$$|y - 6| = |(2x + 3) - 6| = |2x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right|$$

z czego wynika, że $|y - 6| < \varepsilon$, skoro tylko $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Możemy więc napisać:

$$y \rightarrow 6, \text{ gdy } x \rightarrow \frac{3}{2}.$$



Rys. 16.

Powyższą własność przedstawiamy obrazowo na rys. 16.

Rysujemy wykres funkcji: $y = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$; wykres ten jest linią prostą $y = 2x + 3$, która posiada lukę w postaci brakującego punktu $(\frac{3}{2}, 6)$. Obieramy dowolnie małą liczbę dodatnią ε i kreślimy po obu stronach punktu $(\frac{3}{2}, 6)$ dwie proste równoległe do osi x w odległościach: $6 - \varepsilon$ i $6 + \varepsilon$ od tej osi. Każdy punkt wykresu leżący między tymi równoległymi ma rzędną y różniącą się od 6 o mniej niż ε . Punktem tym odpowiadają odcięte x różniące się od $\frac{3}{2}$ o mniej niż $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Możemy pojęcie granicy funkcji określić ogólnie w sposób następujący:

Mając daną funkcję $y = f(x)$ mówimy, że:

$$y \rightarrow A, \text{ gdy } x \rightarrow x_0,$$

jeżeli y przybiera wartości dowolnie mało różniące się od A , skoro tylko x przybiera wartości dostatecznie mało różniące się od x_0 (i różne od x_0).

Powyższemu określeniu możemy też nadać taką postać:

Mówimy, że:

$$f(x) \rightarrow A, \text{ gdy } x \rightarrow x_0,$$

jeżeli do każdego dodatniego ε można dobrać taką liczbę dodatnią δ , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Obliczanie granicy funkcji.

Obliczanie granicy funkcji ułatwiają następujące twierdzenia:

I. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$$

Słowami: granica sumy dwóch funkcji jest równa sumie granic tych funkcji.

II. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = A - B$$

Słowami: granica różnicy dwóch funkcji jest równa różnicy granic tych funkcji.

III. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

Słowami: granica iloczynu dwóch funkcji jest równa iloczynowi granic tych funkcji.

IV. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, przy czym $B \neq 0$,

$$\text{wówczas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

Słowami: granica ilorazu dwóch funkcji jest równa ilorazowi granic tych funkcji (pod warunkiem, by dzielnik nie dążył do granicy 0).

V. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, przy czym $A > 0$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$$

Słowami: granica pierwiastka kwadratowego funkcji jest równa pierwiastkowi kwadratowemu granicy tej funkcji.

Twierdzenia te są intuicyjnie jasne i dają się też ściśle udowodnić.

[:] Dla przykładu udowodnimy twierdzenie I.

Obierzmy dowolnie małą liczbę dodatnią ε ; liczba $\frac{\varepsilon}{2}$ będzie wówczas również pewną liczbą dodatnią. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, przeto można dobrać taką liczbę dodatnią δ , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$(9) \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

czyli nierówność:

$$(9a) \quad A - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, przeto można dobrać taką liczbę dodatnią δ' , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta'$$

pociąga za sobą nierówność:

$$(10) \quad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

czyli:

$$(10a) \quad B - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < B + \frac{\varepsilon}{2}$$

Oznaczmy przez δ'' liczbę dodatnią mniejszą od δ i od δ' . Jasną jest rzeczą, że gdy

$$0 < |x - x_0| < \delta''$$

wówczas spełniona jest zarówno nierówność (9a), jak i nierówność (10a). Ale dodając te nierówności stronami otrzymujemy:

$$(11) \quad (A + B) - \varepsilon < f(x) + g(x) < (A + B) + \varepsilon$$

czyli:

$$(11a) \quad |f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon$$

Nierówność ta spełniona jest więc dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 , a mianowicie, gdy $0 < |x - x_0| < \delta''$. Znaczy to, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = A + B$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie I. W podobny sposób udowadnia się twierdzenia pozostałe. :]

Przykłady:

1. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x^2 + x)$

Wobec $x \rightarrow 2$, mamy: $x^2 \rightarrow 4$, $x^3 \rightarrow 8$, a zatem:

$$(x^3 + x^2 + x) \rightarrow 14, \text{ czyli: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x^2 + x) = 14$$

2. Obliczyć $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 8}}$

Wobec $x \rightarrow 1$, mamy: $x^2 \rightarrow 1$, $3x \rightarrow 3$, a zatem: $\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 8} \rightarrow \frac{4}{9}$,

skąd wynika, że $\sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 8}} \rightarrow \frac{2}{3}$, czyli: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 8}} = \frac{2}{3}$.

3. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - x^2}{4x}$

Dla $x \rightarrow 0$ zarówno licznik $10x - x^2$ jak i mianownik $4x$ dążą do 0, nie możemy więc tu bezpośrednio zastosować twierdzenia o granicy ilorazu. Skracając ułamek $\frac{10x - x^2}{4x}$ przez x (przy czym zakładamy, że $x \neq 0$) mamy: $\frac{10x - x^2}{4x} = \frac{10 - x}{4}$.

A zatem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10 - x}{4} = \frac{5}{2}$$

4. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$

Dla $x \rightarrow 1$ zarówno licznik $x^3 - x^2$ jak i mianownik $x^2 - 1$ dążą do 0, nie możemy więc tu zastosować bezpośrednio twierdzenia o granicy ilorazu. Ułamek $\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1}$ przekształcamy w sposób następujący (zakładając, że $x \neq 1$):

$$\frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2}{x + 1}$$

Mamy więc: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x + 1} = \frac{1}{2}$

5. Do jakiej granicy dąży iloczyn:

$$(x - a) \left(1 + \frac{b}{x - a} \right), \text{ gdy } x \rightarrow a?$$

Iloczyn: $(x - a) \left(1 + \frac{b}{x - a} \right)$ przekształcamy w sposób następujący (zakładając, że $x \neq a$):

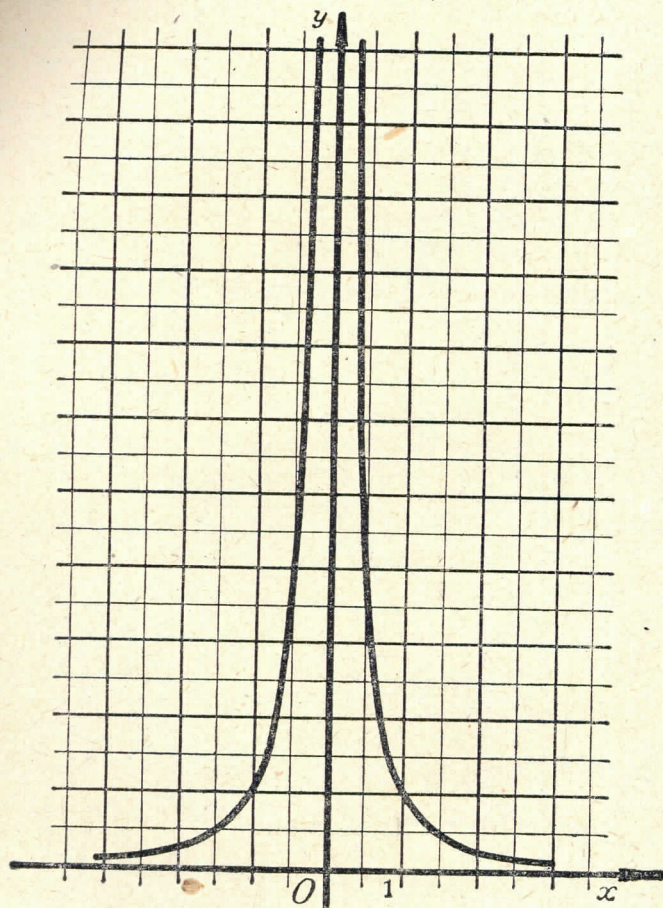
$$(x - a) \left(1 + \frac{b}{x - a} \right) = x - a + b$$

Mamy zatem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[(x - a) \left(1 + \frac{b}{x - a} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow a} (x - a + b) = b$$

Granica niewłaściwa.

Niech będzie dana funkcja: $y = \frac{1}{x^2}$. Funkcja ta jest określona dla każdego $x \neq 0$. Zbadajmy, jakie wartości przybiera y , gdy x przybiera wartości dostatecznie mało różniące się od 0.



Rys. 17.

Wykres funkcji: $y = \frac{1}{x^2}$

Rys. 17 przedstawia wykres funkcji: $y = \frac{1}{x^2}$. Z wykresu tego łatwo możemy odczytać, że gdy x przybiera wartości dostatecznie bliskie 0, wówczas y przybiera wartości dowolnie wielkie. Zauważoną własność możemy łatwo sprawdzić rachunkiem. W samej rzeczy, obierzmy dowolnie wielką liczbę (dodatnią) K ; nierówność: $y > K$ spełnia się, gdy $\frac{1}{x^2} > K$, tzn. gdy $|x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$.

Własność tę wyrażamy mówiąc, że y dąży do $+\infty$ (do plus nieskończoności), gdy x dąży do 0, albo też, że funkcja ma granicę niewłaściwą $+\infty$, gdy x dąży do 0. Zapisujemy to w ten sposób:

$$y \rightarrow +\infty, \text{ gdy } x \rightarrow 0,$$

albo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = +\infty$$

Ogólnie możemy określić:

Mając daną funkcję $y = f(x)$ mówimy, że:

$$y \rightarrow +\infty, \text{ gdy } x \rightarrow x_0,$$

jeżeli y przybiera wartości dowolnie wielkie, skoro tylko x przybiera wartości dostatecznie bliskie x_0 (ale różne od x_0).

Powyższemu określeniu możemy też nadać następującą postać:

Mówimy, że:

$$f(x) \rightarrow +\infty, \text{ gdy } x \rightarrow x_0,$$

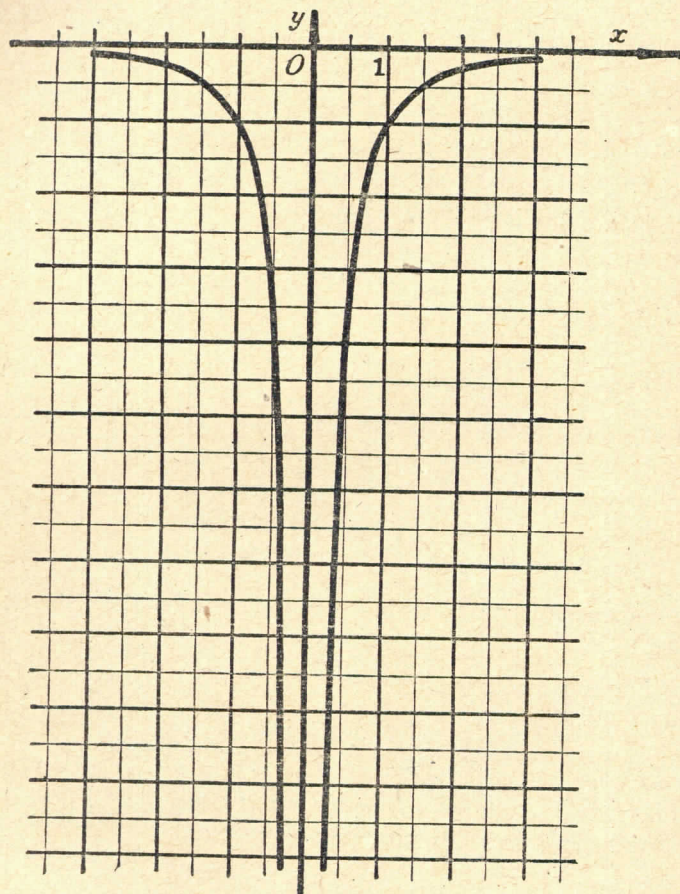
jeżeli do każdego dodatniego K (dowolnie wielkiego) można dobrać taką liczbę dodatnią δ , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$f(x) > K$$

Rozpatrzmy teraz funkcję: $y = -\frac{1}{x^2}$. Jasną jest rzeczą, że dla x dostatecznie bliskiego 0 (ale różnego od 0) y jest liczbą ujemną o dowolnie wielkiej wartości bezwzględnej. Własność tę od czytujemy także z łatwością z wykresu funkcji $y = -\frac{1}{x^2}$, który przedstawiony jest na rys. 18.



Rys. 18.

Wykres funkcji $y = -\frac{1}{x^2}$

Własność tę wyrażamy mówiąc, że y dąży do $-\infty$ (do minus nieskończoności), gdy x dąży do 0, albo też, że funkcja ma granicę niewłaściwą $-\infty$, gdy x dąży do 0.

Ogólnie możemy określić:

Mając daną funkcję $y = f(x)$ mówimy, że:
 $y \rightarrow -\infty$, gdy $x \rightarrow x_0$,

jeżeli y przybiera wartości ujemne, co do bezwzględnej wartości dowolnie wielkie, skoro tylko x przybiera wartości dostatecznie bliskie x_0 (ale różne od x_0).

Powyższemu określeniu możemy też nadać następującą postać:

Mówimy, że:

$$f(x) \rightarrow -\infty, \text{ gdy } x \rightarrow x_0,$$

jeżeli do każdego K (dowolnie wielkiego) można dobrać taką liczbę dodatnią δ , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$f(x) < -K$$

Twierdzenia o granicy niewłaściwej.

Do stwierdzenia istnienia granicy niewłaściwej funkcji prowadzi często twierdzenia następujące:

VI. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, wówczas
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

VII. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, wówczas
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

VIII. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, przy czym $A > 0$,

a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$$

IX. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, przy czym $A < 0$,

a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$$

X. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$$

XI. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [-f(x)] = -\infty$$

Twierdzenia te są intuicyjnie jasne i dają się też ściśle udowodnić.

[:] Dla przykładu udowodnimy twierdzenie VII.

Obierzmy dowolnie wielką liczbę dodatnią K .

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, przeto można dobrać taką liczbę dodatnią δ , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność:

$$(12) \quad f(x) > \frac{1}{2} K$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, przeto można dobrać taką liczbę dodatnią δ' , że nierówność:

$$0 < |x - x_0| < \delta'$$

pociąga za sobą nierówność:

$$(13) \quad g(x) > \frac{1}{2} K$$

Oznaczmy przez δ'' liczbę dodatnią mniejszą od δ i od δ' . Jasną jest rzeczą, że gdy

$$0 < |x - x_0| < \delta'',$$

wówczas spełniona jest zarówno nierówność (12) jak i nierówność (13). Lecz dodając te nierówności stronami otrzymujemy:

$$(14) \quad f(x) + g(x) > K$$

Nierówność ta jest więc spełniona dla wartości x dostatecznie bliskich x_0 . Znacząco to, że

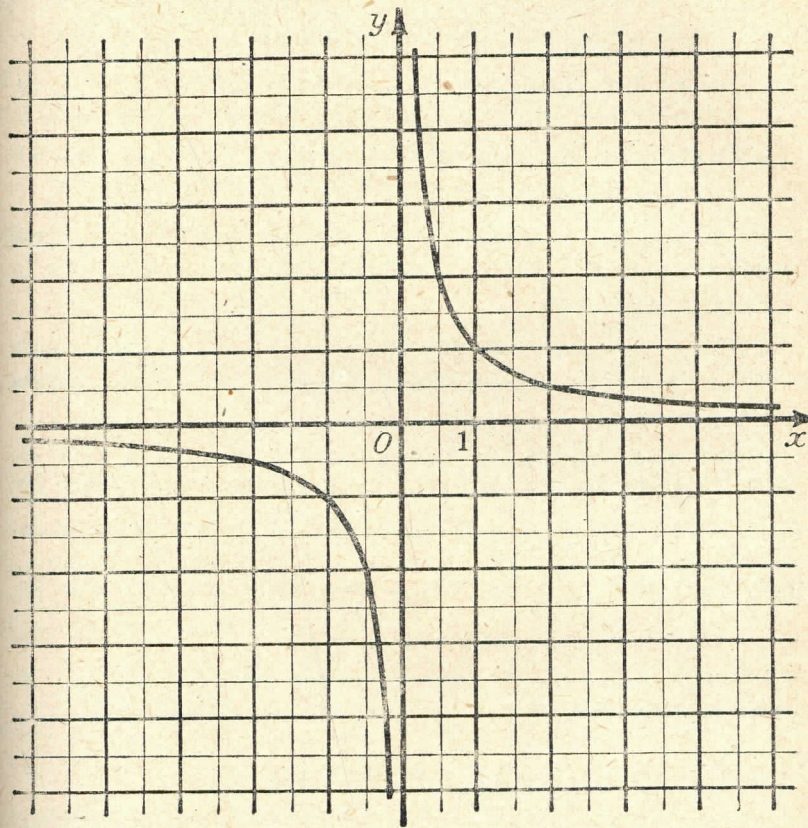
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

:]

Granica lewostronna i granica prawostronna.

Rozważmy funkcję: $y = \frac{1}{x}$, określoną dla każdego $x \neq 0$.

Wykres tej funkcji przedstawia rys. 19.



Rys. 19.

Wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$

Z wykresu tego łatwo odczytujemy, że gdy x przybiera wartości dodatnie dostatecznie bliskie 0, wówczas y przybiera wartości dodatnie dowolnie wielkie, natomiast

gdy x przybiera wartości ujemne dostatecznie bliskie 0, wówczas y przybiera wartości ujemne, co do bezwzględnej wartości dowolnie wielkie. Zauważoną własność możemy również łatwo sprawdzić rachunkiem.

Własność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $\frac{1}{x}$ dąży lewostronnie do $-\infty$, a prawostronnie do $+\infty$, gdy x dąży do 0, albo też, że funkcja ma lewostronną granicę (niewłaściwą): $-\infty$ i prawostronną granicę (niewłaściwą): $+\infty$, gdy x dąży do 0.

W podobnym zupełnie znaczeniu możemy także mówić o granicy lewostronnej i o granicy prawostronnej w przypadku, gdy ta granica jest skończona.

Ogólnie zauważmy, że gdy dla $x \rightarrow x_0$ granica lewostronna nie równa się granicy prawostronnej, wówczas funkcja nie posiada granicy dla $x \rightarrow x_0$.

Godzi się zaznaczyć, że funkcja może w pewnym punkcie nie posiadać ani granicy lewostronnej, ani prawostronnej. Weźmy np. pod uwagę funkcję: $y = \sin \frac{1}{x}$. Gdy x dąży do 0 przez wartości dodatnie, wówczas $\frac{1}{x}$ dąży do $+\infty$, a $\sin \frac{1}{x}$ waha się ustawicznie pomiędzy -1 a $+1$. Funkcja $y = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \rightarrow 0$ nie posiada więc granicy prawostronnej. W podobny sposób przekonujemy się, że funkcja ta dla $x \rightarrow 0$ nie posiada także granicy lewostronnej.

Zachowanie się funkcji w nieskończoności.

Czasem ważną jest rzeczą zbadać, jak dana funkcja $y = f(x)$ zachowuje się w nieskończoności, tj. gdy x przybiera wartości dodatnie dostatecznie wielkie lub też wartości ujemne, co do bezwzględnej wartości dostatecznie wielkie. Weźmy dla przykładu funkcję $y = 2^x$ (rys. 12 na str. 197).

Z wykresu tej funkcji z łatwością odczytujemy, że gdy x przybiera wartości dodatnie dostatecznie wielkie, wówczas

y przyjmuje wartości dowolnie wielkie, natomiast gdy x przybiera wartości ujemne, co do bezwzględnej wartości dostatecznie wielkie, wówczas y przybiera wartości dodatnie dowolnie mało różniące się od 0. Powyższe własności moglibyśmy także sprawdzić za pomocą nietrudnego rachunku.

Własności te funkcji $y = 2^x$ możemy wyrazić mówiąc, że y dąży do $+\infty$, gdy x dąży do $+\infty$, i y dąży do 0, gdy x dąży do $-\infty$. Zapisujemy to w ten sposób:

$$y \rightarrow +\infty, \text{ gdy } x \rightarrow +\infty,$$

$$y \rightarrow 0, \text{ gdy } x \rightarrow -\infty,$$

albo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

W analogiczny sposób określamy symbole takie, jak:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden prosty przykład. Niech będzie dana funkcja: $y = \frac{1}{x}$. Jasną jest rzeczą, że gdy x przybiera wartości dodatnie dostatecznie wielkie, a także gdy x przybiera wartości ujemne, co do bezwzględnej wartości dostatecznie wielkie, wówczas y przybiera wartości dowolnie bliskie 0 (patrz także rys. 19). Możemy więc napisać:

$$y \rightarrow 0, \text{ gdy } x \rightarrow +\infty,$$

$$y \rightarrow 0, \text{ gdy } x \rightarrow -\infty,$$

albo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

Można wykazać, że wszystkie przytoczone wyżej twierdzenia o granicach funkcji, a więc tw. I—V oraz VI—XI pozostają w mocy, jeżeli w każdym z nich warunek: „ $x \rightarrow x_0$ ” zastąpimy przez „ $x \rightarrow +\infty$ ” albo „ $x \rightarrow -\infty$ ”.

Przykłady:

1. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{2x+1}$

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{3x+2}{2x+1}$ przez x otrzymujemy:

$$\frac{3x+2}{2x+1} = \frac{3+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}}$$

Dla $x \rightarrow +\infty$ zarówno $\frac{1}{x}$ jak i $\frac{2}{x}$ dążą do 0; mamy zatem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

2. Obliczyć: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 5}$

Dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 5}$ przez x^2 otrzymujemy:

$$\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 5} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}}$$

Dla $x \rightarrow -\infty$ wyrażenia: $\frac{2}{x}$ i $\frac{5}{x^2}$ dążą do 0; mamy zatem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 1$$

Zauważmy jeszcze, że istnieją funkcje, które dla $x \rightarrow +\infty$ lub $x \rightarrow -\infty$ nie posiadają żadnej określonej granicy, ani skończonej, ani niewłaściwej. Funkcją taką jest np. $y = \sin x$. Gdy x dąży do $+\infty$ lub $-\infty$, wówczas $\sin x$ waha się ustawicznie pomiędzy -1 a $+1$ nie dążąc do żadnej granicy.

Ćwiczenia.

338. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} (3x - 4)$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x+3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x+6}{x-8}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{4-x^2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - x + 7}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 9x + 7)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 1)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3-x}{2+x} \right)^2$

h) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x^2+x-1}$

j) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4-81}{x+3}$

l) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{7x - \frac{1}{2}}$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{6x-2}{4x+1}}$

339. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 12x + 36}{\frac{1}{2}x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^4 - 32x^2 + 256}{x^2 + 8x + 16}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

340. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}} \frac{-3}{(3x-8)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x-3}{x^2}$

341. Wykaż, że ułamek:

$$\frac{2}{x-1}$$

dąży do $+\infty$, gdy $x \rightarrow 1$ przez wartości większe od 1,
i dąży do $-\infty$, gdy $x \rightarrow 1$ przez wartości mniejsze od 1.

342. Jak zachowuje się funkcja:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}, \quad \text{gdy } x \rightarrow 4?$$

343. Jak zachowuje się funkcja:

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x}, \quad \text{gdy: 1) } x \rightarrow 0, \quad 2) x \rightarrow 5?$$

344. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 4x}{2 + 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2}{7x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 8x^2}{1 + x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x + 5}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x - 3}{5x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{9x + 6}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{7x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - 2x}{1 + 3x} \right)^2$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + x^2}{9x^2}}$

345. Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 4)$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + 4x - 3x^2)$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{4 - 3x^2}$

346. Oblicz:

a) $\lim_{\alpha \rightarrow 180^\circ} (1 - \cos \alpha)$

c) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{3 \sin \alpha}$

e) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [\sin \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)]$

g) $\lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 30^\circ} \frac{\sin(\alpha + 30^\circ)}{\cos(\alpha - 30^\circ)}$

d) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

f) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin 2\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha)$

h) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$

*347. Do jakiej granicy dąży ułamek:

$$\frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 3}{1 - \sin \alpha}, \quad \text{gdy } \alpha \rightarrow 90^\circ?$$

*348. Dwa kąty zmienne α i β mają stałą sumę $\alpha + \beta$ równą 90° . Do jakiej granicy dąży ułamek:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad \text{gdy } \alpha \rightarrow 45^\circ?$$

349. Do jakiej granicy dąży pierwiastek równania:

$$x(3t + x) = x^2 - x + t,$$

gdy t rośnie nieograniczenie?

350. Jak zachowuje się pierwiastek równania:

$$x(3 + t)(3 - t) = 1 + 9x,$$

gdy $t \rightarrow 0$? Czy równanie posiada pierwiastek dla $t = 0$?

351. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} (k-2)x + \frac{2y}{k-2} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

1^o. Rozwiązać ten układ.

2^o. Do jakich granic dążą wartości x i y w rozwiązaniu tego układu, gdy $k \rightarrow 2$?

352. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 3x + 3y - 2z = 7 \\ x + y + z = 9 + \frac{5}{m} \end{cases}$$

1^o. Rozwiązać ten układ.

2^o. Do jakich granic dążą wartości x , y , z w rozwiązaniu tego układu, gdy m rośnie nieograniczenie?

353. Dane jest równanie:

$$m^2 x^2 - (2 + 3m^2)x + 6 = 0$$

1^o. Rozwiązać to równanie.

2^o. Co staje się z pierwiastkami równania, gdy m rośnie nieograniczenie?

354. Trójkąt równoramienny o podstawie stałej a i wysokości zmiennej x przecięto prostą równoległą do podstawy w odległości h od niej. Do jakiej granicy dąży pole powstałego trapezu, gdy x rośnie nieograniczenie?

355. Dane jest koło o promieniu R . W punkcie A okręgu tego koła wystawiono styczną, z punktu B obranego na stycznej wykreślono drugą styczną do koła i punkt styczności oznaczono przez C . Do jakiej granicy dąży długość cięciwy CA , gdy długość odcinka AB rośnie nieograniczenie?

356. W kole o promieniu R poprowadzono styczną i równoległą do niej cięciwę AB . Rzutem cięciwy na styczną niech będzie CD . Zbadać, do jakiej granicy dąży stosunek przekątnej prostokąta $ABCD$ do cięciwy AB , gdy odległość cięciwy od stycznej dąży do zera.

357. Dane jest półkoło o średnicy $AB = 2r$, do którego poprowadzono styczne w punktach A i B . Przez punkt położony na półkolu poprowadzono styczną, odcinającą od dwóch powyższych stycznych dwa odcinki x i y . Do jakiej granicy dąży jeden z nich, gdy drugi dąży do 0 albo do $+\infty$?

358. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB , równa a , jest stała, a kąt $CAB = \alpha$ jest zmienny. Do jakiej granicy dąży długość dwusiecznej kąta CAB , gdy kąt ten dąży do kąta prostego?

359. W trójkącie ABC bok BC jest stały, a kąty przy C i B , równe α i 3α , są zmienne. Do jakiej granicy dąży stosunek boków AC i AB , gdy $\alpha \rightarrow 0$?

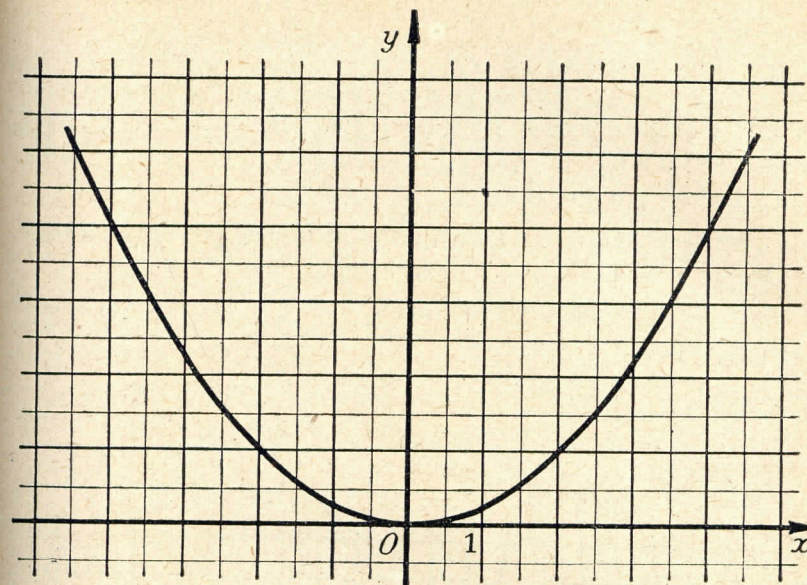
360. W trapezie większa podstawa równa jest a , mniejsza podstawa i każdy z boków nierównoległych równe są b , a kąt nachylenia boku nierównoległego do większej podstawy równy jest α . Do jakiej granicy dąży b , gdy 1) $\alpha \rightarrow 0$, 2) $\alpha \rightarrow 90^\circ$ przy stałym a ?

(K) (H) (M)

§ 30. Ciągłość funkcji.

Określenie ciągłości i nieciągłości funkcji.

Rozpatrzmy funkcję: $y = \frac{1}{4}x^2$, której wykres przedstawia rys. 20.



Rys. 20.

Wykres funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$

Wykres ten jest, jak widzimy, linią nieprzerwaną (ciągłą). Odpowiada temu pewna własność funkcji, którą postaramy się wyrazić ścisłym językiem matematycznym.

Oznaczmy przez x_0 dowolną liczbę rzeczywistą. Gdy $x \rightarrow x_0$, wówczas, jak łatwo obliczyć, $y \rightarrow \frac{1}{4}x_0^2$. Gdy zaś $x = x_0$, wówczas $y = \frac{1}{4}x_0^2$. Widzimy więc, że gdy $x \rightarrow x_0$, wówczas funkcja dąży do granicy równej tej właśnie wartości, jaką ona przybiera dla $x = x_0$. Wyrażamy to mówiąc, że funkcja jest ciągła dla $x = x_0$ (ciągła w punkcie x_0).

Ponieważ x_0 oznaczać może tutaj każdą liczbę rzeczywistą, możemy więc powiedzieć, że rozpatrywana funkcja jest w każdym punkcie ciągła, czyli wszędzie ciągła. Tej oto własności funkcji odpowiada właśnie ciągłość jej wykresu.

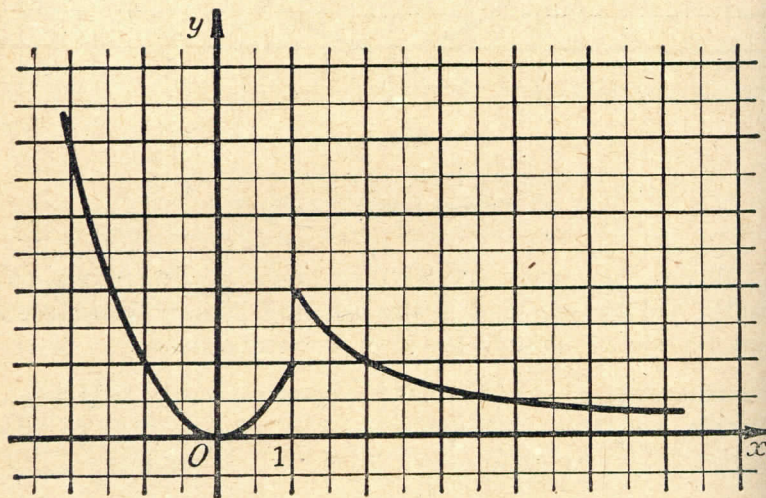
Możemy określić ogólnie:

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ dla $x = x_0$ ma określoną wartość $f(x_0)$ i jeżeli dla $x \rightarrow x_0$ funkcja ta dąży do granicy równej $f(x_0)$, wówczas mówimy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$ (albo: ciągła w punkcie x_0).

Poznajmy teraz przykład funkcji, która w pewnym punkcie, w którym jest określona, nie jest ciągła.

Rozpatrzmy mianowicie funkcję $y = f(x)$, określoną w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & \text{dla } x < 1, \\ f(x) &= \frac{2}{x} & \text{dla } x > 1. \end{aligned}$$



Rys. 21.

Rys. 21 przedstawia wykres tej funkcji. Z wykresu tego łatwo odczytać, że dla $x = 1$ zachodzi nagle zmiana (skok) wartości funkcji; w odnośnym punkcie wykres doznaje przerwy.

Zbadajmy zachowanie się tej funkcji dla $x \rightarrow 1$. Łatwo zauważyć, że gdy $x \rightarrow 1$, wówczas lewostronna granica funkcji

równa jest 1, a prawostronna równa jest 2; gdy $x \rightarrow 1$, funkcja nie dąży więc do żadnej określonej granicy. Możemy przeto powiedzieć, że funkcja $f(x)$ nie jest więc ciągła dla $x = 1$, chociaż dla $x = 1$ funkcja ta ma oznaczoną wartość: $f(1) = 1$.

Możemy określić ogólnie:

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest dla $x = x_0$ określona i jeżeli dla $x \rightarrow x_0$ funkcja $f(x)$ nie dąży do żadnej określonej granicy albo dąży do granicy, ale różnej od $f(x_0)$, wówczas mówimy, że funkcja jest nieciągła dla $x = x_0$ (albo: nieciągła w punkcie x_0).

Przykłady:

1. Funkcja $y = \frac{x^3}{10}$ jest ciągła dla każdego x . Obraz geometryczny tej funkcji (rys. 10) tworzy linię nieprzerwaną (ciągłą).

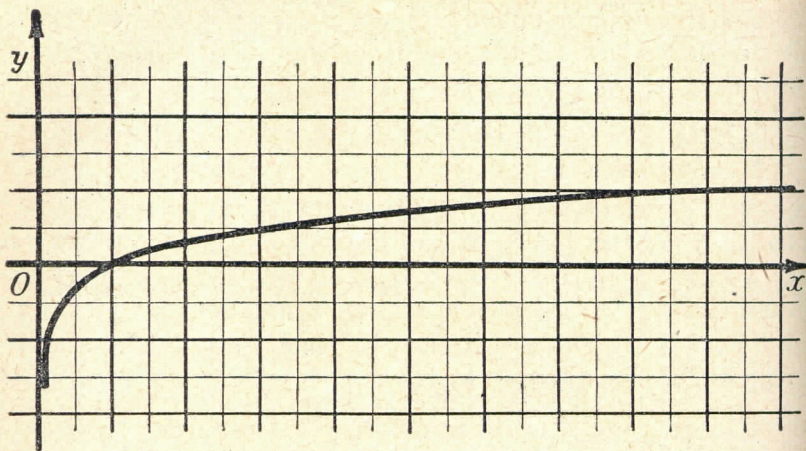
2. Funkcja określona w sposób następujący:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ y &= 0, & \text{gdy } x = 0, \end{aligned}$$

(patrz rys. 19) jest nieciągła dla $x = 0$, natomiast jest ciągła dla każdego $x \neq 0$. Obraz geometryczny tej funkcji jest linią doznającą przerwy dla $x = 0$ (w punkcie 0).

3. Funkcja $y = E(x)$ (patrz rys. 11) jest nieciągła dla każdego całkowitego x , natomiast ciągła dla każdego nie całkowitego x . Obraz geometryczny tej funkcji składa się z poszczególnych odcinków; przerwy zachodzą dla każdego całkowitego x .

4. Funkcja $y = \log x$ jest, jak można by łatwo stwierdzić rachunkiem, ciągła dla każdego x , dla którego jest określona, tj. dla każdego dodatniego x . Obraz geometryczny tej funkcji (rys. 22) tworzy linię nieprzerwaną.

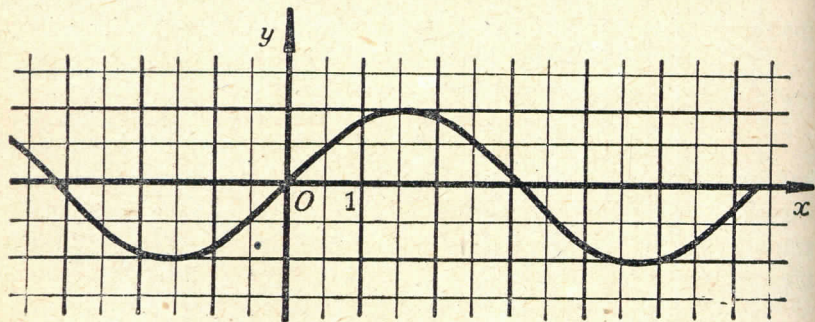


Rys. 22.

Wykres funkcji $y = \log x$

5. Funkcja $y = \sin x$ jest ciągła dla każdego x .

Obraz geometryczny tej funkcji (rys. 23), tworzy linię nieprzerwaną. Ścisły dowód ciągłości tej funkcji daje się również przeprowadzić za pomocą nietrudnego rachunku.



Rys. 23.

Wykres funkcji $y = \sin x$

6. Podobnie funkcja $y = \cos x$ jest ciągła dla każdego x . Obraz geometryczny tej funkcji (patrz rys. 14) tworzy również linię nieprzerwaną.

Funkcja może nie być ciągła dla żadnej wartości zmiennej niezależnej. Funkcją o takiej własności jest np. funkcja $y = f(x)$, określona w sposób następujący:

$$f(x) = 1, \text{ gdy } x \text{ jest wymierne,} \\ f(x) = -1, \text{ gdy } x \text{ jest niewymierne.}$$

Obraz geometryczny tej funkcji składa się z oddzielnych punktów, nie tworzących nigdzie nieprzerwanej linii.

Własności funkcji ciągłych.

Z definicji ciągłości funkcji oraz z poznanych przez nas twierdzeń o granicy funkcji wynikają, jako łatwe wnioski, następujące twierdzenia o funkcjach ciągłych:

Jeżeli funkcje: $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe dla $x = x_0$, wówczas także funkcje: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ są ciągłe dla $x = x_0$.

Jeżeli funkcje: $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe dla $x = x_0$, przy czym $g(x_0) \neq 0$, wówczas także funkcja $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest ciągła dla $x = x_0$.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła dla $x = x_0$, przy czym $f(x_0) \geq 0$ wówczas także funkcja $\sqrt{f(x)}$ jest ciągła dla $x = x_0$.

Przykłady:

1. Funkcja $y = x$ jest oczywiście wszędzie ciągła. Wynika stąd, że wszędzie ciągłe są również funkcje:

$$y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = x^4, \quad \dots \quad y = x^n \quad (n : \text{liczba naturalna})$$

2. Funkcja $y = a$ (tj. funkcja przybierająca dla każdej wartości zmiennej niezależnej x jedną i tę samą wartość a) jest oczywiście wszędzie ciągła. Wynika stąd, że także funkcja: $y = ax^n$ (n : liczba naturalna) jest wszędzie ciągła.

