23011

4749-1

624

POCZĄTKI
ALGEBRY.

POCZĄTKI
ALGEBRY

S. F. LACROIX

DLA UŻYCIA

W SZKOLE CENTRALNEY PARYZKIEY;

PRZEŁOŻONE NA JĘZYK POLSKI

PRZEZ

X. E. SIERADZKIEGO S. P.

Z jedenastego wydania poprawnego w Paryżu 1815 Roku.

Cena Exempl. Rub. sr. 1.

W WILNIE

w Drukarni XX. Pijarów u Alexandra Żołkowskiego.

1818.

KSIĄŻNICA PODLASKA
im. Łukasza Górnickiego
103541
Czytelnia i Księgozbiór
w Białymstoku
51(07)
KOMPUTER
51
A 29
512(075)

Dozwala się drukować pod tym warunkiem, aby po wydrukowaniu, nie wprzód zaczynać przedawać, póki nie będą dostawione exemplarze: jeden dla Komitetu Cenzury, drugi dla Departamentu Ministeryum Oświecenia, dwa dla IMPERATORSKIEY publiczney Biblioteki, jeden dla IMPERATORSKIEY Petersburgskiey Akademii nauk, tudzież jeden dla Akademii Duchowney. Wilno dnia 28 Maja 1818 roku.

Z. Niemczewski Professor P. O. w Imper. Wileń. Uniwersytecie Czł. Kom. Cenzury.

PRZEMOWA AUTORA.

Wielu lat doświadczenie przywiodło mnie do nadania Początkom Algebry wykładanéy przezemnie w Szkole Centralnéy (Centrale des Quatre-Nations), *takiey formy, która zdaiemi się powinna bydź utrzymana; chcę zatém zdać sprawę z pobudek jakie mną kierowały w wyborze sposobów i w porządku ich wykładania.*

Za wzrostem umieiętności idą pewne epoki, w których przerobienie na nowo nauki nieodbicie potrzebném się staie, aby ją pogodzić z ogólnym systematem wiadomości, i nadać jéy taką postać, jakiéy wyciągaią nayświéższe odkrycia, którym za wstęp służyć powinna.

Prawdę tego twierdzenia uznali już ci wszyscy, którzy się zastanawiali nad biegiem umieiętności, a jeszcze szczególniéy ią uczuią osoby posiadaiące zupełną historyi matematyki znaiomość; gdyż tym nietayno, że Algebra, któréy w Europie XIII. wieku uczył Leonard Piz (Pise) *z pism Arabów, używaiących podobno do tego Arytmetyki Diophanta, kończyła się w początku na rozwiązaniu bardzo szczupłéy liczby arytmetycznych zadań, zawartych w zrównaniach nieprzechodzących drugiego stopnia; że prawidła używane na odkrycie ilości nie-*

wiadomych, na samych rozważaniach jeometrycznych polegały; naostatek, że nieśmiano przestawać na wypadkach wprost wyciągnionych z rachunku, nie sprawdziwszy ich przystosowaniem do liczb albo figur.

Język téy umieiętności wydawał jéy słabość, znaki całe od tych różne, które nam dzisiay służą, jeszcze ustalone nie były; niekiedy ilości wyrażano linijami: ogromna liczba wyrazów technicznych używanych podówczas, a dziś tak zapomnianych, iż prawie nikt ich nie rozumie, była wyięta z pism starożytnych i po większéy części do jeometryi należała. Piérwsza ta początków Algebry epoka wydała Francyi Buteona, i Jakuba Pelletiera (du Mans).

Viète, jeżeli nie wprowadzaiąc, to przynaymniey rozprzestrzeniaiąc użycie liter na wyrażenie tak znanych jak i niewiadomych ilości, powiększył moc rachunku i przyłożył się do wzrostu umieiętności, lubo jeszcze zachował a nawet i sam potworzył niektóre nazwiska dziwaczne zdaiące się wzrost téy umieiętności opóźniać. Deskart przez wprowadzenie wykładników dopełnił Algebraicznych znaków; a jego wynalazki wraz z odkryciami Alberta Girarda i Hariota poczynionémi w teoryi zrównań, całą Algebrę złożyły w nauk wystarczaiącą samey sobie. Taką była Algebra P. Wallis. Pokazała się nareszcie Arytmetyka ogólna Newtona, która trzecią epokę daleko wyższą od poprzedzaiących stanowiła; lecz ci, którzy naówczas układali elementarne xiążki, nie mogąc wszystkiego obiąć co było zawarte w tém dziele, szli tylko śladem poprzedników Newtona, póki Klero (Clairaut) utorowawszy sobie filozoficzną drogę, nierzucił na początki Algebry nowego światła. Czytelnicy w jego dziele jakby spólnie z nim wynayduią umieiętność, dociekaią celu piérwszych zrobionych już kroków i niepytaią się więcéy, co znaczą te taiemnicze znaki, które zdaią się prowadzić jakby drogą jakiegoś czarodzieystwa, do wypadków częstokroć niezrozumianych. Wszystko w tém dziele jest wyświécone, wszystko przystosowane, i nic się nieukazuie coby było niepotrzebném lub nie naprowadzoném przez to co poprzedziło. Znayduie się w téy xiążce wiele rzeczy całe nowych, jakiemi są: dowodzenie nayprostsze, jakie do owych czasów wynalezione bydź mogło, wzoru ilości dwówyrazowéy (du binome), na teoryi kombinacyy ugruntowane, polegaiące całkowicie na mechanizmie mnożenia ilości algebraicznych, na przypadek gdy wykładnik jest całki i dodatni; nayobszérniéysze obja-

śnienia względem wynaydowania dzielników wymiernych zrównań; szczegóły potrzebne do uzupełnienia i całkowitego dowiedzenia, jak się rozwiązuią zrównania trzeciego i czwartego stopnia, podług sposobów podanych od PP. Cardan *i* Deskartes *nayznajomszych na ówczas.*

Początki Algebry P. Clairaut *otrzymały całkiem tę wziętość na jaką zasłużyły; i gdyby wynalazkowa droga któréy się trzymał, zamknięta była w przyzwoitych granicach, byłyby bezwątpienia utrzymały nad wszystkie inne piérwszeństwo; lecz ta droga potrzebna dla oświecenia i zachęcenia poczynaiących naukę Algebry, drobnostkami i szczegółami zawaloną została, idąc za nią w wyższych i zawilszych wiadomościach. Dla tego w ostatnich częściach Algebry P.* Clairaut *niesmakowano tyle ile w piérwszéy; dostrzegać się nawet daie, że Algebry główne prawidła, nie były tam robione z dokładną bacznością, będąc, iż tak powiém na szczególnych przykładach zasadzone; często się bowiem zdarzało, że młodzież należycie odbywaiąc wszystkie działania tego Autora, wiele jeszcze doświadczała trudności, kiedy je sama przez się wykonywać chciała. Zamiast szukania sposobów oswobodzenia się od tych nieprzyzwoitości, jakich łatwo mógł uniknąć plan tak szczęśliwy, jakim był P.* Clairaut; *bynaymniéy nie pomyślano o tém, ale wrócono się do dawnieyszego sposobu wykładania Algebry i od tego widomego punktu wstecz się umieiętność cofała. W licznych xiąg wydaniach, które po dziele P.* Clairaut *następowały, nic nowego nieprzydano i niekorzystano z rozległych prac* Eulera, Lagranża *i* Waringa *nad teoryą zrównań.*

Taki był stan rzeczy, kiedy Lagranż *i* Laplas *wezwani zostali do dawania kursu analizy w Szkole Normalnéy.* Laplas *wznowił i przypomniał plan P.* Clairaut, *jako jedyny do porządnego i umieiętnego nauki wykładania. Zwrócił on uwagę Professorów na owe bogactwa, jakie zamykaią się w zbiorach Akademickich. Z téy pobudki jego i jego kollegi poniesione prace, bardziéy jeszcze powiększyły tę massę bogactw, i odtąd niewolno było wracać się do sposobów dawnych.*

Od wielu lat zaymuiąc się zbiéraniem tego wszystkiego w jedno dziéło, co tylko nayważnieyszego zrobiono w rachunku różnicowania i całkowania, postrzegłem opuszczenia i niedostateczności, jakie zachodziły w rozmnożonych elementarnych xiążkach; aby je więc dopełnić, włożyłem w piérwszy tom moiego dziéła niektóre tryby wytknięte w kursie szkoły normalnéy.

Aby teoryę zrównań oprzeć na teoryi funkcyy symetrycznych, która jest naypewnieyszym jéy gruntem, dowiodłem podanie Newtona *o summie potęg pierwiastków, zdaie się daleko prościéy i łatwiéy, niż było przedtem. Kiedy przyiąłem obowiązek Professora matematyki w szkole centralnéy, włożyłem w przypiski to, com zebrał do edycyi* P. Clairaut, *i sam zaraz przekonałem się, że koniecznie potrzeba było bardziéy ścieśnić drogę wynalazkową.*

Osądziłem więc za rzecz istotną, użyć jéy tylko za wstęp do początków, aby przez to pokazać, jak sama potrzeba wyrażeń przydłuższych, w których też same wyrazy lub przynaymniéy też same wyobrażenia często się nadarzaią, przywiodła do użycia znaków skraçaiących, na oznaczenie tych wyrazów albo tych myśli; i jak potém te skrócenia ściskaiąc wszystkie rozumowania w małą przestrzeń, robią ich związki widoczniéysze, i pokazuią, iż tak rzekę, za jednym rzutem oka, jakie bydź powinny z nich wyciągane wypadki.

Oto jest wszystko czego należy wyciągać po poczynaiących. Różne przedmioty które Algebra obeymuie przez rozszérzenie tych piérwszych wyobrażeń, od tych tylko poięte bydź mogą, którzy ją przeszli w całości. Toż samo powiedzieć można o wszystkich umieiętnościach posunionych w swym wzroście. Ich cel i ich sposoby nie mogą się dokładnie wyłożyć w definicyi, choćby też w nayjaśnieyszéy.

Po piérwszych początkach postrzegłszy uczeń cel umieiętności któréy go uczą, i przekonawszy się o pożytku swéy pracy, nie potrzebuie nic więcéy do zachęcenia aby w niéy nie ustawał, prócz wystawiania mu materyy tym porządkiem, jakim wyradzaią się jedne z drugich. Samo spaianie rzeczy metodyczne, wytuszczanie zwięzłe teoryy i założeń zamknięte w ścisłych granicach, zdawałymi się dostateczne do przywiązania uczących się, i na tych tu przestałem.

Kursa w szkole centralnéy, obeymuiąc razem rysunek, sztuki piękne, umieiętności matematyczne i fizyczne, nauki moralne i polityczne, nie powinny miéć w zamiarze, jak tylko wykład piérwszych zasad wiadomości naszych; wypadało zatém wszystko to odłączyć od początków Algebry, coby mogło należéć do nauki bardziéy zgłębionéy. Wydaię więc początki to tylko w sobie zawiéraiące, co jest nieuchronnie potrzebném do poznania i dokładnego poięcia głównych uwag zachodzących w téy gałęzi matematyki, a w ich Dopełnieniu (Complément) *zebrałem teorye nie tak częstego użycia.*

Sam nawet naturalny porządek uczenia tych umieiętności w szkołach centralnych, ustalił tę formę nadaną moim początkom. Jakoż, w tém nauczaniu, które obeymuie Arytmetykę, Algebrę, Jeometryą, Trygonometryą, niektóre przystosowania Algebry do Jeometryi i wszystko to, co jest potrzebne do uczenia się praktycznego sztuk mechanicznych, Architektury i Miernictwa; należy bardziéy doskonalić rozsądek a niżeli pamięć. Prawdy naylepiéy umiane zwykły się zapominać nie maiąc ich w codziennem przystosowaniu i użyciu; i wielka część rzeczy których się nauczyliśmy w dzieciństwie lub piérwszéy młodości, nazawsze wypada z naszéy pamięci; ale nam pozostaie władza zastąpienia ich przez to, co jest potrzebne do tego rodzaju pracy jaką się zaymuiemy, a bystrzeyszy widok jakiego nabył nasz umysł, czyni go zdolnym do uczenia się rzeczy w samym zrzódle i nawet do czynienia tam nowych postrzeżeń.

Te niezaprzeczone prawdy dowodzą, że w szkołach publicznych przeznaczonych do instrukcyi młodych obywateli, nie tak uczyć potrzeba szczegółow umieiętności, jako raczéy ich filozoficznego ogarnienia, nad któréms bardzo starannie zastanawiać się należy. Podania szczególne nie są użyteczne tylko w ten czas, kiedy służyć mogą za właściwe przykłady do objaśnienia i ugruntowania uiadomości zawartych w tym ogólnym rzeczy widoku. Tak postępuiąc robiemy z Matematyki Loikę praktyczną częstokroć pożyteczniejszą od téy, jaką dawniéy tłumaczono w szkołach. Jak przez wprawę i ćwiczenie uczą się dzieci chodzić, tak umysł ludzki, przez nawyknienie do czystego i ścisłego rozumowania, uczy się dobrze sądzić i myślić.

Nauczyciel który długo rozważał swóy przedmiot, chwyci zapewne porę do wyłożenia różnych trybów rozumowania, których mu przykłady podda nauka; i nie zaniecha wytknąć tych błędów, które się często popełniaią w wiązaniu myśli i wyobrażeń. Jego kurs nie będzie to zbiór prawd poiedyńczych co do rozmaitych szczegółów, ale jednostaynych co do postaci, nie daiących tylko jedno i to samo wyobrażenie o sposobie wykładania nauki. Naprożnoby mu zarzucano, że te prawdy okazać się mogą sposobami z niektórych względów krótszémi a nawet wybornieyszémi nietrzymaiąc się drogi ogólnéy; zostanie on przekonany, że jak w rozważném gospodarstwie domowém są wydatki prowadzące do oszczędności, tak w naukach są rozciągłości, które skracaią drogę; i takiemi są te sposoby, które otwiéraią źrzódło nowych myśli i

wprowadzaią na drogę dalszych postępowań. Nakoniec nie będzie mu można zaprzeczyć, że nauka ze szczegółów złożona bez związków czyniących ulgę pamięci i kieruiących rozsądkiem, prędzéy się zatrze i zapomni, niż mała liczba teoryy dobrze powiązanych. Jeżeli te ostatnie wymagaią natężenia umysłu żeby je poiąć, pozostanie przynaymniey gdy się zapomną, sposobność w umyśle do zrozumienia równie trudnych, kiedy piérwéy skazana umieiętność nic niezostawi po sobie.

Natychto zasadach starałem się do początków nauki wprowadzić uwagi subtelne i delikatne zachowane dotychczas w rozprawach pisanych językiem różnym od tego, jakiego się trzymano w traktatach zwyczaynych.— Rośliny nowo sprowadzone z jednego kraiu w drugi, naprzód trudno się przyimuią, lecz potém w następnych pokoleniach staią się tak mocne i czerstwe, jak i kraiowe. Przekonany jestem, że i z myślami tożsamo się dzieie. Jeżeli rozważania za których pomocą zogólniłem dowodzenie do owyrazu Newtona, jeżeli sposób eliminacyi, który wyłożyłem podług PP. Eulera i Lagranża, oraz teorya którą dałem na pierwiastki równe i uwagi do których dołączyłem rozwiązanie liczbowych zrównań, pokazuią się oderwane i zawiłe,

w piérwszym momencie; to stąd pochodzi, że je porównywamy z teoryami całe niedoskonałemi. Ta trudność zmnieyszać się będzie w miarę oddalania się od dawnych wyobrażeń a przywykania do nowych.

Przekonany dopiéro wyłożonemi przyczynami, że piérwszeństwo przyznać należy sposobom ogólnym nad szczególne, i że nadewszystko tych używać potrzeba, które są naybliższe metafizyki umieiętności, a które tém samém nastręczaią zręczność do wytknięcia téy metafizyki w swéy oczywistości i do pożytecznego ćwiczenia młodych umysłów; starałem się w ich wykładzie trzymać prawdziwego środka, między rozciągłością morduiącą, która nic niezostawuie do czynienia uczniom, a ciemnością która z utaienia środkuiących wyobrażeń pochodzi.

Powiązana w swych częściach osnowa tego dzieła, jest wypadkiem ogólnego planu, jaki z analizy Algebry wyciągnąłem. Ta analiza dwie całe różne gałęzie zawiéra, teoryą zrównań i teoryą szeregów. Poznałem, że początki powinny czytelników prowadzić aż do rozwiązania jakiegokolwiek zrównania, aby nauczyli się wynaydować odpowiedź na pytania, i te potrafili analitycznie wyrazić. Lecz ażeby niewyniśdź z zagranicy początków, mówię tylko o rozwią-

zaniu liczbowych zrównań, jako tém, które ma swoie użycie w praktyce; ponieważ wzory wyrażaiące pierwiastki zrównań literalnych trzeciego i czwartego stopnia, maią wyiątki bardzo zawiłe i prowadzą do rachunku przynaymniéy tak długiego, jak sposoby przybliżania liczbowego.

Niepowinienem był kończyć na zrównaniach początków przeznaczonych do poprzedzania lekcyy jeometryi. Starożytni którzy nieznali zrównań, a przynaymniéy tych, które mogą ułatwiać naukę stosunków, ten niedostatek przez teoryą proporcyi zastępowali. Zwyczay naznaczył im użycie w jeometryi, gdzie powszechnie zgodzono się na zachowanie starożytnego trybu. Po zrównaniach położyłem teoryą algebraiczną proporcyi, która służy za wstęp do teoryi postępów. Chociaż te teoryę są daleko łatwieysze od teoryi zrównań, jednak przednią wykładane bydź nie powinny, boby ich można niepamiętać w ten czas, gdy są naypotrzebnieysze. Oprócz tego, uczenie publiczne staie się pożytecznieyszém, kiedy daie odpoczynek uwadze tych, którzy się spóźnili w poięciu, żeby ich do równi z inszemi przyprowadzić.

Kończę ten Tom teoryą analityczną logarytmów zupełnie prawie téy podobną, jaką Euler *piérwszy raz ogłosił w dziele*

pod tytułem (Wprowadzenie do Analizy ilości nieskończonych), *a przez które z naywiększém staraniem wyjaśnił część początkową w piérwszym tomie swoiéy Algebry. Tam dowodzi logarytmu liczby 2, w układzie maiącym za zasadę 10, sposobem, który analitycznie wyłożyłem, a który jest podobny rozwiązaniu liczbowemu zrównań, i który jest łatwieyszy niż bałamutne sposoby, gdzie wprowadzono uwagę ilości nieskończonych, żeby zaćmić naukę o układaniu logarytmowych tablic.* Lagranż *jest także tego zdania, ponieważ w swoiém dziele nie dał innego początku logarytmom, i taką ich kładzie definicyą w X. tomie nowego wydania Dzieńnika szkoły normalney.*

„ *Można wyrażać każdą ilość odmienną*
„ *przez stateczną, podniesioną do potęgi*
„ *odmienney, a naówczas wykładnik téy po-*
„ *tęgi staie się funkcyą téyże ilości, a ta*
„ *funkcya wzięta w nayogólnieyszém rozu-*
„ *mieniu, jest logarytmém funkcyi daney:*
„ *skąd się ukazuie, że funkcye logarytmo-*
„ *we nie są właściwie jak tylko odwrótné-*
„ *mi funkcyami wykładniczemi.*" *Niemożna więc nic przydać do powagi wymienionych dwóch sławnych mężów. Napróżnoby się rozszérzano nad mniemaną trudnością, jakby podobną naukę przywieśdź do wiadomości początkowych.* Euler *dawno*

już na to odpowiedział, w zmiankowaném mieyscu swoiéy Algebry, gdzie on niewyciąga do téy teoryi, tylko znaiomości arytmetycznéy o potęgach liczb.

Wzory, podług których rachuie się procent od kapitałów, są zawarte w nauce postępów i logarytmów, oraz pytania tu należące, razem stanowią naypotocznieysze przystosowanie Algebry. Dlá tego musiałem je choć zwięźle wyłożyć; i na tém kończę to dzieło.

PORZĄDEK RZECZY

ZAWARTYCH W TEM DZIELE.

Stronica

Przeyście z Arytmetyki do Algebry, oraz wykład i użycie znaków algebraicznych - - - - - - - 1.

Jaka jest natura i cel Algebry - - - - 2.
O znakach jakie się w Algebrze używaią, 3. *i następ.*
Rozwiązanie niektórych zadań za pomocą Algebraicznych znaków - - 4. *i następ.*
Co nazywamy *wzorami* (formules) - - - 13.

O Zrównaniach - - - - 16.

Co czynić należy aby rozwiązać zadanie za pomocą Algebry - - - - *tamże.*
Co jest *Zrównanie?* Co nazywamy *stroną zrównania*, a co *wyrazem?* - - - 17.

O Rozwiązywaniu Zrównań piérwszego stopnia o jednéy niewiadomey - - - 19.

Prawidło na przenoszenie jakiegokolwiek wyrazu zrównania, z jednéy jego strony na drugą 21.
O oswobodzaniu niewiadomey ilości od jéy mnożników - - - - - - 22.
O uwalnianiu od mianowników - - - 25.
Jak postępować należy chcąc układać w zrównanie, jakiekolwiek bądź zagadnienie dane - 26.
Przykłady - - - - - - - 27.

Sposoby odbywania, według możności, działań wskazanych na ilościach wyrażanych literami - - - - - - - 34.

Tłumaczenie wyrazów: *jedno-wyrazy, dwó-wyrazy, tróy-wyrazy*, i. t. d. *wiela-wyrazy;*

KSIĄŻNICA POD... im. Łukasza Górnickiego ... Biblioteka Kórnicka

ilości *zwikłane* czyli złożone, i *niezwikłane* czyli poiedyńcze - - - - - 35.
O Dodawaniu ilości Algebraicznych - 35.
Co jest współczynnik - - - - - 36.
Prawidło na odbywanie dodawania - - 37.
Prawidło na uproszczenie ilości algebraicznych 38.
O Odciąganiu ilości algebraicznych - 39.
Prawidło na odbywanie odciągania - - 40.
O Mnożeniu ilości Algebraicznych - 40.
Jakim sposobem oznacza się mnożenie ilości algebraicznych - - - - - 41.
Co nazywamy potęgami ilości - - - 43.
Co jest wykładnik - - - - - 44.
Jakim sposobem tworzą się potęgi jakieykolwiek liczby - - - - - *tamże.*
Prawidło na mnożenie jedno-wyrazów - *tamże.*
Co nazywamy stopniami mnogości - - 45.
W *Nocie*, uwaga nad wyrazem *wymiar* - *tamże.*
O Mnożeniu ilości żwikłanych czyli złożonych 46.
Prawidła na znaki w mnożeniu - - - 49.
Prawidła na mnożenie wielo-wyrazów *tamże.*
Przykłady mnożenia ilości zwikłanych 50. *i następ.*
Co rozumiéć należy przez wyrażenia *iednorodne* 53.
Wyrażenie mnogości z summy dwóch ilości przez ich różnicę, oraz kwadratu i sześcianu z dwó-wyrazu - - 53. *i następ.*
Sposób oznaczania mnożenia ilości zwikłanych 55.
O Dzieleniu ilości Algebraicznych - 55.
Prawidło na dzielenie jedno-wyrazów - 56.
Co znaczy ta ilość któréy wykładnik jest zero 57.
Jak uproszczamy dzielenie wskazane, kiedy jego nie możemy wykonać - - 57 *i następ.*
Dzielenie ilości zwikłanych czyli złożonych - 61.
Co to jest uszykować ilości dane - - 62.
Prawidła na odbywanie dzielenia 63 *i następ.*
Przykłady dzielenia - - - - - 65.
Co czynić należy kiedy znayduie się wiele wyrazów maiących jednaką potęgę litery, podług któréy szykuią się wyrazy - - 67.
O Ułamkach Algebraicznych - - 70.
Jakim sposobem rozpoznaiemy, że dzielenie ilości złożonych nie może się wykonać - 71.
Wynikły stąd ułamek, jak się przywodzi do naywiększego, jakie bydź może uproszczenie, *tamże.*
Co nazywamy spólnym dzielnikiem dwóch algebraicznych ilości - - - - - *tamże.*
Jak się on oznacza - - - - - 72.
Potrzebna przestroga, bez czego działanie ukończyć się nie będzie mogło, jeżeli ilość wzięta za dzielącą składa się z wielu wyrazów, a w tych litera, podług któréy ilość uszykowana, znayduie się tegoż samego stopnia 75 *i następ.*
Co czynić należy aby otrzymać od téy litery nie zależące dzielniki - - 78 *i następ.*
Powtórzenie prawideł rachunku ułamków - 80.
Rozwiązywanie zrównania literalnego piérwszego stopnia - - - - - - 84.
O Zrównaniach w które wchodzą dwie ilości niewiadome, i o ilościach odjemnych - 84.
Przykłady - - - - - - - 85.
Co czynić należy, kiedy przyydziemy do zrównania, którego obie strony są ze znakiem —, 87.
Pytanie, w którém wartość jedney z niewiadomych jest ze znakiem —, - - - 88.
Co ten znak znaczy - - - - - 89.
Jakim sposobem wartości ze znakiem —, powinny *zadosyć czynić* zrównaniom zadania - 92.
Powtórzenie poprzedzaiących uwag - - 94.
Co rozumiéć należy przez *rozwiązania odjemne* 95.
Dowodzenie prawideł rachunku ilości odjemnych odosobnionych - - - - *tamże.*
Jak się z sobą kombinuią jedno-wyrazy odosobnione, co do swoich znaków - - - 97.
Jak znaleśdź możemy prawdziwe wysłowienie pytania, kiedy natrafimy na wartości odiemne - - - - - - *tamże.*

Zadanie, którego różne przypadki podaią rozmaite osobliwsze przykłady, jakie wynikać mogą z wyrażeń niewiadomych ilości - 97. *i następ.*

Co oznacza wypadek $\frac{m}{o}$ - - - - - 104.

Co oznacza wypadek $\frac{o}{o}$ - - - - - 106.

Nota względem używania wyrazu *tosame* (identiques) - - - - - - - 107.

Ogólny wniosek z tego co poprzedziło - - 108.

Użycie zmiany znaku ilości niewiadomych, aby zawrzeć wiele pytań w jedném - *tamże.*

Rozwiązywanie zadań poprzedzaiących jednéy niewiadoméy używaiąc - - - - - 110.

Zadanie wiodące do ogólnych zrównań piérwszego stopnia o dwóch niewiadomych - 114.

O Rozwiązywaniu jakieykolwiek liczby zrównań piérwszego stopnia, zawiéraiących równąż niewiadomych liczbę - - - 117.

Prawidło ogólne na wyprowadzenie stąd zrównania o jednéy niewiadoméy, *ruguiąc* następnie wszystkie inne - - - - - - *tamże.*

Przykłady - - - - - - - - - 118.

Zadania do rozwiązania dane - - - - 125.

Wzory ogólne na rozwiązywanie zrównań piérwszego stopnia - - - - - - 127.

Sposób ogólny na rugowanie, między dwóma zrównaniami, jedney niewiadoméy piérwszego stopnia - - - - - - - - 128.

Wartości ogólne niewiadomych ilości, w zrównaniach piérwszego stopnia o trzech niewiadomych - - - - - - - - 133.

Ogólne prawidło na wyprowadzenie wartości niewiadomych ilości - - - - - - 135.

Użycie ogólnych wzorów do rozwiązywania liczbowych zrównań - - - - - - 136.

O Zrównaniach drugiego stopnia zawiéraiących jednę nieznaiomą - - - - - 138.

Przykłady zrównań drugiego stopnia, które jeden tylko zawiéraią nieznany wyraz - *tamże.*

Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczb całkowitych - - - - - - - - 139.

O liczbach które nie są zupełnémi kwadratami 147.

Cecha po któréy poznaiemy, że wynaleziony pierwiastek nie jest za mały - - - - 148.

Jak się podnosi ułamek do kwadratu, i jakim sposobem wyciąga się z niego pierwiastek, *tamże.*

Każda liczba piérwsza dzielaca mnogość dwóch liczb, koniecznie dzieli jednę z liczb tychże 149.

Wszystkie liczby całkowite które nie są zupełnémi kwadratami, nie tylko nie maią pierwiastków w liczbach całkich, ale nawet i w ułamkowych - - - - - - - 151.

Co znaczy wyraz, *nieuymierny* (irrationnelle) 152.

Jak pierwiastkowym znakiem wskazać wyciąganie pierwiastku - - - - - *tamże.*

Sposób przybliżania piérwiastków - - *tamże.*

Sposób skracaiący wyciąganie pierwiastku za pomocą dzielenia - - - - - - 155.

Sposób przedłużania nieskończenie wyciągania pierwiastku kwadratowego, za pomocą zwyczaynych ułamków - - - - - - 156.

Jak możemy nayprościey otrzymać pierwiastek przybliżony takowego ułamku, którego wyrazy nie są kwadratami - - - - - 157.

Rozwiązywanie zrównań drugiego stopnia zawiéraiących kwadrat tylko jednéy niewiadoméy - - - - - - - - - 159.

Pierwiastek kwadratowy wszelkiey ilości brany bydź może albo ze znakiem + albo ze znakiem —, - - - - - - - - 162.

Pierwiastek kwadratowy ilości odjemnéy, jest *urojonym* - - - - - - - - - 164.

Wzór ogólny na rozwiązywanie zrównań drugiego stopnia o jednéy niewiadoméy. *tamże i* 165.

Prawidło ogólne którego należy się trzymać w rozwiązywaniu zrównań drugiego stopnia 168.

Przykłady na których okazuią się własności rozwiązań odjemnych - - - *tamże.*
Zadanie które pokazuie, w jakich przypadkach zagadnienia drugiego stopnia, staią się do rozwiązania niepodobne - - - - 172.
Wyrażenia nazwane *urojonémi* - - - 176.
Prosty dowód, że równania drugiego stopnia zawsze dwa pierwiastki maią - - *tamże.*
Rozwiązywanie kilku zadań - - - - - 178.
Pytanie prowadzące do osobliwszych wartości, kiedy je rozwiążemy podług ogólnego wzoru, 182.

O Wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ilości Algebraicznych - - - - - - 189.

Przerabianie, za pomocą którego możemy uproszczać ilości obięte pierwiastkowémi znakami - - - - - - - - - 190.
Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z jedno-wyrazów - - - - - - - *tamże*
Wyciąganie pierwiastku kwadratowego z wielo-wyrazów - - - - - - - 193.

Skład potęg z jedno-wyrazów i wyciąganie z nich pierwiastków - - - - - - 197.

Tablica *zmiu* piérwszych potęg liczbowych od 1 aż do 9 - - - - - - - - 198.
Jak podnosimy ilości jedno-wyrazowe do jakieykolwiek potęgi - - - - - - 199.
Jak wyciąga się pierwiastek jakiegokolwiek stopnia z jedno-wyrazów - - - - 200.
Jak się uproszczaią wyrażenia z jednym pierwiastkowym znakiem - - - - - 201.
O Pierwiastkach urojonych w ogólności - 202.
O Wykładnikach ułamkowych - - *tamże.*
O Wykładnikach odjemnych - - - - 204.

Skład potęg ilości złożonych - - 205.

Sposób znaczenia tych potęg - - - *tamże.*
Skład mnogości jakieykolwiek liczby mnożników piérwszego stopnia - - - - 207.

Uwagi za pomocą których wyprowadza się z tych mnogości, rozwinienie jakieykolwiek potęgi dwó-wyrazu - - - - - - 210.
Teorya ogólna przemian i kombinacyy - - 211.
Skład rozwinienia jakieykolwiek potęgi dwówyrazu - - - - - - - - - 215.
Wyraz ogólny wzoru dwó-wyrazu - - 216.
Zastosowanie wzoru dwó-wyrazu do przykładów 217.
Przygotowanie tego wzoru, aby jego zastosowanie ułatwić - - - - - 218. *i następ.*
Jego zastosowanie do ilości tróy-wyrazowéy - 220.

O Wyciąganiu pierwiastków z ilości złożonych, 220.

Wyciąganie pierwiastku sześciennego z liczb całkowitych - - - - 220. *i następ.*
Wyciąganie pierwiastku sześciennego z ułamków, 226.
Wyciąganie pierwiastku sześciennego przez przybliżenie, z liczb, które nie są zupełnémi sześcianami - - - - - - - 227.
Wyciąganie pierwiastków stopni wyższych - 229.
Wyciąganie pierwiastków z ilości algebraicznych czyli literalnych - - - - - 233.

Zrównania o dwóch wyrazach - - 234.

Dzielenie ilości $x^m - a^m$ przez $x - a$ - - 236.
Mnożniki zrównania $x^m - a^m = o$, i pierwiastki jedności - - - - - - - 237.
Prawo ogólne na liczbę pierwiastków zrównania, i rozróżnienie dwóch wyrażeń, jakiémi są: *oznaczenie arytmetyczne* i *oznaczenie algebraiczne*, pierwiastków liczbowych - 240.

O Zrównaniach, które się tak rozwiązywać mogą jak zrównania drugiego stopnia - 241.

Oznaczenie rozmaitych pierwiastków tych zrównań - - - - - - - - - - 242.

O Rachunku znaków pierwiastkowych, czyli o rachunku ilości pod témi znakami będących 244.

Sposoby odbywania cztérech działań głównych

na ilościach niewymiernych - - - 245.
Sposoby podnoszenia jakiegokolwiek pierwiastkowego znaku do potęgi danéy - - - 247.
Wyciąganie pierwiastku jakiegokolwiek stopnia z ilości niewymiernych - - - - - 249.
Przywodzenie do jednego znaku pierwiastkowego, ilości pod różnémi pierwiastkowémi znakami zostaiących - - - - - - 250.
Podciąganie pod znak pierwiastkowy mnożnika zostaiącego za nim - - - - - - 251.
Mnożenie i dzielenie ilości pod pierwiastkowemi znakami - - - - - - *tamże.*
Uwagi nad niektóremi przypadkami szczególnémi rachunku ilości pod znakami pierwiastkowémi zostaiących - - - - 252.
Oznaczenie mnogości $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, *tamże.*
Rozmaite wyrażenia mnogości $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$, 254.
O Rachunku wykładników ułamkowych, 257.
Z rachunku wykładników ułamkowych, jak wyprowadzamy sposoby używane w rachunku pierwiastkowych znaków - - - *tamże.*
Jaką mamy korzyść z rachunku wykładników ułamkowych - - - - - - - - 259.
Teorya Ogólna zrównań - - - 260.
Pod jaką postacią każde zrównanie kładzione bydź może - - - - - - - *tamże.*
Co nazywamy pierwiastkiem podanego zrównania - - - - - - - - - 261.
Główne założenie téy teoryi - - - - 262.
Rozkład zrównań na mnożniki proste czyli piérwszego stopnia - - - - - - - 263.
Z liczby mnożników piérwszego stopnia złożyć możemy zrównanie - - - - - - 266.
Skład zrównania z mnożników prostych czyli piérwszego stopnia - - - - - - 267.
Jakie jest tworzenie się jego współczynników *tamże.*

Nota o składzie zrównań - - - - - 268.
Jedno zrównanie ile mieć może mnożników stopnia danego - - - - - - *tamże.*
Sposoby Eliminacyi czyli rugowania na zrównania stopni wyższych - - 272.
Przez podstawianie wartości jednéy z niewiadomych - - - - - - - *tamże.*
Prawidło na oswobodzanie zrównań od znaku pierwiastkowego - - - - - - 273.
Wzory ogólne zrównań o dwóch niewiadomych, i sposób jak je kłaśdź możemy pod postacią zrównań o jednéy - - - - - 274.
Wzory na rugowanie niewiadomey, między dwóma zrównaniami drugiego stopnia - - 275.
Warunek jaki spełnić powinna jedna którakolwiek z niewiadomych, spólna obu zrównaniom danym - - - - - - - 276.
Wyszukiwanie spólnego dzielnika, jakim sposobem przywodzi do wyrugowania jednéy z niewiadomych - - - - - - 277.
Co czynić należy otrzymawszy wartość jednéy z niewiadomych w zrównaniu ostatecznem, aby przéyść do wartości niewiadomey drugiey - - - - - - - - 278.
Osobliwsze przypadki, w których zrównania dane są sobie wbrew przeciwne, i w których pytanie nieoznaczone zostaie - - - 279.
Sposób na wyrugowanie jednéy niewiadomey, między dwóma jakiémikolwiek zrównaniami, 280.
Sposób podany od Eulera na wynaydowanie spólnego dzielnika - - - - - 281.
Nieprzyzwoitość nadarzaiąca się w rugowaniu następnym niewiadomych, jeżeli jest więcéy niż dwa zrównania, i wytknięcie stopnia do którego powinno się podnieść ostateczne zrównanie - - - - - - - 287.
O Wynaydowaniu pierwiastków wymiernych, i o pierwiastkach równych zrównań liczbowych - - - - - 288.
Każde zrównanie, którego współczynniki są li-

czbami całkowitémi, a współczynnikiem wyrazu piérwszego jest jedność, nie może mieć za swoie pierwiastki, tylko liczby całkowite, lub niewymierne - - - - - 289.
Sposób oswobodzania zrównań od ułamków - 290.
Wynaydowanie dzielników wymiernych piérwszego stopnia - - - - - 291.
Jak można otrzymać takie zrównanie, którego pierwiastki są różnicami, między jednym z pierwiastków podanego zrównania, a wszystkiémi innémi - - - - - 298.
Sposób rozeznania pierwiastków równych w zrównaniu - - - - - - 300.
Tworzenie zrównania z różnic między wszystkiémi pierwiastkami skombinowanymi po dwa na raz, i zrównania z kwadratów różnic pierwiastków - - - - - - 304.
Sposób na wyrzucenie jakiegokolwiek wyrazu ze zrównania - - - - - 306.
O Rozkładaniu zrównań na mnożniki stopni wyższych od piérwszego - - - 308.
O Rozwiązywaniu zrównań liczbowych przez przybliżenie - - - - - - 309.
Jak można rozpoznać, że zrównanie ma jeden pierwiastek rzetelny, zawarty między dwiema liczbami danémi - - - - *tamże.*
Nota, o zmianach wartości wielo-wyrazów, - 311.
Jak oznaczyć taką liczbę, która podstawiona w zrównaniu za niewiadomą, robi piérwszy wyraz większym od summy wszystkich innych - - - - - - 313.
Każde zrównanie nieparzystego stopnia ma przynaymniéy jeden pierwiastek rzetelny z przeciwnym znakiem, znakowi jego ostatniego wyrazu - - - - - - 316.
Każde zrównanie parzystego stopnia ma przynaymniéy dwa pierwiastki rzetelne z przeciwnémi znakami, kiedy jego ostatni wyraz jest odjemny - - - - - 317.
Oznaczenie granic pierwiastków w przykładzie

danym - - - - - - - 318.
Przystosowanie do tego przykładu, sposobu podanego od Newtona na przybliżania pierwiastków podanego zrównania - - - 319.
Cechy po których rozpoznaie się stopień przybliżenia do którego się przyszło - - 320.
Niedogodność tego sposobu, kiedy się pierwiastki nieco różnią - - - - - 321.
Nota, co do pierwiastków równych - - 323.
Jak grutownie dowieśdź bytność pierwiastków rzetelnych i nie równych, za pomocą zrównania z kwadratów różnić pierwiastków - *tamże.*
——— albó mnożąc pierwiastki przez liczby nie nadto wielkie, - - - 327.
Użycie dzielenia pierwiastków, aby ułatwić rozwiązanie zrównania, którego współczynniki są bardzo wielkiémi liczbami - - 328.
Sposób przybliżania który winniśmy Lagranżowi, - - - - *tamże* i *następ.*

O Proporcyach i Postępach - - 333.

Główne własności proporcyi Arytmetycznéy i Jeometrycznéy - - - - - - 334.
Odmiany jakie w obu proporcyach zachodzić mogą, - - - - - - - 335.
O Postępie arytmetycznym czyli *różnicowym*, 340.
Wyraz ogólny postępu, - - - *tamże.*
Summa, - - - - - - 341.
O Postępach ilorazowych, których summa ma skończoną granicę, - - - - - 343.
Z wyrażenia summy postępu ilorazowego, możemy wyciągnąć wszystkie wyrazy które go składaią, - - - - - - 347.
Dzielenie ilości m przez $m-1$, - - *tamże.*
W jakich przypadkach wieloraz z tego działania jest *maleiący*, i wzięty bydź może za wartość przybliżoną dla $\frac{m}{m-1}$, - - 350.
Co są szeregi *rosnące*, - - - - 352.

Teorya ilości wykładniczych i Logarytmowych 352.

Związek zachodzący między rozmaitémi sposobami rachowania, - - - - 353.
Ważne wnioski wypływaiące z rodzenia się liczb za pomocą samych potęg, - - 355.
Co nazywamy *logarytmem*, a co *gruntem* logarytmów, - - - - - - 356.
Sposób rachowania Tablic logarytmowych - 357.
Nota zawiéraiąca sposób podany od P. *Long*, i tablica potęg dziesiętnych, z 10, - 359 i *następ.*
Co nazywamy *cechą* Logarytmów, - - 363.
O Logarytmach liczb ułamkowych, - - 364.
O dopełnieniach arytmetycznych, - - 366.
Sposób przechodzenia z jednego układu logarytmów w drugi - - - - - 368.
Co jest logarytm *zera*, - - - - 369.
Przystosowanie logarytmów do liczbowego obrachowania algebraicznych wzorów - *tamże.*
Przystosowanie logarytmów do reguły trzech, 370.
Logarytmy liczb będących w postępie jeometrycznym, same są w postępie arytmetycznym - - - - - - 371.
Przystosowanie logarytmów do rozwiązywania zrównań, w których niewiadoma ilość wchodzi za wykładnika - - - - - 271.

Pytania stosowane do procentu od kapitałów 372.

Rachunek prostego procentu - - - 373.
O Procencie składanym - - - *tamże.*
O wypłatach zwanych *roczne* - - - 377.
Jak możemy porównywać między sobą, summy maiące się wypłacać w rozmaitych czasach, 380.

DODATEK

Nota, względem zagadnienia o gońcach, 382 i *następ.*

POCZĄTKI ALGEBRY.

Przeyście z ARYTMETYKI *do* ALGEBRY *oraz wykład i użycie znaków Algebraicznych.*

§ 1. Powinniśmy byli w Arytmetyce wiele takich postrzegać pytań, których rozwiązanie składało się z dwóch części: w piérwszéy szukaliśmy do którego ze cztérech działań głównych należy oznaczenie liczby niewiadoméy przez liczby nam znane: w drugiéy stosowaliśmy prawidła tychże działań. Część piérwsza od żadnego sposobu liczb pisania, czyli od żadnego układu liczenia nie zależąca, zasadza się całkiem na rozwinieniu wniosków, jakie nam wyraźnie lub niewyraźnie z samego pytania wypadaią, albo raczéy ze sposobu, jakim to pytanie liczby dane z liczbami nieznanémi wiąże; to jest, jakie między témi liczbami stanowi związki. W ogólności, jeżeli związki nie są zwikłane, możemy wynaleśdź przez proste samo rozumowanie wartość liczb niewiadomych.

Potrzeba tylko tak rozłożyć warunki stanowiące związki pytania, aby w wyrażeniu tych związków przez ciąg jednoznacznych wyrażeń, ostatnie było zawarte w tych wyrazach: *Jlość niewiadoma jest równa summie, lub różnicy, albo wieloczynowi lub też wielorazowi takich a takich wielkości.*

Następuiący przykład wyświci lepiéy te wiadomości ogólne, jeźli w nich mogło się co niewyrozumiałego zawiérać.

Rozdzielić liczbę daną na dwie takie części, aby piérwsza była większą od drugiéy przewyższką daną.

To aby wykonać, uważać powinniśmy 1°. że

Naywiększa z dwóch części równa się naymnieyszéy powiększonéy przewyższką daną; więc, gdyby część naymnieysza była wiadową, tedy przyłączywszy do niéy tę przewyższkę, mielibyśmy część naywiększą:

2°. że

Część naywiększa dodana do naymnieyszéy składa liczbę daną do rozdzielenia.

W tém ostatniém wyrażeniu, za wyrazy: *część naywiększa*, położywszy jednoznaczne wyrażenie wyżéy wymienione; to jest, *część naymnieysza powiększona przewyższką daną;* wypadnie, że

Część naymnieysza powiększona przewyższką daną, więcéy jescze naymnieyszą częścią, składa liczbę daną do rozdzielenia.

Lecz widzimy, że jescze to wyrażenie może bydź skrócone w tych wyrazach:

Dwa razy wzięta część naymnieysza złączona z przewyższką daną, składa liczbę daną do rozdzielenia. A stąd się oczywiście wnosi, że

Dwa razy wzięta część naymnieysza równa

się liczbie do rozdzielenia danéy, zmnieyszonéy przewyższką daną: więc

Część naymnieysza raz wzięta, równa iest połowie różnicy, między liczbą daną do rozdzielenia i przewyższką daną.

Czyli co też samo iest „ że

Część naymnieysza równa się połowie liczby do rozdzielenia danéy, mniéy połową przewyższki.

Otoż więc mamy rozwiązanie pytania danego, gdzie do wynalezienia części szukanych, dosyć było odbyć działania arytmetyczne z liczbami wiadomémi.

Naprzykład, jeźli dana jest do rozdzielenia liczba 9, a przewyższka naywiększéy części nad naymnieyszę 5; więc część, naymnieysza podług wyżey podanego prawidła, byłaby równa $\frac{9}{2}$ mniéy $\frac{5}{2}$, czyli $\frac{4}{2}$, to jest 2: a naywiększa składaiąca się z części naymnieyszéy 2, i przewyższki 5, byłaby 7.

§ 2. Rozumowania bardzo proste w teraz podanym przykładzie, a zawilsze w innych, składaią się w ogólności, z pewnéy liczby często powtarzaiących się wyrażeń, jakiémi wielkości wchodzące w pytanie wiążą się we wszystkich swoich działaniach: takiémi wyrażeniami są: *dodać do, zmnieyszyć tém, iest równe temu*, i. t. d. Czuiemy mocno iżby się to niezmiernie skróciło, gdybyśmy każde z takowych wyrażeń zgodzili się napiętnować pewnym znakiem, jak to następnie uczyniémy.

Na wskazanie dodawania używać będziemy znaku +, który znaczny *więcéy*, albo z.

Na wskazanie zaś odciągania używać będziemy znaku —, który znaczy *mniéy*, albo *bez*.

Mnożenie znaczyć będziemy znakiem ×, i ten znaczy *mnożone przez*.

Dla napisania, że jednę ilość dzieli druga, kładź będziemy drugę pod piérwszą i przedzielimy liniiką: *np* $\frac{5}{4}$, znaczy 5 *dzielone przez* 4.

Naostatek, aby oznaczyć, że dwie ilości są sobie równe położémy między ich wyrażeniami znak =, który znaczy *równe*.

Te jednak skrócenia tak znaczne, nie są jeszcze wystarczaiącémi dla nas, albowiem częstokroć bywamy przymuszani powtarzać; *liczba do rozdzielenia dana*, *liczba dana*, i. t. d; *część naymnieysza*, *liczba szukana* i. t. d; co bardzo jeszcze wyrażenia nasze przedłuża. Naypiérwsze ułatwienie, jakie się nam nastręcza względem ilości danych, jest to, aby wyrażać je danémi liczbami w przykład wchodzącémi, tak jakośmy już w arytmetyce użyli; lecz tego z ilościami niewiadomémi uczynić niepodobna, przeto na ich mieyscu pewny znak, na który się zgodzono, podstawiano, a który z czasem się zmieniał; nakoniec zgodzono się używać liter alfabetu, i prawie zawsze końcowych używamy, tak jak w arytmetyce kładziemy literę x, za wyraz czwarty proporcyi, któréy tylko znamy trzy piérwsze: samo tedy użycie tych znaków zrodziło Algebrę.

Rozważmyż za ich pośrednictwem, przykład §*fu.* 1, i wyraźmy ilość niewiadomą czyli liczbę naymnieyszą literą x naprzykład, liczbę daną do rozdzielenia i przewyższkę daną, dwiema liczbami 9 i 5: naywiększa z części szukanych wyrazi się przez $x+5$, a ich zbiór czyli summa przez $x+5+x$: będzie więc

$$x+5+x=9;$$

Napisawszy zaś $2x$, za podwóyną ilość x, wypadnie

$$2x+5=9.$$

To wyrażenie wskazuiąc, że należy dodać 5 do liczby $2x$, ażeby złożyć 9; każe nam wnosić, że $2x=9-5$, czyli $2x=4$, a nakoniec, że $x=\frac{4}{2}=2$.

Znaczenie wyrażeń skróconych dopiéro napisanych za pośrednictwem umówionych znaków, porównawszy uważnie z témi, jakie nas przywiodły do rozwiązania pytania przez samo rozumowanie; łacno postrzeżemy, że te ostatnie są tylko tłumaczeniem piérwszych.

Liczba 2, z poprzedzaiących wypadła działań, należy tylko do szczególnego przykładu przybranego na ówczas, kiedy samo rozumowanie nauczywszy nas, że *część naymnieysza jest równa połowie liczby danéy do rozdzielenia*, *mniéy połową danéy przewyższki*, już pokazało, jakim sposobem liczba niewiadoma składa się z liczb danych, i wytknęło prawidło, za którego pomocą wszystkie przypadki szczególne rozwiązywać możemy.

Korzyść jaką mamy z użycia samego rozumowania gruntuie się na tém, iż żadnéy w szczególności nie oznaczaiąc liczby, dozwalamy liczbom danym przechodzić z jednego wyrażenia w drugie, bez wszelkiéy zmiany; kiedy przeciwnie, uważaiąc liczby oznaczone, musimy na nich odbywać wszystkie zachodzące działania, a w koncu, gdy już przyidziemy do wypadku, nic nam nieprzypo-

mina jakim sposobem liczba 2, która mogła przechodzić przez różne nieskończone działania, powstała z liczb danych 9 i 5.

§ 3. Tych niedogodności unikniemy, kiedy liczby dane wyobrazimy charakterami niezależącémi od żadnéy wartości szczególnéy, a tém samém takiémi na którychby nie można było wykonywać rachunku, *liczby do rozdzielenia danéy i przewyższki danéy*. Do takowego użycia naywłaściwsze są litery alfabetu, za których pośrednictwem pytanie dane tak wysłowimy;

Rozdzielić liczbę wiadomą wyrażoną przez a, *na dwie takie części, aby naywiększa przewyższała naymnieyszą przewyższką daną wyrażoną przez* b.

Mianuiąc zawsze część naymnieyszą literą x, Część naywiększa wyrazi się przez $x + b$;

Jch summa, czyli raczéy liczba do rozdzielenia dana równać się będzie $x + x + b$, czyli $2x + b$:

Więc piérwszy warunek pytania, da $2x + b = a$.

Teraz się widocznie pokazuie, że potrzeba dodać do podwoionego x, czyli do $2x$, ilość b, aby otrzymać ilość a; a stąd wynika, że należy zmnieyszyć a, ilością b, dla otrzymania $2x$, a zatém $2x = a - b$.

Stąd się takoż wnosi, że połowa $2x$, czyli

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}.$$

Ten ostatni wypadek przetłumaczony na pospolity język, przez podstawienie wyrazów i wyrażeń za litery i znaki, którémi piérwsze są oznaczone, a które on w sobie zawiéra, daie nam prawidło wyżéy znalezione, za pomocą którego, *aby otrzymać naymnieyszą z części szukanych, powinniśmy od połowy liczby do rozdzielenia danéy, czyli od* $\frac{a}{2}$, *odiąć połowę przewyższki danéy, czyli* $\frac{b}{2}$.

Tym sposobem poznawszy część naymnieyszą, będziemy mieli część naywiększą, gdy do części naymnieyszéy dodamy przewyższkę daną. Ta uwaga jest dostarczaiąca, aby danego pytania ukończyć rozwiązanie; lecz Algebra jescze nam większą rzecz daie, gdyż wskazuie prawidło, nawyrachowanie naywiększéy, bez pomocy naymnieyszéy części. Obaczmyż jakim sposobem: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ jest wartością naymnieyszéy części, zatém gdy się powiększy przewyższką b, da nam na wyrażenie naywiększéy części $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$; więc $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ wyraża, że odiąwszy od $\frac{a}{2}$ połowę b, potrzeba do reszty dodać b całkowite, czyli dwa razy wziętą połowę ilości b; co wypada na to, że $\frac{a}{2}$ powiększyć należy połową ilości b, czyli ilością $\frac{b}{2}$. Skąd jest rzecz oczywista, że $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} + b$ zamieni się na $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$: wysłowiaiąc to wyrażenie, poznamy, że *naywiększa z dwóch części szukanych, jest równa połowie liczby danéy do rozdzielenia, więcéy połową danéy przewyższki.*

W pytaniu szczególném, którém zaymowaliśmy się nasamprzód, liczba do rozdzielenia dana była 9, a przewyższka jednéy części nad drugą

5; więc, aby rozwiązać pytanie podług prawideł do jakich jużeśmy przyszli, należy wykonać na liczbach 9 i 5, działania na literach a i b wskazane.

Ponieważ połowa 9, jest $\frac{9}{2}$, a połowa 5, jest $\frac{5}{2}$;

więc część naymnieysza będzie $\frac{9}{2} - \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$;

a część naywiększa będzie $\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

§ 4. Dotychczas oznaczaliśmy przez x naymnieyszą z dwóch części i stąd wyprowadzaliśmy naywiększą: lecz gdybyśmy chcieli bezpośrednie szukać téy ostatniéy, uważalibyśmy, że wyobraziwszy ją przez x, część druga czyli naymnieysza byłaby $x - b$; ponieważ od naywiększéy przychodzi się do naymnieyszéy, odeymuiąc od piérwszéy przewyższkę piérwszéy nad drugą; zatém liczba dana do rozdzielenia, wyrażoną byłaby w takim razie, przez $x + x - b$, czyli przez $2x - b$; a tém samém byłoby $2x - b = a$.

Ten wypadek wskazuie, że $2x$, przewyższa ilość a ilością b, a zatém, że $2x = a + b$. Więc wziąwszy połowę $2x$ i połowę ilości mu równéy na odkrycie wartości x, wyciągniemy stąd

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2},$$

co daie, na wyrachowanie naywiększéy z dwóch szukanych części, prawidło toż samo, jakie odkryliśmy wprzódy. Niebędziemy tu zastanawiać się nad wyprowadzaniem naymnieyszéy części.