3. Funkcje:

$$y = ax + b$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

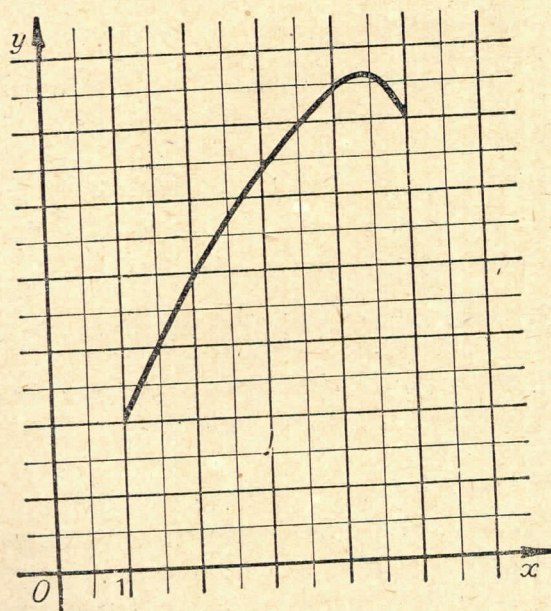
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

są wszędzie ciągłe; każda z tych funkcji jest bowiem sumą funkcji wszędzie ciągłych.

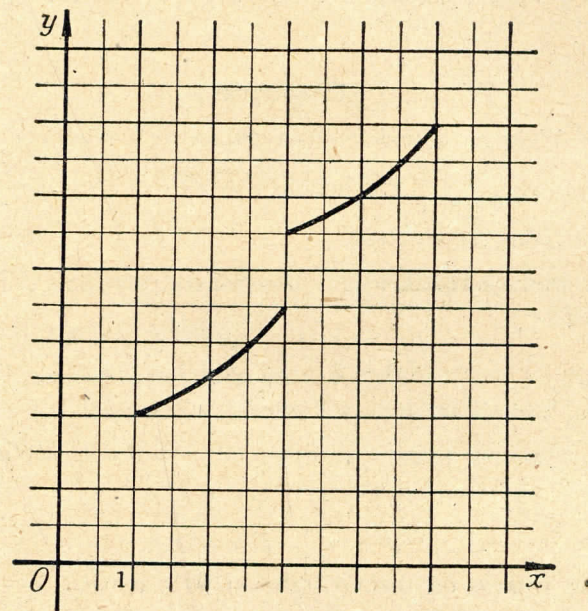
Na zakończenie naszych rozważań omówimy jeszcze jedną bardzo ważną własność funkcji ciągłej. Linia nieprzerwana na



Rys. 24.

rys. 24 przedstawia wykres pewnej funkcji ciągłej w przedziale (1, 5), która dla $x = 1$ przyjmuje wartość $y = 2$, dla $x = 5$ przyjmuje wartość $y = 6$. Łatwo zauważyć, że gdy x zmienia się od 1 do 5, wówczas y zmienia się od 2 do 6, przyjmując każdą wartość zawartą między 2 i 6 przynajmniej jeden raz.

Linia przerywana na rys. 25 przedstawia wykres pewnej funkcji określonej w przedziale (1, 5), ale nieciągłej dla $x = 3$; dla $x = 1$ funkcja przyjmuje wartość $y = 2$, a dla $x = 5$ wartość $y = 6$. Funkcja ta nie przyjmuje jednak każdej wartości zawartej między 2 i 6, gdy x zmienia się od 1 do 5 (nie przyjmuje np. wartości $y = 4$).



Rys. 25.

Przykłady te ilustrują następujące twierdzenie, które daje się zupełnie ściśle udowodnić:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) , wówczas przyjmuje ona w tym przedziale każdą wartość pośrednią między $f(a)$ i $f(b)$:

Twierdzenie to możemy dobitniej sformułować w taki sposób.

Funkcja ciągła, przechodząc od jednej wartości do drugiej, musi przejść przez wszystkie wartości pośrednie.

Zauważmy jeszcze, że można także udowodnić następujące ważne twierdzenie:

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b) , wówczas przybiera ona w pewnym punkcie tego przedziału wartość największą i w pewnym punkcie wartość najmniejszą.

*

Ścisłe określenie pojęcia ciągłości funkcji zawdzięczamy C a u c h y'emu, wybitnemu matematykowi francuskiemu z XIX stulecia.

Ćwiczenia.

361. Wykaż, że funkcje następujące są wszędzie ciągłe:

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{1+x^2}$ c) $y = \frac{1}{1+x^2}$

Podaj odnośne wykresy.

362. Dana jest funkcja $f(x)$, określona w przedziale $(0, 3)$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & \text{gdy } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) &= 3-x, & \text{gdy } 1 < x \leq 3 \end{aligned}$$

Podaj wykres tej funkcji i zbadaj jej ciągłość.

363. Dana jest funkcja, określona dla $x \geq 0$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & \text{gdy } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) &= \frac{4}{x}, & \text{gdy } x > 2 \end{aligned}$$

Podaj wykres tej funkcji i zbadaj jej ciągłość.

*364. Podaj wykres funkcji: $y = \frac{x + E(x)}{2}$ i zbadaj jej ciągłość.

*365. Dana jest funkcja $f(x)$, określona w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{gdy } x \neq 1 \\ f(x) &= 3, & \text{gdy } x = 1 \end{aligned}$$

Podaj wykres tej funkcji i zbadaj jej ciągłość.

ROZDZIAŁ VI

Pochodna funkcji.

(K) (H) (M)

§ 31. Pojęcie pochodnej. Styczna do krzywej.

Określenie pochodnej.

Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, o której zakładamy, że jest ciągła dla $x = x_0$. Wartości zmiennej niezależnej x_0 odpowiada wartość zmiennej zależnej $f(x_0)$, którą oznaczamy przez y_0 . Nadajmy teraz zmiennej niezależnej wartość x_1 (różną od x_0); odpowiada jej wartość zmiennej zależnej $f(x_1)$, którą oznaczamy przez y_1 . Gdy więc zmienna niezależna przechodzi od wartości x_0 do wartości x_1 , wówczas zmienna zależna przechodzi odpowiednio od wartości y_0 do wartości y_1 . Różnicę: $x_1 - x_0$ możemy nazwać przyrostem zmiennej niezależnej*), a różnicę: $y_1 - y_0$ przyrostem zmiennej zależnej (wartości funkcji). Oznaczając pierwszy przyrost przez Δx , drugi przez Δy , możemy napisać:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x_0 \\ (1) \quad \Delta y &= y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) \end{aligned}$$

*) Termin „przyrost” należy tu rozumieć jako liczbę względną: gdy $x_1 > x_0$, wówczas przyrost $x_1 - x_0$ jest dodatni, gdy zaś $x_1 < x_0$, wówczas przyrost $x_1 - x_0$ jest ujemny (jest więc ubytkiem).

Tak samo termin „przyrost zmiennej zależnej” należy rozumieć jako liczbę względną: dodatnią, ujemną lub równą zeru.

skąd otrzymujemy:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

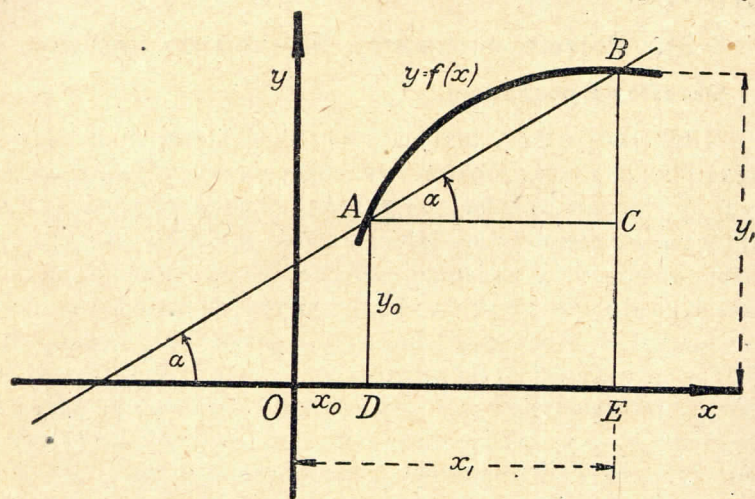
$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Wyrażenie:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a więc stosunek przyrostu wartości funkcji do odpowiedniego przyrostu zmiennej niezależnej nazywamy ilorazem różnicowym.

Iloraz różnicowy posiada bardzo prostą interpretację geometryczną. Niech krzywa na rys. 26 będzie obrazem geometrycznym funkcji $y = f(x)$. Połączmy punkt A o współrzędnych



Rys. 26.

(x_0, y_0) z punktem B o współrzędnych (x_1, y_1) linią prostą, z punktów A i B wykreślimy prostopadłe AD i BE do osi x -ów i wreszcie poprowadźmy z punktu A prostopadłą AC do BE . Mamy wówczas:

$$(3) \quad \begin{aligned} AC &= DE = x_1 - x_0 = \Delta x \\ CB &= EB - EC = y_1 - y_0 = \Delta y \end{aligned}$$

a zatem:

$$(4) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CB}{AC}$$

Oznaczmy przez α kąt nachylenia siecznej *) AB do dodatniego kierunku osi x -ów; $\angle CAB$ jest oczywiście także równy α . Mamy więc:

$$(5) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$$

Tangens kąta nachylenia prostej do dodatniego kierunku osi x -ów nazywamy współczynnikiem kątowym tej prostej.

Iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest równy współczynnikowi kątowemu siecznej łączącej odnośne punkty A i B wykresu funkcji.

Załóżmy teraz, że przy stałym x_0 przyrost Δx dąży do 0. Wobec ciągłości funkcji dąży wówczas także Δy do 0. W ilorazie różnicowym $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży zatem zarówno licznik jak i mianownik do 0, iloraz ten może więc dążyć do określonej granicy lub też nie.

Jeżeli iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży do określonej granicy skończonej, gdy Δx dąży do 0, wówczas granicę tę nazywamy pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 .

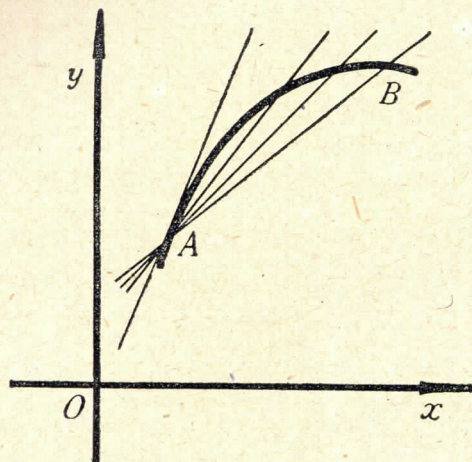
Oznaczając tę pochodną przez $f'(x_0)$ możemy więc napisać:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej jest również nader prosta. Jeżeli przy stałym x_0 przyrost Δx dąży do 0, wówczas (patrz rys. 27) punkt B zbliża się nieograniczenie do punktu A ,

*) Przez sieczną rozumiemy linię prostą przecinającą krzywą.

i sieczna AB , obracając się dookoła punktu A , dąży do pewnego położenia granicznego, w którym staje się styczną do krzywej w punkcie A , a zatem iloraz różnicowy dąży do granicy równej



Rys. 27.

współczynnikowi kątowemu tej stycznej. Innymi słowy, *po-
chodna funkcji w danym punkcie jest równa współczynnikowi
kątowemu stycznej poprowadzonej w odnośnym punkcie do wy-
kresu funkcji.*

Przykłady:

1. Obliczmy pochodną funkcji $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ dla $x = 2$.

Mamy:

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^2 = 1$$

$$f(2 + \Delta x) = \frac{1}{4}(2 + \Delta x)^2 = 1 + \Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2$$

a zatem:

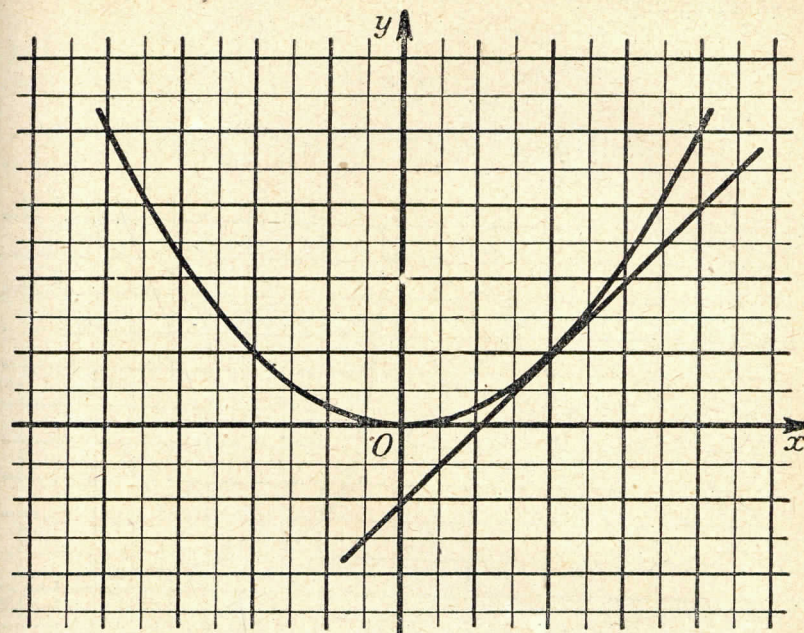
$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{1}{4}\Delta x$$

Mamy więc:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$



Rys. 28.

A zatem szukana pochodna funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ dla $x = 2$ wynosi 1. Styczna poprowadzona do krzywej $y = \frac{1}{4}x^2$ w punkcie tej krzywej, którego odcięta wynosi 2 (patrz rys. 28), ma współczynnik kątowy równy 1, styczna ta tworzy więc z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt 45° .

2. Obliczmy pochodną funkcji $y = f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x = 1$.

Mamy:

$$f(1) = 1$$

$$f(1 + \Delta x) = \frac{1}{1 + \Delta x}$$

a zatem:

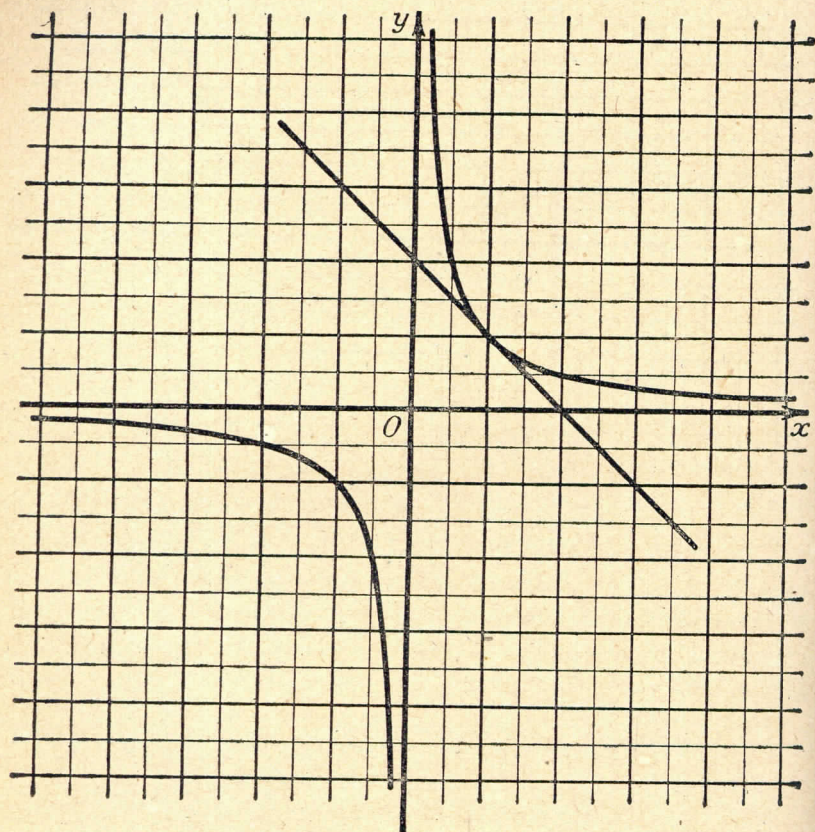
$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1 = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + \Delta x}$$

Mamy więc:

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$



Rys. 29.

A zatem szukana pochodna funkcji $y = \frac{1}{x}$ dla $x = 1$ wynosi -1 . Styczna poprowadzona do krzywej $y = \frac{1}{x}$ w punkcie

tej krzywej, którego odcięta wynosi 1 (patrz rys. 29), ma współczynnik katowy równy -1 , styczna ta tworzy więc z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt 135° .

3. Obliczmy pochodną funkcji $y = f(x) = x^2 + 3x - 5$ w punkcie x . Mamy:

$$f(x) = x^2 + 3x - 5$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 5,$$

a zatem:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x \Delta x + 3 \Delta x + (\Delta x)^2$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$$

Mamy więc:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 3$$

Otrzymaliśmy wzór ogólny, pozwalający obliczyć pochodną rozpatrywanej funkcji w dowolnym punkcie. Mamy np.:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

$$f'(-4) = 2 \cdot (-4) + 3 = -5$$

$$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

Pochodną funkcji $y = f(x)$ oznaczamy czasem symbolem $\frac{dy}{dx}$. Symbol ten przypomina, że pochodna jest granicą, do której dąży iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy przyrost Δx dąży do 0. Pochodną nazywamy też czasem ilorazem różniczkowym. Podkreślamy jednak z naciskiem, że pochodna $\frac{dy}{dx}$ nie jest ilorazem w zwykłym tego słowa znaczeniu, lecz tylko granicą ilorazu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Istnienie pochodnej a ciągłość funkcji.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada pochodną w punkcie x_0 , wówczas funkcja ta jest w tym punkcie ciągła.

W samej rzeczy, mamy:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

czyli:

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

Skoro funkcja posiada pochodną w punkcie x_0 , zatem iloraz różnicowy

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

posiada dla $\Delta x \rightarrow 0$ granicę skończoną: $f'(x_0)$. Mamy więc, stosując twierdzenie o granicy iloczynu:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Z tego jednak wynika natychmiast, że:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

co oznacza, że funkcja jest w punkcie x_0 ciągła.

Ciągłość funkcji w danym punkcie jest więc warunkiem koniecznym istnienia pochodnej w tym punkcie.

Ciągłość nie wystarcza jednak do istnienia pochodnej, tzn. funkcja może w pewnym punkcie być ciągła, a mimo to w tym punkcie nie posiadać pochodnej. Dla przykładu przytaczamy funkcję $y = |x|$, której wykres mamy na rys. 30. Dla $x = 0$ funkcja ta jest oczywiście ciągła. Funkcja ta nie posiada jednak pochodnej dla $x = 0$.

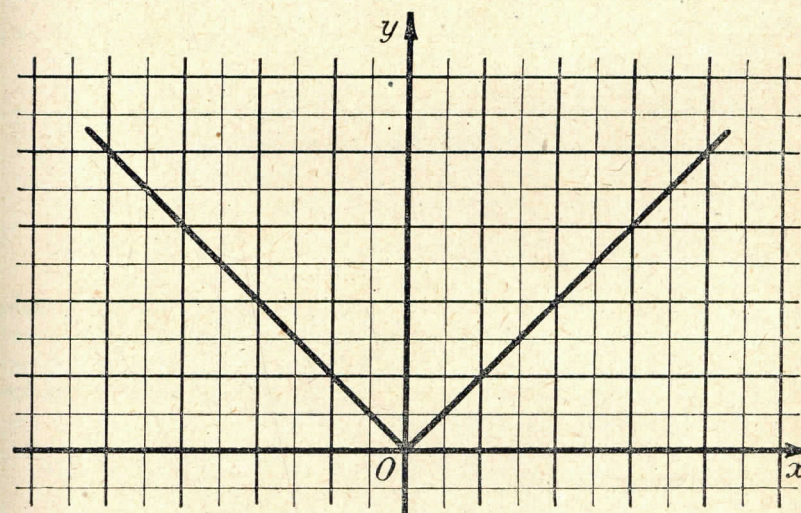
Jeżeli bowiem oznaczymy przez Δx przyrost dodatni zmiennej x , wychodząc z wartości $x = 0$, a przez Δy odpowiedni przyrost zmiennej y , wówczas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Jeżeli zaś Δx jest przyrostem ujemnym, wówczas:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Z tego wynika natychmiast, że iloraz różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży prawostronnie do 1, lewostronnie zaś do -1 , a więc nie dąży do żadnej określonej granicy, gdy Δx dąży do 0.

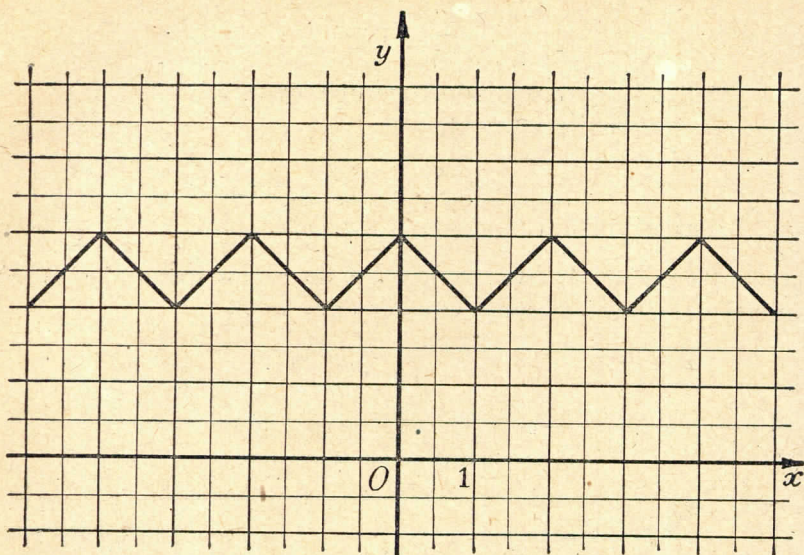


Rys. 30.

Wykres funkcji: $y = |x|$

Wykres funkcji $y = |x|$ jest linią ciągłą, nie posiada jednak określonej stycznej w punkcie $(0, 0)$.

Linia łamana na rys. 31 może być uważana za obraz geometryczny pewnej funkcji $y = f(x)$, która jest wszędzie ciągła, ale nie posiada pochodnej dla żadnego całkowitego x .



Rys. 31.

Wykazano nawet, że istnieją funkcje, które są wszędzie ciągłe, ale nigdzie nie posiadają pochodnej. Obraz geometryczny takiej funkcji jest więc linią ciągłą, która w żadnym jej punkcie nie posiada określonej stycznej. Rozumie się, że funkcja taka do graficznego przedstawienia nie nadaje się.

Funkcja pochodna.

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada pochodną $f'(x)$ w każdym punkcie x pewnego obszaru, wówczas pochodną tę możemy uważać za nową funkcję zmiennej x . Funkcję tę nazywamy **f u n k c j ą p o c h o d n ą** względem funkcji danej.

Jeżeli oznaczymy $f(x)$ przez y pisząc:

$$y = f(x)$$

wówczas funkcję pochodną oznaczyć możemy przy y' pisząc:

$$y' = f'(x)$$

Ćwiczenia.

366. Oblicz iloraz różnicowy funkcji:

$$y = 6x^2$$

obierając za x wartości:

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| a) 1 i $1 + \Delta x$ | b) 3 i $3 + \Delta x$ |
| c) -2 i $-2 + \Delta x$ | d) 0 i Δx |

Oblicz pochodną tej funkcji dla wartości x , równej:

- | | |
|---------|------|
| a) 1 | b) 3 |
| c) -2 | d) 0 |

367. Oblicz iloraz różnicowy funkcji:

$$y = x^3$$

obierając za x wartości:

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) 1 i $1 + \Delta x$ | b) 2 i $2 + \Delta x$ |
| c) -1 i $-1 + \Delta x$ | d) a i $a + \Delta x$ |

Oblicz pochodną tej funkcji dla wartości x , równej:

- | | |
|---------|--------|
| a) 1 | b) 2 |
| c) -1 | d) a |

368. Oblicz iloraz różnicowy funkcji:

$$y = x^3 - x^2$$

obierając za x wartości:

- | | |
|-----------------------|-----------------------------|
| a) 2 i $2 + \Delta x$ | b) x_0 i $x_0 + \Delta x$ |
|-----------------------|-----------------------------|

Oblicz pochodną tej funkcji dla wartości x , równej:

- | | |
|------|----------|
| a) 2 | b) x_0 |
|------|----------|

369. Oblicz iloraz różnicowy funkcji:

$$y = \sqrt{x}$$

obierając za x wartości:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) 1 i $1 + \Delta x$ | b) 4 i $4 + \Delta x$ |
|-----------------------|-----------------------|

Oblicz pochodną tej funkcji dla wartości x , równej:

- | | |
|------|------|
| a) 1 | b) 4 |
|------|------|

370. Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x + 1$$

dla wartości x , równej:

- | | | | |
|------|------|------|--------|
| a) 2 | b) 4 | c) 0 | d) k |
|------|------|------|--------|

371. Oblicz pochodną funkcji:

$$y = \frac{3}{x}$$

dla wartości x , równej:

- a) 4 b) 5 c) -1 d) -3

372. Oblicz pochodną funkcji:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

dla wartości x , równej:

- a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

373. Oblicz współczynnik kątowny stycznej do krzywej:

$$y = x^2$$

poprowadzonej w punkcie:

- a) (1, 1) b) (2, 4) c) (3, 9)

Wyniki zilustrować rysunkiem.

374. Oblicz współczynnik kątowny stycznej do krzywej:

$$y = 1 + \frac{x^2}{2}$$

poprowadzonej w punkcie:

- a) (0, 1) b) (2, 3) c) (-2, 3)

Wyniki zilustrować rysunkiem.

375. Oblicz kąt, jaki tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów styczna do krzywej: $y = \frac{4}{3}x^3$, poprowadzona w punkcie:

- a) $(1, \frac{4}{3})$ b) $(2, \frac{8}{3})$

376. Dla następujących funkcji oblicz funkcje pochodne:

- a) $y = x^2 - 8x$ b) $y = 2x^3 - 1$

- c) $y = \frac{1}{1+x^2}$ d) $y = x^4$

(M)

§ 32. Prędkość ruchu.

Przykład zastosowania pochodnej w fizyce.

Pojęcie pochodnej znajduje szerokie zastosowanie nie tylko w matematyce, ale także w fizyce. Oto bardzo prosty przykład stosowania pojęcia pochodnej zaczerpnięty z kinematyki (nauki o ruchu).

Niechaj punkt materialny P porusza się po linii prostej (rys. 32). Obierzmy na tej prostej punkt stały O oraz zwrot dodatni. Położenie poruszającego się punktu P możemy dokładnie określić, podając jego odległość s od punktu O (przy



Rys. 32.

czym odległość ta jest dodatnia, gdy odcinek OP jest dodatni, i ujemna, gdy odcinek OP jest ujemny). Jasną jest rzeczą, że każdemu momentowi czasu (każdej chwili) t odpowiada zupełnie określone położenie punktu P , a więc zupełnie określona wartość s . Widzimy więc, że zmienna s jest funkcją zmiennej t , co możemy napisać w ten sposób:

$$s = f(t)$$

Jeżeli w chwili t odległość wynosi s , a w chwili $t + \Delta t$ odległość wynosi $s + \Delta s$, oznacza to, że w ciągu czasu Δt przebyta została droga Δs . Jeżeli ruch jest jednostajny, wówczas, jak wiemy,

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ jest wielkością stałą i nazywa się prędkością. Jeżeli zaś

ruch nie jest jednostajny, wówczas stosunek $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nazywa się prędkością średnią (w czasie od chwili t do chwili $t + \Delta t$). Granicę, do której dąży $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, gdy $\Delta t \rightarrow 0$, nazywamy prędkością w chwili t . Oznaczając prędkość tę przez v , możemy napisać:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Dla przykładu rozważmy ruch ciała spadającego swobodnie. Jeżeli przez s oznaczymy drogę, którą ciało spadające swobodnie przebywa w ciągu czasu t , wówczas mamy, jak uczy mechanika, wzór:

$$(6) \quad s = \frac{1}{2} g t^2$$

przy czym g oznacza przyspieszenie ziemskie (które w danej miejscowości jest wielkością stałą). Aby znaleźć prędkość spadającego ciała w chwili t (tzn. po upływie czasu t), obliczamy pochodną funkcji wyrażonej wzorem (6) dla chwili t .

Mamy:

$$(7) \quad s = \frac{1}{2} g t^2$$

skąd otrzymujemy:

$$(8) \quad \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2$$

czyli po łatwym przekształceniu:

$$(9) \quad \Delta s = g t \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

Dzieląc obie strony równości (9) przez Δt otrzymujemy:

$$(10) \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \Delta t$$

Jeżeli szukaną prędkość oznaczmy przez v , otrzymamy:

$$(11) \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = g t$$

Ćwiczenia.

377. Ciało porusza się po linii prostej ruchem określonym przez równanie: $s = 3t^2$, gdzie s oznacza drogę w centymetrach, a t odpowiedni czas w sekundach. Oblicz prędkość ciała po upływie czasu, równego:

- a) 5 sek. b) 10 sek. c) 15 sek.

378. Ciało porusza się po linii prostej ruchem określonym przez równanie: $s = 8t + 5t^2$, gdzie s oznacza drogę w metrach, a t odpowiedni czas w sekundach. Oblicz prędkość ciała po upływie czasu, równego:

- a) 1 sek. b) 2 sek. c) 3 sek.

(K) (H) (M)

§ 33. Obliczanie pochodnej funkcji wymiernych.

Elementarne twierdzenia o pochodnych.

W tym § rozpatrywać będziemy tylko takie funkcje, które są ciągłe i posiadają pochodną w całym obszarze, w którym są określone.

Obliczanie funkcji pochodnych opieramy na kilku prostych twierdzeniach, które obecnie wyprowadzimy.

Rozpatrzmy najpierw funkcję stałą, czyli funkcję przybierającą dla każdej wartości zmiennej x tę samą wartość a .

Jeżeli $y = f(x) = a$, wówczas:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a - a = 0,$$

a zatem: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, skąd wynika natychmiast, że $y' = f'(x) = 0$.

Otrzymany wynik wyrażamy słowami w ten sposób:

Pochodna funkcji stałej jest zerem.

Rozpatrzmy teraz funkcję: $y = f(x) = x$. Mamy tu:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x,$$

a zatem: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, skąd wynika natychmiast, że $y' = f'(x) = 1$.

Wynik ten wyrażamy słowami:

Pochodna funkcji $y = x$ równa jest 1.

Wyprowadzimy teraz wzór na pochodną funkcji potęgowej, $y = x^n$ (n oznacza tu liczbę naturalną większą od 1). Mamy tu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Kładąc $x + \Delta x = x_1$ możemy napisać:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$$

Przez mnożenie z łatwością sprawdzamy tożsamość:

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1})$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + x_1^{n-3}x^2 + \dots + x_1x^{n-2} + x^{n-1}$$

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$ (przy stałym x), wówczas $x_1 \rightarrow x$. Stosując twierdzenia o granicy iloczynu i sumy otrzymujemy:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ razy}}$$

czyli: $y' = nx^{n-1}$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = x^n$ wyraża się wzorem: $y' = nx^{n-1}$.

Więc np. funkcje:

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4, y = x^5$$

mają odpowiednio pochodne:

$$y' = 2x, y' = 3x^2, y' = 4x^3, y' = 5x^4$$

Niech będzie dana funkcja $f(x)$, która posiada pochodną $f'(x)$. Mnożąc $f(x)$ przez liczbę stałą a , otrzymujemy nową funkcję: $y = af(x)$. Obliczmy pochodną tej funkcji.

Mamy: $\Delta y = af(x + \Delta x) - af(x)$, a zatem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

z czego wynika natychmiast:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

czyli: $y' = af'(x)$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = af(x)$ wyraża się wzorem: $y' = af'(x)$.

W szczególności, pochodna funkcji $y = -f(x)$ wyraża się wzorem: $y' = -f'(x)$.

Obliczmy dla przykładu pochodną funkcji: $y = -5x^3$. Możemy tu położyć: $a = -5$, $f(x) = x^3$; mamy więc: $f'(x) = 3x^2$, skąd: $y' = -5 \cdot 3x^2 = -15x^2$.

Pochodna sumy i różnicy.

Niech będą dane dwie funkcje: $f(x)$ i $g(x)$. Dodając te funkcje otrzymujemy nową funkcję: $y = f(x) + g(x)$. Obliczmy pochodną tej funkcji.

Mamy:

$$\Delta y = [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)],$$

a zatem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

skąd otrzymujemy, stosując twierdzenie o granicy sumy:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

czyli:

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna sumy dwóch funkcji jest równa sumie pochodnych poszczególnych składników.

Twierdzenie to daje się z łatwością uogólnić na dowolną ilość składników.

Różnica $y = f(x) - g(x)$ daje się napisać w postaci sumy: $y = f(x) + [-g(x)]$. Ponieważ pochodną funkcji $-g(x)$ jest $-g'(x)$, zatem mamy: $y' = f(x) - g'(x)$. Udowodniliśmy więc twierdzenie:

Pochodna różnicy dwóch funkcji jest równa różnicy pochodnych odjemnej i odjemnika.

Przykłady:

1. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = 6x^3 + 7x^2 - \frac{1}{2}x + 4$$

Stosując twierdzenie o pochodnej sumy mamy:

$$y' = 6 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - \frac{1}{2} \cdot 1 + 0$$

czyli:

$$y' = 18x^2 + 14x - \frac{1}{2}$$

2. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Stosując twierdzenie o pochodnej sumy otrzymujemy:

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Poznane przez nas twierdzenia pozwalają obliczyć pochodną każdej funkcji kształtu:

$$(12) \quad y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ są liczbami stałymi; funkcja taka nazywa się wielomianem.

Otrzymujemy:

$$(13) \quad y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-1}$$

Widzimy stąd, że pochodna wielomianu jest wielomianem stopnia o 1 niższego.

Pochodna iloczynu.

Wyprowadzimy teraz wzór na pochodną iloczynu:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

Mamy:

$$(14) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)$$

Odejmując od prawej strony równości (14) wyrażenie:

$$f(x + \Delta x) \cdot g(x)$$

i następnie dodając to samo wyrażenie, otrzymujemy:

$$(15) \quad \Delta y = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$$

czyli po łatwym przekształceniu:

$$(16) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)] + g(x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)]$$

Dzieląc obie strony równości (16) przez Δx mamy:

$$(17) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$ (przy stałym x), wówczas: $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$, gdyż funkcja $f(x)$ jest ciągła, a ilorazy różnicowe:

$$\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dążą odpowiednio do $g'(x)$ i $f'(x)$. Mamy zatem, stosując twierdzenie o granicy iloczynu i sumy:

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna iloczynu dwóch funkcji równa jest sumie iloczynu pierwszego czynnika przez pochodną drugiego oraz iloczynu drugiego czynnika przez pochodną pierwszego.

Obliczmy dla przykładu pochodną funkcji:

$$y = (3x^2 - 5x) \cdot (4x - 1)$$

Mamy tu: $f(x) = 3x^2 - 5x$, $g(x) = 4x - 1$, a więc:

$$f'(x) = 6x - 5, \quad g'(x) = 4$$

Stosując twierdzenie o pochodnej iloczynu znajdujemy:

$$y' = (3x^2 - 5x) \cdot 4 + (4x - 1)(6x - 5)$$

czyli po wykonaniu działań po prawej stronie:

$$y' = 36x^2 - 46x + 5$$

Pochodna ilorazu.

Niech będą dane dwie funkcje: $f(x)$ i $g(x)$. Dzieląc $f(x)$ przez $g(x)$ otrzymujemy nową funkcję: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Funkcja ta jest

oczywiście określona tylko dla takich wartości zmiennej x , dla których określone są obie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ i dla których ponadto $g(x) \neq 0$. Przyjmując, że x oznacza taką właśnie wartość, obliczmy pochodną funkcji $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Skoro $g(x) \neq 0$, więc, jak łatwo wynika z ciągłości funkcji $g(x)$, dla wartości $x + \Delta x$ dostatecznie bliskich x mamy również: $g(x + \Delta x) \neq 0$. Możemy więc napisać:

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

czyli:

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

Odejmując od licznika tego ułamka wyrażenie: $f(x) \cdot g(x)$ i następnie dodając to samo wyrażenie, otrzymujemy:

$$\Delta y = \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

czyli po łatwym przekształceniu:

$$\Delta y = \frac{g(x) \cdot [f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

Dzieląc obie strony tej równości przez Δx dostajemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$ (przy stałym x), wówczas: $g(x + \Delta x) \rightarrow g(x)$, gdyż funkcja $g(x)$ jest ciągła, a ilorazy różnicowe:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{i} \quad \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

dążą odpowiednio do $f'(x)$ i $g'(x)$. Mamy zatem, stosując twierdzenie o granicy iloczynu, ilorazu i różnicy:

$$y' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Aby obliczyć pochodną ilorazu, od iloczynu dzielnika przez pochodną dzielnej odejmujemy iloczyn dzielnej przez pochodną dzielnika i powstałą różnicę dzielimy przez kwadrat dzielnika.

Przykłady:

1. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \frac{x^3}{1 + x^2}$$

Położmy: $f(x) = x^3$, $g(x) = 1 + x^2$. Mamy: $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$. Stosując twierdzenie o pochodnej ilorazu dostajemy:

$$y' = \frac{(1 + x^2) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}$$

czyli po wykonaniu działań:

$$y' = \frac{3x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

2. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \frac{5}{x - 2}$$

Położmy: $f(x) = 5$, $g(x) = x - 2$. Mamy więc: $f'(x) = 0$, $g'(x) = 1$. Stosując twierdzenie o pochodnej ilorazu dostajemy:

$$y' = \frac{(x - 2) \cdot 0 - 5 \cdot 1}{(x - 2)^2}$$

czyli:

$$y' = -\frac{5}{(x - 2)^2}$$

Jest rzeczą jasną, że w powyższym rachunku musimy założyć, że $x \neq 2$.

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są wielomianami, wówczas ich iloraz, tj. funkcję

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

nazywamy funkcją wymierną. Poznane przez nas twierdzenia pozwalają obliczyć pochodną każdej funkcji wymiernej. Łatwo też spostrzec, że *pochodna funkcji wymiernej jest również funkcją wymierną.*

Ćwiczenia.

379. Oblicz pochodną funkcji:

- | | |
|--|--|
| a) $y = 4x - 1$ | b) $y = -x + 3$ |
| c) $y = ax + b$ | d) $y = x^5$ |
| e) $y = 2x^8$ | f) $y = -\frac{1}{4}x^4$ |
| g) $y = 8x^2 - 4x + 1$ | h) $y = ax^2 + 2bx + c$ |
| i) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ | j) $y = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + x + 1$ |
| k) $y = nx^4 - 2x + 3$ | l) $y = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + 9x^4$ |
| m) $y = \frac{x^3 - 8x}{4}$ | n) $y = \frac{n}{n+1}x^{n+1} - \frac{n+1}{n+2}x^{n+2}$ |
- (n : liczba naturalna)

380. Oblicz pochodną każdej z niżej podanych funkcji dwoma sposobami:

- 1) stosując twierdzenie o pochodnej iloczynu;
- 2) wykonując mnożenie i następnie stosując twierdzenie o pochodnej sumy.

Porównaj otrzymane wyniki.

- | | |
|---|--|
| a) $y = (2x - 5) \cdot (3x - 1)$ | b) $y = (\frac{1}{4}x + 1) \cdot (4x + 3)$ |
| c) $y = 3x^2 \cdot (1 - x + x^2)$ | d) $y = (x^2 - 2) \cdot (x + 2)$ |
| e) $y = (x^2 - 6x + 2) \cdot (x^2 + 1)$ | f) $y = (ax + b) \cdot (cx + d)$ |
| g) $y = (x^2 + 1) \cdot (x^3 + 1)$ | h) $y = (x^2 - x + 2)^2$ |

381. Oblicz pochodną funkcji:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $y = \frac{5}{x}$ | b) $y = \frac{2}{3x - 2}$ | c) $y = \frac{x}{x + 1}$ |
| d) $y = \frac{2x + 3}{x}$ | e) $y = \frac{2x - 1}{2x + 1}$ | f) $y = \frac{5 - 3x}{5 + 3x}$ |
| g) $y = \frac{4}{x^2}$ | h) $y = \frac{3}{5x^3}$ | i) $y = \frac{x - 7}{x^2}$ |
| j) $y = \frac{2 + x - x^2}{x^2 + 1}$ | k) $y = \frac{12x^2 - 1}{2x + 3}$ | l) $y = \frac{1 - x^4}{1 + x^4}$ |
| m) $y = 2x + 3 + \frac{1}{x}$ | n) $y = x + \frac{1}{x}$ | o) $y = -\frac{ax + b}{x^2}$ |

382. Oblicz pochodną funkcji: $y = \frac{1}{x^n}$ (n oznacza liczbę naturalną).

383. Wyprowadź wzór na pochodną funkcji: $y = \sqrt{x}$.

Wskazówka:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

384. Udowodnij, że pochodna funkcji:

$$y = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$$

wyraża się wzorem:

$$y' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

Zakładamy, że funkcje $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$ posiadają pochodne.

385. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = 3x^2 - 12x + 1$$

przybiera wartość: a) dodatnią, b) ujemną?

386. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 5x - 2$$

przybiera wartość: a) większą od 1, b) mniejszą od -1?

387. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$

przybiera wartość: a) dodatnią, b) ujemną, c) równą zero?

388. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 12x^2 + 35x + 2$$

przybiera wartość: a) dodatnią, b) ujemną, c) równą zero?

389. Wykaż, że pochodna funkcji: $y = x^3 - x^2 + 3x + 4$ jest dodatnia dla każdej wartości x .

390. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = -x^4 + 12x^2 + 7$$

przybiera wartość równą zero?

***391.** Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 54x^2 + 108x + 5$$

przybiera wartość równą zero?

392. Wyznacz k w taki sposób, aby pochodna funkcji:

$$y = x^2 + kx + 3$$

miała dla $x = 1$ wartość równą 7.

393. Wyznacz k w taki sposób, aby pochodna funkcji:

$$y = x^3 - kx^2 + 1$$

miała dla $x = 2$ wartość równą zeru.

394. Wyznacz k i l w taki sposób, aby pochodna funkcji:

$$y = x^3 + kx^2 + lx + 1$$

miała dla $x = 1$ wartość równą 4, a dla $x = -1$ wartość równą 8.

(M)

§ 34. Pochodna funkcji złożonej i funkcji potęgowej.

Wzór na pochodną funkcji złożonej.

Niech będzie dana funkcja:

$$(18) \quad y = F[f(x)]$$

złożona z funkcji:

$$y = F(u) \quad \text{i} \quad u = f(x)$$

Założmy, że funkcja $f(x)$ posiada pochodną w pewnym punkcie x i że funkcja $F(u)$ posiada pochodną w odpowiednim punkcie u . Można wykazać, że wówczas funkcja złożona (18) posiada także pochodną w punkcie x . Połóżmy:

$$(19) \quad \Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$(20) \quad \Delta y = F(u + \Delta u) - F(u)$$

Mamy więc:

$$(21) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta x}$$

Przypuśćmy, że przyrostowi Δx , różnemu od 0, odpowiada przyrost Δu , także różny od 0. Możemy wówczas napisać:

$$(22) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Funkcja $u = f(x)$ posiada, jak założyliśmy, pochodną w punkcie x , funkcja ta jest więc w tym punkcie ciągła. Wynika stąd, że $\Delta u \rightarrow 0$, gdy $\Delta x \rightarrow 0$. Uwzględniając to otrzymujemy:

$$(23) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u + \Delta u) - F(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

czyli:

$$(24) \quad y' = F'(u) \cdot u'$$

Powyższy wynik możemy krótko streścić w ten sposób:

Pochodna funkcji

$$y = F[f(x)]$$

złożonej z funkcji:

$$y = F(u) \quad \text{i} \quad u = f(x)$$

wyraża się wzorem:

$$y' = F'(u) \cdot u'$$

Wzór ten możemy także napisać w taki sposób:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Wzór (24) wyprowadziliśmy przy założeniu, że przyrostowi Δx , różnemu od 0, odpowiada przyrost Δu , także różny od 0. Wzór (24) daje się jednak także udowodnić i wtedy, gdy warunek ten nie jest spełniony; rozważanie to jednak w książce tej pomijamy.

Przykłady:

1. Funkcję:

$$y = (-3x + 5)^3$$

możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = u^3 \quad \text{i} \quad u = -3x + 5$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = 3 u^2 \cdot u'$$

czyli:

$$y' = 3 (-3x + 5)^2 \cdot (-3)$$

co można napisać w postaci:

$$y' = -9 (3x - 5)^2$$

2. Funkcję:

$$y = (x^2 - 2x + 7)^3$$

możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = u^3 \quad \text{i} \quad u = x^2 - 2x + 7$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = 2u \cdot u'$$

czyli:

$$y' = 2(x^2 - 2x + 7) \cdot (2x - 2)$$

i po uproszczeniu otrzymujemy:

$$y' = 4(x - 1)(x^2 - 2x + 7)$$

Pochodna funkcji potęgowej.

W poprzednim § udowodniliśmy, że pochodna funkcji potęgowej:

$$(25) \quad y = x^n$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, wyraża się wzorem:

$$(25a) \quad y' = nx^{n-1}$$

Obecnie zbadamy, czy wzór (25a) zachodzi także w tym wypadku, gdy n jest dowolną liczbą całkowitą.

Przejdziemy po kolei następujące przypadki:

a) $n = 1$,

β) $n = 0$,

γ) n jest liczbą całkowitą ujemną.

a) Załóżmy, że $n = 1$. Funkcja (25) przybiera wówczas postać: $y = x$, pochodna tej funkcji jest zatem równa 1. Podstawiając we wzór (25a): $n = 1$, otrzymujemy: $y' = x^0$. Lecz $x^0 = 1$ dla każdego $x \neq 0$; wzór (25a) przedstawia więc pochodną funkcji (25) dla każdego $x \neq 0$.

β) Załóżmy, że $n = 0$. Funkcja (25) przybiera wówczas postać: $y = x^0$, funkcja jest więc określona dla każdego $x \neq 0$ i przybiera stałą wartość równą 1; pochodna tej funkcji jest oczywiście równa 0. Podstawiając we wzór (25a): $n = 0$, otrzymujemy: $y' = 0 \cdot x^{-1} = 0$. Wzór (25a) przedstawia więc pochodną funkcji (25) dla każdego $x \neq 0$.

γ) Załóżmy, że $n = -k$, gdzie k jest liczbą naturalną. Funkcja (25) przybiera wówczas postać:

$$y = \frac{1}{x^k}$$

Funkcja ta określona jest dla każdego $x \neq 0$. Obliczmy pochodną tej funkcji. Stosując twierdzenie o pochodnej ilorazu dostajemy:

$$y' = \frac{x^k \cdot 0 - kx^{k-1}}{x^{2k}}$$

czyli:

$$y' = -kx^{-k-1}$$

więc:

$$y' = nx^{n-1}$$

Widzimy więc, że i w tym przypadku wzór (25a) przedstawia pochodną funkcji (25) dla każdego $x \neq 0$.

[: Można też dowieść, że wzór (25a) wyraża pochodną funkcji (25) również w przypadku, gdy n jest liczbą ułamkową.

W samej rzeczy, niechaj $n = \frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną, q jest liczbą naturalną. Funkcja (25) przybiera wówczas postać:

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

Funkcja ta jest określona dla każdego $x > 0$. Należy obliczyć pochodną tej funkcji.*)

Z zależności: $y = x^{\frac{p}{q}}$ otrzymujemy podnosząc obie strony do q -tej potęgi:

$$y^q = x^p$$

Położmy:

$$z = y^q = x^p$$

W zależności:

$$z = y^q$$

możemy z uważać za funkcję zmiennej x , złożoną z funkcji:

$$z = y^q \quad \text{i} \quad y = x^{\frac{p}{q}}$$

*) Że funkcja ta posiada pochodną dla każdego $x > 0$, można wykazać bezpośrednio; w tej książce dowód ten jednak pomijamy.

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej mamy więc:

$$z' = qy^{q-1} \cdot y'$$

Z drugiej strony, wobec:

$$z = x^p$$

mamy:

$$z' = px^{p-1}$$

Z powyższego wynika, że

$$qy^{q-1} y' = px^{p-1}$$

skąd otrzymujemy:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}$$

Uwzględniając, że $y = x^{\frac{p}{q}}$, możemy napisać:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}}$$

czyli:

$$y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

a więc:

$$y' = nx^{n-1}$$

Widzimy więc, że wzór (25a) przedstawia w rozpatrywanym przypadku pochodną funkcji (25) dla każdego $x > 0$. :]

Otrzymane wyniki możemy krótko streścić w sposób następujący:

Pochodna funkcji potęgowej $y = x^n$, gdzie n jest dowolną liczbą wymierną, wyraża się wzorem: $y' = nx^{n-1}$.

Można również wykazać, że wzór ten zachodzi także w przypadku, gdy n jest liczbą niewymierną.

Przykłady:

1. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \sqrt{x}$$

Mamy tu: $y = x^{\frac{1}{2}}$. Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji potęgowej dostajemy:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \text{ czyli } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} *$$

Pochodna funkcji $y = \sqrt{x}$ wyraża się więc wzorem:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \sqrt[4]{x^3}$$

Mamy tu: $y = x^{\frac{3}{4}}$. Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji potęgowej dostajemy: $y' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$, czyli: $y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} *$

3. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

Funkcję tę możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{ i } \quad u = x^2 + 1$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u'$$

czyli:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$$

a więc:

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt{(x^2 + 1)^2}}$$

Ćwiczenia.

395. Oblicz pochodną każdej z niżej podanych funkcji dwoma sposobami:

- 1) stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej;
- 2) wykonując wskazane działanie i następnie stosując twierdzenie o pochodnej sumy.

*) Dla $x = 0$ pochodna oczywiście nie istnieje.

Porównaj otrzymane wyniki.

- a) $y = (2x + 1)^2$ b) $y = (3x - 4)^3$
 c) $y = (x^2 - 6x - 1)^2$ d) $y = (x^3 - 2)^2$
 e) $y = (-2x^2 + x + 1)^3$ f) $y = (x^n + 1)^3$

*396. Oblicz pochodną funkcji:

- a) $y = \sqrt{x^5}$ b) $y = \sqrt[3]{x}$ c) $y = \sqrt{x}$
 d) $y = \sqrt[3]{x^2}$ e) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ f) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$
 g) $y = x^2\sqrt{x}$ h) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$ i) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
 j) $y = \sqrt{3x - 2}$ k) $y = \sqrt{x^2 + 4}$
 l) $y = \sqrt{x^2 - x + 2}$ m) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$
 n) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ o) $y = \sqrt[3]{x^n + 1}$
 p) $y = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ q) $y = \sqrt{\frac{x + 2}{3}}$
 r) $y = \sqrt{\frac{x - 3}{x + 3}}$ s) $y = \sqrt[3]{(8x - 5)^2}$
 t) $y = \sqrt[5]{(3x + 1)^3}$ u) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}$

*397. Oblicz pochodną funkcji:

- a) $y = x + \sqrt{x^2 + 8}$ b) $y = x^2 - \sqrt[3]{x^2 - 1}$
 c) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ d) $y = (1 + \sqrt{x})^3$

398. Dla jakich wartości x pochodna funkcji:

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

przybiera wartość: a) dodatnią, b) ujemną, c) równą zero?

*399. Wykazać, że pochodna funkcji: $y = x - \sqrt{x^2 + 3}$ jest różna od 0 dla każdej wartości x .

*400. Wykazać, że pochodna funkcji: $y = x - \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ jest różna od 0 dla każdej wartości x .

*401. Dana jest funkcja:

$$y = \sqrt{x^2 + 8}$$

Udowodnić, że dla każdego x funkcja ta spełnia warunek:

$$y y' - x = 0$$

*402. Dana jest funkcja:

$$y = \sqrt{3x^2 + 1}$$

Udowodnić, że dla każdego x funkcja ta spełnia warunek:

$$y y' - 3x = 0$$

*403. Dana jest funkcja:

$$y = \sqrt{2px} \quad (p > 0)$$

Udowodnić, że funkcja dla każdego $x > 0$ ta spełnia warunek:

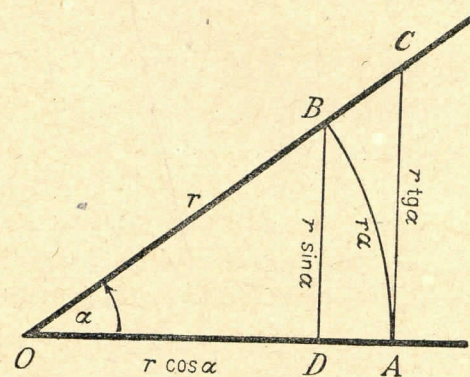
$$y y' - p = 0$$

(M)

§ 35. Pochodne funkcji trygonometrycznych.

Granica stosunku $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ dla $\alpha \rightarrow 0$.

Przede wszystkim udowodnimy pewne twierdzenie pomocnicze, z którego skorzystamy w dalszych naszych rozważaniach



Rys. 33.

Wykreślamy (rys. 33) wycinek kołowy OAB o promieniu r i kącie ostrym AOB , którego miara łukowa wynosi α . W punkcie

A wystawiamy prostopadłą do OA , przecinającą przedłużenie promienia OB w punkcie C ; z punktu B wystawiamy prostopadłą do OA , przecinającą OA w punkcie D . Utworzyły się dwa trójkąty prostokątne: OBD i OCA , z których pierwszy ma pole mniejsze, a drugi większe od pola wycinka OAB . Oznaczmy pole wycinka kołowego OAB przez P , a pola trójkątów OBD i OCA odpowiednio przez P_1 i P_2 . Mamy:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot OD \cdot BD = \frac{1}{2} r \cos a \cdot r \sin a = \frac{1}{2} r^2 \cos a \sin a$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CA = \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} a = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} a$$

Aby obliczyć pole wycinka kołowego OAB , zauważmy, że pole to tyle razy jest mniejsze od pola koła o promieniu r , ile razy kąt a jest mniejszy od kąta pełnego, tj. od 2π . Możemy więc napisać:

$$P : \pi r^2 = a : 2\pi$$

skąd otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2} r^2 a$$

Uwzględniając, że

$$P_1 < P < P_2$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} r^2 \cos a \sin a < \frac{1}{2} r^2 a < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} a$$

czyli:

$$\cos a \sin a < a < \operatorname{tg} a$$

Dzieląc przez $\sin a$ dostajemy nierówność:

$$(26) \quad \cos a < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a}$$

Nierówność (26) wyprowadziliśmy zakładając, że a jest kątem ostrym dodatnim. Nierówność ta spełnia się jednak i w tym przypadku, gdy a jest kątem ostrym ujemnym; wynika to

z uwagi, że $\frac{-a}{\sin(-a)} = \frac{a}{\sin a}$ oraz $\cos(-a) = \cos a$.

Gdy $a \rightarrow 0$, wówczas $\cos a \rightarrow 1$ i zarazem $\frac{1}{\cos a} \rightarrow 1$. Wobec nierówności (26), łatwo stąd wynika, że także

$$\frac{a}{\sin a} \rightarrow 1, \text{ gdy } a \rightarrow 0.$$

Skoro $\frac{a}{\sin a} \rightarrow 1$, gdy $a \rightarrow 0$, zatem także

$$\frac{\sin a}{a} \rightarrow 1, \text{ gdy } a \rightarrow 0.$$

Udowodniliśmy więc wzór:

$$(27) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = 1$$

Pochodne funkcji: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Wyprowadzimy teraz wzór na pochodną funkcji $y = \sin x$. Mamy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

Stosując znany z trygonometrii wzór na różnicę sinusów możemy napisać:

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Dzieląc obie strony przez Δx otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x}$$

lub też

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Położmy $\frac{\Delta x}{2} = a$. Możemy wówczas napisać:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin a}{a} \cdot \cos(x + a)$$

Gdy $\Delta x \rightarrow 0$, wówczas także $\alpha \rightarrow 0$, zatem $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ oraz $\cos(x + \alpha) \rightarrow \cos x$. Uwzględniając to, otrzymujemy:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x$$

czyli:

$$y' = \cos x$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = \sin x$ wyraża się wzorem: $y' = \cos x$.)*

Wyprowadzimy teraz wzór na pochodną funkcji $y = \cos x$.

Ponieważ $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$, zatem funkcję $y = \cos x$ możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = \sin u \quad \text{i} \quad u = \frac{1}{2}\pi - x$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = \cos u \cdot u'$$

Uwzględniając, że $\cos u = \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$ oraz że $u' = -1$, dostajemy ostatecznie:

$$y' = -\sin x$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = \cos x$ wyraża się wzorem: $y' = -\sin x$.

Rozważmy teraz funkcję $y = \operatorname{tg} x$, czyli $y = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funkcja ta jest określona oczywiście tylko dla takich wartości zmiennej x , dla których $\cos x \neq 0$. Przyjmując, że x oznacza taką właśnie wartość, z łatwością obliczamy pochodną funkcji opierając się na twierdzeniu o pochodnej ilorazu. Otrzymujemy:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

*) Zarówno w tym jak i w następnych twierdzeniach należy pamiętać, że x oznacza łukową miarę kąta.

czyli:

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

a więc (wobec znanej tożsamości: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) mamy:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = \operatorname{tg} x$ wyraża się wzorem:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

W podobny zupełnie sposób możemy wyprowadzić wzór na pochodną funkcji $y = \operatorname{cotg} x$, czyli $y = \frac{\cos x}{\sin x}$. Funkcja ta jest określona oczywiście tylko dla takich wartości zmiennej x , dla których $\sin x \neq 0$. Przyjmując, że x oznacza taką właśnie wartość, otrzymujemy:

$$y' = \frac{\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

czyli:

$$y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

a więc:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Pochodna funkcji $y = \operatorname{cotg} x$ wyraża się wzorem:

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Przykłady:

1. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \sin 5x$$

Funkcję tę możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = \sin u \quad \text{i} \quad u = 5x$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = \cos u \cdot u'$$

czyli:

$$y' = 5 \cos 5x$$

2. Znaleźć pochodną funkcji:

$$y = \operatorname{tg}^3 x$$

Funkcję tę możemy uważać za złożoną z funkcji:

$$y = u^3 \quad \text{i} \quad u = \operatorname{tg} x$$

Stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dostajemy:

$$y' = 3u^2 \cdot u'$$

czyli:

$$y' = 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x}$$

Pochodna istnieje oczywiście tylko dla takich wartości zmiennej x , dla których $\cos x \neq 0$.

Ćwiczenia.

404. Oblicz pochodną funkcji:

a) $y = \cos 3x$

b) $y = 2 \sin x + 3 \cos x$

c) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

d) $y = \frac{1}{\cos x}$

e) $y = \frac{1}{\sin x}$

f) $y = \sin^4 x$

g) $y = 1 + \operatorname{tg} 2x$

h) $y = 3 \sin x \cos x$

i) $y = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x$

j) $y = \sin^2 x - 2 \sin x + 4$

405. Oblicz pochodną funkcji:

a) $y = \sin^2 5x$ b) $y = \cos^3 2x$ c) $y = \frac{2}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}$

406. Udowodnić, że funkcja $y = \sin^2 x$ dla każdej wartości x spełnia warunek:

$$(y')^2 = 4y(1 - y)$$

*407. Opierając się na wzorze:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = 1$$

oblicz:

a) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} a}{a}$

b) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin 3a}{a}$

c) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a}{a}$

[M]

§ 36. Pochodne wyższych rzędów.

Określenie pochodnych wyższych rzędów.

Pochodna funkcji $y = f(x)$ jest sama również funkcją x ; jeżeli ta funkcja $f'(x)$ posiada także pochodną, wówczas tę pochodną nazywamy drugą pochodną funkcji $f(x)$ i oznaczamy ją przez $f''(x)$ lub y'' . W podobny zupełnie sposób określamy trzecią pochodną $f'''(x)$ lub y''' , czwartą pochodną itd.

Przykłady:

1. Mając funkcję: $y = x^4$, obliczmy pierwszą, drugą i trzecią jej pochodną. Otrzymujemy:

$$y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2, \quad y''' = 24x$$

2. Obliczmy kolejne pochodne funkcji: $y = \sin x$. Otrzymujemy:

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(IV)} = \sin x \text{ itd.}$$

Przykład zastosowania drugiej pochodnej w fizyce.

Podobnie jak pierwsza pochodna, druga pochodna również znajduje zastosowanie w wielu zagadnieniach fizycznych. Wyjaśnimy to na prostym przykładzie.

Niechaj punkt materialny P porusza się po linii prostej ruchem określonym przez równanie:

$$(27) \quad s = f(t)$$

przy czym s oznacza drogę, a t odpowiedni czas.

Wiemy, że pierwsza pochodna funkcji (27) określa prędkość jako funkcję czasu. Oznaczając prędkość przez v , możemy napisać:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

Jeżeli w chwili t prędkość wynosi v , a w chwili $t + \Delta t$ prędkość wynosi $v + \Delta v$, oznacza to, że w ciągu czasu Δt prędkość zmieniła się o Δv . Stosunek $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ nazywamy, jak wiemy, przyspieszeniem średnim (w czasie od chwili t do chwili $t + \Delta t$). Granicę, do której dąży $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, gdy $\Delta t \rightarrow 0$, nazywamy przyspieszeniem w chwili t .

Oznaczając przyspieszenie to przez w , możemy więc napisać:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

czyli:

$$w = s'' = f''(t)$$

Druga pochodna funkcji (27) określa więc przyspieszenie jako funkcję czasu.

Zastosujemy to rozważanie do przypadku ruchu ciała spadającego swobodnie. Mamy wówczas (oznaczając przyspieszenie ziemskie przez g):

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} v &= s' = gt \\ w &= s'' = g \end{aligned}$$

W rozpatrywanym przypadku przyspieszenie jest oczywiście stałe i jest równe przyspieszeniu ziemskiemu.

Ćwiczenia.

408. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji:

a) $y = 3x - 4$

b) $y = x^2 - 2x + 5$

c) $y = x^3 - x^2 + x - 1$ d) $y = \frac{x-1}{x^2}$

e) $y = \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + d$

409. Oblicz cztery kolejne pochodne funkcji:

a) $y = \frac{1}{x}$

b) $y = \sin 2x$

*410. Wykazać, że druga pochodna funkcji:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

wyraża się wzorem:

$$y'' = f(x) \cdot g''(x) + 2 \cdot f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x)$$

Zakładamy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają pierwszą i drugą pochodną.

*411. Wykazać, że trzecia pochodna funkcji:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

wyraża się wzorem:

$$y''' = f(x) \cdot g'''(x) + 3 \cdot f'(x) \cdot g''(x) + 3 \cdot f''(x) \cdot g'(x) + f'''(x) \cdot g(x)$$

Zakładamy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają pierwsze trzy pochodne.

*412. Dana jest funkcja kwadratowa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wykazać, że wyrażenie:

$$\frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{(\Delta x)^2}$$

posiada wartość stałą (niezależną od x i Δx).

*413. Wykazać, że dla funkcji kwadratowej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

zachodzi wzór:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)$$

(x i h oznaczają dowolne liczby).

*414. Wykazać, że dla funkcji stopnia trzeciego:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

zachodzi wzór:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x)$$

415. Ciało porusza się po linii prostej ruchem, określonym przez równanie: $s = at + bt^2$, gdzie s oznacza drogę, t czas, a i b są stałe. Wykaż, że przyspieszenie jest stałe, i oblicz to przyspieszenie.

416. Ciało porusza się po linii prostej ruchem, określonym przez równanie: $s = at\sqrt{t}$, gdzie s oznacza drogę, t czas, a jest stałe.

1°. Wykaż, że energia kinetyczna*) tego ciała jest wprost proporcjonalna do czasu.

2°. Wykaż, że przyspieszenie tego ciała jest odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego czasu.

*) Przez energię kinetyczną rozumiemy, jak wiadomo, wyrażenie: $\frac{1}{2}mv^2$, gdzie m oznacza masę, a v prędkość danego ciała.

ROZDZIAŁ VII

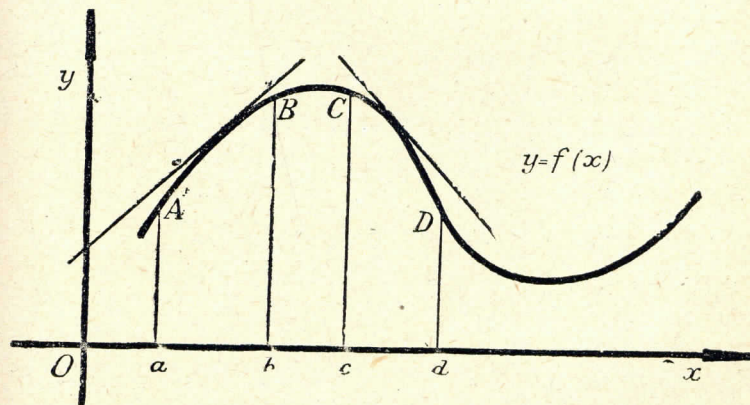
Zastosowanie pochodnej do badania funkcji.

(K) (H) (M)

§ 37. Znak pochodnej a zmienność funkcji.

Znaczenie znaku pochodnej.

Krzywa na rys. 34 jest obrazem geometrycznym pewnej funkcji $y = f(x)$, o której zakładamy, że posiada pochodną dla każdej wartości zmiennej (krzywa posiada styczną w każdym punkcie).



Rys. 34.

Weźmy pod uwagę łuk $\widehat{AB}$ krzywej, którego końcom A i B odpowiadają odcięte a i b . Z rysunku widzimy, że jeżeli w dowolnym punkcie obranym na łuku $\widehat{AB}$ wykreślimy styczną do krzywej, to styczna ta tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt ostry, a więc posiada współczynnik kątowy dodatni. A zatem pochodna $f'(x)$ jest dodatnia w każdym punkcie należącym do przedziału (a, b) . Z drugiej strony spostrzegamy, że w przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ jest rosnąca.

Weźmy teraz pod uwagę łuk $\widehat{CD}$ naszej krzywej, którego końcom C i D odpowiadają odcięte c i d . Jeżeli w którymkolwiek punkcie obranym na łuku $\widehat{CD}$ wykreślimy styczną do krzywej, to styczna ta tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt rozwarty, a więc posiada współczynnik kątowy ujemny. A zatem pochodna $f'(x)$ jest ujemna w każdym punkcie należącym do przedziału (c, d) . Z drugiej strony spostrzegamy, że w przedziale (c, d) funkcja $f(x)$ jest malejąca.

Rys. 34 unaocznia poglądowo następujące twierdzenia, które dają się też udowodnić zupełnie ściśle (a więc niezależnie od graficznego przedstawienia funkcji):

I. Jeżeli pochodna danej funkcji jest w pewnym przedziale dodatnia, wówczas funkcja ta jest w tym przedziale rosnąca.

II. Jeżeli pochodna danej funkcji jest w pewnym przedziale ujemna, wówczas funkcja ta jest w tym przedziale malejąca.

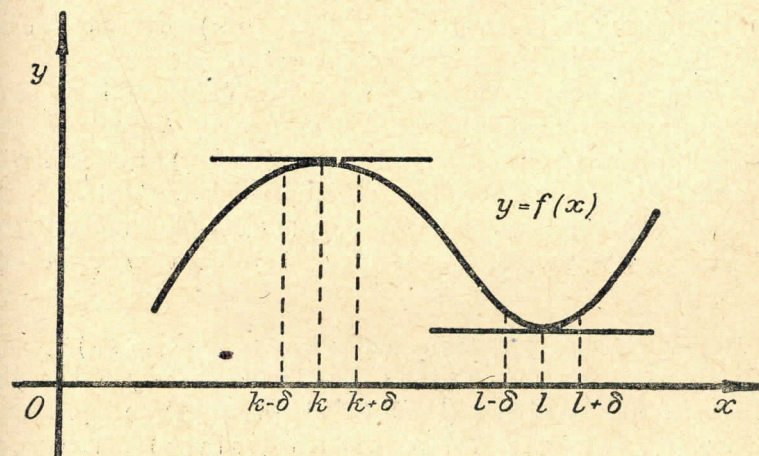
Twierdzenia te zachowują swoją moc i wtedy, gdy pochodna przybiera wartość równą 0 w skończonej ilości punktów danego przedziału.

Z twierdzeń I i II wyprowadzimy teraz ważne wnioski.

Maximum i minimum.

Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, posiadająca pochodną dla każdej wartości zmiennej. Załóżmy, że w pewnym punkcie k pochodna tej funkcji równa jest 0 i że na lewo od k pochodna jest dodatnia, a na prawo od k ujemna. Przypadek taki wyobraża

rys. 35. Wartości $x = k$ odpowiada styczna równoległa do osi x -ów; dla $x < k$ (i dostatecznie bliskiego k) styczna tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt ostry; dla $x > k$ (i dostatecznie bliskiego k) styczna tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt rozwarty.



Rys. 35.

Założenia nasze możemy sprecyzować w taki sposób:

Istnieje taki przedział $(k - \delta, k + \delta)$, czyli — jak mówimy — takie otoczenie punktu k , że pochodna $f'(x)$ jest dodatnia wewnątrz przedziału $(k - \delta, k)$, jest równa 0 w punkcie k , jest ujemna wewnątrz przedziału $(k, k + \delta)$.

Z naszych założeń wynika natychmiast, w myśl tw. I i II, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziale $(k - \delta, k)$ i malejąca w przedziale $(k, k + \delta)$.

Wypływa stąd oczywisty wniosek, że funkcja $f(x)$ przyjmuje dla $x = k$ wartość większą niż w każdym innym punkcie przedziału $(k - \delta, k + \delta)$. Właśność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $f(x)$ posiada (osiąga) maximum przy $x = k$ i że to maximum równe jest $f(k)$.

Załóżmy teraz, że w pewnym punkcie l pochodna naszej funkcji równa jest 0, ale że tym razem na lewo od l pochodna jest ujemna, a na prawo od l dodatnia. Także ten przypadek jest uwidoczniony na rys. 35. Wartości $x = l$ odpowiada styczna równoległa do osi x -ów; dla $x < l$ (i dostatecznie bliskiego l) styczna tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt rozwarty; dla $x > l$ (i dostatecznie bliskiego l) styczna tworzy z dodatnim kierunkiem osi x -ów kąt ostry.

Założenia nasze możemy sprecyzować w taki sposób: Istnieje takie otoczenie $(l - \delta, l + \delta)$ punktu l , że pochodna $f'(x)$ jest ujemna wewnątrz przedziału $(l - \delta, l)$, jest równa 0 w punkcie l , jest dodatnia wewnątrz przedziału $(l, l + \delta)$.

Z naszych założeń wynika natychmiast, że funkcja $f(x)$ jest malejąca w przedziale $(l - \delta, l)$ i rosnąca w przedziale $(l, l + \delta)$.

Wypływa stąd oczywisty wniosek, że funkcja $f(x)$ przyjmuje dla $x = l$ wartość mniejszą niż w każdym innym punkcie przedziału $(l - \delta, l + \delta)$. Własność tę wyrażamy mówiąc, że funkcja $f(x)$ posiada (osiąga) minimum przy $x = l$ i że to minimum równe jest $f(l)$.

Powyższe rozważania możemy streścić w postaci dwóch twierdzeń następujących:

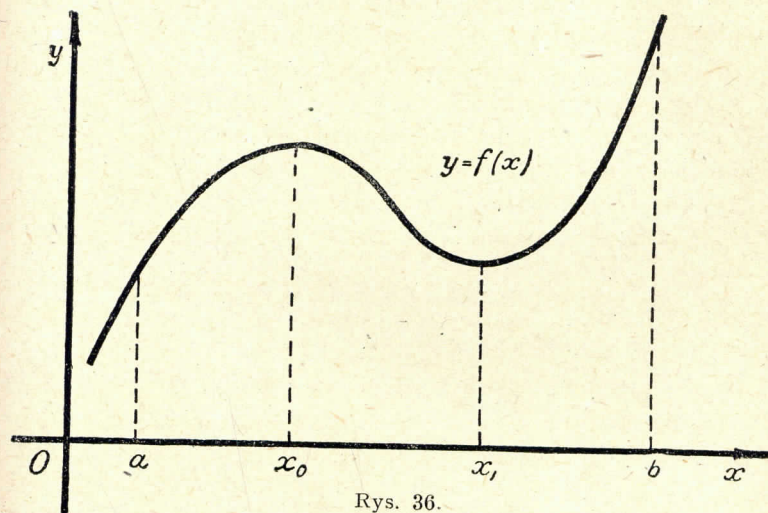
III. Jeżeli pochodna funkcji przybiera w pewnym punkcie x_0 wartość równą 0, przy czym pochodna ta na lewo od x_0 jest dodatnia, a na prawo od x_0 ujemna, wówczas funkcja $f(x)$ posiada maximum przy $x = x_0$.

IV. Jeżeli pochodna funkcji przybiera w pewnym punkcie x_0 wartość równą 0, przy czym pochodna ta na lewo od x_0 jest ujemna, a na prawo od x_0 dodatnia, wówczas funkcja $f(x)$ posiada minimum przy $x = x_0$.

Maximum i minimum obejmujemy wspólną nazwą: ekstremum*).

*) Po łacinie „extremum” znaczy: „skrajne”.

Rys. 36 poucza, że maximum, które funkcja posiada dla pewnego x_0 , nie jest konieczne największą wartością, jaką funkcja w ogóle przybierać może; poza otoczeniem liczby x_0 mogą bowiem zdarzyć się jeszcze większe wartości funkcji. Podobnie minimum nie jest konieczne najmniejszą wartością, jaką funkcja w ogóle może przybierać.



Rys. 36.

Funkcja może nie posiadać żadnego ekstremum, może posiadać kilka ekstremów lub nawet nieskończenie wiele. Np. funkcja $y = \cos x$ (patrz rys. 14) posiada nieskończenie wiele maximów i nieskończenie wiele minimów.

Z twierdzeń wyżej uzasadnionych korzystamy, gdy chcemy zbadać, jak zmienia się wartość danej funkcji $f(x)$ przy zmianie x . Liczne przykłady zastosowania pochodnej do badania funkcji poznamy w §§ następnych.

Ćwiczenia.

417. Dana jest funkcja $y = x^2$.

- 1°. Sporządź wykres funkcji i z tego wykresu odczytaj, dla jakich wartości x pochodna jest dodatnia, a dla jakich ujemna.
- 2°. Otrzymane wyniki sprawdź rachunkiem.

418. Dana jest funkcja $y = (x - 5)^2$.

1^o. Sporządź wykres funkcji i z tego wykresu odczytaj, dla jakich wartości x pochodna jest dodatnia, a dla jakich ujemna.

2^o. Otrzymane wyniki sprawdź rachunkiem.

419. Dana jest funkcja $y = -2x^2$.

1^o. Sporządź wykres funkcji i z tego wykresu odczytaj, dla jakich wartości x pochodna jest dodatnia, a dla jakich ujemna.

2^o. Otrzymane wyniki sprawdź rachunkiem.

420. Dana jest funkcja $y = x^2 - 8x + 21$.

1^o. Dla jakich wartości x pochodna tej funkcji jest dodatnia, a dla jakich ujemna?

2^o. Zilustrować otrzymane wyniki na wykresie funkcji.

421. Dana jest funkcja $y = -x^2 - 2x + 2$.

1^o. Dla jakich wartości x pochodna tej funkcji jest dodatnia, a dla jakich ujemna?

2^o. Zilustrować otrzymane wyniki na wykresie funkcji.

422. Dana jest funkcja $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

1^o. Dla jakich wartości x pochodna tej funkcji jest dodatnia, a dla jakich ujemna?

2^o. Zilustrować otrzymane wyniki na wykresie funkcji.

3^o. Czy dana funkcja posiada ekstremum i jakie?

423. Z wykresu funkcji $y = \sin x$ odczytać, dla jakich wartości x osiąga ta funkcja maximum, a dla jakich minimum.

(K) (H) (M)

§ 38. Funkcja liniowa.

Zmienność funkcji liniowej.

Funkcją liniową nazywamy funkcję:

$$(1) \quad y = ax + b$$

gdzie a i b są liczbami stałymi. Obrazem geometrycznym funkcji liniowej jest linia prosta. Funkcja liniowa jest oczywiście ciągła i posiada pochodną dla każdej wartości x . Obliczając pochodną funkcji (1) otrzymujemy:

$$(2) \quad y' = a$$

Pochodna funkcji liniowej jest wielkością stałą.

Rozróżniamy trzy przypadki:

$$1) a > 0, \quad 2) a < 0, \quad 3) a = 0.$$

1) Załóżmy, że $a > 0$. Pochodna funkcji jest wówczas liczbą dodatnią dla każdej wartości zmiennej x . Wynika stąd, że funkcja (1) jest wówczas rosnąca.

Zbadajmy, jak zachowuje się funkcja (1), gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$.

Gdy x dąży do $+\infty$, wówczas — jak łatwo zauważyć — ax dąży do $+\infty$ (gdyż $a > 0$) i tak samo $ax + b$ czyli y dąży do $+\infty$.

Gdy zaś x dąży do $-\infty$, wówczas także ax dąży do $-\infty$ i tak samo $ax + b$ czyli y dąży do $-\infty$.