Tenże sam związek między liczbami danémi a niewiadomémi, wielą cale różnémi sposobami

wysłowiany bydź może. I tak, ten który nas przywiódł do poprzedzaiącego pytania, jest ten sam, jaki z następuiącego wysłowienia wynika:

Maiąc wiadomą dwóch liczb summę a, *i ich różnicę* b, *wynaleśdź obie te liczby;* albowiem liczba do rozdzielenia dana, w innych wyrazach jest to summa dwóch liczb szukanych, a ich różnica, jest to przewyższka liczby naywiększéy nad naymnieyszą. Ta odmiana w wyrazach wysłowienia, gdy przystosowaną zostanie do wyżéy znalezionych prawideł, te nam dadzą: że

Naymnieysza z dwóch liczb szukanych, jest równa połowie summy, mniéy połową różnicy.

Naywiększa jest równa połowie summy więcéy połową różnicy.

§ 5. Weźmy teraz pytanie nieco zawilsze, lecz poprzedzaiącemu podobne:

Rozdzielić liczbę daną na takie trzy części, aby przewyższką między średnią a naymnieyszą była liczba dana, i przewyższką naywiększéy nad średnią inna liczba dana.

Dla ugruntowania naszych wyobrażeń, nadaymy naprzód liczbom wiadomym oznaczone wartości.

Założmy że liczba do rozdzielenia dana jest 230.

Że przewyższką między liczbą średnią i naymnieyszą jest 40, a między naywiększą i średnią jest 60.

Mianuiąc część naymnieyszą literą x.

Częścią średnią, będzie część naymnieysza więcey 40, czyli $x + 40$,

Naywiększą, będzie część średnia więcéy 60, czyli $x + 40 + 60$;

A że trzy części razem wzięte, powinny składać liczbę do rozdzielenia daną; więc

$$x + x + 40 + x + 40 + 60 = 230.$$

Zebrawszy w jedną stronę liczby dane, a w drugą liczby niewiadome, postrzeżemy, że x znaydzie się trzy razy w wypadku; przeto dla skrócenia napiszemy $3x + 140 = 230$.

A ponieważ należy dodać 140 do potróynéy ilości x, aby utworzyć 230; stąd zatém wynika, iż od 230 odiąwszy 140, będzie dokładnie ilość potróyna x,
czyli że $3x = 230 - 140$,
albo że $3x = 90$;

a stąd wypada, że $x = \frac{90}{3}$ czyli $= 30$.

Dodawszy do 30, przewyższkę 40, jaką przewyższa część średnia naymnieyszą, będzie 70 na wartość części średniey.

Dodawszy zaś do 70, przewyższkę 60, którą przewyższa część naywiększa średnią, będzie 130 na wartość części naywiększéy.

§ 6. Jeżliby liczby wiadome, były różne od tych, które położyliśmy w wysłowieniu, jeszczebyśmy rozwiązali pytanie postępuiąc wytkniętą drogą w §*ie* poprzedzaiącym; lecz bylibyśmy przymuszeni do powtarzania wszystkich rozumowań i tych wszystkich działań, przez które przyszliśmy do liczby 30; ponieważ nicby nam niepokazywało jakim sposobem składa się ta liczba, z liczb danych 230, 40 i 60. Aby więc uczynić rozwiązanie niezależącém od szczególnych liczb wartości, i pokazać jakim sposobem wartość niewiadomey, tworzy się za pośrednictwem ilości znanych, tak wysłówmy zadanie:

Rozdzielić liczbę daną a, *na takie trzy części, z którychby średnia przewyższała naymnieyszą daną przewyższką* b, *a naywiększa średnią przewyższką daną* c.

Oznaczywszy jak wyżéy, literą x ilość niewiadomą, i rozumowania odbywane wprzódy napisawszy znakami i literami a, b, c wyrażaiącémi ilości znane pytania, otrzymamy nanowo:

Część naymnieyszą x,
średnią $x + b$,
naywiększą $x + b + c$;

połączenie zaś tych trzech części, składaiąc liczbę do rozdzielenia daną, pokazuie, że

$$x + x + b + x + b + c = a.$$

To wyrażenie chociaż jest całkiem proste, jednak skrócone bydź może; ponieważ pokazuie, że x wchodzi trzy razy w liczbę do rozdzielenia daną, b zaś dwa razy; więc zamiast $x + x + x$, napiszmy $3x$, i za $b + b$, napiszmy $2b$, a stanie się

$$3x + 2b + c = a.$$

To ostatnie wyrażenie uczy, że chcąc złożyć liczbę a, należy do potróynéy liczby wyrażonéy przez x, dodać dwa razy wziętą liczbę wyrażoną przez b, i jescze liczbę c; skąd także się wnosi, że gdy od liczby a, odeymiemy podwóyną liczbę b, przytém liczbę c, otrzymamy dokładnie potróyną ilość x; czyli, że $3x = a - 2b - c$.

Aże x, jest trzecią częścią potróynéy ilości x, czyli $3x$, więc wniesiemy stąd, że

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

Dobrze uważyć należy, iż niemaiąc żadnéy szczególnéy naznaczonéy wartości na liczby, przez a, b, c wyobrażane, wypadek do któregośmy przyszli, żadnéy nam na x niedaie wartości, wskazuie tylko, jakie działania na tych liczbach odbywać

należy, gdy im nadamy wartość, dla wyprowadzenia wartości niewiadomey ilości.

W rzeczy samey, wyrażenie $\frac{a - 2b - c}{3}$

któremu równe jest x, wydane bydź może językiem pospolitym, pisząc na mieyscu liter liczb nadane, a na mieyscu znaków, wysłowienie działań, jakie się wskazuią do wykonania; a pod ów czas takowe złoży się wysłowienie:

Od liczby do rozdzielenia daney odbierz podwoyną przewyższkę jaką część średnia przewysza naymnieysza, i jeszcze przewyższkę części naywiększey nad średnią, i weź część trzecią reszty.

Wykonywaiąc to na liczbach, używszy piérwszych arytmetycznych działań, oznaczy się część naymnieysza. Gdyby naprzykład liczba do rozdzielenia dana była *230*, a przewyższkami były *40* i *60*, jak w *§fie* poprzedzaiącym, wtedy odebrawszy od *230*, dwa razy *40* czyli *80*, i *60*, zostanie *90*, a *90* część trzecia, będzie *30*, tak jakeśmy już znaleźli piérwey.

Jeźliby liczba dana do rozdzielenia była *520*, a przewyższkami *50* i *120*; odciąganoby od *520*, dwa razy *50* czyli *100* i *120*, a pozostałey reszty wzięta część trzecia, byłaby naymnieyszą liczbą; utworzą się dwie drugie, dodaiąc *50* do *100*, co uczyni *150*; potém do tego wypadku, przydaiąc *120*, co uczyni *270*:

A tak trzy części szukane byłyby

100, *150*, *270*,

ich zaś summa byłaby *520*, jak wymagało pytanie.

Ponieważ algebraiczne wypadki nie są częstokroć tylko skazówkami działań, jakie wykonywane bydź maią na liczbach, za których pomocą

wynayduiemy inne; przeto w ogólności nazywaią się *formułami* czyli *wzorami* (formules). Pytanie któreśmy dopiéro rozważali, chociaż jest nieco zawilsze od położonego w *§fie* 1; jednak rozwiązane jeszcze bydź może przez rozumowanie zwyczayną mową, jak na tablicy dołączoney widzieć się daie, gdzie obok każdego rozumowania, położono wyrażenie jego algebraicznémi charakterami. Uważny téy tablicy rozbiór naymnieyszéy niepowinien zostawić wątpliwości o pożytku Algebry i początku jéy wynalazku.

ZADANIE

Rozdzielić liczbę daną na takie trzy części, z których by średnia przewyższała naymnieyszą przewyższką daną i naywiększa średnią drugą także przewyższką daną.

ROZWIĄZANIE

Przez samo rozumowanie

Przez Algebraiczne pisanie.

Niech liczbę do rozdzielenia daną oznacza a.
Przewyższkę części średniey nad naymnieyszą oznaczmy przez . . . . . b,
Przewyższką naywiększey nad średnią niech będzie . . . . . c.
Załóżmy że część naymnieysza iest . . . x.

Gdy do naymnieyszey części dodamy przewyższkę iaką średnia przewyższa naymnieyszą, będzie część średnia . . . } Część średnia będzie $x + b$,

Część średnia więcéy przewyższką naywiększey nad średnią, da część naywiększą: } Naywiększa $x + b + c$.

Dodane te trzy części, składaią liczbę do rozdzielenia daną.
Więc część naymnieysza, więcéy częścią naymnieszą, więcéy przewyższką średniey nad naymnieyszą, więcey ieszcze naymnieyszą częścią, więcéy przewyższką średniey nad naymnieyszą, więcey przewyższką naywiększey nad średnią, równa się liczbie do rozdzielenia daney, } Więc $x + x + b + x + b + c = a$,

Więc trzy razy wzięta część naymnieysza, więcéy dwa razy wziętą przewyższką średniey nad naymnieyszą, więcéy ieszcze przewyższką naywiększey nad średnią, równa się liczbie do rozdzielenia daney. } $3x + 2b + c = a$,

Więc 3 razy wzięta część naymnieysza iest równa liczbie do rozdzielenia, daney mniey dwa razy wziętą przewyższką średniey nad naymnieyszą, mniéy przewyższką naywiększey nad średnią. } $3x = a - 2b - c$.

Więc w końcu naymnieysza część, równa iest trzeciey części reszty, po odebraniu od liczby do rozdzielenia daney, dwa razy wziętéy przewyższki części średniey nad naymnieyszą i ieszcze przewyższki części naywiększey nad średnią } $x = \frac{a - 2b - c}{3}$.

§ 7. Znaki przyięte i wymienione w §*ie* 2. są ieszcze nie wszystkie iakich w Algebrze używamy; nowe bowiem rozważania nowy ich w ciągu odkrywaią rodzay. Powinniśmy byli uważać w §*ie* 2, że oznaczaliśmy mnożenie ilości x przez 2, i w §§ 5 i 6, x przez 5, także b przez 2, kładąc tylko te liczby przed literami x i b bez żadnego pośredniego znaku, jak i w ciągu dalszym używać będziemy: tym sposobem każda liczba ze strony lewéy iakiey litery położona, będzie mnożnikiem téy liczby, którą ta litera oznacza; i tak $5x$, $5a$, i. t. d, znaczyć będą 5 razy x, 5 razy a; $\frac{5}{4}x$ czyli $\frac{5x}{4}$, oznaczać będą trzy czwarte części x, czyli 5 razy x wzięte dzielone przez 4, i. t. d.

W ogólności, mnożenie napotém oznaczać będziemy kładąc mnożniki w ciągu jeden po drugim, bez żadnego między niémi pośredniego znaku, w każdém zdarzeniu, z którego by żadne niewynikało zamieszanie. I tak, wyrażenia ax, bc, i. t. d, będą jedno-znacznémi z $a \times x$, $b \times c$. i. t. d; lecz niemożna zaniedbywać znaku $\times$, gdy się ma do czynienia z liczbami, ponieważ wtenczas wyrażenie 5×5, którego wartość jest 15 wziąćby można za 55, przez opuszczenie znaku $\times$. W takowym więc przypadku, częstokroć się kładzie punkt, zamiast znaku $\times$, i pisze się $5 . 5$.

O Zrównaniach.

§ 8. Rozbiéraiąc z uwagą rozwiązanie zadań położonych w §*ie* 3 i 6, znaydziemy że się to składa z dwóch cale wyraźnych części. W piérwszéy przez Algebraiczne cechy wyrażaią się związki, które zachodzą między znanémi a niewiadomémi ilościami, zawartémi w zadaniu daném: co przywodzi nas do równania między sobą dwóch ilości, to jest:

W §*ie* 3, ilości $2x+b$ z a.

W §*ie* 6, ilości $3x+2b+c$ z a.

Potém z téy równości wyprowadza się szereg wniosków przyprowadzaiących w końcu do równania ilości niewiadoméy x, ze zbiorem ilości danych, powiązanych między sobą przez działania, których już wykonywanie wiadome; i to jest drugą rozwiązania częścią.

Te dopiéro wskazane części, prawie we wszystkich znayduiące się zadaniach, potrzebuią pomocy Algebry aby rozwiązane bydź mogły. Wcale trudną jest rzeczą dać choć na moment prawidło, za któregoby pomocą można było uzupełnić część piérwszą, maiącą na celu tłumaczenie algebraicznémi cechami warunków pytania. Do czego ażeby trafić, oswoić się wprzódy należy z algebraiczném pisaniém, i nabyć wprawy dokładnego rozbierania podanego zadania, we wszystkich jego okolicznościach, bądź wyraźnych, bądź też domyślnych. Lecz gdy się już przyidzie do złożenia dwóch liczb, które pytanie dane uważa za równe między sobą, podówczas dopiéro mamy już pewne postępowanie *metodyczne*, na wyprowadzenie z tego algebraicznego wyrażenia niewiadoméy wartości; co jest przedmiotem drugiéy rozwiązania części. Wprzódy jednak nim poznamy wzmiankowany sposób *metodyczny* postępowania, wyłożmy niektóre mianowania na ten od algebraistów używane koniec.

Zrównanie, jest to dwóch ilości równość.

Zbiór ilości będących z jednéy strony znaku $=$, nazywa się *członkiem* (membre) lub *stroną* zrównania; każde zrównanie ma dwa takowe *członki*, czyli dwie *strony*.

Zbiór ilości leżący z lewéy strony, nazywa się *piérwszym członkiem* lub *piérwszą stroną* zrównania; będący na prawéy stronie mianuie się *stroną drugą*.

W zrównaniu $2x+b=a$, $2x+b$ jest *piérwszą stroną*, a a jest *drugą*.

Ilości składaiące jedną stronę, choć są oddzielone znakami $+$ lub $-$, nazywaią się *wyrazami* (termes).

I tak, w zrównaniu $2x+b=a$, piérwsza strona zawiéra dwa wyrazy, to jest: $2x$ i $+b$.

Zrównanie $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, ma po dwa wyrazy w każdéy stronie, to jest:

$\frac{3}{4}x$ i $+7$ w pierwszéy

$8x$ i -12 w drugiéy.

Chociaż zrównanie $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, wzieliśmy tylko trafem dla przykładu, jednak uważane bydź może, równie jak wszystkie inne, o których w ciągu mówić będziemy, jako wynikaiące z zadania, którego zawsze znaleśdź można wysłowienie tłumacząc go na język pospolity. I tak zrównanie podane wysłowić się może następnie:

BIBLIOTEKA ŁÓDZKA
KSIĄŻNICA ŁÓDZKA

Znaleśdź taką liczbę x, *któréyby* $\frac{3}{4}$ *części powiększone* 7, *czyniły summę równą* 8 *razy wziętemu* x, *mniéy* 12.

Podobnież zrównanie $ax + bc - cx = ac - bx$, w którém litery a, b, c wyrażaią ilości znane, odpowiada następuiącemu pytaniu:

Znaleśdź taką liczbę x, *któraby rozmnożona przez daną liczbę* a, *potém powiększona mnogością z dwóch liczb danych* b *i* c, *a zmnieyszona mnogością z liczby danéy* c *przez liczbę* x, *dała wypadek równy mnogości z liczb* a *i* c, *zmnieyszonéy mnogością z liczb* b *i* x.

Takowe cwiczenie się w tłumaczeniu na język pospolity zrównań algebraicznie napisanych, jest jedyną i naykrótszą drogą prowadzącą do oswoienia się z Algebrą, któréy cała trudność jedynie tylko w doskonałém wyrozumieniu znaków i ich użyciu zachodzi.

Wyciągnąć ze zrównania wartość niewiadoméy, czyli raczéy przyiśdź do otrzymania saméy niewiadoméy ilości w jednéy stronie zrównania, a w drugiéy wszystkich ilości znanych, jest to co nazywamy *rozwiązać* zrównanie.

Rozmaite pytania jakie tylko bydź mogą do rozwiązania podane, prowadzące do zrównań mniéy więcéy składanych, podzielono na wiele klass czyli *stopni*. Zatrudniymy się naprzód *zrównaniami stopnia piérwszego*. Tak nazywaią się te zrównania, w których niewiadome ilości nie są mnożone ani przez się same, ani też między sobą.

O *Rozwiązywaniu zrównań piérwszego stopnia o jednéy niewiadoméy.*

§ 9. Widzieliśmy już, że rozwiązać zrównanie, jest to przyiśdź do takowego wyrażenia, w którémby niewiadoma ilość, sama zostawszy w jednéy stronie zrównania, równała się ilościom wiadomym skombinowanym z sobą przez takowe działania, których wykonanie wiadome. Skąd wynika, że chcąc doprowadzić zrównanie do takowego stanu, potrzeba oswobodzić niewiadomą od ilości wiadomych, z którémi znayduie się skombinowana; gdyż niewiadoma pomieszaną bydź może z ilościami wiadomémi troiakim sposobem:

1°. Przez dodawanie i odciąganie, jak w zrównaniach

$$x + 5 = 9 - x,$$
$$a + x = b - x;$$

2°. Przez dodawanie, odciąganie i mnożenie, jak w zrównaniach

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$
$$ax - b = cx + d;$$

3°. Naostatek przez dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie, jak w zrównaniach

$$\frac{5x}{3} + 8 = \frac{11}{12}x + 9,$$

$$\frac{ax}{b} + cx - d = \frac{mx}{n} + \frac{p}{q}.$$

Uwalnia się ilość niewiadoma od dodawań i odciągań, w które z ilościami wiadomémi wchodzi, zbiéraiąc w jednę stronę zrównania, wszystkie wyrazy w których się ona znayduie; i dla tego umiéć potrzeba przenieść wyraz z jednéy strony zrównania do drugiéy.

§ 10. Naprzykład, w zrównaniu

$$7x - 5 = 12 + 4x,$$

wypada przenieść wyraz $+4x$ z drugiéy strony zrównania do piérwszéy, a wyraz -5, z piérwszéy do drugiéy. Na ten koniec uważać należy, że zmazać $+4x$, w drugiéy stronie zrównania, jest to ją zmnieyszyć ilością $4x$, przeto koniecznie wypada uczynić toż samo odciąganie w stronie piéwszéy, dla zachowania równości w obudwóch; więc pisze się $-4x$ w piérwszéy stronie zrównania, która stanie się $7x - 5 - 4x$; i będziemy mieli

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

Zmazać -5 w piérwszéy stronie, jest to znieść w niéy wskazane odciąganie 5ciu jedności, a tém samém, jest to powiększyć tęż samą stronę 5 jednościami; więc i tu dla zachowania równości, potrzeba także powiększyć drugą stronę 5 jednościami, czyli napisać w niéy $+5$; a będzie $12 + 5$, i otrzymamy

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

Wykonawszy wskazane działania, wypadnie zrównanie $3x = 17$.

Przez te rozumowania przystosować się mogące do jakiegokolwiek bądź przykładu, przekonywamy się, że zmazać w jednéy stronie zrównania wyraz ze znakiem $+$, który tém samém powiększał tęż samą stronę, potrzeba tenże sam wyraz odiąć i od strony drugiéy, czyli w niéy go napisać ze znakiem $-$. Przeciwnie, kiedy wyraz który się maże, ma znak $-$, co oznacza zmnieyszenie strony w któréy zostawał; zatém drugą stronę tymże samym wyrazem należy powiększyć i w niéy go napisać ze znakiem $+$. Skąd wnosi się to ogólne prawidło:

Ażeby przenieść jakikolwiek wyraz zrównania, z jednéy jego strony na drugą, potrzeba go zmazać w któréy się znayduie, a napisać w drugiéy z przeciwnym znakiem.

Chcąc to prawidło w praktyce wykonywać, uważać należy, że piérwszy wyraz każdéy strony zrównania, kiedy go żaden znak niepoprzedza, zawsze ma domyślny znak $+$. I tak w zrównaniu $ax - b = cx + d$, przenosząc wyraz cx, z drugiéy do piérwszéy strony, będziemy mieli $ax - b - cx = d$; przenosząc potém wyraz $-b$ z piérwszéy do drugiéy, stanie się

$$ax - cx = d + b.$$

§ 11. Za pomocą poprzedzaiącego prawidła, wnet można w jednę stronę zrównania zebrać wszystkie wyrazy maiące przy sobie ilość niewiadomą, a w drugą wszystkie ilości znane, i pod tym kształtem, rozłożyć tę stronę, w któréy znayduje się ilość niewiadoma, na dwa mnożniki, z których jeden zawiérał w sobie same ilości dane, a niewiadome drugi.

To uproszczenie nawija się samo w każdym razie, kiedy tylko dane zrównanie jest liczbowe, i żadnych w sobie niéma ułamków, ponieważ wówczas wszystkie wyrazy zawiéraiące w sobie ilość niewiadomą sprowadzaią się do jednego. Jeżlibyśmy naprzykład mieli $10x + 7x - 2x = 25 + 7$, tedy wskazane działania wykonawszy po obu stronach zrównania, wynaleźlibyśmy $17x - 2x = 32$,

czyli $15x = 32$;

aże $15x$ rozkłada się na dwa mnożniki 15 i x, zatém otrzymamy mnożnika ilości niewiadoméy x, dzieląc przez danego mnożnika 15, liczbę 32, równą mnogości $15x$; stanie się więc

$$x = \frac{32}{15}.$$

Rozkład podobnież się odbywa i w literalnych zrównaniach następuiącemu podobnych

$$ax = bc;$$

ponieważ wyraz ax, oznacza bezpośrednie mnogość z ilości a przez x; więc stąd wnosimy, że

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Niech będzie zrównanie $ax - bx + cx = ac - bc$, w którego trzech wyrazach znayduie się ilość niewiadoma. Ponieważ ax, bx, cx, wyrażaią odpowiedne mnogości z ilości x mnożonéy przez a, b, c; zatém wyrażenie $ax - bx + cx$ przełożone na pospolity język daie wysłowienie takowe:

Od x *wziętego tyle razy ile jest jedności w* a, *odbierz tyle razy* x, *ile ma w sobie jedności* b, *a do reszty doday tęż samę ilość* x *tyle razy wziętą, ile zawiéra w sobie jedności* c.

Skąd wynika, że w tym przykładzie, ilość niewiadoma x, znayduie się tyle razy wzięta, ile się zawiéra jedności w różnicy liczb a i b, powiększonéy liczbą c; to iest tyle razy, ile znaczy liczba $a - b + c$: przeto dwa mnożniki piérwszéy strony zrównania, są $a - b + c$ i x;

mamy więc $x = \frac{ac - bc}{a - b + c}$.

To rozumowanie mogące się stosować do wszystkich innych przykładów, pokazuie że *po zebraniu w jednę stronę zrównania, różnych wyrazów zawiéraiących w sobie ilość niewiadomą, mnożnik, który ją mnoży, składa się ze wszystkich ilości mnożących ją osobno, połączonych przedzielaiącémi one znakami, a ilość niewiadoma otrzymuie się dzieląc stronę na któréy są wszystkie ilości znane, przez mnożnika o którym mowa.*

Podług tego prawidła, zrównanie $ax - 3x = bc$,

daie $x = \frac{bc}{a - 3}$.

Podobnież, zrównanie $x + ax = c - d$, przywodzi się do $x = \frac{c - d}{1 + a}$,

gdyż uważać należy, że litera x będąc sama jedna, uważaną bydź powinna, jak gdyby była mnożoną przez jedność. Postrzega się prócz tego, że w $x + ax$, ilość niewiadoma x, raz jeden więcéy się znayduie aniżeli w ax, a tém samém, że jest mnożoną przez $1 + a$.

§ 12. Widoczna jest, że jeżliby wszystkie wyrazy zrównania miały spólnego mnożnika, wtedy moglibyśmy go zaniedbać bez naruszenia równości; ponieważ inaczéy nieby się więcéy nieczyniło, tylko przez tęż samę liczbę dzieliłyby się wszystkie części obu ilości, które zakładamy iż są między sobą równe.

Niech będzie dla przykładu zrównanie

$$6abx - 9bcd = 12bdx + 15abc.$$

W tém zrównaniu, uważamy naprzód, że liczby 6, 9, 12 *i* 15, przez 3 dzielić się mogą, znosząc przeto ten mnożnik weźmiemy tylko trzecią część wszystkich ilości składaiących zrównanie, i po tém skróceniu otrzymamy

$$2abx - 3bcd = 4bdx + 5abc.$$

Postrzegamy potém, że literą b, będąc w każdym wyrazie skombinowaną przez mnożenie, wskazuie że jest spólnym mnożnikiem wszystkich

tych wyrazów; możemy ją więc także usunąć, i stanie się

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

Przystosowawszy do tego ostatniego zrównania, prawidła wyłożone w § 10 i 11, wyciągniemy z niego $2ax - 4dx = 5ac + 3cd$

$$x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}.$$

§ 13. Przeydźmy teraz do zrównań, w których wyrazy dzielników maią, a do których poprzedzaiące prawidła bezpośrednie stosowane bydź mogą w każdym razie, kiedy tylko niewiadoma ilość do mianownika niewchodzi; lecz częstokroć nierównie jest prościéy wszystkie wyrazy przywieśdź do jednakowego mianownika, którego potém usunąć można.

Niech będzie naprzykład, zrównanie

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}.$$

Z Arytmetyki już są nam wiadome prawidła, na przywodzenie ułamków do jednakowego mianownika i zamienianie liczb całkowitych na ułamki danego gatunku. Przeto na mocy tych prawideł, możemy przemienić na ułamki jednakowego mianownika maiące, wszystkie wyrazy podanego zrównania.

Począwszy naprzód od ułamków danych

$$\frac{2x}{3}, \quad \frac{4x}{5}, \quad \frac{5x}{7},$$

zamienimy je, za pomocą wzmiankowanych arytmetycznych prawideł, na

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7}, \quad \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7}, \quad \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7};$$

potém chcąc zamienić liczby całe 4 i 12 na ułamki, niepotrzeba nic więcéy, tylko pomnożyc je przez spólnego mianownika ułamków; to jest, przez $3 \times 5 \times 7$, a otrzymamy $3 \times 5 \times 7 \times 4, 3 \times 5 \times 7 \times 12$.

Kładąc teraz wszystkie te wyrazy na swoiém mieyscu w podaném zrównaniu, to zamieni się na

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 4}{3 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 12}{3 \times 5 \times 7} - \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7}$$

a dopiéro można całkiem mianownika zmazać, gdyż tym sposobem znosi się tylko mnożenie przez niego wszystkich części zrównania, co bynaymniéy równości niepsuie. Po takowém usunięciu mianownika, będzie zrównanie $5 \times 7 \times 2x + 3 \times 5 \times 7 \times 4 = 3 \times 7 \times 4x + 3 \times 5 \times 7 \times 12 - 3 \times 5 \times 5x$,

czyli $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$,

z którego wyciągnie się wartość na x, za pomocą poprzedzaiących prawideł.

Samo weyrzenie na wypadek dopiéro położony, tudzież przystosowanie prawideł arytmetycznych wzmiankowanych, pokazuią oczywiście, że w działaniu o którém mowa, *licznik każdego z ułamków danych, powinien bydź mnożony przez mnogość że wszystkich innych mianowników, liczby zaś całkowite przez mnogość ze wszystkich mianowników; a podówczas spólny mianownik ułamków wypadłych, wchodzić do rachunku nie powinien.*

Przeto zrównanie $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, następnie stanie się $70x + 75x - 84x = 1260 - 420$

$$61x = 840$$

$$x = \frac{840}{61} = 13\frac{47}{61}.$$

Tenże sam sposób postępowania, i do literalnych stosuie się zrównań, to tylko uważaiąc, że w nich niemożna inaczéy, tylko oznaczać mnożenia, jakie wykonywamy kiedy na liczbach odbywa się robota.

Niech za przykład służy zrównanie

$$\frac{ax}{b} - c = \frac{dx}{e} + \frac{fg}{h};$$

skąd wyprowadzimy wypadek

$$ehx\,ax - behx\,c = bhx\,dx + be\,fg,$$

który prościéy napisać można i zgodniéy z ustawą przyiętą w §*ie* 7, kładąc mnożniki każdéy mnogości jedne po drugich bez środkuiącego znaku mnożenia, i w nich przemieniaiąc porządek mnożenia, dla zachowania porządku alfabetu, jako nierównie łatwieyszego w wysłowianiu liter: co wykonawszy będzie

$aehx - bceh = bdhx + befg$, a stąd wyprowadzi się

$$aehx - bdhx = befg + bceh,$$

$$x = \frac{befg + bceh}{aeh - bdh}.$$

§ 14. Chociaż mieć niemożemy żadnego ogólnego i dokładnego prawa, abyśmy mogli podług niego układać w zrównanie jakiekolwiek bądź zagadnienie dane; jednak w tym razie pewne nam służy prawidło, którego przystosowanie należycie poięte, niemylnie do zamierzonego celu doprowadzić może. Oto jest to prawidło:

Wskazać, tak na ilościach wiadomych wyrażonych bądź literami bądź liczbami, jak i na niewiadomych zawsze wyrażonych literami, też same rozumowania i też same działania, jakieby odbywać wypadało sprawdzaiąc wartości niewiadomych ilości, gdyby te już dane były.

Chcąc ciągnąć użycie z tego prawidła, wprzódy z pilnością oznaczyć należy, jakie są działania, które wysłowienie pytania bądź wyraźnie bądź też domyśnie zamyka; co jest istotnym punktem na którym cała polega trudność *ułożenia w zrównanie* danego zagadnienia.

Następuiące przykłady posłużą nam za objaśnienie, jak się powinno wypełniać dopiéro wzmiankowane prawidło. Dwa są tu dla tego wybrane z pomiędzy zadań w arytmetyce rozwiązanych, aby pokazać, jaką przynosi łatwość rozwijaniu wysłowień algebraiczne pisanie.

1°. *Daymy że są dwie fontanny, z których piérwsza wytryskuiąc przez* $2\frac{1}{2}$ *godz: napełnia pewne naczynie, a druga także je napełnia wytryskuiąc przez* $3\frac{3}{4}$ *godz: w jakimże czasie obie te fontanny razem wytryskuiąc wypełnią toż naczynie?*

Jeżeliby ten czas był dany, sprawdzonoby go rachuiąc ilości wody, jakie każda fontanna przez swóy wytrysk daie; łącząc zaś wypadki, upewnionoby się że te składaią całą massę wody, jaką naczynie obeymować może.

Aby ułożyć zrównanie, oznaczémy przez x czas niewiadomy, i na x wskażemy działania wysłowione w zadaniu; lecz ażeby rozwiązanie uczynić niézależącém od liczb danych, tudzież skrócić wyrażenia ułamkowe w wysłowieniu zawarte, wyrazimy je także literami, pisząc a, zamiast $2\frac{1}{2}$ godz: i b na mieyscu $3\frac{3}{4}$ godz:

To założywszy, weźmy jak w arytmetyce, obiętość naczynia za jedność, a postrzeżemy, że

Piérwsza fontanna która wypełnia to naczynie w liczbie a godzin, dostarczy mu przez go-

dzinę ilość wody oznaczoną ułamkiem $\frac{1}{a}$; a zatém w liczbie godzin x, dostarczy ilość wody $x \times \frac{1}{a}$, czyli $\frac{x}{a}$ (*Arytm.* 53)*). Fontanna druga wypełniaiąc toż samo naczynie w godzinach b, dostarczy w jednéy godzinie ilość wody $1 \times \frac{1}{b}$, czyli $\frac{1}{b}$; a zatém w liczbie godzin x, dostarczy $x \times \frac{1}{b}$, czyli $\frac{x}{b}$. Więc całkowita massa wody dwiema fontannami dostarczona, będzie $\frac{x}{a} + \frac{x}{b}$; aże ona powinna wyrównywać téy ilości którą obeymnie naczynie i którą wzieliśmy za jedność; przeto będziemy mieli zrównanie $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$.

To zrównanie, podług poprzedzaiących prawideł przerabiane, przyprowadzi nas do

$$bx + ax = ab,$$

$$x = \frac{ab}{b+a}.$$

Wzór ten ostatni podaie na rozwiązanie wszystkich przypadków zagadnienia danego, to nayprostsze prawidło:

(*) Autor wzmiankuie tu § arytmetyki swoiéy, lecz Czytelnik, to prawidło do którego się Autor odnosi w § 53, znaleśdź może w arytmetyce *P. Czecha* pod Artykułem *o Mnożeniu ułamków*,

Mnogość z liczb czas oznaczaiących, w jakim każda w szczególności fontanna wypełnia naczynie dane, podzielić przez tychże liczb summę; a wieloraz wskaże czas, w jakim obie fontanny wytryskuiąc razem, to naczynie wypełnić mogą.

Przystosowawszy to prawidło do liczb w zadaniu danych, będzie

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{75}{8}$$

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{20}{8} + \frac{30}{8} = \frac{50}{8},$$

skąd $x = \frac{75}{50} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ godz:

2°. *Niech* a *będzie liczba dana do rozdzielenia na takie trzy części, któreby między sobą były w stosunku, jak liczby dane* m, n *i* p.

Rzecz jest oczywista, że sprawdzenie tego pytania odbywałoby się jak następuie:

Oznaczywszy przez x część piérwszą, mielibyśmy

$$m : n :: x : \text{części drugiéy} = \frac{nx}{m},$$

$$m : p :: x : \text{części trzeciéy} = \frac{px}{m};$$

zbiór tych części musiałby dać liczbę do rozdzielenia daną; więc mielibyśmy zrównanie

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a.$$

Wszystkie te trzy wyrazy przywiodłszy do mianownika m, otrzymamy

$mx + nx + px = am$, i stąd wyciągniemy

$$x = \frac{am}{m+n+p}.$$

Ten wypadek jest tylko algebraiczném tłumaczeniem *Reguły spółki* (*); ponieważ wystawiwszy sobie, że liczby m, n, p, oznaczaią szczególne summy, czyli trzech kupców składki, wtedy $m+n+p$ oznaczy całkowitą składkę czyli ogólną summę, a zyskiem do rozdzielenia danym będzie a; przeto wyrażenie $x = \frac{ma}{m+n+p}$ pokazuie widocznie, *że otrzymuie się część jedna zysku, mnożąc odpowiedna składkę przez zysk całkowity, i dzieląc tę mnogość przez summę składek; co na tę proporcyę wypada*,

summa wszystkich składek : do składki jednéy : : zysk całkowity : szczególnego zysku.

§ 15. Następuiące zagadnienie, aby w zrównanie ułożone bydź mogło, wymaga szczególnych uwag, które dotychczas jescze się nam nienastręczały.

Pewny rybak dla zachęcenia swoiego syna do rybołowstwa przyrzekł mu dać 5 groszy za toń każdą, z któréyby zaciągneli ryby; syn także miał oycu zwracać po 3 gr. za każde bezpożyteczne wyciągnienie sieci. Po 12 toniach obrachowali oba swoie wygrane, i pokazało się w końcu, że oyciec był obowiązany dać synowi 28 gr. Ileż było pomyślnych toni?

Jeżeli liczbę toni czyli szczęśliwych wyciągnień sieci wyrazimy przez x, liczba razy bezpożytecznych będzie $12 - x$; gdyby te liczby były nam dane, sprawdzalibyśmy je mnożąc 5 gr. przez liczbę piérwszą, dla uwiadomienia się ile oyciec powinien dać synowi, a 3 gr. przez drugą, aby odkryć co syn powinien oycu zwrócić; liczba zaś piérwsza powinnaby przewyższać drugą, 28 groszami które od oyca należą się synowi.

(*) Obacz Arytmetykę *Czecha* o Regule trzech pod liczbą V.

Zatém mielibyśmy za piérwszą liczbę, x razy 5 gr. czyli $5x$. Co się ściąga do liczby drugiéy, tu zachodzi trudność, jakim sposobem otrzymać mnogość z 3 przez $12 - x$. Gdybyśmy za x mieli liczbę daną, moglibyśmy naprzód wykonać odciąganie a potém mnożyć 5 przez resztę; lecz w teraźnieyszém zdarzeniu, rzecz zdaie się na moment niepodobna, albowiem należy wykonywać mnożenie przed odciąganiem, albo przynaymniéy przywieśdź wypadek do zbioru algebraicznych wyrazów tym podobnych, jakie zawiéraią w sobie zrównania, które już rozwiązywać umiémy. Przy niewielkiém zastanowieniu się postrzegamy, że biorąc 12 razy liczbę 3, powtarza się 3 tyle razy nadto, ile jest jedności w liczbie x, którą zmnieyszony był wprzódy mnożnik 12, a tak prawdziwą mnogością będzie 36 zmnieyszone 3 wziętémi x razy, czyli $3x$, to jest

$$36 - 3x.$$

Ten wypadek łatwo sprawdzać się może, kładąc za x wartości liczbowe. Jeżeliby np: x było równe 8, mielibyśmy do wzięcia 3 razy $12 - 8$ razy 3; gdyby zaniedbano -8 razy 3, to w wypadku położonoby nadto 8 razy liczbę 3; więc prawdziwa mnogość będzie

$$3 \times 12 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12.$$

Ten wypadek, z tym się zgadza, jaki otrzymuiemy, wprzódy odeymuiąc 8 od 12, albowiem

$12 - 8 = 4$ i $3 \times 4 = 12$.

Ponieważ pieniądze należące od oyca synowi są wyrażone przez $5x$, a od syna oycu przez $36 - 3x$; potrzeba zatém aby liczba druga odciągnięta od piérwszéy dała reszty 28; lecz jeszcze nowa tu zachodzi trudność: jakim sposobem odciągnąć $36 - 3x$ od $5x$, wprzódy nieodciągnąwszy $3x$ od 36?

Ułatwia się ta trudność przez tę uwagę, że gdyby zaniedbano wyraz $-3x$, a od $5x$ odciągano samę tylko liczbę 36, odciągniętoby tém samém $3x$ nadto; gdyż odciąganie od $5x$ nie piérwéy wykonane bydź powinno, aż po zmnieyszeniu 36 $3ma\ x$. Przeto różnica $5x - 36$, powinna bydź powiększona $3x$, dla złożenia ilości, jaka powinna zostać po odciągnięciu od $5x$, liczby wyrażonéy przez $36 - 3x$: więc tą ilością będzie

$$5x - 36 + 3x;$$

zatém będziemy mieli zrównanie

$$5x - 36 + 3x = 28;$$

czyli

$$8x = 28 + 36$$
$$8x = 64$$
$$x = \frac{64}{8} = 8.$$

Więc szczęśliwych toni było 8, a bezpożytecznych wyciągnień sieci było 4.

Wrzeczy saméy, 8 razy po 5 gr. daią 40.
4 razy po 3 daią 12.

różnica 28,

jak wymaga wysłowienie pytania.

Gdybyśmy chcieli dać rozwiązanie ogólne tegoż samego pytania, wyobrazilibyśmy przez a summę, którą oyciec daie synowi za każdą toń szczęśliwego wyciągnienia sieci, a przez b, jaką syn

zwraca oycu za każdy raz bezpożytecznego wyciągnienia, przez c liczbę wszystkich toni, a przez d, to wyrazilibyśmy co od oyca należy się synowi po rozrachunku.

Oznaczywszy przez x liczbę toni, z których wyciągnienie sieci szczęśliwe było, $c - x$ oznaczałoby liczbę toni bezpożytecznych; aże każdy raz pociągnienia sieci piérwszego gatunku, przynosi synowi summę a, zatém x razy, uczynią $a \times x$ czyli ax: a ilość razy bezpożytecznych, przyczyni oycu summę b mnożoną przez $c - x$.

Rozumowanie, za którego pośrednictwem powynaydowaliśmy części składaiące mnogość z $12 - x$ przez 3, zupełnie stosuie się do ogólnego przypadku. I tak, jeźliby w składaniu mnogości bc, z b przez c, zaniedbano $-x$, wtedy w mnogości bc, summa b, byłaby powtórzoną x razy nadto; a zatém prawdziwa mnogość będzie $bc - bx$.

W odciąganiu téy mnogości od summy ax, uważać należy, równie jak w przykładzie liczbowym, że gdyby od niéy odciągano samą tylko ilość bc, odiętoby nadto ilość bx, którą wprzódy zmnieyszoną bydź powinna; przeto prawdziwa reszta nie jest $ax - bc$, ale $ax - bc + bx$.

A ponieważ ta summa powinna bydź równą d, więc zrównanie zagadnienia będzie

$$ax - bc + bx = d,$$

i da

$$ax + bx = d + bc$$

skąd

$$x = \frac{d + bc}{a + b}.$$

Ogólny ten wzór, pokazuiący jak odbywać należy działania na liczbach danych a, b, c, d, dla otrzymania niewiadoméy ilości x, możemy, albo na prawidło zamienić, albo raczéy na mieyscu liter

a, b, c, d, pisać w niém liczby dane; ten drugi postępowania sposób, jest to, co nazywamy *podstawić* wartości dane, albo raczéy *wystawić wzór w liczbach*. Co przystosowawszy do przykładu dopiéro podanego, stanie się

$$x = \frac{28 + 3 \times 12}{5 \times 3};$$

a wykonawszy działania wskazane, mamy równie jak wyżéy

$$x = \frac{28 + 36}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Sposoby odbywania, według możności, działań wskazanych na ilościach wyrażanych literami.

§ 16. Widzieliśmy na poprzedzaiącém zadaniu, iż w pewnych przypadkach wypadało rozkładać na mnożenia cząstkowe, mnożenie wyrażone na summie lub różnicy wielu ilości; w §*ie* 11, postępowaliśmy całkiem przeciwnie, rozkładaiąc ilość $ax - bx + cx$ wyrażaiącą wypadek z kilku mnożeń, powstałych z odbytych dodawań i odciągań na mnożnikach $a - b + c$ i x, które wskazuią tylko poiedyńcze mnożenie, dodawaniem i odciąganiem poprzedzone.

Rozumowania, których używaliśmy w obudwóch tych okolicznościach, mogą bydź przemienione na prawidła, a z nich wynikną na ilości wyrażane literami, działania nazwane *mnożenie i dzielenie algebraiczne*, z podobieństwa jakie maią z działaniami arytmetycznémi tego nazwiska. Poznaliśmy już działania algebraiczne, za pośrednictwem tegoż samego podobieństwa, pod imionami *dodawanie* i *odciąganie*, których jest celem, albo łączenie w jedno wielu algebraicznych wyrażeń, albo odbiéranie jednego z nich od drugiego; lecz te działania równie jak poprzednicze tém się od arytmetycznych różnią, że ich wypadki częstokroć będąc samą skazówką działań maiących się odbywać, wystawiaią nam samo tylko przerabianie działań pierwiastkowie wskazanych, na inne tenże sam wydaiące skutek. Jednak się zdarza, że, albo się wyrażenia na prostsze przerabiaią, albo się im nadaie właściwa postać do objawiania warunków, jakie należy spełnić.

Dla wytłumaczenia tych działań, mianuią się ilościami poiedyńczémi, albo prościéy *jedno-wyrazowémi* (monomes) te, które z jednego tylko składaią się wyrazu, np: $+ 2a$, $- 3ab$, i. t. d; *dwó-wyrazowémi* (binomes) które zawiéraią w sobie dwa wyrazy, np: $a + b$, $a - b$, $5a - 2x$; *trzy-wyrazowe* (trinomes) które z trzech składaią się wyrazów; *cztero-wyrazowe* (quadrinomes) które są złożone ze cztérech wyrazów; a w ogólności *wielo-wyrazowe* (polinomes) ilości złożone z wielu wyrazów. Pożyteczna jest uważać, że jedno-wyrazy miannią się ilościami *niezwikłanémi* (incomplexes), *a wielo-wyrazy zwikłanémi* (complexes).

O Dodawaniu ilości algebraicznych.

§ 17. Dodawanie jedno-wyrazowych ilości, odbywa się przez samo ich łączenie znakiem +; i tak, dodanie ilości b do a, znaczémy przez $a + b$. Lecz gdy wypada dodawać wielo-wyrazy algebraiczne, podówczas na celu mamy uproszczenie wypadku, przywodząc go jak można do naymnieyszéy liczby wyrazów, przez połączenie ich

wielu w jeden tylko. To jednoczenie, jest tém samém, jakie wykonywane było w §fie 2 i 5, gdzie przywodziliśmy ilości $x+x$ do $2x$, $x+x+x$ do $3x$. Aże to niemoże mieć mieysca tylko między ilościami wyrażanémi jednakowémi literami, więc dla téy przyczyny, takowe ilości *podobnémi* nazwano. Ilość literalna, która się znayduie powtórzona pewną liczbą razy, uważa się za jedność; to jest, że ilości $2a$ i $3a$ uważane jako dwie i trzy jedności szczególnego gatunku, po dodaniu składaią $5a$, czyli pięć jedności tegoż gatunku. Podobnież $4ab$ i $5ab$ stanowią $9ab$.

W tym przypadku, dodawanie odbywa się na liczbach przed ilościami literalnémi leżących, które wskazuią, ile razy ilość jest powtórzona i nazywaią się *współczynnikami* (coefficiens). Współczynnik, jest więc mnożnikiem ilości przed którą leży; przytém pamiętać trzeba, że ile razy nie jest napisany współczynnik, zawsze jest domyślny i równy jedności, albowiem $1a$ jest toż samo co a.

§ 18. Gdyby wypadało dodawać jakiekolwiek ilości takie, jak naprzykład

$$4a+5b \text{ i } 2c+3d,$$

wtedy zbiór całkowity widocznie powinien się składać ze wszystkich razem zebranych części; więc należy pisać

$$4a+5b+2c+3d.$$

Jeżeliby przeciwnie, dodawać przychodziło

$$4a+5b \text{ i } 2c-3d,$$

należałoby w zbiorze pisać ze znakiem — ilość $3d$, czyli wskazać jéy odciąganie; albowiem ona maiąc wprzódy bydź odciągniętą od $2c$, zmnieyszyłaby tém samém o tyleż i summę składaiącą się z połączenia $2c$ z piérwszémi ilościami danémi; będzie więc

$$4a+5b+2c-3d.$$

Oba te przykłady pokazuią, że *dodawanie algebraiczne wielo-wyrazów odbywa się, pisząc w ciągu jedne po drugich ilości do dodawania dane z ich własnémi znakami, to na baczeniu maiąc, aby wyrazy przed którémi żadnego niemasz znaku, poczytywane były za maiące znak +.*

Działanie tylko co odbyte, jest właściwie mówiąc skazówką, za któréy pośrednictwem połączenie dwóch zwikłanych ilości, jest doprowadzone do dodawania i odciągania pewnéy liczby jedno-wyrazów: lecz gdyby wyrażenia do dodawania dane zawiérały wyrazy podobne, moglibyśmy je zjednoczyć, odbywaiąc bezpośrednie działania na ich współczynnikach.

Niech będą za przykład, wyrażenia

$$4a+9b-2c,$$
$$2a-3c+4d,$$
$$7b+c-e,$$

zbiorem całkowitym wskazanym podług poprzedniczych prawideł, będzie

$$4a+9b-2c+2a-3c+4d+7b+c-e.$$

Aże wyrazy $4a$ i $+2a$ składaią się z ilości podobnych, więc złączone bydź mogą w jeden, równy $6a$.

Podobnież wyrazy $+9b$, $+7b$ daią $16b$.

Wyrazy zaś $-2c$ i $-3c$ jako oba odjemne, w ogólnym zbiorze tenże sam sprawią skutek, jaki wynika po odciągnięciu ilości równéy ich summie, to jest ilości $5c$; a ponieważ znayduie się jeszcze i wyraz $+c$, zatém z drugiéy strony będzie c do dodania, więc do odciągnięcia pozostanie tylko $4c$.

Przeto zbiór podanych wyrażeń przywiedzie się do

$$6a+16b-4c+4d-e.$$

§ 19. Ostatnie działanie dopiéro wykonane,

przez które wszystkie wyrazy podobne zbiérać się mogą w jeden, jakiebykolwiek miały znaki, nazywa się *uproszczeniem* (reduction). *Odbywa się to uproszczenie, zbiéraiąc w summę wszystkie wyrazy podobne ze znakiem +, i ilości podobne ze znakiem —, potém odciągaiąc naymnieyszy z tych dwóch zbiorów od naywiększego, i reszcie daiąc znak naywiększego.*

Zachować należy nadal w pamięci, że uproszczenie rozciąga się do wszystkich algebraicznych działań.

Dla wprawy czytelników, kilka przykładów dodawania z ich wypadkami kładziemy.

1°. Dodać ilości

$$7m+3n-14p+17r$$
$$3a+9n-11m+2r$$
$$5p-4m+8n$$
$$11n-2b-m-r+s.$$

Wypadek $7m+3n-14p+17r+3a+9n-11m+2r+5p-4m+8n+11n-2b-n-r+s.$

Uskuteczniwszy skrócenie, cały ten wypadek zamieni się na następuiący:

$$-9m+31n-9p+18r+3a-2b+s,$$

czyli $31n-9m-9p+18r+3a-2b+s$, poczynaiąc od wyrazu ze znakiem +.

2°. Dodać ilości

$$11bc+4ad-8ac+5cd$$
$$8ac+7bc-2ad+4mn$$
$$2cd-3ab+5ac+an$$
$$9an-2bc-2ad+5cd,$$

Wypadek $11bc+4ad-8ac+5cd+8ac+7bc-2ad+4mn+2cd-3ab+5ac+an+9an-2bc-2ad+5cd.$

Uproszczona ta ilość, stanie się równą

$$16bc+5ac+12cd+4mn-3ab+10an.$$

O Odciąganiu ilości algebraicznych.

§ 20. Odciąganie ilości jednowyrazowych oznaczamy, jak jest właściwa, kładąc znak —, między ilością od któréy się odciąga a maiącą się odciągać. I tak odciągaiąc b od a, pisze się $a-b$.

Gdy zaś ilości są podobne, odciąganie odbywa się na współczynnikach. Jeźli od $5a$ odciągniemy $3a$, reszta pozostanie $2a$.

Co się tycze odciągania wielo-wyrazów, następuiące dwa przypadki rozróżnić należy. 1°. Jeżeli ilość maiąca się odciągać, we wszystkich swoich wyrazach ma znak +; oczywista, że przemienić go należy na —, gdyż następnie wszystkie jéy części odciągać wypada od ilości, od któréy odciągamy.

Gdyby naprzykład od $5a-9b+2c$ chciano odciągnąć $2d+3e+4f$, pisaćby należało

$$5a-9b+2c-2d-3e-4f.$$

2°. Gdy ilość maiąca się odciągać, ma wyrazy ze znakiem —, należy onym dać znak +. Bo jeżeliby od ilości a, chciano odciągnąć $b-c$, i zaraz napisano $a-b$, zmnieyszonoby a, samą tylko ilością b; lecz że odciąganie wykonywać się niewprzódy powinno, aż po rzeczywistém zmnieyszeniu ilości b ilością c, przeto odiętoby nadto tę ostatnią ilość, więc przywrócić ją należy kładąc w wypadku ze znakiem —; co da, na wypadek prawdziwy

$$a-b+c.$$

To rozumowanie, które przystosować się może do wszystkich podobnych przypadków, uczy

nas, że znak — ilości c, przemieniony bydź powinien na $+$. Zbliżywszy do poprzedzaiącego ten wypadek drugi, wniesiemy następuiące prawidło; że *odciąganie algebraicznych ilości wykonywa się, pisząc po ilości od któréy odciągamy, ilość do odciągania daną, wprzódy w niéy przemieniwszy znak* $+$ *na* $-$, *i* $-$ *na* $+$.

Maiąc już napisany wypadek, jaki daie wyżéy wysłowione prawidło, odbywamy, jeźli podobna, skrócenia zgodne z prawidłem w §*ście* 19 położone; jak się pokaże na następuiących przykładach.

1°. Odciągnąć od $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$
ilość . . . $51a - 27b + 11c - 4d$.

Wypadek $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$
$-51a + 27b - 11c + 4d$.

Wykonawszy skrócenie tego wypadku
będzie $-34a + 2m + 18b - 15c + 27d$,
czyli $2m - 34a + 18b - 15c + 27d$.

2°. Odciągnąć od $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
ilość . . $8am - 2ab + 11ac - 7cd$.

Wypadek $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
$-8am + 2ab - 11ac + 7cd$.

Odbywszy skrócenie, stanie się
$-6ac - 6ab + 9bc - 12am + 7cd$.
czyli $9bc - 6ac - 6ab - 12am + 7cd$.

O Mnożeniu ilości algebraicznych.

§ 21. Ponieważ literami wyrażamy tylko wartości tych ilości, których one zastępuią mieysce, zatém mnożenie algebraiczne powinniśmy sobie tak wystawić jak arytmetyczne. I tak, *rozmnożyć* a *przez* b, *jest to samo, co ilość wyrażoną przez* a *powtórzyć tyle razy, ile ilość literą* b *oznaczona zawiéra w sobie jedności.* Poznaliśmy już w § 2 i 7, znaki służące na oznaczanie mnożenia; zatém mnogość z a przez b, napisalibyśmy $a \times b$, albo $a \,.\, b$, lub nakoniec ab.

Nayczęściéy wydarza się potrzeba wskazania wielu mnożeń następnych, jak naprzykład, mnogości z a przez b, potém mnogości ab przez c, daléy téy ostatniéy przez d, i. t. d. W tym przypadku widoczna, że ostatni wypadek jest taką liczbą, któréy mnożnikami są a, b, c, d: co może się zogólnić podług wyżéy podanego prawidła, jak następuie: *oznacza się ostateczna mnogość, pisząc jeden po drugim wszystkie ją składaiące mnożniki, bez żadnego między niémi środkuiącego znaku;* i tym sposobem mamy wyrażenie $abcd$.

Nawzaiem, wszystkie takie wyrażenia jak $abcd$, złożone z wielu liter napisanych bezpośrednie jednych po drugich, zawsze oznaczaią mnogość z liczb temiż wyrażanych literami.

Mieliśmy już choć niewidocznie użycie tych prawideł w przykładach, w których zawiérały się także współczynniki liczbowe, gdyż widocznie i te są mnożnikami ilości daney. W rzeczy bowiem saméy, $15abcd$, oznaczaiąc ilość $abcd$, wziętą 15 razy, wyraża mnogość pięciu mnożników $15, a, b, c, d$.