Widzimy więc, że gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, wówczas także y rośnie od $-\infty$ do $+\infty$. Zapisujemy to w następującej tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Załóżmy teraz, że $a < 0$. Pochodna funkcji jest wówczas liczbą ujemną dla każdej wartości zmiennej. Wynika stąd, że funkcja (1) przy $a < 0$ jest malejąca.

Zbadajmy, jak zachowuje się funkcja (1), gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$.

Gdy x dąży do $+\infty$, wówczas — jak łatwo zauważyć — ax dąży do $-\infty$ (gdyż $a < 0$) i tak samo $ax + b$ czyli y dąży do $-\infty$.

Gdy zaś x dąży do $-\infty$, wówczas ax dąży do $+\infty$, a zatem także $ax + b$ czyli y dąży do $+\infty$.

Widzimy więc, że gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, wówczas y maleje od $+\infty$ do $-\infty$. Zapisujemy to w następującej tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

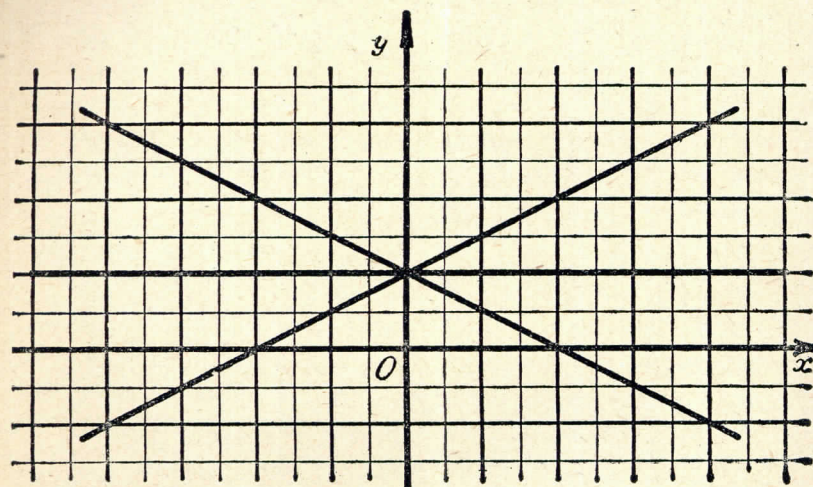
3) Gdy $a = 0$, wówczas funkcja (1) przybiera dla każdej wartości x tę samą wartość b , jest więc stała.

Wykres funkcji liniowej.

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta, której współczynnik kątowy a jest równy pochodnej funkcji.

Rys. 37 przedstawia wykresy funkcji liniowych:

$$y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad y = 1.$$



Rys. 37.

Wykresy funkcji liniowych:

$$y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad y = 1.$$

Pochodna pierwszej z tych funkcji jest równa $\frac{1}{2}$; jej wykresem jest prosta, której współczynnik kątowy wynosi $\frac{1}{2}$. Pochodna drugiej z tych funkcji jest równa $-\frac{1}{2}$; wykresem jej jest prosta, której współczynnik kątowy wynosi $-\frac{1}{2}$. Trzecia funkcja $y = 1$ jest stała, posiada więc pochodną równą zero; wykresem tej funkcji jest prosta równoległa do osi x -ów, a więc mająca współczynnik kątowy równy zero.

Ćwiczenia.

424. Dana jest funkcja:

a) $y = \frac{1}{3}x - 2$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = 3 - x$

d) $y = \frac{x+1}{2}$

e) $y = -\frac{3}{8}x + \frac{8}{3}$

f) $y = x\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)$

g) $y = \frac{a-2x}{3}$

h) $y = (1 + k^2)x + (1 - k^2)$

Jak zmienia się każda z tych funkcji, gdy x rośnie, a mianowicie:

a) od 0 do 18?

b) od -5 do $\frac{1}{3}$?

c) od $-\frac{7}{2}$ do $\frac{7}{2}$?

d) od -1 do $+\infty$?

e) od $-\infty$ do $+\infty$?

f) od -1 do $(\sqrt{2} - 1)$?

g) od a do $(a + 2)$?

h) od 1 do $(1 + \frac{1}{1+k^2})$?

Podaj odpowiednie wykresy.

425. Na odcinku AB równym a obrano punkt C .

1°. Wyraż różnicę kwadratów odcinków AC i CB jako funkcję odcinka AC .

2°. Jak zmienia się ta różnica kwadratów, gdy przy stałym a zmienia się odcinek AC ?

426. W trójkąt równoramienny o podstawie równej a i wysokości równej h wpisano prostokąt, którego dwa wierzchołki położone są na podstawie trójkąta.

1°. Wyraż obwód y tego prostokąta jako funkcję jego wysokości x .

2°. Zbadaj, jak zmienia się y , gdy (przy stałym a i h) zmienia się x . Rozważ trzy możliwości:

a) $h > a$

β) $h = a$

γ) $h < a$

427. Znaleźć funkcję liniową, która dla $x = 3$ przybiera wartość $y = 2\frac{1}{4}$, a dla $x = 6$ przybiera wartość $y = 4\frac{1}{4}$.

Jak zmienia się y , gdy x rośnie od -1 do 0 ?

428. Znaleźć funkcję liniową, która dla $x = \alpha$ przybiera wartość $y = A$, a dla $x = \beta$ przybiera wartość $y = B$. (Zakładamy, że $\alpha \neq \beta$).

429. Temperatura $x^\circ \text{C}$ wyraża się w skali Fahrenheita przez $y^\circ \text{F}$.

1^o. Wyraż y jako funkcję x .

2^o. Jak zmienia się y , gdy x rośnie od 35 do 40?

430. Długość słupka rtęci w termoskopie wynosi 3 cm przy temperaturze -10°C , a 15 cm przy temperaturze $+38^\circ \text{C}$.

1^o. Wyraż długość słupka rtęci y cm jako funkcję temperatury $x^\circ \text{C}$.

2^o. Jak zmienia się y , gdy x zmienia się od -20 do 40 ?

431. Udowodnić następujące twierdzenie:

Jeżeli iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

jest wielkością stałą (niezależną od x i Δx), wówczas funkcja $f(x)$ jest funkcją liniową.

Wskazówka. Połóżmy: $x = 0$, $\Delta x = u$; mamy wówczas:

$$\frac{f(u) - f(0)}{u} = a, \text{ a więc } f(u) = au + f(0).$$

(K) (H) (M)

§ 39. Funkcja kwadratowa.

Zmienność funkcji kwadratowej i jej wykres.

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję:

$$(3) \quad y = ax^2 + bx + c$$

gdzie a , b i c są liczbami stałymi, przy czym $a \neq 0$. Funkcja kwadratowa jest ciągła i posiada pochodną dla każdej wartości x , a mianowicie:

$$(4) \quad y' = 2ax + b$$

Pochodna funkcji kwadratowej jest więc funkcją liniową.

Rozróżnimy dwa przypadki:

$$1) a > 0, \quad 2) a < 0.$$

$$1) \quad a > 0$$

Założmy, że $a > 0$. Zbadamy przede wszystkim, dla jakich wartości x pochodna y' przybiera wartość dodatnią, ujemną, równą zero.

Mamy:

$$2ax + b < 0, \quad y' < 0, \quad \text{gdy } x < -\frac{b}{2a}$$

$$2ax + b = 0, \quad y' = 0, \quad \text{gdy } x = -\frac{b}{2a}$$

$$2ax + b > 0, \quad y' > 0, \quad \text{gdy } x > -\frac{b}{2a}$$

Wynika stąd, że gdy x rośnie od $-\infty$ do $-\frac{b}{2a}$, wówczas y maleje (gdyż $y' < 0$), gdy zaś x rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do $+\infty$, wówczas y wzrasta (gdyż $y' > 0$). Dla $x = -\frac{b}{2a}$ osiąga więc y minimum, które jest zarazem najmniejszą wartością, jaką dana funkcja w ogóle przybierać może.

Obliczmy wartość tego minimum:

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c$$

czyli po wykonaniu działań:

$$y = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Wyrażenie: $b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem funkcji kwadratowej (3) i oznaczamy liczbą D . Posługując się tym oznaczeniem możemy więc powiedzieć, że:

jeżeli $a > 0$, to przy $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja (3) osiąga minimum, które równe jest $-\frac{D}{4a}$.

Zbadajmy teraz, jak zachowuje się funkcja kwadratowa (3), gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$.

Dla $x \neq 0$ możemy napisać:

$$(5) \quad y = ax^2 + bx + c = x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)$$

Gdy x dąży do $+\infty$, wówczas — jak łatwo zauważyć — wyrażenia: $\frac{b}{x}$ i $\frac{c}{x^2}$ dążą do 0, a zatem wyrażenie: $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ dąży do granicy równej a , z czego (wobec założenia, że $a > 0$) wynika, że y dąży do $+\infty$. W podobny zupełnie sposób wykazujemy, że gdy x dąży do $-\infty$, wówczas y dąży do $+\infty$.

Powyższe rozważania prowadzą nas do takiego wniosku:

Gdy x rośnie od $-\infty$ do $-\frac{b}{2a}$ i następnie rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do $+\infty$, wówczas y maleje od $+\infty$ do $-\frac{D}{4a}$ i następnie wzrasta od $-\frac{D}{4a}$ do $+\infty$.

Zapisujemy to w następującej tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Przykład:

Dana jest funkcja kwadratowa:

$$(6) \quad y = x^2 - 4x + 5$$

Należy zbadać, jak zmienia się y , gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, i podać wykres funkcji.

Mamy tu: $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$, $D = b^2 - 4ac = -4$.

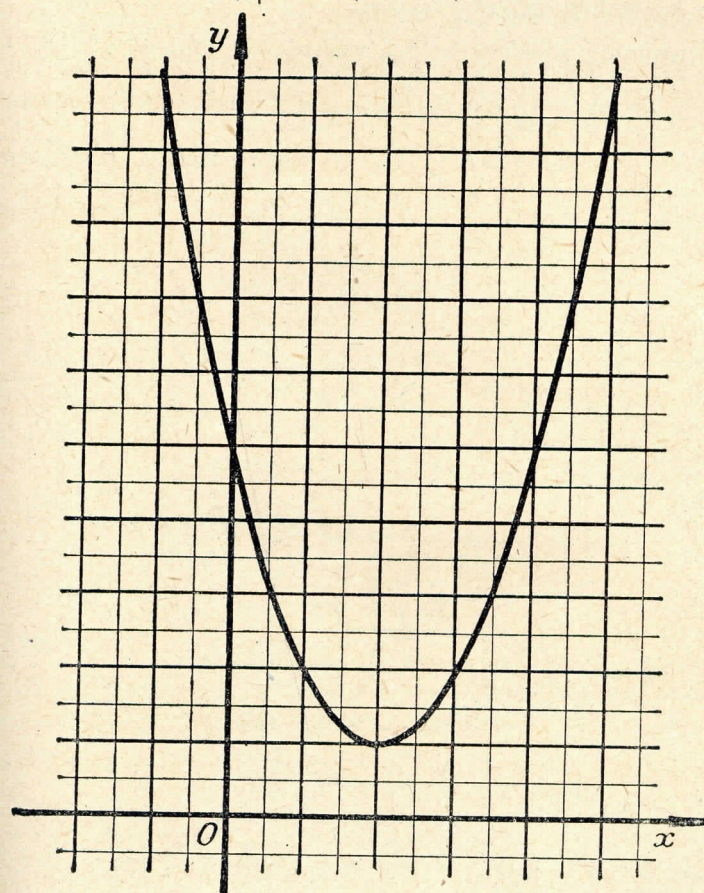
Ponieważ $a > 0$, zatem dana funkcja posiada minimum; obliczając wartość x , przy której funkcja osiąga minimum, oraz wartość y tego minimum, otrzymujemy:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = -\frac{D}{4a} = \frac{4}{4} = 1$$

Przebieg zmienności badanej funkcji:

x	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Rys. 38.

Wykres funkcji kwadratowej: $y = x^2 - 4x + 5$

Wykres badanej funkcji mamy na rys. 38. Wykres ten jest parabolą*), której oś jest równoległa do osi y -ów. Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x = 2$, $y = 1$. Odcięta wierzchołka równa jest tej wartości zmiennej x , dla której funkcja osiąga minimum, a rzędna wierzchołka równa jest wartości tego minimum. Przy kreśleniu wykresu wygodnie jest nasamprzód wyznaczyć wierzchołek paraboli, a następnie inne jej punkty na lewo i na prawo od osi paraboli.

Zauważmy jeszcze, że dla wartości x , mniejszych od $-\frac{b}{2a}$ i większych od $-\frac{b}{2a}$ o tę samą liczbę δ , funkcja kwadratowa (3) przybiera jednakowe wartości. W samej rzeczy, podstawiając we wzorze (3): $x = -\frac{b}{2a} - \delta$ albo $x = -\frac{b}{2a} + \delta$, otrzymujemy:

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} - \delta \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} - \delta \right) + c$$

albo

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} + \delta \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} + \delta \right) + c$$

co w wyniku daje tę samą wartość:

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + a\delta^2 = -\frac{D}{4a} + a\delta^2$$

$$\underline{2) \quad a < 0}$$

Zalóżmy teraz, że $a < 0$. Mamy wówczas:

$$2ax + b < 0, \quad y' < 0, \quad \text{gdy } x > -\frac{b}{2a}$$

$$2ax + b = 0, \quad y' = 0, \quad \text{gdy } x = -\frac{b}{2a}$$

$$2ax + b > 0, \quad y' > 0, \quad \text{gdy } x < -\frac{b}{2a}$$

*) Metodą geometrii analitycznej można dowieść, że obrazem każdej funkcji kwadratowej jest parabola.

Wynika stąd, że gdy x rośnie od $-\infty$ do $-\frac{b}{2a}$, wówczas y wzrasta (gdyż $y' > 0$), a gdy x rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do $+\infty$, wówczas y maleje (gdyż $y' < 0$). Dla $x = -\frac{b}{2a}$ osiąga więc y maximum, które jest zarazem największą wartością, jaką dana funkcja w ogóle przybierać może.

Wartość tego maximum obliczamy podstawiając we wzorze (3): $x = -\frac{b}{2a}$. Otrzymujemy:

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

czyli: oznaczając, jak wyżej, wyróżnik $b^2 - 4ac$ przez D , otrzymujemy:

$$y = -\frac{D}{4a}$$

Wykazaliśmy więc, że:

jeżeli $a < 0$, to przy $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja (3) osiąga maximum, które równe jest $-\frac{D}{4a}$.

Zbadajmy teraz, jak zachowuje się funkcja kwadratowa (3), gdy x dąży do $+\infty$ i gdy x dąży do $-\infty$. Posługujemy się, jak wyżej, wzorem (5).

Gdy x dąży do $+\infty$, wówczas wyrażenie: $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ dąży do granicy równej a , z czego wynika, że y dąży do $-\infty$ (gdyż $a < 0$). W podobny sposób wykazujemy, że gdy x dąży do $-\infty$, wówczas y dąży do $-\infty$.

Powyższe rozważania prowadzą nas do takiego wniosku:

Gdy x rośnie od $-\infty$ do $-\frac{b}{2a}$ i następnie rośnie od $-\frac{b}{2a}$ do $+\infty$, wówczas y wzrasta od $-\infty$ do $-\frac{D}{4a}$, a następnie maleje od $-\frac{D}{4a}$ do $-\infty$.

Zapisujemy to w następującej tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{D}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Przykład:

Dana jest funkcja kwadratowa:

$$(7) \quad y = -x^2 - 2x + 4$$

Należy zbadać, jak zmienia się y , gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, i podać wykres tej funkcji.

Mamy tu: $a = -1$, $b = -2$, $c = 4$, a więc
 $D = b^2 - 4ac = 20$

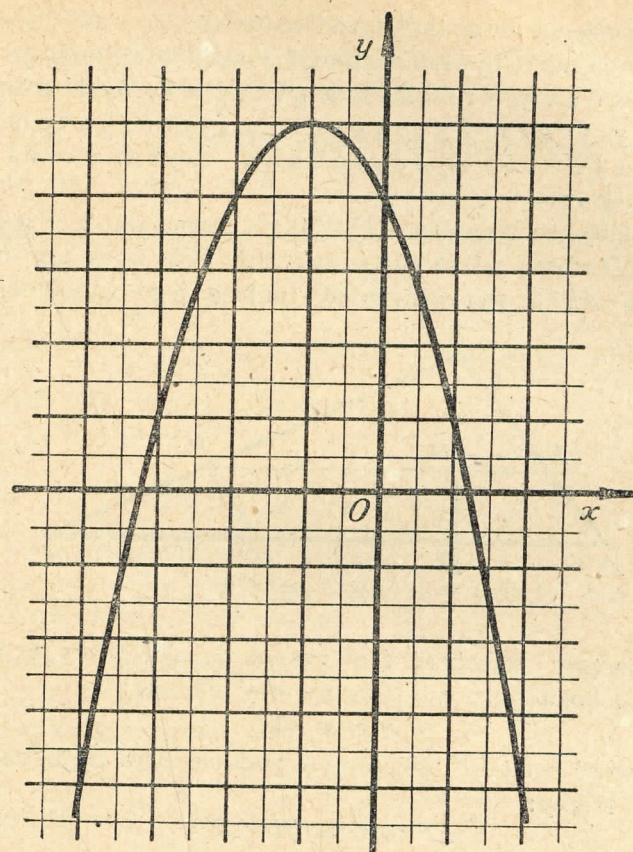
Ponieważ $a < 0$, zatem dana funkcja posiada maksimum; obliczając wartość x , przy której funkcja osiąga maximum, oraz wartość y tego maximum, otrzymujemy:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y = -\frac{D}{4a} = \frac{-20}{-4} = 5$$

Przebieg zmienności badanej funkcji możemy więc przedstawić za pomocą następującej tabelki:

x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$



Rys. 39.

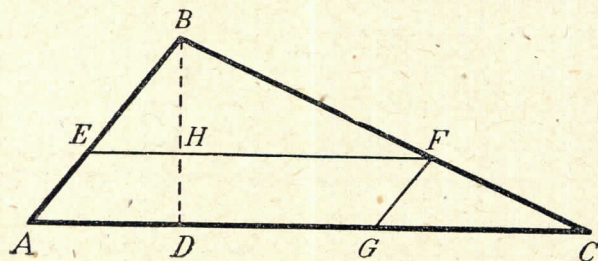
Wykres funkcji kwadratowej: $y = -x^2 - 2x + 4$

Na rys. 39 mamy wykres badanej funkcji. Wykres ten jest parabolą, której oś jest równoległa do osi y -ów i która stroną wypukłą zwrócona jest do góry. Wierzchołek paraboli ma współrzędne: $x = -1$, $y = 5$. Odcięta wierzchołka równa jest tej wartości zmiennej x , przy której funkcja osiąga maximum, a rzędna wierzchołka równa jest wartości tego maximum.

Rozwiążemy teraz kilka zadań, które sprowadzają się do wyznaczenia minimum lub maximum funkcji kwadratowej.

I. W dany trójkąt wpisać równoległobok mający jeden kąt wspólny z trójkątem, tak aby pole równoległoboku było możliwie największe.

Załóżmy, że podstawa AC trójkąta równa jest b , a jego wysokość BD równa jest h (patrz rys. 40). Pole wpisanego równoległoboku $AEFG$ jest oczywiście funkcją jego wysokości HD .



Rys. 40.

Oznaczmy wysokość HD równoległoboku przez x , a pole równoległoboku przez y . Możemy więc napisać:

$$(8) \quad y = x \cdot EF$$

Długość boku EF obliczamy z podobieństwa trójkątów ABC i EBF . Mamy:

$$EF : AC = BH : BD$$

czyli:

$$EF : b = (h - x) : h$$

skąd obliczamy:

$$(9) \quad EF = \frac{b(h - x)}{h}$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (8), otrzymujemy:

$$(10) \quad y = \frac{bx(h - x)}{h}$$

czyli:

$$(11) \quad y = -\frac{b}{h}x^2 + bx$$

Widzimy więc, że pole równoległoboku y jest funkcją kwadratową jego wysokości x . Zadanie nasze polega teraz na wyznaczeniu takiej wartości x , przy której funkcja osiąga maximum. Jest to możliwe, ponieważ współczynnik $-\frac{b}{h}$ przy x^2 jest ujemny.

Stosując twierdzenie ze str. 287, otrzymujemy:

$$x = \frac{h}{2}$$

Odpowiednią wartość y obliczamy najprościej, podstawiając we wzorze (11) $x = \frac{h}{2}$. Otrzymujemy:

$$y = -\frac{b}{h} \cdot \frac{h^2}{4} + \frac{bh}{2} = \frac{bh}{4}$$

Równoległobok wpisany w trójkąt ma największe pole, gdy jego wysokość równa jest połowie wysokości trójkąta; pole jego jest wtedy równe połowie pola trójkąta.

Zadanie, któreśmy rozwiązali, znajdujemy w VI księdze Elementów Euklidesa. Rozwiązane tam jest ono na drodze rozważań czysto geometrycznych.

II. Zbadać, który z prostokątów o danym obwodzie $2p$ ma największe pole.

Oznaczmy podstawę prostokąta przez x ; wysokość jego równa jest $p - x$. Niech pole prostokąta będzie y . Mamy wówczas:

$$(12) \quad y = x(p - x)$$

czyli:

$$(13) \quad y = -x^2 + px$$

Pole y prostokąta o stałym obwodzie jest więc funkcją kwadratową jego podstawy x . Zadanie nasze polega na wyznaczeniu takiej wartości x , przy której funkcja osiąga maximum. Jest to możliwe, ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny.

Stosując twierdzenie ze str. 287, otrzymujemy:

$$x = \frac{p}{2}$$

Gdy podstawa prostokąta jest równa $\frac{p}{2}$, wówczas także jego wysokość jest równa $\frac{p}{2}$, a zatem prostokąt jest kwadratem. Pole tego kwadratu wynosi $\frac{p^2}{4}$.

Ze wszystkich prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat.

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia, które znane już było Zenodorowi, greckiemu matematykowi z II wieku przed Chr.:

Ze wszystkich wielokątów o danej ilości boków i danym obwodzie największe pole ma wielokąt foremny.

III. Zbadać, który z trójkątów o danej podstawie a i danym obwodzie $2p$ ma największe pole*).

Oznaczmy jeden z nieznanych boków trójkąta przez x , drugi wynosi więc: $2p - a - x$. Niech pole trójkąta będzie y . Stosując wzór Herona, otrzymujemy:

$$(14) \quad y = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$$

Pole trójkąta y jest więc funkcją boku x . Iloczyn występujący pod znakiem pierwiastka zawiera dwa czynniki stałe: p i $p - a$. Wystarczy zatem zbadać funkcję pomocniczą:

$$(15) \quad z = (p-x)(a+x-p)$$

gdyż największej wartości z odpowiada również największa wartość y . Wykonując mnożenie po prawej stronie wzoru (15) i porządkując otrzymany wielomian według potęg zmiennej x , otrzymujemy:

$$(16) \quad z = -x^2 + (2p-a)x + p(a-p)$$

*, Zakładamy, że $p > a$.

Widzimy więc, że z jest funkcją kwadratową x . Funkcja ta posiada *maximum*, gdyż współczynnik przy x^2 jest *ujemny*. Aby wyznaczyć wartość x , przy której zachodzi *maximum*, stosujemy twierdzenie ze str. 287, otrzymujemy:

$$x = \frac{2p-a}{2} = p - \frac{a}{2}$$

Skoro jeden z nieznanych boków trójkąta wynosi: $p - \frac{a}{2}$, więc także drugi wynosi: $p - \frac{a}{2}$; trójkąt o największym polu jest więc *równoramienny*. Aby obliczyć to pole, podstawiamy we wzorze (14) $x = p - \frac{a}{2}$ i otrzymujemy:

$$y = \frac{a}{2} \sqrt{p(p-a)}$$

Ze wszystkich trójkątów o danej podstawie i danym obwodzie największe pole ma trójkąt równoramienny.

Twierdzenie to również było znane Zenodorowi.

IV. Dane są liczby: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Wyznaczyć liczbę x w taki sposób, aby wyrażenie:

$$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$$

miało wartość *najmniejszą*.

Oznaczmy powyższe wyrażenie przez y . Mamy więc:

$$(17) \quad y = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$$

czyli:

$$(18) \quad y = (x^2 - 2a_1x + a_1^2) + (x^2 - 2a_2x + a_2^2) + \dots + (x^2 - 2a_nx + a_n^2)$$

lub po przekształceniu:

$$(19) \quad y = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Widzimy więc, że y jest funkcją kwadratową x . Funkcja ta posiada *minimum*, gdyż współczynnik przy x^2 jest *dodatni*.

Aby wyznaczyć wartość x , przy której zachodzi minimum, stosujemy twierdzenie ze str. 283, otrzymujemy:

$$x = \frac{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{2n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Wyrażenie (17) ma więc wartość najmniejszą, gdy x jest równe średniej arytmetycznej liczb: $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Znak funkcji kwadratowej.

Na zakończenie naszych rozważań o funkcji kwadratowej

$$(20) \quad y = ax^2 + bx + c$$

zajmiemy się jeszcze zagadnieniem następującym:

Dla jakich wartości zmiennej x przybiera y wartość dodatnią, a dla jakich wartość ujemną?

Aby otrzymać odpowiedź na to pytanie, moglibyśmy rozwiązać nierówności kwadratowe:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{i} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

sposobem, jaki znamy z nauki poprzedniej. Możemy jednak także odpowiedź na powyższe pytanie wysnuć bezpośrednio z własności funkcji kwadratowej.

Rozróżnimy znowu dwa przypadki:

$$\underline{a > 0}$$

Przy $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja (20) osiąga minimum, którego wartość wynosi:

$$(21) \quad -\frac{D}{4a}$$

gdzie D oznacza wyróżnik danej funkcji: $D = b^2 - 4ac$.

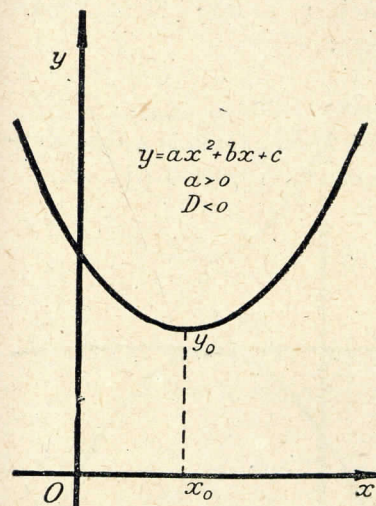
$$\underline{a < 0}$$

Przy $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja (20) osiąga maximum, którego wartość wynosi:

$$(21) \quad -\frac{D}{4a}$$

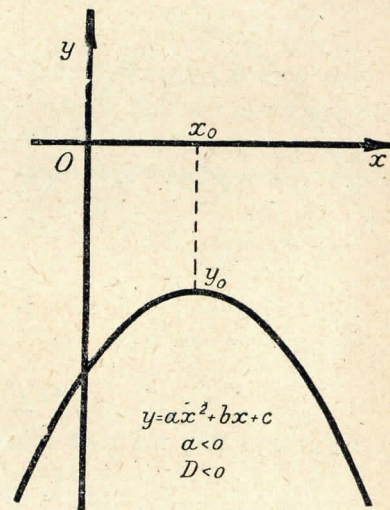
$$a) \quad \underline{D < 0}$$

Funkcja (20) nie posiada miejsc zerowych.



Rys. 41.

Przy $a > 0$ i $D < 0$ wartość (21) jest dodatnia, a ponieważ jest to najmniejsza wartość funkcji (20), więc w rozważanym przypadku przy każdej wartości x funkcja (20) przybiera wartość dodatnią (rys. 41).

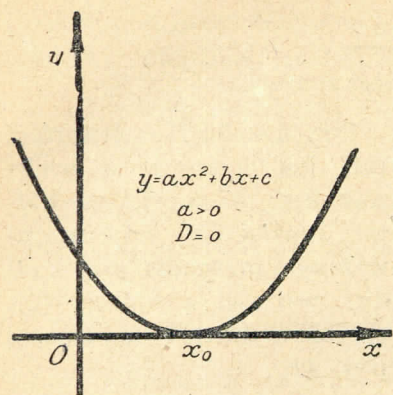


Rys. 42.

$$b) \quad \underline{D = 0}$$

Funkcja (20) posiada jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$



Rys. 43.

Przy $a > 0$ i $D = 0$ funkcja (20) przybiera wartość dodatnią przy wszystkich wartościach x , z wyjątkiem wartości:

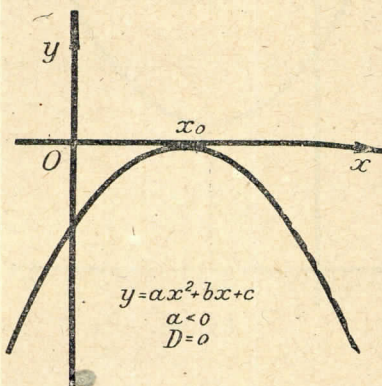
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

przy której funkcja osiąga minimum równe 0 (rys. 43).

Przy $a < 0$ i $D = 0$ funkcja (20) przybiera wartość ujemną przy wszystkich wartościach x , z wyjątkiem wartości:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

przy której funkcja osiąga maksimum równe 0 (rys. 44).



Rys. 44.

c) $D > 0$

Funkcja (20) ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

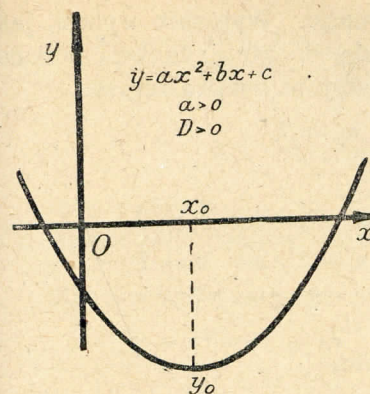
$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

Wartości x_1 i x_2 są rozmieszczone na osi x -ów symetrycznie względem wartości:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

a mianowicie:

o ile x_1 jest mniejsze od x_0 , o tyle x_2 jest większe od x_0 .



Rys. 45.

Przy $a > 0$ i $D > 0$ funkcja (20) ma znaki następujące (rys. 45):

gdy $x < x_1$ albo $x > x_2$, to $y > 0$
 gdy $x = x_1$ albo $x = x_2$, to $y = 0$
 gdy $x_1 < x < x_2$, to $y < 0$
 przy czym w punkcie $x = x_0$ funkcja (20) osiąga minimum.

Przykłady:

1. Należy zbadać znak funkcji:

$$y = 2x^2 - x + 3$$

dla różnych wartości zmiennej x .

Współczynnik przy x^2 jest dodatni, wyróżnik zaś wynosi, jak łatwo obliczyć: -23 , a więc jest liczbą ujemną. Wynika stąd, że przy każdej wartości x funkcja y przybiera wartość dodatnią.

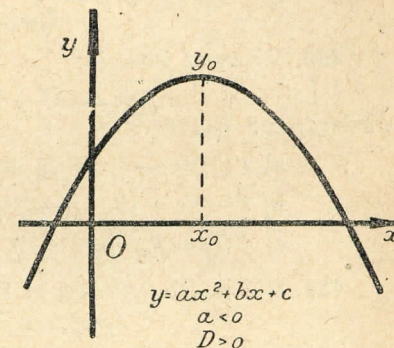
2. Należy zbadać znak funkcji:

$$y = x^2 - 9x + 14$$

dla różnych wartości zmiennej x .

Przy $a < 0$ i $D > 0$ funkcja (20) ma znaki następujące (rys. 46):

gdy $x < x_1$ albo $x > x_2$, to $y < 0$
 gdy $x = x_1$ albo $x = x_2$, to $y = 0$
 gdy $x_1 < x < x_2$, to $y > 0$
 przy czym w punkcie $x = x_0$ funkcja (20) osiąga maksimum.



Rys. 46.

Współczynnik przy x^2 jest dodatni. Wyróżnik wynosi, jak łatwo obliczyć: 25, a więc jest liczbą dodatnią; funkcja posiada zatem dwa miejsca zerowe. Obliczamy te miejsca zerowe:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 7.$$

Z powyższego wynika, że:

$$y > 0, \quad \text{gdy } x < 2 \text{ albo } x > 7$$

$$y = 0, \quad \text{gdy } x = 2 \text{ albo } x = 7$$

$$y < 0, \quad \text{gdy } 2 < x < 7$$

Ćwiczenia.

432. Wyznacz funkcję:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

wiedząc, że:

$$a) f'(0) = -6, \quad f'(3) = 0, \quad f(4) = -13$$

$$b) f'(-2) = 15, \quad f(-2) = -21, \quad f(1) = 6$$

$$c) f'(1) = 7, \quad f(3) = 19, \quad f'(-2) - f'(2) = 24$$

433. Dla jakich wartości m funkcja:

$$f(x) = 4x^2 - mx + 9$$

jest kwadratem funkcji liniowej?

434. Dla jakich wartości m funkcja:

$$f(x) = x^2 - (2m + 1)x + (2m + \frac{1}{4})$$

jest kwadratem funkcji liniowej?

435. Przedstaw graficznie na jednym rysunku następujące funkcje:

$$a) y = x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 2x^2$$

$$b) y = -x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2, \quad y = -2x^2$$

$$c) y = x^2, \quad y = (x - 4)^2, \quad y = (x + 4)^2$$

$$d) y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 3, \quad y = \frac{1}{4}x^2 - 3$$

$$e) y = x^2, \quad y = (x - 3)^2, \quad y = (x + 3)^2 + 2$$

436. Dana jest funkcja:

$$a) y = x^2 - 4x + 11$$

$$b) y = -3x^2 + 9x$$

$$c) y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$$

$$d) y = -x^2 - 2x + 8$$

$$e) y = \frac{1}{3}x^2 - x + 2$$

$$f) y = 5x^2 - 3x - 3$$

$$g) y = \frac{x^2 + 10x - 11}{4}$$

$$h) y = -\frac{x + x^2}{2}$$

$$i) y = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + (x - 3)^2$$

Oblicz wartość x , przy której dana funkcja osiąga ekstremum, a następnie oblicz wartość tego ekstremum.

437. Przedstaw graficznie funkcje:

$$a) y = x^2 - 8x + 15$$

$$b) y = x^2 + 4x - 12$$

$$c) y = 2x^2 - 4x + 3$$

$$d) y = 4x^2 - 4x + 1$$

$$e) y = 4x^2 + 12x - 9$$

$$f) y = -x^2 + 5x$$

$$g) y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6$$

$$h) y = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

438. Dana jest funkcja:

$$a) y = x^2 + 4x + 7$$

$$b) y = x^2 - 12x + 37$$

$$c) y = -x^2 + 6x - 5$$

$$d) y = 2x^2 - 20x$$

Zbadaj, jak zmienia się y , gdy x rośnie:

$$a) \text{ od } -4 \text{ do } 0$$

$$b) \text{ od } 0 \text{ do } 8$$

$$c) \text{ od } -1 \text{ do } 5$$

$$d) \text{ od } 5 \text{ do } 10$$

Podaj odpowiednie wykresy.

439. Dana jest funkcja:

$$y = \sqrt{x(10 - x)}$$

1°. Dla jakich wartości x funkcja ta jest określona?

2°. Czy funkcja posiada ekstremum i jakie?

3°. Jak zmienia się y , gdy zmienia się x ?

440. Dana jest funkcja:

$$y = \sqrt{2x^2 - 11x + 5}$$

1°. Dla jakich wartości x funkcja ta jest określona?

2°. Czy funkcja posiada ekstremum?

3°. Jak zmienia się y , gdy zmienia się x ?

441. Dany jest trójkąt ABC , w którym boki AB i BC równe są a , a kąt ABC równy jest 120° . Na wysokości BD trójkąta obrano punkt E i połączono go z punktami A i C .

1°. Wyraż sumę kwadratów odcinków AE , BE i CE jako funkcję odcinka BE .

2°. Zbadaj, jak zmienia się wzmiarkowana suma kwadratów, gdy (przy stałym a) zmienia się odcinek BE .

Podaj odpowiedni wykres funkcji.

442. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku równym a ; na boku AB obrano punkt M i połączono go z punktem C .

1°. Wyraż sumę kwadratów odcinków AM , BM i CM jako funkcję odcinka AM .

2°. Zbadaj, jak zmienia się wzmiarkowana suma kwadratów, gdy (przy stałym a) zmienia się odcinek AM .

Podaj odpowiedni wykres funkcji.

443. W koło o promieniu danym r wpisano trójkąt równoramienny.

1°. Wyraż sumę kwadratów wszystkich boków trójkąta jako funkcję jego wysokości.

2°. Zbadaj, jak zmienia się ta suma kwadratów, gdy (przy stałym r) zmienia się wysokość trójkąta.

Podaj odpowiedni wykres funkcji.

444. Dany jest półokrąg o średnicy AB równej $2r$. W punkcie B wykreślono styczną BT do półokręgu; z punktu M obranego na półokręgu wystawiono odcinek MC prostopadły do stycznej BT i punkt M połączono z punktem A .

1°. Wyraż sumę odcinków AM i MC jako funkcję kąta MAB .

2°. Zbadaj, jak zmienia się suma $AM + MC$ ze zmianą kąta MAB (r jest stałe).

Podaj odpowiedni wykres funkcji.

445. Dany jest prostokąt, w którym boki AB i AD wynoszą odpowiednio 2 cm i 3 cm. Z punktu E obranego na boku AD wystawiono prostopadłą do AD i punkt, w którym prostopadła ta przecina przekątną BD prostokąta, oznaczono przez F ; punkt A połączono z punktem F .

1°. Wyraż długość odcinka AF jako funkcję długości odcinka AE .

2°. Jak zmienia się AF , gdy punkt E zmienia swoje położenie na boku AD ?

Podaj odpowiedni wykres. Podaj interpretację geometryczną.

446. Dany jest odcinek AB równy a . W punkcie A wystawiono odcinek AC prostopadły do AB i równy a ; w punkcie B wystawiono odcinek BD prostopadły do AB i równy $2a$ (punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB). Na odcinku AC obrano punkt M , a na odcinku BD punkt N w taki sposób, aby odcinek BN był dwa razy większy od odcinka CM ; punkt M połączono z punktem N .

1°. Wyraż długość odcinka MN jako funkcję długości odcinka CM .

2°. Zbadaj, jak zmienia się MN , gdy (przy stałym a) zmienia się CM .

Podaj odpowiedni wykres. Podaj interpretację geometryczną.

447. W kole o promieniu r poprowadzono styczną MN i równoległą do niej cięciwę AB ; rzut cięciwy na styczną oznaczono przez $A'B'$.

1°. Wyraż przekątną prostokąta $AA'B'B$ jako funkcję odległości cięciwy od stycznej.

2°. Zbadaj, jak zmienia się długość przekątnej, gdy zmienia się odległość cięciwy od stycznej (r jest stałe).

Podaj odpowiedni wykres.

448. W trójkąt równoramienny o podstawie równej $2a$ i wysokości a wpisano prostokąt w taki sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie, a pozostałe dwa na ramionach trójkąta.

1°. Wyraż przekątną prostokąta jako funkcję jego wysokości.

2°. Zbadaj, jak zmienia się przekątna prostokąta, gdy (przy stałym a) zmienia się jego wysokość.

Podaj odpowiedni wykres.

449. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna CB równa jest a , a przyprostokątna CA równa jest b . Z punktu M obranego na boku AC wykreślono równoległą MK do CB i punkt K , położony na boku AB , połączono z punktem C .

1°. Wyraż pole trójkąta MKC jako funkcję odległości x punktu M od punktu A .

2°. Zbadaj, jak zmienia się pole trójkąta MKC , gdy zmienia się x (a i b są stałe).

Podaj odpowiedni wykres.

450. W ostrosłup czworokątny prawidłowy, w którym bok podstawy równy jest a , a wysokość równa jest $3a$, wpisano prostopadłościan w taki sposób, że cztery wierzchołki prostopadłościanu leżą na podstawie ostrosłupa, a pozostałe cztery na krawędziach bocznych ostrosłupa.

1°. Wyraż pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu jako funkcję jego wysokości.

2°. Zbadaj, jak zmienia się pole całkowitej powierzchni prostopadłościanu ze zmianą jego wysokości (a jest stałe).

Podaj odpowiedni wykres.

451. W kulę o promieniu r wpisano taki stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym. Kulę oraz stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy stożka w odległości x od jego wierzchołka. Na płaszczyźnie tej utworzył się w ten sposób pierścień kołowy, którego okrąg zewnętrzny leży na powierzchni kuli, a wewnętrzny na powierzchni stożka.

1°. Wyraż pole pierścienia jako funkcję x .

2°. Zbadaj, jak zmienia się pole pierścienia, gdy (przy stałym r) zmienia się x .

Podaj odpowiedni wykres.

*452. Dwa ciała poruszają się po liniach prostych wzajemnie prostopadłych ruchem jednostajnym ku przecięciu się ich torów. Prędkość pierwszego ciała wynosi u , drugiego v . W pewnej chwili $t = 0$ pierwsze ciało odległe jest o a , drugie zaś o b od punktu przecięcia ich torów.

1°. Wyraż odległość s między danymi ciałami jako funkcję czasu t .

2°. Zbadaj, jak zmienia się s , gdy zmienia się t (a, b, u, v są wielkościami stałymi).

3°. Jaki warunek spełniać muszą wielkości a, b, u, v , aby ciała się spotkały?

453. Wyznacz funkcję:

$$f(x) = -x^2 + bx + c,$$

jeżeli wiadomo, że przy $x = -1$ funkcja osiąga maximum równe 7.

454. Wyznacz funkcję:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

jeżeli wiadomo, że przy $x = 6$ funkcja osiąga ekstremum równe -81 i że przy $x = -3$ funkcja przybiera wartość 0.

455. Liczbę 30 rozłóż na dwa składniki w taki sposób, aby suma kwadratów tych składników była najmniejsza.

456. Liczbę a rozłóż na dwa składniki w taki sposób, aby suma kwadratów tych składników była najmniejsza.

457. Liczbę 5 rozłóż na dwa składniki w taki sposób, aby suma sześciątów tych składników była najmniejsza.

458. Liczbę dodatnią a rozłóż na dwa składniki w taki sposób, aby suma sześciątów tych składników była najmniejsza.

459. Liczbę a rozłóż na dwa składniki w taki sposób, aby iloczyn tych składników był największy.

*460. Zbadaj, który z prostokątów wpisanych w dany trójkąt ostrokątny ma największe pole.

461. Zbadaj, który z kwadratów wpisanych w dany kwadrat ma najmniejsze pole.

462. Zbadaj, który z prostokątów o danym obwodzie $2p$ ma najmniejszą przekątną.

*463. Zbadaj, który z trójkątów prostokątnych o danej przeciwprostokątnej ma największe pole.

464. Zbadaj, który z prostokątów wpisanych w dane koło ma największe pole.

465. W dany trójkąt równoramienny można wpisać drugi trójkąt równoramienny w taki sposób, aby jego podstawa była równoległa do podstawy danego trójkąta i aby jego wierzchołek leżał w środku podstawy danego trójkąta.

Zbadaj, który z trójkątów w ten sposób wpisanych w dany trójkąt ma największe pole.

*466. Dany jest półokrąg. Łącząc środek średnicy z końcami którejkolwiek cięciwy równoległej do średnicy, otrzymujemy trójkąt równoramienny.

Zbadaj, który z trójkątów w taki sposób utworzonych ma największe pole.

*467. W daną kulę wpisać walec o największej powierzchni bocznej.

468. Zbadaj, który z prostokątów o danym obwodzie daje przy obrocie dookoła boku walec o największej powierzchni bocznej.

469. W dany stożek, którego wysokość jest sześć razy większa od promienia podstawy, wpisać walec o największej powierzchni całkowitej.

*470. W dany stożek wpisać walec o największej powierzchni bocznej.

471. Wyznacz dwie liczby x i y w taki sposób, aby spełniały równanie: $2y + x = 4$ i aby suma ich kwadratów: $x^2 + y^2$ była najmniejsza. (Interpretacja geometryczna).

472. Wyznacz dwie liczby x i y w taki sposób, aby spełniały równanie: $y - ax = b$ (a i b są liczbami stałymi) i aby suma ich kwadratów: $x^2 + y^2$ była najmniejsza. (Interpretacja geometryczna).

473. Ciało, wyrzucone pionowo do góry z prędkością początkową v_0 , porusza się, jak wiemy z mechaniki, ruchem jednostajnie zmiennym (jeżeli opór powietrza nie jest brany pod uwagę), przy czym wysokość s , na jaką się ono wznosi po upływie czasu t , wyrażona jest za pomocą wzoru:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie w danej miejscowości.

1^o. Po jakim czasie osiąga ciało największą wysokość i ile wynosi ta wysokość?

2^o. Po jakim czasie wysokość równa jest zeru?

Podać interpretację fizyczną otrzymanych wyników.

474. Na końcach sztywnego pręta o długości l osadzono dwie kuleczki o masach m_1 i m_2 .

1^o. Zbadaj, względem jakiej osi prostopadłej do pręta moment bezwładności*) jest najmniejszy. (Masę pręta oraz rozmiary kulek zaniedbujemy).

2^o. Rozważ przypadek szczególny, gdy $m_1 = m_2$.

475. Posługując się tabelkami zmienności, zbadaj znak następujących funkcji:

a) $y = x^2 - 9x + 8$

b) $y = 2x^2 - 6x - 8$

c) $y = x^2 - 6x + 9$

d) $y = x^2 + 10x + 25$

e) $y = x^2 - 4x + 11$

f) $y = -x^2 + 2x - 4$

g) $y = x^2 - 7x + 6$

h) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

i) $y = -x^2 + 5x$

j) $y = -x^2 + 4$

k) $y = 4x^2 + 4x + 1$

l) $y = 3x^2 - x - 14$

[K] (H) (M)

§ 40. Dalsze przykłady badania funkcji wymiernych.

Przykłady badania wielomianu.

W § tym podamy kilka łatwych przykładów zastosowania pochodnej do badania zmienności wielomianów i innych funkcji.

*) Jeżeli układ, który może obracać się dookoła pewnej osi, składa się z mas: $m_1, m_2, m_3, \dots$, których odległości od osi obrotu wynoszą odpowiednio: $r_1, r_2, r_3, \dots$, wówczas przez moment bezwładności tego układu względem danej osi rozumiemy wyrażenie: $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$

1. Dana jest funkcja:

$$(22) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6$$

Należy zbadać, jak zmienia się $f(x)$, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$

Obliczamy pochodną funkcji (22):

$$(23) \quad f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Pochodna jest funkcją kwadratową zmiennej x . Badamy, dla jakich wartości x pochodna jest dodatnia, dla jakich ujemna i dla jakich równa 0. Otóż wyróżnik funkcji (23) jest dodatni, zatem funkcja ta posiada dwa miejsca zerowe; obliczając je dostajemy:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Uwzględniając, że w funkcji (23) współczynnik przy x^2 jest dodatni, mamy wyniki następujące:

gdy $x < -1$,	wówczas $f'(x) > 0$
„ $x = -1$,	„ $f'(x) = 0$
„ $-1 < x < 3$,	„ $f'(x) < 0$
„ $x = 3$,	„ $f'(x) = 0$
„ $x > 3$,	„ $f'(x) > 0$

Z powyższego wypływają natychmiast następujące wnioski:

gdy x rośnie od $-\infty$ do -1 ,	wówczas $f(x)$ wzrasta
„ x „ od -1 do 3 ,	„ $f(x)$ maleje
„ x „ od 3 do $+\infty$,	„ $f(x)$ wzrasta

Przy $x = -1$ osiąga więc funkcja $f(x)$, jak łatwo zauważyć, maximum. Aby obliczyć wartość tego maximum, podstawiamy we wzorze (22): $x = -1$; otrzymujemy:

$$f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 6 = 7\frac{2}{3}$$

Przy $x = 3$ funkcja $f(x)$ osiąga minimum. Wartość tego minimum obliczamy, podstawiając we wzorze (22): $x = 3$; otrzymujemy:

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = -3$$

Zbadamy teraz, jak zachowuje się funkcja $f(x)$ w nieskończoności. Dla $x \neq 0$ możemy wzór (22) napisać w postaci następującej:

$$f(x) = x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right)$$

Gdy x dąży do $+\infty$, to wyrażenie: $\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}$ dąży, jak łatwo zauważyć, do granicy równej $\frac{1}{3}$, a x^3 dąży do $+\infty$, z czego wynika, że $f(x)$ dąży do $+\infty$.

Gdy x dąży do $-\infty$, to wyrażenie: $\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3}$ dąży również do granicy równej $\frac{1}{3}$, a x^3 dąży do $-\infty$, z czego wynika, że $f(x)$ dąży do $-\infty$.

Rozważania powyższe prowadzą nas ostatecznie do takiego wniosku:

gdy x rośnie od $-\infty$ do -1 ,

wówczas $f(x)$ wzrasta od $-\infty$ do $7\frac{2}{3}$

gdy x rośnie od -1 do 3 ,

wówczas $f(x)$ maleje od $7\frac{2}{3}$ do -3

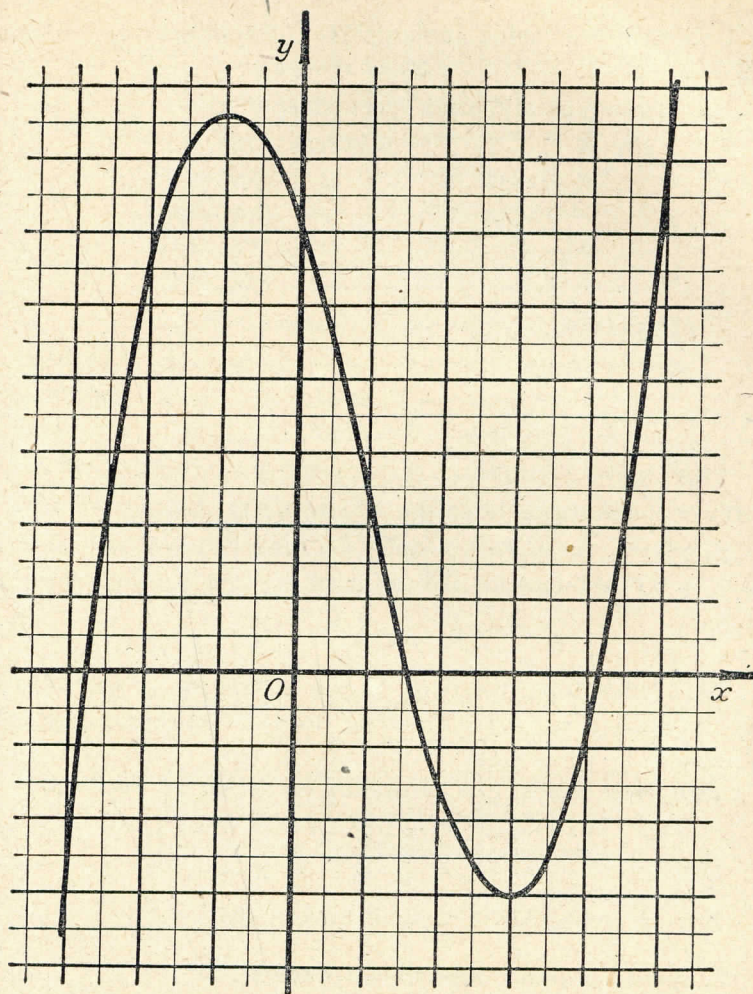
gdy x rośnie od 3 do $+\infty$,

wówczas $f(x)$ wzrasta od -3 do $+\infty$

Otrzymany wynik zapisujemy w tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7\frac{2}{3}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Rys. 47 przedstawia wykres funkcji (22).



Rys. 47.

Wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6$

2. Dana jest funkcja:

$$(24) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

Zbadajmy zmienność $f(x)$, gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$.

Obliczamy pochodną funkcji (24); otrzymujemy:

$$(25) \quad f'(x) = x^2 - 1$$

Nie trudno ustalić znak pochodnej $f'(x)$:

$$\text{gdy } x < -1, \quad \text{wówczas } f'(x) > 0$$

$$,, \quad x = -1, \quad ,, \quad f'(x) = 0$$

$$,, \quad -1 < x < 1, \quad ,, \quad f'(x) < 0$$

$$,, \quad x = 1, \quad ,, \quad f'(x) = 0$$

$$,, \quad x > 1, \quad ,, \quad f'(x) > 0$$

Z powyższego wypływają wnioski:

gdy x rośnie od $-\infty$ do -1 , wówczas $f(x)$ wzrasta

„ x „ od -1 do 1 , „ $f(x)$ maleje

„ x „ od 1 do $+\infty$, „ $f(x)$ wzrasta

Przy $x = -1$ funkcja $f(x)$ osiąga maximum, równe $\frac{2}{3}$, a przy $x = 1$ funkcja ta osiąga minimum, które wynosi $-\frac{2}{3}$.

Zbadamy teraz zachowanie się funkcji w nieskończoności. Dla $x \neq 0$ możemy wzór (24) napisać w postaci następującej:

$$f(x) = x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Stąd odczytujemy łatwo, że gdy x dąży do $+\infty$, wówczas $f(x)$ dąży do $+\infty$, a gdy x dąży do $-\infty$, wówczas $f(x)$ dąży do $-\infty$.

Powyższe rozważania prowadzą do tabeli zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

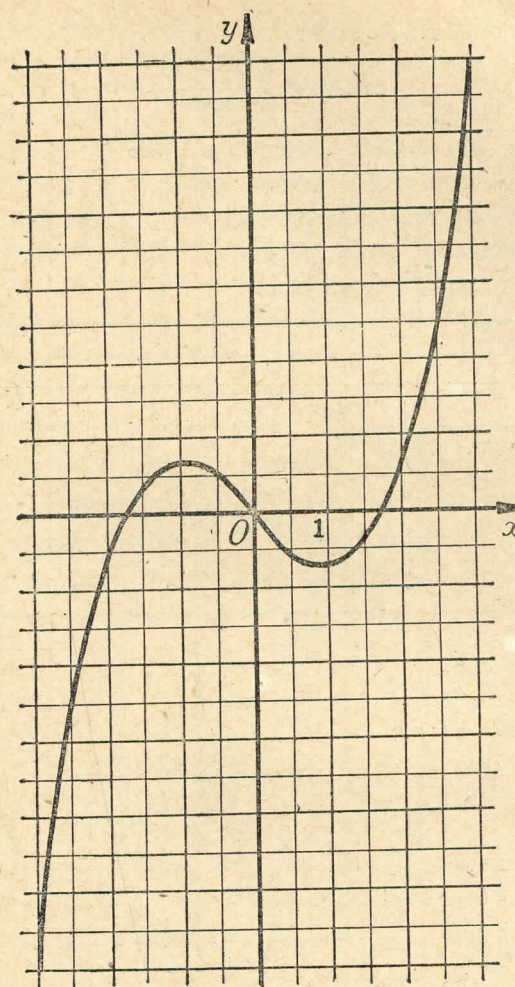
Rys. 48 przedstawia wykres funkcji (24).

Przykład badania funkcji ułamkowej.

3. Dana jest funkcja:

$$(26) \quad f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 8}{x^2}$$

Funkcja ta jest określona dla każdej wartości $x \neq 0$. Należy zbadać, jak zmienia się $f(x)$, gdy x rośnie od $-\infty$ do 0 i gdy x rośnie od 0 do $+\infty$.



Rys. 48.

Wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

Zakładając, że $x \neq 0$, obliczamy pochodną funkcji (26); otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (6x - 8) - (3x^2 - 8x + 8) \cdot 2x}{x^4}$$

czyli, po wykonaniu działań:

$$(27) \quad f'(x) = \frac{8(x-2)}{x^3}$$

Badamy, dla jakich wartości x pochodna jest dodatnia, dla jakich ujemna i dla jakich równa 0. Znajdujemy znak licznika $8(x-2)$ oraz mianownika x^3 dla różnych wartości x i stąd wyznaczamy znak pochodnej $f'(x)$. Otrzymane wyniki zestawiamy w poniższej tabelce:

	$x-2$	x^3	$f'(x)$	$f(x)$
$x > 2$	+	+	+	wzrasta
$x = 2$	0	+	0	minimum
$0 < x < 2$	-	+	-	maleje
$x = 0$	-	0	⊗	⊗
$x < 0$	-	-	+	wzrasta

Zbadamy teraz jeszcze, jak zachowuje się funkcja $f(x)$, gdy: a) $x \rightarrow 0$, b) $x \rightarrow -\infty$, c) $x \rightarrow +\infty$ oraz: d) jaką wartość przybiera $f(x)$, gdy $x = 2$.

a) Wzór (26) możemy napisać w taki sposób:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} (3x^2 - 8x + 8)$$

Gdy $x \rightarrow 0$, wówczas $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$, a $(3x^2 - 8x + 8) \rightarrow 8$, z czego wynika, że $f(x) \rightarrow +\infty$.

b) Wzorowi (26) możemy nadać także postać następującą:

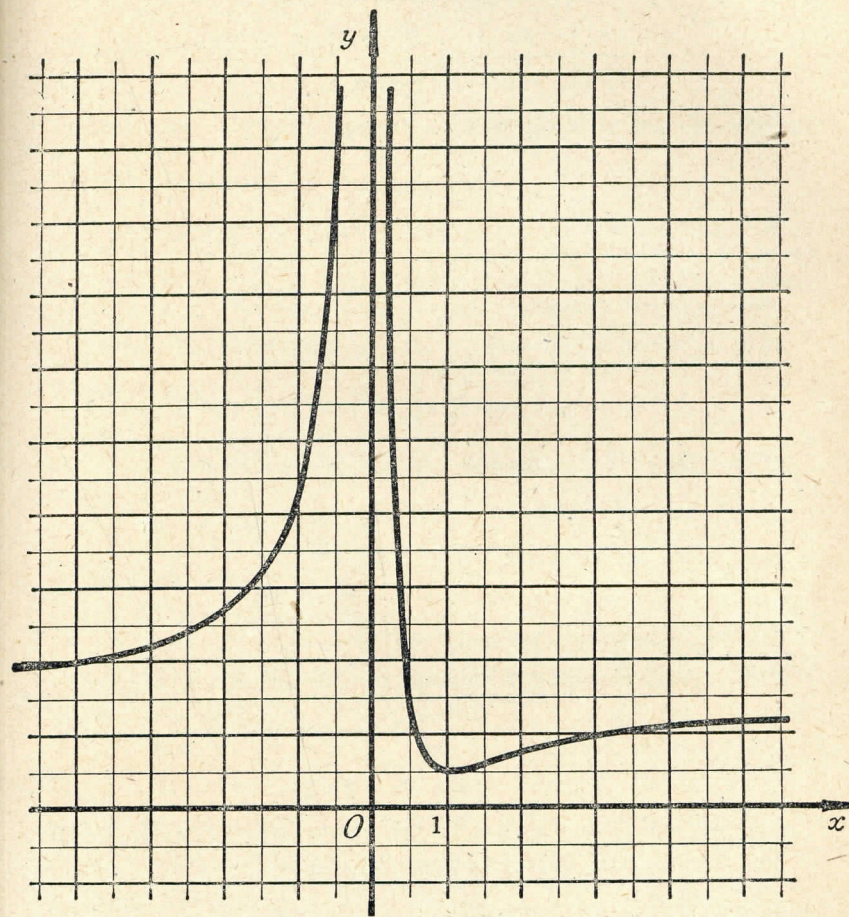
$$f(x) = 3 - \frac{8}{x} + \frac{8}{x^2}$$

Stąd odczytujemy z łatwością, że gdy $x \rightarrow -\infty$, wówczas $f(x) \rightarrow 3$.

c) Z wyżej napisanego wzoru otrzymujemy także, że gdy $x \rightarrow +\infty$, wówczas $f(x) \rightarrow 3$.

d) Przy $x = 2$ funkcja $f(x)$ osiąga minimum. Wartość tego minimum obliczamy, podstawiając we wzorze (26) $x = 2$:

$$f(2) = \frac{3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 8}{2^2} = 1$$



Rys. 49.

Wykres funkcji $y = \frac{3x^2 - 4x + 2}{2x^2}$

Powyższe rozważania prowadzą nas ostatecznie do następującego wniosku:

gdy x rośnie od $-\infty$ do 0, wówczas $f(x)$ wzrasta od 3 do $+\infty$;
 „ x rośnie od 0 do 2, „ $f(x)$ maleje od $+\infty$ do 1;
 „ x rośnie od 2 do $+\infty$, „ $f(x)$ wzrasta od 1 do 3.

Otrzymany wynik zapisujemy w tabelce zmienności:

x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Rys. 49 przedstawia wykres funkcji (26).

Ćwiczenia.

476. Zbadaj następujące funkcje i podaj ich wykresy:

- a) $y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ b) $y = x^3 + 2$
 c) $y = -x^3 + 12x - 3$ d) $y = \frac{1}{10}(2x^3 - 15x^2)$
 e) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x + 2\frac{1}{3}$ f) $y = -x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
 g) $y = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ h) $y = x^3 - x^2 + x + 3$
 i) $y = x^4 - 6x^2 + 6$ j) $y = 8x^2 - x^4$

477. Dana jest funkcja:

$$y = x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 \quad (a > 0)$$

Zbadaj tę funkcję i podaj jej wykres.

478. Zbadaj następujące funkcje i podaj ich wykresy:

- a) $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2}$ b) $y = \frac{3x^2 - 1}{x^2}$ c) $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$
 d) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ e) $y = \frac{4x^2 + 3x - 2}{x^2}$ f) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - 1$

479. Zbadaj następujące funkcje i podaj ich wykresy:

- a) $y = \frac{x+1}{x}$ b) $y = \frac{5x+2}{x}$ c) $y = \frac{x-2}{x-3}$
 d) $y = \frac{x-5}{x}$ e) $y = \frac{3x}{x+4}$ f) $y = \frac{3x-1}{2x}$
 g) $y = \frac{4-2x}{x+1}$ h) $y = -\frac{3x}{x+2}$

480. Dana jest funkcja:

$$y = \frac{x^2 + k}{x^2 + 1}$$

Zbadaj tę funkcję i podaj jej wykres zakładając, że:

- a) $k < 1$ b) $k > 1$

481. Dane jest równanie:

$$x(1 + t^2) = 2 + t^3$$

Zbadaj, jak zmienia się pierwiastek x tego równania, gdy zmienia się t .

Podaj odpowiedni wykres.

482. Dany jest trójkąt równoramienny ostrokątny o podstawie równej 4 cm i wysokości równej x cm. Trójkąt ten przecięto prostą równoległą do jego podstawy i odległą od podstawy o odcinek równy 2 cm. Utworzył się trapez, którego pole oznaczamy przez y cm².

1°. Wyraż y jako funkcję x .

2°. Zbadaj, jak zmienia się y , gdy zmienia się x .

Podaj odpowiedni wykres.

483. Dany jest prostokątny układ współrzędnych XOY . Przez punkt $A(1, 1)$ poprowadzono prostą, odcinającą na osi OX odcinek x i na osi OY odcinek y .

1°. Wyraż y jako funkcję x .

2°. Zbadaj, jak zmienia się y , gdy zmienia się x .

Podaj odpowiedni wykres.

484. W kulę o promieniu r wpisano walec.

1°. Wyraż objętość walca jako funkcję jego wysokości.

2°. Zbadaj, jak zmienia się objętość walca ze zmianą jego wysokości (r jest stałe).

Podaj odpowiedni wykres.

[M]

§ 41. Przykłady badania funkcji niewymiernych i trygonometrycznych.

Przykład badania funkcji zawierającej niewymierność kwadratową.

1. Dana jest funkcja:

$$(28) \quad f(x) = \frac{2}{x} \sqrt{x-1}$$

Funkcja ta jest określona dla każdej wartości $x \geq 1$. Należy zbadać, jak zmienia się $f(x)$, gdy x rośnie od 1 do $+\infty$.

Zakładając, że $x > 1$, obliczamy pochodną funkcji (28); stosując twierdzenie o pochodnej iloczynu, otrzymujemy:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{2}{x^2} \cdot \sqrt{x-1}$$

czyli, po łatwym przekształceniu:

$$(29) \quad f'(x) = \frac{-x+2}{x^2\sqrt{x-1}}$$

Ze wzoru (29) z łatwością odczytujemy, że:

gdy $1 < x < 2$, wówczas $f'(x) > 0$

gdy $x = 2$, wówczas $f'(x) = 0$

gdy $x > 2$, wówczas $f'(x) < 0$

Z powyższego wypływają natychmiast następujące wnioski:

gdy x rośnie od 1 do 2, wówczas $f(x)$ wzrasta;

gdy x rośnie od 2 do $+\infty$, wówczas $f(x)$ maleje.

Przy $x = 2$ osiąga więc funkcja $f(x)$, jak łatwo zauważyć, maximum. Aby obliczyć wartość tego maximum, podstawiamy we wzorze (28): $x = 2$; dostajemy:

$$f(2) = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{2-1} = 1$$

Zbadamy teraz jeszcze: a) jaką wartość przybiera $f(x)$, gdy $x = 1$, oraz: b) jak zachowuje się funkcja $f(x)$, gdy $x \rightarrow +\infty$

a) Podstawiając we wzorze (28) $x = 1$, otrzymujemy: $f(1) = 0$

b) Wzór (28) możemy przekształcić w taki sposób:

$$f(x) = \frac{2}{x} \sqrt{x-1} = 2 \sqrt{\frac{x-1}{x^2}} = 2 \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Gdy $x \rightarrow +\infty$, wówczas $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ i $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, z czego wynika, że gdy $x \rightarrow +\infty$, to $f(x) \rightarrow 0$.

Powyższe rozważania prowadzą ostatecznie do wniosku:

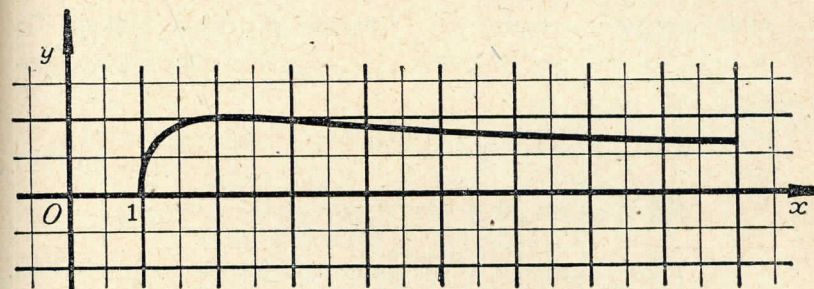
gdy x rośnie od 1 do 2, wówczas $f(x)$ wzrasta od 0 do 1;

gdy x rośnie od 2 do $+\infty$, wówczas $f(x)$ maleje od 1 do 0

Otrzymany wynik zapisujemy w tabelce zmienności:

x	1	↗	2	↘	$+\infty$
$f(x)$	0		1		0

Rys. 50 przedstawia wykres funkcji (28).



Rys. 50.

Wykres funkcji: $y = \frac{2}{x} \sqrt{x-1}$

Przykład badania funkcji trygonometrycznej.

2. Dana jest funkcja:

$$(30) \quad f(x) = \sin x + \cos x^*$$

Należy zbadać, jak zmienia się $f(x)$, gdy x rośnie od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Obliczamy pochodną funkcji (30):

$$(31) \quad f'(x) = \cos x - \sin x$$

Badamy, dla jakich wartości x z przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ pochodna jest dodatnia, dla jakich ujemna i dla jakich równa 0.

*) x oznacza tu miarę łukową kąta.

Ze wzoru (31) z łatwością otrzymujemy następujące wyniki:

$$\begin{aligned} \text{gdy } 0 \leq x < \frac{1}{4}\pi, & \quad \text{wówczas } f'(x) > 0 \\ \text{,, } x = \frac{1}{4}\pi, & \quad \text{,, } f'(x) = 0 \\ \text{,, } \frac{1}{4}\pi < x \leq \frac{1}{2}\pi, & \quad \text{,, } f'(x) < 0 \end{aligned}$$

Z powyższego wypływają natychmiast wnioski:

gdy x rośnie od 0 do $\frac{1}{4}\pi$, wówczas $f(x)$ wzrasta
 „ x rośnie od $\frac{1}{4}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$, wówczas $f(x)$ maleje.

Obliczmy teraz jeszcze, jakie wartości przybiera funkcja dla $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$. Podstawiając do wzoru (30) kolejno powyższe liczby, dostajemy:

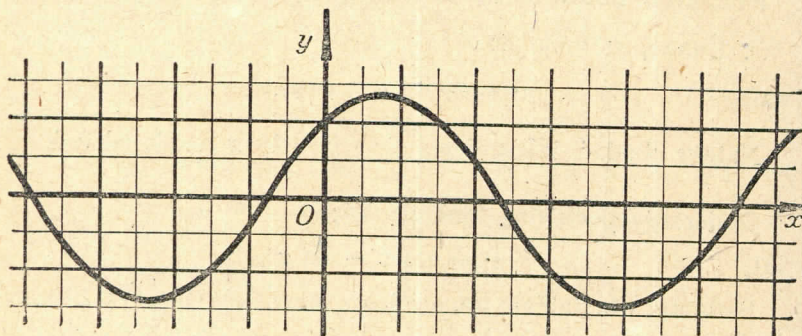
$$f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \sin \frac{1}{4}\pi + \cos \frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sin \frac{1}{2}\pi + \cos \frac{1}{2}\pi = 1 + 0 = 1$$

Otrzymujemy więc następującą tabelkę zmienności funkcji (30) dla przedziału $(0, \frac{1}{2}\pi)$:

x	0	$\nearrow \frac{1}{4}\pi$	$\nearrow \frac{1}{2}\pi$
$f(x)$	1	$\nearrow \sqrt{2}$	$\searrow 1$



Rys. 51.

Wykres funkcji $y = \sin x + \cos x$

Ćwiczenia.

485. Zbadaj następujące funkcje i podaj ich wykresy:

a) $y = \sqrt{x-3}$

b) $y = \sqrt{2x+1}$

c) $y = \sqrt{5-x}$

d) $y = \sqrt{x^2-6x+10}$

e) $y = \sqrt{9-x^2}$

f) $y = \sqrt{x^2-5x}$

g) $y = x - \sqrt{x-2}$

h) $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$

i) $y = \frac{1}{x} \sqrt{8x-16}$

j) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

k) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$

l) $y = \sqrt{\frac{x^2+25}{x^2+4}}$

486. Zbadaj następujące funkcje w podanych przedziałach i podaj odnośne wykresy:

a) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$

b) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$

c) $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$

$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$

d) $y = -3 \cos^2 x + 3 \cos x + 1$

$\left(0, \pi\right)$

e) $y = \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 2$

$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$

f) $y = x + 2 \cos x$

$\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$

*487. Wykaż, że funkcja:

$$f(x) = x - \sin x \cos x$$

jest rosnąca w każdym przedziale.

(K) (H) (M)

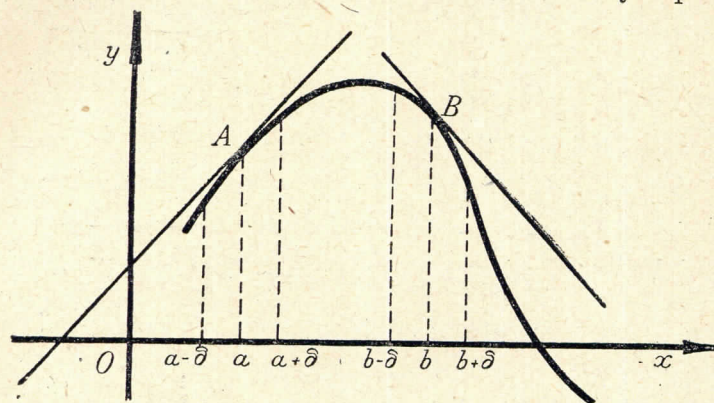
§ 42. Extrema funkcji.

Kryterium istnienia ekstremum.

W tym § omówimy nieco dokładniej warunki istnienia ekstremum funkcji.

Przed wszystkim uzasadnimy dwa twierdzenia pomocnicze:

Krzywa na rys. 52 jest obrazem geometrycznym pewnej funkcji $y = f(x)$, o której zakładamy, że posiada pochodną dla każdej wartości zmiennej (krzywa posiada styczną w każdym punkcie).



Rys. 52.

W punkcie A , którego odcięta wynosi a , styczna do tej krzywej posiada współczynnik kątowy dodatni, a zatem pochodna dla $x = a$, czyli $f'(a)$, jest liczbą dodatnią. Z rysunku widzimy z łatwością, że można znaleźć takie otoczenie $(a - \delta, a + \delta)$ punktu a , aby wewnątrz przedziału $(a - \delta, a)$ wartość funkcji $f(x)$ była mniejsza od $f(a)$, a wewnątrz przedziału $(a, a + \delta)$ większa od $f(a)$. Własność tę możemy krócej wyrazić mówiąc, że wartość funkcji $f(x)$ na lewo od a jest mniejsza, a na prawo od a większa od $f(a)$.

W punkcie B , którego odcięta wynosi b , styczna do tej krzywej posiada współczynnik kątowy ujemny, a zatem pochodna dla $x = b$, czyli $f'(b)$, jest liczbą ujemną. Z rysunku widzimy z łatwością, że można znaleźć takie otoczenie $(b - \delta, b + \delta)$ punktu b , aby wewnątrz przedziału $(b - \delta, b)$ wartość funkcji $f(x)$ była większa od $f(b)$, a wewnątrz przedziału $(b, b + \delta)$ mniejsza od $f(b)$. Własność tę wyrażamy mówiąc krócej, że wartość funkcji $f(x)$ na lewo od b jest większa, a na prawo od b mniejsza od $f(b)$.

Rys. 52 unaocznia poglądowo następujące twierdzenia, które dają się też udowodnić zupełnie ściśle:

I^a. Jeżeli $f'(x_0) > 0$, wówczas funkcja $f(x)$ przybiera na lewo od x_0 wartość mniejszą, a na prawo od x_0 wartość większą od $f(x_0)$.

II^a. Jeżeli $f'(x_0) < 0$, wówczas funkcja $f(x)$ przybiera na lewo od x_0 wartość większą, a na prawo od x_0 wartość mniejszą od $f(x_0)$.

[: Dowody tych twierdzeń opierają się bezpośrednio na definicji pochodnej. W samej rzeczy, założmy, że $f'(x_0) > 0$. Skoro iloraz różnicowy $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ dąży do dodatniej granicy $f'(x_0)$,

gdy $\Delta x \rightarrow 0$, wówczas — jak łatwo zauważyć — przy dostatecznie małych wartościach Δx dzielna i dzielnik w ilorazie różnicowym muszą być jednakowego znaku.

Gdy więc $\Delta x > 0$, wówczas $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, gdy zaś $\Delta x < 0$, wówczas $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$.

Udowodniwszy więc tw. I^a. W podobny sposób udowadnia się twierdzenie II^a.]

Rozpatrzmy teraz funkcję $f(x)$ posiadającą pochodną w całym obszarze, w którym jest określona.

Założmy, że funkcja $f(x)$ posiada *e x t r e m u m* przy $x = x_0$. Otóż można wykazać, że wówczas pochodna $f'(x_0) = 0$. Gdyby bowiem pochodna $f'(x_0)$ nie była równa 0, wówczas pochodna ta byłaby albo dodatnia, albo ujemna. W przypadku: $f'(x_0) > 0$ wartość funkcji $f(x)$ na lewo od x_0 byłaby mniejsza od $f(x_0)$, a na prawo od x_0 większa od $f(x_0)$. W przypadku: $f'(x_0) < 0$ wartość funkcji $f(x)$ na lewo od x_0 byłaby większa od $f(x_0)$, a na prawo od x_0 mniejsza od $f(x_0)$. Jest jednak rzeczą jasną, że w żadnym z powyższych przypadków funkcja nie mogłaby posiadać *e x t r e m u m* przy $x = x_0$. Musi więc być: $f'(x_0) = 0$.

Wynik powyższy możemy wyrazić słowami w sposób następujący:

Warunkiem koniecznym na to, aby funkcja $f(x)$ (posiadająca pochodną) miała ekstremum przy $x = x_0$, jest, aby pochodna $f'(x_0)$ była równa 0.

Geometrycznie znaczy to, że w punkcie, odpowiadającym ekstremum, krzywa $y = f(x)$ posiada *s t y c z n ą r ó w n o l e g ł ą* do osi x -ów.

Można się łatwo przekonać, że warunek: $f'(x_0) = 0$ nie jest wystarczający na to, aby funkcja $f(x)$ posiadała ekstremum przy $x = x_0$.

Np. funkcja $y = \frac{x^3}{10}$, której wykres mamy na rys. 10, nie ma ekstremum przy $x = 0$, ale mimo to pochodna jej — jak łatwo obliczyć — jest dla $x = 0$ równa 0.

Mamy jednak następujący warunek wystarczający na to, aby funkcja $f(x)$ posiadała ekstremum.:

Jeżeli:

$$1^0. f'(x_0) = 0;$$

2⁰. pochodna $f'(x)$ zmienia znak, gdy zmienna x przechodzi od wartości mniejszych od x_0 do wartości większych od x_0 ; wówczas funkcja $f(x)$ przy $x = x_0$ posiada ekstremum.