§ 22. Skąd wynika, że chcąc wskazać mnożenie wielu takich jednowyrazowych ilości, jakiémi są $4abc$, $5def$, $3mn$, należy je pisać jedne po drugich bez środkuiącego między niémi znaku; a będzie $4abc5def3mn$; aże pokazało się w arytmetyce, że podług upodobania mogliśmy przemieniać porządek mnożników daney mnogości, bynaymniéy nieodmieniaiąc jéy wartości; przeto i tu kładziemy obok siebie mnożniki liczbowe,

których mnożenie wykonane bydź może podług arytmetycznych prawideł: więc przyimuiemy, że powyższa mnogość oznaczyć się może, jak wskazuie następuiący porządek $4.5.3abcdefmn$; a uskuteczniwszy mnożenie na liczbach $4, 5, 3$, będziemy tylko mieli $60abcdefmn$ (*).

§ 23. Wyrażenie mnogości jescze bardziéy się skraca, jeźli zawiéra w sobie mnożniki równe. Zamiast cobyśmy mieli ciągiem po kilka razy pisać literę wyrażaiącą jednego z tych mnożników, kładziemy ją tylko raz jeden, i oznaczamy liczbą, ile razy powinna bydź napisana za mnożnika; lecz ponieważ ta liczba wskazuie nam mnożenia następuiące jedne po drugich, przeto powinna bydź naydoskonaléy rozróżnioną od współczynnika, który tylko dodawanie znaczy; i dla téy przyczyny kładzie się ta nad literą po prawéy stronie, gdy współczynnik zawsze się po lewéy i na téyże saméy z literą linii pisze.

Podług przyiętego takowego cechowania, mnogość z a przez a, którąbyśmy według § 21, wyrazili przez aa, możemy wyrazić krócéy przez a^2. W górze nad literą położone 2, znaczy, że liczba którą litera a wyraża, jest dwa razy mnożnikiem

(*) Użycie algebraicznych znaków, bardzo skraca dowodzenie tego podania, osądziłem przeto za powinność przytoczyć je w tym mieyscu.

Jeżeli mnogość $abcdef$ napiszemy jak następuie: $abc \times de \times f$, i zmienimy porządek dwóch mnożników mnogości de, aby mieć ed, stanie się $abc \times ed \times f$ czyli $abcedf$. Widoczna jest, że przez nowe rozkłady można jaką chcąc wprowadzić zmianę, w porządek mnożników mnogości danéy.

w wyrażeniu daném; przeto a^2 cale brać nie należy za $2a$, co nieco innego jest tylko skrócenie wyrażenia $a + a$. Aby przekonać się o błędzie, jakiby popełniono biorąc jedno za drugie, dosyć będzie podstawić za litery liczby. Jeźliby naprzykład było $a = 5$, $2a$ znaczyłyby

$2.5 = 10$, a $a^2 = a \times a = 5.5 = 25$.

Pomykaiąc daléy ten postęp, postrzeżemy, że na cechowanie mnogości, w któréy a trzy razy będzie mnożnikiem, należałoby pisać a^3 zamiast aaa; podobnież i a^5 wyraża mnogość, któréy a, jest pięć razy mnożnikiem, czyli wyrównywa $aaaaa$.

§ 24. Mnogości powstałe z kilkokrotnego mnożenia przez się jednéy ilości, nazwane są w ogólności *potęgami* téyże ilości. Taż sama ilość jak naprzykład a, nazywa się potęgą piérwszą. Jlość rozmnożona przez siebie samę, jak aa, czyli raczéy a^2, jest potęgą drugą, którą także nazywamy *kwadratem*.

Jlość ciągiem dwa razy przez się mnożona, jak aaa czyli a^3, jest potęgą trzecią, i mianuie się *sześcianém*. (cube) (*)

W ogólności, każda potęga oznacza się liczbą mnożników równych, z których powstała: a^5, czyli $aaaaa$, jest *potęgą piątą* ilości a.

Aby pokazać przystosowanie tych mianowań, weźmy liczbę 3, i będziemy mieli

(*) Mianowania *kwadrat* i *sześcian*, jako do uważań jeometrycznych należące i zrywaiące jednokształtność w wyrażeniu mnogości powstaiących z równych mnożników, chociaż są w algebrze nayniewłaściwsze, jednak często używane bywaią z przyczyny ich wyrażeń krótkich.

1sza potęga 5
2ga . . . . . 5.5 = 9
3cia . . . . . 5.5.5 = 9.5 = 27.
4ta . . . . . 5.5.5.5 = 27.5 = 81.
5ta . . . . 5.5.5.5.5 = 81.5 = 243.
i. t. d.

Liczba znacząca potęgę liczby innéy, nazywa się jéy *wykładnikiem* (exposant).

Wykładnik gdy jest równy jedności nigdy się niepisze: i tak, a jest toż samo co a^1.

Ukazuie się z tego co poprzedziło, że *chcąc jakąkolwiek bądź liczbę wynieść do potęgi, mnożyć ją należy przez się samę, mniéy raz jeden, od jedności zawartych w wykładniku potęgi danéy.*

§ 25. Ponieważ wykładnik znaczy liczbę mnożników równych stanowiących wyrażenie dane, a mnogość z dwóch ilości zawiérać powinna wszystkie te mnożniki, które osobno każdą z tych ilości składaią; więc stąd wynika, że wyrażenie a^5, w którym a jest 5 razy mnożnikiem, rozmnożone przez wyrażenie a^3, maiące a trzy razy za mnożnika, wydać taką powinno mnogość, w któréyby a było mnożnikiem razy 8, a zatém wyrażoną przez a^8; a w ogólności, *mnogość dwóch potęg jedney jakieykolwiek liczby, powinna mieć za wykładnika, zbiór wykładników mnożnéy i mnożącéy.*

§ 26. Skąd wynika, że *gdy dwie jednowyrazowe ilości maią litery jednakowe, tedy wyrażenie ich mnogości możemy skrócić, ciągiem dodaiąc wykładniki liter podobnych w mnożnéy i mnożącéy będących.*

Naprzykład, wyrażenie mnogości, z ilości $a^2 b^3 c$ i $a^4 b^5 c^2 d$, które byłoby $a^2 b^3 c\, a^4 b^5 c^2 d$, skraca się postępuiąc podług przyiętéy zgody

w § 21, zbiéraiąc w summę mnożniki znaczone literą jednakową, co daie $a^2 a^4 b^3 b^5 c\, c^2 d$; a stąd otrzymuiemy $a^6 b^8 c^3 d$,
pisząc a^6 zamiast $a^2 a^4$
b^8 $b^3 b^5$
c^3 $c\, c^2$ czyli $c^1 c^2$.

§ 27. Jak rozróżnialiśmy potęgi liczbą mnożników równych, z których powstały; tak podobnież rozdzielamy na klassy wszelkie mnogości, liczbą mnożników prostych czyli *piérwszych*, które je składaią, i te klassy nazywamy *stopniami* (degrés). Mnogość $a^2 b^3 c$, będzie naprzykład 6go stopnia, ponieważ zawiéra 6 mnożników prostych, to jest: 2 mnożniki a, 3 mnożniki b, a jeden mnożnik c. Jest tedy oczywista, że mnożniki a, b i c, uważane tu za proste, są tylko za takie miane w algebraicznym względzie, który ich nieprzypuszcza rozkładu; lecz gdzieindziéy mogą wyrażać składane liczby: tu zaś nam tylko chodzi o ich stan ogólny. (*)

Współczynniki liczbowe cale niewpływaią w ocenianie stopnia algebraicznych ilości, stosuią się tylko do samych liter.

(*) Z ciągu podobieństwa wskazanego na stron. 44, powszechnie nazywano *wymiarami* co nazywamy *stopniami*. Wyrażenie dopiéro przytoczone, miałoby 6 wymiarów w tym pospolitym języku. Ten przykład dostatecznie dowodzi dawnego słownictwa niewłaściwość, ustalonego na tém, że mnogość z dwóch lub trzech mnożników mierzy place, powiérzchnie i obiętości ciał, które 2 lub 3 wymiary maią; lecz ten wyraz znika, kiedy między wyrażeniami algebraicznémi, a jeometrycznémi figurami zachodząca odpowiedność ustaie; gdyż rozciągłość więcéy mieć niemoże nad trzy wymiary.

Widoczna z (§*fów* 21 i 25), że gdy dwie jedno-wyrazowe ilości mnożymy między sobą, liczba wskazuiąca stopień ich mnogości jest zbiorem liczb znaczących stopień każdego z tych jednowyrazów.

§ 28. Mnożenie ilości zwikłanych polega na sposobie mnożenia jedno-wyrazów, biorąc po szczególe każdy wyraz mnożnéy i mnożącéy, i odbywaiąc działanie podobnie jak w arytmetyce, z każdą cyfrą liczb do mnożenia danych; a stąd powstałe szczególne mnogości razem dodane, dadzą mnogość całką. Lecz w algebrze nowa się nam okoliczność zjawia, która się nie wydarza w liczbach. W nich bowiem nieznayduią się wyrazy do odciągania, czyli odjemne części; jedności, dziesiątki, sta, i. t. d, z których się składaią liczby, zawsze poymuiemy między sobą dodane, i widoczna jest w takowym razie, że mnogość całka powinna się składáć z mnogości szczególnych każdéy części mnożnéy, przez każdą część mnożącéy.

To prawdzi się i wówczas, kiedy odbywamy działania na wyrażeniach literalnych, których wszystkie wyrazy znakiem + są połączone.

Mnogość, z ilości $a+b$
mnożonéy przez c

jest $ac+bc$; którą otrzymuiemy mnożąc każdą część mnożnéy przez mnożącą, i dodaiąc dwie szczególne mnogości ac i bc. Jeżeliby mnożna więcéy miała nad dwa wyrazy, działanie byłoby zawsze toż samo.

Gdy mnożąca jest zbiorem wielu wyrazów; widoczna jest, że mnogość składa się ze zbioru szczególnych mnogości z mnożnéy przez każdy wyraz mnożącéy.

Mnogość z ilości $a+b$
mnożonéy przez $c+d$

jest $\begin{cases} ac+bc \\ ad+bd; \end{cases}$

albowiem rozmnożywszy wprzódy $a+b$ przez c, otrzymuiemy $ac+bc$, potém rozmnożywszy $a+b$ przez drugi wyraz d mnożącéy, znayduiemy $ad+bd$, a zbiór tych dwóch wypadków daie $ac+bc+ad+bd$, za całką mnogość.

§ 29. Jeżeli mnożna zawiéra w sobie części odjemne, mnogości z tych części przez mnożącą, powinny bydź odciągnięte od mnogości innych, to jest mieć znak —.

Naprzykład, mnogość z $a-b$
przez c

jest $ac-bc$;

bo w każdym razie gdzie całkowicie bralibyśmy ilość a, którąby przed mnożeniem mnieyszą bydź powinna ilością b, wzielibyśmy nadto tę ilość; zatém mnogość ac, w któréy ilość a, jest całkiem tyle razy wzięta, ile znaczy liczba c, przewyższałaby bezwątpienia mnogość szukaną ilością b tyle razy wziętą, ile znaczy liczba c, to jest mnogością bc; należy więc koniecznie odciągnąć bc od ac, co da prawdziwą mnogość $ac-bc$.

Toż samo rozumowanie przystosowane bydź może do każdéy z części odjemnych mnożnéy, jakabykolwiek ich, i wyrazów mnożącéy była liczba, byleby te ostatnie wszystkie były ze znakiem +. Maiąc nato baczenie, że wyrazy niemaiące przy sobie żadnego znaku, maią zawsze domyślny znak +, widzimy z tych przykładów, że wyrazy mnożnéy ze znakiem +, daią szczególne mnogości ze znakiem +, równie jak te które są ze znakiem —

daią znak —. Stąd wynika, że *ile razy mnożąca szczególna ma znak +, tyle razy mnogość szczególna ma znak mnożnéy szczególnéy.*

§ 30. Rzecz ma się przeciwnie, gdy części odjemne zawiéra mnożąca; mnogości powstałe z tych części powinny bydź brane z przeciwnym znakiem temu, jaki wprzód te części miały, podług poprzedzaiących prawideł. Oczém się przekonamy następuiącym przykładem.

Niech będzie mnożna $a - b$,
mnożąca $c - d$,

mnogość będzie $\begin{cases} ac - bc \\ -ad + bd \end{cases}$;

mnogość bowiem z mnożnéy przez piérwszy wyraz c mnożącéy, będzie podług poprzedzaiącego przykładu $ac - bc$; lecz gdybyśmy za mnożącą wzięli samo jedno c, w takowym razie zamiast c zmnieyszonego ilością d, wzielibyśmy ilość $a - b$ tyle razy nadto, ile znaczy liczba d; przeto, mnogość $ac - bc$ przewyższałaby szukaną, mnogością z $a - b$ przez d. Więc tą ostatnią mnogością, podług tego co poprzedziło, jest $ad - bd$; aże dla odciągnięcia jéy od piérwszéy, należy przemienić znaki (§ 20); będzie więc

$ac - bc - ad + bd$ mnogością szukaną.

§ 31. Zbiéraiąc wypadki z podawanych przykładów wyciągnięte, wniesiemy z nich „ że *mnożenie wielowyrazów odbywa się, mnożąc następnie podług danych prawideł na mnożenie jedno-wyrazów* (§ 21, 26), *wszystkie wyrazy mnożnéy przez każdy wyraz mnożącéy, wzgląd na to maiąc, że jeźli mnożąca szczególna ma znak +, mnogość szczególna powinna mieć znak szczególnéy mnożnéy, a przeciwny, gdyby szczególna mnożąca miała znak —.*

Jeżeli rozbierzemy różne przypadki tego ostatniego prawidła, znaydziemy,

1°. Że wyraz maiący znak +, mnożony przez wyraz ze znakiem +, daie mnogość ze znakiem +;

2°. Że wyraz ze znakiem —, mnożony przez wyraz maiący znak +, daie mnogość ze znakiem —;

3°. Że wyraz ze znakiem +, mnożony przez wyraz ze znakiem —, daie mnogość ze znakiem —;

4°. Że wyraz ze znakiem —, mnożony przez wyraz ze znakiem —, daie mnogość ze znakiem +.

Ta tablica pokazuie, że *jeżeli mnożna i mnożąca szczególne maią jednakowe znaki, mnogość ma znak +, gdy zaś maią znaki różne, mnogość ma znak —.* Naostatek, aby ułatwić praktykę mnożenia wielo-wyrazów, powtórzmy prawidła jakich trzymać się w tym działaniu mamy.

1°. *Oznaczyć znaki każdéy szczególnéy mnogości, według powyższego prawidła:* to jest prawidło na znaki.

2° *Składać współczynnika, robiąc mnogość ze współczynników mnożnéy i mnożącéy szczególnych;* to prawidło na współczynniki.

3°. *Pisać porządnie w ciągu jedne po drugich różne litery zawarte w mnożnéy i mnożącéy* (§ 21): to na litery prawidło.

4°. *Literom spólnym mnożnéy i mnożącéy, dać wykładnika równego summie wykładników, jakie miały te litery w mnożnéy i mnożącéy* (§ 25): to prawidło na wykładniki.

§ 32. Tych wszystkich prawideł da nam zastosowanie następuiący przykład.

Mnożna $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

Mnożąca $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

Mnogości szczególne
$5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$
$-20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3$
$+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$

Wypadek uproszczony
$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2$
$-6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$

Piérwsza liniia te tylko zawiéra szczególne mnogości, które daie mnożenie wszystkich wyrazów mnożnéy przez piérwszy wyraz a^3 mnożącéy; aże ten wyraz uważa się jako maiący znak +, mnogości zatém stąd powstałe też same maią znaki, jakie są w odpowiadaiącéy mnożnéy. (§ 31)

Ponieważ piérwszy wyraz mnożnéy $5a^4$, ma znak +, przeto żaden się znak niepisze przed piérwszym wyrazem szczególnéy mnogości; współczynnik 5, ilości a^4, rozmnożony przez współczynnika 1, wyrazu a^3, daie 5, na współczynnika mnogości szczególnéy; że zaś summa dwóch wykładników litery a, jest $4+3$, czyli 7, więc piérwsza szczególna mnogość jest $5a^7$.

Ponieważ drugi wyraz mnożnéy $-2a^3b$ jest ze znakiem —, zatém i mnogość ma znak —; współczynnik 2, wyrazu a^3b, mnożony przez współczynnika 1, wyrazu a^3, daie 2, na współczynnika mnogości; wykładnik litery a, spólny mnożącym się wyrazom, jest $3+3$ czyli 6; poczém pisze się wyraz b, który znayduie się tylko w szczególnéy mnożnéy: więc drugą mnogością szczególną jest $-2a^6b$.

Trzeci wyraz $+4a^2b^2$, daie szczególną mnogość ze znakiem +, a podług przystosowanych prawideł do poprzedzaiących dwóch wyrazów, wynaydzie się szczególna mnogość trzecia $+4a^5b^2$.

Druga liniia zaymuie wszystkie wyrazy mnożnéy przez drugi wyraz mnożącéy $-4a^2b$; aże ten wyraz ma znak —, przeto wszystkie mnogości, które on daie, powinny mieć znaki przeciwne znayduiącym się przy odpowiednich wyrazach w mnożnéy: współczynniki litery i wykładniki tak się tworzą, jak w linii poprzedzaiącéy.

Liniia trzecia zaymuie nakoniec mnogości ze wszystkich wyrazów mnożnéy przez trzeci wyraz $+2b^3$ mnożącéy; ponieważ jest on ze znakiem +, przeto wszystkie jakie daie mnogości, ten sam znak maią, co i wyrazy odpowiadaiące w mnożnéy.

Maiąc już wszystkie szczególne mnogości, z których się całkowa składa, rozważa się pilnie ta ostatnia dla dostrzeżenia w niéy wyrazów podobnych, jeżeli się te w niéy zawiéraią; tedy całe jéy wyrażenie skrócić się może podług prawidła §*fu* 19, na to wzgląd maiąc, że dwa wyrazy aby podobne były, nie tylko też same litery mieć powinny, ale jescze i jednostayne wykładniki. J tak, w przykładzie podanym, trzy uproszczenia mamy, to jest:

$-2a^6b$ i $-20a^6b$, co daie $-22a^6b$
$+4a^5b^2$ i $+8a^5b^2$, co daie $+12a^5b^2$
$-16a^4b^3$ i $+10a^4b^3$, co daie $-6a^4b^3$.

Wykonawszy te uproszczenia mamy w wypadku ostatnią linię przykładu.

Dla wprawy czytelnika jescze jeden kładzie się mnożenia przykład, który łatwym jest do wykonania po tém cośmy już wyłożyli.

Mnożna. $5\,a^4\,b^2 + 7\,a^3\,b^3 - 15\,a^5\,c + 23\,b^2\,d^4 - 17\,b\,c^3\,d^2 - 9\,a\,b\,c\,d\,m^2$

Mnożąca. $11\,b^3 - 8\,c^3 + 5\,a\,b\,c - 2\,b\,d\,m.$

Mnogości szczególne.

$$\begin{array}{l} 55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 165a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2 \\ -40a^4b^2c^3 - 56a^3b^3c^3 + 120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2 \\ +25a^5b^3c + 35a^4b^4c - 75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2 - 45a^2b^2c^2dm^2 \\ -10a^4b^3dm - 14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^2d^3m + 18ab^2cd^2m^3 \end{array}$$

Wypadek uproszczony

$$\begin{array}{l} 55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 140a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2 - 40a^4b^2c^3 \\ -56a^3b^3c^3 + 120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2 + 35a^4b^4c \\ -75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2 - 45a^2b^2c^2dm^2 - 10a^4b^3dm \\ -14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^3d^3m + 18ab^2cd^2m^3, \end{array}$$

§ 53. Sposoby postępowania w mnożeniu nauczyły nas, że jeźli wszystkie wyrazy mnożnéy są jednego stopnia (§ 27), a wyrazy mnożącéy są także jednakiego stopnia, tedy wszystkie wyrazy mnogości będą stopnia znaczonego summą liczb oznaczających stopień wyrazów każdego z mnożników danych.

W przykładzie pierwszym, mnożna jest czwartego stopnia, mnożąca trzeciego, a mnogość siódmego.

W drugim, mnożna szóstego, mnożąca trzeciego, a mnogość jest dziewiątego stopnia.

Wyrażenia podobne dopiéro przytoczonémi, w których wszystkie wyrazy jednakowego są stopnia, nazywają się wyrażeniami *jedno-rodnémi*. Baczność jaką mieć należy na ich mnogości, pożyteczną jest dla uniknienia błędów jakieby popełnione bydź mogły, gdyby którykolwiek z mnożników w szczególnych mnożeniach był opuszczony.

§ 54. Działania algebraiczne wykonywane na literalnych ilościach, dozwalając widzieć, jakim sposobem różne części tych ilości wpływają do utworzenia wypadków, częstokroć poznać dalią liczb ogólne własności od żadnego układu liczenia niezawisłe. Mnożenia, które następnie przytoczémy, przywiodą nas do nayznaczniejszych tego rodzaiu wniosków, i częstego przystosowania w ciągu dalszym.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ +ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{array}$$

Mnożenie piérwsze, z którego wynika, że ilość $a + b$ pomnożona przez $a - b$, daie $a^2 - b^2$, uczy nas: że *jeźli mnożémy summę dwóch liczb przez ich różnicę, zawsze mnogość będzie kwadratem liczb tychże.*

Jeżeli weźmiemy za przykład summę 11, liczb 7 i 4, i pomnożemy ją przez tych liczb różnicę, mnogość 3×11 czyli 33, będzie równa różnicy, między 49 kwadratem z 7, a 16 kwadratem z 4.

Z przykładu drugiego, w którym $a + b$ jest dwa razy mnożnikiem, uczemy się, *że druga potęga czyli kwadrat ilości złożonéy z dwóch części a i b, zawiéra kwadrat części piérwszéy, więcéy podwóyną mnogość z części piérwszéy przez drugą, więcéy kwadrat części drugiéy.*

Przykład trzeci, w którym rozmnożyliśmy drugą potęgę dwówyrazowéy ilości przez piérwszą, pokazuie: *że trzecia potęga ilości składaiącéy się z dwóch części, zawiéra w sobie sześcian części piérwszéy, potróyną mnogość z kwadratu części piérwszéy przez drugą, potróyną mnogość z kwadratu części drugiéy przez część piérwszą, więcéy nakoniec sześcian części drugiéy.*

§ 35. Ponieważ często potrzeba zachodzi rozkładać ilości na ich mnożniki, i zawsze je wystawiać w naywidocznieyszéy, jak bydź może postaci; przeto niedokonywaią się algebraiczne zachodzące działania na ilościach które uważamy, chybaby bez tego cale obeyść się niebyło można;

należy więc z téy przyczyny ustanowić właściwe znaki wskazuiące zachodzące mnożenia między ilościami zwikłanémi.

Używamy w tym celu nawiasów, którémi obeymuiemy rozmaite mnożniki danéy mnogości. Wyrażenie

$(5a^4 - 3a^2b^2 + b^4)(4ab^2 - ac^2 + d^3)(b^2 - c^2)$

wskazuie mnogość ilości zwikłanych

$5a^4 - 3a^2b^2 + b^4$, $4ab^2 - ac^2 + d^3$, $b^2 - c^2$.

Niektórzy dawnieysi autorowie kładli nad mnożnikami liniikę, jak widzić się daie na wyrażeniu następném,

$$\overline{5a^4 - 3a^2b^2 + b^4} \times \overline{4ab^2 - ac^2 + d^3} \times \overline{b^2 - c^2};$$

lecz że liniiki mniéy więcéy nad potrzebę przedłużane bydź mogą, zatém robią te znaki mniéy dokładnémi od nawiasów, które niepodciągaią pod wątpliwość całości zawartych ilości w każdym mnożniku; nawiasy więc bardziéy są używane jak liniiki.

O Dzieleniu ilości algebraicznych.

§ 36. Dzielenie algebraiczne, tak jak i arytmetyczne, ma bydź uważane za działanie służące do odkrycia jednego z mnożników danéy mnogości, gdy jest wiadomy drugi. Z téy definicyi wypada, iż przez dzielącą rozmnożony wieloraz, wydać powinien podzielną.

Przystosowawszy to prawidło do jednowyrazowych ilości, obaczémy podług § 21, że podzielna składa się z mnożników dzielącéy i wielorazu; więc *znosząc w podzielnéy wszystkie mnożniki składaiące dzielącą, wypadek będzie wielorazem szukanym.*

Niech będzie naprzykład ilość jednowyrazowa $72a^5b^3c^2d$, dana do podzielenia przez ilość

jednowyrazową $9\,a^3\,b\,c^2$; należy, podług dopiéro wskazanego prawidła, w piérwszéy z danych ilości, znieść mnożniki drugiéy, któremi są 9, a^3, b, i c^2.

Więc aby dzielenie odbyć się mogło, potrzeba iżby te mnożniki znaydowały się w podzielnéy. Biorąc je porządkiem, dostrzegamy natychmiast, że współczynnik 9 dzielącéy, powinien bydź mnożnikiem współczynnika 72 podzielnéy, czyli aby 9 doskonale dzieliło 72; co dzieie się i w rzeczy saméy, albowiem $72 = 9 \times 8$: zniosłszy więc mnożnika 9, pozostanie mnożnik 8, za współczynnika wielorazu.

Jescze także wynika z prawideł na mnożenie (§ 25), że wykładnik 5 litery a, w podzielnéy, jest summą wykładników dzielącéy i wielorazu; oczywista zatém, że wykładnik wielorazu będzie ich różnicą, to jest: $5 - 3 = 2$; przeto litera a w wielorazie będzie miała za wykładnika 2. Dla téyże saméy przyczyny, wykładnik litery b w wielorazie będzie równy $3 - 1 = 2$. Naostatek mnożnik c^2, jako spólny podzielnéy i dzielącéy, zupełnie się zniesie; będzie więc $8\,a^2\,b^2\,d$ wielorazem szukanym.

Podobnież rozumuiąc i na wszystkich innych przykładach, wnieślibyśmy z tego co poprzedziło, *że chcąc wykonać dzielenie jednowyrazów, należy dzielić współczynnika podzielnéy przez współczynnika dzielącéy;*

Znosić w podzielnéy litery spólne z literami dzielącéy, gdy maią jednakowego wykładnika; w przeciwnym razie odciągnąć wykładnika dzielącéy od wykładnika podzielnéy, a reszta będzie wykładnikiem jaki litera wielorazu mieć powinna.

Nakoniec, pisać w wielorazie litery podzielnéy, które się nieznayduią w dzielącéy.

§ 37. Prawidło dopiéro dane na wynaydowanie wykładnika liter wielorazu, stosuiąc do jednéy litery maiącéy jednakowego wykładnika w podzielnéy i dzielącéy; znaleźlibyśmy zero za wykładnika w wielorazie. Naprzykład a^3 dzielone przez a^3, dałoby na wieloraz a^0. Abyśmy poznali, co może podobne wyrażenie znaczyć, należy na jego rodzenie się zwrócić uwagę, i rozważyć, że wyrażenie wielorazu wynikaiącego z podzielenia ilości a^3 przez się samę, powinno bydz jednością, która znaczy, ile razy jakakolwiek ilość mieści się w sobie saméy. Stąd więc wypada, że *wyrażenie* a^0, *jest to samo co jedność, a tém samém może jego mieysce zastąpić jedność.* Można więc uwolnić się od pisania liter maiących wykładnika zero, ponieważ każda z nich w tym razie wyraża jedność. I tak, $a^3\,b\,c^2$ dzielone przez $a^2\,b\,c^2$, daie na wieloraz $a^1\,b^0\,c^0$, co się przywodzi do a, jak o tém przekonać się można, zaniedbuiąc mnożniki spólne podzielnéy i dzielącéy. Stąd się ukazuie, że to założenie: *każda ilość z wykładnikiem zero, znaczy jedność*, nie jest właściwie mówiąc, tylko tłumaczeniem wypadku, do którego doprowadza prawo podane na sposób pisania potęg ilości przez wykładniki.

Aby dzielenie wykonane bydź mogło, potrzeba, 1°. ażeby dzieląca żadnéy litery niezawiérała, któraby się nieznaydowała w podzielnéy; 2°. ażeby wykładnik liter w dzielącéy, nieprzywyższał wykładnika liter w podzielnéy; 3°. naostatek aby współczynnik dzielącéy dzielił bez reszty współczynnika podzielnéy.

§ 38. Jeżeli zaś te warunki dopełnione nie są, tedy dzielenie nie inaczéy tylko wyrażone bydź może przez ułamek, podług przyiętéy zgody w §fie 2,

i szuka się sposobu jego wyrażenia nayprostszego, znosząc mnożniki spólne podzielnéy i dzielącéy, jeżeli się takie znayduią w tém wyrażeniu ostatniém. Ponieważ w arytmetyce pokazało się oczywiście, że zasady, na których polega teorya arytmetycznych ułamków, niezależą od żadnych wartości szczególnych ich wyrazów; zatém zupełnie też same służyć mogą i na ułamki wyrażane literami, jak i na ułamki liczbowe.

Na mocy tych zasad, *znoszą się naprzód mnożniki liczbowe spólne współczynnikom podzielnéy i dzielącéy, potém litery znayduiące się też same w podzielnéy i dzielącéy przy jednakowych wykładnikach. Gdy zaś wykładniki są różne, wówczas odciąga się naymnieyszy od naywiększego, a reszta daie się za wykładnika literze, która się pisze, w tym z dwóch wyrazów ułamku, w którym naywyższego wykładnika miała.*

Przykład następuiący wyświéci to prawidło.

Niech będzie wyrażenie $48\,a^3\,b^5\,c^2\,d$ dane do podzielenia przez $64\,a^3\,b^3\,c^4\,e$; wieloraz nie może się inaczéy wskazać, jak tylko pod postacią ułamku $\frac{48\,a^3\,b^5\,c^2\,d}{64\,a^3\,b^3\,c^4\,e}$: lecz że współczynniki 48 i 64 są oba podzielne przez 16, przeto usunąwszy ten spólny mnożnik, współczynnik licznika stanie się 3, a mianownika 4. Aże litera a, ma jednakowego wykładnika w obu wyrazach ułamku, oczywiście się tedy pokázuie, że a^3 jest spólnym mnożnikiem podzielnéy i dzielącéy, i że ten także zniesiony bydź może.

Chcąc poznać liczbę mnożników litery b, spólnych obudwóm wyrazom ułamku, należy podzielić literę z naywyższym wykładnikiem, jaką jest b^5, przez b^3, postępuiąc podług prawideł wyżey danych, a wieloraz b^2 nauczy, że $b^5 = b^3 \times b^2$. Usunąwszy więc spólny mnożnik b^3, pozostanie w liczniku mnożnik b^2.

Ze względu na literę c, naywyżéy podniesiony jéy mnożnik jest c^4 w mianowniku, więc go podzieliwszy przez c^2, rozłożémy na $c^2 \times c^2$; a usunąwszy mnożnik c^2 spólny obu wyrazom, litera ta w liczniku zniknie, a w mianowniku pozostanie z wykładnikiem 2. Naostatek litery d i e pozostaną na swoich mieyscach, ponieważ w tym, w jakim się znayduią stanie, żadnego niewskazuią mnożnika, któryby był spólny jednéy i drugiéy.

Ułamek podany przechodząc przez te różne działania przywiedzie się

$$\text{do } \frac{3\,b^2\,d}{4\,c^2\,e};$$

i to jest dopóty nayprostszém jego wyrażeniem, póki za litery, żadne nie są dane wartości liczbowe; lecz gdyby mieysca liter zaięły liczby zawiéraiące spólne mnożniki, tedy to wyrażenie jeszczeby bardziéy uproszczone bydź mogło.

§ 39. Téy uwagi opuścić tu niepodobna, że jeźliby wszystkie mnożniki podzielnéy wchodziły do dzielącéy, któraby jescze zawiéra nadto inne sobie szczególne, w takowym razie po zniesieniu mnożników piérwszych, należałoby położyć jedność na mieyscu podzielnéy za licznika ułamku. W tym bowiem przypadku, można znosić, w obu wyrazach ułamku, wszystkie mnożniki licznika, oba te wyrazy przez licznika dzieląc; aże on jest podzielnym przez się samego, zatém na wieloraz powinien dać jedność, a ta będzie nowym licznikiem.

Niech dla przykładu będzie ułamek $\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd}$; mnożniki 12, a^2, b^3 i c, są podzielne przez mnożniki 4, a^2, b i c, właśnie jakby dzielono oba wyrazy danego ułamku przez licznika $4a^2bc$; że zaś ilość $4a^2bc$ dzielona przez się samę daie na wieloraz 1, a ilość $12a^2b^3cd$, dzielona przez piérwszą, daie podług poprzedzaiących prawideł $3b^2d$; nowy więc ułamek jest $\frac{1}{3b^2d}$.

§ 40. Z prawideł mnożenia wynika, że ile razy ilość jednowyrazowa wielowyrazową mnoży, zawsze piérwsza staie się spólnym mnożnikiem wszystkich wyrazów drugiéy. Z tego postrzeżenia tę mamy naypomyślnieyszą korzyć, że możemy do nayprostszych wyrażeń przywieśdź te ułamki, których liczniki i mianowniki są wielowyrazami maiącémi spólne mnożniki, we wszystkich swych wyrazach.

Niech będzie wyrażenie

$$\frac{6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2}{9a^2b - 15a^2c + 24a^3};$$

Rozważaiąc ilość $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2$, postrzegamy że mnożnik a^2 jest spólny wszystkim jéy wyrazom, ponieważ $a^4 = a^2 \times a^2$, i prócz tego że liczby 6, 3, i 12, podzielne są wszystkie przez 3;

przeto $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2$

$= 2a^2 \times 3a^2 - bc \times 3a^2 + 4c^2 \times 3a^2$.

Podobnież i mianownik ma za spólnego mnożnika $3a^2$, ponieważ mnożniki a^2 i 3, we wszystkie jego wyrazy wchodząc; mamy przeto

$9a^2b - 15a^2c + 24a^3 = 3b \times 3a^2 - 5c \times 3a^2 + 8a \times 3a^2$.

Zniosłszy więc mnożnik $3a^2$ tak w liczniku

jak mianowniku, dany ułamek stanie się

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

§. 41. Przeydźmy teraz do przypadku, w którym podzielna i dzieląca są ilościami zwikłanémi, gdzie za piérwszym rzutem oka niepodobna rozpoznać, czy dzieląca jest lub nie, mnożnikiem podzielnéy.

Ponieważ dzieląca mnożona przez wieloraz powinna wydać podzielną; należy zatém, aby ta ostatnia zawiérała wszystkie mnogości szczególne z każdego wyrazu dzielącéy przez każdy wyraz wielorazu; jeżlibyśmy tedy mogli utworzone mnogości przez każdy w szczególności wyraz dzielącéy, powtórnie znaleśdź, dzieląc je przez wyraz już nam znaiomy; otrzymalibyśmy przez to, mnogości wielorazu, podobnymże sposobem jak w arytmetyce wyszukiwaliśmy wszystkie cyfry wielorazu, dzieląc następnie przez dzielącą, liczby które uważaliśmy za mnogości szczególne z téy dzielącéy przez różne cyfry wielorazu złożone. Lecz w liczbach te szczególne mnogości ukazuią się porządkiem, począwszy od jedności leżących na ostatniém mieyscu ze strony lewéy, z przyczyny ustanowionego porządku między jednościami każdéy cyfry podzielnéy, co do mieysca jakie zaymuią. W Algebrze zaś tego niemamy, ale ten niedostatek zapełnia uszykowanie tym sposobem wszystkich wyrazów podzielnéy i dzielącéy, aby jednéy jakiéy litery wykładniki potęg, zmnieyszały się w każdym wyrazie, idąc ze strony lewéy ku prawéy, jak się daie widzieć na literze a, w ilościach

$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$,

$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$,

z których piérwsza jest mnogością, a druga mnożną, w działaniu § 32: i to jest co nazywamy *uszykować* ilości dane.

Gdy ilości tak są uporządkowane, oczywiście widać, jaki ma bydź mnożnik, przez któryby mnożyć należało ilość drugą dla otrzymania piérwszéy; wyraz $5\,a^7$, poczynaiący ilość piérwszą, wynika z rozmnożenia wyrazu $5\,a^4$, przez wyraz taki, w którymby a miało naywyższego wykładnika, w mnożniku szukanym, a który jest piérwszym tego mnożnika, kiedy stosownie do potęg litery a już uszykowano ilości. Podzieliwszy więc ilość jednowyrazową $5\,a^7$, przez ilość jednowyrazową $5\,a^4$, wieloraz a^3, będzie piérwszym wyrazem szukanego mnożnika. Aże podług prawideł mnożenia, mnogość całkowa zawiérać powinna różne mnogości szczególne wynikaiące z mnożenia całéy mnożnéy przez każdy wyraz mnożącéy; stąd więc wypływa, że ilość tu za podzielnę wzięta, powinna zamykać mnogości ze wszystkich wyrazów dzielącéy $5\,a^4 - 2\,a^3\,b + 4\,a^2\,b^2$, przez piérwszy wyraz wielorazu a^3; a zatém jeżeli od podzielnéy odciągniemy te mnogości które są $5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$, reszta $20\,a^6\,b + 8\,a^5\,b^2 - 6\,a^4\,b^3 - 4\,a^3\,b^4 + 8\,a^2\,b^5$, te tylko mnożniki zawiérać będzie, które powstaią z rozmnożenia dzielącey przez wyrazy, drugi, trzeci, i. t. d wielorazu.

Tę więc resztę uważać możemy za podzielną szczególną, a jéy piérwszy wyraz, w którym a, ma naywyższego wykładnika, nie mógł powstać, tylko z rozmnożenia piérwszego wyrazu dzielącéy przez drugi wielorazu. Lecz że pierwszy wyraz podzielnéy szczególnéy ma znak —, potrzeba zatém takiż znak nadać wyrazowi odpowiadaiącemu w wielorazie: co jest łatwo dokonać podług piérwszego prawidła §*fu* 31; ilość bowiem $-20\,a^6\,b$, uważa się jako szczególna mnogość maiąca znak przeciwny znakowi mnożnéy szczególnéy $5\,a^4$, stąd wynika, że mnożąca szczególna, powinna bydź ze znakiem —. Wykonawszy działanie na ilościach jednowyrazowych $-20\,a^6\,b$, i $5\,a^4$, otrzymamy za drugi wyraz wielorazu $-4\,a^2\,b$. Jeżeli go rozmnożemy przez całą dzielącą, a z rozmnożenia wypadłą mnogość odciągniemy od podzielnéy szczególnéy, reszta $+20\,a^4\,b^3 - 4\,a^3\,b^4 + 8\,a^2\,b^5$, zawiérać będzie same mnogości z dzielącéy przez trzeci i. t. d wyraz wielorazu.

Uważaiąc resztę jako nową podzielną szczególną, piérwszy jéy wyraz $20\,a^4\,b^3$, niemoże bydź tylko mnogością z piérwszego wyrazu dzielącéy przez trzeci wielorazu; a zatém otrzymamy ten ostatni, dzieląc piérwszą przez drugą, jednowyrazowe ilości $20\,a^4\,b^3$ i $5\,a^4$. Wieloraz $2\,b^3$, pomnożony przez całą dzielącą, takie da nam mnogości, których odciąganie od podzielnéy szczególnéy wyczerpuiąc ją całą, dowodzi, że wieloraz niema więcéy jak trzy wyrazy. Jeżeliby wieloraz większą ich powinien mieć liczbę, widoczna iż równie je wynaleźlibyśmy jak poprzedzaiące; albowiem gdy zakładamy, że podzielnéy jest mnożnikiem dzieląca, tedy odciąganie mnogości z téy dzielącéy przez wyraz ostatni wielorazu, zawsze powinno wyczerpać ostatnią szczególną podzielną.

§ 42. Dla ułatwienia praktyki dopiéro znalezionych prawideł, 1°. *Układaią się podzielna i dzieląca, jak liczby do dzielenia, obie szykuiąc podług litery jednéy, to jest, tak ich się wyrazy piszą, aby téy litéry wykładniki coraz malały.*

2°. *Dzieli się piérwszy wyraz podzielnéy przez*

piérwszy wyraz dzielącéy, a wypadek pisze się na mieyscu przeznaczonym dla wielorazu.

3°. Mnoży się cała dzieląca przez wieloraz tylko co odkryty, a stąd powstała mnogość odciąga się od podzielnéy, i wykonywa się skrócenie wyrazów podobnych.

4°. Reszta pozostała bierze się za nową podzielną i téy piérwszy wyraz dzieli się przez piérwszy wyraz dzielącéy, a wypadek pisze się za drugi wyraz wielorazu, i z nim odbywa się działanie jak wyżéy; daléy postępuie się jak piérwéy, póki wszystkie wyrazy podzielnéy wyczerpane nie będą.

Dostrzegłszy że mnogość tenże sam ma znak co mnożna, gdy mnożąca ma znak +, i że w przeciwném zdarzeniu ma znak — (§ 31); wnosiémy stąd, że *jeżeli podzielna szczególna i piérwszy wyraz dzielącéy maią znak jednakowy, wieloraz powinien mieć znak +; gdy zaś maią znaki przeciwne, wieloraz powinien mieć znak —*: co jest prawidłem na znaki.

Dzielenia szczególne odbywaią się podług prawideł danych na jednowyrazowe ilości.

Dzieli się współczynnik podzielnéy przez współczynnika dzielącéy; i to jest prawidło na współczynniki.

W wielorazie piszą się litery spólne podzielnéy i dzielącéy z wykładnikiem równym różnicy wykładników, jakie maią w swoich wyrazach, a w końcu piszą się litery nieznayduiące się w dzielącéy: i te są prawidła na litery i wykładniki.

§ 43. Dla przystosowania tych prawideł doilości

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

które nam wprzódy za przykład służyły, tak je

uszykuymy, iakbyśmy odbywać mieli arytmetyczne dzielenie.

Podzielna.	Dzieląca.
$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
$-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$	Wieloraz $a^3 - 4a^2b + 2b^3$
Reszta $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
$+20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$	
Reszta $+10a^4b^5 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
$-10a^4b^5 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$	
Reszta . . . . . o.	

Ponieważ znak piérwszego wyrazu podzielnéy $5a^7$, jest tenże sam, jaki ma $5a^4$ piérwszy wyraz dzielącéy, zatém na wieloraz powinien wypaśdź +; lecz że rzecz idzie o piérwszy wyraz, przeto się ten znak opuszcza.

Podzieliwszy $5a^7$ przez $5a^4$, mamy na wieloraz a^3, które napiszemy pod dzielącą.

Rozmnożywszy następnie trzy wyrazy dzielącéy przez piérwszy wyraz a^3 wielorazu, i mnogości napisawszy pod wyrazami odpowiadaiącémi podzielnéy, wprzódy przemieniwszy znaki dla odciągania (§20), utworzy się ilość $-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$, któréy z podzielną odbywa się *redukcya* i otrzymuie się reszta $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$. Odbywaiąc działanie na téy reszcie, piérwszy wyraz $-20a^6b$ dzielony przez $5a^4$, da na wieloraz $-4a^2b$; aże podzielna i dzieląca są przeciwnych znaków, przeto ten wyraz wielorazu ma znak —. Rozmnożywszy ten wyraz wielorazu przez całą dzielącą, i w mnogości przemieniwszy znaki, utworzy się ilość $+20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$, któréy z podzielną wykonawszy uproszczenie, pozostanie reszta $+10a^4b^5 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$. Dzieli się daléy piér-

wszy wyraz téy nowéy podzielnéy szczególnéy $10\,a^4\,b^3$, przez piérwszy wyraz $5a^4$ dzielącéy; potém mnoży się przez wypadek $+2\,b^3$, cała dzieląca, a pod podzielną szczególną podpisuią się mnogości, zachowuiąc przemianę ich znaków; po czém dokonawszy uproszczenie, nic niepozostanie w reszcie: co pokazuie, że wyraz $+2\,b^3$, jest ostatnim wyrazem szukanego wielorazu, którego wyrażeniem jest $a^3 - 4\,a^2\,b + 2b^3$.

§ 44. Tu należy uważać, że w dzieleniu, mnożenia różnych wyrazów wielorazu przez dzielącą, rodzą częstokroć wyrazy nieznayduiące się w podzielnéy, a które w ciągu wypada dzielić przez piérwszy wyraz dzielącéy. Takowémi wyrazami są te, które się niszczą w czasię tworzenia się podzielnéy, z mnożenia dwóch jéy mnożników, wielorazu i dzielącéy. Oto tych redukcyy widoczny przykład.

Niech będzie $a^3 - b^3$ do podzielenia przez $a - b$.

Dzielenie.

$$\begin{array}{l|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \hline -a^3 + a^2\,b & a^2 + a\,b + b^2 \\ \hline +a^2b - b^3 & \\ -a^2b + ab^2 & \\ \hline +a\,b^2 - b^3 & \\ -a\,b^2 + b^3 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Mnożenie.

$$\begin{array}{l} a - b \\ a^2 + a\,b + b^2 \\ \hline a^3 - a^2\,b \\ +a^2b - a\,b^2 \\ +ab^2 - b^3 \\ \hline \text{wypadek } a^3 - b^3. \end{array}$$

Piérwszy wyraz a^3 podzielnéy, dzielony przez piérwszy wyraz a dzielącéy, daie wieloraz a^2; rozmnożywszy ten wieloraz przez dzielącą, i w mnogościach przemieniwszy znaki, będzie $-a^3 + a^2\,b$; wyraz $-a^3$, niszczy piérwszy wyraz podzielnéy, ale pozostaie wyraz $a^2\,b$, który wprzódy nieznaydował się w podzielnéy tego przykładu. Lecz że on zawiéra w sobie literę a, można go zatém dzielić przez piérwszy wyraz dzielącéy, a otrzyma się $+a\,b$. Rozmnożywszy ten wieloraz przez dzielącą, i w mnogościach przemieniwszy znaki, będzie $-a^2\,b + a\,b^2$; wyraz $-a^2b$, znosi poprzedzaiący, ale pozostaie wyraz $+a\,b^2$, który cale nie był w podzielnéy. Lecz gdy się on podzieli przez a, wypadnie na wieloraz $+b^2$; ten szczególny wieloraz rozmnożywszy przez dzielącą i w mnogościach przemieniwszy znaki, będzie $-a\,b^2 + b^3$; wyraz piérwszy $-a\,b^2$, zniesie zupełnie poprzedzaiący, a drugi $+b^3$, zniszczy ostani wyraz b^3, który się pozostawał z podzielnéy.

Aby doskonale poiąć mechanizm dzielenia, dosyć jest rzucić okiem na mnożenie, wielorazu $a^2 + a\,b + b^2$ przez dzielącą $a - b$, położone obok poprzedzaiącego dzielenia, a wnet się postrzeże, że wszystkie wyrazy tworzące się w dzieleniach szczególnych, są témiż samémi które się nawzaiem niszczą w wypadku mnożenia.

§ 45. Niekiedy się zdarza, że ilość według któréy szykuią się wyrazy, bywa téyże saméy potęgi w wielu wyrazach, bądź w podzielnéy, bądź też w dzielącéy. W takowym przypadku należy je szykować w jednéy kolumnie, czyli raczéy pisać te wyrazy bezpośrednie jedne po drugich, dostrzegaiąc jednak ich porządku między sobą, względnie do jakiéy litery innéy.

Niech będzie ilość

$-a^4b^2 + b^2c^4 - a^2c^4 - a^6 + 2a^4c^2 + b^6 + 2b^4c^2 + a^2b^4$

do podzielenia przez $a^2 - b^2 - c^2$.

Piérwszą z tych ilości szykuiąc co do litery a, położémy w jednéy kolumnie wyrazy $-a^4\,b^2$ i $+2\,a^4\,c^2$, w drugiéy wyrazy $+a^2\,b^4$ i $a^2\,c^4$, nakoniec w kolumnie trzeciey trzy wyrazy $+b^6$, $+2b^4c^2$,

$+b^2c^4$, szykuiąc je co do potęgi litery b, jak się widzieć daie na następuiącéy stronicy.

Piérwszy wyraz $-a^6$ podzielnéy, jako podzielny przez piérwszy wyraz a^2 dzielącéy, daie za piérwszy wyraz wielorazu $-a^4$; rozmnożywszy ten wieloraz przez wszystkie wyrazy dzielącéy, a powstałéy mnogości, położywszy w jedney kolumnie wszystkie wyrazy tęż samę maiące potęgę litery a; odciągaią się te wyrazy od podzielnéy wprzódy przemieniwszy w nich znaki; po redukcyi wyrazów podobnych zostanie piérwsza reszta, i ta się bierze za drugą podzielną szczególną.

Piérwszy wyraz $-2a^4b^2$ téy nowéy podzielnéy, dzielony przez a^2, da za drugi wyraz wielorazu, $-2a^2b^2$; z tego nowego wielorazu przez całą dzielącą złożywszy mnogości i w nich przemieniwszy znaki, dla odciągnięnia od podzielnéy szczególnéy, szykuią się w jedney kolumnie wyrazy maiące jednakową potęgę litery a, a po przyzwoitéy redukcyi wyrazów podobnych, zostanie druga reszta i ta służyć będzie za trzecią podzielną szczególną.

Odbywaiąc działanie tymże samym sposobem na téy drugiéy reszcie i na następnych, wynaydą się jeszcze trzy wyrazy wielorazu. Ostatni wyraz rozmnożony przez wszystkie wyrazy dzielącéy, da nowe mnogości, które odciągnione od *4téy* reszty, całkiem ją wyczerpną; więc dzielenie całkiem się odbędzie, a zatém dzieląca jest mnożnikiem podzielnéy.

Na następuiącéy stronicy widzieć się daie cała robota odbywaiącego się dzielenia na przykładzie danym.

$$
\begin{array}{l|l}
-a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 & a^2 - b^2 - c^2 \\
\quad + 2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 & \overline{-a^4 - 2a^2b^2 - b^4} \\
\quad\quad + b^2c^4 & \quad + a^2c^2 - b^2c^2 \\
+a^6 - a^4b^2 & \\
\quad - a^4c^2 &
\end{array}
$$

Reszta *1sza* $-2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$
$+ a^4c^2 + a^2c^4 + 2b^4c^2$
$+ b^2c^4$
$+2a^4b^2 - 2a^2b^4$
$-2a^2b^2c^2$

Reszta *2ga* $+a^4c^2 - a^2b^4 + b^6$
$-2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2$
$- a^2c^4 + b^2c^4$
$-a^4c^2 + a^2b^2c^2$
$+ a^2c^4$

Reszta *3cia* $- a^2b^4 + b^6$
$-a^2b^2c^2 + 2b^4c^2$
$+ b^2c^4$
$+ a^2b^4 - b^6$
$- b^4c^2$

Reszta *4ta* $-a^2b^2c^2 + b^4c^2$
$+ b^2c^4$
$+a^2b^2c - b^4c^2$
$- b^2c^4$

0 0

§ 46. Niekiedy ułatwia się dzielenie, rozkładaiąc ilości na jéy widoczne mnożniki. Jeżelibyśmy naprzykład mieli $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$, do podzielenia przez $2a^3 - b^2 + 1$, postrzeglibyśmy naprzód, że ta dzieląca stanowi trzy wyrazy podzielnéy, a zatém pozostaie tylko do szukania, czy jest jaki mnożnik trzech wyrazów piérwszych; lecz te maią oczywiście za spólnego mnożnika $4a^3$,

gdyż $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1)$. Z tego więc postrzeżenia, podzielna stałaby się

$$4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1,$$

czyli $(2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1)$;

dzielenie zatém wykonałoby się nayłacniéy, znosząc mnożnik $2a^3 - b^2 + 1$ równy dzielącéy, a wielorazem byłoby $4a^5 + 1$.

Wprawa w rachunek algebraiczny, mnóstwo tego rodzaiu dostarcza uwag, za których pomocą skracaią się działania. Przez ciągłe doskonalenie się łatwo przychodzimy do rozpoznawania rozkładów na mnożniki; które naywidocznieyszémi się ukazuią, kiedy zamiast odbywania wydarzaiących się mnożeń, tylko ich wskazuiemy działania.

O Ułamkach algebraicznych.

§ 47. Sposób odbywania dzielenia algebraicznégo, kiedy zastosuiemy do takich dwóch ilości, z których piérwsza nie jest mnożnikiem drugiéy; wówczas poznamy niepodobieństwo jego wykonania, ponieważ w ciągu działań przyidziemy do takowéy reszty, któréy piérwszy wyraz nie będzie mógł bydź dzielonym przez piérwszy wyraz dzielącéy. Oto jest przykład:

$$\begin{array}{r|l} a^3 + a^2b + 2b^3 & a^2 + b^2 \\ \hline -a^3 \quad - ab^2 & \overline{a + b} \\ \hline \end{array}$$

Reszta 1sza $a^2b - ab^2 + 2b^3$

$$-a^2b - b^3$$

Reszta 2ga $-ab^2 + b^3$.

Piérwszy wyraz $-ab^2$ reszty drugiéy, niemoże się podzielić przez a^2, wyraz piérwszy dzielącey: przeto w tym punkcie wstrzymuie się dzielenie. Moglibyśmy, jak w arytmetyce przyłączyć

do wielorazu $a + b$, ułamek $\frac{-ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$, za licznika maiący resztę a za mianownika dzielącą; i wieloraz były

$$a + b + \frac{b^3 - ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Łatwo więc postrzegamy, *że dzielenie powinno się wstrymać przyszedłszy do takowéy reszty, któréy piérwszy wyraz zawiéra w sobie niższe potęgi litery, podług któréy są uszykowane wyrazy, od potęgi litery teyże saméy, w piérwszym wyrazie dzielącéy*.

§ 48. Gdy dzielenie algebraiczne dwóch ilości nie może się wykonać, wyrażenie wielorazu wskazuie się pod postacią ułamku, biorąc podzielną za licznika, a za mianownika dzielącą; aby zaś ten ułamek przywieśdź do naywiększego jakie bydź może uproszczenie, należy szukać, czy nie maią podzielna i dzieląca spólnych mnożników, któreby od ich usunięte bydź mogły (§ 38). Lecz gdy się rzecz ma z wielowyrazami, ich spólne mnożniki z tąż samą nieodkrywaią się łatwoscią, z jaką w jednowyrazowych ilościach; gdyż one nie wynayduią się w ogólności, tylko sposobem podobnym, podanemu w arytmetyce na liczby, podług którego dwóch liczb danych *szuka się naywiększy spólny dzielnik*.