Extremum to jest minimum, jeżeli pochodna $f'(x)$ przechodzi od wartości ujemnych do dodatnich, i jest maximum, jeżeli pochodna $f'(x)$ przechodzi od wartości dodatnich do ujemnych

Warunek ten jest tylko nieco innym sformułowaniem twierdzenia III i IV § 37.

Przykład:

Wyznaczmy extrema funkcji:

$$(32) \quad f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$$

Obliczając pochodną tej funkcji, otrzymujemy:

$$(33) \quad f'(x) = -3x^2 + 12x$$

Rozwiązując równanie:

$$-3x^2 + 12x = 0$$

dostajemy:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4.$$

Pochodna przybiera więc wartość równą zeru przy $x = 0$ i przy $x = 4$. Jedynie więc przy tych wartościach x może rozpatrywana funkcja posiadać ekstremum. Aby rozstrzygnąć, czy ekstremum istnieje i jakie, badamy znak pochodnej $f'(x)$. Otrzymujemy następujące wyniki:

gdy $x < 0$,	wówczas $f'(x) < 0$
„ $x = 0$,	„ $f'(x) = 0$
„ $0 < x < 4$,	„ $f'(x) > 0$
„ $x = 4$,	„ $f'(x) = 0$
„ $x > 4$,	„ $f'(x) < 0$

Widzimy więc, że gdy x przechodzi przez wartość równą 0, wówczas pochodna $f'(x)$ zmienia znak, przechodząc od wartości ujemnych do dodatnich. Przy $x = 0$ posiada więc funkcja minimum; aby obliczyć to minimum, podstawiamy we wzorze (32): $x = 0$; otrzymujemy:

$$f(0) = 1$$

Gdy natomiast x przechodzi przez wartość równą 4, wówczas pochodna $f'(x)$ zmienia znak, tym razem przechodząc od wartości dodatnich do ujemnych. Przy $x = 4$ posiada więc funkcja maximum; maximum to obliczamy, podstawiając we wzorze (32): $x = 4$; otrzymujemy:

$$f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 + 1 = 33$$

[: Zamiast podanego wyżej kryterium istnienia ekstremum, wygodnie jest zwykle stosować kryterium następujące: *)

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia następujące dwa warunki:

$$1^0. f'(x_0) = 0$$

$$2^0. f''(x_0) \neq 0$$

wówczas funkcja $f(x)$ posiada ekstremum przy $x = x_0$.

Extremum to jest minimum, gdy $f''(x_0) > 0$, i jest maximum, gdy $f''(x_0) < 0$.

Dowód opiera się na twierdzeniach I^a i II^a oraz tw. III i IV § 37.

Załóżmy, że:

$$f'(x_0) = 0,$$

$$f''(x_0) > 0.$$

*) Stosowanie tego kryterium wymaga znajomości drugiej pochodnej. — Obacz § 5 w rozdziale II: „Pochodne wyższych rzędów”.

Wobec $f''(x_0) > 0$, wartość funkcji $f'(x)$ na lewo od x_0 jest — w myśl twierdzenia I^a *) — mniejsza od $f'(x_0)$, czyli ujemna, a na prawo od x_0 większa od $f'(x_0)$, czyli dodatnia. Z czego jednak wynika natychmiast — w myśl twierdzenia IV —, że przy $x = x_0$ funkcja $f(x)$ posiada minimum.

Zalóżmy teraz, że:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0.$$

Wobec $f''(x_0) < 0$, wartość funkcji $f'(x)$ na lewo od x_0 jest — w myśl twierdzenia II^a — większa od $f'(x_0)$, czyli dodatnia, a na prawo od x_0 mniejsza od $f'(x_0)$, czyli ujemna. Z czego jednak wynika natychmiast — w myśl twierdzenia III —, że przy $x = x_0$ funkcja $f(x)$ posiada maximum.

Otrzymujemy w ten sposób następujące praktyczne правило odnajdywania ekstremów funkcji $f(x)$:

1^o. Wyznaczamy te wartości x , dla których pierwsza pochodna $f'(x)$ jest równa 0.

2^o. Niech x_0 będzie jedną z takich wartości. Podstawiamy x_0 do drugiej pochodnej $f''(x)$, czyli obliczamy $f''(x_0)$. Jeżeli $f''(x_0) > 0$, wówczas przy $x = x_0$ funkcja $f(x)$ posiada minimum; jeżeli $f''(x_0) < 0$, wówczas przy $x = x_0$ funkcja $f(x)$ posiada maximum. Jeżeli zaś $f''(x_0) = 0$, to bez dalszego badania nic nie możemy orzec o ewentualnym istnieniu ekstremum**).

Przykład:

Wyznaczmy ekstremum funkcji:

$$(34) \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$$

Obliczamy pierwszą pochodną funkcji (34):

$$(35) \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

Rozwiązując równanie:

$$6x^2 + 6x - 36 = 0$$

dostajemy:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

*) Twierdzenie to stosujemy do funkcji $f'(x)$, której pochodną w punkcie x_0 jest $f''(x_0)$.

**) Powyższe правило nie stosuje się oczywiście do przypadku, w którym badana funkcja w niektórych punktach nie posiada pochodnej.

Pierwsza pochodna przybiera więc wartość równą zeru przy $x = -3$ i przy $x = 2$.

Obliczamy drugą pochodną:

$$f''(x) = 12x + 6$$

Badamy, jakiego znaku jest druga pochodna dla $x = -3$ oraz dla $x = 2$. Mamy:

$$f''(-3) = -30, \quad f''(2) = 30.$$

Ponieważ $f''(-3) < 0$, zatem przy $x = -3$ funkcja posiada maximum; aby obliczyć to maximum, podstawiamy we wzorze (34): $x = -3$; otrzymujemy:

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 5 = 86$$

Ponieważ $f''(2) > 0$, zatem przy $x = 2$ funkcja posiada minimum; minimum to obliczamy, podstawiając we wzorze (34): $x = 2$; otrzymujemy:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 36 \cdot 2 + 5 = -39 \quad :]$$

Poszukiwanie ekstremum funkcji.

Rozwiążemy teraz dwa zadania, które sprowadzają się do wyznaczenia ekstremum funkcji.

I. Z kawałka kartonu mającego kształt kwadratu wyciąć po rogach takie równe kwadraciki, aby po zagięciu brzegów otrzymać prostopadłościennie pudełeczko o największej pojemności.

Oznaczmy (rys. 53) bok AB kwadratu kartonowego przez a , a bok AE kwadracika, przeznaczonego do wycięcia, przez x .

Pole dna pudełeczka $FKLM$ wynosi wówczas $(a - 2x)^2$, a wysokość pudełeczka FG równa jest x . Oznaczmy pojemność pudełeczka przez V ; otrzymamy wówczas:

$$V = x(a - 2x)^2$$

czyli po wykonaniu działań:

$$(36) \quad V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Należy teraz wyznaczyć taką wartość x (większą od 0, a mniejszą od $\frac{1}{2}a$), przy której pojemność V osiąga największą wartość.

Obliczamy pochodną funkcji (36):

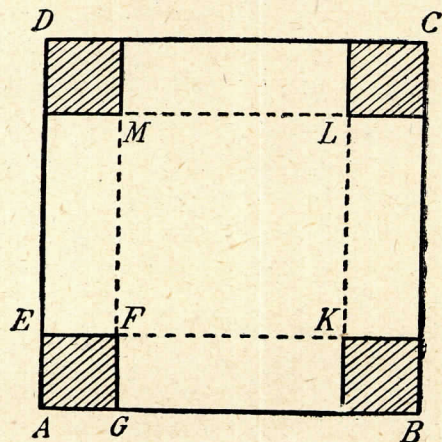
$$(37) \quad V' = 12x^2 - 8ax + a^2$$

Rozwiązując równanie:

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

otrzymujemy:

$$x_1 = \frac{1}{6}a, \quad x_2 = \frac{1}{2}a$$



Rys. 53.

Pochodna przybiera więc wartość równą zeru przy $x = \frac{1}{6}a$ i przy $x = \frac{1}{2}a$. Wartość $x = \frac{1}{2}a$ nie wchodzi w rachubę, ponieważ dla tej wartości $V = 0$. Aby rozstrzygnąć, czy przy $x = \frac{1}{6}a$ istnieje ekstremum i jakie, badamy znak pochodnej V' . Otrzymujemy następujące wyniki:

gdy $x < \frac{1}{6}a$,	wówczas $V' > 0$
„ $x = \frac{1}{6}a$,	„ $V' = 0$
„ $\frac{1}{6}a < x < \frac{1}{2}a$,	„ $V' < 0$
„ $x = \frac{1}{2}a$,	„ $V' = 0$
„ $x > \frac{1}{2}a$,	„ $V' < 0$

Widzimy więc, że gdy x przechodzi przez wartość równą $\frac{1}{6}a$, wówczas pochodna V' zmienia znak, stając się z dodatniej ujemną. Przy $x = \frac{1}{6}a$ pojemność V osiąga więc maximum. Aby obliczyć wartość tego maximum, podstawiamy we wzorze (31): $x = \frac{1}{6}a$; otrzymujemy: $V = \frac{2}{27}a^3$. Obliczone maximum jest największą wartością, jaką funkcja (36) przybiera, gdy x zmienia się od 0 do $\frac{1}{2}a$.

Rozwiązaliśmy więc nasze zadanie w zupełności.

II. Zbadać, który z walców o danej objętości ma najmniejszą powierzchnię całkowitą.

Załóżmy, że objętość walca równa jest V . Oznaczmy promień podstawy walca przez x , wysokość przez h , a pole całkowitej powierzchni przez S . Możemy wówczas napisać.

$$(38) \quad S = 2\pi x^2 + 2\pi xh$$

$$(39) \quad V = \pi x^2 h$$

Ze wzoru (38) wyrażamy h przez V i x :

$$(40) \quad h = \frac{V}{\pi x^2}$$

Podstawiając otrzymaną wartość do wzoru (38), dostajemy:

$$(41) \quad S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

Należy teraz wyznaczyć taką wartość x (większą od 0), przy której powierzchnia S jest najmniejsza.

Obliczamy pochodną funkcji (41):

$$(42) \quad S' = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

Rozwiązując równanie:

$$4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0$$

dostajemy:

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Przy tej wartości x pochodna przybiera wartość równą zeru. Łatwo się przekonać, że przy tej wartości x pochodna S' zmienia znak, stając się z ujemnej dodatnią*), a więc przy tej wartości x funkcja (47) osiąga minimum. Minimum to jest zarazem — jak łatwo zauważyć — najmniejszą wartością, jaką funkcja ta przybiera przy dodatnich wartościach x .

Walec o najmniejszej powierzchni ma więc promień $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ze wzoru (40) możemy obliczyć, jaka jest wysokość tego walca; dostajemy po nietrudnym rachunku: $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Szukany walec o najmniejszej powierzchni posiada więc wysokość równą średnicy podstawy.

Rozwiązaliśmy nasze zadanie w zupełności.

*

W rozdziale tym poznaliśmy niektóre najprostsze zastosowania pochodnej funkcji. Pojęcie pochodnej opiera się na ideach Leibniza i Newtona, znakomitych twórców rachunku nieskończonościowego. Wprowadzenie tego pojęcia do matematyki w końcu XVII stulecia zapoczątkowało wspaniały rozwój nauk matematycznych w następnych stuleciach.

Ćwiczenia.

488. Wyznacz extrema następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^3 - 15x + 7 & \text{b) } y = x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \\ \text{c) } y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 3 & \text{d) } y = x^4 + 32x \end{array}$$

*489. Wyznacz extrema następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^4 - 8x^2 & \text{b) } y = -x^4 - 6x^2 + 10 \\ \text{c) } y = \frac{1}{5}x^5 - 16x + 1 & \text{d) } y = 3x^5 - 50x^3 + 135x - 1 \end{array}$$

*) W samej rzeczy, gdy $x < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, wówczas $x^3 < \frac{V}{2\pi}$, a więc $2\pi x^3 < V$, skąd wynika, że $2\pi x < \frac{V}{x^2}$, zatem $4\pi x < \frac{2V}{x^2}$, czyli $S' < 0$.

W podobny sposób wykazujemy, że gdy $x > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, wówczas $S' > 0$.

*490. Wyznacz extrema następujących funkcji:

$$\begin{array}{l} \text{a) } y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x + 5 \\ \text{b) } y = x^4 - 2x^2 - 24x + 3 \end{array}$$

491. Wyznacz extrema następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 3x + \frac{1}{x} & \text{b) } y = 9x + \frac{4}{x} \\ \text{c) } y = x^2 + \frac{2}{x} & \text{d) } y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 2} \\ \text{e) } y = \frac{3x^2 - 5x + 9}{x} & \text{f) } y = \frac{1}{x^2 - 2x} \end{array}$$

492. Wyznacz extrema następujących funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x - 3 - \sqrt{3x} & \text{b) } y = x\sqrt{x} - 3x + 1 \end{array}$$

493. Zbadaj, jakie extrema posiadają następujące funkcje w podanych przedziałach:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 & (0, \frac{1}{2}\pi) \\ \text{b) } y = \frac{\sin x}{2 - \cos x} & (0, 2\pi) \end{array}$$

494. Wykaż, że następujące funkcje nie posiadają ekstremów:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \frac{x+1}{x} & \text{b) } y = \frac{x}{x-3} \\ \text{c) } y = \frac{x-2}{x+4} & \text{d) } y = \frac{x^2-4}{x+1} \\ \text{e) } y = \frac{2x-1}{3x-1} & \text{f) } y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 7x + 6 \\ \text{g) } y = 8x - \frac{1}{x} & \text{h) } y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 11 \\ \text{i) } y = \sqrt{x^2+1} - x & \text{j) } y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \text{k) } y = 2x + \cos x & \text{l) } y = x\sqrt{2} - \sin x \end{array}$$

495. W daną kulę wpisać stożek o największej objętości.
496. W daną kulę wpisać walec o największej objętości.
497. Zbadać, który z walców o danej powierzchni całkowitej ma największą objętość.
498. W dany stożek wpisać walec o największej objętości.
499. Na danym kole opisać trapez równoramienny o najmniejszym polu.
500. Zbadać, który z prostokątów o danym polu ma najmniejszy obwód.
501. Zbadać, który z prostokątów o danym polu ma najkrótszą przekątną.
502. Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danej powierzchni całkowitej ma największą objętość.
503. Jaki kształt należy nadać naczyniu cylindrycznemu, aby przy danej powierzchni wewnętrznej miało ono największą pojemność? *
504. W daną kulę wpisać stożek o największej powierzchni bocznej.
505. Zbadać, który ze stożków o danej tworzącej ma największą objętość.
- *506. Zbadać, który ze stożków o danej powierzchni bocznej ma największą objętość.
507. Zbadać, który z trójkątów równoramiennych o danym obwodzie ma największe pole.
508. W dane koło wpisać trójkąt równoramienny o największym polu.
- *509. Na danym kole opisać trójkąt prostokątny o najmniejszej przeciwprostokątnej.
- *510. Na danej kuli opisać stożek o najmniejszej objętości.
511. Wyznaczyć dwie liczby x i y w taki sposób, aby spełniały równanie: $4x + y = 1$ i aby suma ich sześciątów $x^3 + y^3$ była najmniejsza.
- *512. Daną liczbę dodatnią a rozłożyć na dwa składniki x i y w taki sposób, aby iloczyn $xy(x - y)$ był możliwie największy.

* Powierzchnia wnętrza składa się ze ścianki bocznej oraz powierzchni dna.

*513. W jakiej odległości od soczewki wypukłej o danej ogniskowej f należy umieścić przedmiot, aby utworzył się obraz rzeczywisty i aby odległość tego obrazu od przedmiotu była możliwie najmniejsza?

514. Stół ma kształt koła o promieniu r . W jakiej odległości ponad środkiem stołu należy zawiesić żarówkę, aby obwód stołu był możliwie najlepiej oświetlony?)

*515. W punktach A i B , między którymi odległość wynosi d , umieszczone są dodatnie ładunki elektryczne e_1 i e_2 . W jakim punkcie odcinka AB panuje najmniejszy potencjał**)?

*516. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli a jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $f(x)$, wówczas $f'(a) = 0$

Wskazówka. Jeżeli a jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $f(x)$, wówczas możemy napisać: $f(x) = (x - a)^2 \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest pewnym wielomianem.

*517. Udowodnić twierdzenie:

Jeżeli a jest pierwiastkiem potrójnym wielomianu $f(x)$, wówczas $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$.

*) Oświetlenie małej powierzchni za pomocą punktowego źródła światła jest, jak uczy optyka, odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości źródła światła od danej powierzchni i wprost proporcjonalne do sinusa kąta, pod którym promienie świetlne padają na powierzchnię.

**) Jeżeli pole elektryczne utworzone jest przez ładunki: $e_1, e_2, e_3, \dots$, wówczas potencjał V punktu, którego odległości od poszczególnych ładunków wynoszą: $r_1, r_2, r_3, \dots$, wyraża się wzorem:

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3} + \dots$$

ROZDZIAŁ VIII

Całka funkcji i jej najprostsze zastosowania geometryczne.

[H][M]

§ 43. Funkcje pierwotne.

Pojęcie funkcji pierwotnej.

Wiele zagadnień matematycznych sprowadza się do znalezienia funkcji, której pochodna jest znana. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest (w pewnym przedziale) pochodną funkcji $F(x)$, wówczas mówimy, że funkcja $F(x)$ jest (w tym przedziale) funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Przykłady:

1. Funkcja $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (n oznacza liczbę naturalną) jest — jak łatwo się przekonać — funkcją pierwotną funkcji: $f(x) = x^n$. Mamy bowiem:

$$F'(x) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n = f(x)$$

2. $F(x) = x$ jest funkcją pierwotną funkcji stałej: $f(x) = 1$. Mamy bowiem:

$$F'(x) = 1 = f(x)$$

3. $F(x) = \sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji: $f(x) = \cos x$. Mamy bowiem:

$$F'(x) = \cos x = f(x)$$

Całka funkcji.

Jeżeli dana jest funkcja $f(x)$, to jej funkcję pierwotną oznacza się symbolem:

$$\int f(x) dx$$

Tak oznaczoną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ nazywamy całką funkcji $f(x)$ albo funkcją całkową względem funkcji $f(x)$. Całka $\int f(x) dx$ jest oczywiście również funkcją zmiennej x .

Z określenia całki $\int f(x) dx$ wynika, że jej pochodną jest funkcja $f(x)$. Jeżeli więc: $F(x) = \int f(x) dx$, to $F'(x) = f(x)$.

Załóżmy, że pochodną funkcji $F(x)$ jest funkcja $f(x)$. Jest rzeczą oczywistą, że pochodną funkcji $F(x) + C$, gdzie C oznacza dowolną liczbę stałą, jest również funkcja $f(x)$. Możemy to wyrazić także w ten sposób:

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to $F(x) + C$, gdzie C oznacza dowolną liczbę stałą, jest także funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Z drugiej strony, możemy także wykazać, że jeżeli $F_1(x)$ i $F_2(x)$ są funkcjami pierwotnymi tej samej funkcji $f(x)$, wówczas różnić się mogą one co najwyżej o liczbę stałą (odnośny dowód w tej książce jednak pomijamy).

Mając więc jedną funkcję pierwotną $F(x)$ danej funkcji $f(x)$, otrzymujemy wszystkie inne jej funkcje pierwotne przez dodanie do $F(x)$ dowolnej liczby stałej C .

Przykłady:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ przy czym } C \text{ oznacza dowolną stałą.}$$

$$2. \int 1 dx = x + C$$

Uwaga. Zamiast $\int 1 dx$ pisze się tradycyjnie: $\int dx$

$$3. \int \cos x dx = \sin x + C$$

Twierdzenia elementarne o funkcjach pierwotnych.

Udowodnimy teraz dwa twierdzenia elementarne dotyczące funkcji pierwotnych.

I. Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, wówczas $aF(x)$, gdzie a jest liczbą stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $a f(x)$.

W samej rzeczy, skoro pochodną funkcji $F(x)$ jest funkcja $f(x)$, wówczas pochodną funkcji $aF(x)$ jest funkcja $a f(x)$.

Twierdzenie I zapisujemy w postaci wzoru:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

II. Jeżeli $F(x)$ i $G(x)$ są odpowiednio funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x)$ i $g(x)$, wówczas $F(x) + G(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) + g(x)$.

Twierdzenie to wynika bezpośrednio z twierdzenia o pochodnej sumy. Można je zapisać w postaci wzoru:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Twierdzenie II daje się oczywiście uogólnić na dowolną ilość składników.

Przykłady:

1. Obliczyć funkcje pierwotne funkcji:

$$(1) \quad f(x) = x^4 + x^3 + x^2$$

Na podstawie twierdzenia II i na podstawie wzoru:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(gdzie n jest liczbą naturalną, a C oznacza dowolną stałą), otrzymujemy:

$$\int (x^4 + x^3 + x^2) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

2. Obliczyć funkcje pierwotne funkcji:

$$(2) \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 1$$

Stosując twierdzenia I i II, dostajemy:

$$\begin{aligned} \int (2x^3 - 4x^2 + 2x - 1) dx &= \\ &= 2 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 2 \int x dx - \int dx = \\ &= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + C = \\ &= \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + x^2 - x + C \end{aligned}$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

Poznane przez nas twierdzenia pozwalają obliczyć funkcje pierwotne każdego wielomianu:

$$(3) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

Oznaczając dowolną funkcję pierwotną funkcji (3) przez $F(x)$, dostajemy:

$$F(x) = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + a_2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + a_n x + C$$

gdzie C oznacza dowolną stałą. Widzimy stąd, że funkcja pierwotna wielomianu jest wielomianem stopnia o 1 wyższego.

Funkcja pierwotna funkcji potęgowej.

Wiemy, że $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^n$, jeżeli n oznacza liczbę naturalną. Łatwo jednak zauważyć, że powyższe zachodzi także i w tym przypadku, gdy n jest dowolną liczbą wymierną, różną od -1 . Mamy bowiem, w myśl twierdzenia o pochodnej funkcji potęgowej:

$$F'(x) = \frac{n+1}{n+1} x^n = x^n = f(x)$$

Przykłady:

1. Obliczyć funkcje pierwotne funkcji:

$$(4) \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4}$$

Oznaczamy dowolną funkcję pierwotną funkcji (4) przez $F(x)$. Uwzględniając, że:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^{-2} + x^{-4}$$

dostajemy:

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

czyli:

$$F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

przy czym C oznacza dowolną stałą.

Ostatecznie mamy wzór:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

2. Obliczyć funkcje pierwotne funkcji:

$$(5) \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Oznaczmy dowolną funkcję pierwotną funkcji (5) przez $F(x)$. Uwzględniając, że $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, dostajemy:

$$F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

czyli:

$$F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

gdzie C jest dowolną stałą, a więc:

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

Ćwiczenia.

518. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji:

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = 5x^3$

c) $f(x) = -6x^5$

d) $f(x) = -5x + 1$

e) $f(x) = 2x - 3$

f) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

g) $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2$

h) $f(x) = 2x^4 - 1$

i) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

j) $f(x) = (x-2)(x-3)$

k) $f(x) = 10x^9 + 5x^4$

l) $f(x) = 4x(x-1)^2$

m) $f(x) = 2ax + b$

n) $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

o) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{8}$

p) $f(x) = (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^n$

(n : liczba naturalna)

519. Oblicz funkcje pierwotne następujących funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = 2x\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{x^4}$

h) $f(x) = \frac{3x-\sqrt{x}}{x^3}$

i) $f(x) = x(\sqrt{x}-1)$

j) $f(x) = (\sqrt[3]{x}+1)^3$

520. Dana jest funkcja:

$$f(x) = 3x^2 - x + 2$$

Wyznacz taką funkcję pierwotną tej funkcji, która dla $x=2$ przyjmuje wartość 5.

521. Dana jest funkcja:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Wyznacz taką funkcję pierwotną tej funkcji, która dla $x=-4$ przyjmuje wartość $38\frac{1}{2}$.

522. Wykaż, że funkcja:

$$F(x) = \frac{1}{8}(2+x^2)^4$$

jest funkcją pierwotną funkcji:

$$f(x) = x(2+x^2)^3$$

523. Wykaż, że funkcja:

$$F(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

jest funkcją pierwotną funkcji:

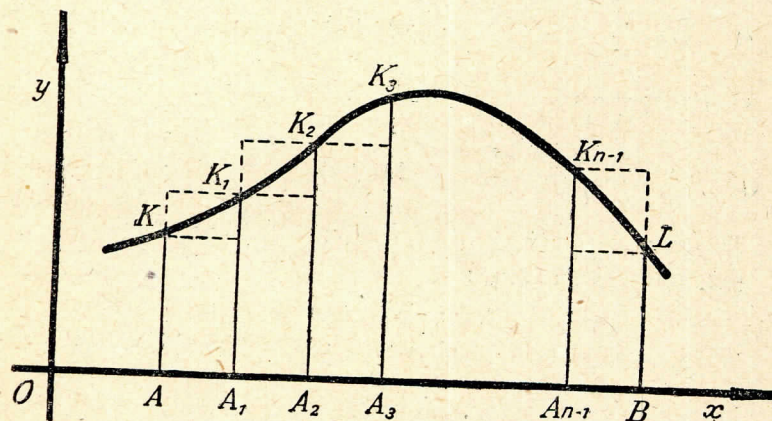
$$f(x) = 2 \cos x \cos 2x$$

[H] [M]

§ 44. Całka określona.

Pojęcie całki określonej.

Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale (a, b) i przybierająca w tym przedziale wartości dodatnie. Niech krzywa ciągła na rys. 54 będzie obrazem geometrycznym tej funkcji. W punktach A i B odpowiadających krańcom przedziału a i b poprowadźmy rzędne AK i BL . Otrzymamy trapez krzywo-



Rys. 54.

liniowy, ograniczony odcinkiem AB osi x -ów, rzędnymi AK i BL oraz łukiem KL . Nasuwa się pytanie, co należy rozumieć przez pole figury $AKLB$ i jak to pole obliczyć.

Podzielmy odcinek AB na n równych części za pomocą punktów: $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ i we wszystkich tych punktach

poprowadźmy odnośne rzędne: $A_1K_1, A_2K_2, \dots, A_{n-1}K_{n-1}$. Figura $AKLB$ została w ten sposób podzielona na n pasków.

Pierwszy z tych pasków AKK_1A_1 zastąpimy prostokątem o podstawie AA_1 i wysokości równej najmniejszej rzędnej $\underline{f}_1$, którą krzywa posiada w tym pasku *). Tak samo drugi pasek $A_1K_1K_2A_2$ zastąpimy prostokątem o podstawie A_1A_2 i wysokości równej najmniejszej rzędnej $\underline{f}_2$, którą krzywa posiada w tym pasku. W podobny sposób postąpimy z każdym z pozostałych pasków. Otrzymamy układ prostokątów, który zawiera się w figurze $AKLB$. Sumę pól tych prostokątów oznaczmy przez $\underline{S}_n$. Jeżeli podstawę każdego prostokąta oznaczmy przez Δx , a wysokość i -tego prostokąta przez $\underline{f}_i$, wówczas możemy napisać:

$$\underline{S}_n = \underline{f}_1 \Delta x + \underline{f}_2 \Delta x + \dots + \underline{f}_n \Delta x$$

czyli:

$$(6) \quad \underline{S}_n = (\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \dots + \underline{f}_n) \Delta x$$

Suma $\underline{S}_n$ przedstawia przybliżoną wartość pola figury $AKLB$ z niedomiarem.

Zastąpimy teraz pierwszy pasek AKK_1A_1 prostokątem o podstawie AA_1 i wysokości równej największej rzędnej $\bar{f}_1$, którą krzywa posiada w tym pasku **). Tak samo drugi pasek $A_1K_1K_2A_2$ zastąpimy prostokątem o podstawie A_1A_2 i wysokości równej największej rzędnej $\bar{f}_2$, którą krzywa posiada w tym pasku. W podobny sposób postąpimy w każdym z pozostałych pasków. Otrzymamy układ prostokątów, w którym jest zawarta figura $AKLB$. Sumę pól tych prostokątów oznaczmy przez $\bar{S}_n$. Jeżeli podstawę każdego prostokąta oznaczmy przez Δx , a wysokość i -tego prostokąta przez $\bar{f}_i$, wówczas możemy napisać:

$$\bar{S}_n = \bar{f}_1 \Delta x + \bar{f}_2 \Delta x + \dots + \bar{f}_n \Delta x$$

czyli:

$$\bar{S}_n = (\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots + \bar{f}_n) \Delta x$$

*) Taka rzędna najmniejsza istnieje, gdyż w rozpatrywanym przedziale funkcja $f(x)$ jest ciągła.

**) Taka rzędna największa istnieje, gdyż w rozpatrywanym przedziale funkcja $f(x)$ jest ciągła.

Suma $\bar{S}_n$ przedstawia przybliżoną wartość pola figury $AKLB$ z nadmiarem.

Jest rzeczą intuicyjnie zrozumiałą, że gdy n obierzemy dostatecznie wielkie (tzn. gdy figurę podzielimy na dostatecznie wąskie paski), wówczas różnicę pomiędzy $\bar{S}_n$ i $\underline{S}_n$ możemy uczynić dowolnie małą. Własność tę można udowodnić zupełnie ściśle. Można mianowicie wykazać, że gdy n rośnie nieograniczenie, wówczas obie sumy $\bar{S}_n$ i $\underline{S}_n$ dążą do tej samej granicy S (dowód ten jednak pomijamy w tej książce).

Granice S nazywamy całką określoną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) . Całkę tę oznaczamy symbolem:*)

$$\int_a^b f(x) dx$$

Przyjmujemy, że pole figury $AKLB$ jest równe wartości całki określonej:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Obliczanie pola za pomocą całkowania.

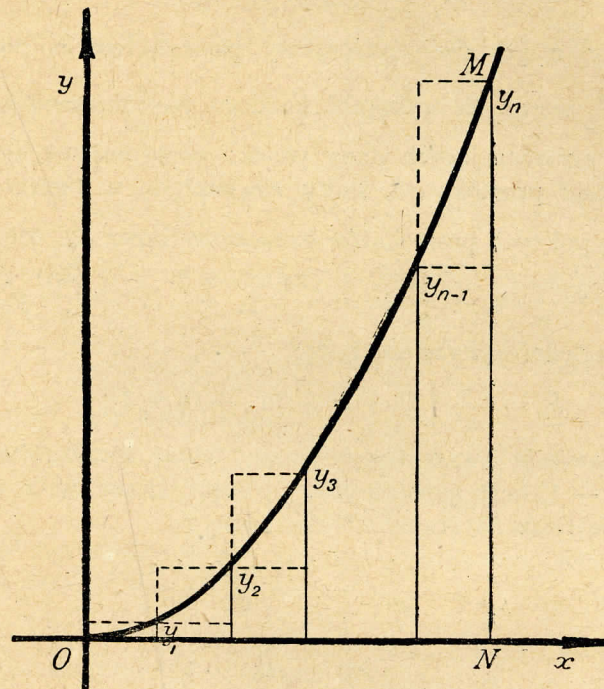
Zastosujemy teraz powyższe rozważania do łatwego przykładu konkretnego.

Weźmy pod uwagę parabolę $y = ax^2$ ($a > 0$), której obraz geometryczny mamy na rys. 55. Z punktu M paraboli, którego odcięta wynosi x_0 ($x_0 > 0$) prowadzimy prostopadłą MN do osi x -ów i otrzymujemy trójkąt krzywoliniowy OMN . Obliczmy pole tej figury, określone przez wartość całki:

$$\int_0^{x_0} ax^2 dx$$

*) Znak całki $\int$ jest wydłużoną literą S i przypomina, że całka jest granicą pewnej sumy.

Dzielimy odcinek ON równy x_0 na n równych części i wystawiamy rzędne we wszystkich punktach podziału. Figura OMN zostaje w ten sposób podzielona na n pasków o szerokości $\frac{x_0}{n}$.



Rys. 55.

Kolejne rzędne: $y_1, y_2, \dots, y_n$, ograniczające te paski, możemy łatwo obliczyć; otrzymujemy:

$$\begin{aligned} y_1 &= a \left(\frac{x_0}{n} \right)^2 = \frac{ax_0^2}{n^2} \\ y_2 &= a \left(\frac{2x_0}{n} \right)^2 = \frac{4ax_0^2}{n^2} \\ y_3 &= a \left(\frac{3x_0}{n} \right)^2 = \frac{9ax_0^2}{n^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y_{n-1} = a \left[\frac{(n-1)x_0}{n} \right]^2 = \frac{(n-1)^2 a x_0^2}{n^2}$$

$$y_n = a \left(\frac{n x_0}{n} \right)^2 = \frac{n^2 a x_0^2}{n^2}$$

Każdy z pasków zastępujemy prostokątem o podstawie równej $\frac{x_0}{n}$ biorąc za wysokość każdego paska mniejszą z obu rzędnych ograniczających dany pasek; otrzymujemy tym sposobem układ prostokątów, który zawiera się w figurze OMN .

Sumę pól tych prostokątów oznaczamy przez $\underline{S}_n$. Mamy:

$$\underline{S}_n = \frac{x_0}{n} \cdot 0 + \frac{x_0}{n} \cdot y_1 + \frac{x_0}{n} \cdot y_2 + \dots + \frac{x_0}{n} \cdot y_{n-1}$$

czyli, uwzględniając równości (8):

$$\underline{S}_n = \frac{a x_0^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]$$

W nawiasie kwadratowym mamy sumę kwadratów pierwszych $(n-1)$ liczb naturalnych. Stosując znany wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych*) dostajemy:

$$\underline{S}_n = \frac{a x_0^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

czyli:

$$(9) \quad \underline{S}_n = a x_0^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

Obliczyliśmy zatem przybliżenie pola figury OMN z niedomiarem.

Aby obliczyć także przybliżenie tego pola z nadmiarem, zastępujemy każdy z n pasków prostokątem o podstawie rów-

*) Wzór ten ma postać:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Odejmując od obu stron n^2 otrzymujemy:

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

nej $\frac{x_0}{n}$, biorąc za wysokość każdego paska większą z obu rzędnych ograniczających dany pasek; otrzymujemy wtedy układ prostokątów, w którym jest zawarta figura OMN .

Sumę pól tych prostokątów oznaczamy przez $\bar{S}_n$. Mamy:

$$\bar{S}_n = \frac{x_0}{n} \cdot y_1 + \frac{x_0}{n} \cdot y_2 + \dots + \frac{x_0}{n} \cdot y_n$$

czyli:

$$\bar{S}_n = \frac{a x_0^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$$

Stosując wzór na sumę kwadratów liczb naturalnych, otrzymujemy:

$$\bar{S}_n = \frac{a x_0^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i po łatwym przekształceniu:

$$(10) \quad \bar{S}_n = a x_0^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

Załóżmy teraz, że n rośnie nieograniczenie. Ze wzoru (9) wynika, że:

$$\underline{S}_n \rightarrow \frac{1}{3} a x_0^3$$

podobnie otrzymujemy ze wzoru (10):

$$\bar{S}_n \rightarrow \frac{1}{3} a x_0^3$$

Oznaczając pole figury OMN przez S , możemy więc napisać:

$$(11) \quad S = \int_0^{x_0} a x^2 dx = \frac{1}{3} a x_0^3$$

Metoda obliczania powyższej całki polegała na bezpośrednim wyznaczeniu sum $\underline{S}_n$ i $\bar{S}_n$ (przybliżeń z niedomiarem i nadmiarem) i następnym przejściu do granicy. Metoda taka, jak poucza nasz przykład, wymaga długich rachunków nawet w stosunkowo prostych przypadkach. Znamy jednak inny, znacznie dogodniejszy

sposób obliczania całek, w wielu wypadkach szybko prowadzący do celu. Sposób ten omówimy w § następnym.

[: U w a g a. Wprowadzając całkę określoną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) zastrzeżliśmy, że funkcja $f(x)$ przybiera w tym przedziale wartości dodatnie. W podobny jednak sposób możemy wprowadzić całkę określoną dowolnej funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) , a więc takiej, która w danym przedziale przybiera wartości dodatnie, zerowe i ujemne.

Niech będzie dana dowolna funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale (a, b) . Podzielmy, jak wyżej, przedział (a, b) na n równych podprzedziałów o długości Δx i oznaczmy najmniejszą wartość funkcji w i -tym podprzedziale przez $\underline{f}_i$, a największą wartość funkcji w tym podprzedziale przez $\bar{f}_i$. Utwórzmy sumy:

$$\underline{S}_n = (\underline{f}_1 + \underline{f}_2 + \dots + \underline{f}_n) \Delta x$$

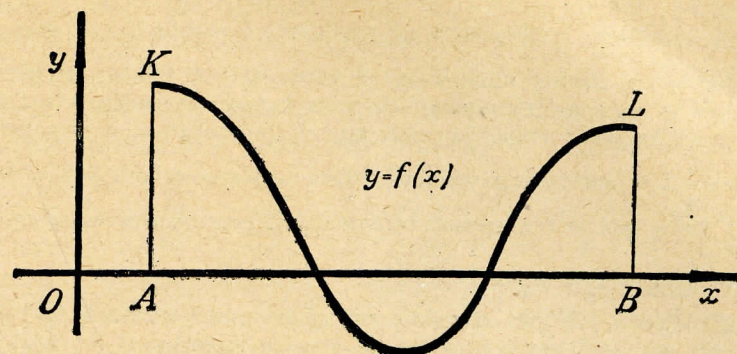
$$\bar{S}_n = (\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \dots + \bar{f}_n) \Delta x$$

Otóż można wykazać, że gdy n rośnie nieograniczenie, wówczas obie sumy $\underline{S}_n$ i $\bar{S}_n$ dążą do tej samej granicy S .

Granice S nazywamy całką określoną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) i piszemy, jak wyżej:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Interpretacja geometryczna tej całki w przypadku ogólnym jest następująca: Niech krzywa ciągła na rys. 56 będzie obrazem geometrycznym funkcji $y = f(x)$. W punktach A i B , odpowiadających krańcom przedziału a i b , poprowadźmy rzędne AK i BL . Figura, ograniczona odcinkiem AB , rzędnymi AK i BL oraz łukiem krzywej, rozpada się na obszary, z których niektóre leżą nad osią x -ów, inne zaś pod osią x -ów. Otóż wartość całki określonej jest równa sumie algebraicznej pól tych obszarów, przy czym pole obszaru leżącego nad osią x -ów uważane jest za dodatnie, a pole obszaru leżącego pod osią x -ów za ujemne. :]



Rys. 56.

Ćwiczenia.