Nieumielibyśmy naznaczyć wyrażeniom algegraicznym odpowiednych wielkości, nienadawszy wprzódy literów wartości; zatém mianowanie, *naywiększego spólnego dzielnika*, zastosowane do tych wyrażeń, niepowinno się brać całkiem w tém samém, co w arytmetyce rozumieniu.

W Algebrze, przez naywiększy spólny dziel-

nik dwóch wyrażeń, rozumiéć należy wyrażenie jednego z ich dzielników spólnych, który we wszystkich swoich wyrazach zawiéra naywiększego z mnożników, czyli który jest do naywyższego podniesiony stopnia (§ 27). Jego oznaczenie, równie jak w arytmetyce, polega na téy zasadzie: że *każdy spólny dzielnik dwóch ilości, powinien dzielić z ich dzielenia pozostałą resztę*.

Dowodzenie, jakie na to w arytmetyce było dane (*), jaśnieyszém się staie używszy cech algebraicznych. W rzeczy bowiem saméy, jeżeli wyrazimy literą D spólnego dzielnika, dwie ilości dane wyrazić się będą mogły mnogościami AD i BD, utworzoném̀i ze spólnego dzielnika, i z mnożnika przez którego w każdéy z dwóch ilości jest on mnożony. To założywszy, jeźli Q oznacza cały wieloraz, a R resztę pozostałą z dzielenia AD przez BD, będziemy mieli

$$AD = BD \times Q + R.$$

Obie strony tego zrównania rozdzieliwszy przez D, otrzymamy $A = BQ + \frac{R}{D}$;

aże piérwsza strona zrównania, w tym przypadku powinna się składać z tych samych co i druga wyrazów, i jest całkowita; więc należy, aby $\frac{R}{D}$ zostało przywiedzioném do wyrażenia bez dzielnika; to jest, aby R było podzielném przez D.

Podług tego prawidła, *poczyna się* jak w arytmetyce, *od śledzenia, czy jedna z ilości nie jest*

(*) Czytay Arytmetykę *Czecha* o Działaniach zachodzących w ułamkach.

sama dzielnikiem drugiéy; jeźliby zaś niewykonało się całkiem dzielenie, tedy należy dzielić piérwszy dzielnik przez resztę, i tak postępować daléy; a ta z reszt, która całkiem podzieli poprzedzaiącą, będzie naywiększym spólnym dzielnikiem ilości danych: lecz nie bezpożytku będzie w podanych takowych dzieleniach zbiérać uwagi, jakie częstokroć z natury ilości algebraicznych wynikaią.

Nienależy zaraz szukać spólnego dzielnika dwóch algebraicznych wyrażeń, kiedy one maią litery spólne; potrzeba raczéy, jednę z tych liter wybrać, do któréy maią się porządkować wyrażenia dane, i to brać za podzielną, w którém ta litera ma naywiększego wykładnika: drugie zaś będzie dzielącą.

Niech będą dwie ilości

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

które już są uszykowane podług litery a; piérwszę weźmiemy za podzielną, a drugą za dzielącą. Na początku działania zaraz zjawia się trudność, na jaką nienatrafiamy w liczbach, a tą jest, że piérwszy wyraz dzielącéy nie może zupełnie dzielić piérwszego wyrazu podzielnéy, z przyczyny mnożnika 4 i litery b, która nieznayduie się w piérwszym wyrazie podzielnéy. Lecz że litera b, jest spólną wszystkim wyrazom dzielącéy a nieznayduie się we wszystkich podzielnéy, stąd wynika, że b, jest tylko mnożnikiem dzielącéy, a podzielnéy nie jest; aże każdy spólny dwóch ilości dzielnik, powinien się składać z mnożników spólnych jednéy i drugiéy; więc jeżeli między ilościami danémi znayduie się takowy dzielnik, tedy ten znaydować się musi i między mnożnikami ilości $4a^2 - 5ab + b^2$ pozostałéy po wyrugowaniu b,

z ilości $4a^2b - 5ab^2 + b^3$; przeto pytanie przywodzi się do szukania naywiększego dzielnika dwóch ilości

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Dla téy saméy przyczyny, że w jednéy z ilości danych, mnożnik b zniesiony bydź może, który nie wchodzi w drugą; można także nowego mnożnika wprowadzić w drugą, byleby on nie był mnożnikiem piérwszéy. Przez takowe działanie naywiększy spólny tych dwóch ilości dzielnik, który się składa z ich tylko spólnych mnożników, nie będzie cale zmieniony. Z téy więc korzystaiąc uwagi, pomnożmy ilość $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ przez 4, które nie są mnożnikiem ilości $4a^2 - 5ab + b^2$, aby usposobić dzielenie piérwszego wyrazu jednéy, przez takiż wyraz drugiéy.

Takowym sposobem będziemy mieli za podzielną ilość

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 + 4b^3,$$

dzielącą będzie ilość $4a^2 - 5ab + b^2$,
a wielorazem szczególnym będzie $3a$.

Przez ten wieloraz rozmnożywszy dzielącą i od podzielnéy odciągnąwszy mnogość, pozostanie w reszcie ilość

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3,$$

która podług zasady na początku tego §*fu* położonéy, jeszcze mieć powinna z ilością $4a^2 - 5ab + b^2$ tenże sam naywiększy spólny dzielnik, co i piérwsza.

Korzystaiąc z wyżéy poczynionych uwag, znieśmy mnożnik b, spólny wszystkim wyrazom dopiéro pozostałéy reszty, i rozmnożmy ją przez 4, abyśmy mogli dzielić jey piérwszy wyraz, przez takiż wyraz dzielącéy. Wówczas podzielną będzie

ilość $12a^2 + 4ab - 16b^2$,
dzielącą $4a^2 + 5ab + b^2$;
szczególny wieloraz będzie 3.

Rozmnożywszy dzielącą przez ten wieloraz i mnogość odciągnąwszy od podzielnéy, resztą będzie $19ab - 19b^2$, i pytanie zmierzać będzie do szukania naywiększego spólnego dzielnika, między tą resztą a ilością $4a^2 - 5ab + b^2$.

Lecz ponieważ litera a, stosownie do któréy odbywało się dzielenie, nieznayduie się w reszcie tylko piérwszego stopnia, gdy taż sama w dzielącéy jest drugiego, przeto wziąć należy dzielącę za podzielną, a resztę za dzielącą.

Przed zaczęciem tego nowego dzielenia, znieśmy w dzielącéy $19ab - 19b^2$, mnożnik $19b$, spólny wszystkim jéy wyrazom, a nieznayduiący się w podzielnéy; więc za podzielną będziemy mieli ilość $4a^2 - 5ab + b^2$, a za dzielącą $a - b$;
a pod ówczas dzielenie należycie się wykona: zatém $a - b$ jest naywiększym spólnym szukanym dzielnikiem.

Przebiegłszy uwagą całe dzielenie od końca aż do początku, dowiedziemy także *a posteriori*, że ilość $a - b$ powinna całkiem dzielić dwie ilości dane, i naywięcéy z tych się składać, które ją stanowić mogą. Podzieliwszy bowiem przez $a - b$, dwie podane ilości, $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$, $4a^2b - 5ab^2 + b^3$, rozłożemy je jak następuie, na

$$(3a^2 + b^2)(a - b), \quad (4ab - b^2)(a - b).$$

§ 49. Jeżeli ilość za dzielącą wzięta, z wielu się wyrazów składa, a w tych litera, podług któréy ilość uszykowana, znayduie się tegoż samego stopnia; w takowém zdarzeniu należy mieć jednę uwagę, bez któréy działanie ukończyć się nie będzie mogło.

Niech będą dwie ilości $a^2b+ac^2-d^3$, $ab-ac+d^2$; kiedy przygotuiemy działanie jak do zwyczaynego dzielenia, będziemy mieli

$$\begin{array}{r|l} a^2b+ac^2-d^3 & ab-ac+d^2 \\ \hline -a^2b+a^2c-ad^2 & \overline{a} \\ \hline \text{reszta } a^2c+ac^2-ad^2-d^3, & \end{array}$$

podzieliwszy naprzód a^2b przez ab, znayduiemy na wieloraz a; mnogości z rozmnożenia tego wielorazu przez dzielącą odciągnąwszy od podzielnéy, reszta zawiérać będzie nowy wyraz, w którym a będzie drugiego stopnia; to jest wyraz a^2c, powstały z mnogości $-ac$ przez a. Działanie tym sposobem już daléy odbywać się nie będzie mogło, albowiem wziąwszy resztę $a^2c+ac^2-ad^2-d^3$ za podzielną i rozmnożywszy ją przez b, aby dzieloną bydź mogła przez ab, będziemy mieli

$$\begin{array}{r|l} a^2bc+abc^2-abd^2-bd^3 & ab-ac+d^2 \\ \hline -a^2bc+a^2c^2-acd^2 & \overline{ac} \\ \hline \text{reszta } a^2c^2+abc^2-acd^2-abd^2-bd^3, & \end{array}$$

i wyraz $-ac$ utworzy jescze wyraz a^2c^2, w którym a będzie także drugiego stopnia.

Aby tych nieprzyzwoitości uniknąć, należy uważać, że dzieląca $ab-ac+d^2=a(b-c)+d^2$; w tém jéy wyrażeniu drugiém uczyniwszy dla skrócenia rachunku $b-c=m$ będziemy mieli za dzielącą $am+d^2$; ale wówczas potrzeba rozmnożyć całę podzielnę $a^2b+ac^2-d^3$ przez mnożnik m, ażeby takową mieć podzielnę nową, któréyby wyraz piérwszy mógł bydź dzielony przez ilość am stanowiącą piérwszy wyraz dzielącéy; przeto działanie stanie się:

$$\begin{array}{r|l} a^2bm+ac^2m-d^3m & am+d^2 \\ \hline -a^2bm-abd^2 & \overline{ab+c^2} \\ \hline \text{reszta 1sza} -abd^2+ac^2m-d^3m & \\ -ac^2m-c^2d^2 & \\ \hline \text{reszta 2ga} -abd^2-c^2d^2-d^3m. & \end{array}$$

W tym razie, wyrazy maiące drugą potęgę litery a, zostały odięte od podzielnéy, pozostały tylko wyrazy z jéy potęgą piérwszą. Aby i te zniszczyć, dzieli się naprzód wyraz ac^2m przez am, a na wieloraz wypadnie c^2; rozmnożywszy ten wieloraz przez dzielącą i mnogości odciągnąwszy od podzielnéy, pozostanie reszta druga; tę wziąwszy za podzielną nową, i zniosłszy w niéy mnożnika d^2, jako nie będącego mnożnikiem dzielącéy, stanie się $-ab-c^2-dm$; co na nowo rozmnożywszy przez m, będzie

$$\begin{array}{r|l} -abm-c^2m-dm^2 & am+d^2 \\ +abm+bd^2 & \overline{-b} \\ \hline \text{reszta } +bd^2-c^2m-dm^2. & \end{array}$$

Ponieważ z tego ostatniego dzielenia wypadła reszta, już nie zawiéra ilości a, zatém stąd wynika, że jeżeli jest jaki dzielnik spólny dwóch ilości danych, to całe on niezależy od litery a.

Przyszedłszy do tego punktu, niemożna już działania przedłużać daléy co do litery a; ale postrzeżemy, że jeżeli jest jaki spólny dzielnik ilości $bd^2-c^2m-dm^2$ i $am+d^2$, od litery a nie zależący; to potrzeba, ażeby ten oddzielnie dzielił dwie części dzielącéy am i d^2: w ogólności bowiem, jeżeli ilość jest uporządkowana podług potęg litery a, tedy cała dzieląca téy ilości od a niezależąca, oddzielnie powinna te ilości dzielić, które mnożą różne potęgi litery téyże.

Oczém by się przekonać, dosyć na to uwa-

gę zwrócić, że w tém zdarzeniu każda z podanych ilości, powinna bydź mnogością, z ilości od a niezależącéy, i z spólnego dzielnika także od niéy niezawisłego. Więc jeżelibyśmy mieli naprzykład wyrażenie

$$A a^4 + B a^3 + C a^2 + D a + E,$$

w którém litery A, B, C, D, E oznaczaią jakiekolwiek ilości od litery a niezależące, i gdybyśmy je pomnożyli przez ilość M, także od a niezależącą, mnogość

$$M A a^4 + M B a^3 + M C a^2 + M D a + M E$$

uporządkowana podług potęg litery a, jescze zawierać będzie też same potęgi ilości a, co i wprzódy; ale współczynnik każdéy z tych potęg, będzie wielokrotnym ilości M.

To założywszy, jeżeli położemy za m, ilość $(b - c)$ którą ta litera wyrażała, otrzymamy ilości $b d^2 - c^2 (b - c) - d (b - c)^2$,

$$a (b - c) + d^2;$$

a ponieważ jest oczywista, że $b - c$ i d^2 żadnego nie maią spólnego mnożnika, więc dwie ilości dane nie maią także spólnego dzielnika.

Jeżeliby z samego weyrzenia niepodobna było poznać, że niemasz żadnego spólnego dzielnika między $b - c$ i d^2, należałoby go szukać, szykuiąc wyrazy w ilościach podług litery teyże saméy, a potém się upewnić, czy mógłby on także dzielić i ilość

$$b d^2 - c^2 (b - c) - d (b - c)^2.$$

§ 50. Zamiast odkładania na koniec wynalezienie naywiększego spólnego dzielnika, niezależącego od téy litery, podług któréy szykuią się obie ilości; daleko jest wygodniéy szukać go na początku, ponieważ reszty z każdego szczególnego pozostałe działania, nayczęściéy się wikłaią w miarę odbywaiących się działań, i rachunek co raz bardziéy trudnieyszym się staie.

Niech będą naprzykład ilości

$$a^4 b^2 + a^3 b^3 + b^4 c^2 - a^4 c^2 - a^3 b c^2 - b^2 c^4,$$
$$a^2 b + a b^2 + b^3 - a^2 c - a b c - b^2 c;$$

uszykowawszy je podług litery a, będziemy mieli

$$(b^2 - c^2) a^4 + (b^3 - b c^2) a^3 + b^4 c^2 - b^2 c^4,$$
$$(b - c) a^2 + (b^2 - b c) a + b^3 - b^2 c.$$

Uważam naprzód, że jeźli maią jakiego spólnego dzielnika, któryby od litery a nie był zależnego, tedy potrzeba aby on w szczególności dzieżącym, tedy potrzeba aby on w szczególności dzieżącym, tedy potrzeba aby on w szczególności dzieżącym

nie, nic więcéy już niepozostaie, prócz wynaydowanie naywiększego spólnego dzielnika tych nayprostszych wyrażeń:

$$a^4 + b\,a^3 + b^2\,c^2$$
$$a^2 + b\,a + b^2.$$

Odbywaiąc na nich działania według podanego prawidła, przyidziemy po drugiém dzieleniu do reszty zawiéraiącéy tylko piérwszą potęgę litery a; aże ta reszta nie jest spólnym dzielnikiem, więc stąd wniesiemy, że litera a, nie jest szukanego, stanowiącą częścią; a tém samém, że naywiększy spólny szukany dzielnik, składa się tylko z samego mnożnika $b - c$.

Jeźliby prócz tego spólnego dzielnika odkryty został drugi, w którymby się nieznaydowała ilość a, należałoby między sobą rozmnożyć obadwa, aby otrzymać naywiększy spólny szukany dzielnik.

Te uwagi są dostarczaiące do nabycia nieco wprawy w analizie, aby we wszystkich przypadkach otrzymywać naywiększy spólny dzielnik; z łatwością bowiem znaydziemy, że ilości

$$6\,a^5 + 15\,a^4\,b - 4\,a^3\,c^2 - 10\,a^2\,b\,c^2,$$
$$9\,a^3\,b - 27\,a^2\,b\,c - 6\,a\,b\,c^2 + 18\,b\,c^3,$$

naywiększym spólnym dzielnikiem jest ilość $3a^2 - 2c^2$

§ 51. Cztéry główne działania, to jest dodawanie, odciąganie, mnożenie i dzielenie, odbywaią się na algebraicznych ułamkach równie jak i na arytmetycznych, to tylko zachowuiąc, aby trzymaiąc się arytmetycznych prawideł na odbywanie tych działań przepisanych, postępowano z algebraicznémi ilościami podług sposobów wskazanych wyżéy. Tu więc przestaniemy na samém tylko przypomnieniu tych prawideł, daiąc przykłady do ich zastosowania; i zaczniemy od mnożenia i dzielenia ułamków, z przyczyny, że te działania żadnych poprzednich niewymagaią przygotowań.

1°. Na mnożenie, mamy

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a\,c}{b},$$
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}.$$

2°. Na dzielenie,

$\frac{a}{b}$ dzielone przez c, daie $\frac{a}{b\,c}$, czyli $\frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\,c}$.

$\frac{a}{b}$ do podzielenia przez $\frac{c}{d}$, daie $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$ (*)

3°. Ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ przywiodłszy do jednakowego mianownika, staią się

$$\frac{a\,d}{b\,d}, \frac{b\,c}{b\,d}.$$

Ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$,

przez przywodzenie do jednakowego mianownika staną się

$$\frac{a\,d\,f\,h}{b\,d\,f\,h}, \frac{c\,b\,f\,h}{b\,d\,f\,h}, \frac{e\,b\,d\,h}{b\,d\,f\,h}, \frac{g\,b\,d\,f}{b\,d\,f\,h}.$$

§ 52. Przystosowania sposobu w arytmetyce podanego, na otrzymanie w pewnych przypadkach prostszego mianownika od tego, jaki otrzymuiemy podług ogólnego prawidła postępuiąc, bardzo ułatwiaią algebraiczne cechowania, jak na następuiącym przykładzie zobaczémy.

(*) Czytay Arytmetykę *Czecha* o Mnożeniu i Dzieleniu ułamków.

Maiąc naprzykład dwa ułamki $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, łatwo postrzegać się daie, że ich mianowniki oba jednakowe będą, jeżeli f będzie mnożnikiem piérwszego, a c drugiego: rozmnożywszy więc oba wyrazy piérwszego ułamku przez f, a dwa drugiego przez c, wypadną ułamki $\frac{af}{bcf}$, i $\frac{cd}{bcf}$, prostsze od $\frac{abf}{bbcf}$, $\frac{bcd}{bbcf}$, którebyśmy otrzymali podług ogólnego prawidła.

W ogólności, *dla złożenia spólnego mianownika, zbiéraią się w jednę mnogość wszystkie różne mnożniki podniesione do naywyższéy potęgi znayduiące się w mianownikach ułamków danych; i w tenczas mnożą się tylko liczniki każdego ułamku przez mnożniki téy mnogości, któréy brakuie w mianowniku ułamku.*

Dla przykładu niech będą ułamki $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$, złożmy mnogość b^2cfg: mnożmy licznik piérwszego ułamku przez fg, drugiego przez bcg, trzeciego przez b^2f, a otrzymamy

$$\frac{afg}{b^2cfg}, \quad \frac{bcdg}{b^2cfg}, \quad \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

§ 53. Zbiór ułamków $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ maiących jednakowego mianownika, jest

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}.$$

Różnica ułamków $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ maiących jednakowego mianownika, jest $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$.

Wyrażenie, całości a przydanéy do ułamku $\frac{b}{c}$, mamy $a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

Podobnież wyrażenie

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}.$$

Naodwród,

wyrażenie $\frac{ac+b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$,

wyrażenie $\frac{ac-b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=a-\frac{b}{c}$.

Wyrazy poprzedzaiących ułamków były jednowyrazowe, lecz gdyby ułamki dane składały się z wielowyrazów, w takowym razie, podług prawideł danych na ilości zwikłane, należałoby odbywać działania na jednowyrazy podane. I tak mielibyśmy

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}$$
$$=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Wieloraz ułamku

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}$$ dzielonego przez $$\frac{a-b}{c-d},$$

jest $\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{c-d}{a-b}=\frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)}$

$$=\frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd}.$$

i tak postępuie się w działaniach innych.

§ 54. Jeżeliśmy dobrze wyrozumieli wszystko co poprzedziło, możemy już rozwiązywać zrównania piérwszego stopnia choćby też nayzawilsze. Gdyby za przykład dane było zrównanie

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b},$$

zaczelibyśmy od zniesienia mianownika; a wskazuiąc tylko same działania, mielibyśmy w ówczas

$$(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)$$
$$=2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b):$$

wykonawszy potém mnożenie, znalezlibyśmy

$$3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c+12a^2b$$
$$-8ab^2-4b^3=6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc;$$

przeniosłszy w jedną stronę zrównania wszystkie wyrazy z literą x, otrzymalibyśmy

$$-3a^2x+8abx+3b^2x=2a^2c+5abc+b^2c$$
$$-12a^2b+8ab^2+4b^3,$$

skąd wyciągnelibyśmy w końcu

$$x=\frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}.$$

O Zrównaniach w które wchodzą dwie ilości niewiadome, i o ilościach odiemnych.

§ 55. W pytaniach dopiéro rozwiązanych jedna tylko była niewiadoma wprowadzona ilość, przez którą i przez ilości znane, wyrażaliśmy wszystkie warunki w daném pytaniu zachodzące. Jednak częstokroć w niektórych pytaniach daleko jest wygodniéy dwóch niewiadomych używać; ale w tenczas potrzeba, ażeby pytanie miało wyraźnie lub niewyraźnie dwa warunki na złożenie dwóch zrównań, bez czego niemożnaby dwóch niewiadomych jednoczasowie oznaczyć.

Pytanie *§fu* 3, pomimo że jest wysłowione

w *§fie* 4, naturalniéy się jednak wydaie z dwiema niewiadomémi; to jest gdy jedna i druga wyrażaią szukane liczby.

W rzeczy saméy, jeżeli oznaczémy

naymnieyszą część przez x,
naywiększą przez y,
ich zbiór przez a,
ich różnicę przez b,

będziemy mieli, podług warunków pytania,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Samo jedno którekolwiek z tych zrównań uważane, niemoże bezwzględnie oznaczyć jednéy z niewiadomych. Jeżelibyśmy z drugiego naprzykład wyciągneli wartość y, to dałoby nam $y=b+x$, wartość, która nieodkrywa czego szukamy, gdyż zawiéra ilość x, która nie jest dana; lecz, jeżeli na mieyscu niewiadoméy y, włożemy jéy wartość w piérwsze zrównanie, na ówczas to zrównanie zawieraiąc jednę tylko niewiadomą x, odkryie jéy wartość, kiedy postępować będziemy drogą znanych nam sposobów.

Będziemy więc w saméy rzeczy mieli przez takowe podstawianie

$$x+b+x=a$$

czyli

$$2x+b=a$$

a nakoniec

$$x=\frac{a-b}{2};$$

włożywszy tę wartość na x, w wyrażenie wartości y, którą jest $b+x$, otrzymamy

$$y=b+x=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}:$$

będziemy więc mieli dwóch liczb niewiadomych też same wyrażenia co i w (§ 3).

W rzeczy saméy, łatwo widzieć się daie, że teraźnieysze rozwiązanie niczém się co do istoty swoiéy nie różni od rozwiązania w §*fie* 3; prócz, że wprowadziliśmy i rozwiązali drugie zrównanie $y - x = b$, które w wymienionym §*fie* wyrażaliśmy pospolitym językiem, a stąd wnosiliśmy bez algebraicznego rachunku, że naywiększa liczba była $x + b$.

§ 56. Daymy jescze takowe pytanie:

Pewny robotnik pracuiąc u pewnego gospodarza przez dni 12, miał z sobą przez piérwsze dni 7, żonę i syna, odebrał płacy 74 złotych; potém pracował jescze u tegoż gospodarza przez dni 8, z których przez 5, była z nim żona z synem, i wziął za ten czas 50 złch. Pytanie ile zyskiwał sam na dzień, a ile zarabiali razem w tymże samym czasie jego syn i żona?

Niech x oznacza zysk dzienny męża,
y zysk takiż żony z synem;
12 dni pracy męża, przyniosą $12x$,
7 dni pracy żony z synem, dadzą $7y$,
będzie więc, z piérwszéy okoliczności zadania

$$12x + 7y = 74;$$

8 dni pracy męża przyniosą zysku $8x$,
5 dni żony z synem uczynią $5y$;
będzie więc z drugiéy okoliczności zadania

$$8x + 5y = 50.$$

Podobnie tu rozumuiąc jak w poprzedzaiącém pytaniu, otrzymamy wartość y, z piérwszego zrównania, i będzie $y = \frac{74 - 12x}{7}$;

tę wartość położywszy w zrównaniu drugiém, i rozmnożywszy ją przez 5, z przyczyny, że w niém jest $5y$,

otrzymamy $8x + \frac{370 - 60x}{7} = 50$,

zrównanie zawiéraiące jednę tylko niewiadomą x.

Rozwiązuiąc je, będziemy mieli

$$56x + 370 - 60x = 350,$$
$$370 - 4x = 350;$$

przeniosłszy $-4x$ na drugą stronę zrównania, a na piérwszą 350, otrzymamy

$$370 - 350 = 4x$$
$$20 = 4x$$
$$\frac{20}{4} = x$$
$$5 = x.$$

Poznawszy wartość x, którą znaleźliśmy równą 5, i położywszy ją za x, we wzorze

$$y = \frac{74 - 12x}{7},$$

druga strona zrównania wiadomą zostanie; ponieważ będzie $y = \frac{74 - 12 \times 5}{7} = \frac{74 - 60}{7} = \frac{14}{7} = 2$;

więc $y = 2$.

Zatém mąż zyskiwał po 5 złch na dzień, a żona z synem razem zyskiwali po 2 zło:

§ 57. Pewnie czytelnik postrzeże, że wyżéy rozwiązuiąc zrównanie $370 - 4x = 350$, przenosiliśmy $-4x$ na drugą stronę; lecz robiliśmy, to tym końcem, aby niewielką usunąć trudność któréy nieuniknelibyśmy inaczéy, a któréy podaiemy następuiące wyiaśnienie.

Zostawiwszy bowiem $-4x$ na piérwszéy stronie, a na stronę drugą przeniosłszy 370, będziemy mieli $-4x = 350 - 370$;
uprościwszy wyrażenie drugiéy strony, podług

prawidła §*fu* 19, wyniknie zrównanie

$$-4x = -20.$$

Aże w §*fie* poprzedzaiącym unikneliśmy znaku —, służącego ilości $4x$, przenosząc ją na stronę drugą; tudzież ilość $350 - 370$, dla podobneyże przyczyny, stała się $370 - 350$; więc oczywista, iż można przyiśdz do tychże samych wypadków, przemieniaiąc bezpośrednie, znaki w ilościach $-4x, +350 - 370$, co da

$$4x = -350 + 370,$$

czyli $$4x = 370 - 350,$$

zrównanie, które zupełnie jest tém samém, co

$$370 - 350 = 4x.$$

Można nawet i nieprzemieniać znaków, aż w ostatnim wypadku

$$-4x = -20;$$

a na ówczas stanie się, jak wyżéy

$$4x = 20.$$

Stąd wynika, że będziemy mogli z pewnością przenosić, na jednę lub drugą zrównania stronę, wszystkie ilości maiące przy sobie niewiadomą, dostrzegaiąc tylko jednoczasowéy przemiany znaków w obu stronach, kiedy niewiadoma ilość będzie ze znakiem —.

§ 58. Wprzód nim przedsięweźmiém rozwiązanie ogólne zadania §*fu* 56, za pomocą liter; jeszcze przypadek szczególny rozważmy. Założmy, że piérwsza summa wzięta przez robotnika była 46 złłch, a druga 30 złłch, inne okoliczności zostawmy, jak były piérwéy: zrównania tego pytania będą

$$12x + 7y = 46$$
$$8x + 5y = 36.$$

Piérwsze daie $y = \frac{46 - 12x}{7}$;

rozmnożywszy tę wartość przez 5, aby wypadek położyć na mieyscu $5y$ w zrównaniu drugiém, będziemy mieli $8x + \frac{230 - 60x}{7} = 30$;

uwolniwszy od mianownika, otrzymamy

$$56x + 230 - 60x = 210,$$

czyli $$56x - 60x = 210 - 230,$$

czyli $$-4x = -20;$$

przemieniwszy znaki w obudwóch stronach, podług uwagi §*fu* poprzedzaiącego, znaydziemy w końcu

$$4x = 20,$$

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

Jeżeli w wyrażeniu wartości y, położémy za x jego wartość, stanie się $y = \frac{46 - 60}{7}$,

a uprościwszy wyrażenie licznika wartości y, będzie $y = \frac{-14}{7}$.

Teraz uważmy, jakim sposobém tłumaczyć mamy znak —, który jest przy jednéy odosobnionéy ilości 14? Poymuiemy wprawdzie bardzo dobrze, że to jest zbiór dwóch ilości przedzielonych znakiem —, gdy ilość która się odciąga mnieyszą jest od téy, od któréy odciąganą bydź musi; lecz od czegoż odciągać ilość, która z żadną inną nie jest złączona w stronie zrównania, jak się tu znayduie? Oto, aby wyiaśnić ten gatunek sprzeczności, ten jest naylepszy środek który się nastręcza, aby wrócić się do samych zrównań wyrażaiących warunki pytania; gdyż naybliżéy trzymaiąc się jego wysłowienia, lepiéy tam wyczytamy okoliczności, które wprowadziły tę trudność.

Weźmy więc zrównanie $12x+7y=46$, położmy w niém za x, jego wartość 5, będzie

$$60+7y=46.$$

Samo weyrzenie na to zrównanie, pewne niepodobieństwo postrzegać w niém daie. W rzeczy bowiem saméy, niepodobna złożyć liczbę 46, cokolwiek przydaiąc do liczby 60, która sama już przewyższa liczbę 46.

Weźmy także zrównanie drugie

$$8x+5y=30,$$

i za x położmy 5, znaydziemy

$$40+5y=30,$$

toż samo i tu niepodobieństo co wprzódy; albowiem ukazuie się i z tego samego zrównania, że liczba 30 powinnaby się składać, cośkolwiek przydaiąc do 40.

Więc ilości, $12x$ czyli 60 w zrównaniu piérwszém, $8x$ czyli 40 w drugiém, to wyrażaią, co sam przez własną pracę zyskał robotnik; ilości zaś $7y$ i $5y$ znaczą zysk przywiązany do jego żony i syna; kiedy liczby 46 i 30 oznaczaią summę czyli płacę tym trzem osobom spólną: przeto powinno bydź teraz widoczném, na czém niepodobieństwo polega.

Podług wysłowienia warunków pytania, robotnik zyskiwałby więcéy sam jeden, gdyby niemiał pomocy od swoiéy żony i syna; więc pieniędzy przywiązanych do pracy żony i syna niepodobna uważać za powiększenie jego płacy.

Lecz zamiast brania za zysk pieniędzy przywiązanych do żony i syna, jeźli się one wezmą za wydatek przez nich czyniony kosztem robotnika; na ówczas wypadnie te pieniądze od tych odciągać, które sam maż zarabiał, i już w zrównaniach więcéy nie będzie sprzeczności; ponieważ te staną się

$$60-7y=46,$$
$$40-5y=30:$$

i równie z jednego jak i z drugiego wyciągnełoby się

$$y=2.$$

Stąd się zatém wnosi, że jeżeli robotnik zarabiał na dzień po 5 złłch; tedy żona z synem była przyczyną wydatku 2 złłch: co tak daléy możemy sprawdzić.

Za 12 dni pracy zarobił robotnik
złłch 5×12 czyli 60 złłch;
Żona z synem wydała przez dni 7
złłch 2×7 czyli 14 złłch;
więc mu zostało 46 złłch.
Za 8 dni pracy wziął robotnik
złłch 5×8 czyli 40 złłch;
Żona z synem przez dni 5, wydała
złłch $2\times5=10$ złłch;
więc mu zostało 30 złłch.

Teraz już jest jasna, że jeżeli chcemy aby zadanie dane podobne było do rozwiązania, należy wysłowienie położone w §*fie* 56, na następuiące przemienić.

Robotnik pracuiący u pewnego gospodarza przez dni 12, miał z sobą przez 7 dni piérwszych żonę i syna, którzy mu do wydatku przyczyną byli, i wziął płacy 46 złotych; pracował jescze potém dni 8, z których przez 5, zostaiąca przy nim żona z synem, z jego zarobku wydatkowała, i odebrał zapłaty 30 złotych. Pytanie, ile on zyskiwał na dzień, a ile żona z synem w tymże samym wydawali czasie?

Zysk dzienny robotnika nazwawszy x, a y wydatek żony z synem, w tymże samym czasie; zrównania podanego zadania będą widocznie

$$12x-7y=46,$$
$$8x-5y=30;$$

te rozwiązawszy jak w §*fie* 56, wypadnie

$x = 5$ złotym, $y = 2$ złotym.

§ 59 We wszystkich przypadkach gdzie tylko znaydziemy za wartość ilości niewiadomey, liczbę ze znakiem —, zawsze będziemy mogli sprostować wysłowienie pytania, sposobem poprzedzaiącemu podobnym, rozważywszy z pilnością, która to jest ilość co z dodatnéy, jak w piérwszém wysłowieniu było, stać się powinna odiemną w drugiém. Lecz Algebra uwalnia nas od wszystkich tyczących się tego względu badań, kiedy wiémy jak przyzwoicie postępować z wyrażeniami ze znakiem —; gdyż te wyrażenia będąc wyprowadzone ze zrównań zadania, powinny onym *zadosyć uczynić*: to jest, że wykonawszy na nich wskazane działania w zrównaniu, powinniśmy wynaleśdź za piérwszą jego stronę, równą wartość, wartości strony drugiéy. Przeto, wyrażenie $\frac{-14}{7}$, wyciągnięte ze zrównań

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30;$$

powinno razem z wartością $x = 5$, wyprowadzoną z tychże zrównań, zadosyć onym uczynić.

Wprowadzenie wartości x, daie naprzód

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Pozostaie jescze w prowadzenie $\frac{-14}{7}$ za y;

i w tym celu to wyrażenie mnożyć należy przez 7 i przez 5, wzgląd zawsze maiąc na znak —, który się przy niém znayduie. Jeźli tu przystosuiemy prawidło na znaki w dzieleniu, dane w §*fie* 42, będziemy mieli $\frac{-14}{7} = -2$;

potém, podług prawidła na znaki w mnożeniu, otrzymamy

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

Zrównania

$$60 + 7y = 46, \text{ i } 40 + 5y = 30,$$

zostawszy odpowiednie zrównaniami

$$60 - 14 = 46, \text{ i } 40 - 10 = 30,$$

sprawdzone będą nie dodaiąc dwóch części ich piérwszéy strony, ale raczéy jednę odciągaiąc od drugiéy, jak czyniliśmy wyżéy, podług uważania formy tych zrównań.

§ 60. Ilości dane w zadaniu §*fu* 58, niedozwolą aby pytanie rozwiązane bydź mogło, podług myśli piérwszego wysłowienia, to jest przez dodawanie; czyli uważaiąc jak zysk pieniądze przywiązane do pobytu żony z synem przy robotniku: wysłowienie drugie jescze bardziéy nieodpowiadałoby liczbom danym w zadaniu § 56.

Albowiem, jeźlibyśmy w tym przypadku chcieli uważać y, jako wyrażaiące wydatek, tedy zrównania

$$12x - 7y = 74,$$
$$8x - 5y = 50,$$

które mielibyśmy na ówczas, dałyby

$$x = 5, \text{ i } y = \frac{-14}{7};$$

w które wprowadzona wartość x, zmieniłaby je, na

$$60 - 7y = 74,$$
$$40 - 5y = 50.$$

Sprzeczność tych wypadków całkiem jest przeciwną zachodzącéy w wypadkach §*fu* 58, ponieważ tu o to idzie, aby otrzymać reszty większe od liczb 60 i 40, od których w tych zrównaniach odciągaią się ilości $7y$ i $5y$.

Znak —, znayduiący się przy wyrażeniu y

nie tylko wskazuie, ale jescze i usuwa sprzeczność; ponieważ podług prawidła na znaki,

$$\frac{-14}{7} = -2,$$

$$-7 \times -2 = +14,$$
$$-5 \times -2 = +10.$$

Przez takowy sposób, zrównania

$$6o - 7y = 74, \quad 4o - 5y = 5o,$$

zostawszy, $6o + 14 = 74$, $4o + 10 = 5o$, sprawdzaią się przez dodawanie; a następnie ilości $-7y$ i $-5y$, zamienione na $+14$ i $+10$, zamiast coby miały wyrażać wydatek z zarobku robotnika, uważane są jako prawdziwy zysk jego: więc jescze w tym przypadku wpadamy na prawdziwe wysłowienie pytania.

§ 61. Uczemy się z poprzedzaiących przykładów, że *w wysłowieniach żadań piérwszego stopnia mogą się pewne sprzeczności znaleśdź, których algebra nie tylko poznanie ułatwia, ale jescze sprostowanie onych wskazuie, wyiawiaiąc pewne odiemne ilości, które uważano za dodatne, lub też pewne dodatne, które za odiemne miano, albo nadaiąc wartości niewiadomym ilościom maiące znak —.*

Otoż co rozuméć należy, kiedy zwyczaynie mówimy, że wartości ze znakiem —, nazwane *rozwiązanie odiemne*, rozwiązuią to pytanie w którém się nadarzaią, w rozumieniu przeciwném swoiemu wysłowieniu.

Skąd wynika, że te pytania, których wysłowienia tak między sobą są powiązane, iż rozwiązania zadość czyniące jednemu z wysłowień, przez prostą odmianę znaków załatwiać mogą drugie, uważać możemy, właściwie mówią, jako daiące jedno pytanie.

§ 62. Ponieważ ilości odiemne rozwiązuią w pewném rozumieniu zadania, z których powstaią; właściwa jest zatém rozważyć bliżéy użycie tychże ilości, i naprzód się upewnić o sposobie, jaki służy na odbywanie działań ze względu na nie wskazanych.

Używaliśmy wyżéy prawideł na znaki wprzódy wynalezionych na każde główne działanie, lecz te niebyły dowiedzione na ilości odosobnione. Na odciąganie, naprzykład, zakładaliśmy iż należało odciągnąć od a, wyrażenie $b - c$, w którém ilość odjemną $-c$, poprzedzała dodatna b. Dla ścisłości, rozumowanie bynaymniéy niezależące od wartości ilości b, jesczeby zgodniéysze było, gdybyśmy mieli $b = o$, co przywiodłoby wyrażenie $b - c$ do $-c$; lecz że teorya ilości odiemnych, jest razem jedną z nayważnieyszych i w algebrze nayprzykrzeyszych, właściwa jest zatém ustalić ją na postawie trwałéy.

Aby trafić do tego celu, zwrócić należy uwagę na rodzenie się ilości odiemnych.

Naywiększe odciąganie jakie na jednéy ilości odbywać możemy, jest to jéy odciąganie saméy od siebie, i w tym przypadku resztą jest zero: i tak, $a - a = o$. Lecz jeżeli ilość do odciągania dana, przewyższa tę, od któréy ma się odciągać, na ówczas niepodobna całkiem odciąganie wykonać; pozostaie zatém odbyć tylko uproszczenie na ilości większéy, równe ilości która odciągniętą bydź miała. Kiedy naprzykład od 3, należy odciągnąć 5, czyli gdy mamy ilość $3 - 5$, odciągaiąc naprzód 3 od 5, rozłożemy -5 na dwie części $-3 - 2$, przez co wyrażenie $3 - 5$, zamieni się na jednoznaczne $3 - 3 - 2$, co przywiedzie się do -2. Znak $-$ położony przed 2, pokazuie czego potrzeba, aby

odciąganie całkowicie odbyć się mogło; przeto, gdybyśmy przydali 2 do ilości piérwszych, mielibyśmy $3+2-5$ czyli zero. Wyrażamy więc, używaiąc algebraicznych znaków, jakie wyrażenie przywiązywać należy, do ilości odiemnéy $-a$, stanowiąc zrównanie $a-a=o$, albo wyrażenia $a-a$, $b-b$, i. t. d, uważaiąc za tożsame z zerem.

To założywszy, poymuiemy łatwo, że przydawszy do jakieykolwiek ilości a, wyrażenie $b-b$, które z gruntu nic innego nie jest jak tylko zero; bynaymniéy téy ilości niezmieni się wartość, a tém samém, że wyrażenie $a+b-b$, jest tylko ilość a, innym napisana sposobem; co i prócz tego widoczna, gdyż wyrazy $+b$ i $-b$ nawzaiem się niszczą.

Lecz przez takowę odmianę kształtu, wprowadziwszy w skład a, ilości $+b$ i $-b$; pokazuiesię, że dosyć jest zmazać tę ilość. Jeżeli $+b$ jest tą ilością, którą chcemy odciągnąć od a, dosyć jest ją zmazać a pozostanie $a-b$, co się zgadza z położoną ustawą w §*fie* 2. Jeżeliby przeciwnie, żądano odciągnąć $-b$, tedy zmazanoby tę ostanią ilość, a pozostałoby $a+b$ jak wnioskowaliśmy w §*fie* 20. Ze względu na mnożenie, uważamy, że mnogość z $a-a$ przez $+b$, powinna bydź $ab-ab$, ponieważ mnożna jest równa zero, przeto i mnogość powinna bydź zero: aże piérwszy wyraz jest ab, drugi koniecznie powinien bydź $-ab$, aby zniszczył piérwszy.

Wniesiemy stąd, że $-a$ rozmnożone przez $+b$, powinno dać $-ab$.

Rozmnożywszy a przez $b-b$, będziemy jeszcze mieli $ab-ab$: gdyż mnożąca będąc zero, wydać powinna mnogość, także równą zero; a zatém potrzeba, iżby drugi wyraz był $-ab$, aby zniszczył piérwszy $+ab$. Więc $+a$ mnożone przez $-b$, powinno dać $-ab$. Naostatek, jeżeli mnożemy $-a$ przez $b-b$, piérwszy wyraz mnogości, na mocy tego co poprzedziło, będzie $-ab$, zatém wyraz drugi powinien bydź $+ab$, ponieważ mnogość razem z mnożącą powinna bydź zero.
Więc $-a$ mnożone przez $-b$, dać powinno $+ab$.

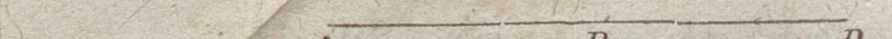
Zebrawszy te wypadki, wyciągniemy z nich też same prawidła jakie są w §*fie* 31.

Ponieważ znak wielorazu, kombinowany ze znakiem dzielącéy, wydać powinien znak podzielnéy, według prawideł właściwych na mnożenie; więc stąd wnosi się co powimy, że prawidło na znaki dane w §*fie* 42, służy jescze i do teraźnieyszego przypadku; a zatém, *ilości jednowyrazowe gdy są odosobnione, równie kombinuią się ze względu na swe znaki, jak gdyby część wielowyrazowych składały.*

§ 63. Po tych uwagach, ile razy natrafimy na wartości odiemne, zawsze wrócić się będziemy mogli do prawdziwego wysłowienia rozwiązanego pytania, szukaiąc jakim sposobem te wartości czynią zadosyć zrównaniom podanego zadania; co przykład następuiący stwierdzi, który należy do liczb różnego gatunku od podanych w pytaniu § 56.

§ 64. *Dway gońce, aby w drodze spotkać się mogli, wyieżdżaią w jednym czasie z dwóch miast naprzeciw leżących odległości znaiomey; maiąc wiadomo ile z nich każdy na godzinę uieżdża, pytanie w jakim punkcie drogi łączącéy dwa miasta, dway ci gońce spotkaią się z sobą?*

Aby widocznieyszémi uczynić okoliczności pytania, kładziemy figurę, na któréy punkta oznaczone wielkiémi literami A i B, wyobrażaią mieysca wyiazdu gońców.



Wyrazimy jak zwyczay, mnieyszémi literami ilości dane i niewiadome pytania.

a odległość punktów wyiazdu A i B.

b liczba mil, którą ubiega goniec w jednéy godzinie ruszywszy z punktu A,

c liczba mil, którą ubiega goniec po wyieździe z punktu B, w tymże samym czasie.

Litera R niech oznacza punkt spotkania się dwóch gońców.

Nazwiymy x drogę AR odbytą przez piérwszego,

y drogę BR odbytą przez drugiego;

zatém, jak $AR+BR=AB$, tak będziemy mieli i zrównanie $x+y=a$.

Rozważywszy następnie, że drogi x i y, są przebyte w jednymże czasie, uznamy że piérwszy goniec uieżdzaiący liczbę mil b w godzinie czasu, potrzebować będzie, na przebieżenie odległości x, czasu wyrażonego przez $\frac{x}{b}$.

Podobnież goniec drugi, który uieżdza liczbę mil c w jednéy godzinie, na przeiechanie drogi y, strawi czas wyrażony przez $\frac{y}{c}$; będzie więc

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

A zatém będziemy mieli zrównania

$$x+y=a, \qquad \frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Zrównanie drugie uwolniwszy od mianownika b, będziemy mieli $x=\frac{by}{c}$;

tę wartość x wprowadziwszy w zrównanie piérwsze, stanie się to $\frac{by}{c}+y=a$,

a stąd wniesiemy, że $by+cy=ac$, skąd $y=\frac{ac}{b+c}$

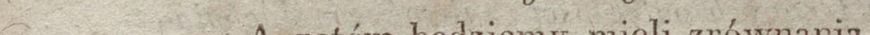
Położywszy wartość y w wartości x, otrzymamy

$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c}$, czyli $x=\frac{abc}{c(b+c)}$ (§ 51),

a nakoniec $x=\frac{ab}{b+c}$ (§ 38).

Ponieważ w wartościach x i y niewchodzi znak —, oczywista zatém, iż jakiekolwiek weźmiemy liczby za litery a, b, c, zawsze znaydziemy za x i y dwie liczby ze znakiem +, a tém samém dopytanie dane zawsze rozwiązane zostanie, w dokładném rozumieniu swoiego wysłowienia. W rzeczy bowiem saméy nayłatwiéy się poymuie, że we wszystkich przypadkach, w których dway gońce wyieżdzaią na przeciw siebie w jednymże czasie, koniecznie powinni się spotkać.

§ 65. Załóżmy teraz że oba gońce jadą w jedną stronę, lecz wyieżdzaiący z punktu A, biegnie za drugim, który wyiechał z punktu B, a który dąży do punktu C, położonego za puntem B, względem punktu A.



Oczywista, że w tém przypuszczeniu, goniec wyieżdzaiący z punktu A, niemoże spotkać drugiego który wyiechał z punktu B, chyba jadąc prędzéy od tego ostatniego, i punkt R ich spotkania się, niebędzie między punktami A i B, ale za punktem B, względem A.

Zachowawszy jak wyżéy też same ilości dane, i uważywszy że w takim razie $AR - BR = AB$, będziemy mieli $x - y = a$.

Zrównanie drugie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$, wyrażaiące równość czasów użytych przez gońców na przebieżenie dróg AR i BR, bynaymniéy się nie zmienia.

Dwa te położone zrównania rozwiązawszy jak poprzedzaiące, otrzymamy

$$x = \frac{by}{c},$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \quad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b - c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)}, \text{ a w końcu } x = \frac{ab}{b-c}.$$

Wartości x i y niebędą tu dodatne, aż chyba wtenczas, kiedy weźmiemy b większe od c; to jest, jeźli założemy, że goniec wyieżdzaiący z punktu A, prędzéy od drugiego jechał.

Jeżeli uczynimy naprzykład, $b = 20$, $c = 10$, będzie $x = \frac{20a}{20 - 10} = \frac{20a}{10} = 2a$,

$$y = \frac{10a}{20 - 10} = \frac{10a}{10} = a;$$

skąd wynika iż punkt R spotkania się, jest oddalony od punktu A, na odległość dwa razy większą od AB.

Jeżeli założemy b mnieysze od c, uczyniwszy naprzykład

$$b = 10, \quad c = 20,$$

znaydziemy $x = \frac{10a}{10 - 20} = \frac{10a}{-10} = -a$,

$$y = \frac{20a}{10 - 20} = \frac{20a}{-10} = -2a.$$

A B R C

Te wartości będące ze znakiem —, pokazuią, że pytanie więcéy rozwiązane bydź niemoże podług myśli swoiego wysłowienia; i w rzeczy saméy niepodobna mniemać, ażeby goniec z punktu A wyieżdzaiący, ubiegaiąc tylko po 10 mil na godzinę, mógł kiedy dopędzić tego, który wyiechawszy z punktu B, ieżdza na godzinę po mil 20, i zawsze jedzie przed piérwszym.

§ 66. Jednak też same wartości rozwiązuią pytanie w pewném rozumieniu; gdyż włożywszy je w zrównania

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

mamy, według prawideł na znaki

$$-a + 2a = a$$

$$-\frac{a}{10} = -\frac{2a}{20},$$

zrównania zadość czyniące, ponieważ odbywszy na nich wskazane działania, piérwsza strona zrównania stanie się równą drugiéy; i jeżeli zwrócimy uwagę na znaki wyrazów składaiących stronę piérwszą, dostrzeżemy jak należy umiarkować wysłowienie pytania, aby niepodobieństwo usunąć.

W rzeczy saméy, droga a odpowiadaiąca wartości x, a przez piérwszego gonca przebyta, sprawiedliwie odciągniętą bydź powinna od drogi $2a$, odpowiadaiącéy ilości y, i przez drugiego gońca

przebytéy; jest więc, właśnie jakby zamieniono y na x i x na y, i jakoby mniemano, że goniec wyieżdżaiący z punktu B, jechał za drugim.

Ta zmiana w wysłowieniu sprawia zmianę w kierunku drogi gonców; przeto nie dążą oni do punktu C, ale w stronę przeciwną ku punktowi C', jak pokazuie figura:

$$C' \qquad R' \qquad A \qquad B \qquad R \qquad C$$

i ich spotkanie się będzie w R'. Skąd wynika

$$BR' - AR' = AB,$$

co daie $y - x = a$; prócz tego mamy zawsze $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$,

zatém, znaleźlibyśmy $x = \frac{ab}{c-b} = \frac{10a}{20-10} = a$,

$$y = \frac{ac}{c-b} = \frac{20a}{20-10} = 2a:$$

wartości dodatne, rozwiązuiące pytanie w całkowitém rozumieniu jego wysłowienia.

§ 67. To pytanie daie jeden przypadek, w którém całkowite niepodobieństwo zachodzi Przytrafia się on w tenczas, kiedy zakładamy, że oba gońce równie prędko jadą; widoczna bowiem że z jakieybykolwiek jechali strony, nigdyby się z sobą spotkać niemogli, ponieważ między sobą zawsze zostawuią przedział, jaki zachodził między punktami ich wyiazdów. Ta sprzeczność, która przez żadne umiarkowanie wysłowienia, niemoże zniknąć, dosyć widocznie objawia się w zrównaniach.

Mamy w tym razie $b = c$, ponieważ gońce równie prędko jadąc, przebiegaią jednakową drogę w jednéy godzinie; przeto zrównanie $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$,

staie się $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$ i daie $x = y$.

Przezco zrównanie $x - y = a$, zamienia się na $x - x = a$, czyli $o = a$,

i daie wypadek cale sprzeczny, ponieważ ilość a czyni żadną, któréy wielkość jest dana.

§ 68. Ukazuie się ta sprzeczność sposobem dość szczególnym na wartościach niewiadomych ilości

$$x = \frac{ab}{b-c}, \qquad y = \frac{ac}{b-c};$$

ich mianowniki $b - c$ staią się zero, kiedy $b = c$; mamy przeto $x = \frac{ab}{o}$, $y = \frac{ac}{o}$.

Niepostrzegamy z łatwością jaki z dzielenia wieloraz bydź może, kiedy dzieląca jest zero; widzimy tylko, że gdybyśmy wzieli b bardzo bliskiém c, tedy wartości x i y byłyby naywiększemi. Abyśmy się o tém przekonali, weźmy $b = 6$, $c = 5{,}8$, a będziemy mieli $x = \frac{6a}{0{,}2} = 30a$,

$$y = \frac{5{,}8a}{0{,}2} = 29 = a;$$

co potém przechodzi na $b = 6$, $c = 5{,}9$,

a zatém będzie $x = \frac{6a}{0{,}1} = 60a$,

$$y = \frac{5{,}9a}{0{,}1} = 59a;$$

co daie jescze $b = 6$, $c = 5{,}99$,

stanie się przeto $x = \frac{6a}{0{,}01} = 600a$, $y = \frac{5{,}99a}{0{,}01} = 599a$,

skąd łacno postrzegamy, że dzieląca zmnieysza-

iąc się w miarę jak różnice liczb b i c mnieyszemi się staią, coraz większe wartości daie.

Pomimo to, jakkolwiek mała byłaby ilość, nigdy jednak za zero niemoże bydź brana; a stąd wynika, że jakkolwiek mało między sobą różniące się zakładalibyśmy liczby, literami b i c wyrażane, i jakkolwiek bądź byłyby wielkie wartości na x i y wypadłe, nigdy jednak nieprzyszlibyśmy do takich, któreby odpowiadały na przypadek, gdy $b = c$.

Te ostatnie wartości żadną niemogące się wyrazić liczbą, jakkolwiek bądź zakładalibyśmy ją wielką, są nazwane *nieskończonemi;* i każde wyrażenie $\frac{m}{o}$, którego mianownik jest zero, uważa się jako znak *nieskończoności*.

Ten przykład pokazuie, że matematyczna *nieskończoność* jest to wyobrażenie odiemne, ponieważ nieinaczéy przychodzimy do niego, tylko przez niepodobieństwo naznaczenia wartości, któraby rozwiązać mogła pytanie dane.

Moglibyśmy tu badać, jakim sposobem wartości

$$x = \frac{a\,b}{o}, \quad y = \frac{a\,c}{o}$$

zadosyć czynią zrównaniom danym: gdyż jest ta istotna algebry własność, ażeby wyrażenia niewiadomych ilości, jakiebykolwiek one były, podlegaiąc wskazanym działaniom na tychże niewiadomych, zrównaniom zadania czyniły zadość.

Zatém wprowadzaiąc je w zrównania

$$x - y = a, \quad \frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

które odpowiadaią na przypadek, gdzie $b = c$, bę-

dziemy mieli z piérwszego, $\frac{a\,b}{o} - \frac{a\,b}{o} = a$

czyli $\frac{a\,b - a\,b}{o} = a$, czyli $a\,b - a\,b = a \times o$,

czyli w końcu $o = o$, ponieważ $a \times o = o$.

Zrównanie drugie, w téyże saméy okoliczności daie $\frac{a\,b}{o \times b} = \frac{a\,b}{o \times b}$;

a że obie strony zrównania są sobie równe, więc za dosyć mu czynią.

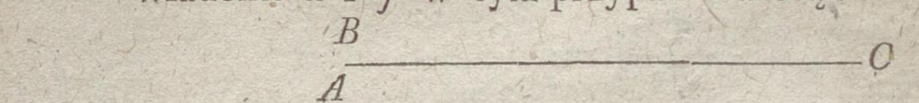
Pozostaie jescze do wytłumaczenia, jakim sposobem rzecz wskazana wyrażeniem $\frac{a\,b}{o}$, poprawia sprzeczność w wypadku na jaki natrafiliśmy w §*fie* 67. Na ten koniec, podzieliwszy przez x, obie strony zrównania $x - y = a$,

będzie $1 - \frac{y}{x} = \frac{a}{x}$;

aże zrównanie $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$, daie $x = y$, przeto piérwsze stanie się $1 - 1 = \frac{a}{x}$, czyli $o = \frac{a}{x}$.

Błąd tu zależy od ilości $\frac{a}{x}$, która będąc drugą zrównania stroną przewyższa piérwszą; lecz ten coraz mnieyszym się staie, w miarę jak za x większą bierzemy liczbę. Słuszna więc jest, że algebra daie na x wyrażenie takie, którego żadna liczba jakkolwiek bądź wielka wyrazićby niezdołała, a które, przechodząc w ciągu przez ilości wyrażane coraz większémi liczbami, wytyka w jakiém rozumieniu możemy więcéy a więcéy błąd założenia oddalać.

§ 69. Gdyby gońce równie prędko jadąc i w jedną stronę, wyieżdżali z jednego punktu, ich złączenie się nie byłoby już w szczególnym punkcie, ponieważ ciągle zachodziłoby w całéy rozciągłości ich drogi: dobrze jest wiedzić, jakim sposobem tę okoliczność wyrażają wartości, które niewiadome x i y w tym przypadku biorą.



Punkta A i B są umieszczone razem, zatém w tym przypadku $a = o$, i zawsze $b = c$; stanie się więc

$$x = \frac{o.b}{o} = \frac{o}{o}, \quad y = \frac{o.c}{o} = \frac{o}{o}.$$

Aby wytłumaczyć te wartości wskazuiące takie dzielenie, w którém podzielna i dzieląca są żadne, wrócmy się do zrównań pytania. Piérwsze, zostawszy

$$x - y = o, \quad \text{daie } x = y;$$

tę wartość wprowadziwszy za x, w zrównanie drugie, które w tym razie jest $\frac{x}{b} = \frac{y}{b}$, stanie się

$$\frac{y}{b} = \frac{y}{b}.$$

Ponieważ ostatnie zrównanie obie ma strony *tożsame* (identiques), to jest złożone z jednakowych wyrazów, wziętych z jednakowémi znakami, przeto każda wartość jakąkolwiek za y położémy, uczyni mu zadość, a zatém téy niéwiadoméy nie będzie można oznaczyć.

Prócz tego jest widoczna, że zrównanie

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b}, \text{ wypada na } x = y,$$

a tém samém nic niewyraża więcéy jak i piérwsze (*). Wynika tylko, równie z piérwszego jak z drugiego, że oba gońce będą zawsze razem, ponieważ odległości x i y, obie z punktu A idą, i są sobie równe, ich zaś wartości nieoznaczone zostaią.

Wyrażenie $\frac{o}{o}$, jest tu więc znakiem nieoznaczonéy ilości: dla tego użyliśmy tego wyrazu *tu*, gdyż są przypadki w których się ono nieznayduie; ale na ówczas wyrażenie podane niema takowego, jak poprzedzaiące początku.

§ 70. Aby dać tego przykład, niech będzie

$$\frac{a\,(a^2 - b^2)}{b\,(a - b)}.$$

Ta ilość zostanie $\frac{o}{o}$ w swoiéy istotnéy formie, kiedy uczynimy $a = b$; lecz jeżeli sprowadzi się wprzódy do nayprostszego swoiego wyrażenia, zniosłszy mnożnik $a - b$ spólny licznikowi i mianownikowi, znaydziemy

$$\frac{a\,(a + b)}{b}.$$

co daie $2a$ kiedy $a = b$,

Niewypadaią stąd wartości na x i y, w po-

(*) Dla skrócenia mowy, Analiści do jednakowych zrównań przydaią przymiotnik *tożsame* (identiques).

$\frac{y}{b} = \frac{y}{b}$ jest zrównanie tożsame, $5 - 3x = 5 - 3x$ jest takowémże zrównaniem, i kiedy dwa zrównania jednę rzecz wyrażaią, także mówimy, że te zrównania są *identyczne* czyli *tożsame*.

przedzaiącym §*fie* wynalezione; z przyczyny iż do prostszego wyrażenia przywiedzionémi bydź niemogą.

Z tego cośmy powiedzieli wynika, że jeżeli natrafimy na wyrażenie takie, które staie się $\frac{o}{o}$, należy śledzić przed wydaniem wyroku o jego wartości, czy licznik i mianownik niemaią jakich spólnych mnożników, któreby staiąc się zero, robiły razem oba wyrazy równe zero; a zniosłszy go, otrzymamy prawdziwą wartość wyrażenia danego. Jednak są jeszcze przypadki takie, któreby się od tego sposobu wyłączyć mogły; ale granice tego dzieła, ledwo dozwalaią nam uczynić wzmianki o analitycznych wypadkach. W wykładzie rachunku różniczkowego podane są ogólne sposoby na wynaydowanie prawdziwéy wartości, ilości staiących się $\frac{o}{o}$ (*).

§ 71. Wszystko co poprzedziło jasno widzieć daie, *że rozwiązania algebraiczne, albo całkiem zadosyć czynią wystowieniu zadania, gdy to jest podobne, albo wskazuią jakie umiarkowanie czynić należy w wysłowieniu, gdy ilości dane ukazuią sprzeczności, które zniesione bydź mogą; lub na resztę daią poznać zupełne niepodobieństwo, gdy za pośrednictwem tych ilości danych, niemasz żadnego środka do rozwiązania pytania podobnego w pewném rozumieniu do podanego.*

§ 72. W rozwiązaniu różnych przypadków poprzedzaiącego pytania, uważać należy, że zmia-

(*) *Obacz* Traktat Rachunku różniczkowego i całkowego *La Croix.*

na znaków ilości niewiadomych x i y, odpowiada zmianie w kierunku dróg, które te niewiadome wyrażaią. Gdy niewiadoma y rachowana była od B ku A, tedy w zrównaniu $x + y = a$, miała znak +, w drugim zaś przypadku, kiedy ją uważano z przeciwnéy strony od B ku C, § 65, wzięta była ze znakiem —, ponieważ na piérwsze zrównanie mieliśmy $x - y = a$.

Wykonawszy tę przemianę znaków w drugiém zrównaniu

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

znaleźlibyśmy

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{c},$$

wypadek nieznayduiący się w §*fie* wymienionym; lecz uważać należy, że droga y, składa się z wielokrotnéy drogi c, którą przebiega w jednéy godzinie, wyieżdżaiący goniec z punktu B; lecz że ta droga skierowaną jest w tęż samą stronę co i droga y, zatém powinna bydź brana z tymże samym znakiem, a tém samém brać ją należy ze znakiem —, gdy się ten daie ilości y: będzie więc podług téy uwagi $\frac{x}{b} = \frac{-y}{-c}$ czyli $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

Prosta więc przemiana znaku jest dostarczaiącą, aby poiąć drugi przypadek pytania w piérwszym; i tym to sposobem Algebra razem daie rozwiązanie kilku podobnych pytań. Zadanie §*fu* 15, wystawia nam téy okoliczności oczywisty przykład. Zakładaliśmy w tym §*fie*, że oyciec obowiązany dać synowi summę d; gdybyśmy chcieli rozwiązać pytanie w rozumieniu przeciwném, że syn winien dać swoiemu oycu summę d, dosyć by-

łoby przemienić znak ilości d, w wartości x, i mielibyśmy

$$x = \frac{bc - d}{a + b};$$

nareszcie, jeżelibyśmy założyli, że jeden drugiemu nic niewinien, wypadałoby uczynić $d = o$, i byłoby

$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

Nic niemasz łacnieyszego, jak te dwa zrównania sprawdzać, układaiąc na nowo w zrównanie zadanie dane, na każdy przypadek jaki się do wysłowienia przedsięweźmie.

§ 73. Aby podobieństwo zachować między zadaniami §§. 56 i 64, użyliśmy jedynie w drugiém dwóch niewiadomych, lecz możnaby z jedną niewiadomą rozwiązać je oba; bo jeżeli mówimy że robotnik wziął 74 złł: za 12 dni pracy swoiéy, i za 7 dni pracy żony z synem; tedy stąd wynika, że gdy zysk żony i syna nazwiemy y i od 74 złłch odciągniemy $7y$, zostanie $74 - 7y$ za dwanaście dni pracy samego robotnika; skąd wypływa, iż on zarabiał po $\frac{74 - 7y}{12}$ na dzień jeden.

Rachuiąc podobnież jego zysk ze względu okoliczności drugiéy, znaydziemy, że zyskiwał na dzień po $\frac{50 - 5y}{8}$.

Równaiąc te dwie ilości, utworzy się zrównanie

$$\frac{74 - 7y}{12} = \frac{50 - 5y}{8}.$$

Toż samo jest i w pytaniu § 64,

A ——— R ——— B

Jeżeli x znaczy drogę AR odbytą przez gońca wyieżdżaiącego z punktu A, tedy $BR = a - x$, będzie drogą gońca wyieżdżaiącego z punktu B, ku A; aże obie te drogi są odbywane w jednymże czasie przez gońców, względnie nieżdżaiących liczby b i c mil; będzie zatém według zrównania drugiego

$$\frac{x}{b} = \frac{a - x}{c},$$

skąd $cx = ab - bx$, $\quad x = \frac{ab}{b + c}$.

Różnica między rozwiązaniami dopiéro podaném a położonémi w §§ 56 i 64, zależy na tém, że ułożyliśmy i rozwiązali zrównanie piérwsze samém rozumowaniem, nieużywaiąc algebraicznego pisania; i jest widoczna, że im daléy pomykamy użycie sposobu piérwszego, tém mniéy pozostaie do czynienia sposobem drugim.

§ 74. Niekiedy do zadania § 64, dołącza się taka okoliczność, która go już więcéy nie robi trudném.

A ——— R ——— C ——— B

Załóżmy że goniec z punktu B wyieżdżaiący, puścił się w drogę liczbą d godzin piérwéy od drugiego, który wyieżdża z punktu A.

Widoczna jest rzecz, że ta okoliczność przyczynia się do odmiany punktu wyiazdu gońca piérwszego; bo jeżeli nieżdża liczbę c mil w godzinie, tedy niedzie drogę $BC = cd$ w godzin d, i znaydzie się w punkcie C, gdy drugi wyiedzie z punktu A; a tak przedział mieysc wyiazdu będzie

$$AC = AB - BC = a - cd.$$

Napisawszy więc $a - cd$, za a, w zrównaniu §fu poprzedzaiącego, będziemy mieli

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c}, \qquad x = \frac{ab - bcd}{b + c}.$$

Gdyby gońce jechali w jedną stronę

A B C R

przedział mieysc odjazdu byłby

$$AC = AB + BC = a + cd;$$

zatém, droga odbyta przez gońca wyieżdżaiącego z punktu A, byłaby wtenczas AR, kiedy uiechana przez drugiego, byłaby

$$CR = AR - AC:$$

mielibyśmy więc $\frac{x}{b} = \frac{x - a - cd}{c}$

skąd $x = \frac{ab + bcd}{b - c}$.

§ 75. Wysłowiaiąc tym sposobem pytanie, wpadamy na przypadek, w którym tłumaczenie wartości odiemnéy na x, wystawia niejakąś trudność, zachodzącą na ówczas, kiedy bieg gońców w przeciwne naznaczamy strony, i liczbie d taką nadaie wartość, iż droga BC wyrażona przez cd, staie się większą od a, którą wyraża AB.

C R A B

W takim razie, goniec wyieżdżaiący z punktu B, znaydzie się w C, z drugiéy strony A, w momencie wyiazdu drugiego z A ku B; jest więc niepodobna mniemać, aby dway gońce tak jadąc mogli się z sobą spotkać.

Jeżelibyśmy mieli naprzykład $a = 400$ mil, $b = 12$ mil, $c = 8$ mil, $d = 60$ godzin: wypadłoby stąd $cd = 480$ mil; przeto punkt C, byłby o 80 mil za punktem A, biorąc od punktu B; lecz znaleźlibyśmy na tenczas

$$x = \frac{400 \cdot 12 - 60 \cdot 8 \cdot 12}{8 + 12} = \frac{400 \cdot 5 - 60 \cdot 2 \cdot 12}{2 + 3}$$
$$= \frac{1200 - 1440}{5} = -\frac{240}{5} = -48.$$

Więc spotkanie się gońców nastąpiłoby w punkcie R, o mil 48 z drugiéy strony punktu A, ale między punktami A i C; chociaż się zdaie, że goniec wyieżdżaiący z punktu B, nie będzie się mógł złączyć z drugim, w ciągu odbywania swéy drogi przed punktem C, aż chyba ten punkt przeiechawszy.

Aby poznać pytanie rozwiązane w tym przypadku, należy podstawić za x, liczbę odiemną $-m$, w zrównaniu $\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c}$, które stanie się

$$-\frac{m}{b} = \frac{a - cd + m}{c},$$

przemieniwszy znaki po obu stronach, będzie

$$\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}.$$

Postrzegamy zatém, że droga odbyta przez gońca

C R A B

wyieżdżaiącego z punktu B, jest $cd - a - m$, czyli co pozostaie od BC po odięciu AB i AR, to jest CR; i że $AC = cd - a$: jest to więc jakby goniec drugi powinien był bezpośrednie wyieżdżać z punktu C, w którym znayduie się przed odiazdem gońca piérwszego; lecz że oba biegną w przeciwne strony, przeto ich spotkanie się przypaśdź koniecznie powinno na odległości AC. Ten przypadek zachodzi także w piérwszym z po-

łożonych w §*fie* 74, gdzie dosyć jest przemienić $a - cd$ na $cd - a$, aby otrzymać wartość jakąby miało m, według powyższego zrównania. (*Obacz notę na końcu dzieła*).

§ 76. Zadanie §*fu* 56, jescze wysłowić się może jak następuie: *Robotnik przepędziwszy liczbę* a *dni w pewnym domie, maiąc z sobą żonę z synem przez liczbę* b *dni, odebrał w zapłacie summę* c; *potém zostawał w tymże samym domie przez liczbę dni* d, *i to razo miał przy sobie żonę z synem przez liczbę dni* e *i wziął summę* f: *Pytanie, co sam zarabiał na dzień, a ile przez tenże sam czas zarabiali żona z synem?*

Niech będzie, równie jak zawsze, x zysk dzienny robotnika, a y zysk żony z synem;

Za liczbę a dni, zarobi ax,

Za liczbę b dni żona z synem zarobią by; przeto

$$ax + by = c;$$

za liczbę d dni, będzie miał zarobku dx,

za liczbę e dni, żona jego z synem zarobią ey, przeto

$$dx + ey = f.$$

Otoż mamy dwa zrównania podanego pytania.

Z piérwszego wyciąga się $x = \frac{c - by}{a}$;

rozmnożywszy tę wartość przez d, dla położenia jéy za x w zrównaniu drugiém, będzie

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

a następnie $\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$

Uwolniwszy to zrównanie od mianownika, otrzymamy

$$cd - bdy + aey = af,$$

skąd wniesiemy $aey - bdy = af - cd$,

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Maiąc już wiadome y, jeżeli położémy jego wartość w wartości na x, będzie wiadomą ta ostatnia; albowiem będziemy mieli

$$x = \frac{c - b\frac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Aby to wyrażenie przywieśdź do wyrażenia nayprostszego, należy naprzód odbyć mnożenie wskazane na ilościach

$$b \quad \text{i} \quad \frac{af - cd}{ae - bd}, \ (\S\ 51.)$$

co daie

$$x = \frac{c - \frac{abf - bcd}{ae - bd}}{a};$$

potém przywodzi się c, do mianownika przyległego ułamku, którego wykonawszy odciąganie (§ 58), stanie się

$$x = \frac{\frac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a},$$

co przywodzi się do

$$x = \frac{\frac{ace - abf}{ae - bd}}{a} \ (*).$$

(*) Mogłaby tu jakowaś zachodzić trudność w wyrozumieniu tego wyrażenia; przeto aby ją przewidzieć, zwrócić należy uwagę na liniykę oznaczaiącą dzie-

Rozdzieliwszy przez a (§ 51), znaydziemy

$$x = \frac{ace - abf}{a^2e - abd}.$$

a usunąwszy spólny mnożnik a, licznikowi i mianownikowi (§ 38), otrzymamy naostatek

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

Wartości, $x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$, $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$, zastosowuią się tymże samym sposobem, jakim

---

lenie, między innémi liniykami leżącą. I tak, w wyrażeniu $x = \frac{A}{B}$, A wyobraża podzielną, bądź całkowitą, bądź ułamkową, a B dzielącą, w jednem lub drugiém przypuszczeniu. Podług takowéy ustawy, wyrażenie, $x = \frac{\frac{A}{C}}{B}$ znaczy, że x jest równe wielorazowi z podzielenia ułamku $\frac{A}{C}$ przez B; takoż wyrażenie $x = \frac{\frac{A}{B}}{C}$ wskazuie wieloraz z A dzielonego przez ułamek $\frac{B}{C}$; nakoniec, przez wyrażenie $x = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ rozumieć mamy wieloraz ułamku $\frac{A}{C}$ podzielonego przez ułamek $\frac{B}{D}$.

i znalezione wyżéy na zrównania literalne o jednéy niewiadomey; podstawiaiąc zaś w nich za litery, liczby szczególne za przykład obrane; otrzymamy wypadki §*fu* 56, czyniąc

$a = 12$, $b = 7$, $c = 74$
$d = 8$, $e = 5$, $f = 50$,

i podobnież §*fu* 58, położywszy

$a = 12$, $b = 7$, $c = 46$,
$d = 8$, $e = 5$, $f = 30$.

§ 77. Wartości x i y, nie tylko służą podanemu pytaniu, ale się rozciągaią i do tych wszystkich, które nas przywodzą do dwóch zrównań piérwszego stopnia o dwóch niewiadomych; gdyż jest widoczna, że te zrównania powinny koniecznie zawiérać się we wzorach

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f,$$

byleby przez litery a, b, d, i e, rozumiano zbiór ilości danych, które mnożą niewiadome x i y, a przez litery c i f, zbiór wszystkich wyrazów znanych przeniesionych na drugą zrównania stronę.

O Rozwiązywaniu jakieykolwiek liczby zrównań piérwszego stopnia, zawiéraiących równąż niewiadomych liczbę.

§ 78. Kiedy jedno pytanie zawiéra tyle różnych warunków, ile ma w sobie niewiadomych, każdy z tych warunków jedno zrównanie daie, w którém często się zdarza, że niewiadome są pomieszane z sobą, jakośmy już w zadaniach o dwóch niewiadomych widzieli; lecz jeżeli te niewiadome są piérwszego stopnia, można, podobnież jak się w paragrafach poprzedzaiących czyniło, *brać w jedném ze zrównań wartość jedney z niewiado-*

mych, jak gdyby wszystkie pozostałe wiadome były, i podstawiać ją we wszystkich zrównaniach innych, które potém inne tylko niewiadome zawiérać będą.

To działanie, przez które wyrzuca się jedna z niewiadomych, nazywa się *rugowaniem* czyli *eliminacyą* (elimination); za jego pośrednictwem, z trzech danych zrównań o trzech niewiadomych, wyprowadzilibyśmy dwa tylko o dwóch niewiadomych, a z témi tak postąpilibyśmy, jak się czyniło wyżéy; otrzymawszy zaś wartości ostatnich dwóch niewiadomych, podstawialibyśmy je w wyrażeniu piérwszéy. I tak, jeżeliby były cztéry zrównania o cztérech niewiadomych, przywodzilibyśmy je naprzód do trzech zrównań o trzech niewiadomych, i z témi takbyśmy się obchodzili, jak się powiedziało dopiéro; potém wyciągnięte wartości trzech niewiadomych wprowadzalibyśmy w wyrażenie wartości piérwszéy, i tak daléy.

Niech za przykład służy pytanie zawiéraiące trzy niewiadome i trzy zrównania.

§ 79. *Kupiono oddzielnie trzy ładowne wozy: w piérwszym mieściło się 30 miar żyta, 20 jęczmienia, i 10 pszenicy, i wszystko kosztowało 230 złł.*

W drugim znaydowało się 15 miar żyta, 6 jęczmienia, i 12 pszenicy, i za wszystko zapłacono 138 złch.

Trzeci zawiérał 10 miar żyta, 5 jęczmienia, i 4 pszenicy za co opłacono 75 złch.

Pytanie, po czemu wypada jedna miara żyta, tudzież pszenicy i jęczmienia?

Niech będzie x cena jednéy miary żyta,
y cena jednéy miary jęczmienia
z cena jednéy miary pszenicy.

Aby uzupełnić piérwszy warunek, uważemy „ że

Cena $\begin{cases} 30 \text{ miar żyta} & \text{będzie } 30x, \\ 20 \text{ miar jęczmienia} & 20y, \\ 10 \text{ miar pszenicy} & 10z; \end{cases}$

a że to wszystko uczynić powinno 230 złch, będzie przeto zrównanie $30x + 20y + 10z = 230$.

Ze względu na drugi warunek,

Cena $\begin{cases} 15 \text{ miar żyta} & \text{będzie } 15x, \\ 6 \text{ jęczmienia} & 6y, \\ 12 \text{ pszenicy} & 12z, \end{cases}$

a następnie $15x + 6y + 12z = 138$.

Podług trzeciego warunku,

Cena $\begin{cases} 10 \text{ miar żyta} & \text{będzie } 10x, \\ 5 \text{ jęczmienia} & 5y, \\ 4 \text{ pszenicy} & 4z, \end{cases}$

przeto $10x + 5y + 4z = 75$.

Pytanie więc dane będzie przywiedzione do

trzech zrównań $\begin{cases} 30x + 20y + 10z = 230 \\ 15x + 6y + 12z = 138 \\ 10x + 5y + 4z = 75. \end{cases}$

Wprzódy nim przedsięweźmiemy rozwiązanie tych zrównań, uważmy czy niemożna ich uprościć, dzieląc obie strony któregokolwiek zrównania przez jednakową liczbę (§ 12). Widzimy że można wszystkie wyrazy piérwszego, dzielić przez 10, i wszystkie drugiego przez 3: przeto wykonawszy te dzielenia zatrudniymysię zrównaniami

$$3x + 2y + z = 23$$
$$5x + 2y + 4z = 46$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Ponieważ wolno obrać którąkolwiek z niewiadomych na wyciągnienie jéy wartości, weźmy zatém z, w piérwszém zrównaniu, z przyczyny że ta niewiadoma niemaiąc żadnego współczynnika, będzie miała na wartość, ilość bez żadnéy dzielącéy, czyli całkowitą; i stanie się

$$z = 23 - 3x - 2y.$$

Podstawiwszy tę wartość w drugiém i trzeciém zrównaniu, te zamienią się, na

$$5x + 2y + 92 - 12x - 8y = 46$$
$$10x + 5y + 92 - 12x - 8y = 75;$$

uprościwszy wyrażenia ich stron piérwszych, znaydziemy

$$92 - 7x - 6y = 46$$
$$92 - 2x - 3y = 75.$$

Dla przerabiania tych zrównań, które dwie tylko zawiéraią niewiadome, weźmy wartość niewiadoméy y, ze zrównania piérwszego; a otrzymamy

$$y = \frac{92 - 46 - 7x}{6} \quad \text{czyli } y = \frac{46 - 7x}{6},$$

a przez podstawienie téy wartości w zrównaniu drugiém, stanie się

$$92 - 2x - 3 \times \frac{46 - 7x}{6} = 75.$$

Moglibyśmy zniszczyć mianownika 6, zwyczaynym sposobem; lecz dostrzegłszy, że on jest podzielnym przez 3, zatém uprościć go można, odbywszy na ułamku $\frac{46 - 7x}{6}$ wskazane mnożenie przez 3, stosownie do arytmetycznych prawideł; przez ten więc sposób, otrzymamy

$$92 - 2x - \frac{46 - 7x}{2} = 75;$$

a dopiéro uwolniwszy od mianownika 2, znaydziemy $184 - 4x - 46 + 7x = 150$;
a że wyrażenie piérwszéy strony uproszczone bydź może; przeto, stanie się $138 + 3x = 150$,
skąd wniesiemy, że $x = \frac{150 - 137}{3} = \frac{12}{3}$ czyli $x = 4$.

Podstawienie téy wartości w wyrażeniu y, daie $y = \frac{46 - 7 \times 4}{6} = \frac{46 - 28}{6} = \frac{18}{6}$ czyli $y = 3$;
wprowadzenie zaś tych wartości na x i y, w wyrażenie wartości z, daie
$z = 23 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 23 - 12 - 6$ czyli $z = 5$.
Skąd wynika, że jedna miara żyta kosztowała 4 złote,
takaż jęczmienia 3 złote,
takaż pszenicy 5 zło:

Ten przykład, wskazuiący razem przystosowanie sposobu §*fu* poprzedzaiącego, powinien bydź szczególniéy uważany ze względu skracań rachunku, jakie się w nim odbywały.

§ 80. Rozwiążmy jescze następuiące zadanie:

Człowiek, który podiął się przenosić porcellanowe naczynia trojakiéy wielkości, tak umówił się z kupcem, że za każde przez niego zbite, zapłaci tyle, ile odbierze płacy za te które odda w całości.

Dano mu naprzód dwa naczynia małe, cztéry średnie i dziewięć wielkich: zbił on wszystkie średnie a inne oddawszy w całości wziął summę 28 złich.

Dano mu potém śiedm naczyń małych, trzy średnie i pięć wielkich; tą razą oddał w całości małe i średnie, lecz zbił pięć naczyń wielkich i wziął tylko 3 złote.

Nareszcie, poruczono mu dziewięć małych, dziesięć średnich i jedynaście naczyń wielkich: wszystkie zbił te ostatnie i nieodebrał w nagrodę tylko 4 zł:

Pytanie, ile mu płacono za przeniesienie naczynia każdéy wielkości?

Niech x znaczy cenę nagrody za przeniesienie jednego małego naczynia,
y cenę za przeniesienie jednego średniego,
z cenę za przeniesienie jednego wielkiego.

Widoczna jest, że każda summa, jaką odbiera ten człowiek, jest różnicą między summą jemu należną za naczynia dostawione w całości, a tą jaka od niego należy się za zbite; podług téy uwagi, trzy warunki zadania, daią odpowiednie następuiące zrównania:

$$2x - 4y + 9z = 28,$$
$$7x + 5y - 5z = 3,$$
$$9x + 10y - 11z = 4.$$

Piérwsze z tych zrównań daie

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2};$$

przez podstawienie téy wartości w zrównanie drugie i trzecie; te staną się

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3,$$
$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10y - 11z = 4.$$

Uwolniwszy od mianowników, będzie

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6,$$
$$252 + 36y - 81z + 20y - 22z = 8;$$

w obu zrównaniach skróciwszy wyrażenie strony piérwszéy, otrzymamy

$$196 + 34y - 73z = 6$$
$$252 + 56y - 103z = 8;$$

biorąc wartość y w piérwszém z tych zrównań, będzie

$$y = \frac{73z - 190}{34}.$$

Za pośrednictwem téy wartości, zrównanie drugie, stanie się

$$252 + 56 \times \frac{73z - 190}{34} - 103z = 8;$$

to, gdy się od mianownika 34 uwolni, zamieni się na
$34 \times 252 + 56 \times 73z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8$
czyli na $8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272$.

Skrócenie piérwszéy strony tego wypadku, przywiedzie zrównanie do $586z - 2072 = 272$, skąd wyciągniemy

$$z = \frac{2344}{586} \quad \text{czyli } z = 4.$$

Włożywszy wartość z, w wyrażenie wartości y, będzie

$$y = \frac{73 \times 4 - 190}{34} = \frac{292 - 190}{34} = \frac{102}{34} \text{ czyli } y = 3;$$

a za pomocą tych dwóch wartości, znaydziemy

$$x = \frac{28 + 4 \times 3 - 9 \times 4}{2} = \frac{28 + 12 - 36}{2} = \frac{4}{2},$$

czyli $x = 2$

Więc płacono 2 złote za przeniesienie jednego małego naczynia,
3 zł: za przeniesienie jednego średniego
4 zł: za przeniesienie jednego wielkiego.

Wystarcza ten przykład do pokazania, jakim sposobem we wszystkich innych przypadkach postępować należy.

§ 81. Często się zdarza, że wszystkie niewiadome nie razem we wszystkie zrównania wchodzą; lecz ta okoliczność cale nieodmienia sposobu: dosyć jest należycie rozważyć związek niewiadomych, aby przeyść z jednych w drugie.

Niech służą za przykład cztéry zrównania

$$3u - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 39$$
$$5x - 7z = 11$$
$$4y + 3z = 41,$$

zawiéraiące niewiadome u, x, y i z.

Przy niewielkiéy uwadze, postrzega się łatwo, że wziąwszy w drugiém zrównaniu wartość x, aby ją podstawić w trzeciém, wypadek zawiéraiący w ówczaś y i z, po skombinowaniu go ze zrównaniem czwartém, obie te niewiadome da poznać; potém z wartości y, odkryią się wartości u i x, za pośrednictwem piérwszego i drugiego zrównania. Tym sposobem postępuiąc wykonamy następuiący rachunek:

$$x = \frac{39 - 3y}{2}$$

$$5 \times \frac{39 - 3y}{2} - 7z = 11, \text{ czyli } 195 - 15y - 14z = 22,$$

czyli $15y + 14z = 173$ (§ 57).

Dwa zrównania

$$15y + 14z = 173$$
$$4y + 3z = 41,$$

po rozwiązaniu, dadzą $y = 5$, $z = 7$;
a za pomocą tych wartości, będziemy mieli

$$x = \frac{39 - 3 \times 5}{2} = \frac{39 - 15}{2} = \frac{24}{2}, \text{ czyli } x = 12;$$

$$u = \frac{2 + 2y}{3} = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3}, \text{ czyli } u = 4:$$

więc liczby szukane są 4, 12, 5 i 7.

§ 82. Sposób wyłożony, mógłby się równie zastosować do literalnych, jak i do liczbowych zrównań; ale wielość liter, którychby używać przyszło na ogólne wyrażanie ilości danych, kiedy liczba zrównań i niewiadomych przewyższa 2, zmusiła algebraistów do szukania prostszego sposobu na ich wyrażanie. W następuiącym paragrafie damy go poznać; lecz ażeby czytelnika pobudzić

do cwiczenia się w układanie zadań w zrównanie, oraz w ich rozwiązywanie, kładziemy tu ciąg wysłowień, i na końcu każdego wskazuiemy wypadki, które należy znaleśdz.

1°. *Oyciec zapytany o wieku swoiego syna, odpowiedział: jeżeli od podwóynego wieku jaki ma teraz, odciągniesz wiek potroyny, jaki miał przed sześcią laty, znaydziesz wiek rzetelny moiego syna.*

Odpowiedź: *miało dziecie lat 9.*

2° *Diophant, naydawnieyszy Autor Algebry która nam pozostała, przepędził w dzieciństwie część szóstą swoiego wieku, a 12stą w młodzieńczym, potém ożeniwszy się przeżył w związku małżeńskim siódmą część swoiego życia, zwiększoną pięcią laty, przed urodzeniem się jego syna, którego cztérma laty przeżył, a który dożył tylko do połowy wieku swoiego oyca. Jakiż wiek był Dyophanta?*

Odpowiedź: *lat 84.*

3°. *Pewny kupiec na oszczędne wydatki ściągał corocznie po 1000 złłch, ze swoiego kapitału który miał w handlu; każdego jednak roku małątek jego powiększał się trzecią częścią pozostałéy reszty w handlu, a w końcu roku trzeciego podwoionym się znalazł. Ileż miał na początku piérwszego roku?*

Odpowiedź: *14800 złłch:*

4°. *Pewny kupiec ma dwa gatunki herbaty, piérwszéy jeden killogramm (*) przedaie po 14 rubli, a drugiéy po 18 rubli: po ileż wziąć należy z obu tych gatunków, aby złożyć pak 100 kilogrammów ważący, któryby kosztował 1680 złłch.?*

(*) Jeden kilogramm znaczy funtów 2, drachm 5, gr: 35, 15. *Obacz* str: 212. w Arytmetyce dla Szkół Narodowych wydania poprawnego 1817 roku.

Odpowiedź: *30 kilogrammów piérwszego gatunku, a 70 drugiego.*

5°. *Napełniono w 12 minutach naczynie mieszczące w sobie 39 litrów wody, dozwalaiąc ciągle płynąć dwóm fontannom; z których piérwsza dostarcza wody 4 litry (*) w jednéy minucie, a druga 3. Pytanie, przez ile minut każda z fontann wytryskiwała?*

Odpowiedź: *Piérwsza przez 3 minuty, a druga przez 9.*

6°. *Gdy zegarek pokazywał południe, skazówka minutowa znaydowała się na skazówce godzinnéy; pytanie, jakiż jest punkt na czwartéy cyferblatu części, w którymby było naybliższe spotkanie się dwóch skazówek?*

Odpowiedź: *O godzinie 1, minucie 5 i* $5/11$.

Uwaga. To zadanie stosuie się do położonego w § 65.

7°. *Pewny człowiek spotkawszy ubogich chciał dać z nich każdemu po 25 groszy, lecz porachowawszy swe pieniądze drobne, postrzegł że mu niedostaie 10 groszy na uskutecznienie jego zamiaru; zatém każdemu z ubogich dał po 20 groszy, i jeszcze mu zostało 25 gr: Pytanie, ile ów człowiek miał monety, i jaka była liczba ubogich?*

Odpowiedź: *Miał monety 165 groszy, a liczba ubogich była 7.*

8°. *Trzey bracia chcą kupić maiątek wartuiący 50000 czer: złłch, ale piérwszemu, aby mógł sam zapłacić, niedostaie tyle, ile wynosi połowa summy drugiego; drugi samby zapłacił, gdyby do jego summy przydano część trzecią summy piérwszego; naostatek trzeciemu do uskutecznienia téy kupli brakuie czwartéy części summy piérwszego; ileż każdy z nich w szczególności miał pieniędzy?*

(*) Litr znaczy 50,412416 cali sześciennych Paryzkich.

Odpowiedź: *Piérwszy miał 30000, drugi 40000, a trzeci 42500 czer: złłch.*

9°. *Trzech graczów po piérwszéy partyi przeliczywszy swoie pieniądze, dowiedzieli się, że jeden tylko z nich przegrał, dway zaś drudzy wygrali, każdy summę téy równą jaką do gry przyniósł; po partyi drugiéy, jeden z graczów wprzódy wygranych przegrał, a dway drudzy wygrali, każdy summę téy równą jaką miał przed zaczęciem partyi drugiéy; w trzeciéy partyi, gracz aż dotąd wygrywaiący, przegrał równie z dwóma drugiemi summę równą téy, jaką mieli na początku téy partyi ostatniéy, i wszyscy wyszli maiąc każdy po 120 czer: złłch; ileż z nich każdy miał do gry wchodząc?*

Odpow: *Przegrany w partyi piérwszéy miał 195 cz: zł:*
Przegrany w partyi drugiéy 105 cz: zł:
Przegrany w partyi trzeciéy 60 cz: zł:

Wzory ogólne na rozwiązywanie zrównań piérwszego stopnia.

§ 83. Dla zapobieżenia niedogodności jakąśmy dostrzegli na początku §fu poprzedzaiącego, wymyślono ażeby wszystkie współczynniki jednéy niewiadoméy, jednakową literą wyrażać, jednak je rozróżniaiąc między sobą cechowaniem jedną lub kilką kréskami, podług liczby zrównań.

Zrównania ogólne o dwóch niewiadomych, tak się piszą:

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Współczynniki niewiadoméy x, oba są wyra-

żone literą a, a współczynniki niewiadomey y, literą b; lecz kréska nad literami drugiego zrównania położona, pokazuie iż ich nienależy uważać za maiące też same wartości, jakie im są nadane w zrównaniu piérwszém. Przeto a', jest od a, ilością różną, b' zaś różną od b.

Jeżeli mamy trzy zrównania dane, te się tak piszą

$$a\,x+b\,y+c\,z=d,$$
$$a'x+b'y+c'z=d'$$
$$a''x+b''y+c''z=d''.$$

Wszystkie współczynniki niewiadomey x, są oznaczone literą a, współczynniki zaś niewiadomey y literą b, niewiadomey z literą c, lecz przy każdéy literze są różne kréski, znaczące, iż ta do różnych ilości należy. I tak a, a', a'' są trzy ilości różne; toż samo ma się rozumieć i o innych.

Jeżlibyśmy mieli cztéry niewiadome i cztéry zrównania, pisalibyśmy podług wskazanéy drogi, jak następuie

$$a\,x+b\,y+c\,z+d\,u=e$$
$$a'\,x+b'\,y+c'\,z+d'\,u=e'$$
$$a''\,x+b''\,y+c''\,z+d''\,u=e''$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e'''.$$

§ 84. Dla uproszczenia rachunku, unikaiąc w nim ułamków, tak się sposób eliminacyi odbywa jak w następuiących zrównaniach pokażemy. Niech będą zrównania $a\,x+b\,y=c$
$a'x+b'y=c'$;
oczywistą jest, że jeźliby naprzykład niewiadoma x, jednakowego miała współczynnika w obu zrównaniach; dosyć byłoby jedno od drugiego odciągnąć, aby tę niewiadomą wyrugować. Co ukaże się w ciągu na zrównaniach

$$10\,x+11\,y=27$$
$$10\,x+\;9\,y=15,$$

które daią $11\,y-9\,y=27-15$,
czyli $2\,y=12$, czyli $y=6$.

Widoczna stąd, że bezśrednie uważać można współczynniki niewiadomey x, za równe w zrównaniach

$$a\,x+b\,y=c$$
$$a'x+b'y=c';$$

rozmnożywszy w nich obie strony piérwszego, przez współczynnika a', niewiadomey x będącéy w zrównaniu drugiém, i obie strony zrównania drugiego przez współczynnika a, ilości x w zrównaniu piérwszém: otrzymamy

$$a\,a'x+a'b\,y=a'c$$
$$a\,a'x+a\,b'y=a\,c'.$$

Odciągnąwszy potém piérwsze z tych zrównań od drugiego, niewiadoma x zniknie, i będzie tylko

$$(a\,b'-a'b)\,y=a\,c'-a'c,$$

zrównanie zawiéraiące jednę niewiadomą y; z którego wypada $y=\dfrac{a\,c'-a'c}{a\,b'-a'b}$.

Sposób dopiéro użyty, zawsze zastosować się może do zrównań piérwszego stopnia, na rugowanie ze zrównania jednéy któréykolwiek z niewiadomych ilości.

Wyrugowawszy podobnymże sposobem niewiadomą y, będziemy mieli wartość x.

Gdybyśmy zastosowali ten sposób do trzech zrównań zawiéraiących trzy niewiadome x, y i z, moglibyśmy naprzód rugować x między piérwszém a drugiém, potém między piérwszém i trzeciém; a tak przyszlibyśmy do dwóch zrównań zawiéraiących dwie tylko niewiadome y i z, między któremi wyrugowalibyśmy następnie ilość y.

Kiedy wykona się rachunek, zrównanie na z,

do którego przyidziemy, będzie miało spólny mnożnik wszystkich wyrazów, a tém samém nie będzie miało nayprostszego, jakibyśmy otrzymać mogli.

§ 85. BEZOUT podał nayprostszy sposób, aby razem rugować wszystkie, prócz jednéy, niewiadome ilości; za którego pomocą, pytanie bezpośrednie przywodzi się do dwóch zrównań zawiéraiących w sobie niewiadome, mniéy jedną od podanych. Chociaż ten sposób w tenczas tylko potrzebny, kiedy mamy do czynienia z trzema zrównaniami, o trzech niewiadomych, jednak zaczniemy go stosować do zrównań zawiéraiących dwie niewiadome, aby ten przedmiot całkowicie objąć.

Niech będą dwa zrównania

$$a\,x + b\,y = c,$$
$$a'x + b'y = c';$$

pomnożywszy piérwszę przez ilość nieoznaczoną m, stanie się $a\,m\,x + b\,m\,y = c\,m;$

od tego wypadku odciągnąwszy zrównanie

$$a'x + b'y = c',$$

będziemy mieli $amx - a'x + bmy - b'y = cm - c'$,

czyli $(a\,m - a')\,x + (b\,m - b')\,y = c\,m - c'$.

Ponieważ ilość m, nic nam nieoznacza, przeto założyć możemy, jakoby ona taką była, że $bm = b'$. W tym przypadku, wyraz mnożony przez y, niknie, i mamy $x = \dfrac{c\,m - c'}{a\,m - a'}$;

a że założyliśmy że $b\,m = b'$, wypadnie zatém

$$m = \frac{b'}{b};$$

więc $$x = \frac{\frac{c\,b'}{b} - c'}{\frac{a\,b'}{b} - a'} = \frac{c\,b' - b\,c'}{a\,b' - b\,a'}.$$

Zamiast co zakładaliśmy że $b\,m = b'$, kiedy uczynimy $a\,m = a'$, zniszczy się wyraz z ilością x, i stanie się

$$y = \frac{c\,m - c'}{b\,m - b'}.$$

Wartość m, nie będzie już taż sama co wprzódy, albowiem będzie $m = \dfrac{a'}{a}$; którą podstawiwszy w wyrażeniu y, znaydziemy

$$y = \frac{c\,a' - a\,c'}{b\,a' - a\,b'}.$$

Przemieniwszy znaki w liczniku i mianowniku téy wartości, jéy mianownik będzie ten sam co i wartości x, ponieważ będzie

$$y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}.$$

§ 86. Niech teraz będą trzy zrównania

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$
$$a'x + b'y + c'z = d'$$
$$a''x + b''y + c''z = d'':$$

Sama *analogija* łatwo nas przywiedzie do rozmnożenia piérwszego i drugiego zrównania przez dwie ilości nieoznaczone m i n, i do odciągnięcia trzeciego zrównania, od ich summy; ponieważ za pomocą tego sposobu, wszystkie te zrównania razem użyte będą, a zaś dwie ilości nowe m i n, zależące od naszego rozrządzenia, oznaczone bydź mo-

gą sposobem oswobadzaiącym wypadek od dwóch niewiadomych. Tak postępuiąc i zbiéraiąc wyrazy mnożące jednę niewiadomą, będziemy mieli

$$(am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y+(cm+c'n-c'')z = dm+d'n-d'';$$

Jeżelibyśmy chcieli usunąć z tego zrównania, ilości x i y, należałoby na ten koniec położyć zrównania

$$am+a'n=a''$$
$$bm+b'n=b''$$

a na ówczas stałoby się $z=\dfrac{dm+d'n-d''}{cm+c'n-c''}$.

Z dwóch zrównań, w których znayduią się niewiadome m i n, łatwo jest wyprowadzić wartość tych ilości, za pomocą wypadków otrzymanych w §fie poprzedzaiącym; gdyż dosyć jest w tych zrównaniach zamienić x na m, y na n, i pisać na mieyscu liter

$$\left.\begin{matrix}a, b, c\\ a', b', c'\end{matrix}\right\} \text{litery} \left\{\begin{matrix}a, a', a''\\ b, b', b''\end{matrix}\right.,$$

co da

$$m=\frac{a''b'-b''a'}{ab'-ba'}$$

$$n=\frac{ab''-ba''}{ab'-ba'}.$$

Podstawiwszy te wartości w wartości z, i przywiodłszy wszystkie wyrazy do jednakowego mianownika, znaydziemy

$$z=\frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')-d''(ab'-ba')}{c(b'a''-a'b'')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.$$

Jeżelibyśmy zniszczyli wyrazy maiące przy sobie x i z, pozostałoby samo y, a litery m i n zależałyby od dwóch zrównań

$$am+a'n=a'', \quad cm+c'n=c'';$$

działania zaś odbywaiąc jak wyżéy, znaleźlibyśmy

$$y=\frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')-d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')-b''(ac'-ca')}.$$

Nakoniec, włożywszy zrównania

$$bm+b'n=b'', \quad cm+c'n=c'',$$

zniszczą się wyrazy mnożone przez y i przez z, a stanie się

$$x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

Te wartości uszykowawszy takim sposobem, aby szły w nich wyrazy naprzemian dodatne i odiemne, i razem przemieniwszy znaki w liczniku i mianowniku w piérwszéy i trzeciéy, można będzie im nadać następuiącą postać:

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}$$

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

§ 87. Niech będą cztéry zrównania

$$ax+by+cz+du=e$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e'$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e''$$
$$a'''x+b'''y+c'''z+d'''u=e'''.$$

Rozmnożywszy z nich piérwsze przez m, drugie przez n, a trzecie przez p, i od zbioru tych zrównań odciągnąwszy czwarte, znaydziemy

$$(am+a'n+a''p-a''')x+(bm+b'n+b''p-b''')y$$
$$+(cm+c'n+c''p-c''')z+(dm+d'n+d''p-d''')u$$
$$=em+e'n+e''p-e'''.$$

Chcąc znaleśdź u, załóżmy

$$am+a'n+a''p=a'''$$
$$bm+b'n+b''p=b'''$$
$$cm+c'n+c''p=c'''$$

a wypadnie, $u=\dfrac{em+e'n+e''p-e'''}{dm+d'n+d''p-d'''}$.

Poprzedzaiące zrównania, które dać powinny m, n i p, rozwiązałyby się za pomocą wzorów wynalezionych na przypadek trzech niewiadomych. Ta droga wydać się powinna naywygodnieyszą i nayprostszą; lecz zastanowienie się nad wzorem wyżéy otrzymanych wypadków, poda sposób ich wyszukiwania bez rachunku.

§ 88. Abyśmy się wrócili do piérwszego łańcucha naszych myśli, weźmy zrównanie o jednéy niewiadoméy, $ax=b$, i wyciągniymy z niego $x=\dfrac{b}{a}$, tu postrzegamy, że licznik, jest wyrazem b zupełnie wiadomym, a mianownikiem współczynnik a, niewiadoméy ilości.

Dwa zrównania $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$,

dały $x=\dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, $y=\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$;

mianownik jeszcze składa się z liter a, a', b, b' które mnożyły niewiadome: pisze się naprzód litera a obok litery b; potém przemieniwszy między sobą a i b, aby mieć ba, i téy przemianie dawszy znak —, stanie się $ab-ba$; nakoniec kładzie się

kréska nad drugą literą każdego wyrazu, i złoży się mianownik $ab'-ba'$.

Uważmyż teraz jakim sposobem może się stąd wyprowadzić licznik. Łatwo jest postrzedz, że chcąc mieć licznik wartości x, zamienić należy oba a na c; i oba b na c, dla utworzenia licznika wartości niewiadoméy y; a tym sposobem znaydziemy dla piérwszéy $cb'-bc'$, a dla drugiéy $ac'-ca'$. *Licznik więc tworzy się z mianownika*, w przypadku o dwóch niewiadomych, równie jak w przypadku o jedney, *przemieniaiąc współczynnika szukaney niewiadomey w każdym wyrazie znanym, zachowuiąc przytém kréski jakie wprzódy były.*

Samo spóyrzenie na wartości wypadłe ze zrównań o trzech niewiadomych, wystarcza na pokazanie, iż te bynaymniéy niewyłączaią się od tego prawidła. Ze względu na ich mianowniki, nieco mieć należy więcéy uwagi, aby ich tworzenie się rozpoznać. Lecz ponieważ w przypadku dwóch niewiadomych, mianownik ukazuie wszystkie mogące zayść przemiany dwóch liter a i b te niewiadome mnożących; więc naturalnie wypada myśléć, że jeżeli mamy i trzy niewiadome, tedy i ich mianownik, zamykać powinien wszystkie przemiany trzech liter a, b, c; aby zaś je uszykować w porządku, biorą się tu następuiącym sposobem:

Robi się naprzód przemiana $ab-ba$, dwóch liter a i b; potém po ab pisze się trzecia litera c, co daie abc; przemieniaiąc tę literę przez wszystkie mieysca, z dostrzeganiem przemiany znaku za każdym razem, i niemieszaiąc porządku względem a i b, wyniknie stąd

$$abc-acb-cab.$$

Podobnież postępuiąc z drugą dwóch liter przemianą $-ba$, znaydziemy $-bac+bca-cba$; trzy te mnogości złączywszy z poprzedzaiącémi, i nacechowawszy literę drugą, jedną kréską, a trzecią dwiema, znaydziemy

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'',$$

wypadek zgodny z tym, jaki wystawiaią nam wzory otrzymane.

Łatwo zatém stąd wnosić, że dla utworzenia mianownika, w przypadku o cztérech niewiadomych, należy wprowadzić literę d, do każdéy z sześciu mnogości,

$abc-acb+cab-bac+bca-cba$, i z nią odbywać wszelkie przemiany, kładąc ją na wszystkich mieyscach; wyraz naprzykład abc, dałby cztéry następuiące:

$$abcd-abdc+adbc-dabc.$$

Podobnież odbywaiąc działanie na tych pięciu mnogościach, wypadek całkowity miałby wyrazów 24, z których w każdym litera druga miałaby jednę kréskę, trzecia dwie, a czwarta trzy. Liczniki zaś niewiadomych u, z, y i x wyciągnęłyby się za pomocą wysłowionego wyżéy prawidła. (*)

§ 89. Używaiąc tych wzorów do rozwiązywania liczbowych zrównań, należy porównywać każdy wyraz podanego zrównania, z wyrazami zrównań ogólnych w paragrafach poprzedzaiących wyłożonych.

(*) Laplace w drugiéy części Pamiętników Akademii umieiętności na rok 1772. na karcie 294, dowiódł tę prawdę *a priori*. Obacz także *le Annales de Mathematiques pures appliquées par M.* Gergonne T. IV, *pag.* 148.

Chcąc naprzykład rozwiązać trzy zrównania

$$\begin{aligned} 7x+5y+2z&=79\\ 8x+7y+9z&=122\\ x+4y+5z&=55, \end{aligned}$$

równać należy każdy wyraz tych zrównań, z każdym wyrazem ogólnych zrównań §*fu* 86, co da

$$\begin{aligned} a&=7, & b&=5, & c&=2, & d&=79\\ a'&=8, & b'&=7, & c'&=9, & d'&=122\\ a''&=1, & b''&=4, & c''&=5, & d''&=55. \end{aligned}$$

Podstawiwszy te wartości w ogólnych wyrażeniach niewiadomych x, y i z, i odbywszy wskazane działania, znaydziemy

$$x=4, \quad y=9, \quad z=3.$$

Pożyteczną jest rzeczą uważyć, że też same wyrażenia, służyłyby jeszcze i w ówczas, kiedy zrównania podane niewszystkie miałyby swoie wyrazy ze znakiem $+$, jak przypuszczać zdaią się zrównania ogólne, z których są wyprowadzone te wyrażenia. Gdybyśmy naprzykład mieli

$$\begin{aligned} 3x-9y+8z&=41\\ -5x+4y+2z&=-20\\ 11x-7y-6z&=37, \end{aligned}$$

należałoby, porównywaiąc wyrazy tych zrównań, z odpowiadaiącémi im w zrównaniach ogólnych, mieć baczność na znaki, co dałoby

$$\begin{aligned} a&=+3, & b&=-9, & c&=+8, & d&=+41\\ a'&=-5, & b'&=+4, & c'&=+2, & d'&=-20\\ a''&=+11, & b''&=-7, & c''&=-6, & d''&=+37, \end{aligned}$$

a potém oznaczać znak, podług prawideł § 31, jaki mieć powinien wyraz każdy ogólnych wyrażeń na x, y i z, odpowiednie znakom składaiących go mnożników.

A tak znaleźlibyśmy naprzykład, że piérwszy wyraz spólnego mianownika, który jest $a\,b'c''$, staiąc się $+3\times+4\times-6$, odmienia znak i daie -72. Tęż samę zwracaiąc uwagę i na inne wyrazy tak liczników jak mianowników, raz biorąc zbiór dodatnych, powtóre odiemnych, znaydziemy

$$x=\frac{2774-2834}{592-622}=\frac{-60}{-30}=+2.$$

$$y=\frac{3022-2932}{592-622}=\frac{+90}{-30}=-3.$$

$$z=\frac{3859-3889}{592-622}=\frac{-30}{-30}=+1.$$

O *Zrównaniach drugiego stopnia zawiéraiących jednę nieznajomą.*

§ 90. W zrównaniach, z którémi mieliśmy do czynienia, ilości niewiadome były tylko w potędze piérwszéy, czyli raczéy nie były mnożone same przez się, i te zrównania były *piérwszego stopnia;* lecz jeżeli zadamy sobie następuiące pytanie: *Znaleśdź taką liczbę przez którąby jéy pięciokrotna pomnożona dała mnogość równą 125;* na ówczas oznaczywszy tę liczbę przez x, jéy pięciokrotna byłaby $5x$, i mielibyśmy

$$5x^2=125.$$

To zrównanie jest już *drugiego stopnia*, ponieważ zawiéra w sobie x^2, czyli drugą potęgę niewiadoméy x. Uwolniwszy tę drugą potęgę od jéy współczynnika 5,

otrzymamy $x^2=\frac{125}{5}$, czyli $x^2=25$.

Nieumielibyśmy tu wyciągnąć wartości niewiadoméy x, tymże samym sposobem jak w *§ie* 11, gdyż pytanie podane zostało przywiedzione do wynalezienia liczby takiéy, któraby rozmnożona przez się samę dała 25. Przy niewielkiém jednak zastanowieniu się poznamy, że tą liczbą jest 5; lecz bardzo się rzadko zdarza, ażeby tak zgadnąć rozwiązanie szukane; przychodzimy więc do tego liczbowego pytania: *znaleśdź liczbę któraby rozmnożona przez się samę, dała mnogość równą liczbie danéy*, czyli co jest jedno, od potęgi drugiéy powrócić do liczby z któréy powstała, a która nazywa się téy potęgi *kwadratowym pierwiastkiém*. Zatrudniemy się więc rozwiązaniem tego pytania, ponieważ to nam posłuży do oznaczania niewiadomych ilości we wszystkich zrównaniach drugiego stopnia.