524. Opierając się na definicji całki określonej, oblicz:

a) $\int_0^{x_0} x dx$ ($x_0 > 0$)

b) $\int_0^{x_0} a x dx$ ($x_0 > 0$)

c) $\int_a^b 2 x dx$ ($b > a > 0$)

525. Opierając się bezpośrednio na definicji całki określonej, oblicz:

$$\int_1^{x_0} (3x^2 + 2x + 1) dx \quad (x_0 > 0)$$

526. Dany jest trójkąt ABC , w którym podstawa AB równa jest a , a wysokość CD równa jest h . Wysokość CD dzielimy na n równych części i przez punkty podziału prowadzimy odcinki równoległe do podstawy, przez co trójkąt zostaje podzielony na n trapezów *). Każdy

*) Jedna z części jest trójkątem, który uważać można jako przypadek graniczny trapezu.

z tych trapezów zastępujemy prostokątem o wysokości równej $\frac{h}{n}$ i o podstawie równej mniejszemu z równoległych boków trapezu; sumę pól w ten sposób otrzymanych prostokątów oznaczamy przez p_n . Następnie każdy z trapezów zastępujemy prostokątem o wysokości równej $\frac{h}{n}$ i o podstawie równej większemu z równoległych boków trapezu; sumę pól w ten sposób otrzymanych prostokątów oznaczamy przez P_n .

1°. Oblicz p_n i P_n .

2°. Wykaż, że gdy n rośnie nieograniczenie, wówczas p_n i P_n dążą do wspólnej granicy, oblicz tę granicę i porównaj jej wartość z wartością pola trójkąta ABC .

527. Dany jest ostrosłup, którego podstawa ma pole równe P , a wysokość równa się h . Wysokość ostrosłupa dzielimy na n równych części i przez punkty podziału prowadzimy płaszczyzny równoległe do podstawy, przez co ostrosłup zostaje podzielony na n ostrosłupów ściętych**). Każdy z tych ostrosłupów ściętych zastępujemy graniastoslupem o wysokości równej $\frac{h}{n}$ i o podstawie równej mniejszej z podstaw ostrosłupa ściętego; sumę objętości otrzymanych w ten sposób graniastoslupów oznaczamy przez v_n . Następnie każdy z ostrosłupów ściętych zastępujemy graniastoslupem o wysokości równej $\frac{h}{n}$ i o podstawie równej większej z podstaw ostrosłupa ściętego; sumę objętości otrzymanych w ten sposób graniastoslupów oznaczamy przez V_n .

1°. Oblicz v_n i V_n .

2°. Wykaż, że gdy n rośnie nieograniczenie, wówczas v_n i V_n dążą do wspólnej granicy, i oblicz tę granicę.

3°. Jakie jest znaczenie geometryczne tej granicy?

[H] [M]

§ 45. Funkcja pierwotna a całka określona.

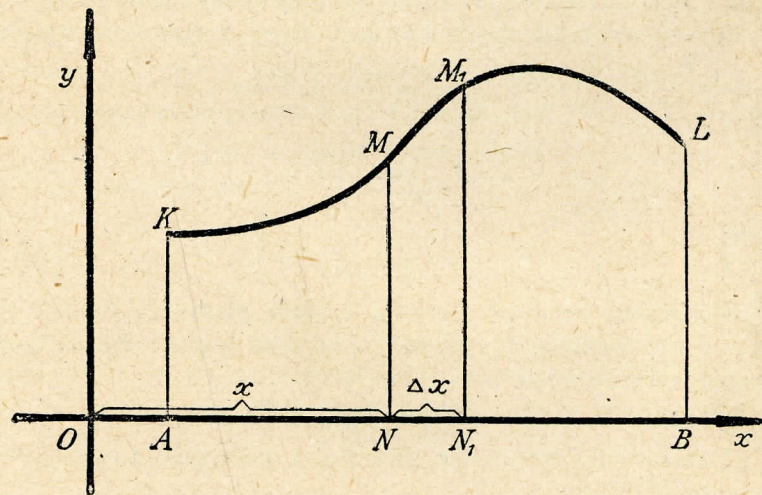
Wzór zasadniczy rachunku całkowego.

Niech będzie dana funkcja $f(x)$, o której zakładamy, że jest ciągała w przedziale (a, b) i przybiera w tym przedziale

*) Jedną z części jest ostrosłupem, który uważać można jako przypadek graniczny ostrosłupa ściętego.

wartości dodatnie. Niech krzywa ciągła na rys. 57 będzie obrazem geometrycznym tej funkcji.

Z punktów K i L , których odcięte są a i b , poprowadźmy rzędne KA i LB . Obierzmy na łuku KL punkt M , poprowadźmy rzędną MN i oznaczmy odciętą ON punktu M przez x . Gdy punkt M posuwa się na krzywej od punktu K do punktu L , wówczas x rośnie od a do b . Pole figury $AKMN$, ograniczonej osią x -ów, krzywą KL , stałą rzędną KA i zmienną rzędną MN , jest oczywiście jednoznacznie wyznaczone przez wartość zmiennej x , czyli pole to jest pewną funkcją $P(x)$ zmiennej x . Otóż łatwo wykazać, że funkcja $P(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.



Rys. 57.

W samej rzeczy, obierzmy na łuku KL oprócz punktu M o odciętej x jeszcze punkt M_1 o odciętej $x + \Delta x$ i poprowadźmy także rzędną M_1N_1 . Pole figury AKM_1N_1 równe jest oczywiście $P(x + \Delta x)$. Przyrostowi Δx zmiennej x (zakładamy, że $\Delta x > 0$) odpowiada przyrost funkcji $P(x)$, równy $P(x + \Delta x) - P(x)$, czyli równy polu paska NMM_1N_1 . Oznaczmy przez f najmniejszą rzędną, a przez $\bar{f}$ największą rzędną, jaką krzywa

posiada w tym pasku. Jasną jest rzeczą, że pole paska NMM_1N_1 jest niemniejsze niż $\underline{f}\Delta x$ i niewiększe niż $\overline{f}\Delta x$. Możemy więc napisać:

$$\underline{f}\Delta x \leq P(x + \Delta x) - P(x) \leq \overline{f}\Delta x$$

Dzieląc przez Δx otrzymujemy:

$$(12) \quad \underline{f} \leq \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \leq \overline{f}$$

Łatwo zauważyć, że nierówność (12) zachodzi także i wtedy, gdy $\Delta x < 0$.

Załóżmy teraz, że przy stałym x przyrost Δx dąży do 0; rzędna M_1N_1 zbliża się wówczas nieograniczenie do rzędnej MN , z czego — z uwagi na ciągłość funkcji $f(x)$ — z łatwością wynika, że $\underline{f}$ i $\overline{f}$ dążą do wspólnej granicy, która równa jest wartości rzędnej MN , czyli $f(x)$. Biorąc to pod uwagę, otrzymujemy:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} = f(x)$$

czyli:

$$(13) \quad P'(x) = f(x)$$

Oznaczmy teraz dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ przez $F(x)$. Funkcja $F(x)$ różni się więc od funkcji $P(x)$ o liczbę stałą C ; mamy więc:

$$(14) \quad F(x) = P(x) + C$$

Podstawiając we wzorze (14) $x = b$, następnie $x = a$, dostajemy dwie równości:

$$(15) \quad F(b) = P(b) + C$$

$$F(a) = P(a) + C$$

Odejmując te równości stronami otrzymujemy:

$$(16) \quad F(b) - F(a) = P(b) - P(a)$$

Jest rzeczą jasną, że $P(a) = 0$, a $P(b)$ równe jest polu figury $AKLB$; pole to, w myśl (16), równe jest różnicy: $F(b) - F(a)$.

Z drugiej strony, pole figury $AKLB$ równa się całce:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Możemy więc napisać:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Przy wyprowadzeniu powyższego wzoru korzystaliśmy z przedstawienia graficznego funkcji $f(x)$ i zakładaliśmy, że funkcja ta przybiera w przedziale (a, b) wartości dodatnie. Wzór ten daje się jednak także udowodnić zupełnie ściśle (a więc niezależnie od interpretacji geometrycznej funkcji) dla dowolnej funkcji ciągłej $f(x)$. Otrzymujemy więc wynik następujący:

Funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale (a, b) , posiada w tym przedziale funkcję pierwotną.

Jeżeli $F(x)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, wówczas zachodzi wzór:

$$(17) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Wzór (17) wyraża związek pomiędzy funkcją pierwotną funkcji ciągłej a jej całką określoną. Pozwala on sprowadzić obliczenie całki określonej do znalezienia funkcji pierwotnej. Wzór (17) jest zasadniczym wzorem rachunku całkowego.

Aby obliczyć całkę określoną:

$$\int_a^b f(x) dx$$

poszukujemy funkcji pierwotnej w postaci całki nieokreślonej:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

a następnie obliczamy wartości funkcji pierwotnej $F(x)$ przy $x = b$ i $x = a$, wreszcie obliczamy różnicę:

$$F(b) - F(a)$$

Przykłady obliczania całki.

1. Obliczmy:

$$\int_0^{x_0} ax^2 dx$$

Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = ax^2$ jest, jak wiemy, funkcja $F(x) = \frac{1}{3}ax^3$. Mamy więc, w myśl wzoru (17):

$$\int_0^{x_0} ax^2 dx = F(x_0) - F(0) = \frac{1}{3}ax_0^3$$

Taki sam wynik otrzymaliśmy w § poprzednim, stosując metodę opartą bezpośrednio na definicji całki.

U w a g a. Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = ax^2$ jest każda funkcja $F(x)$ postaci:

$$F(x) = \int ax^2 = \frac{1}{3}ax^3 + C$$

gdzie C oznacza dowolną stałą. Jednakże przy obliczaniu całki określonej jako różnicy $F(x_0) - F(0)$ stała C nie ma znaczenia, i dlatego przyjęliśmy funkcję pierwotną w postaci: $F(x) = \frac{1}{3}ax^3$.

2. Obliczmy:

$$\int_a^b x^n dx \quad (n : \text{liczba naturalna})$$

Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^n$ jest, jak wiemy, funkcja:

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Mamy więc, w myśl wzoru (17):

$$\int_a^b x^n dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

3. Obliczmy pole figury zawartej między łukiem krzywej $y = \sin x$ a odcinkiem osi x -ów, odpowiadającym przedziałowi $(0, \pi)$.

Szukane pole równe jest oczywiście:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx$$

Funkcją pierwotną funkcji $\sin x$ jest, jak łatwo zauważyć, funkcja:

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

Mamy więc, w myśl wzoru (17):

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

*

W rozdziale tym poznaliśmy najprostsze przykłady zastosowania pojęcia całki określonej oraz funkcji pierwotnej. Pojęcia te opierają się na ideach Newtona i Leibniza. Ścisłą definicję całki określonej funkcji ciągłej, opartą na teorii granic, zawdzięczamy Cauchy'emu.

Ćwiczenia.

528. Obliczyć całki określone:

a) $\int_1^4 (3x^2 + 2x + 1) dx$

b) $\int_2^3 (x^3 - \frac{3}{4}x^2) dx$

c) $\int_1^{x_0} \frac{3}{\sqrt{x}} dx \quad (x_0 > 1)$

529. Dana jest krzywa $y = ax^3$ ($a > 0$). Z punktu P , obranego na tej krzywej, którego odcięta wynosi x_0 (zakładamy, że $x_0 > 0$), prowadzimy rzędną PP_1 . Oblicz pole trójkąta krzywoliniowego OPP_1 .

530. Dana jest krzywa $y = \sqrt{x}$. Z punktu P , obranego na tej krzywej, którego odcięta wynosi a , prowadzimy rzędną PP_1 . Oblicz pole trójkąta krzywoliniowego OPP_1 .

531. Dana jest krzywa $y = \frac{1}{x^2}$. Z punktów K i L , obranych na tej krzywej, których odcięte wynoszą 1 i a (zakładamy, że $a > 1$), prowadzimy rzędne KK_1 i LL_1 .

1°. Oblicz pole utworzonego trapezu krzywoliniowego.

2°. Do jakiej granicy dąży wartość tego pola, gdy $a \rightarrow +\infty$?

532. Wykazać, że dla funkcji $f(x) = x^2$ zachodzi wzór:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

533. Wykazać, że dla funkcji $f(x) = x^3$ zachodzi wzór:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

5. Wskazówka. Dodaj nierówności:

$$a^2 + b^2 > 2ab, \quad b^2 + c^2 > 2bc, \quad c^2 + a^2 > 2ca.$$

11. d) $-\frac{1}{2} < x < 3$, e) $4 < x < 19$.

14. Jeżeli $m < \frac{2}{3}$, to $x > 1$.

15. Jeżeli $m > 10$, to równanie nie ma pierwiastków.

17. d) $2 < x \leq 4$, e) $x < -14$ albo $x > 26$,

f) $x > -\frac{1}{4}$ albo $x < -\frac{3}{4}$.

22. a) ab b) $\frac{1}{abc}$ c) $\frac{(a+b+c)a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ d) $\left[\frac{abc}{ab+bc+ca} \right]^2$

34. a) 1, b) 16.

70. a) $1-m$, b) $1+2m$, c) $4m$, d) $5m-1$.

71. i) $3m+n-1$, j) $2m+2n-2$, m) $2n+1-m$.

91. a) $x = \frac{9}{2}$, b) $x = \frac{1}{5}$ albo $x = 2$, c) $x = 2$, d) $x = -\frac{11}{6}$,
e) $x = -1$ albo $x = 2$.

92. a) $x = -1$, b) $x = 2$, c) $x = 5$, d) $x = 3$, e) $x = 3$.

93. a) $x = 2$, b) $x = 2$, c) $x = 2$, d) $x = -2$ albo $x = 0$,
e) $x = -1$ albo $7^x = 5$ czyli $x = \log 5 : \log 7$.

94. a) $x = 4$, $y = 1$ albo $2^x = 3$, $3^y = 16$
czyli $x = \log 3 : \log 2$, $y = 4 \log 2 : \log 3$, b) $x = 3$, $y = 1$.

95. a) $x = \frac{5}{2}$, b) $x = \frac{3}{2}$, c) $x = 34$, d) $x = 3$ albo $x = 7$,
e) $x = 3$. [Przy $x = -2$ równanie traci sens].
96. a) $x = 0,001$ albo $x = \sqrt{10}$, b) $x = 0,00001$ albo $x = 100$.
106. c) $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{(5n+3)(5n+8)} > 0$
112. $7n-4$ 113. $4n+1$ 114. $a_n = 5n-3$ 115. $a_{n+1} = 13n+1$
117. $a_1 = \frac{(m-1)A - (n-1)B}{m-n}$ $d = \frac{B-A}{m-n}$
121. $a_1 = 4$, $d = 3$ albo $a_1 = 47$, $d = -\frac{77}{3}$. 122. $a_1 = 4$, $n = 10$.
126. Pierwszy wyraz postępu równa się $a x_1 + b$, a różnica postępu wynosi $a(x_2 - x_1)$.
129. Pierwszy wyraz postępu równa się $3a + b$, a różnica postępu wynosi $2a$.
130. $a_1 = 8$, $d = 2$ albo $a = -43$, $d = 19$. 131. 121.
132. $a_1 = 1$, $d = 5$. 133. $n = 10$.
134. a) $a_1 = 6$, $d = 12$. b) $a_1 = 8$, $d = 6$. 136. $\frac{3}{4}s$, s , $\frac{5}{4}s$.
137. Stosunek boków trójkąta wynosi $3:4:5$.
139. $x = m - 3$, $y = 1$, $z = m + 1$; $m = 2$.
140. Po lewej stronie mamy: $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, a po prawej stronie: $3a_n + 2$; powołując się na zadanie nr 123 stwierdzamy równość obu stron.
142. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 144. $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$
147. $a = 5$, $q = \frac{2}{3}$ albo $a = 5$, $q = -\frac{2}{3}$. 149. $a = 4$, $q = 1,2$.
150. $(0,98)^n \cdot 100$ kg 151. c) $93 \cdot (\sqrt{2} + 1)$
160. 2, 6, 18, 30 albo 2, -5, $12\frac{1}{2}$, 30
161. $d = 12$, $q = \frac{5}{2}$ albo $d = -3$, $q = \frac{5}{8}$.
163. $q = \frac{3}{2}$ albo $q = \frac{2}{3}$. 164. 1, 8, 15 albo 49, 8, -33.

165. $x = 1$, $y = m + 1$, $z = 5m + 1$; $m = 0$ albo $m = 3$.
169. $a_1 = 22$, $q = 2$. 171. Iloraz postępu wynosi $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1}$.
172. Iloraz postępu geometrycznego wynosi $a^{x_2 - x_1}$.
178. $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{q}{100}\right)^m$
181. 6383 m³
183. W roku 1925
184. Wzór $k_t = k_0 q^t$ daje $k_{100} = 1450$ L. W fizyce stosowany jest wzór przybliżony: $k_t = k_0(1 + at)$, gdzie $a = \frac{1}{273}$. Według tego wzoru otrzymalibyśmy $k_t = 1366$ L.
188. $4(2 + \sqrt{2})a$ 189. a) $3\pi R$ b) $\frac{9}{8}\pi R^2$ 190. $(\sqrt{2} + 1)a$
197. 1^o. Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe.
2^o. $10^{k+1} - 4 = 10 \cdot 10^k - 4 = 9 \cdot 10^k + (10^k - 4)$; jeżeli więc $10^k - 4$ jest podzielne przez 6, to i $10^{k+1} - 4$ jest podzielne przez 6, gdyż $9 \cdot 10^k$ dzieli się przez 6 przy każdym naturalnym k .
198. 1^o. Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe.
2^o. $2^{2(k+1)} + 5 = 4 \cdot 2^{2k} + 5 = 3 \cdot 2^{2k} + (2^{2k} + 5)$; jeżeli więc $2^{2k} + 5$ jest podzielne przez 3, to i $2^{2(k+1)} + 5$ jest podzielne przez 3, gdyż $3 \cdot 2^{2k}$ jest oczywiście podzielne przez 3.
201. $F(x) = (x-1)^3 - 2$, $F(1 + \sqrt[3]{2}) = 0$.
204. $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$. 205. $a = 7$, $b = -3$, $c = 2$.
206. $a = 4$, $b = -3$, $c = -5$.
207. $F(x) = 3x + (k-1)$. 218. t) Iloraz $= 3x^2 - x + a$.
219. i) Iloraz $= 3x^2 - x + a$, reszta $= -x + 4a$.
l) Iloraz $= x^{n+2} - 2x^n + 1$, reszta $= 2$.
220. $a = -18$. 221. $a = 21$, $b = 20$, $c = 6$.
222. $a = 3$, $b = -4$. 223. $q = \frac{p^2}{3}$, $r = \frac{p^3}{27}$.

238. $k = 7, l = -3$. 239. $k = -8, l = 12, m = 16$.

240. $k = \frac{3}{2}$ albo $k = \frac{1}{2}$. 247. Reszta $= 3x - 1$.

248. Reszta $= \frac{p-q}{a-b}x + \frac{aq-bp}{a-b}$

249. $k = 0, l = -8$. 250. $k = -3, l = -6$.

251. f) $(x-5)(x+5)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

252. f) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+k^2)$

253. f) $(x-3)(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

262. $p = -28, q = 32$.

263. Jeżeli a jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $x^3 + px + q$, to dzieląc dany wielomian przez $(x-a)$ otrzymamy iloraz $x^2 + ax + (a^2 + p)$ i resztę $a^3 + ap + q = 0$; dzieląc wielomian $x^2 + ax + (a^2 + p)$ znowu przez $(x-a)$ otrzymamy iloraz $x + 2a$ i resztę $3a^2 + p = 0$. Z równań: $a^3 + ap + q = 0$ i $3a^2 + p = 0$ obliczamy: $p = -3a^2$ i $q = 2a^3$, a więc $p^3 = -27a^6$ i $q^2 = 4a^6$, co ostatecznie daje:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0.$$

264. j) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$.

m) Wskazówka. Grupujemy wyrazy:

$$x^4(x-1) - 8x^2(x-1) + 15(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x^4 - 8x^2 + 15) = 0.$$

n), o) — zastosować grupowanie wyrazów.

267. Rozkładamy wyraz środkowy, by zastosować grupowanie wyrazów:

$$9x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 9x + 2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)(9x^2 - 9x + 2) = 0, \text{ stąd: } x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}.$$

268. Można zgrupować wyrazy:

$$4x^2(2x-3) - (2x-3) = 0,$$

$$(4x^2-1)(2x-3) = 0.$$

271. 2 cm, 3 cm, 4 cm. 272. 2 cm albo $(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)$ cm.

273. a) $x = -7, y = 12$ albo $x = 3, y = 2$.

b) $x = \frac{9}{5}, y = -\frac{13}{25}$ albo $x = 3, y = \frac{1}{5}$.

c) $x = -7, y = 2$ albo $x = 7, y = -2$.

d) $x = \frac{12}{5}, y = \frac{21}{4}$.

e) $x = -5, y = -7$ albo $x = 7, y = 5$.

f) $x = 2, y = 3$ albo $x = 3, y = 2$.

274. a) $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{17}{3} \\ y = \frac{247}{36} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = \sqrt{\frac{37}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\sqrt{\frac{37}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -9 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -9 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + \sqrt{327} \\ y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 - \sqrt{327} \\ y = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

275. a) $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 5 \end{cases}$ (rozwiązanie trzykrotne) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 3 \end{cases}$

276. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6\sqrt{\frac{3}{17}} \\ y = \sqrt{\frac{3}{17}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6\sqrt{\frac{3}{17}} \\ y = -\sqrt{\frac{3}{17}} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{12}{\sqrt{61}} \\ y = \frac{11}{\sqrt{61}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{12}{\sqrt{61}} \\ y = -\frac{11}{\sqrt{61}} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{30}{\sqrt{61}} \\ y = -\frac{3}{\sqrt{61}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{30}{\sqrt{61}} \\ y = \frac{3}{\sqrt{61}} \end{cases}$

$$d) \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{7}} \\ y = \frac{11}{\sqrt{7}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ y = -\frac{11}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$277. a) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (rozwiązanie dwukrotne)} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(11 - \sqrt{193}) \\ y = \frac{1}{2}(-7 + \sqrt{193}) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{193}) \\ y = \frac{1}{2}(-7 - \sqrt{193}) \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 33 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{11}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$278. x = 1, y = 2.$$

280. a) Jeżeli $y = x + 2$, to oba równania są jednocześnie spełnione.

b) Jeżeli $y = 2x + 1$, to oba równania są jednocześnie spełnione, a ponadto układ ma jeszcze rozwiązanie: $x = \frac{7}{11}$, $y = -\frac{16}{11}$.

c) Odejmując dane równania stronami otrzymujemy warunek: $y = x + 5$; przy spełnieniu tego warunku oba równania są jednocześnie spełnione.

281. a) Podstawiając $y = 3x + 1$ do drugiego równania dochodzimy do sprzeczności: $1 = 0$.

c) Podstawiając $y = x^2 - 2$ do pierwszego równania dochodzimy do sprzeczności: $6 = 0$.

$$284. a) x = 3, y = 4, z = 5 \text{ albo } x = -3, y = -4, z = -5.$$

Wskazówka. Dzieląc pierwsze równanie przez trzecie (co wolno, gdyż ani y , ani $x + y$ nie może być zerem), otrzymujemy stosunek: $z = \frac{5}{4}y$. Rugując z otrzymamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

$$b) x = 2, y = 5, z = 7 \text{ albo } x = 7, y = 5, z = 2.$$

Wskazówka. Podstawiając z z trzeciego równania do drugiego $xz = y^2 - 11$ otrzymamy równanie z jedną niewiadomą.

$$c) \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Wskazówka. Rugując z otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ xy(x + y) = -12 \end{cases}$$

Podstawiając $x + y = u$, $xy = v$ otrzymamy układ:

$$\begin{cases} u^2 - v = 13 \\ uv = -12 \end{cases}$$

Po wyrugowaniu v otrzymamy równanie:

$$(u - 1)(u - 3)(u + 4) = 0.$$

$$285. 20 \text{ cm}, 21 \text{ cm}, 29 \text{ cm}.$$

$$286. a = 3 \text{ cm}, h = 5 \text{ cm} \text{ albo } a = \frac{13}{3} \text{ cm}, h = \frac{7}{3} \text{ cm}.$$

$$287. f) x < -\frac{7}{3} \text{ albo } x > \frac{5}{2}.$$

i) Nierówność spełniona przy każdym x .

j) $x \neq \frac{3}{4}$. l) Nierówność jest sprzeczna.

$$m) x < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \text{ albo } x > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

$$n) x < \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ albo } x > \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

o) Nierówność jest sprzeczna.

$$289. b) x < \frac{1}{3} \text{ albo } \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}. \quad d) x < 1 \text{ albo } x > 5.$$

$$f) x < -3 \text{ albo } 5 < x < 7.$$

290. Jeżeli $-1 < m < 4$, to równanie nie ma pierwiastków.

291. Jeżeli $m < 1 - 2\sqrt{3}$ albo $m > 1 + 2\sqrt{3}$, to równanie ma dwa pierwiastki.

292. Jeżeli $|m| < 2$, to równanie ma dwa pierwiastki.

295. $|m| < \frac{2}{3}$. 296. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} < m < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

297. Wskazówka. Sprowadzić nierówność do postaci:

$$f(y) = 3y^2 - 3xy + (x^2 + 1) > 0$$

i rozważyć wyróżnik funkcji $f(y)$:

$$D = (-3x)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (x^2 + 1) = -3(x^2 + 4)$$

298. Wskazówka. Sprowadzić nierówność do postaci:

$$f(y) = y^2 - (3x - 1)y + (3x^2 - x + 1) > 0,$$

rozważyć wyróżnik funkcji $f(y)$:

$$D = (3x - 1)^2 - 4 \cdot (3x^2 - x + 1) = -(3x^2 + 2x + 3)$$

i wykazać, że wyróżnik ten jest ujemny przy wszystkich wartościach x .

299. i) $x > 2$, j) $x < 1$, k) $x < -\sqrt{3}$ albo $\sqrt{3} < x < 3$, l) $1 < x < 3$,

300. Warunki: $q^2 + q > 1$, $q + 1 > q^2$, $1 + q^2 > q$ będą spełnione, gdy $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) < q < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

305. Wysokość prostokąta: x cm, obwód prostokąta: $(24 - x)$ cm, pole prostokąta: $\frac{3}{2}x(8 - x)$ cm².

306. Wysokość prostokąta: x , obwód prostokąta: $2 \cdot \left[\frac{a}{h}(h - x) + x \right]$, pole prostokąta: $\frac{a}{h}(h - x)x$.

307. $EF = x$, pole $DEF = \frac{h}{2a}(a - x)x$.

308. Wysokość trapezu: x dcm, pole trapezu: $(1 + \sqrt{1 - x^2})x$ dcm².

309. $AA' = x$, $BB' = \frac{K^2}{x}$. 310. $y = 2R \cos^2 x$.

311. Pole trójkąta: $\frac{S}{\pi} \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$.

312. Objętość walca: $\frac{1}{4}\pi (2R - x)^2 x$.

313. Objętość bryły: $\frac{1}{3}\pi \sin^2 x \cdot 1000$ cm³.

316. $y = 2x - 1$

320. d) Wszystkie liczby z wyjątkiem $x = -3$. e) $x \geq 2$.

h) Wszystkie liczby z wyjątkiem $x = 3$ i $x = 7$.

i) Bez ograniczenia. j) $x \geq \frac{5}{2}$. k) $4\frac{1}{2} \leq x \leq 6$.

m) $x \leq 3$ lub $x \geq 4$. o) $x \geq \frac{8}{3}$, ale $x \neq 4$. q) $x > 0$.

r) $|x| \neq 1$. t) $0 < x < 5$. w) $x \geq 10$.

x) x nie może być nieparzystą wielokrotnością kąta prostego.

y) x nie może być wielokrotnością kąta półpełnego.

z) x nie może być wielokrotnością kąta prostego.

331. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ i $x_1 < x_2$; wówczas:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$

Licznik ułamka jest dodatni; jeżeli x_1 i x_2 leżą po tej samej stronie względem zera, tzn. jeżeli x_1 i x_2 oba są dodatnie albo oba ujemne, to mianownik ułamka $x_1 x_2$ jest również dodatni. A więc: jeżeli $x_1 < x_2 < 0$ albo $0 < x_1 < x_2$, to $f(x_1) - f(x_2) > 0$, tzn. mniejszej wartości zmiennej niezależnej x odpowiada większa wartość funkcji $f(x)$, a więc rozważana funkcja maleje w każdym przedziale nie zawierającym zera.

338. g) $\frac{1}{4}$, h) $\frac{2}{3}$, i) -8 , j) 108 . 339. a) 0 , b) 64 , c) 1 .

340. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$.

343. 1) gdy $x < 0$ i $x \rightarrow 0$, to $f(x) \rightarrow +\infty$
„ $x > 0$ i $x \rightarrow 0$, „ $f(x) \rightarrow -\infty$

2) gdy $x < 5$ i $x \rightarrow 5$, to $f(x) \rightarrow -\infty$
„ $x > 5$ i $x \rightarrow 5$, „ $f(x) \rightarrow +\infty$

344. h) $\frac{4}{9}$, i) $\sqrt{2}$, j) $\frac{1}{3}$. 345. h) $-\infty$, j) 0 .

346. c) $\frac{2}{3}$, d) 0 , e) 1 , f) 2 , g) 0 . 348. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

351. $x = \frac{k+2}{k^2-4k+6}$, $y = \frac{-2k^2+9k-10}{k^2-4k+6}$;
gdy $k \rightarrow 2$, to $x \rightarrow 2$, $y \rightarrow 0$.

352. Gdy $m \rightarrow +\infty$ albo $m \rightarrow -\infty$, to $x \rightarrow 2$, $y \rightarrow 3$, $z \rightarrow 4$.

353. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{2}{m^2}$; gdy $m \rightarrow +\infty$ albo $m \rightarrow -\infty$, to $x_2 \rightarrow 0$.

354. Gdy $x \rightarrow \infty$, to pole trapezu $\frac{1}{2}ah \frac{2x-h}{x}$ dąży do ah .

355. $AB = x$, $AC = \frac{2Rx}{\sqrt{R^2+x^2}}$; gdy $x \rightarrow \infty$, to $AC \rightarrow 2R$.

$$356. AC = x, \frac{AD}{AB} = \sqrt{\frac{8R-3x}{8R-4x}}; \text{ gdy } x \rightarrow 0, \text{ to } \frac{AD}{AB} \rightarrow 1.$$

$$357. xy = R^2; \text{ gdy } x \rightarrow 0, \text{ to } y \rightarrow \infty \text{ i na wzajem.}$$

$$358. m = a \cdot \frac{\sin a}{\sin \frac{3}{2}a}; \text{ gdy } a \rightarrow 90^\circ, \text{ to } m \rightarrow a\sqrt{2}.$$

$$359. \frac{AC}{AB} = \frac{\sin 3a}{\sin a}; \text{ gdy } a \rightarrow 0, \text{ to } \frac{AC}{AB} \rightarrow 3.$$

369. a) Wskazówka:

$$\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{1+\Delta x}-1)(\sqrt{1+\Delta x}+1)}{\Delta x(\sqrt{1+\Delta x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}$$

$$387. a) y' > 0, \text{ gdy } x < \frac{1}{3} \text{ albo } x > 3.$$

$$388. b) y' < 0, \text{ gdy } \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

$$390. y' = 0, \text{ gdy } x = -\sqrt{6} \text{ albo } x = 0 \text{ albo } x = \sqrt{6}.$$

$$394. k = -1, l = 3.$$

$$396. f) \frac{-3}{5x\sqrt[5]{x^3}} \quad i) \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}} \quad l) \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$$

$$m) \frac{2}{3(\sqrt[3]{2x+1})^2} \quad n) \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2-4})^2} \quad o) \frac{nx^{n-1}}{3(\sqrt[3]{x^n+1})^2}$$

$$p) \frac{-1}{2(\sqrt{x+1})^3} \quad q) \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{x+2}} \quad r) \frac{3}{(x+3)^2} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$$

$$s) \frac{16}{3\sqrt[3]{8x-5}} \quad t) \frac{9}{5(\sqrt[5]{3x+1})^2} \quad u) \frac{-8x}{3(\sqrt[3]{x^2+5})^4}$$

$$397. c) \frac{4}{(\sqrt{x^2+4})^3} \quad d) \frac{3(1+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

$$398. a) y' > 0, \text{ gdy } x > 2. \quad b) y' < 0, \text{ gdy } x < 2.$$

$$404. e) \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \quad h) 3 \cos 2x \quad i) 2 \cdot \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

$$j) -2 \cos x (1 - \sin x)$$

$$405. c) 2 \cos 2x \quad 407. a) 1, b) 3, c) 0.$$

$$408. d) y' = \frac{-x+2}{x^3}, y'' = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

$$409. a) y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}, y''' = -\frac{6}{x^4}, y^{(IV)} = \frac{24}{x^5}.$$

$$b) y' = 2 \cos 2x, y'' = -4 \sin 2x, y''' = -8 \cos 2x, y^{(IV)} = 16 \sin 2x.$$

$$425. AC = x, f(x) = 2ax - a^2; \text{ gdy } x \text{ wzrasta o } \Delta x, \text{ to } f(x) \text{ wzrasta o } 2a\Delta x.$$

$$426. y = 2 \cdot \left[\frac{a}{h} (h-x) + x \right], \text{ czyli } y = 2 \cdot \frac{ah + hx - ax}{h};$$

gdy x otrzymuje przyrost Δx , to funkcja y otrzymuje przyrost:

$$\Delta y = 2 \cdot \frac{h \Delta x - a \Delta x}{h}$$

a) Jeżeli $h > a$, to przy dodatnim Δx mamy dodatnie Δy , a więc funkcja y jest rosnąca.

β) Gdy $h = a$, to $\Delta y = 0$, a więc funkcja y jest stała, a mianowicie przy każdej wartości x mamy $y = 2a$.

γ) Gdy $h < a$, to dodatniemu Δx odpowiada ujemne Δy , a więc funkcja y jest malejąca.

$$428. y = \frac{A-B}{a-\beta} x + \frac{Ba-A\beta}{a-\beta}$$

$$429. y = \frac{9}{5} x + 32; \text{ gdy } x \text{ rośnie od } 35 \text{ do } 40, \text{ to } y \text{ rośnie od } 95 \text{ do } 104.$$

$$432. a) f(x) = x^2 - 6x - 5, \quad b) f(x) = -2x^2 + 7x + 1, \\ c) f(x) = -3x^2 + 13x + 7.$$

$$434. \text{ Gdy } m = 0 \text{ albo } m = 1.$$

439. Funkcja y istnieje w przedziale $0 \leq x \leq 10$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow 5 \nearrow 10 \\ \hline y & 0 \nearrow 5 \searrow 0 \end{array}$$

440. Funkcja y istnieje dla wartości $x < \frac{1}{2}$ albo $x \geq 5$:

$$\begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow \frac{1}{2} \dots 5 \nearrow +\infty \\ \hline y & +\infty \searrow 0 \dots 0 \nearrow +\infty \end{array}$$

441. $BE = x$, $y = f(x) = 3x^2 - 2ax + 2a^2$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{3}a \nearrow \frac{1}{2}a \\ \hline y & 2a^2 \searrow \frac{5}{3}a^2 \nearrow \frac{7}{4}a^2 \end{array}$$

U w a g a. Funkcja $f(x)$ osiąga minimum, gdy punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta.

443. Wysokość trójkąta: x , $y = f(x) = 12rx - 4x^2$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{3}{2}r \nearrow 2r \\ \hline y & 0 \nearrow 9r^2 \searrow 8r^2 \end{array}$$

444. Kąt $MAB = x$, $y = AM + MC = 2r(\cos x + \sin^2 x)$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow (0^\circ \nearrow 90^\circ) \\ \hline y & 2r \nearrow 2\frac{1}{2}r \searrow 2r \end{array}$$

445. $AE = x$, $y = AF = \sqrt{x^2 + \frac{4}{9}(3-x)^2}$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{12}{13} \nearrow 3 \\ \hline y & 2 \searrow \frac{6}{\sqrt{13}} \nearrow 3 \end{array}$$

U w a g a. y osiąga minimum, gdy odcinek AF jest prostopadły do BD ; wówczas zachodzi proporcja $AE : EF = EF : ED$.

446. $CM = x$, $y = MN = \sqrt{a^2 + (3x-a)^2}$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{3}a \nearrow a \\ \hline y & a\sqrt{2} \searrow a \nearrow a\sqrt{5} \end{array}$$

447. $AA' = x$, $y = A'B = \sqrt{8rx - 3x^2}$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{4}{3}r \nearrow 2r \\ \hline y & 0 \nearrow \frac{4}{\sqrt{3}}r \searrow 2r \end{array}$$

448. Wysokość prostokąta: x , przekątna $y = \sqrt{4(a-x)^2 + x^2}$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{4}{5}a \nearrow a \\ \hline y & 2a \searrow \sqrt{5}a \nearrow a \end{array}$$

449. $AM = x$, $y = \text{pole } \triangle MKC = \frac{a}{2b}x(b-x)$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{2}b \nearrow b \\ \hline y & 0 \nearrow \frac{1}{8}ab \searrow 0 \end{array}$$

450. Wysokość prostopadłościanu: x , bok podstawy prostopadłościanu: $\frac{1}{3}(3a-x)$, powierzchnia całkowita prostopadłościanu: $y = 2a^2 + \frac{8}{3}ax - \frac{10}{9}x^2$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{6}{5}a \nearrow 3a \\ \hline y & 2a^2 \nearrow \frac{18}{5}a^2 \searrow 0 \end{array}$$

451. Pole pierścienia $y = \pi(2rx - \frac{4}{3}x^2)$:

$$\begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{3}{4}r \nearrow \frac{3}{2}r \\ \hline y & 0 \nearrow \frac{3}{4}\pi r^2 \searrow 0 \end{array}$$

452. W chwili $t = 0$ odległość $s = \sqrt{a^2 + b^2}$, następnie odległość ma-

leje i w chwili $t = \frac{au + bv}{u^2 + v^2}$ odległość s osiąga minimum:

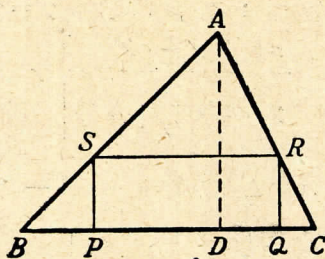
$$\frac{|av - bu|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

a dalej wciąż rośnie. Ciała spotkają się, jeżeli zachodzi proporcja $u : v = a : b$

453. $f(x) = -x^2 - 2x + 6$. 454. $f(x) = x^2 - 12x - 45$.