§ 91. Sposób, jaki użyty bydź powinien na wynaydowanie, czyli raczéy wyciąganie piérwiastku z liczb, polega na poznaniu potęgi drugiéy liczb wyrażonych jedną cyfrą. Kładziemy więc dziewięć liczb piérwszych z drugą każdéy potęgą u dołu napisaną:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Skąd ukazuie się, że druga potęga liczby wyrażonéy jedną cyfrą, więcéy nad dwie niezawiéra: 10, które jest naymnieysze z liczb wyrażonych dwiema cyframi, w swoim kwadracie ma trzy cyfry, 100. Aby się przygotować do rozkładania potęgi drugiéy, liczby wyrażanéy dwiema cyframi, należy wprzódy uczyć się ich składu; i na ten koniec poszukaymy, jakim sposobem każda część liczby naprzykład 47, przyczynia się do złożenia kwadratu téyże liczby.

Można rozłożyć 47, na $40+7$, czyli na 4 dziesiątki i 7 jedności. Wyraziwszy przez a dziesiątki liczby daney, a przez b jéy jedności, druga potęga téy liczby wyrazi się przez

$$(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2;$$

to jest, iż ona zawiérać będzie trzy części: *Kwadrat dziesiątków, dwa razy wziętą mnogość z dziesiątków przez jedności, i kwadrat jedności.* W przykładzie przez nas obranym, ponieważ $a=4$ dziesiątkom czyli 40 jednościom, a $b=7$; będzie więc

$$\begin{array}{r} a^2 = 1600 \\ 2ab = 560 \\ b^2 = 49 \\ \hline \end{array}$$

Cała potęga druga $a^2+2ab+b^2=2209=47\times47$.

Aby teraz powrócić do piérwiastku liczby 2209, uważemy naprzód, że kwadrat dziesiątków 1600, niema cyfer znaczących niższy porządek od set, i że jest naywiększym kwadratem, jaki tylko 22 sta zawierać mogą; ponieważ 22 wpada między 16 i 25; to jest, między kwadratem z 4 i z 5, równie jak 47 wpada między 4 dziesiątkami czyli 40 i 5 dziesiątkami czyli 50.

Jeżeli więc poszukamy naywiększego kwadratu zawiéraiącego się w 22, tedy wynaydziemy 16, którego pierwiastek 4, wyrazi jego dziesiątki; odciągnąwszy potém 16 set czyli 1600 od 2209, reszta 609 zawiérać jeszcze będzie podwóyną mnogość z dziesiątków przez jedności, 560, i kwadrat jedności, 49. Lecz ponieważ podwóyna mnogość z dziesiątków przez jedności, nie ma cyfer niższego porządku nad dziesiątki, zatém powinna się znaydować w dwóch piérwszych cyfrach 60, reszty 609, które prócz tego zawierać będą dziesiątki powstaiące z kwadratu jedności. A zatém jeżli podzielemy 60 przez 8 podwoione dziesiątki, otrzymamy, zaniedbuiąc resztę, wieloraz 7 równy jednościom szukanym. Rozmnożywszy potém 8 przez 7, utworzy się podwóyna mnogość z dziesiątków przez jedności, 560, tę odciągnąwszy od całéy reszty 609, otrzymamy różnicę 49, która powinna bydź i jest w rzeczy saméy kwadratem jedności.

Działanie rozumowaniem odbyte, układa się jak następuie

$$\begin{array}{r|l} 22,09 & 47 \\ \hline 16 & \\ \hline 60,9 & 87 \\ 609 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Liczba dana pisze się jak gdyby szło o jéy podzielenie przez drugą, i przeznacza się piérwiastkowi mieysce, które zaymować powinnaby dzieląca. Poczém oddzielaią się kréską jedności od dziesiątków, aby uważać że tylko dwie piérwsze cyfry ze strony lewéy, zawiérać powinny kwadrat dziesiątków pierwiastku. Wynayduie się naywiększy kwadrat 16, zawarty w tych dwóch cyfrach, i piérwiastek 4, kładzie się na przeznaczoném mieyscu, poczém odciąga się 16 od 22. Do reszty 6, dołączaią się dwie cyfry 09 liczby daney; ostatnia oddziela się kréska jako niewchodząca do podwóyney mnogości z dziesiątków przez jedności, a pozostała część z lewéy strony dzieli się przez 8 podwoiony pierwiastek dziesiątków, co da na wieloraz 7 jedności; dla złożenia razem obu ostatnich części kwadratu, które zawiérać się powinny w 609, pisze się 7 po 8, skąd wypada liczba 87, równa dwa razy wziętym

dziesiątkom więcéy jednościami, czyli $2a+b$; rozmnożywszy tę liczbę przez 7 czyli przez b, utworzy się $609 = 2ab+b^2$, to jest podwóyna mnogość z dziesiątków przez jedności, więcéy kwadratem jedności: po wykonaném odciąganiu nic nie zostanie, a działanie ukończone dowodzi, że 47 jest kwadratowym piérwiastkiem z 2209.

Niech będzie jeszcze liczba dana 324, z któréy mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy; ułożmy działanie jak następuie:

3,24	18
1	
22,4	28
22 4	
00 0	

na mocy tego cośmy już powiedzieli, znaydziemy 1, za dziesiątki pierwiastku; ten dziesiątek podwoiony daie liczbę 2, przez którą dzielić należy dwie piérwsze cyfry 22, reszty. Aże 22 zawiéra dwa razy liczbę jedenaście, więc za drugi wyraz pierwiastku niemoże bydź, ani liczba większa od 10, ani samo 10, a nawet i liczba 9 jeszcze w tym przypadku byłaby nadto wielka; z przyczyny, że napisawszy 9 obok 2 i rozmnożywszy 29, przez 9, jak każe prawidło, otrzymalibyśmy wypadek 261, niemogący się odciągać od 224. Zatém stąd wnosimy, że dzielenie 22 przez 2, nie należy uważać tylko za sposób przybliżaiący wynalezienie jedności; wypada więc otrzymany wieloraz dopóty zmnieyszać, aż póki nieprzyidziemy do mnogości nieprzewyższaiącéy reszty 224; ten warunek dopełnia liczba 8, ponieważ $8 \times 28 = 224$; więc pierwiastek szukany jest 18.

Składaiąc bowiem trzy części kwadratu z 18, znaydziemy

$$a^2 = 100$$
$$2ab = 160$$
$$b^2 = 64$$
$$324 = 18 \times 18,$$

zupełny kwadrat

i widzimy, że 6 dziesiątków, które zawiéra kwadrat jedności, będąc złączone z podwóyną mnogością z dziesiątków przez jedności, w liczbie 160; tak tę mięszaią mnogość, iż dzielenie przez podwoiony pierwiastek dziesiątków, niemoże więcéy wydać samych jedności.

§ 92. Wyciągania pierwiastku kwadratowego z liczby złożonéy z trzech lub cztérech cyfer, niepotrafimy wykonać na mocy tego co poprzedziło, lecz potrzeba jeszcze niektórych wiadomości, abyśmy się usposobić mogli do wyciągania pierwiastku z liczby wyrażonéy tylą ile chcemy cyframi; te wiadomości, jak obaczemy rodzą się z podanych już zasad.

Każda liczba od 100 mnieysza, nie będzie miała więcéy nad cztéry cyfry w swoim kwadracie, gdyż kwadrat ze 100 jest 10000, czyli naymnieysza liczba wyrażona pięcią cyframi. To założywszy, przystąpmy do rozważania, jakim sposobem tworzy się kwadrat liczby od 100 większéy naprzykład z 473; tę liczbę możemy rozłożyć na $470+3$ czyli na 47 dziesiątki i 3 jedności. Aby jéy kwadrat wyprowadzić z wzoru

$$a^2+2ab+b^2,$$

uczyńmy $a = 47$ dziesiątkom $= 470$ jednościom, $b = 3$ jednościom; skąd

$a^2 = 220900$
$2ab = 2820$
$b^2 = 9$

Kwadrat zupełny $223729 = 473 \times 473$.

Ukazuie się w tym przykładzie, że kwadrat dziesiątków niezawiera w sobie liczb ale tylko zera aż do porządku set, co w ogólności bydź powinno, ponieważ dziesiątki mnożone przez dziesiątki zawsze sta daią. Przeto, w części *2237* która zostaie na lewéy stronie liczby danéy po oddzieleniu dziesiątków od jedności, szukać należy kwadratu dziesiątków; a że *473* wpada między *47* dziesiątki czyli *470*, a *48* dziesiątki czyli *480*, zatém *2237* powinno wpadać między kwadratami ze *47* i *48*; skąd wynika, że naywiększy kwadrat zawarty w *2237*, będzie kwadratem ze *47* czyli z pierwiastku dziesiątków. Więc oczywista, iż aby wynaleśdź te dziesiątki, tak odbywać należy działanie, jak gdyby chciano wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z *2237*; ale zamiast cobyśmy przyiśdź mieli do dokładnego wypadku, znaydziemy jeszcze resztę zawiéraiącą dziesiątki powstałe z podwóynéy mnogości ze *47* dziesiątków mnożonych przez jedności.

Do wykonania rachunku, tak urządza się działanie, jak się tu daie widzieć:

22,37,29	*473*
16	*87*
63,7	*943*
60 9	
2 82,9	
2 82 9	
0	

Oddzielaią się naprzód dwie ostatnie cyfry *29*, i dla wyciągnienia pierwiastku z liczby *2237* pozostałéy na lewéy stronie, jeszcze oddzielaią się dwie cyfry ostatnie *37* od téy liczby; tym sposobem, liczba dana jest rozdzieloną na klassy po dwie cyfry, zacząwszy od prawéy ku lewéy stronie. Odbywa się działanie na dwóch piérwszych oddziałach ze strony lewéy, jak się w paragrafie poprzedzaiącym wykonywało na liczbie *2209*, co da dwie piérwsze cyfry *47* pierwiastku; lecz pozostanie reszta *28*, która przyłączona do dwóch cyfer *29*, ostatniego oddziału, zawiéra podwóyną mnogość ze *47* dziesiątków przez jedności i kwadrat jedności. Oddziela się cyfra *9*, jako niemogąca stanowić części podwóynéy mnogości z dziesiątków przez jedności, i dzieli się *282* przez *94*, podwóyny pierwiastek z dziesiątków; potém napisawszy wieloraz *3*, obok *94*, i rozmnożywszy *943* przez *3*, wypadnie *2829*, liczba zupełnie równa ostatniéy reszcie, i ukończy się działanie.

§ 93. Dla pokazania, jak należy na jakieykolwiek liczbie odbywać działanie o którém mowa, wyciągniymy pierwiastek z *223918 24*. Jakikolwiek bądź byłby ten pierwiastek, możemy go zawsze wyobrażać rozłożonym na dziesiątki i jedności, jak w poprzedzaiących przykładach. Ponieważ kwadrat dziesiątków nie zawiéra w sobie liczb ale tylko zera aż do porządku set, zatém dwie ostatnie cyfry *24* wchodzić do niego niemogą, więc się odcinaią kréską, a pytanie będzie przywiedzione do szukania naywiększego kwadratu zawartego w części *223918* pozostałéy na stronie lewéy. A że ta część składa się więcéy jak z dwóch cyfer, więc stąd wnieść należy, że liczba wyrażaiąca dziesiątki szukanego pierwiastku, bę-

dzie miała więcéy niż jednę cyfrę; a tém samém rozłożoną bydź może ze swéy kolei na dziesiątki i jedności. Że zaś kwadrat tych dziesiątków niezamyka w jednościach i dziesiątkach tylko zera, więc znowu odcina się *18* od *22394*; przeto pierwiastek musi się zawiérać w cyfrach *223* pozostałych na stronie lewéy, i jego należy szukać: a że *223*, jeszcze ma więcéy jak dwie cyfry, zatém kwadrat, który powinien się zawiérać w *223*, będzie miał przynaymniéy dwie cyfry w swoim pierwiastku; więc liczba, maiąca wyrażać dziesiątki których się szuka, będzie zawiérała więcéy niż jednę cyfrę: naostatek, jest 22 tą liczbą, w któréy należy szukać takiego kwadratu, któryby wyrażał jedności naywyższego porządku szukanego pierwiastku. Postępuiąc ciągle, drogą tego rozumowania, które może się według upodobania przedłużać, liczba podana zostanie rozdzieloną na klassy po dwie cyfry od prawéy ku stronie lewéy; pamiętać przy tém należy, że ostatni oddział na lewéy stronie może tylko zawiérać jednę cyfrę.

Kiedy liczba dana, tak rozdzieli się na klassy i uszykowaną zostanie jak się tu daie wiedzieć, postępuie się potém z trzema piérwszémi oddziałami, jak w przykładzie paragrafu poprzedzaiącego; a gdy się już wynaydą trzy piérwsze cyfry *473*, przyłącza się do reszty *189*, czwarty oddział *24*, i uważa się liczba *18924*, jako zawiéraiąca w sobie podwóyną mnogość z *473* dziesiątków znalezionych przez jedności szukane, więcéy kwadratem tychże jedności. Oddziela się ostatnia cyfra *4*, a pozostałe na stronie lewéy dzielą się przez *946*, podwoiony piérwiastek *473*, i potém wieloraz 2, sprawdza się jak w poprzedzaiących działaniach.

22,39,18,24	*4732*
16	*87*
63,9	*943*
60 9	*9462*
3 01,8	
2 82 9	
18 92,4	
18 92 4	
00 00 0	

Kończy się tu działanie w tym przykładzie, lecz rzecz widoczna, że gdyby jeszcze było więcéy oddziałów, tedy cztéry wynalezione cyfry *4732*, wyrażałyby dziesiątki pierwiastku którego jedności jeszcze szukamy, i że następnie wypadałoby dzielić pozostałą resztę powiększoną piérwszą cyfrą następuiącego oddziału, przez te dziesiątki podwoione, i tak ciągiem postępować z każdym dołączanym oddziałem.

§ 94. Jeżeliby się zdarzyło, że po przyłączeniu oddziału, reszta z przydaną jedną cyfrą tegoż oddziału, niemieści w sobie podwoionych wynalezionych cyfer, na ówczas w pierwiastku należy położyć zero; ponieważ w takim razie pierwiastek nie będzie miał jedności tegoż porządku: potém dołącza się następuiący oddział dla odbywania zwyczaynego działania. Przykład tu dołączony stosowany jest do takowego przypadku. Niepisano tu ilości do odciągania, lecz wykonano je napamięć, jak w dzieleniu.

49,42,09	*703*
0 4,20,9	*1403*
0 0 00 0	

§ 95. Nie wszystkie liczby są zupełnémi kwadratami. Rzuciwszy bowiem okiem na tablicę położoną na (str: 139), postrzeżemy, że między kwadratami każdéy z dziewięciu liczb piérwszych, znayduią się przerwy mogące w sobie mieścić wiele liczb niemaiących piérwiastków; *45* naprzykład, nie jest kwadratem, ponieważ wpada między *36* i *49*. Zdarzyć się więc nayczęściéy może, że liczba któréy szukamy kwadratowego pierwiastku, nie

będzie go miała; lecz odbywaiąc na niéy działania jak gdyby go miała, wypadek będzie pierwiastkiem naybliższego kwadratu, który go zawiéra. Jeżeliby szukano naprzykład pierwiastku z 2276, znalezionoby 47, i zostałoby się 67 reszty; co pokazuie, że naywiększy kwadrat zawarty w 2276, jest kwadratem ze 47 czyli 2209.

Ponieważ wynalazłszy pierwiastek naywiększego kwadratu zawartego w liczbie danéy, moglibyśmy się obawiać czy niezamało położyliśmy cyfer w pierwiastku; przeto podaie się sposób rozpoznawania, czy reszta nadto jest wielka, i czy znaleziony pierwiastek nie jest nadto mały. Kwadrat z $a+b$

jest $a^2+2ab+b^2$,

jeżeli uczynimy $b=1$, kwadrat z $a+1$, będzie

$$a^2+2a+1,$$

ilością różniącą się od a^2 kwadratu z a, podwóyną ilością a, więcéy jednością. Więc *jeżeli wynaleziony pierwiastek ma bydź powiększony jednością, lub też i więcéy niż jednością, tedy potrzeba ażeby jego kwadrat odciągniony od liczby danéy, zostawił resztę równą przynaymniéy dwa razy wziętemu temuż pierwiastkowi więcéy jednością.*

W każdym zaś razie, w którym tak okoliczność nie będzie miała mieysca, wyciągniony pierwiastek, będzie w rzeczy samey pierwiastkiém naywiększego kwadratu zawartego w podanéy liczbie.

§ 96. Ponieważ w mnożeniu ułamku przez ułamek, należy mnożyć liczniki między sobą i mianowniki także, widoczna zatém, że mnogość z ułamku mnożonego przez się, czyli *kwadrat ułamku równy jest kwadratowi swego licznika przez kwadrat jego mianownika*. Skąd wypływa, że *w wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ułamku, należy wyciągać pierwiastek osobno z jego licznika, osobno z mianownika*.

I tak pierwiastek z $\frac{25}{64}$ jest $\frac{5}{8}$, ponieważ 5 jest pierwiastkiem kwadratowym z 25, a 8 takimże pierwiastkiem z 64.

Jest rzeczą nayważnieyszą pamiętać, że nietylko kwadraty właściwych ułamków są zawsze ułamkami, ale że *i każda liczba ułamkowa nieprzywiedlna rozmnożona sama przez się, da zawsze wypadek ułamkowy także nieprzywiedlny*.

§ 97. To założenie na tém się gruntuie: że *każda liczba piérwsza* P, *dzieląca mnogość* AB *dwóch liczb* A i B, *koniecznie dzieli jednę z liczb tychże*. Załóżmy iż nie dzieli liczby B, i że ją B przewyższa. Oznaczywszy przez q cały wieloraz z tego dzielenia, a przez B' resztę, będzie

$$B=qP+B',$$

skąd, rozmnożywszy przez A, wyprowadzi się

$$AB=qAP+AB';$$

a podzieliwszy obie strony zrównania przez P, otrzymamy

$$\frac{AB}{P}=qA+\frac{AB'}{P};$$

stąd wynika, że podzielność AB przez P, ciągnie za sobą podzielność mnogości AB' przez tęż samę liczbę; a że B' jest resztą z podzielenia B przez P, przeto jest koniecznie mnieyszém od P: zatém B' nie będzie mogło dzielić się przez P, ale podzieli się P przez B' i będziemy mieli za wieloraz q' i resztę B''; potém podzieliwszy P przez

B''', za wieloraz wypadnie q'' i reszta B''' i tak daléy, z przyczyny że P jest liczbą piérwszą.

To założywszy będziemy mieli następuiący szereg zrównań

$$P = q'B' + B'', \quad P = q''B'' + B''', \text{ i. t. d.}$$

rozmnożywszy każdę przez A, otrzymamy

$$AP = q'AB' + AB'', \quad AP = q''AB'' + AB''' \text{ i. t. d.}$$

co podzieliwszy przez P, wypadnie

$$A = q'\frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}, \quad A = q''\frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P} \text{ i. t. d.}$$

Te wypadki pokazuią, iż ponieważ AB' jest podzielném przez P, zatém i mnogości AB'', AB''' i. t. d. powinny bydź takiemiż. Lecz że reszty B', B'', B''' i. t. d. coraz mnieyszémi się staią, zatém powinny zbliżać się do jedności, gdyż działania wyżéy wskazane dopóty się tym sposobem przedłużaią, póki te reszty przewyższaią 1, z przyczyny że P jest liczbą piérwszą; a gdy już przyydziemy do jedności, otrzymamy mnogość $A \times 1$, która powinna bydź podzielną przez P: więc i samo A powinno bydź także podzielném przez P.

Stąd wypada, że jeżeli liczba piérwsza P nie dzieli B, jak zakładamy, tedy nie dzieli i liczby A, a zatém nie podzieli i mnogości liczb tychże. (*To dowodzenie jest prawie wyciągiem* z Teoryi liczb *P. Legendre*).

§ 98. Jeżeli ułamek $\frac{b}{a}$ jest nierozdzielnym, tedy żadna nie znaydzie się piérwsza liczba, któraby mogła razem dzielić b i a, a tém samém, podług tego co poprzedziło, każda liczba piérwsza która nie dzieli a, nie może dzielić i $a \times a$ czyli a^2,

a która nie dzieli b, ta nie podzieli także i $b \times b$ czyli b^2; więc liczby a^2 i b^2 są na ówczas piérwszémi między sobą; a zatém kwadrat $\frac{b^2}{a^2}$ ułamku $\frac{b}{a}$, będąc niewydzielnym jak i sam ułamek, niebędzie mógł bydź liczbą całą.

§ 99. Wynika z tego ostatniego założenia, że wszystkie liczby całkie, które nie są zupełnemi kwadratami, nie tylko nie maią pierwiastków w liczbach całych, ale nawet i w ułamkowych. Czuiemy jednak że musi bydź jakaś liczba, która rozmnożona sama przez się wydała liczbę naprzykład 2276, i że ta ilość w tym przypadku zawiéra się między 47 i 48, gdyż 47×47, daie mnogość mnieyszą od téy liczby, a 48×48 daie mnogość większą: znayduiący się przedział między 47 a 48, rozdzieliwszy przez ułamki, wynaydziemy liczby, które rozmnożone same przez się, dadzą mnogości większe od kwadratu ze 47, a mnieysze od kwadratu ze 48, i prawie zupełnie przybliżaiące się do liczby 2276.

Wyciąganie pierwiastku kwadratowego zastosowane do liczb, które nie są zupełnémi kwadratami, wydaie nowy liczb gatunek, podobnie jak dzielenie rodzi ułamki; lecz ta tylko zachodzi różnica między ułamkami i liczb pierwiastkami, które nie są doskonałémi kwadratami, że piérwsze zawsze składaią się z liczby zupełnéy, części jedności i z tą jednością maią *wspólną miarę*, czyli stosunek wyrażony liczbami całémi, gdy drugie tego nie maią.

Wyobraziwszy naprzykład jedność rozdzieloną na pięć części, wieloraz z podzielenia 9 przez

5, wyrazi takich części dziewięć czyli $\frac{9}{5}$; a że $\frac{1}{5}$ zawiéra się pięć razy w jedności a razy dziewięć w $\frac{9}{5}$, przeto jest *wspólną miarą* jedności i ułamku $\frac{9}{5}$, a stosunek tych ilości jest stosunkiem liczb całych 5 i 9.

Uważywszy, że liczby całe równie jak ułamki maią z jednością wspólną miarę, mówimy że te ilości są *współmierne* z jednością, czyli poprostu *współmierne;* a ponieważ ich stosunki z jednością wyrażaią się liczbami całémi, przeto oznaczaią się także liczby całe i ułamki spólnym imieniem *liczb wymiernych*.

Przeciwnie, pierwiastek kwadratowy liczby, która nie jest zupełnym kwadratem, jest *niewspółmierny* czyli *niewymierny*; (incommensurable ou irrationnelle), ponieważ nie może wyrazić się żadnym ułamkiém; stąd wynika, iż na jakąkolwiek liczbę części wyobrazimy podzieloną jedność, żadne z nich nie będą tak małe, aby dokładnym sposobem mierzyły razem pierwiastek i jedność.

Aby wskazać w ogólności wyciąganie pierwiastku, czy to możemy go otrzymać zupełnym, czyli nie, używamy znaku $\sqrt{\ }$, który nazywa się, *znakiem pierwiastkowym* (radicale):

$\sqrt{16}$ jest toż samo co 4,

$\sqrt{2}$ jest *niewymierny*.

§ 100. Chociaż nie możemy przez żadną liczbę całą ani ułamkową otrzymać wartości zupełnéy $\sqrt{2}$, jednak możemy się do niéy tyle ile zechcemy przybliżyć, zamieniwszy tę liczbę na taki ułamek, któregoby mianownik był kwadratem; a na ówczas pierwiastek licznika wzięty tylko w liczbie całkowitéy, da pierwiastek podanéy liczby, wyrażony w częściach ułamkowych, które oznacza pierwiastek mianownika.

Jeżelibyśmy naprzykład liczbę 2, zamienili na ułamek *25tych*, mielibyśmy $\frac{50}{25}$. Pierwiastek z 50, ponieważ w liczbie całéy jest tylko 7, a pierwiastek z 25, jest zupełnie 5, zatém będziemy mieli $\frac{7}{5}$ czyli $1\frac{2}{5}$, pierwiastkiem z 2, przybliżonym przynaymniéy do 5téy części.

§ 101. Widzimy, że to działanie gruntuie się na tém cośmy powiedzieli w §*ie* 96, gdzie kwadrat ułamku był wyrażony ułamkiem nowym, maiącym za licznika kwadrat pierwotnego licznika, a za mianownika kwadrat pierwotnego mianownika, i zastosować się może do jakiegokolwiek bądź gatunku ułamku, a jeszcze łatwiéy do ułamków dziesiątkowych, jak do wszystkich innych.

W rzeczy saméy, z téy zasady wynika, że kwadrat liczby wyrażonéy w dziesiątkowych, powinien bydź wyrażony w stach, równie jak kwadrat liczby wyrażonéy w stach, powinien bydź w dziesiątkach tysięcy; a tém samém liczba cyfer dziesiątkowych kwadratu, jest zawsze podwóyną liczby cyfer w pierwiastku. Ta ostatnia uwaga może jeszcze wyprowadzić się z prawideł mnożenia liczb dziesiątkowych, które wymagaią, aby mnogość tyle zawiérała dziesiątkowych cyfer, ile się ich znayduie w obu mnożnikach. W teraźnieyszym przypadku, liczba podana uważana ja-

ko mnogość z pierwiastku rozmnożonego przez się powinna mieć dwa razy tyle dziesiątkowych cyfer ile ma ten pierwiastek.

Zrozumiawszy to wszystko co poprzedziło, łatwo stąd wnosić, że jeżelibyśmy chcieli otrzymać pierwiastek kwadratowy z 227 naprzykład, przybliżony przynaymniéy do setnéy części, należałoby obrócić tę liczbę na dziesiętno-tysiączne, to jest przydać do niéy cztéry zera, co da 2270000 dziesięciotysięczne, z któréy wyciągniemy pierwiastek jak z równéy liczby jedności; lecz dla naznaczenia, że wypadek powinien mieć setne, oddzielą się kréską dwie cyfry ostatnie ze strony prawéy. A tak znaydziemy, że pierwiastek z 227, przybliżony do setnéy części, jest 15,06. Oto działanie:

2,27,00,00	1506
12,7	25
2 00 00	3006
1964	

Jeźliby liczba dana zawiérała już liczby dziesiątkowe, należałoby zrobić ją parzystą, jak wymaga działanie wyciągania pierwiastku. Aby wyciągnąć naprzykład pierwiastek z 51,7, wypadałoby do téy liczby przydać zero, ażeby miała przynaymniéy części setne, a potém wyciągałby się pierwiastek z 51,70. Gdyby chciano mieć jeszcze jedną dziesiętną więcéy, należałoby przydać do téy liczby jeszcze dwa zera, coby uczyniło 51,7000 i znaleźlibyśmy 7,19 za jéy piérwiastek. Dla wprawy można szukać pierwiastku kwadratowego liczb 2 i 3, z siedmią cyframi dziesiętnémi, co wymaga aby do któreykolwiek z tych liczb przydać zer cztérynaście, i wynaydzie się wypadek

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136, \quad \sqrt{3} = 1{,}7320508.$$

§ 102. Wynalazłszy połowę cyfer, ile ich mieć chcemy w pierwiastku, można otrzymać resztę przez samo dzielenie. Niech będzie naprzykład liczba 32976; jéy pierwiastek kwadratowy jest 181, z resztą 215; dzieląc tę resztę 215 przez podwoiony pierwiastek 362, i posuwaiąc wieloraz aż do dwóch dziesiątkowych, otrzymamy 0,59; te dziesiętne przyłączyć należy do 181, a stąd wypadnie 181,59, za pierwiastek kwadratowy z 32976, przybliżony do setnéy części.

Dla dowiedzenia prawości tego sposobu, oznaczmy przez N, liczbę zadaną, przez a, pierwiastek naywiększy kwadratowy zawarty w téy liczbie, niech b znaczy to, co przydać należy, aby mieć pierwiastek zupełny liczby podanéy; podług tych mianowań, będziemy mieli

$$N = a^2 + 2ab + b^2,$$

skąd

$$N - a^2 = 2ab + b^2,$$

podzieliwszy obie strony zrównania przez $2a$, znaydziemy

$$\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}.$$

Ten wypadek pokazuie, że piérwsza strona wzięta bydź może za wartość b, w każdym takowym razie, w którym ilość $\frac{b^2}{2a}$, mnieyszą będzie od jedności porządku naymnieyszego w b zawartego. Lecz że kwadrat liczby, nie może mieć więcéy nad dwa razy tyle cyfer, ile się ich znayduie w téy liczbie; wypada zatém, że jeżeli liczba cyfer a, przewyższa podwóyną liczbę cyfer b, ilość $\frac{b^2}{2a}$ będzie podówczas ułamkiem.

W poprzedzaiącym przykładzie, $a = 181$ jednościom czyli 18100 setnym, i ma następnie jedną cyfrą więcéy a niżeli kwadrat z 59 setnych; przeto ułamek $\frac{b^2}{2a}$ staie się na ówczas $\frac{3481}{36200}$, i jest daleko mnieyszy od jedności drugiéy części 59, czyli od jednéy setnéy części piérwszéy.

§ 103. Oto jest co nas przywodzi do sposobu przybliżania pierwiastku kwadratowego liczby, za pomocą zwyczaynych ułamków, przedłużaiąc nieskończenie działanie wyciągania pierwiastków. Wyciąganie bowiem gruntuie się na tém, że a, będąc pierwiastkiem naywiększego kwadratu w N zawartego, koniecznie wymaga, aby b było ułamkiem, a ilość $\frac{b^2}{2a}$ będąc w ówczas daleko od b mnieyszą, zaniedbana bydź może.

Niech będzie naprzykład liczba 2, z któréy mamy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy. Naywiększy kwadrat zawarty w téy liczbie jest 1, po odciągnieniu którego, reszta będzie jedność. Podzieliwszy tę resztę przez podwoiony pierwiastek, znaydziemy $\frac{1}{2}$; wziąwszy ten wieloraz za ilość b, wypadnie za piérwsze przybliżenie pierwiastku, $1 + \frac{1}{2}$ czyli $\frac{3}{2}$. Podniosłszy ten pierwiastek do kwadratu, znaydziemy $\frac{9}{4}$, które odciągnione od 2 czyli od $\frac{8}{4}$, dadzą resztę $-\frac{1}{4}$. W tym przypadku,

wzór $\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$,

stanie się $-\frac{1}{12} = b + \frac{b^2}{2a}$.

Wziąwszy $-\frac{1}{12}$ za b, otrzymamy za drugie przybliżenie $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$; kwadrat z $\frac{17}{12}$ będzie $\frac{289}{144}$ ilością jeszcze przewyższaiącą 2 czyli $\frac{288}{144}$. Podstawiwszy $\frac{17}{12}$ za a, wypadnie stąd

$$-\frac{1}{12 \times 34} = b + \frac{b^2}{2a},$$

co da $b = -\frac{1}{12 \times 34} = -\frac{1}{408}$;

więc trzecie przybliżenie będzie

$$\frac{17}{12} - \frac{1}{12 \times 34} = \frac{17 \times 34 - 1}{408} = \frac{577}{408}.$$

Łatwo jest to działanie podług upodobania przedłużać. W *Dopełnieniu Algebry La Croix* (Complement d'Algèbre par La Croix) są położone wzory wygodnieysze na wyciąganie pierwiastków w ogólności.

§ 104. Na przybliżanie pierwiastku kwadratowego z danego ułamku, piérwsza myśl która się naprzód nawija, podaie sposób, aby przez przybliżenie wyciągać pierwiastek kwadratowy z licznika i mianownika; lecz nieco zastanowiwszy się nad tém, w krótce dostrzeżemy, że można

uniknąć jednego z tych działań, zrobiwszy mianownik zupełnym kwadratem; co jedynie polega na rozmnożeniu obudwóch wyrazów ułamku przez tegoż mianownika. Jeźlibyśmy mieli dany ułamek $\frac{3}{7}$, z którego należałoby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, zamienilibyśmy ten ułamek, na

$$\frac{3\times 7}{7\times 7} = \frac{21}{49},$$

rozmnożywszy oba wyrazy przez 7 mianownika. Pierwiastek licznika tegoż ostatniego ułamku wzięty w liczbach całkowitych jest 4, a mianownika 7, zatém $\frac{4}{7}$ będzie pierwiastkiem ułamku $\frac{3}{7}$, i ten wypadek jest przybliżony do $\frac{1}{7}$.

Chcąc otrzymać większą dokładność, należałoby obrócić ułamek $\frac{3}{7}$ na inny takowy, którego-by mianownik był kwadratem liczby większéy od 7. Mielibyśmy naprzykład pierwiastek szukany różniący się od zupełnego, $\frac{1}{15}$, gdybyśmy obrócili $\frac{3}{7}$ na *225te*, ponieważ 225 jest kwadratem z *15*; stałoby się przeto $\frac{675}{7}$ części *225tych*, czyli $\frac{96}{225}$ mniéy o $\frac{1}{225}$, ponieważ pierwiastek z $\frac{96}{225}$, jest między $\frac{9}{15}$ i $\frac{10}{15}$, ale bliższy piérwszego ułamku a niżeli drugiego, gdyż *96* jest bliższém *100*, aniżeli *81*; mielibyśmy więc $\frac{10}{15}$ czyli $\frac{2}{3}$ pierwiastkiem ze $\frac{4}{7}$, przybliżonym o $\frac{1}{15}$.

Jeżelibyśmy użyli ułamków dziesiątkowych do wyciągania pierwiastku przez przybliżenie z licznika ułamku $\frac{21}{49}$, znaleźlibyśmy *4,583* za pierwiastek przybliżony licznika, i przez pierwiastek nowego mianownika dzielilibyśmy ten wypadek. Posuwaiąc ten wieloraz do trzech dziesiątkowych mielibyśmy *0,655*.

§ 105. Możemy już w rzeczy saméy rozwiązywać wszystkie zrównania, w które wchodzi tylko druga potęga niewiadoméy ilości, skombinowana z ilościami znanémi.

Dosyć jest na ten koniec *zebrać w jednę stronę wszyskie wyrazy maiące tęż samą potęgę, potém uwolnić ją od mnożników podług prawidła §su* 11. *a wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z drugiéy strony zrównania, otrzymamy wartość niewiadoméy*.

Niech służy za przykład, zrównanie

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

Oswobodziwszy je od dzielników, znaydziemy naprzód

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2,$$

Przeniosłszy z drugiéy do piérwszéy strony wyraz $14x^2$, a z piérwszéy do drugiéy *168*, stanie się

$$15x^2 + 14x^2 = 168 + 84$$

czyli $29x^2 = 252$,

$$x^2 = \frac{252}{29},$$

$$x = \sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Dobrze uważyć należy, że cechniąc wyciąganie pierwiastku z ułamku $\frac{252}{29}$ zniżyliśmy znak pierwiastkowy pod liniykę, oddzielaiącą licznik od mianownika. Albowiem gdybyśmy tak napisali $\frac{\sqrt{252}}{29}$, tedy to wyrażenie znaczyłoby wieloraz, który daie podzielony pierwiastek kwadratowy z licznika 252, przez mianownika 29; ten wypadek cale od piérwszego różny, w którym dzielenie powinno się odbyc przed wyciąganiem pierwiastku.

Daymy jeszcze literalne zrównanie

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3;$$

postąpiwszy z niém równie jak z poprzedzaiącém będziemy mieli $ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c}$$

$$x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}};$$

Z tego powodu, tę w pamięci zachowaymy uwagę, że jeżeli chcemy wskazać pierwiastek ilości zwikłanéy, należy przedłużać wyższe ramie znaku pierwiastkowego nad wszystkiémi ilościami.

I tak pierwiastek ilości $4a^2b - 2b^3 + c^3$, napisalibyśmy tak

$$\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3};$$

albo raczéy tak

$$\sqrt{(4a^2b - 2b^3 + c^3)},$$

kładąc pod wyższém ramieniem znaku pierwiastku nawias obeymuiący wszystkie części téy ilości, z któréy mamy wyciągać pierwiastek (35).

W ogólności, każde zrównanie drugiego stopnia w znaczeniu tu zachodzącém, będzie mogło za pomocą przenoszenia jego wyrazów, bydź przywiedzione do wzoru

$$\frac{px^2}{q} = a,$$

gdzie $\frac{p}{q}$ znaczy jakikolwiek spółczynnik ilości x^2; i stąd wyciągniemy

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

$$x = \sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

§ 106. Na liczbach to rozwiązanie jest zupełném, ponieważ na nich, bądź całych bądź ułamkowych wyrażonych ilością $\frac{aq}{p}$, możemy odbywać arytmetyczne działanie przywodzące zawsze do dokładnego wypadku, lub do prawdziwego tyle przybliżone ile zechcemy; lecz daiąc baczność na znaki, jakie przy ilościach bydź mogą, wyciąganie pierwiastku kwadratowego, jeszcze zostawia

jednę wątpliwość, podług którey, każde zrównanie drugiego stopnia dwa rozwiązania dać może, kiedy stopnia piérwszego nie daie jak tylko jedno.

W rzeczy saméy, w zrównaniu ogólném $x^2=25$, wartość na x, jest taką ilością, która podniesiona do kwadratu daie 25; jeżeli ilości uważemy algebraicznie, wartość ta będzie mogła miéć znak albo $+$ albo $-$; gdyż, czy wyrazimy ją przez $+5$, czyli przez -5, równie miéć będziemy wyrażenie jéy kwadratu 25; ponieważ

$$+5\times+5=25, \text{ i } -5\times-5=25:$$

można więc brać

$$x=+5,$$

albo

$$x=-5.$$

Dla téy saméy przyczyny, z ogólnego zrównania $x^2=\frac{aq}{p}$,

będziemy mieli $x=+\sqrt{\frac{aq}{p}}$,

albo $x=-\sqrt{\frac{aq}{p}}$.

Zawarłszy oba te wyrażenia w następuiącém, będzie

$$x=\pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

gdzie podwóyny znak $\pm$ pokazuie, że wartość liczbowa ilości

$$\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

może mieć znak $+$ albo $-$.

Na mocy tego cośmy już uważyli, stanowimy to ogólne prawidło, *że pierwiastkowi kwadratowemu jakiéykolwiek ilości dać należy podwóyny znak* $\pm$. Po takowém położoném prawidle, mogłby się nas kto zapytać, dla czego przed x, niekładziemy podwóynego znaku $\pm$, kiedy x jest pierwiastkiem kwadratowym z x^2? Odpowiedzielibyśmy na to, naprzód z P. Develey (*Algèbre d'Emile T. II.*), że litera x jest położona poprostu bez znaku (to jest ze znakiem $+$), jako cecha ilości niewiadoméy, któréy należy oznaczyć wartość; powtóre, że jeżeli szukamy liczby x, któréyby kwadratem było naprzykład b, to dwa tylko mamy rozwiązania podobne, $x=+\sqrt{b}$, $x=-\sqrt{b}$. Bo gdybyśmy rozwiązuiąc zrównanie $x^2=b$, nawet i napisali $\pm x=\pm\sqrt{b}$, i porządkowali te znaki wszelkiemi podobnémi sposobami, to jest:

$$+x=+\sqrt{b}, \qquad -x=-\sqrt{b},$$
$$+x=-\sqrt{b}, \qquad -x=+\sqrt{b}$$

nie byśmy więcéy nieotrzymali jak piérwéy, ponieważ przemieniwszy znaki w drugiéy stronie zrównania, wpadlibyśmy w każdém wyrażeniu wartości (§ 57), na wyrażenie piérwsze.

§ 107. Wynika jeszcze z uwagi nad znakami, że gdyby druga strona ogólnego zrównania

$$x^2=\frac{aq}{p}$$

była liczbą odiemną, na ówczas zrównanie byłoby niepodobném do rozwiązania, ponieważ kwadrat ilości maiącéy bądź znak $+$, bądź $-$, zawsze jest ze znakiem $+$; zatém nie może się znaydować ani w porządku ilości dodatnych; ani też w po-

rządku ilości odiemnych żadna taka ilość, któréyby kwadrat był odiemnym.

J tę to okoliczność wyrażamy kiedy mówimy, że *pierwiastek ilości odiemnéy jest urojonym.*

Jeżelibyśmy przyszli do zrównania

$$x^2 + 25 = 9,$$

wyprowadzilibyśmy z niego

$$x^2 = 9 - 25,$$

czyli $$x^2 = -16;$$

a że dowiedliśmy wyżéy, że każdéy ilości kwadrat ma znak $+$, przeto żadnéy niemasz liczby, którąby rozmnożona sama przez się wydać mogła -16. Prawda, że -4 mnożone przez $+4$ daie -16, ale te dwie ilości maiące znaki różne uważać się nie mogą za równe, a tém samém ich mnogość nie iest kwadratem. Niżéy ukażą się nam nanowo objaśnienia tego rodzaiu sprzeczności, który rozróżnić należy od położonego w § 58, gdzie go usuwała prosta przemiana znaku niewiadoméy ilości; tu zaś jest znak kwadratu x^2, któryby należało zmienić.

§ 108. Aby zrównanie drugiego stopnia o jedney niewiadoméy zupełném było, powinno w sobie zawiérać trzy wyrazów gatunki, to jest: wyrazy zawiéraiące drugą potęgę niewiadoméy x, powtóre wyrazy z niewiadomą piérwszego stopnia, potrzecie wszystkie inne wyrazy znane: takiemi są zrównania

$$x^2 - 4x = 12, \qquad 4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x.$$

Piérwsze, z niektórych względów jest prostsze od drugiego, ponieważ trzy tylko ma wyrazy, gdzie kwadrat ilości x, jest wzięty dodatnie

i ma za współczynnika jedność. Pod tym ostatnim kształtem kładą się zawsze zrównania drugiego stopnia przed rozwiązaniem, i mogą bydź zawarte w ogólnym następuiącym wzorze:

$$x^2 + px = q,$$

w którym p i q znaczą ilości wiadome bądź dodatne bądź też odiemne.

Widoczna jest, iż każde zrównanie drugiego stopnia przywiedzie się do tego stanu: 1°. przenosząc w jedną stronę zrównania wszystkie wyrazy skombinowane z ilością x (§ 10); 2°. przemieniaiąc znak każdego wyrazu w zrównaniu, ażeby uczynić wyraz x^2 dodatnym, jeźliby wprzódy był odiemnym (§ 57); 3°. dzieląc wszystkie wyrazy zrównania przez mnożnika ilości x^2, gdyby jaki był przy niéy (§ 11), czyli przez jéy dzielnika mnożąc wyrazy inne (§ 12).

Zastosuymy to wszystko do zrównania

$$4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

natenczas przeniosłszy w niém do piérwszéy strony wyrazy z ilością x, będzie

$$4x + 2x - \frac{3}{5}x^2 = 4,$$

czyli $$-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4,$$

przemieniwszy znaki, stanie się

$$\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4,$$

rozmnożywszy przez dzielącą 5, będzie

$$3x^2 - 30x = -20,$$

wydzieliwszy całę zrównanie przez mnożnika 3,

otrzymany $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Porównawszy to zrównanie z ogólnym wzorem, będziemy mieli na ten szczególny przypadek

$$p = -10, \quad q = -\frac{20}{3}.$$

§ 109. Abyśmy przyszli do rozwiązania tak przygotowanych zrównań, odwołaymy się do tego cośmy rozważyli w (§ 34), to jest: że kwadrat z ilości złożoney z dwóch wyrazów, zawiéra kwadrat wyrazu piérwszego, podwóyny wyraz piérwszy mnożony przez drugi, i kwadrat wyrazu drugiego; a następnie że piérwsza strona zrównania

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

w którém a i b, są ilościami znanémi, jest zupełnym kwadratem z $x + a$, czyli że ten kwadrat wynika

z $$(x + a)(x + a) = b.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z piérwszéy strony, a na drugiéy wskazawszy tenże pierwiastek znakiem, otrzymamy

$$x + a = \pm\sqrt{b},$$

zrównanie, które jest tylko piérwszego stopnia ze względu ná ilość niewiadomą x; przeniosłszy wyraz $+a$ na drugą stronę, zrównanie powyższe stanie się

$$x = -a \pm \sqrt{b}$$

drugiego stopnia, które łatwo byłoby rozwiązane, gdybyśmy je do ogólnego zastosowali wzoru

$$x^2 + 2ax + a^2 = b;$$

to jest, gdyby jego piérwsza strona zupełnym była kwadratem.

Lecz piérwsza strona ogólnego zrównania

$$x^2 + px = q,$$

zawiéra już dwa wyrazy, które uważać możemy jako składaiące część kwadratu dwó-wyrazu, to jest: x^2, które będzie kwadratem piérwszego wyrazu x, i px które będzie podwóyną mnogością z piérwszego wyrazu przez drugi, który tém samém bydź niemoże jak tylko połową p, czyli $\frac{1}{2}p$. Aby więc uzupełnić kwadrat z dwówyrazu $x + \frac{1}{2}p$, brakuie jeszcze kwadratu z drugiego wyrazu $\frac{1}{2}p$: lecz ten kwadrat utworzyć można, ponieważ p i $\frac{1}{2}p$, są ilości znane, przeto cokolwiek brakuie stronie piérwszéy do potęgi drugiéy, to na ówczas dopełnimy, kiedy do obudwóch stron zrównania, dodamy ten kwadrat dla zachowania równości; przez co druga strona zostanie zupełnie znaną.

Kwadrat z $\frac{1}{2}p$ jest $\frac{1}{4}p^2$; jego dodanie do obu stron podanego zrównania

$$x^2 + px = q,$$

zamieni je na $$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$$

wypadek taki, którego piérwsza strona jest kwadratem z $x + \frac{1}{2}p$; wyciągnąwszy więc pierwiastek z obudwóch stron zrównania, otrzymamy

$$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \text{ (§ 106)},$$

przeniosłszy $\frac{1}{2}p$ na drugą stronę, będzie

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

skąd następnie wyciągamy

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$$

i $$x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Daliśmy znak $+$, drugiemu wyrazowi $^1/_2 p$ pierwiastku piérwszéy strony podanego zrównania, z przyczyny, że wyraz piérwszy téyże strony był dodatny; lecz w zdarzeniu przeciwném kładź należy znak $-$, ponieważ kwadrat $x^2 - 2ax + a^2$ odpowiada dwówyrazowi $x - a$.

Otrzymamy rozwiązanie jakiegokolwiek zrównania drugiego stopnia, odnosząc zrównanie dane do ogólnego wzoru $x^2 + px = q$; czyli raczéy do podanego zrównania stosuiąc bezpośrednie wszystkie działania, jakie odbywaliśmy na tym ogólnym wzorze, a które wysłowić się może jak następuie:

Uczynić piérwszą stronę podanego zrównania zupełnym kwadratem, dodaiąc do niéy oraz i do drugiéy, kwadrat z połowy ilości danéy mnożącéy piérwszą potęgę niewiadoméy; zrównać potém piérwiastki kwadratowe każdéy strony, na to wzgląd maiąc, że pierwiastek piérwszéy, składa się z niewiadoméy i połowy ilości danéy, która mnoży tę niewiadomą w drugim wyrazie wziętym ze znakiem téy ilości znanéy, i że przed pierwiastkiem z drugiéy strony powinien bydź znak $\pm$, a sam pierwiastek, jeżeli bezpośrednie wyciągnięty bydź niemoże, tedy ma bydź wskazany przez znak $\surd$.

Daymy przykłady.

§ 110. *Znaleśdź taką liczbę, któraby 7 razy wzięta i dodana do jéy kwadratu uczyniła summę 44.?*

Oznaczywszy przez x liczbę szukaną, widocznie będzie zrównanie $x^2 + 7x = 44$.

Aby je rozwiązac, weźmy $\frac{7}{2}$, połowę współczynnika 7, który mnoży x, a podniosłszy go do kwadratu, otrzymamy ilość $\frac{49}{4}$, którę dodawszy do obu stron zrównania jak następuie, będziemy mieli

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4},$$

przywiodłszy drugą stronę do jednego ułamku, wypadnie $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}$.

Pierwiastek piérwszéy strony, według podanego prawidła, jest $x + \frac{7}{2}$, a za pierwiastek strony drugiéy wynaydziemy $\frac{15}{2}$; mamy więc zrównanie

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{15}{2},$$

z którego wyprowadzimy

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{15}{2},$$

czyli $$x = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2} = \frac{8}{2} = 4,$$

$$x = -\frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{22}{2} = -11.$$

Piérwsza wartość na x rozwiązuie pytanie

w myśli jego wysłowienia, ponieważ przez nię otrzymuiemy

$$x^2 = 16$$
$$7x = 28$$
$$\text{summa} \quad x = 44.$$

Co się tycze wartości drugiéy, która jest ze znakiem —, wyraz $7x$, staiąc się $7 \times -11 = -77$, powinien bydź odciągniony od x^2; właśnie jakby wysłowienie rozwiązanego pytania było takowe:

Znaleśdź taką liczbę, któraby 7 razy odciągniona od swoiego kwadratu, dała resztę 44.

Wartość odiemna przemienia w tym razie pytanie sposobem podobnym temu, jakiśmy widzieli w zrównaniach piérwszego stopnia.

Jeżeli tylko co dane wysłowienie ułożemy w zrównanie, otrzymamy

$$x^2 - 7x = 44,$$

które rozwiązuiąc, stanie się

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4}$$
$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{225}{4}$$
$$x - \frac{7}{2} = \pm\frac{15}{2}$$
$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{15}{2}$$
$$x = \frac{22}{2} = 11$$
$$x = \frac{7}{2} - \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Wartość odiemna na x stała się w tym razie dodatną, ponieważ co do słowa zadosyć czyni danemu wysłowieniu; wartość zaś dodatna, jako nieodpowiadaiąca pytaniu, odiemną została.

Stąd się ukazuie, że Algebra w drugim stopniu, zamyka w jednym wzorze dwa pytania maiące między sobą pewne podobieństwo.

§ 111. Niekiedy wysłowienia przywodzące do zrównań drugiego stopnia dwa rozwiązania mieć mogą; następuiące jest w tym przypadku:

Znaleśdź taką liczbę, któréyby kwadrat powiększony 15, równy był téyże liczbie 8 razy wziętéy?

Niech będzie x liczba szukana, zrównanie zadania będzie

$$x^2 + 15 = 8x.$$

Nadawszy temu zrównaniu kształt przepisany w § 108, będziemy mieli

$$x^2 - 8x = -15$$
$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$$
$$x^2 - 8x + 16 = 1$$
$$x - 4 = \pm 1$$
$$x = 4 \pm 1$$
$$x = 5$$
$$x = 3.$$

Mamy więc tu dwie liczby różne 5 i 3, zadość czyniące własności zawartéy w wysłowieniu.

§ 112. Częstokroć także nadarzaią się i takie wysłowienia, które żadnym sposobem rozwiązane bydź niemogą w swoiém rozumieniu ścisłém, a które koniecznie przemienione bydź muszą. Takowym przypadkiem jest ten, w którym dwa pierwiastki zrównania są odiemne, jak z następuiącego widzieć można:

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

To zrównanie, wyrażaiąc że *kwadrat szuka-*

ney liczby powiększony tąż liczbą 5 razy wziętą i jeszcze 6, powinien dać summę równą 2, widocznie nie może się sprawdzić przez dodawanie, jak jest położone, ponieważ 6 już przewyższa 2; i w rzeczy saméy jeżeli rozwiążemy zrównanie, wynaydziemy następnie

$$x^2+5x=-4$$

$$x^2+5x+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{3}{2}$$

$$x=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$$

$$x=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=-4.$$

Znaki — będące przy liczbach 1 i 4, pokazuią, że wyraz $5x$ powinien bydź odciągniony od innych, czyli, że na obie wartości, wysłowienie powinno bydź tak przemienione:

Znaleśdź taką liczbę, któraby 5 razy wzięta i odciągniona od swoiego kwadratu, a potém powiększona 6, dała 2 za wypadek?

Z tego wysłowienia wynika zrównanie

$$x^2-5x+6=2,$$

które daie na x obie wartości dodatne 1 i 4.

§ 113. Niech będzie jeszcze zadanie takie:

Rozdzielić liczbę p *na dwie części z którychby mnogość była równa* q.

Oznaczywszy jednę z tych części literą x, druga wyrazi się przez $p-x$, a ich mnogość będzie $px-x^2$;

będziemy więc mieli zrównanie $px-x^2=q$, czyli przemieniwszy znaki $x^2-px=-q$; rozwiązawszy to ostatnie zrównanie, znaydziemy

$$x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}.$$

Ażeby to pytanie zrobić szczególném, uczyńmy

$$p=10,\quad q=21,$$

będzie

$$x=5\pm\sqrt{25-21},$$
$$x=5\pm 2$$
$$x=7$$
$$x=3,$$

to jest, iż część jedna byłaby 7, a następnie druga $10-7$ czyli 3. Jeżelibyśmy przeciwnie wzieli 3 za x, część druga byłaby $10-3$ czyli 7; przeto ze względu na istotne wysłowienie, pytanie podane niema właściwie mówiąc jak tylko rozwiązanie jedno, ponieważ drugie, jest prostą zmianą porządku między częściami.

Uważne zastanowienie się nad wartością x, uczy nas, że w pytaniu o którém mowa, nie mogą się brać liczby p i q bez rozróżnienia; bo jeżeliby q przewyższało $\frac{p^2}{4}$, czyli kwadrat z ilości $\frac{1}{2}p$, tedy ilość $\frac{p^2}{4}-q$, byłaby odiemną i wpadlibyśmy na cechę, która wskazuie coś niepodobnego w pytaniu, wytkniętą w §*fie* 107.

Gdybyśmy naprzykład wzięli $p=10$ i $q=30$, mielibyśmy $x=5\pm\sqrt{25-30}=5\pm\sqrt{-5}$;

Więc zadanie z témi warunkami byłoby

do rozwiązania niepodobné.