460. Rozważamy prostokąt wpisany w dany trójkąt ostrokątny ABC w taki sposób, że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie BC , a dwa pozostałe wierzchołki leżą na bokach AB i AC . Wprowadzamy oznaczenia: $BC = a$, wysokość trójkąta $AD = h_1$, bok prostokąta $SP = x$. Obliczamy:

$$PQ = SR = \frac{h_1 - x}{h_1} a, \text{ pole prostokąta } y = ax \frac{h_1 - x}{h_1}.$$



Rys. 58.

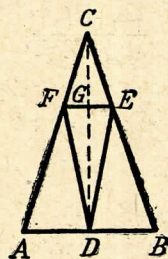
Przy $x = \frac{1}{2} h_1$ pole y osiąga maximum, które wynosi $\frac{1}{4} a h_1$, czyli równa się połowie pola trójkąta ABC .

Do tego samego wyniku dojdziemy rozważając prostokąty wpisane oparte na podstawie AB lub AC .

462. Przeciwpromiennikowa: a , przyprostokątne: $x, \sqrt{a^2 - x^2}$, pole trójkąta $y = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 x^2 - x^4}$. Trzeba znaleźć maximum funkcji $f(x) = a^2 x^2 - x^4$; maximum zachodzi, gdy $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, i wówczas trójkąt jest równoramienny.

464. Promień koła: R , boki prostokąta wpisanego: $x, \sqrt{4R^2 - x^2}$, pole prostokąta $y = x \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 x^2 - x^4}$. Funkcja $f(x) = 4R^2 x^2 - x^4$ osiąga maximum, gdy $x = R\sqrt{2}$; wówczas prostokąt jest kwadratem.

465. Oznaczenia na rysunku: $AB = c, CD = h, DG = x$. Obliczamy:



Rys. 59.

$EF = \frac{h-x}{h} c, y = \text{pole } \triangle DEF = \frac{1}{2} c x \frac{h-x}{h}$. Przy $x = \frac{1}{2} h$ pole y osiąga maximum, które równa się $\frac{1}{4}$ pola $\triangle ABC$.

466. Największe pole ma trójkąt prostokątny.

467. Promień kuli: R , promień podstawy walca: x , powierzchnia boczna walca $y = 4\pi x \sqrt{R^2 - x^2}$. (Obacz rozwiązanie zadania 463). Największą powierzchnię boczną będzie miał walec, w którym wysokość równa się średnicy podstawy.

469. Obacz następne zadanie.

470. Promień podstawy stożka: r , wysokość stożka: h , wysokość walca: x . Obliczamy: promień podstawy walca: $\frac{h-x}{h} r$, powierzchnia całkowita walca $y = 2\pi \cdot \frac{h-x}{h} r \left[x + \frac{h-x}{h} r \right]$, czyli $y = \frac{2\pi r}{h^2} [(r-h)x^2 - (2r-h)hx + r h^2]$.

1^o. Jeżeli $h = r$, to $y = 2\pi r(r-x)$; mamy więc funkcję liniową malejącą:

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{cc} 0 & \nearrow r \\ 2\pi r^2 & \searrow 0 \end{array} \right|$$

2^o. Jeżeli $h < r$, to funkcja kwadratowa y posiada minimum w punkcie $x_0 = \frac{(2r-h)h}{2(r-h)}$. Ale $\frac{2r-h}{2r-2h} > 1$, więc $x_0 > h$, a z tego wynika, że w przedziale $0 < x < h$ funkcja y stale maleje (od wartości $2\pi r^2$ do 0).

3^o. Jeżeli $h > r$, to funkcja kwadratowa y posiada maximum w punkcie $x_0 = \frac{(h-2r)h}{2(h-r)}$.

a) Jeżeli $r < h \leq 2r$, to $x_0 \leq 0$, a więc w przedziale $0 < x < h$ funkcja y stale maleje (od wartości $2\pi r^2$ do 0).

β) Jeżeli $h > 2r$, to ze wzoru w postaci: $x_0 = \frac{h-2r}{2h-2r} h$ widać, że $0 < x_0 < h$. Maximum funkcji kwadratowej y wynosi $\frac{\pi r h^2}{2(h-r)}$

i wówczas mamy taką tabelę zmienności funkcji y :

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \nearrow & x_0 & \nearrow & h \\ 2\pi r^2 & \nearrow & \frac{\pi r h^2}{2(h-r)} & \searrow & 0 \end{array} \right|$$

471. $x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}$. (Obacz zadanie następne).

472. $x = -\frac{ab}{a^2 + 1}, y = \frac{b}{a^2 + 1}$. Interpretacja geometryczna: znalezione wartości (x, y) wyznaczają rzut początku współrzędnych O na linię prostą o równaniu $y = ax + b$.

474. Moment bezwładności będzie najmniejszy, gdy oś obrotu przetnie pręt w takim punkcie, którego odległości od mas m_1 i m_2 są do tych mas odwrotnie proporcjonalne. Minimum wynosi:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

476. c) $\begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow -2 \nearrow 2 \nearrow +\infty \\ y & +\infty \searrow -19 \nearrow 13 \searrow -\infty \end{array}$

d) $\begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \nearrow 5 \nearrow +\infty \\ y & -\infty \nearrow 0 \searrow -12\frac{1}{2} \nearrow +\infty \end{array}$

f) Funkcja y jest stale malejąca.

h) Funkcja y jest stale rosnąca.

i) $\begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow -\sqrt{3} \nearrow 0 \nearrow \sqrt{3} \nearrow +\infty \\ y & +\infty \searrow -3 \nearrow 6 \searrow -3 \nearrow +\infty \end{array}$

j) $\begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow -2 \nearrow 0 \nearrow 2 \searrow +\infty \\ y & -\infty \nearrow 6 \searrow 0 \nearrow 16 \nearrow -\infty \end{array}$

478. a) $\lim_{x \rightarrow 1} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$. b) $\lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 4$. f) $\lim_{x \rightarrow 0} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} y = -1$.

479. c) Jeżeli $x < 3$ i $x \rightarrow 3$, to $y \rightarrow -\infty$

„ $x > 3$ i $x \rightarrow 3$, to $y \rightarrow +\infty$

„ $x \rightarrow +\infty$ albo $x \rightarrow -\infty$, to $y \rightarrow 1$

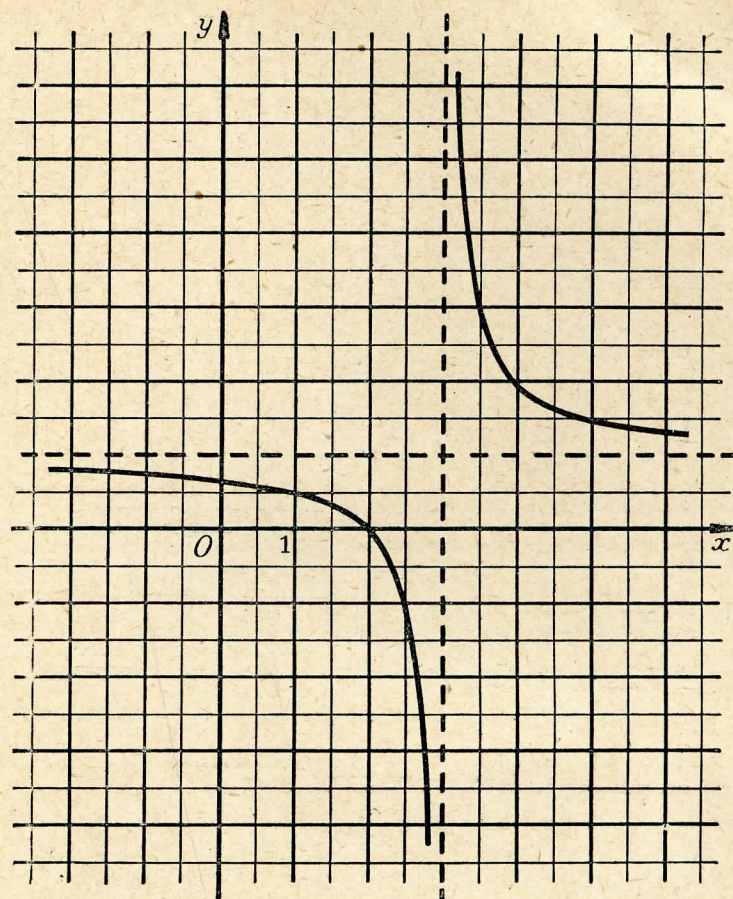
Obacz wykres funkcji na rys. 60 (str. 367).

480. a) Podstawiamy $k = 1 - m$ ($m > 0$)

$$y = 1 - \frac{m}{x^2 + 1} \quad \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty \\ y & 1 \searrow 1 - m \nearrow 1 \end{array}$$

b) Podstawiamy $k = 1 + m$ ($m < 0$)

$$y = 1 + \frac{m}{x^2 + 1} \quad \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty \\ y & 1 \nearrow 1 + m \searrow 1 \end{array}$$



Rys. 60

Wykres funkcji $y = \frac{x-2}{x-3}$.

481. $\begin{array}{c|c} t & -\infty \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty \\ x & -\infty \nearrow 2 \searrow \frac{3}{2} \nearrow +\infty \end{array}$

482. Zakładamy, że $x > 2$ cm. Obliczamy:

$$y = \frac{x-1}{x} \cdot 8 \text{ cm}^2 \quad \begin{array}{c|c} x & 2 \nearrow +\infty \\ y & 4 \nearrow 8 \end{array}$$

$$483. \quad y = \frac{x}{x-1} \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 1 \\ \hline y & 1 \searrow -\infty \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c} 1 & \nearrow +\infty \\ \hline +\infty & \searrow 1 \end{array} \right|$$

484. Wysokość walca: x , objętość walca $v = \pi (r^2 - \frac{1}{4} x^2) x$

$$\left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{2}{\sqrt{3}} \nearrow 2r \\ \hline y & 0 \nearrow \frac{4}{3\sqrt{3}} r^2 \searrow 0 \end{array} \right|$$

$$485. \quad a) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 3 \nearrow +\infty \\ \hline y & +\infty \searrow 1 \nearrow +\infty \end{array} \right| \quad e) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -3 \nearrow 0 \nearrow 3 \\ \hline y & 0 \nearrow 3 \searrow 0 \end{array} \right|$$

$$f) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \\ \hline y & +\infty \searrow 0 \end{array} \right| \quad \dots \quad \left| \begin{array}{c|c} 5 & \nearrow +\infty \\ \hline 0 & \nearrow +\infty \end{array} \right|$$

$$g) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 2 \nearrow 2\frac{1}{4} \nearrow +\infty \\ \hline y & 2 \searrow 1\frac{3}{4} \nearrow +\infty \end{array} \right|$$

$$h) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty \\ \hline y & 0 \searrow -\frac{1}{2} \nearrow +\infty \end{array} \right|$$

$$i) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 2 \nearrow 4 \nearrow +\infty \\ \hline y & 0 \nearrow 1 \searrow 0 \end{array} \right|$$

$$j) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 1 \nearrow +\infty \\ \hline y & +\infty \searrow 0 \end{array} \right|$$

$$k) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow 2 \nearrow +\infty \\ \hline y & 0 \nearrow \frac{1}{2} \searrow 0 \end{array} \right|$$

$$l) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty \\ \hline y & 1 \nearrow \frac{5}{2} \searrow 1 \end{array} \right|$$

$$486. \quad a) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{4}\pi \nearrow \frac{1}{2}\pi \\ \hline y & +\infty \searrow 2 \nearrow +\infty \end{array} \right|$$

$$b) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{4}\pi \nearrow \frac{1}{2}\pi \\ \hline y & 1 \searrow \frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow 1 \end{array} \right|$$

$$c) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{6}\pi \nearrow \frac{1}{2}\pi \\ \hline y & \frac{1}{2} \nearrow \frac{3}{\pi} \searrow \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

$$d) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{3}\pi \nearrow \pi \\ \hline y & 1 \nearrow \frac{7}{4} \searrow -5 \end{array} \right|$$

$$e) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & 0 \nearrow \frac{1}{4}\pi \nearrow \frac{1}{2}\pi \\ \hline y & 2 \searrow 1 \nearrow +\infty \end{array} \right|$$

$$f) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\frac{1}{2}\pi \nearrow \frac{1}{6}\pi \nearrow \frac{1}{2}\pi \\ \hline y & -\frac{1}{\pi} \nearrow \frac{1}{6}\pi + \sqrt{3} \searrow \frac{1}{2}\pi \end{array} \right|$$

487. $f'(x) = 2 \sin^2 x$; pochodna funkcji $f(x)$ jest dodatnia przy wszystkich wartościach x z wyjątkiem wielokrotności liczby π ; stąd wniosek, że funkcja $f(x)$ jest rosnąca w każdym przedziale.

488. d) Funkcja ma ekstremum przy $x = -2$.

490. b) „ „ „ „ przy $x = 2$.

$$491. \quad f) \quad \left| \begin{array}{c|c} x & -\infty \nearrow 0 \\ \hline y & 0 \nearrow +\infty \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c} 0 & \nearrow 1 \nearrow 2 \\ \hline -\infty & \nearrow -1 \searrow -\infty \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c} 2 & \nearrow +\infty \\ \hline +\infty & \searrow 0 \end{array} \right|$$

492. a) Funkcja ma ekstremum przy $x = \frac{3}{4}$.
b) „ „ „ „ „ $x = 4$.

493. a) „ „ „ „ „ gdy $\operatorname{tg} x = 2$.
b) „ „ „ „ „ przy $x = \frac{1}{3}\pi$.

495. Promień kuli: r , wysokość stożka: x , objętość stożka $y = \frac{1}{3}\pi (2r - x) x^2$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x = \frac{4}{3}r$.

496. Promień kuli: r , wysokość walca: x , objętość walca $y = \pi (r^2 - \frac{1}{4} x^2) x$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

497. Promień podstawy walca: x , dana powierzchnia całkowita: S . Obliczamy wysokość walca $h = \frac{S}{2\pi x} - x$. Objętość walca osiąga maximum, gdy $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

498. Promień podstawy stożka: r , wysokość stożka: h , wysokość walca: x , objętość walca $y = \pi r^2 \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 x = \frac{\pi r^2}{h^2} (x^3 - 2hx^2 + h^2x)$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x = \frac{1}{3}h$.

499. Promień koła: r , podstawa trapezu: $2x$, pole trapezu $y = 2r \left(x + \frac{r^2}{x}\right)$. Pole y osiąga minimum, gdy $x = r$; wówczas trapez jest kwadratem.

502. Bok kwadratowej podstawy prostopadłościanu: x , dana powierzchnia całkowita: S . Obliczamy wysokość prostopadłościanu: $\frac{S - 2x^2}{4x}$, objętość prostopadłościanu $y = \frac{Sx - 2x^3}{4}$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x^2 = \frac{1}{6}S$; wówczas prostopadłościan jest sześcianem.

503. Promień podstawy walca: x , dana powierzchnia wewnętrzna walca (dno + powierzchnia boczna): S , pojemność walca $y = \frac{1}{2}(S - \pi x^2)x$. Pojemność y osiąga maximum, gdy $x^2 = \frac{S}{3\pi}$; wówczas wysokość walca równa się promieniowi podstawy.

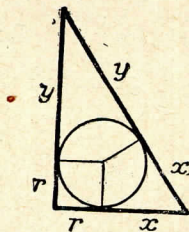
504. Promień kuli: r , wysokość stożka: x , powierzchnia boczna stożka $y = \pi \sqrt{2r x^2 (2r - x)}$. Powierzchnia y osiąga maximum, gdy $x = \frac{4}{3}r$.

505. Tworząca stożka: l , wysokość stożka: x , objętość stożka $y = \frac{1}{3}\pi(l^2 - x^2)x$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. (Jeżeli kąt między tworzącą a wysokością oznaczymy przez α , to objętość y osiąga maximum, gdy $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$).

506. Promień podstawy stożka: x , dana powierzchnia boczna stożka: S , objętość stożka $y = \frac{1}{3}\sqrt{S^2 x^2 - \pi^2 x^6}$. Objętość y osiąga maximum, gdy $x^2 = \frac{S}{\pi\sqrt{3}}$. (Jeżeli kąt między tworzącą a wysokością oznaczymy przez α , to objętość y osiąga maximum, gdy $\operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{2}$).

507. Połowa podstawy trójkąta: x , dany obwód trójkąta: $2p$, pole trójkąta $y = x\sqrt{p(p-2x)}$, czyli $y = \sqrt{p^2 x^2 - 2px^3}$. Pole y osiąga maximum, gdy $x = \frac{1}{3}p$; wówczas trójkąt jest równoboczny.

508. Promień koła: r , wysokość trójkąta: x , pole trójkąta $y = x\sqrt{x(2r-x)}$, czyli $y = \sqrt{2rx^3 - x^4}$. Pole y osiąga maximum, gdy $y = \frac{3}{2}r$; wówczas trójkąt jest równoboczny.



Rys. 61.

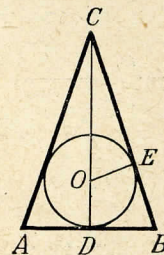
509. Oznaczenia według rysunku. Ze związku:

$$(x+r)^2 + (y+r)^2 = (x+y)^2$$

wyznaczamy $y = \frac{x+r}{x-r}r$, $x+y = \frac{x^2+r^2}{x-r}$. Przeciwno-

kątna $x+y$ osiąga minimum, gdy $x = (\sqrt{2}+1)r$; wówczas $y = x$, tzn. trójkąt opisany jest prostokątny równoramienny.

510. Na rysunku podano przekrój osiowy stożka. Wysokość stożka $CD = x$, promień podstawy stożka $DB = y$.



Rys. 62.

Z podobieństwa $\triangle OEC \sim \triangle BDC$ mamy proporcję:

$$\frac{OE}{OC} = \frac{BD}{BC}, \text{ czyli: } \frac{r}{x-r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ stąd } y^2 = \frac{r^2 x}{x-2r}.$$

Objętość stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{x^2}{x-2r}$ osiąga minimum, gdy $x = 4r$.

- 511.

$$\frac{x}{x^3+y^3} \begin{matrix} -\infty \nearrow \frac{2}{9} \nearrow \frac{2}{7} \nearrow +\infty \\ +\infty \searrow \frac{1}{81} \nearrow \frac{1}{43} \searrow -\infty \end{matrix}$$

Suma $x^3 + y^3$ osiąga minimum, gdy $x = \frac{2}{9}$, ale nie jest to wartość najmniejsza tej sumy sześciątów, gdyż przy $x \rightarrow +\infty$ suma $x^3 + y^3$ dąży do $-\infty$.

U w a g a. Jeżeli postawimy ograniczenie, że x i y są d o d a t n i e, to x będzie zawarte w przedziale $0 < x < \frac{1}{4}$ i przy takim ograniczeniu suma $x^3 + y^3$ osiąga swą wartość najmniejszą, gdy $x = \frac{2}{9}$.

512. $f(x) = x(a-x)(2x-a)$; funkcja $f(x)$ przy $x = x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}a$

osiąga minimum, a przy $x = x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}a$ osiąga maximum:

$$\frac{x}{f(x)} \begin{matrix} -\infty \nearrow x_1 \nearrow x_2 \nearrow +\infty \\ +\infty \searrow -\frac{\sqrt{3}}{18}a^3 \nearrow \frac{\sqrt{3}}{18}a^3 \searrow -\infty \end{matrix}$$

Maximum funkcji $f(x)$, osiągnięte przez nią przy $x = x_2$, nie jest jednakże największą wartością tej funkcji, bo gdy $x \rightarrow -\infty$, to $f(x) \rightarrow +\infty$.

U w a g a. Gdybyśmy zażądali, by x i y były dodatnie, to x musiałoby być zawarte w przedziale $0 < x < a$ i w tym przedziale byłaby taka tabelka zmienności:

x	0 ↗	x_1	↗	x_2	↗	a
$f(x)$	0 ↘	$-\frac{\sqrt{3}}{18}a^3$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{18}a^3$	↘	0

Funkcja $f(x)$ osiąga w tych warunkach swą wartość największą, gdy $x = x_2$.

513. Odległość przedmiotu od soczewki: x , odległość obrazu od soczewki: y ; między x , y i ogniskową f zachodzi związek: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$. Obliczamy odległość obrazu od przedmiotu

$z = x + y = \frac{x^2}{x - f}$. Odległość z osiąga maximum, gdy $x = 2f$; wówczas również $y = 2f$.

514. Wysokość zawieszenia żarówki nad środkiem stołu: x , kąt padania promieni światła na powierzchnię stołu przy obwodzie: α . Natężenie światła:

$$z = \frac{k \sin \alpha}{x^2 + r^2} = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gdzie k jest stałym współczynnikiem. Natężenie światła z osiąga maximum, gdy $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

515. Zakładamy, że $e_2 > e_1$.

$$\begin{array}{c} x \\ | \text{---} | \text{---} | \\ e_1 \qquad \qquad d-x \\ | \text{---} | \text{---} | \\ e_2 \end{array}$$

Potencjał $f(x) = \frac{e_1}{x} + \frac{e_2}{d-x}$ osiąga minimum, gdy

$$x = \frac{\sqrt{e_1 e_2} - e_1}{e_2 - e_1} d \quad \text{ i } \quad d - x = \frac{e_2 - \sqrt{e_1 e_2}}{e_2 - e_1} d$$

Wówczas zachodzi proporcja:

$$\frac{x}{d-x} = \frac{\sqrt{e_1}}{\sqrt{e_2}}$$

Jeżeli $e_1 = e_2$, to $x = \frac{1}{2} d$.

$$518. \quad j) \int (x-2)(x-3) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 6x + C$$

$$l) \int 4x(x-1)^2 dx = x^4 - \frac{8}{3} x^3 + 2x^2 + C$$

$$p) \int [(n+2)x^{n+1} + (n+1)x^n] dx = x^{n+2} + x^{n+1} + C$$

$$519. \quad g) \int \frac{1-x+x^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$$

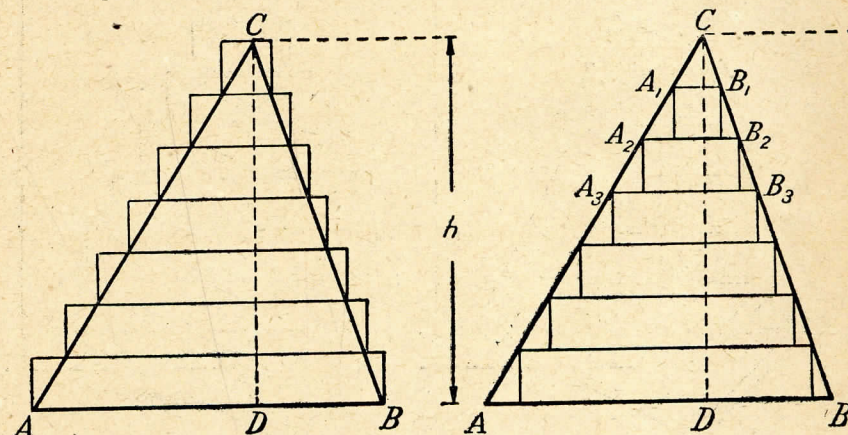
$$h) \int \frac{3x - \sqrt{x}}{x^3} dx = -\frac{3}{x} + \frac{2}{3\sqrt{x^3}} + C$$

$$i) \int x(\sqrt{x}-1) dx = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$j) \int (\sqrt[3]{x}+1)^3 dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^4} + x + C$$

$$524. \quad c) \int_a^b 2x dx = b^2 - a^2$$

$$525. \quad \int_1^{x_0} (3x^2 + 2x + 1) dx = x_0^3 + x_0^2 + x_0 - 3$$



Rys. 6.

526. Wysokość trójkąta dzielimy na n równych części (na rysunku $n = 7$). Mamy proporcje:

$$A_1B_1 : AB = \frac{h}{n} : h, \quad A_2B_2 : AB = \frac{2h}{n} : h, \quad A_3B_3 : AB = \frac{3h}{n} : h, \dots$$

Z proporcji tych otrzymujemy:

$$A_1B_1 = \frac{1}{n} a, \quad A_2B_2 = \frac{2}{n} a, \quad A_3B_3 = \frac{3}{n} a, \quad \dots$$

Obliczamy: p_n (czyli sumę pól prostokątów skonstruowanych wewnątrz trójkąta ABC — po lewej stronie rys. 63) oraz P_n (czyli sumę pól prostokątów zawierających w sobie trójkąt ABC — po prawej stronie rys. 63):

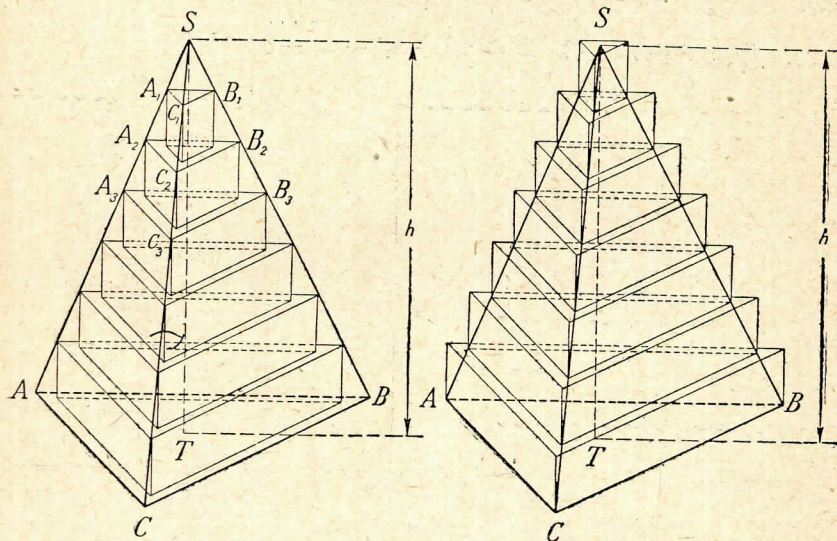
$$p_n = \frac{1}{n} a \cdot \frac{h}{n} + \frac{2}{n} a \cdot \frac{h}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} a \cdot \frac{h}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$P_n = \frac{1}{n} a \cdot \frac{h}{n} + \frac{2}{n} a \cdot \frac{h}{n} + \dots + \frac{n}{n} a \cdot \frac{h}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} ah$$

Stąd otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2} ah \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{2} ah$$

Wspólna granica obu szeregów wyznacza pole trójkąta.



Rys. 64

527. Wysokość ostrosłupa dzielimy na n równych części (na rysunku $n = 7$). Wprowadźmy oznaczenia:

P_1 = pole $\triangle A_1B_1C_1$, P_2 = pole $\triangle A_2B_2C_2$, ... i P = pole $\triangle ABC$.

Mamy proporcje:

$$P_1 : P = \left(\frac{1}{n}\right)^2 : h^2, \quad P_2 : P = \left(\frac{2}{n}\right)^2 : h^2, \quad P_3 : P = \left(\frac{3}{n}\right)^2 : h^2, \quad \dots$$

Z proporcji tych otrzymujemy:

$$P_1 = \frac{1^2}{n^2} P, \quad P_2 = \frac{2^2}{n^2} P, \quad P_3 = \frac{3^2}{n^2} P, \quad \dots$$

Obliczamy v_n (czyli sumę objętości graniastosłupów trójkątnych leżących zewnątrz ostrosłupa $SABC$ — po lewej stronie rys. 64) oraz V_n (czyli sumę objętości graniastosłupów trójkątnych obejmujących ostrosłup $SABC$ — po prawej stronie rys. 64)

$$v_n = \frac{1^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} + \frac{2^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} Ph$$

$$V_n = \frac{1^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} + \frac{2^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} + \dots + \frac{n^2}{n^2} P \cdot \frac{h}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} Ph$$

Stąd otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{3} Ph \quad \text{ i } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{3} Ph$$

Wspólna granica obu szeregów wyznacza objętość ostrosłupa.

$$528. \quad c) \quad F(x) = \int \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}, \\ \int_1^{x_0} \sqrt[3]{x} dx = F(x_0) - F(1) = \frac{3}{4} (\sqrt[3]{x_0^4} - 1)$$

$$529. \quad F(x) = \int ax^3 dx = \frac{1}{4} ax^4, \\ \text{pole } OPP_1 = \int_0^{x_0} ax^3 dx = F(x_0) - F(0) = \frac{1}{4} ax_0^4$$

$$530. \quad F(x) = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}, \\ \text{pole } OPP_1 = \int_0^a \sqrt{x} dx = F(a) - F(0) = \frac{2}{3} \sqrt{a^3}$$

$$531. \quad F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x},$$

$$\text{pole } KK_1L_1L = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = F(a) - F(1) = -\frac{1}{a} + 1,$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{a} + 1 \right) = 1.$$

INDEKS NAZWISK

	Str.
BERNOULLI	105
BRIGGS	59
BÜRGİ	59
CAUCHY	159, 232, 349
EUKLIDES	291
GAUSS	159
GORDAN	159
HERON	292
LEIBNIZ	200, 326, 349
LEJEUNE-DIRICHLET	200
LIPSCHITZ	159
NEPER	59
NEWTON	326, 349
PASCAL	134
WEIERSTRASS	159
ZENODOR	292, 293
ZENON	121

SKOROWIDZ

	Str.		Str.
Calka funkcji	331	granica ciągu	118
„ określona	338	„ funkcji	205
cecha logarytmu	51	„ lewostronna	217
ciąg	78	„ niewłaściwa	213
„ malejący	81	„ prawostronna	217
„ nieskończony	79	„ sumy postępu	120
„ rosnący	81	iloczyn wielomianów	138
„ skończony	79	iloraz postępu geometrycznego	101
czynnik kwadratowy	154	„ różnicowy	234
„ liniowy	139, 155	„ różniczkowy	239
„ procentowy	112	„ wielomianów	140, 144
druga pochodna	269	indukcja matematyczna	130
dzielenie wielomianów	140	interpolacja	55, 89, 192
e	59	kanoniczna postać trójmianu ..	180
$E(x)$	195	kapitalizacja dochodu	110
extremum funkcji	276	kologarytm	63
funkcja	187, 191	krańce przedziału	196
„ calkowa	331	kryterium istnienia extremum	
„ ciągła	226	funkcji	317
„ kwadratowa	282	liczba rzeczywista	5
„ liniowa	278	limes	118, 205
„ malejąca	196	linia ciągła	225
„ niewymierna	313	„ prosta	278
„ pochodna	242	logarytm	42
„ potęgowa	258	„ dziesiętny	49
„ rosnąca	196	„ naturalny	59
„ stała	247	mantysa logarytmu	52
„ ułamkowa	308	maximum funkcji	275
„ wielomienna 137, 250, 304		metoda podstawiania	171
„ wykładnicza	36	„ przeciwnych współczyn-	
„ wymierna	253	ników	171
„ złożona	199	miejsce zerowe wielomianu 137, 148	
funkcje trygonometryczne 265, 315		minimum funkcji	276

	Str.		Str.
moduł zamiany logarytmów...	58	przyporządkowanie	191
moment bezwładności	304	przyrost zmiennej	233
nierówność	5	przyśpieszenie	270
„ algebraiczna 178, 184		reszta w dzieleniu wielo-	
„ Bernoulli'ego	105	mianów	140, 144
„ bezwarunkowa	11	rozwiązanie nierówności ..	12, 178
„ podwójna	15	„ równania	154
„ sprzeczna	12	„ układu równań ...	167
„ ułamkowa	17	równanie algebraiczne..	154, 162
„ warunkowa	12	„ logarytmiczne	74
nieskończoność	213	„ wykładnicze	72
niewiadoma pomocnicza 73, 173		równość przybliżona	54
numerus logarithmi	55	różnica postępu arytmetyczn..	85
objętość ostrosłupa	374	„ wielomianów	138
obszar zmienności zmiennej... 188		sieczna	235
odcinek osi liczbowej	196	skala logarytmiczna	71
okres kapitalizacji	110	skok funkcji	195, 226
„ ułamka dziesiątego ...	126	stała całkowania	331
otoczenie punktu	275	stopień jednomianu	167
parabola	286	„ wielomianu	136, 167
pierwiastek całkowity	162	styczna	236
„ wielokrotny	159	suma postępu arytmetycznego	91
„ wielomianu 137, 148		„ „ geometrycznego	103
„ wymierny układu .	164	„ „ nieskończonego.	123
pochodna funkcji	235	„ wielomianów	138
„ „ złożonej	257	suwak logarytmiczny	71
podstawa logarytmów	42	szereg geometryczny	123
„ „ naturalnych 59		„ „ zbieżny. 123	
„ potęgi	23	średnia arytmetyczna	294
podzielność wielo-		tablica funkcyjna	191
mianów 140, 144, 148		trójmian kwadratowy ..	154, 179
pole figury	337	twierdzenie podstawowe algebry	159
„ trójkąta	373	układ równań	167
postęp arytmetyczny	85	układy równoważne	178
„ „ wyższego rzędu..	97	ułamek okresowy	125
„ geometryczny	101	„ „ mieszany ..	128
„ „ nieskończony... 117		wartość bezwzględna	20
potencjał	329	„ najmniejsza	232, 326
potęga	23	„ największa	232, 325
prędkość ruchu	245	„ pośrednia	231
procent składany	110	wielomian	136, 250
przedział	196	„ uporządkowany	137

	Str.		Str.
wielomiany równe	137	wyrazy szeregu	122
wierzchołek paraboli	286	wyrażenie ułamkowe	17
współczynnik kątowny	235	wyróżnik trójmianu kwadrato-	
współczynniki wielomianu	136	wego	154, 179, 283
wykładnik potęgi	23	wzór zasadniczy rachunku cał-	
„ niewymierny	35	kowego	347
„ ujemny	25	zamiana podstawy logarytmów	58
„ ułamkowy	25	„ ułamka okresowego na	
„ zerowy	24	ułamek zwykły	126
wykres funkcji	192	zasada indukcji zupełnej	131
wyraz ogólny postępu arytmetyczn.	87	zbiór wartości funkcji	188
„ „ „ geometr. 102		zmienna niezależna	187
wyrazy ciągu	78	„ wielomianu	136
„ jednorodne	175	„ zależna	187



270

Spis rzeczy

CZĘŚĆ I — KURS KLAS Y I

ROZDZIAŁ I

Nierówności.

(K) (H) (M) §	1. Własności zasadnicze nierówności	5
(K) (H) (M) §	2. Rozwiązywanie nierówności w najprostszych wypadkach	11
[M] §	3. Nierówności ułamkowe.....	17
[M] §	4. Wartość bezwzględna	20

ROZDZIAŁ II

Funkcja wykładnicza. Logarytmy.

(K) (H) (M) §	5. Potęga o wykładniku wymiernym	23
(K) (H) (M) §	6. Potęga o wykładniku niewymiernym	35
(K) (H) (M) §	7. Pojęcie funkcji wykładniczej	36
(K) (H) (M) §	8. Logarytmy	42
(K) (H) (M) §	9. Tablice logarytmów	49
(K) (H) (M) §	10. Zastosowania logarytmów	62
[M] §	11. Suwak logarytmiczny	71
[M] §	12. Równania wykładnicze i logarytmiczne	72

ROZDZIAŁ III

Ciągi liczbowe.

(K) (H) (M) §	13. Pojęcie ciągu	78
[K] (H) (M) §	14. Postęp arytmetyczny	85
[H] [M] §	15. Ciągi arytmetyczne wyższych rzędów	97
[K] (H) (M) §	16. Postęp geometryczny	101
[H] [M] §	17. Procent składany	110
[K] (H) (M) §	18. Postęp geometryczny nieskończony zbieżny	117
[H] (M) §	19. Ułamki okresowe	125
[H] [M] §	20. Indukcja zupełna	130

ROZDZIAŁ IV

Wielomiany.

(M)	§ 21.	Działania na wielomianach	136
(M)	§ 22.	Podzielność wielomianu $P(x)$ przez $(x - a)$	148
(M)	§ 23.	Przykłady rozkładu wielomianu na czynniki liniowe i kwadratowe	154
[M]	§ 24.	Pierwiastki wymierne równania algebraicznego o współczynnikach całkowitych	162
(M)	§ 25.	Układy równań algebraicznych	167
(M)	§ 26.	Nierówności algebraiczne stopnia drugiego	178
[M]	§ 27.	Nierówności algebraiczne wyższych stopni	184

Uwaga. Program klasy I liceum typu matematyczno-fizycznego przewiduje ponadto jeszcze jeden temat (do uznania nauczyciela):

- [M] — Elementy kombinatoryki i najprostsze zadania z rachunku prawdopodobieństwa.

CZĘŚĆ II — KURS KLAS Y II

ROZDZIAŁ V

Funkcje zmiennej rzeczywistej.

(K) (H) (M)	§ 28.	Pojęcie funkcji	187
(K) (H) (M)	§ 29.	Granica funkcji	205
(K) (H) (M)	§ 30.	Ciągłość funkcji	224

ROZDZIAŁ VI

Pochodna funkcji.

(K) (H) (M)	§ 31.	Pojęcie pochodnej. Styczna do krzywej	233
(M)	§ 32.	Prędkość ruchu	244
(K) (H) (M)	§ 33.	Obliczanie pochodnej funkcji wymiernych	247
(M)	§ 34.	Pochodna funkcji złożonej i funkcji potęgowej	256
(M)	§ 35.	Pochodne funkcji trygonometrycznych	263
[M]	§ 36.	Pochodne wyższych rzędów	269

ROZDZIAŁ VII

Zastosowanie pochodnej do badania funkcji.

(K) (H) (M)	§ 37.	Znak pochodnej a zmienność funkcji	273
(K) (H) (M)	§ 38.	Funkcja liniowa	278
(K) (H) (M)	§ 39.	Funkcja kwadratowa	282
[K] (H) (M)	§ 40.	Dalsze przykłady badania funkcji wymiernych	304
[M]	§ 41.	Przykłady badania funkcji niewymiernych i trygonometrycznych	313
(K) (H) (M)	§ 42.	Extrema funkcji	317

ROZDZIAŁ VIII

Całka funkcji i jej najprostsze zastosowania geometryczne.

[H] [M]	§ 43.	Funkcje pierwotne	330
[H] [M]	§ 44.	Całka określona	336
[H] [M]	§ 45.	Funkcja pierwotna a całka określona	344

Uwaga. Program klasy II liceum matematyczno-fizycznego przewiduje ponadto następujące tematy (do uznania nauczyciela):

- [M] — Przykłady przybliżonego rozwiązywania równań.
 [M] — Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych i niewymiernych.
 [M] — Krótki przegląd własności liczb rzeczywistych.
 [M] — Liczby zespolone i działania na nich; wzór Moivre'a, zastosowania w teorii równań.

Rozwiązania zadań	351
-------------------------	-----