§ 114. Niepodobieństwo w rozwiązaniu pytań prowadzące do urojonych pierwiastków, objawia się przy samym końcu, przeto starać się należy poznać, za pomocą charakterów nayhliżéy odpowiadaiących wysłowieniu, na czém polega sprzeczność czyli niepodobieństwo w rozwiązaniu pytania zachodzące; co nam dokładnie odkryie następuiąca uwaga.

Niech będzie d różnicą dwóch części liczby danéy, jéy część naywiększa, będzie $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, a naymnieysza $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (§ 3); aże dostatecznie jest dowiedzioném w (§§ 29, 30 i 34), że

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}:$$

więc mnogość z dwóch części jakieykolwiek liczby danéy, zawsze będzie mnieyszą od $\frac{p^2}{4}$, czyli od kwadratu z połowy ich summy, kiedy tylko d nie będzie żadne; gdy zaś ta okoliczność ma mieysce, na ówczas każda z tych dwóch części równą będzie $\frac{p}{2}$, przeto nie inna będzie mnogość tylko $\frac{p^2}{4}$. Jest więc niepodobna zgadnąć która z nich jest większą; i to jest przyczyną, że Algebra odpowiadaiąc natenczas sposobem wbrew przeciwnym warunkom, dowodzi przez to samo, że to czego szukamy bydź nie może.

To pokażemy na zrównaniu

$$x^2-px=-q,$$

wynikłém z poprzedzaiącego pytania, które posłuży na te wszystkie drugiego stopnia, gdzie q jest odiemne w drugiéy zrównania stronie, i te są jedynie témi, w których pierwiastki urojone wydarzać się mogą; ponieważ wyraz $\frac{p^2}{4}$ położony pod pierwiastkowym znakiem, zawsze zachowuie znak $+$ jakibykolwiek był przy p. W rzeczy bowiem saméy, gdybyśmy mieli zrównanie

$$x^2+px=-q, \text{ albo } x^2+px+q=0,$$

postrzeglibyśmy naprzód, iż to zrównanie nie będzie mogło mieć żadnego rozwiązania dodatnego, ponieważ pierwsza jego strona same tylko zawiéra wyrazy dodatne; aby zaś wiedzieć czy niewiadoma x mogłaby bydz odiemną, dosyć byłoby zamienić x na $-y$. Niewiadoma y miałaby w ówczas wartości dodatne, które byłyby dane ze zrównania

$$y^2-py+q=0, \text{ albo } y^2-py=-q,$$

całkowicie podobnego położonemu w §ście poprzedzaiącym; a że wartości na x, nie mogą bydz w ówczas rzetelne, kiedy wartości na y są rzetelnémi, zatém stałyby się jeszcze urojonémi w tym razie jeżeliby q przewyższało $\frac{p^2}{4}$.

Okazuie się więc z powyższych uwag, jakim sposobem i dla czego, *nie może miéc jak tylko pierwiastki urojone to zrównanie drugiego stopnia, w którego drugiéy stronie zupełnie wiadomy wyraz jest odiemny i mnieyszy od kwadratu z poło-*

wy współczynnika piérwszéy potęgi ilości niewiadomey.

§ 115. Wyrażenia: $\sqrt{-b}$, $a+\sqrt{-b}$ i w ogólności te wszystkie które zawiéraią pierwiastek kwadratowy ilości odiemnéy, nazywaią się *ilościami urojonémi* (quantités imaginaires) (*). Są to cechy sprzeczności zastępuiące mieysce wartości którąbyśmy otrzymali, gdyby pytanie zadane było do rozwiązania podobném.

Jednak te niezaniedbuią się w rachunku, ponieważ niekiedy się zdarza, iż je kombinuiąc według pewnego prawa, niszczy się to niepodobieństwo, a wypadek stanie się rzetelnym. *W Dopełnieniu Algebry* (Complement d'Algebre par La Croix), takowych przypadków znayda się przykłady.

§ 116. Jak dosyć jest ważną rzeczą, w początkach nabyć dokładnych wiadomości wszystkich *analizy* zdarzeń, które zdaią się występować z granic pospolitych wyobrażeń; tak równie osądziłem za rzecz potrzebna przydać niektóre objaśnienia do tego, cośmy już widzieli w §*ie* 106, względem potrzeby przypuszczania dwóch rozwiązań w zrównaniach drugiego stopnia.

Chcę pokazać, że *jeżeli mamy ilość a, któraby podstawiona za x, czyniła zadość zrównaniu drugiego stopnia* $x^2+px=q$, *a tém samém byłaby już wartością ilości x, jednak ta niewiadoma jeszcze mieć będzie wartość drugą.*

Jeżeli w rzeczy saméy położemy za x, a, wyniknie stąd $a^2+pa=q$; a ponieważ podług założenia, a jest wartością x, zatém q będzie różne ilości a^2+pa: będziemy więc mogli napisac tę ilość za q, w zrównaniu daném, które przez to stanie się $x^2+px=a^2+pa$.

Przeniosłszy wszystkie wyrazy z drugiéy do piérwszéy strony, będzie

$$x^2+px-a^2-pa=o,$$

co tak możemy napisać:

$$x^2-a^2+p(x-a)=o;$$

a z przyczyny, że $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ (§ 34.) wnet postrzeżemy, że piérwsza strona jest podzielną przez $x-a$ i daie zupełny wieloraz, to jest $x+a+p$: mamy więc podług tego

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

Teraz jest widoczna, iż mnogość jest równa zero, gdy jeden którykolwiek z mnożników stanie się zero; więc powinniśmy otrzymać

$$(x-a)(x+a+p)=o,$$

nie tylko wówczas kiedy $x-a=o$, co daie $x=a$; ale jeszcze i wtenczas kiedy $x+a+p=o$, skąd wynika $x=-a-p$.

Jest więc rzecz dowiedziona, że jeżeli a, jest jedną wartością na x, tedy $-a-p$ będzie koniecznie drugą.

Ten wypadek zupełnie się zgadza z dwiema wartościami zawartémi we wzorze

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

ponieważ wziąwszy za a, piérwszą $-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$; znaleźlibyśmy za wartość drugą

(*) Byłoby dokładniéy nazywać *wyrażeniami* lub *cechami urojonémi*, ponieważ to nie są ilości.

$$-a-p=+\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}-p=$$

$$-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

co jest w rzeczy saméy drugim pierwiastkiem.

Wciągu dalszym powrócimy do tych uwag jako stanowiących zawiązkę teoryi ogólnéy zrównań jakiegokolwiek stopnia.

§ 117. Trudność układania zadań w zrównanie, tak drugiego, jako też w ogólności jakichkolwiek stopni, jest taż sama co i w piérwszym stopniu, i zawsze polega na sposobie wywiązania wszystkich wyraźnych warunków zawartych w wysłowieniu, i na ich wyrażeniu za pomocą algebraicznych charakterów. Poprzedaiące pytania żadnéy nam z tego względu niewystawiały trudności, i dosyć było wprawić się tylko na pytaniach piérwszego stopnia; jednak rozwiążemy jeszcze kilka pytań rodzących wiele pożytecznych uwag.

Naięto dwóch robotników pobiéraiących płacy różne; piérwszemu za pewną liczbę dni pracy zapłacono 96 złł: a drugi mniéy sześcią dniami pracuiąc, zarobił tylko 54 złł; jeżeliby zaś drugi przez wszystkie dni pracował, a piérwszy sześć dni próżnował, odebraliby oba w zapłacie równe summy. Pytanie, ile dni każdy z nich pracował, i jaka każdego była dzienna płaca?

To zadanie, które z początku zdaie się zawiérać wiele niewiadomych, łatwo się rozwiązuie za pomocą tylko jednéy, ponieważ inne przez nię bezpośrednie się wyrażaią.

Oznaczywszy przez x liczbę dni pracy piérwszego robotnika, $x-6$ będzie liczbą dni pracy drugiego,

$\frac{96}{x}$ złł. będzie zapłatą dzienną robotnikowi piérwszemu,

$\frac{54}{x-6}$ złł. tąż zapłatą drugiemu;

gdyby ten ostatni pracował przez x dni, zarobiłby

$$x\times\frac{54}{x-6}\text{ czyli }\frac{54x}{x-6},$$

a piérwszy pracuiąc tylko przez $x-6$ dni, niemiałby w nagrodzie tylko

$$(x-6)\frac{96}{x}\text{ czyli }\frac{96(x-6)}{x};$$

więc zrównanie zadania, będzie

$$\frac{54x}{x-6}=\frac{96(x-6)}{x}.$$

Naprzód należy uwolnić to zrównanie od mianowników, i stanie się

$$54x^2=96(x-6)(x-6);$$

a że liczby 54 i 96 są obie rozdzielne przez 6, przeto uprości się ten wypadek i znaydziemy

$$9x^2=16(x-6)(x-6).$$

To ostatnie zrównanie możnaby przygotować do rozwiązania, podług prawidła (§ 108); lecz że tego prawidła zamiarem jest tylko ułatwianie wyciągania pierwiastku z każdéy strony podanego zrównania, zatém to potrzebném tu nie jest, albowiem w tém zrównaniu obie strony ukażą

się w postaci kwadratów; gdyż jest widoczna, że $9x^2$ jest kwadratem z $3x$, a $16(x-6)(x-6)$, jest kwadratem z $4(x-6)$: więc wnet będziemy mieli

$$3x = \pm 4(x-6);$$

skąd wynika $3x = 4x - 24$, czyli $x = 24$

$$3x = -4x + 24, \text{ czyli } x = \frac{24}{7}.$$

Z piérwszego rozwiązania wypada, że piérwszy robotnik pracował przez dni 24, a tém samém zarabiał dnia każdego po $\frac{96}{24}$ złł. czyli po 4 złł; gdy drugi pracował tylko dni 18 i zarabiał na dzień $\frac{54}{18}$ złł. czyli po 3 złote.

Drugie rozwiązanie odpowiada na inne liczbowe pytanie związane ze zrównaniem daném sposobem podobnym uważanemu w §*ie* 111.

§. 118. *Złożono u pewnego Bankiera dwa bilety na jednę osobę; piérwszy na 550 czer. złł. maiące się wypłacić w siedmiu miesiącach; drugi na 720 czer. złł. wypłatnych w miesiącach cztérech; i wyliczono na oba summę 1200 czer: złł. Pytanie, jaki jest roczny procent, podług którego te bilety defalkowane zostały?*

Dla uninkienia ułamków w wyrażeniu procentów na 7 miesięcy i na 4, wyraźmy przez $12x$ procent roczny od summy *100 czer: złł.* a na ówczas procent miesięczny będzie x. To założywszy, otrzymamy wartość piérwszego biletu; ustanawiaiąc proporcyą

$$100 + 7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100 + 7x};$$

wartość biletu drugiego wyniknie takoż z proporcyi

$$100 + 4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100 + 4x}.$$

Dodawszy obie te wartości, zrównanie zadania będzie

$$\frac{55000}{100 + 7x} + \frac{72000}{100 + 4x} = 1200.$$

Aże obie strony mogą się rozdzielić przez 200, przeto będzie

$$\frac{275}{100 + 7x} + \frac{360}{100 + 4x} = 6;$$

potém uwolniwszy je od mianowników, znaydziemy

$$275(100 + 4x) + 360(100 + 7x) = 6(100 + 7x)(100 + 4x)$$

czyli $27500 + 1100x + 36000 + 2520x = 60000 + 6600x + 168x^2$,

co przywiedzie się do

$$168x^2 + 2980x = 3500;$$

rozdzieliwszy wszystko przez 2, otrzymamy

$$84x^2 + 1490x = 1750,$$

$$\text{co daie } x^2 + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}.$$

Porównawszy to zrównanie z ogólnym wzorem

$$x^2 + px = q,$$

stanie się $p = \frac{1490}{84}$, $q = \frac{1750}{84}$;

a wyrażenie $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

zamieni się

na $$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745.745}{84.84}+\frac{1750}{84}}.$$

Naprzód należy przywieśdź do jednego ułamku zostaiące pod pierwiastkowym znakiem: będziemy mieli

$$\frac{745.745+1750.84}{84.84}=\frac{702025}{84.84};$$

a dostrzegłszy, że mianownik tego ułamku jest zupełnym kwadratem, nie pozostaie jak tylko wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z licznika. Lecz gdy zatrzymamy wyciąganie na częściach tysiącznych, otrzymamy 837,869 za pierwiastek z 702025; a dawszy jemu za mianownika 84: wartości na x będą

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837,869}{84}=\frac{92,869}{84}$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837,869}{84}=-\frac{1582,869}{84}.$$

Piérwsza z tych wartości, sama tylko jedna rozwiązuie pytanie dane, według jego wysłowienia. Podzieliwszy jéy mianownika przez 12, otrzymamy

$$12x=\frac{92,869}{7}=13,267;$$

to jest, że procent roczny jest 13,267 od $\frac{o}{o}$.

§ 119. Następuiące pytanie godne jest uwagi ze względu tych okoliczności, jakie wyrażenie niewiadoméy nastręcza.

Rozdzielić liczbę daną na dwie części, których kwadraty byłyby w stosunku danym?

Niech a będzie liczba do rozdzielenia dana,
m stosunek kwadratów dwóch jéy części,
x jedną z tych części;
drugą będzie $a-x$;
a podług wysłowienia pytania, będzie zrównanie

$$\frac{x^2}{(a-x)\,(a-x)}=m.$$

Do jego rozwiązania dwie nastręczaią się drogi: można bowiem, albo je usposobić do nadania kształtu $x^2+px=q$, i potém je rozwiązywać według ogólnego wzoru; albo raczéy korzystaiąc z łatwéy do zrobienia uwagi, że ułamek $\frac{x^2}{(a-x)\,(a-x)}$ jest kwadratem, ponieważ jego licznik i mianownik są kwadratami, naprędce wnosić, że

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m}$$

$$x=\pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Rozwiązuiąc oddzielnie oba zrównania piérwszego stopnia zawarte w tym wzorze, to jest:

$$x=+(a-x)\sqrt{m}$$

$$x=-(a-x)\sqrt{m},$$

wyciągniemy z nich

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$$

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Z piérwszego rozwiązania, druga część danéy liczby, jest

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a + a\sqrt{m} - a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

a dwie części $\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$ i $\frac{a}{1+\sqrt{m}}$

są obie, jak wymaga wysłowienie pytania, mnieysze od liczby daney.

Z drugiego rozwiązania, wypada

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a - a\sqrt{m} + a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}}$$

i na ówczas obie części są

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \text{ i } \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

Że zaś ich znaki są przeciwne, zatém liczba a, nie jest właściwie mówiąc, ich summą, ale różnicą.

Gdy uczynimy $m = 1$, to jest: jeżeli założemy że kwadraty dwóch części szukanych są sobie równe, będzie

$$\sqrt{m} = 1;$$

i piérwsze rozwiązanie da dwie części równe $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$,

wypadek widoczny sam przez się; kiedy rozwiązanie drugie daie obadwa wypadki nieskończone (§ 68), to jest:

$$\frac{-a}{1-1} \text{ czyli } \frac{-a}{o}, \text{ i } \frac{a}{1-1} \text{ czyli } \frac{a}{o};$$

co też bydź powinno, ponieważ nie inaczéy jak tylko uważaiąc dwie ilości za nieskończenie wielkie, względem ich różnicy a, możemy zakładać stosunek ich kwadratów równy jedności.

W rzeczy saméy, daymy dwie ilości x i $x-a$; stosunek ich kwadratów będzie

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2},$$

podzieliwszy obadwa wyrazy tego ułamku przez x^2, otrzymamy

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}};$$

więc rzecz widoczna, że im większą będzie liczba x, tém ułamki $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ będą mnieysze i tém bardziéy ten stosunek przybliży się do $\frac{1}{1}$ czyli do 1.

§ 120. Aby drogę któréyśmy się trzymali porównać ze sposobem ogólnym, rozwiniemy zrównanie

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m;$$

przeto następnie będziemy mieli

$$x^2 = m(a-x)(a-x)$$
$$x^2 = a^2 m - 2amx + mx^2$$
$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2 m$$
$$(1-m)x^2 + 2amx = a^2 m$$
$$x^2 + \frac{2amx}{1-m} = \frac{a^2 m}{1-m},$$

uczyniwszy $p = \frac{2am}{1-m}$, $q = \frac{a^2m}{1-m}$,

wzór ogólny da

$$x = -\frac{am}{1-m} + \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}.$$

Te wartości na x, wydaią się cale różne od wynalezionych wyżéy; jednak przytaczamy tu je dla tego, że przykład którym zaymowaliśmy się, może bydź użytecznym dla pokazania ważności przerobień do jakich rozmaite algebraiczne działania prowadzić mogą w wyrażeniu ilości.

Należy wprzódy przywieśdź do jednakowego mianownika obadwa ułamki zaięte pierwiastkowym znakiem, co się uskuteczni rozmnożywszy przez $1-m$, dwa wyrazy ułamku drugiego, i otrzymamy

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)} =$$

$$\frac{a^2m^2 + a^2m - a^2m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Aże mianownik jest kwadratem, zatém pozostaie tylko wyciągnąć pierwiastek z licznika, i będziemy mieli

$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}} = \frac{\sqrt{a^2m}}{1-m}$; ale wyrażenie $\sqrt{a^2m}$ może się jeszcze uprościć.

Jest to oczywista, że kwadrat mnogości składa się z mnogości kwadratów każdego z mnożników, ponieważ naprzykład, $bcd \times bcd = b^2c^2d^2$, a tém samém i pierwiastek z $b^2c^2d^2$ nieco innego jest tylko mnogość pierwiastów b, c i d, z mnożników b^2, c^2 i d^2. Zastosowawszy tę uwagę do mnogości $\sqrt{(a^2m)}$; postrzeżemy, że jéy pierwiastek, jest mnogością z a pierwiastku z kwadratu a^2, przez $\sqrt{m}$, wskazany pierwiastek z m, czyli że

$$\sqrt{a^2m} = a\sqrt{m}.$$

Z tych rozmaitych przerobień wynika, że

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

czyli raczéy

$$x = -\frac{am - a\sqrt{m}}{1-m}$$

$$x = -\frac{am + a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Chociaż te wyrażenia dosyć są uproszczone, jednak jeszcze takiémi nie są jakie były w §fie poprzedzaiącym; a nawet kiedy szukamy ich sprawdzenia na przypadek, w którym $m = 1$, tedy staią się

$$x = \frac{-a+a}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$x = \frac{-a-a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

W drugiém wyrażeniu natrafiamy na nieskończoność, piérwsze zaś ukazuie ten wzór nieoznaczony $\frac{0}{0}$, którego już widzieliśmy przykłady w §§ 69 i 70; przeto, nim co postanowiémy o je-

go wartości, nie od rzeczy będzie rozważyć, czy nie wpada to na przypadek §*fu* 70; czy nie ma mnożnika spólnego licznikowi i mianownikowi, który w założeniu $m = 1$, przywodzi całe wyrażenie do zero.

Wyrażenie $\frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m}$

przywodzi się do $\frac{a(-m+\sqrt{m})}{1-m} = \frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}$.

Widzimy już, że licznik chyba wtenczas stanie się zero, kiedy mnożnik $\sqrt{m}-m$ jest zero; więc należy szukać czy nie ma on jakiego spólnego mnożnika z mianownikiem $1-m$. Aby uniknąć trudności jaką mógłby przyczynić znak pierwiastku, uczyńmy $\sqrt{m} = n$, skąd wniesiemy biorąc kwadraty, że $m = n^2$: co zamienia

ilości $\sqrt{m}-m$ i $1-m$, na $n-n^2$ i $1-n^2$;

aże $n-n^2 = n(1-n)$ i $1-n^2 = (1-n)(1+n)$ (§ 34);

więc położywszy za n, jego wartość $\sqrt{m}$, będziemy mieli $\sqrt{m}-m = (1-\sqrt{m})\sqrt{m}$

$1-m = (1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})$,

przeto

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m} = \frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} = \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}$$

i mamy wypadek podobny położonemu w § 119.

Podobnież odkrywa się i druga wartość na x, uważaiąc, że

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m} = \frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})} =$$

$\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$, jak §. 119. (*).

Nietrudno jest widzieć, że moglibyśmy uniknąć pierwiastkowych znaków w poprzedzaiących rachunkach, wyraziwszy przez m^2 stosunek kwadratów z dwóch części podaney liczby: na ówczas m, byłoby jéy pierwiastkiem kwadratowym, który zawsze za wiadomy uważać się może, kiedy jego kwadrat jest dany; ale na wstępie niewidzieliśmy celu podobnéy zamiany ilości danych, któréy częstokroć na uproszczenie rachunków algebraiści używaią; z téy więc przyczyny zachęcamy czytelnika, aby rozwiązanie zadania rozpoczynał, kładąc za m, m^2.

O Wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z ilości algebraicznych.

§. 121. Poprzedzaiące pytanie dostatecznie po-

(*) Przykład nad którym zastanawialiśmy się tak długo, odpowiada zadaniu rozwiązanemu przez P. Clairaut w jego Algebrze, którego jest wysłowienie takowe: *Na linii łączącéy dwa jakiekolwiek światła, znaleśdź punkt, który równie oświecaią oba te światła?* Uwolniłem to zadanie od okoliczności fizycznych, jako obcych przedmiotowi tego dzieła, albowiem mogą one rozrywać uwagę, jakiéy nayważnieysze same z siebie algebraiczne okoliczności wymagaią, i dla téy przyczyny bardziéy je wyłuszczyłem jak P. Clairaut.

kaznię, jakim sposobem postępować należy w rozwiązywaniu pytań literalnych, i wykonywaniu przerobień godnych uwagi; jak naprzykład wyrażenia $\sqrt{a^2 m}$ na $a\sqrt{m}$ (str. 187); ponieważ przez takowe przemiany, można przywieśdź do naymnieyszéy jaka tylko bydź może liczby, mnożniki zawarte pod znakiem pierwiastku, i dotyla wyciąganie uprościć, że tylko je na niewielkiéy reszcie wypadnie odbywać.

To przerabianie polega, jakośmy już wyżéy widzieli, *na oddzielném braniu pierwiastków ze wszystkich mnożników, które są kwadratami, i pisaniu tych pierwiastków przed znakiem pierwiastkowym, za mnożniki ilości zostaiących pod znakiem, które kwadratami nie są.*

To prawidło domyślać się daie naprzód, że już umiémy rozpoznawać, czy ilość algebraiczna jest kwadratem, i w tym przypadku wyciągać z niéy pierwiastek; w tym celu rozróżnić należy ilości jedno od wielo-wyrazowych.

§ 122. Z prawidła na wykładniki w mnożeniu, widocznie wynika, że *potęga druga jakieykolwiek ilości ma zawsze za wykładnika podwóyny wykładnik teyże saméy ilości.*

Mamy naprzykład

$a^1 \times a^1 = a^2$, $a^2 \times a^2 = a^4$, $a^3 \times a^3 = a^6$ i. t. d.

Stąd wynika, że *każdy mnożnik, który jest kwadratem, powinien mieć parzystego wykładnika, a pierwiastek tego mnożnika otrzymuiemy pisząc jego literę z wykładnikiem równym połowie wykładnika piérwszego.*

I tak mamy

$\sqrt{a^2} = a^1$ czyli a, $\sqrt{a^4} = a^2$, $\sqrt{a^6} = a^3$ i. t. d

Wyciąganie pierwiastku z mnożników liczbowych odbywa się podług prawideł podanych wprzódy.

Podług tych uwag, mnożniki a^6, b^4, c^2

wyrażenia $\sqrt{64\, a^6 b^4 c^2}$

są kwadratami, i liczba 64 jest kwadratem z 8; więc *wyrażenie podane, ponieważ jest mnogością z mnożników kwadratowych, będzie zatém miało za pierwiastek, mnogość z pierwiastków każdego z tych mnożników* (§ 121);

przeto $\sqrt{64\, a^6 b^4 c^2} = 8\, a^3 b^2 c$.

§ 123. Jeżeli nie zachodzi ta okoliczność, wtenczas *usiłować należy, ażeby podaną mnogość rozłożyć na dwie inne, z którychby jedna zawiérała same mnożniki kwadratowe, a druga nie kwadratowe;* i dla tego oddzielnie nad każdym z tych mnożników zastanowić się należy.

Niech będzie dla przykładu

$$\sqrt{72\, a^4 b^3 c^5}.$$

Rozpoznamy z łatwością, że między dzielnikami liczby 72, znayduią się zupełne kwadraty, to jest: $4, 9$ i 36; wziąwszy z nich naywiększy, otrzymamy

$$72 = 36 \times 2.$$

Mnożnik a^4 jest zupełnym kwadratem, więc kładziemy go na stronie; potém zastanawiamy się nad mnożnikiem b^3, który sam brany nie jest zupełnym kwadratem, ponieważ liczba 3 jest nieparzystą, lecz dostrzegamy, że on rozłożyć się może na dwa inne b^2 i b, z których piérwszy jest kwadratem,

i mamy $b^3 = b^2 . b;$
postrzegamy także, że $c^5 = c^4 . c,$
i toż samo czynilibyśmy ze wszystkiémi literami któreby nieparzystych wykładników miały. Wszystkie te rozkłady daią

$$72\,a^4 b^3 c^5 = 36 . 2\,a^4 b^2 . b\,c^4 . c;$$

a zebrawszy wszystkie mnożniki kwadratowe, będzie

$$36\,a^4 b^2 c^4 \times 2\,b\,c.$$

Naostatek wziąwszy pierwiastek piérwszéy mnogości a drugiéy przez znak pierwiastku wyraziwszy, będziemy mieli

$$\sqrt{72\,a^4 b^3 c^5} = 6\,a^2 b\,c^2 \sqrt{2\,b\,c}.$$

Oto jeszcze kilka przykładów podobnych uproszczeń, które poprzedzaiące rachunki ukażą widocznémi.

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2 \frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} =$$

$$a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2} = 6\sqrt{\frac{25.3ab^2}{49.2}} =$$

$$6\sqrt{\frac{25b^2.3a}{49.2}} = \frac{6.5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2 m^2}{n^2} + \frac{a^2 m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2 m^2 + a^2 mn}{n^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2 + mn}.$$

Uczemy się z piérwszego przykładu, iż można z pod pierwiastkowego znaku wydobyć mianownika ułamków algebraicznych, czyniąc go kwadratem, na mocy tego cośmy już powiedzieli w (§ 104), mówiąc o ułamkach liczbowych.

§ 124. Przeydźmy teraz do wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielowyrazów. Ważna jest przypomnieć w tém mieyscu, że każda ilość jednowyrazowa podniesiona do kwadratu, daie jeden wyraz, oraz że kwadrat dwówyrazu zawsze składa się z trzech części (§ 34).

Mylilibyśmy się bardzo, biorąc za $\sqrt{a^2+b^2}$, ilość dwówyrazową $a+b$, chociaż a oddzielnie brane, jest pierwiastkiem z a^2, i b pierwastkiem z b^2; gdyż kwadrat z $a+b$, który jest $a^2+2ab+b^2$, zawiéra nadto wyraz $+2ab$, który nieznayduie się w wyrażeniu $\sqrt{a^2+b^2}$.

Niech więc będzie ilość tróy-wyrazowa

$$24a^2 b^3 c + 16a^4 c^2 + 9b^6.$$

Abyśmy w tém wyrażeniu wynaleźli trzy części składaiące kwadrat z dwówyrazu, uszykuymy je podług jedney któréykolwiek litery, naprzykład podług a, a stanie się

$$16\,a^4 c^2 + 24\,a^2 b^3 c + 9\,b^6.$$

Jakikolwiek będzie pierwiastek szukany, mniemaymy iż on jest uszykowany podług potęg litery a: kwadrat z jego piérwszego wyrazu powinien koniecznie składać piérwszy wyraz $16a^4c^2$ ilości podanéy; podwóyna mnogość z piérwszego wyrazu przez wyraz drugi, dać powinna wyraz drugi $24\,a^2 b^3 c$ danéy ilości, a nakoniec kwadrat z ostatniego wyrazu pierwiastku, wydać powinien

zupełny ostatni wyraz $9b^6$, ilości podanéy. Podług tych uwag ustanawia się działanie, jak następnie widzieć się daie

$$\begin{array}{l|l} 16a^4c^2+24a^2b^3c+9b^6 & 4a^2c+3b^3 \text{ pierwiastek} \\ -16a^4c^2 & \overline{8a^2c+3b^3} \\ \hline +24a^2b^3c+9b^6 & \\ -24a^2b^3c-9b^6 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Wyciągamy naprzód pierwiastek kwadratowy z piérwszego wyrazu $16a^4c^2$, a wypadek $4a^2c$ (§ 122) jest piérwszym wyrazem pierwiastku, który pisze się na stronie prawéy i na jednéy linii z ilością daną.

Odciągamy od téy ilości kwadrat $16a^4c^2$, z piérwszego wyrazu $4a^2c$ pierwiastku; po czém zostaną tylko dwa wyrazy $24a^2b^3c+9b^6$.

Wyraz $24a^2b^3c$ jest podwóyną mnogością z piérwszego wyrazu pierwiastku $4a^2c$, przez wyraz drugi, zatém otrzymamy ten ostatni, podzieliwszy $24a^2b^3c$ przez $8a^2c$, jako podwojony pierwiastek $4a^2c$, i na swoiém napiszemy go mieyscu obok piérwszego wyrazu pierwiastku; więc wieloraz $3b^3$ jest drugim wyrazem pierwiastku.

Mamy już teraz pierwiastek oznaczony, lecz by on był dokładnym, potrzeba ażeby kwadrat z drugiego wyrazu niszczył $9b^6$, czyli raczéy, ażeby piérwszy wyraz pierwiastku podwoiony $8a^2c$, zwiększony wyrazem drugim $3b^3$, i rozmnożony potém przez tenże wyraz drugi, wydał dwa ostatnie wyrazy kwadratu (§ 91); przeto obok $8a^2c$ piszemy $+3b^3$ i mnożemy $8a^2c+3b^3$ przez $3b^3$, a mnogość stąd powstała odciągniona od dwóch piérwszych wyrazów ilości danéy, gdy nic niezostawuie w reszcie, natenczas wnosimy, że ilość dana jest kwadratem z $4a^2c+3b^3$. Rzecz jest przez się widoczna, że też same rozumowania i też same działania mogą się zastosować do wszystkich ilości z trzech wyrazów złożonych.

§ 125. Jeżeli ilość z któréy chcemy wyciągnąć pierwiastek, więcéy ma niż trzy wyrazy, natenczas już on nie jest kwadratem dwówyrazu; lecz założywszy naprzykład, że jest kwadratem tróywyrazu $m+n+p$, i przez literę l wyraziwszy summę $m+n$ piérwszych jéy dwóch wyrazów, ten tróy-wyraz zamieni się na $l+p$, którego kwadratem będzie $l^2+2pl+p^2$.

Kwadrat l^2 dwówyrazu $m+n$, rozwinięty, da wyrazy $m^2+2mn+n^2$. Przeto, jeżeli uszykuiemy ilość podaną, piérwszy jéy wyraz będzie widocznie kwadratem piérwszego wyrazu pierwiastku, a drugi zawiérać będzie podwóyną mnogość z piérwszego wyrazu pierwiastku przez wyraz drugi tegoż pierwiastku; otrzymamy więc ten ostatni, podzieliwszy drugi wyraz ilości danéy przez podwoiony piérwszy wyraz pierwiastku. Poznawszy dwa piérwsze wyrazy szukanego pierwiastku, dopełnia się kwadrat z tych dwóch wyrazów, wyrażony w tym przykładzie przez l^2, i odciąga się od ilości podanéy; po odciągnieniu zostanie ilość

$$2lp+p^2,$$

która zawiéra podwóyną mnogość z l, czyli z piérwszego dwówyrazu $m+n$, przez resztę pierwiastku, i jeszcze kwadrat z téyże reszty, i razem pokazuie, że należy odbyć też same działania z tym dwówyrazem, jakie odbywaliśmy z piérwszym wyrazem m, pierwiastku.

Niech będzie dla przykładu ilość

$64a^2bc+25a^2b^2-40a^3b+16a^4+64b^2c^2-80ab^2c$;

uszykuymy ją według potęg litery a, i urządźmy działanie jak piérwéy

$$\begin{array}{l|l} 16a^4-40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & 4a^2-5ab+8bc \\ +64a^2bc & \hline 8a^2-5ab \\ -16a^4 & 8a^2-10ab+8bc \\ \hline \text{Ia resz:} -40a^3b+25a^2b^2-80ab^2c+64b^2c^2 & \\ +64a^2bc & \\ +40a^3b-25a^2b^2 & \\ \hline \text{IIa reszta} \quad +64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 & \\ -64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2 & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

To wykonawszy, wyciągamy pierwiastek kwadratowy z piérwszego wyrazu $16a^4$, a otrzymawszy $4a^2$, za piérwszy wyraz szukanego pierwiastku, robimy z niego kwadrat i odciągamy od podanéy ilości.

Podwajamy piérwszy wyraz pierwiastku, a wypadek $8a^2$ napisawszy pod pierwiastkiem, dzielémy przezeń wyraz $-40a^3b$ poczynaiący piérwszą resztę, skąd otrzymawszy $-5ab$ za drugi wyraz pierwiastku, kładziemy go obok $8a^2$ potém wszystko rozmnożywszy przez ten drugi wyraz, odciągamy wypadek od reszty z którą mieliśmy do czynienia.

Takowym sposobem odciągneliśmy od ilości podanéy kwadrat z dwówyrazu $4a^2-5ab$; aże druga reszta zawiéra w sobie podwóyną mnogość z tego dwówyrazu przez wyraz trzeci pierwiastku, i nadto jeszcze kwadrat tegoż wyrazu, przeto podwaiamy ilość $4a^2-5ab$, co daie $8a^2-10ab$, i te wyrazy napisawszy pod wyrazami $8a^2-5ab$,

bierzemy je za dzielącą drugiéy reszty: piérwszy wyraz wielorazu, którym jest $8bc$, jest wyrazem trzecim pierwiastku, piszemy go także obok $8a^2-10ab$, i wszystko mnożemy przez ten wyraz; potém powstałą stąd mnogość odciągamy od reszty z którą odbywało się działanie, i ta reszta zupełnie zniszczoną zostaie; więc ilość podana jest kwadratem z $4a^2-5ab+8bc$.

Łatwo jest teraz ile chcąc powyższe działanie przedłużać, które prócz tego, zupełnie jest podobne wskazanemu na liczbach.

Skład potęg i wyciąganié z nich pierwiastków.

§ 126. Działanie Arytmetyczne od którego zależy rozwiązanie zrównań drugiego stopnia, i przez które od kwadratu powracamy do ilości z któréy on powstał, czyli do pierwiastku kwadratowego, jest tylko przypadkiem szczególnym innego daleko ogólnieyszego, służącego *na wynalezienie liczby któréy jakąkolwiek potęgę znamy*. Wiadomo, że to działanie które nas prowadzi do wypadku oznaczonego wyrazem *pierwiastek*, łącząc do tego cechowanie stopnia, będąc odwrotném względem działania, jakie służy na wynaydowanie potęg, nie inaczéy wyciągnione bydź może jak tylko z roztrząsania okoliczności, w których znayduią się potęgi, jak się to nadarza w dzieleniu względem mnożenia uważaiąc, z któremi działaniami teraznieyszy nasz przedmiot ma swoie prócz tego stosunki, jak dostrzeżemy w krótce.

Przez mnożenie przychodzimy do potęg liczb całkich (24), i widoczna także że potęgi ułamków powstaią, podnosząc ich liczniki i mianowniki do

potęgi daney (96). Nawzajem otrzymuiemy pierwiastek ułamku jakiegobykolwiek był on stopnia, wyciągaiąc pierwiastek z jego licznika i mianownika.

Użycie znaków algebraicznych będąc naywygodnieyszém do wyrażenia tego wszystkiego, co się tycze składu i rozkładu ilosci, rozciąga się naprzód do tworzenia potęg z wyrażeń algebraicznych, gdyż względem wynaydowania potęg liczbowych, to jest dostatecznem, cośmy w §*fie* 24 powiedzieli.

Tablica 7miu pierwszych potęg liczbowych od 1, aż do 9.

1szy	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ga	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3cia	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4ta	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5ta	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6ta	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7ma	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Tę tablicę położyliśmy tu szczególniéy dla pokazania, jak nagle wzrastaią potęgi liczb, im coraz liczby bierzemy większe: ta uwaga jest nayważnieyszą dla dalszego ciągu. W rzeczy saméy widzimy, że 2*ch* potęga 7*ma* jest już 128, a taż sama 9*ciu* wznosi się do 4782969.

Przez co poymuiemy z łatwością, że potęgi ułamków właściwie zwanych, naynagléy maleią,

ponieważ potęgi mianowników staią się coraz bardziéy większémi względem potęg liczników.

Nayprzykład, siódma potęga $\frac{1}{2}$ byłaby $\frac{1}{128}$,

a taż sama $\frac{1}{9}$ byłaby tylko $\frac{1}{4782969}$.

§ 127. Stąd wynika, że w mnogości, każda litera ma za wykładnika summę wykładników jakie w każdym z mnożników miała (26), że *potęga jednowyrazowéy ilości powstaie z rozmnożenia wykładnika każdego z mnożników przez wykładnika potęgi żądaney.*

Naprzykład, trzecią potęgę ilości a^2b^3c otrzymamy, rozmnożywszy wykładniki 2, 3 i 1 liter a, b, c, przez 3 wykładnik potęgi szukanéy, i będziemy mieli $a^6b^9c^3$, a w rzeczy saméy, ta potęga wypada na wyrażenie

$$a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c \times a^2 b^3 c = a^{2.3} b^{3.3} c^{1.3}.$$

Gdyby ilość podana miała współczynniki liczbowe, należałoby także i je podnieść do potęgi żądaney; przeto czwarta potęga z $3ab^2c^5$ jest $81a^4b^8c^{20}$, ponieważ czwartą potęgą 3*ch* jest 81.

§ 128. Co do znaków będących przy jednowyrazowych ilościach, to należy uważać, że *wszystkie potęgi maiące wykładniki parzyste, maią znak +, maiące zaś nieparzyste, tenże sam znak maią co ilość z któréy powstały.* W rzeczy saméy, potęga stopnia parzystego, wynika z rozmnożenia parzystéy liczby mnożników; a znaki — po dwa kombinowane w mnożeniu, zawsze daią na mnogość znak + (§ 31). Przeciwnie, jeżeli liczba mnożników jest nieparzysta, mnogość mieć będzie znak —, gdy i mnożniki tenże sam będą mia-

ły; ponieważ on wypadnie z rozmnożenia mnogości liczby parzystéy mnożników, (a tém samém maiącéy znak dodatny), przez odjemny mnożnik.

§ 129. Aby przyyść od potęgi do ilości z któréy ta potęga powstała, czyli do jéy pierwiastku; dosyć jest wziąć odwrotnie prawidło tylko co dane, to jest: *podzielić wykładnika każdéy litery przez wykładnika oznaczaiącego stopień pierwiastku, jaki wyciągnąć chcemy.*

Takowym sposobem znaydziemy pierwiastek sześcienny czyli trzeciego stopnia, z wyrażenia $a^6 b^9 c^3$, dzieląc przez 3, wykładniki 6, 9 i 3; co da

$$a^2 b^3 c.$$

Jeżeli wyrażenie podane ma współczynnik liczbowy, należy także i z niego wyciągnąć pierwiastek, aby mieć współczynnik dla literalnéy ilości, którą otrzymuiemy za pomocą poprzedzaiącego prawiła. Gdybyśmy naprzykład chcieli wyciągnąć pierwiastek czwartéy potęgi z ilości $81a^4b^8c^{20}$, znaleźlibyśmy na tablicy (§ 126), że 81 jest czwartą potęgą $3ch$; po czém podzieliwszy przez 4, wykładniki liter, mielibyśmy na wypadek $3ab^2c^5$.

W przypadkach, w których nie możemy znaleśdź pierwiastku współczynników liczbowych na tablicy położonéy, wyciągamy go zapomocą sposobów, jakie podamy wkrótce.

§ 130. Jest to widoczna, że wyciąganie piérwiastków, nie może się odbywać na części literalnéy jednowyrazowych ilości, aż chyba w ówczas, kiedy każdy z wykładników jest podzielnym przez wykładnika pierwiastku: w przeciwnym zaś przypadku, musimy tylko wskazać arytmetyczne działanie, jakie potrzeba będzie odbyć, gdy za litery podstawią się liczby.

Używamy jeszcze na ten koniec znaku $\sqrt{}$; lecz dla oznaczenia stopnia pierwiastku kładzie się wykładnik tegoż stopnia, jak na następuiących wyrażeniach widzieć się daie

$$\sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a^2},$$

z których, piérwsze wyraża pierwiastek sześcienny czyli trzeciego stopnia, z a, a drugie pierwiastek piątéy potęgi z a^2.

Wyrażenia ze znakiem $\sqrt{}$, jakiegobykolwiek stopnia, częstokroć uproszczać się mogą, zrobiwszy tę uwagę, że podług (§ 127), *jakakolwiek potęga mnogości zawsze powstaie z mnogości téyże saméy potęgi każdego z mnożników;* a zatém, *że jakikolwiek pierwiastek z mnogości, składa się z mnogości pierwiastków tegoż samego stopnia każdego z mnożników ją składaiących.* Wypada z tego ostatniego prawidła, że *jeżeli ilość pod znakiem pierwiastkowym będąca, takie ma mnożniki które byłyby potęgami zupełnémi tegoż samego stopnia co i pierwiastek, natenczas można będzie brać oddzielnie pierwiastki z tych mnożników, i mnogość z nich powstałą mnożyć przez pierwiastek wskazany mnożników innych.*

Niech naprzykład będzie

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}.$$

Widzimy że $96 = 32 \times 3 = 2^5 . 3$,
że a^5, jest piątą potęgą z a,
że $b^7 = b^5 . b^2$,
że $c^{11} = c^{10} . c$;
mamy przeto $96a^5b^7c^{11} = 2^5a^5b^5c^{10} \times 3b^2c$.

Ponieważ piérwszy mnożnik ma za pierwiastek potęgi piątéy ilość $2abc^2$, stanie się przeto

$$\sqrt[5]{96\,a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}.$$

§ 131. Każda potęga parzysta powinna mieć znak $+$ (§ 128), a żadna ilośc ze znakiem $-$ niemoże bydź potągą parzystego stopnia, i nie ma tegoż stopnia pierwiastku. Skąd wynika, że *każdy znak pierwiastkowy parzystego stopnia, zawiéraiący ilość odiemną, jest wyrażeniem urojoném.*

$$\sqrt[4]{-a},\quad \sqrt[6]{-a^4},\quad b+\sqrt[8]{-ab^7},$$

są wyrażenia urojone.

Niemożna zatém ani dokładnie ani też przez przybliżenie naznaczyć na stopnie, których wykładnik jest parzysty, tylko pierwiastki ilości dodatnych, *i te pierwiastki mieć mogą znak $+$ lub $-$;* ponieważ jak w jednym tak i w drugim przypadku, równie one wydaią ilość podaną ze znakiem $+$, a niewiadomo do którégo z dwóch ona należy.

Nie toż samo jest na stopnie nieparzyste, w których potęgi tenże sam znak maią co ich pierwiastki (§ 128): *należy dawać pierwiastkom tych stopni tenże sam znak, z jakim była potęga;* a w tym przypadku nie znayduią się urojone ilości.

§ 132. Nie od rzeczy jest uważyć, że zastosowanie podanego prawidła w (§ 129), na wyciąganie pierwiastków z jednowyrazów, przez wykładniki ich mnożników, naturalniéy prowadzi do wskazania wygodnieyszémi znakami w rachunku, aniżeli znak $\sqrt{\ }$, pierwiastków których otrzymać algebraicznie nie możemy.

Gdybyśmy naprzykład chcieli wiedzieć, jaki jest pierwiastek trzeciéy potęgi z a^5; należałoby,

podług wzmiankowanego prawidła, podzielić wykładnik 5 przez 3; lecz że dzielenie nie może się całkowicie wykonać, przeto przywodzi nas do liczby ułamkowéy $\frac{5}{3}$; a postać, jaką na ówczas bierze wykładnik wypadku, uczy nas, iż zupełne wyciągnienie pierwiastku z podaney ilości, jest niepodobném: potrzeba więc uważać dwa wyrażenia

$$\sqrt[3]{a^5} \quad \text{i} \quad a^{\frac{5}{3}}$$

za jednoznaczne.

Ostatnie, tę ma przynaymniéy nad piérwsze korzyść, iż razem prowadzi do uproszczenia, jakie ilość $\sqrt[3]{a^5}$ przyiąć jest zdolną: albowiem jeżeli wydobędziemy całość zawartą w ułamku $\frac{5}{3}$, będziemy mieli $1+\frac{2}{3}$, a zatém $a^{\frac{5}{3}} = a^{1+\frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}}$ (25).

Skąd postrzegamy że ilość $a^{\frac{5}{3}}$ jest złożoną z dwóch mnożników, z których piérwszy jest wymiernym, a drugi przywodzi się do $\sqrt[3]{a^2}$.

Wnieślibyśmy toż samo z wyrażenia $\sqrt[3]{a^5}$, pamiętaiąc na § 130, lecz wykładnik ułamkowy wprost nas do tego prowadzi; prócz tego będziemy mieli porę uważania w innych działaniach, jakie pożytki z wykładników ułamkowych wynikaią.

Na moment dosyć jest uważać, że dzielenie wykładników, w przypadku gdzie się wykonać może, odpowiada zupełnie wyciąganiu pierwiastków; przeto i w ówczas gdy jest tylko wskazane, brać się powinno za wyrażenie tegoż działania: skąd wnosimy, że wyrażenia

$$\sqrt[n]{a^m} \text{ i } a^{\frac{m}{n}} \quad \text{są jednoznaczne.}$$

Oto są stałe prawidła na sposoby wyrażania potęg, które przez podobieństwo i rozciągłość prowadzą nas do wyrażeń szczególnych, równie jak w (§ 37) przyszliśmy do wyrażenia $a^0=1$.

§ 133. Z tego powodu uważmy, że prawidło na wykładniki stosowne do dzielenia (§ 36) należycie przystosowane do prawidła na znaki w odciąganiu (§ 20), prowadzi nas także do wyrażeń nowych, pewnego gatunku ułamków.

W rzeczy saméy, podług tych prawideł mamy

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};$$

ale jeżeli wykładnik n mianownika, przewyższa wykładnika m licznika, natenczas wykładnik litery a w drugiéy stronie zrównania będzie odiemny.

Jeżeli naprzykład $m=2$, $n=3$, będzie

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1};$$

aże prócz tego uprościwszy ułamek $\frac{a^2}{a^3}$, znayduiemy $\frac{1}{a}$; przeto wyrażenia $\frac{1}{a}$ i a^{-1} są jednoznaczne.

W ogólności, mamy podług prawidła na wykładniki

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n},$$

i prócz tego $$\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n};$$

więc stąd wypada, że wyrażenia

$\frac{1}{a^n}$ i a^{-n} są jednoznaczne.

I tak jest w rzeczy saméy, albowiem znak — który poprzedza wykładnika n, wzięty w myśli §*fu* 62, wskazuie, że wykładnik podany pochodzi z ułamku którego mianownik zawiéra więcéy n razy mnożnika litery a, aniżeli licznik, i takim ułamkiem jest $\frac{1}{a^n}$; można więc jeźli się zdarzy, namieyscu jednego z tych wyrażeń podstawić drugie.

Podług téy uwagi, ilość $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$ uważana jako

$$a^2b^5\times\frac{1}{c^2}\times\frac{1}{d^3},$$

może się kłaśdź pod postacią $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$;

to jest: *że możemy przenieść do licznika wszystkie mnożniki będące w mianowniku, dawszy ich wykładnikom znak —.*

Nawzaiem, *jeżeli ilość zawiéra mnożniki z wykładnikami odiemnémi, takowe mnożniki kłaśdź możemy w mianowniku, daiąc ich wykładnikom znak +:* takowym sposobem ilość $a^2b^5c^{-2}d^{-3}$,

stanie się $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$.

Skład potęg ilości złożonych.

§. 134. Zaczniemy od uważania, że potęgi ilości z dwóch lub kilku wyrazów złożonych znaczemy, kładąc wykładnika potęgi za nawiasem zamykaiącym te ilości.

Naprzykład, wyrażenie $(4a^2-2ab+5b^2)^3$, znaczy trzecią potęgę ilości $4a^2-2ab+5b^2$. Znaczy

się jeszcze ta potęga, jak następuie

$$\overline{4a^2-2ab+b^2}^{3}.$$

§ 135. Ilości dwówyrazowe są po jednowyrazowych nayprostsze, jednak gdybyśmy chcieli podnosić je do potęg przez mnożenia następne, przyszlibyśmy tym sposobem do wypadków szczególnych na każdą potęgę, jakie mamy na potęgę drugą i trzecią w §*ie* 34 położone; i takową ułożylibyśmy tablicę

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$
$$(x+a)^4 = x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$$

i. t. d.

lecz z tych wypadków nie poielibyśmy łatwo prawa współczynników liczbowych. Zastanowiwszy się nad sposobem postępowania w mnożeniu, poznamy natychmiast że współczynniki liczbowe, które ciągną za sobą równość mnożników stanowiących potęgę, redukcye rodzą, ale nieuskuteczniaiąc tych redukcyy, skład mnogości oczywiściéy się okazuie.

Abyśmy tego dokazali, dosyć jest każdéy z dwówyrazowych ilości, które mamy między sobą mnożyć, dawać drugi wyraz zupełnie różny, biorąc naprzykład

$$x+a,\ x+b,\ x+c,\ x+d,\ \text{i t. d.}$$

Wykonawszy mnożenia, i układaiąc w jednę kolumnę wyrazy maiące tęż samą potęgę litery x, łatwo jest znaleśdź, że

$$(x+a)(x+b) = x^2+ax+ab$$
$$+bx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+ax^2+abx+abc$$
$$+bx^2+acx$$
$$+cx^2+bcx$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd$$
$$+bx^3+acx^2+abdx$$
$$+cx^3+adx^2+acdx$$
$$+dx^3+bcx^2+bcdx$$
$$+bdx^2$$
$$+cdx^2$$

Nieposuwaiąc daléy tych mnogości, można już poznać prawo ich tworzenia się.

Pamiętaymy na to, że wszystkie wyrazy maiące tęż samę potęgę litery x, i położone w jednéy kolumnie, jeden tylko stanowią wyraz; naprzykład, jak

$$ax^3+bx^3+cx^3+dx^3 = (a+b+c+d)x^3.$$

toż i o innych rozumieć mamy.

1°. *W każdéy mnogości znayduie się więcéy wyrazów jednym, od liczby jéy mnożników.*

2°. *Wykładnik litery* x, *w piérwszym wyrazie jest równy liczbie mnożników, i postępuie zmnieyszaiąc się coraz jednością w następnych wyrazach.*

3°. *Naywyższa potęga litery* x, *ma jedność za współczynnika; następuiąca po niéy maiąca wykładnik zmnieyszony o jedność, jest rozmnożona przez summę drugich wyrazów; maiąca zaś w wykładniku mniéy dwiema jednościami, ma za współczyn-*

nika tyle różnych mnogości, ile ich się otrzymuie z mnożenia drugich wyrązów przy x, *biorąc ich po dwa na raz; téy zaś potęgi, któréy wykładnik mnieyszy jest trzema jednościami od naywyższéy, współczynnikiem jest zbiór różnych mnogości otrzymanych z mnożenia po trzy na raz drugich wyrazów, przy* x, *i t. d; naostatek wykładnik ostatniego wyrazu litery* x, *który poczytuie się za równy zeru, składa się z wykładnika potęgi litery tyże saméy, zmnieyszonego tylą jednościami, ile się zawiéra jedności w liczbie mnożników; sam zaś ten ostatni wyraz jest mnogością ze wszystkich drugich wyrazów przy* x.

Łatwo jest widziéć, że skład tych mnogości zawsze jednakowym powinien ulegać prawom, jakabykolwiek była liczba mnożników; jednak prócz analogii, inny jeszcze na to mieć możemy dowód.

§ 136. Widoczna jest naprzód, że każda mnogość takowego gatunku zawiérać powinna potęgi następuiące jedne po drugich litery x, zaczynaiąc od téy, któréy wykładnik jest równy liczbie rozmnożonych mnożników, aż do téy któréy wykładnik jest zero. Dla ogólnego oznaczenia wypadku, wyraźmy tę liczbę mnożników literą m; potęgi litery x następuiące jedne po drugich tak się wyrażaią

$$x^m,\ x^{m-1},\ x^{m-2},\ x^{m-3},\ \text{i t. d.}$$

położemy litery $A, B, C, D \ldots\ldots Y$, za ilosci które te potęgi mnożyć powinny, poczynaniąc od x^{m-1}; lecz że liczba wyrazów zależy od szczególnych wartości danych wykładnikowi, przeto dopóty nieoznaczoną zostanie, aż póki wykładnikowi nie nadamy wartości stałéy; i dla teyże przyczyny nie możemy pisać jak tylko piérwsze i ostatnie wyrazy wyrażenia potęg, wskazuiąc punktami wyrazy pośrednie domyślne. Takowym sposobem, ogólny wzór

$$x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3} \ldots\ldots + Y,$$

wyraża mnogość powstałą z jakieykolwiek liczby m mnożników, $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, i t. d.

Jeżeli ten wzór rozmnożymy przez nowy mnożnik $x+l$, wypadnie stąd

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots\ldots + lY \end{array}\right\}.$$

Oczywista jest rzecz, 1°. że jeżeli A jest summą, m drugich wyrazów a, b, c, d, i t. d, tedy $A+l$ będzie także summą, $m+1$ drugich wyrazow a, b, c, d, i t. d. l; a zatém skład nadany temu współczynnikowi będzie prawdziwym dla mnogości stopnia $m+1$, jeżeli jest prawdziwym dla mnogości stopnia m.

2°. Jeżeli B jest summą mnogości m, z liter a, b, c, d, i t. d. po dwie na raz branych, zatém $B+lA$ wyrażać będzie summę mnogości $m+1$ z liter a, b, c, d, i t. d, l, także po dwie na raz wziętych; że zaś A jest summą piérwszych, więc lA, będzie summą z ich mnogości przez nową ilość w prowadzoną l; więc skład naznaczony będzie prawdziwym na stopień $m+1$, kiedy takimże jest na stopień m.

3°. Jeżeli C jest summą mnogości m, z liter a, b, c, d, i t. d, po trzy na raz branych, $C+lB$ będzie także summą mnogości $m+1$ z liter a, b, c, d, i t. d, l, po 3 wziętych; gdyż lB, podług tego co poprzedziło, wyrażać będzie summę mnogości z liter a, b, c, d, i t. d, po dwie na raz branych, rozmnożonych

przez nową ilość wprowadzoną l: więc skład naznaczony będzie prawdziwy na stopień $m+1$, jeżeli jest takimże samym na stopień m.

Widocznie się tu pokazuie, że takowy sposób rozumowania rozciąga się do wszystkich wyrazów; i że ostatni wyraz lY, będzie mnogością z liczby $m+1$ drugich wyrazów dwówyrazów danych.

Stąd więc wypływa, że mnogość jakieykolwiek liczby m, mnożników dwówyrazowych $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, i t. d. wyraziwszy przez

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+ \text{ i t. d;}$$

zawsze A będzie summą m liter a, b, c, d, i t. d, B summą mnogości z tychże liter po dwie na raz branych, C summą mnogości tychże liter po trzy na raz branych, i tak daléy.

Ażeby prawo tego wyrażenia zawrzéć w jednym wyrazie, uważać je będziemy w porządku nieoznaczonym i wyrazimy ogólnie przez Nx^{m-n}.

Ten wyraz będzie drugim, kiedy uczynimy $n=1$; trzecim, gdy naznaczémy $n=2$, jedynastym, jeżeli położémy $n=10$, i t. d. W przypadku piérwszym litera N będzie summą m, liter a, b, c, d, i t. d; w drugim summą ich mnogości po dwie na raz branych; w trzecim summą ich mnogości po dziesięć na raz wziętych, a w ogólności summą ich mnogości po n razy wziętych.

§ 137. Chcąc zamienić mnogości

$(x+a)\,(x+b)$, $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)$,

$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$, i t. d.

na potęgi z dwówyrazu $x+a$, to jest: na

$(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$, i t. d;

dosyć jest uczynić w rozwinieniu tych mnogości,

$a=b$, $a=b=c$, $a=b=c=d$, i t. d.

W takowym razie wszystkie ilości mnożące też samę potęgę litery x, będą sobie równe, a współczynnik drugiego wyrazu, który w mnogości $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$, jest $a+b+c+d$, zamieni się na $4a$; współczynnik wyrazu trzeciego, który w téyże saméy mnogości jest $ab+ac+ad+bc+bd+cd$, stanie się $6a^2$; skąd łatwo się dostrzegać daie, że współczynniki różnych potęg litery x, odmienią się na jednę potęgę z a, powtórzoną tyle razy, ile jest wyrazów, i oznaczoną liczbą mnożników, jaką te wyrazy zawiéraią. Przeto, współczynnik N mnożący potęgę x^{m-n} w rozwinieniu ogólném, będzie potęgą n z a, czyli a^n, powtórzoną tyle razy, ile złożyć można różnych mnogości biorąc liczbę mnożników n na liczbę m, liter; otóż więc od wynalezienia liczby tych mnogości zależy odkrycie współczynnika dla wyrazu x^{m-n}.

§ 138 Abyśmy przyszli do odkrycia liczby o którą rzecz idzie, należy wprzódy rozróżnić porządki czyli *przemiany* od mnogości. Dwie litery a i b, nie daią jak tylko jednę mnogość, lecz dwa porządki mieć mogą $a\,b$ i $b\,a$; trzy litery a,b,c daiące jednę mnogość abc, sześć porządków przyiąć są zdolne (§ 88), i tak daley.

Celem gruntownieyszego poznania téy rzeczy, przypuśćmy iż mamy tylko 9 liter a, b, c, d, e, f, g, h, i, i chcemy je uporządkować po 7 na raz; oczywista jest rzecz, że obrawszy do upodobania pewny porządek sześciu z liter danych, naprzykład $a\,b\,c\,d\,e\,f$, można do niego przydać następnie, każdą z trzech pozosłałych liter g, h, i i, a tym sposobem będą trzy różne porządki siedmiu liter, to jest:

a b c d e f g, *a b c d e f h*, *a b c d e f i*.

Cośmy powiedzieli względem porządkowania szczególnego sześciu liter, równie to i do wszystkich służy; skąd wnieść należy, że każde uporządkowanie sześciu liter, da trzy porządki z liter siedmiu; to jest tyle, ile pozostanie wprzódy nieużytych liter. Więc jeżeli liczbę porządków czyli przemian sześciu liter wyrazimy przez P, będziemy mieli liczbę porządków liter *7miu*, rozmnożywszy P przez 3 czyli przez $9-6$. Za liczby 9 i 7 położywszy litery m i n, uważaiąc P, jako liczbę różnych porządków, które liczba m liter branych na raz po $n-1$, złożyć może; rozumowanie nasze bynaymniéy się niezmieni, i jeszcze będziemy mieli, na wyrażenie liczby porządków złożonych z n liter,

$$P(m-(n-1)), \text{ czyli } P(m-n+1).$$

Ten wzór luboć niewyraźnie zawiéra jednak wszystkie przypadki szczególne. Ażeby z niego wyprowadzić, naprzykład liczbę porządków z m liter wziętych po dwie na raz, uczyńmy $n=2$, co nam da

$$n-1=1,$$

i będziemy mieli $P=m$;

gdyż na ówczas P równać się będzie liczbie liter wziętych po jednéy na raz; a stąd wyniknie

$$m(m-2+1) \text{ czyli } m(m-1).$$

Położywszy potém $P=m(m-1)$ i $n=3$, znaydziemy, na wyrażenie porządków liczby m liter branych po trzy na raz,

$$m(m-1)(m-3+1)=m(m-1)(m-2).$$

Uczyniwszy $P=m(m-1)(m-2)$ i $n=4$,

otrzymamy $m(m-1)(m-2)(m-3)$,

liczbę porządków wziętych liter po 4 na raz. Stąd więc wniesiemy bliżéy, jakie bydź mogą wyrażenia liczby porządków z tylu liter ile zechemy (*).

§ 139. Ażeby przeyść teraz od liczby porządków n liter, do liczby różnych mnogości, należy poznać liczbę porządków, jaką wydać może jedna mnogość. Na tén koniec uważmy, iż w jednym którymkolwiek porządku, jednę z liter danych położywszy na piérwszém mieyscu, będziemy mogli z innémi wszystkiémi, tyle robić przemian, ile dostarczyć może mnogość z $n-1$ liter. Weźmy za przykład mnogość *a b c d e f g*, złożoną z 7 liter; możemy, zostawuiąc *a* na piérwszem mieyscu,

---

(*) W tych porządkach wyłącza się powtarzanie litery teyże saméy, gdyż badanie które nas zaymuie cale go nie przypuszcza; teorya zaś przemian i kombinacyy służąc za zasadę rachunkowi dowodliwości podaie takie pytania, w których ta okoliczność zachodzić może. Celem wyrachowania skutku, w przykładzie przez nas obranym, dosyć będzie uważyć iż można pisać bezwzględnie każdą z 9 liter *a, b, c, d, e, f, g, h, i*, w ciągu mnogości z 6 liter *a b c d e f*. Namianowawszy więc liczbę porządków takowego gatunku literą P, będziemy mieli 1×9 wyrażenie liczby porządków *7miu* liter. Dla téyże saméy przyczyny, jeżeli P znaczy liczbę porządków m liter wziętych po $n-1$ na raz, tedy wziętych po n na raz, będzie liczba porządków Pm.

To założywszy, liczba porządków m liter branych po 1 na raz, jest widocznie m; branych po dwie na raz, liczba porządków będzie $m\times m$ czyli m^2; branych zaś po trzy na raz będzie $m\times m\times m$ czyli m^3; a nakoniec m^n wyrażać będzie liczbę porządków po n na raz wziętych.

pisać tę mnogość tylą sposobami, ile mnogość z liter sześciu $b\,c\,d\,e\,f\,g$ przyimie porządków; aże każda litera mnogości danéy może bydź piérwszą z kolei; przeto nazwawszy literą Q liczbę porządków, jaką wydać może mnogość z sześciu liter, będziemy mieli $Q \times 7$ za liczbę porządków mnogości złożonéy z *7miu* liter. Skąd wynika, że jeżeli Q znaczy liczbę porządków, jaką wydać może mnogość z $n-1$ liter, to Qn wyrażać będzie liczbę porządków mnogości z n liter.

Wszystkie przypadki szczególne, bez trudności z tego się wyprowadzaią wzoru; uczyniwszy bowiem $n=2$, i uważywszy, jak gdyby jedna tylko litera była dana, będzie wtedy $Q=1$, przeto Qn, stanie się $1\times 2=2$, i wyrazi liczbę porządków mnogości z dwóch liter; wziąwszy potém $Q=1\times 2$ i $n=3$, będziemy mieli $1\times 2\times 3=6$ wyrażenie liczby porządków mnogości z trzech liter; uczyniwszy jeszcze $Q=1\times 2\times 3$ i $n=4$, wyniknie stąd $1\times 2\times 3\times 4$, czyli 24 porządki jakie przyiąć może mnogość ze *4ch* liter, i tak daléy.

§ 140. To co poprzedziło doskonale wyrozumiawszy, łatwo jest widzieć, że podzieliwszy liczbę całkowitą porządków, z n liter, jakich dostarczaią m litery dane, przez liczbę porządków jaką mieć może jedna taż sama mnogość; otrzymamy na wieloraz liczbę mnogości różnych, jakie można złożyć biorąc rozmaitémi sposobami mnożniki n, z liter m. Ta więc liczba wyrazi się przez $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ (*); a podług tego cośmy widzieli

(*) Naywłaściwiéy tu uważyć należy, że czyniąc

w § 137, $\frac{P(m-n+1)}{Qn}\,a^n x^{m-n}$ będzie wyrazem maiącym wyraz x^{m-n} w rozwinieniu dwówyrazu $(x+a)^m$. Widoczna jest rzecz, że wyraz następuiący po tym, który tylkośmy co napisali, wyrażony będzie przez $\frac{P}{Q}a^{n-1}x^{m-n+1}$; gdyż powracaiąc do wyrazu piérwszego, wykładnik litery x, powiększa się jednością, a litery a, o tyle się zmnieysza; prócz tego P i Q są ilościami względnémi do liczby $n-1$.

§ 141. Jeżeli uczynimy $\frac{P}{Q}=M$, dwa wyrazy następuiące jeden po drugim wyżéy wskazane, staną się

$$Ma^{n-1}x^{m-n+1} \quad \text{i} \quad M\frac{(m-n+1)}{n}a^n x^{m-1},$$

wypadkami wskazuiącemi, jakim sposobem każdy wyraz rozwinienia dwówyrazu $(x+a)^m$, powstaie z tego który go poprzedza.

I tak, z piérwszego wyrazu, który jest x^m, przychodzimy do drugiego czyniąc $n=1$: mamy $M=1$, ponieważ x^m ma za współczynnika jedność; skąd wynika za wyraz drugi $\frac{1\times m}{1}a\,x^{m-1}$,

następnie $n=2$, $n=3$; $n=4$, i t. d. Wzór $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ stanie się

$\frac{m(m-1)}{1.2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$, i t. d

są to liczby względnie wyrażaiące, ile zrobić można kombinacyy z liczby m jakichkolwiek rzeczy, biorąc one po *dwie na raz*, po *trzy* lub po *cztéry*, i t. d.

czyli $\frac{m}{1} a x^{m-1}$. Ażeby przeyść do wyrazu trzeciego, czynimy $M = \frac{m}{1}$ i $n = 2$, co daie $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$. Czwarty wyraz otrzymuie się zakładaiąc że $M = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ i $n = 3$; co przywodzi do $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$, i tak daléy; skąd powstaie wzór

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{i t. d,}$$

który przemienić możemy na to prawidło:

Ażeby z danego wyrazu otrzymać po nim następuiący, mnoży się współczynnik liczbowy przez wykładnik litery x, *a mnogość stąd powstała rozdzielona przez liczbę znaczącą porządek tego wyrazu, da współczynik dla niego; potém wykładnik litery* a *powiększa się jednością i o tyleż zmnieysza się wykładnik litery* x.

Chociaż liczba wyrazów takowego wzoru nie może bydź stałą, jednak niepowinna żadna pozostawać wątpliwość względem prawa, podług jakiego w nim postępuią wyrazy, jakkolwiek je przypuścimy od piérwszego odległe; i tak widzimy, że

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} a^n x^{m-n}$$

znaczy ten wyraz, który ma ich przed sobą liczbę n.

Ten ostatni wzór nazywa się *wyrazem ogólnym*, szeregu

$$x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \text{it. d,}$$

gdyż czyniąc następnie

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, i. t. d

da nam wszystkie wyrazy tegoż szeregu.

§. 142. Zastosuymy teraz prawidło §*fu* poprzedzaiącego do rozwinienia potęgi z dwówyrazu $(x+a)^5$. Ponieważ piérwszy wyraz jest x^5 czyli $a^0 x^5$ (§ 37), zatém

drugi będzie $\frac{5}{1} a^1 x^4$ czyli $5ax^4$,

trzeci $\frac{5 \times 4}{2} a^2 x^3$ czyli $10a^2x^3$,

czwarty $\frac{10 \times 3}{3} a^3 x^2$ czyli $10a^3x^2$,

piąty $\frac{10 \times 2}{4} a^4 x$ czyli $5a^4x$,

szósty $\frac{5 \times 1}{5} a^5 x^0$ czyli a^5.

Tu zatrzymuie się rozwinienie, ponieważ dla otrzymania następuiącego wyrazu, należałoby mnożyć przez wykładnik litery x zawartéy w wyrazie szóstym, aże ten wykładnik jest zero, przeto następuiących wyrazów niemasz.

Toż samo także i wzór pokazuie; gdyż siódmy wyraz maiąc za współczynnika liczbowego,

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

zawiéra w saméy rzeczy mnożnik $m-5$, który

staie się $5-5$ czyli o; że zaś ten mnożnik we wszystkie wyrazy następuiące wchodzi, przeto przywodzi je wszystkie do zero.

Dodawszy wszystkie wyrazy tylko co otrzymane, będziemy mieli

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

§ 143. Z wzoru podanego w §*ie* 141, wyprowadzilibyśmy w ogólności rozwinienie jakieykolwiek potęgi jakiegokolwiek bądź dwówyrazu. Jeżelibyśmy naprzykład chcieli otrzymać rozwinienie szóstéy potęgi z ilości $2x^3-5a^3$, dosyć byłoby położyć we wzorze za potęgi z x i a, odpowiedne z $2x^3$ i $-5a^3$; gdyż uczyniwszy

$$2x^3=x' \text{ i } -5a^3=a',$$

będziemy mieli

$$(2x^3-5a^3)^6=(x'+a')^6=x'^6+6a'x'^5+15a'^2x'^4+20a'^3x'^3+15a'^4x'^2+6a'^5x'+a'^6 \quad (141).$$

W tém rozwinieniu, za x' i a' położywszy ilości, które te litery znaczą, otrzymamy

$$(2x^3)^6+6(-5a^3)(2x^3)^5+15(-5a^3)^2(2x^3)^4+20(-5a^3)^3(2x^3)^3+15(-5a^3)^4(2x^3)^2+6(-5a^3)^5(2x^3)+(-5a^3)^6.$$

czyli $64x^{18}-960a^3x^{15}+6000a^6x^{12}-20000a^9x^9+37500a^{12}x^6-37500a^{15}x^3+15625a^{18}$.

Wyrazy tego rozwinienia idą na przemian dodatne i odiemne; skąd się pokazuie, że zawsze toż samo będzie, jak tylko drugi wyraz dwówyrazu ilości daney mieć będzie znak $-$.

§ 144. Wzór §*u* 141, przygotuymy takim

sposobém, któryby ułatwiał jego zastosowanie do przypadków poprzedzaiącemu podobnych. Uważywszy, że

$$x^{m-1}=\frac{x^m}{x}, x^{m-2}=\frac{x^m}{x^2}, x^{m-3}=\frac{x^m}{x^3}, \text{ i t. d.}$$

możemy ogólny wzór tak napisać

$$x^m+\frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}x^m+\text{i t. d.}$$

co wypada na

$$x^m\left\{1+\frac{m}{1}\frac{a}{x}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{a^2}{x^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3}+\&\right\},$$

odosobniwszy spólny mnożnik x^m.

Ażebyśmy mogli rachować za pomocą tego wzoru, należy 1*od:* złożyć szereg liczb $\frac{m}{1}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}$, i t. d; 2*re:* mnożyć naprzód piérwszą przez ułamek $\frac{a}{x}$, potém wypadek przez drugą, i jeszcze przez ułamek $\frac{a}{x}$, daléy jeszcze wypadek przez trzecią i przez ułamek $\frac{a}{x}$ i tak daléy; naostatek zebrać wszystkie wyrazy, dodać jedność i wszystko rozmnożyć przez mnożnik x^m. W przykładzie $(2x^3-5a^3)^6$, należy pisać $(2x^3)^6$ na mieyscu x^m, i $-\frac{5a^3}{2x^3}$ na mieyscu $\frac{a}{x}$. Zostawuiemy

czytelnikowi wykonanie tego rachunku (*).

§ 145. Z rozwinienia potęgi dwówyrazu, łatwo się wyprowadza rozwinienie potęgi jakiego kolwiek wielowyrazu, jak się okaże na ilości tróywyrazowéy $a+b+c$, którą podniesiemy do potęgi trzeciéy.

Uczyńmy naprzód $b+c=m$, a otrzymamy

$$(a+b+c)^3=(a+m)^3=a^3+3a^2m+3am^2+m^3,$$

położywszy potém za m, dwówyraz $b+c$, będziemy mieli

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

Teraz pozostaie tylko rozwinąć potęgi dwówyrazu $b+c$ i z témi potęgami odbyć mnożenia wskazane, co da

$$\begin{aligned} &a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &+3a^2c+6abc+3b^2c\\ &+3ac^2+3bc^2\\ &+c^3. \end{aligned}$$

O *Wyciąganiu pierwiastków z ilości złożonych.*

§ 146. Wyłożywszy skład potęg ilości złożonych, przeydzmy teraz do wyciągania z nich pierwiastków, i zaczniymy od pierwiastku sześciennego z liczb.

Ażeby odbywać działanie wyciągania pierwiastku sześciennego z liczb, należy wprzódy poznać sześciany liczb piérwszych; to jest, z

1	2	3	4	5	6	7	8	9.
1	8	27	64	125	216	343	512	729

że zaś sześcian z 10 jest 1000, zatém każda liczba złożona z trzech cyfer, jest tylko sześcianem z liczby piérwszéy.

Skład sześcianu liczby złożonéy z dwóch cyfer odbywa się sposobem podobnym podanemu na podnoszenie liczb do kwadratów; gdyż rozłożywszy tę liczbę na dziesiątki i jedności, i oznaczywszy potém piérwszą przez a, a drugę przez b, wypadnie

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

co pokazuie, że *sześcian, czyli trzecia potęga liczby złożonéy z dziesiątków i jedności, zawiéra cztéry części, to jest: sześcian dziesiątków, potróyny kwadrat dziesiątków mnożony przez jedności, trzy razy wzięte dziesiątki mnożone przez kwadrat jedności, nakoniec sześcian jedności.*

Niech będzie liczba 47, któréy mamy znaleśdź potęgę trzecią; uczyniwszy $a=4$ dziesiątkom czyli 40, $b=7$ jednościom, znaydziemy

$$\begin{aligned} a^3&=64000\\ 3a^2b&=33600\\ 3ab^2&=5880\\ b^3&=343 \end{aligned}$$

Sześcian całki $103823=47\times47\times47$.

Ażeby teraz powrócić od sześcianu 103823, do jego pierwiastku 47, uważemy naprzód, że 64000, sześcian ze 4 dziesiątków, nie zawiéra w sobie liczb albo cyfer znaczących niżéy ty-

(*) Wzór rozwinienia dwówyrazu $(x+a)^m$ służy na wszystkie wartości wykładnika m, i równie się stosuie do przypadku, w którymby ten wykładnik był ułamkowym lub odiemnym. Ta nayważnieysza własność, dowiedziona jest w *Dopełnieniu tey Algebry* (Complément d'Algèbre).

siąca; możemy więc, w wynaydowaniu sześcianu z dziesiątków, nie dawać baczności na sta, dziesiątki i jedności liczby *103823*. Poczém ułożywszy działanie jak do wyciągania pierwiastku kwadratowego, trzy piérwsze cyfry ze strony lewéy oddzielimy kréską; naywiększy sześcian zawarty w *103*, będzie sześcianem dziesiątków. Zobaczémy na poprzedzaiącéy tablicy, że tym sześcianem jest *64*, a jego pierwiastkiem *4*; więc *4* położémy na mieyscu przeznaczoném dla pierwiastku. Odciągniemy potém *64* od *103*, i do reszty *39* dołączémy trzy ostatnie cyfry. Całkowita reszta *39823*, zawiérać jeszcze będzie trzy części sześcianu, to jest: potróyny kwadrat dziesiątków mnożony przez jedności, czyli $3a^2b$; trzy razy wzięte dziesiątki mnożone przez kwadrat jedności, czyli $3ab^2$; i sześcian jedności b^3. Gdyby wiadoma była wartość mnogości $3a^2b$, jak już poznaliśmy dziesiątki a, podzielilibyśmy tę mnogość przez $3a^2$, i otrzymali jedności b; lecz chociaż nieznamy mnogości $3a^2b$, nietayno jest jednak, że ona nie powinna miéć żadnéy cyfry znaczącéy niższy porządek od set, gdyż zawiéra mnożnik a^2, który wyraza kwadrat dziesiątków; a zatém że znaydować się niepowinna jak tylko w części *398*, pozostałéy z liczby *39823*, po odłączeniu od niéy dziesiątków i jedności, w któréy to liczbie zawiéraią się prócz tego, mnogość $3ab^2$, z potróynych dziesiątków przez kwadrat jedności, i sześcian b^3 z jedności.

103,823	*47*
64	*48*
398,23	

Podzieliwszy *398* przez *48*, które w przykładzie podanym wyrażaią potróyny kwadrat dziesiątków, $3a^2$ czyli 3×16, znaydziemy na wieloraz *8*. Lecz to co poprzedziło uczy nas, że nie-

powinniśmy przybiérać téy cyfry za jedności szukanego pierwiastku, wprzódy jéy niesprawdziwszy, to jest, nie złożywszy trzech ostatnich części sześcianu, które reszta *39823* zawiérać powinna. Uczyniwszy $b=8$, znaydziemy

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = 7680$$
$$b^3 = 512$$

Zbiór tych części ..... *46592*; przewyższaiąc *39823*, dowodzi, iż należy zmnieyszyć liczbę *8* wziętą za jedności. Tymże samym sposobem probuiąc *7*, postrzeżemy, że zadosyć warunkom czyni, a przeto *47* jest pierwiastkiem szukanym.

Zamiast sprawdzenia jakieśmy odbywali, używa się pospoliciéy podnoszenia téy liczby do sześcianu, którą wyrażaią dwie znalezione cyfry, mnożąc ją przez jéy kwadrat. Odbywszy to działanie na liczbie *48*, znaydziemy

$$48\times48\times48 = 110592,$$

aże ta liczba jest większą od podanéy *103823*, pokazuie się zatém, że cyfra *8* jest nadto wielka.

§ 147. To cośmy mieli w praktyce na przykładzie tylko co przytoczonym, równie powinno się wykonywać i na wszystkich liczbach, więcéy jak trzy, a mniéy jak 7 cyframi wyrażonych. Oddzieliwszy trzy piérwsze cyfry na stronę prawą, szukamy naywiększego sześcianu zawartego w części pozostałéy na stronie lewéy; wynaleziony jego pierwiastek kładziemy na mieyscu przeznaczoném; odciągamy ten sześcian od części liczby zadanéy z którą mieliśmy do czynienia; do reszty, przypisawszy trzy ostatnie cyfry i oddzieliwszy dziesiątki z jednościami, dzielimy pozostałą resztę

ze strony lewéy, przez potróyny kwadrat znalezionych dziesiątków; lecz przed napisaniem wielorazu za pierwiastek, odbywamy sprawdzenie podnosząc do sześcianu liczbę która go wyraża z dołączonémi już znaiomémi dziesiątkami. Jeżeli wypadek z takiego działania jest nadto wielki, zmnieyszamy cyfrę jedności i przystępniemy do nowego sprawdzania; co się dopóty czyni, aż póki nienatrafimy na wypadek równy zadanéy liczbie, lub od niéy mnieyszy, jeźli ona zupełnym sześcianem nie jest. W tym przypadku znaleziony pierwiastek, jest tylko pierwiastkiem naywiększego sześcianu, jaki się zawiéra w zadanéy liczbie. Ponieważ częstokroć bywa, że bardzo znaczna pozostaie reszta, uważmy przeto jak rozpoznać można, czy wzięta cyfra jedności nie jest nadto mała.

Sześcian z $a+b$, jeżeli uczynimy $b=1$, zamieni się na sześcian z $a+1$, i będziemy mieli na jego wyrażenie

$$a^3+3a^2+3a+1$$

ilość przewyższaiącą a^3 czyli sześcian z a, ilością

$$3a^2+3a+1.$$

Skąd wypada, że *ile razy reszta po wyciągnieniu pierwiastku sześciennego, będzie mnieysza od potróynego kwadratu pierwiastku zwiększonego potróynym pierwiastkiem i jeszcze jednością, tyle razy wzięty pierwiastek nie będzie za mały.*

§ 148. Chcąc wyciągnąć pierwiastek sześcienny z *105823817*, uważemy naprzód, że jakakolwiek będzie liczba cyfer tego pierwiastku, rozłożywszy ją na jedności i dziesiątki, sześcian dziesiątków nie będzie stanowił części trzech ostatnich cyfer ku prawéy stronie, a tém samém powinien

się znaydować w *105823*. Lecz naywiększy sześcian zawarty w *105823*, będzie miał więcéy jak jedną cyfrę w swoim pierwiastku, który przeto będzie się mógł rozłożyć na jedności i dziesiątki, a sześcian tych dziesiątków nieprzechodząc tysięcy, nie będzie mógł składać części tych ostatnich cyfer *823*. Oddzieliwszy te cyfry, jeżeliby pozostawało więcéy jak trzy cyfry ku stronie lewéy, należałoby powtórzyć poprzedzaiące rozumowanie, i przyszlibyśmy tym sposobem do wyznaczenia mieysca dla sześcianu jedności porządku naywyższego szukanego pierwiastku, przedzielaiąc podaną liczbę na oddziały po trzy cyfry, idąc od prawéy ku lewéy stronie, z których ostatni mniéy niż trzy cyfry mieć może.

To założywszy i przygotowawszy działanie jak zazwyczay, szukamy naprzód, podług prawideł *&fu* poprzedzaiącego, pierwiastku sześciennego dwóch piérwszych oddziałów ze strony lewéy, i znayduiemy za wypadek *47*; odciągamy sześcian téy liczby od dwóch oddziałów, w których się on zawiéra; do reszty *2000*, dołączamy następuiący oddział *817*, a liczba *2000817*, zawiérać powinna trzy ostatnie części sześcianu téy liczby, któréy *47* wyraża dziesiątki, a któréy jedności jeszcze szukamy; znaydziemy więc te jedności, jak w zmiankowanym przykładzie, odłączaiąc dwie ostatnie cyfry ze strony prawéy od reszty, i część pozostałą z lewéy strony dzieląc przez *6627*, potróyny kwadrat ze *47*. Sprawdziwszy potém wieloraz *3*, podnosząc *473* do sześcianu, znaydziemy w wypa-

105,823,817	*473*
64	*48*
41 8,23	*6627*
105 8 23	
2 000 8,17	
105 8 23 8 17	
000 0 00 0 00	

dku też samę podaną liczbę, ponieważ ona jest doskonałym sześcianem.

Tłumaczenie dopiéro położonego przykładu, mieysce ogólnego prawidła zastąpić może. Jeżeliby liczba podana miała jeszcze jeden oddział, daléy przedłużalibyśmy działanie, jak się postępowało z oddziałem trzecim. Gdyby liczba leżąca na stronie lewéy nie mieściła w sobie téy, przez którą ma bydź dzielona, natenczas położyć należy zero w pierwiastku, potém zniżyć oddział następuiący, i złączywszy go z resztą, odbywać na nim działanie, jak się na poprzedzaiących odbywało.

§ 149. Ponieważ *sześcian ułamku otrzymuie się z rozmnożenia tegoż ułamku przez jego kwadrat, czyli co jedno znaczy, podnosząc do sześcidnu jego licznik i mianownik;* wypada stąd, *iż odkryiemy pierwiastek ułamku, wyciągaiąc osobno pierwiastek z nowego licznika i z nowego mianownika.* Naprzykład, sześcian z $\frac{5}{6}$ jest $\frac{125}{216}$; wziąwszy pierwiastek sześcienny ze *125* i z *216*, znaydziemy napowrót $\frac{5}{6}$.

Taki jest sposób, którego należy się trzymać w wyciąganiu pierwiastku sześciennego z ułamku, gdy licznik i mianownik są oba zupełnémi sześcianami; lecz jeżeli ten nie zachodzi warunek, natenczas zmnieysza się trudność wyciągania pierwiastku z mianownika, mnożąc przez jego kwadrat oba wyrazy podanego ułamku; gdyż mianownik wynikły z takowego działania, znaydzie się sześcianem pierwotnego mianownika, i pozostanie tylko wyciąganie pierwiastku z licznika. Gdyby naprzykład dany był ułamek $\frac{3}{5}$, tedy rozmnożywszy

oba jego wyrazy przez 25, kwadrat mianownika, mielibyśmy

$$\frac{75}{5\times5\times5};$$

pierwiastek mianownika jest *5*: co do pierwiastku z *75*, ten się znayduie między *4* a *5*. Przestawszy na *4*, będziemy mieli $\frac{4}{5}$ przybliżonym pierwiastkiem sześciennym z $\frac{3}{5}$. Chcąc mieć większą dokładność należy wyciągnąć pierwiastek przybliżony z *75*, za pomocą sposobów, które podamy niżéy.

Jeżeli mianownik danego ułamku będzie zupełnym kwadratem, dosyć jest rozmnożyć oba wyrazy ułamku przez pierwiastek kwadratowy z mianownika. Przeto, ażeby znaleśdź pierwiastek sześcienny z $\frac{4}{9}$, mnożémy oba wyrazy przez *3*, pierwiastek kwadratowy z *9*, i otrzymuiemy

$$\frac{12}{3\times3\times3};$$

wziąwszy pierwiastek *8* naywiększego sześcianu zawartego w *12*, wypadnie $\frac{2}{3}$ za pierwiastek szukany przybliżony.

§ 150. Wynika z tego cośmy już dowiedli w §*ie* 97, że sześcienny pierwiastek liczby, która nie jest zupełnym sześcianem, nie może się dokładnie przez żaden ułamek wyrazić, jakkolwiek wielki byłby jego mianownik: jest to więc ilość niewymierna, ale różnego gatunku od kwadratowego pierwiastku; gdyż nayczęściéy niepodobna wyrażać jedno przez drugie.

§ 151. Możnaby otrzymywać pierwiastek sześcienny przybliżony za pomocą zwyczaynych ułamków, używszy sposobu podobnego temu, jaki poznali-

śmy w § 103, na wyciąganie pierwiastku kwadratowego przez przybliżenie; lecz nie będziemy się tu nad nim zastanawiać, gdyż dosyć jest do poznania łatwy i poniekąd mało wygodny.

Naylepszy jest sposób używać na ten koniec zwyczaynych ułamków, polega on na wyciąganiu pierwiastku w ułamkach pewnego danego gatunku. Naprzykład, ażeby otrzymać pierwiastek sześcienny z 22, przynaymniéy przybliżony o piątą część jedhości; uważémy, że sześcian z $\frac{1}{5}$ jest $\frac{1}{125}$ i obrócimy 22 na ułamek $\frac{2750}{125}$: pierwiastek z 2750, wzięty w liczbie całéy, jest 14, przeto będzie $\frac{14}{5}$ czyli $3+\frac{4}{5}$ za pierwiastek sześcienny z 22.

§ 152. Sposób nayużywańszy wyciągania pierwiastku sześciennego z liczby przez przybliżenie, zależy na jéy zamienieniu na ułamek dziesiętny, lecz należy uważać przytém, iż to inaczéy bydź nie może, aż chyba gdy liczba dana zamieni się na tysiączne lub dziesięcio-tysiączne i t d; z przyczyny, że dziesiętne staią się tysiącznémi, gdy się podnoszą do potęgi trzeciéy, setne zaś zamieniaią się na milionowe, a w ogólności *liczba dziesiątkowych cyfer zawarta w sześcianie, jest téy potróyną jaką zawiéra pierwiastek.* Stąd więc należy wnosić, że w ciągu podanéy liczby kładźć należy 3 razy zer tyle, ile w pierwiastku chcemy mieć dziesiętnych cyfer. Odbędziemy potém wyciąganie podług prawideł wyłożonych wyżéy, i w wypadku oddzielimy liczbę żądaną cyfer dziesiętnych.

Gdybyśmy naprzykład chcieli mieć pierwiastek sześcienny z 327, przybliżony naymniéy do części setnych; napisalibyśmy 6 zer w ciągu téy liczby, i podług danych prawideł wyciągalibyśmy pierwiastek z 327000000.

Potém oddzielilibyśmy dziesiątkowe części z prawéy strony wypadku, i mielibyśmy 6,88; lecz dokładniéy będzie wziąć 6,89, ponieważ sześcian téy liczby, chociaż nieco większy od 327, jednak bardziéy się do niéy zbliża, aniżeli sześcian, z 6,88.

Działanie	
327,000,000	688
216	108
1110.00	13872
314432	
125 680,00	
3256 606 72	
13 393 28	

Jeżeliby liczba podana zawiérała w sobie cyfry dziesiętne, należałoby przed zaczęciem wyciągania pierwiastku położyć z prawéy jéy strony tyle zer, ileby koniecznie potrzeba było, ażeby liczbę dziesiętnych cyfer uczynić wielokrotną z 3. Niech będzie dla przykładu 0,07, napiszemy 0,070, a wyciągnąwszy pierwiastek z 70 tysiącznych, znaydziemy 0,4. Chcąc zaś pomknąć dokładność aż do setnych, przydać jeszcze należy trzy zera, co uczyni 0,070000. Pierwiastek z 70000 wyciągnięty w liczbach całych jest 41, a zatém pierwiastkiem z liczby 0,07 przybliżonym w częściach setnych będzie 0,41.

§ 153. Wyłożywszy sposoby wyciągania pierwiastu kwadratowego i sześciennego z liczb, zastanowimy się nad tém, jak wzór dwówyrazu prowadzi nas do otrzymywania pierwiastku jakiegokolwiek stopnia; lecz wprzód nim wyłożémy ten sposób, zrobimy niektore uwagi nad wyciąganiem tych pierwiastków, których wykładnik jest liczbą maiącą swoie dzielniki.

Wyciąganie pierwiastku potęgi czwartéy od-

bywać się może za pomocą dwóch następnych wyciągań kwadratowego pierwiastku; wziąwszy bowiem naprzód pierwiastek kwadratowy potęgi czwartéy, naprzykład z a^4, za wypadek znayduiemy kwadrat czyli a^2, którego pierwiastkiem kwadratowym jest a, czyli szukana ilość. Zobaczémy takoż, że trzy wyciągania następne pierwiastku kwadratowego, równaią się wyciąganiu pierwiastku z potęgi ósmey, ponieważ pierwiastek kwadratowy z a^8 jest a^4, pierwiastek także z a^4, jest a^2, a nakoniec pierwiastek kwadratowy z a^2 jest a.

Pokazuie się z tego sposobu, że każdy pierwiastek stopnia znaczonego jedną którąkolwiek z liczb 2, 4, 8, 16, 32 i t. d; to jest potęgą z 2, otrzymuie się przez następne wyciągania pierwiastku kwadratowego. Pierwiastki, których wykładniki nie są liczbami piérwszémi, przywodzić się mogą do innych mnieyszych nieco potęg; naprzykład pierwiastek potęgi szóstéy otrzymuiemy przez wyciąganie naprzód pierwiastku kwadratowego a potém sześciennego.

Oczém by się przekonać, dosyć jest uważyć, że odbywszy tak działanie na a^6, znaydziemy naprzód a^3, potém a; możnaby także wziąć naprzód pierwiastek sześcienny z a^6, co dałoby a^2, potém pierwiastek kwadratowy, i mielibyśmy a.

§ 154. Przeydźmy teraz do ogólnego sposobu, i zastosuymy go do potęgi piątéy na szczególnym przypadku, jako łatwieyszym do poięcia; zbliżywszy zaś do niego sposoby podane na wyciąganie pierwiastku kwadratowego i sześciennego, uyrzemy bez trudności, jak należy odbywać działanie na jakichkolwiek bądź stopniach. Niech więc będzie dany do wyciągania pierwiastek piątéy potęgi z 25154007. Uważamy naprzód, że nay-

mnieysza liczba o dwóch cyfrach, to jest 10, ma sześć cyfer w swoiéy piątéy potędze, którą jest 100000, a stąd wnosimy, że pierwiastek potęgi piątéy podanéy liczby, ma przynaymniéy dwie cyfry: więc możemy wyobrazić ten pierwiastek przez $a+b$, gdzie a znaczy dziesiątki, a b jedności; przeto liczba podana wyrazi się przez

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+ \text{ i t. d.}$$

Nie rozwijamy wszystkich wyrazów téy potęgi, z przyczyny że dosyć jest dwóch piérwszych wyrazów do poznania jéy składu, jak obaczémy wkrótce.

To założywszy, jaśnie pokazuie się, że a^5, czyli piąta potęga z dziesiątków tego pierwiastku, nie mogąc bydź mnieyszą od sta tysięcy, nie składa części, piérwszych pięciu cyfer ze strony prawéy; oddzielamy więc te pięć cyfer.

Gdyby więcéy zostawało jak pięć cyfer na stronie lewéy, odbylibyśmy względem nich toż samo rozumowanie co teraz dopiéro, i rozdzielilibyśmy także liczbę podaną na oddziały po pięć cyfer, zaczynaiąc od prawey ku lewéy stronie: ostatni z tych oddziałów na lewéy stronie, zawiérałby piątą potęgę jedności naywyższego porządku jaki się mieści w pierwiastku.

Składaiąc piąte potęgi liczb z jedney tylko cyfry, poznalibyśmy że 2315, wpada między piątą potęgą z 4, która jest 1024, i takąż z 5, która jest 3125.

25154007		47
1024		
12915,4007		1280

Weźmy więc 4 za dziesiątki szukanego pierwiastku, a odciągnąwszy piątą potęgę téy liczby, to jest 1024, od piérwszego oddziału liczby daney, otrzymamy w reszcie 1291, do któréy dołączémy

następuiący oddział. Liczba stąd powstała zawiérać powinna wyrazy $5a^4b+10a^3b^2+$ i t. d. pozostałe po odciągnięniu a^5 od $(a+a)^5$; lecz z tych wyrazów, naywyższego stopnia jest $5a^4b$, czyli pięć razy wzięta potęga czwarta z dziesiątków rozmnożona przez jedności, gdyż nie jest mnieyszą od dziesiątków tysięcy. Aby ją w szczególności rozważyć, oddzielmy 4 ostatnie cyfry ze strony prawéy, jako nie należące do jéy składu, a liczba 12915 pozostała na stronie lewéy, zawiérać będzie ten wyraz, i dziesiątki tysięcy wynikaiące z następuiących wyrazów. Postrzegamy więc, że podzieliwszy 12915, przez $5a^4$, czyli przez pięć razy wziętą potęgę czwartą ze 4 dziesiątków wynalezionych, przyydziemy tylko do przybliżonych jedności. Czwarta potęga ze 4 jest 256, ta pięć razy wzięta wynosi 1280; podzieliwszy 12915 przez 1280, znaleźlibyśmy na wieloraz 10, lecz w pierwiastku nie moglibyśmy więcéy położyć nad 9; należy nawet doświadczyć przed przybraniem téy cyfry, czy pierwiastek 49, wynikły z przyłączenia 9 do 4 dziesiątków już otrzymanych, nie wydaie większéy potęgi piątéy nad podaną liczbę. Przez takowy sposób znaydziemy, że liczbę 49 dwiema jednościami należy zmnieyszyć, i że prawdziwym pierwiastkiem jest 47, z resztą równą 2209000; gdyż potęga piąta ze 47, jest 229345007; to jest, że pierwiastek zupełny podanéy liczby wpada między 47 i 48.

Jeżeliby prócz tego jeszcze był jeden oddział, przyłączylibyśmy go do reszty, jaką w tym przypadku zostawuie odciąganie piątéy potęgi wykonane na dwóch piérwszych oddziałach, i odbywalibyśmy działanie na całkowitéy reszcie, jak robiliśmy wprzódy, i tak daléy.

Po tém cośmy już rozważyli, łatwo jest rozciągnąć prawidła dane, tak do wyciągania pierwiastku kwadratowego i sześciennego z ułamków, jako też przybliżania pierwiastków nie zupełnych potęg tychże stopni.

§ 155. Za pomocą sposobów gruntuiących się na tychże samych prawidłach, przystąpimy do wyciągania pierwiastków z ilości literalnych. Następuiący przykład wystarczy do pokazania, jakim sposobem wyciąga się pierwiastek z potęgi jakiegokolwiek stopnia.

Znaleźliśmy w (§fie 143), szóstą potęgę z $2x^3-5a^3$, weźmyż ją teraz i wyciągniymy z niéy pierwiastek potęgi szóstéy.

Na ten koniec układamy działanie jak następuie:

$$\begin{array}{l|l} 64x^{18}-960a^3x^{15}+6000a^6x^{12}-20000a^9x^9 & 2x^3-5a^3 \\ \quad +37500a^{12}x^6-37500a^{15}x^3 & \overline{192x^{15}} \\ \quad +15625a^{18} & \\ -64x^{18} & \\ \hline \text{reszta} -960a^3x^{15}+ \text{ i t. d.} & \end{array}$$

Ponieważ podana ilość jest uszykowana podług potęg litery x, zatém piérwszy jéy wyraz powinien bydź szóstą potęgą piérwszego wyrazu pierwiastku, takimże uszykowanego sposobem; przeto wziąwszy pierwiastek potęgi szóstéy z $64x^{18}$, § 129, znaydziemy $2x^3$.

Podniosłszy ten wypadek do potęgi szóstéy i odciągnąwszy od ilości podanéy, reszta pozostała zaczynać się koniecznie musi, od drugiego wyrazu rozwinienia szóstéy potęgi z dwóch piérwszych wyrazów pierwiastku. Więc w wyrażeniu

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+ \text{ i t. d.}$$

wyraz drugi jest mnogością sześć razy wziętą z pią-

téy potęgi wyrazu piérwszego przez wyraz drugi; przeto gdybyśmy go podzielili przez $6a^5$, wieloraz byłby drugim wyrazem b.

Należy więc złożyć sześć razy wziętą potęgę piątą z piérwszego wyrazu pierwiastku $2x^3$, co da

$$6 \times 32x^{15} \text{ czyli } 192x^{15},$$

i przez tę ilość podzielić wyraz $-960a^3x^{15}$, poczynaiący resztę z poprzedzaiącego działania pozostałą; wieloraz $-5a^3$, jest drugim wyrazem pierwiastku. Dla sprawdzenia, podnieśmy do szóstéy potęgi dwówyraz $2x^3 - 5a^3$, a wypadek da nam podaną ilość.

Jeżeliby pierwiastek zawiérać powinien jeszcze jeden wyraz, znaleźlibyśmy, podług dopiéro wskazanego działania, drugą resztę, poczynaiącą się od mnogości z sześć razy wziętéy potęgi 5téy dwóch piérwszych wyrazów pierwiastku, rozmnożonéy przez wyraz trzeci, którą wypadałoby dzielić przez $6(2x^3 - 5a^3)^5$: wieloraz byłby trzecim wyrazem pierwiastku; po czém dla sprawdzenia podnosilibyśmy do potęgi szóstéy trzy znalezione wyrazy. Podobnymże sposobem postępowalibyśmy w wynaydowaniu wszystkich następnych wyrazów, jakabykolwiek była ich liczba.

Zrównania o dwóch wyrazach.

§ 156. Każde zrównanie, które zawiéra w sobie jednę tylko potęgę niewiadoméy, skombinowaną z ilościami znanémi, zawsze może się do dwóch wyrazów przywieśdź, z których jeden jest połączeniem wszystkich zawiéraiących ilość niewiadomą, a drugi zbiorem ilości danych: co widzieliśmy w *§fie* 105, mówiąc o stopniu drugim, i co łatwo możemy poiąć na jakikolwiek stopień.

Gdybyśmy naprzykład mieli zrównanie

$$a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5,$$

to przeniosłszy wszystkie wyrazy z niewiadomą x do jednéy strony zrównania, wyprowadzilibyśmy stąd

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2$$

czyli

$$(a^2 - ac)x^5 = b^4c^3 + a^5b^2.$$

Teraz jeżeli wyrazimy ilości

$a^2 - ac$ przez p, $b^4c^3 + a^5b^2$ przez q,

poprzedzaiące zrównanie zamieni się na

$$px^5 = q,$$

ilość x^5 uwolniwszy od współczynnika, będziemy mieli

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

skąd wniesiemy, że

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

W ogólności, każde zrównanie o dwóch wyrazach przywiedzione do kształtu $px^m = q$,

daie zawsze $$x^m = \frac{q}{p};$$

gdy zaś weźmiemy pierwiastek stopnia m z obudwóch stron zrównania, znaydziemy

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}.$$

§ 157. Uważać należy, jeżeli wykładnik m, jest liczbą nieparzystą, znak pierwiastku mieć będzie tenże sam znak co i ilość, którą on cechuie (131).

Kiedy zaś wykładnik m będzie liczbą parzystą, natenczas znak pierwiastku mieć będzie znak podwóyny $\pm$, i będzie urojonym gdy ilość $\frac{q}{p}$ będzie odiemną, a pytanie stanie się niepodobném do rozwiązania, jak widzieliśmy w §*fie* 131.

Daymy kilka przykładów.

Zrównanie $x^5 = -1024$, daie

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4,$$

ponieważ wykładnik 5 jest nieparzysty.

Zrównanie $x^4 = 625$, daie

$$x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5,$$

ponieważ wykładnik 4 jest parzysty.

Naostatek, zrównanie $x^4 = -16$, daiąc

$$x = \pm\sqrt[4]{-16},$$

przywodzi do dwóch wartości urojonych, z przyczyny, że wykładnik 4 jest parzysty, i że ilość pod znakiem pierwiastku będąca, jest odiemna.

§ 158. Nim się pomkniemy daléy, damy wprzódy poznać jeden czyn analityczny, który, jako w ciągu dalszym tego dzieła nayużytecznieyszym będzie, tak zasługuie abyśmy nań zwrócili uwagę naszę. Polega on na tém, że wszystkie wyrażenia $x-a$, x^2-a^2, x^3-a^3, i w ogólności x^m-a^m (kiedy m będzie jakąkolwiek liczbą całą dodatną), są zupełnie podzielne przez $x-a$. Co do piérwszego, rzecz jest widoczna; wiémy takoż że drugie $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$ (§ 34); a przez dzielenie łatwobyśmy rozłożyli inne. Podzieliwszy podobnież $x^m - a^m$ przez $x - a$, znaleźlibyśmy na wieloraz

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \text{i t. d;}$$

wykładnik litery x zmnieyszałby się coraz jednością, a wykładnik litery a równieby się powiększał; lecz nieprzechodząc przez szczegóły tego działania, położémy zaraz zrównanie

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

które możemy sprawdzić rozmnożywszy drugą stronę przez $x-a$. Otrzymamy na ówczas

$$x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x,$$
$$-ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - a^3x^{m-3} \ldots\ldots - a^{m-1}x - a^m;$$

wszystkie wyrazy linii piérwszéy począwszy od drugiego, są témiż samémi, prócz znaków, jakie poprzedzaią ostatni wyraz linii drugiéy; przeto po uproszczeniu zostanie tylko $x^m - a^m$, to jest podzielna dana.

Uważać tu należy, że po wyrazie a^2x^{m-2} następować musi w linii wyższéy wyraz a^3x^{m-3} i ten się niszczy przez odpowiedny sobie wyraz linii niższéy: toż samo także w linii niższéy, przed wyrazem $a^{m-1}x$, znaydować się powinien wyraz $-a^{m-2}x^2$, który niszczy się przez odpowiedny z linii wyższéy. Te wyrazy dla tego nie są pisane, iż domyślamy się, że zaymować powinny mieysce zapełnione kropkami, według prawidła szeregu.

§ 159. To cośmy wyłożyli prowadzi nas do nayważnieyszych wniosków ściągaiących się do zrównań o dwóch wyrazach,

$$x^m = \frac{q}{p}.$$

Oznaczywszy przez a liczbę jaką otrzymuiemy przez wyciąganie pierwiastku, działaiąc podług prawideł §*fu* 154; mamy

$$\frac{q}{p} = a^m \text{ czyli } x^m = a^m;$$

przeniosłszy drugą stronę do piérwszéy, stanie się

$$x^m - a^m = o.$$

Podzieliwszy ilość $x^m - a^m$ przez $x - a$, otrzymamy podług §*fu* poprzedzaiącego,

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1})$$

ten ostatni wypadek, który się niszczy kiedy $x = a$, stałby się także równy zero, gdybyśmy mieli

$$x^{n-1} + ax^{n-2} \ldots\ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} = o \text{ (§ 116);}$$

a zatém, jeżeliby była jaka wartość na x, któraby zadość czyniła temu ostatniemu zrównaniu, to taż sama uczyniłaby zadość i podanemu.

Te wartości maią nayprostsze z jednością stosunki, które odkryiemy uczyniwszy $x = ay$; przez co zrównanie $x^m - a^m = o$, stanie się

$$a^m y^m - a^m = o \text{ czyli } y^m - 1 = o,$$

otrzymamy zaś wartości na x, rozmnożywszy przez liczbę a, wartości na y.

Zrównanie $y^m - 1 = o$, daie naprzód

$$y^m = 1, \quad y = \sqrt[m]{1} = 1;$$

potém podzieliwszy $y^m - 1$ przez $y - 1$, wypadnie

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots\ldots + y^2 + y + 1;$$

ten wieloraz uczyniwszy równy zeru, będziemy mieli zrównanie, od którego zależą inne na y wartości, które będą miały własność, równie jak jedność, czynić zadosyć zrównaniu

$$y^m - 1 = o \text{ czyli } y^m = 1,$$

to jest, że ich potęgą stopnia m będzie jedność.

Skąd wypływa ten osobliwszy wniosek za piérwszym rzutem oka, że jedność mieć może wiele innych, prócz saméy siebie, pierwiastków.

Te pierwiastki chociaż urojone, jednak są częstego w analizie użycia; ale tu nie możemy dać poznać prócz pierwiastków piérwszych cztérech stopni, z przyczyny, że przez to co poprzedziło, możemy tylko na wymienione stopnie rozwiązać zrównanie

$$y^{m-1} + y^{m-2} \ldots\ldots + 1 = o.$$

Niech będzie 1*od*: $m = 2$, natenczas mamy

$$y^2 - 1 = o$$

skąd wyciąga się $y = +1$, $y = -1$.

2*re*: uczyniwszy $m = 3$, stanie się

$$y^3 - 1 = o,$$

skąd wyciągnie się $y = 1$,

potém $y^2 + y + 1 = o$.

Rozwiązane to ostatnie zrównanie, daie

$$y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

przeto na ten stopień mamy trzy pierwiastki

$$y = 1, \quad y = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Dwa ostatnie są urojone; ale podniosłszy je do sześcianu według sposobu wyłożonego w §*ie* 34, i uważywszy że kwadratem z $\sqrt{-3}$ jest -3, a sześcianem jest $-3\sqrt{-3}$, znaydziemy jeszcze $y^3 = 1$, jak i z pierwiastku $y = 1$.

3*cie*: Wziąwszy $m = 4$, mamy

$$y^4 - 1 = o$$

skąd się wyprowadzi $y=1$,

potém $y^3+y^2+y+1=0$.

Niepostrzegamy tu na wstępie, jakimby sposobem można było rozwiązać to zrównanie; lecz uważywszy, że

$$y^4-1=(y^2+1)(y^2-1),$$

otrzymuiemy następnie zrównania

$$y^2-1=0,\ y^2+1=0,$$

z których wynika

$$y=+1,\ y=-1,\ y=+\sqrt{-1},\ y=-\sqrt{-1}.$$

Z tych cztérech wartości dwie tylko są rzetelne, a dwie urojone.

Ta wielość pierwiastków jedności, należy do ogólnego prawa zrównań, podług którego, niewiadoma tyle przyimuie wartości, ile jest jedności w wykładniku stopnia zrównania, który je oznacza; a gdy pytanie nie otrzymuie téy liczby rzetelnych rozwiązań, wtedy ją dopełniaią całkiem algebraiczne wyrażenia, i sprawdzaią wtenczas, kiedy działaniom wskazanym w zrównaniu poddane będą.

Stąd wypada, że pierwiastki liczb maią dwa gatunki wyrażeń czyli wartości; piérwszym, który nazwiemy *oznaczeniém arytmetyczném*, jest liczba którą wynayduiemy drogą wskazaną w *§ie* 154, a która jest jedyną na każdy przypadek szczególny: drugi zawiéra wartości odiemne i wyrażenia urojone, i ten nazwiemy imieniem *oznaczeń algebraicznych*, ponieważ one byt swóy są winne kombinacyi algebraicznych znaków.

O *Zrównaniach które się tak rozwiązywać mogą jak zrównania drugiego stopnia.*

§ 160. Cecha tych zrównań zależy od tego, iż one dwie tylko zawiéraią różne potęgi niewiadomóy, oraz że wykładnik jednéy, jest podwóynym wykładnika drugiéy: ich zaś wzór ogólny jest takowy

$$x^{2m}+px^m=q,$$

w którym p i q są ilościami znanémi.

Jeżeli weźmiemy naprzód x^m za niewiadomą, czyli gdy uczynimy $x^m=u$, będziemy mieli

$$x^{2m}=u^2,$$

skąd

$$u^2+pu=q,$$

$$u=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}\ (\S\ 109);$$

napowrót położywszy x^m za u, wypadnie

$$x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

zrównanie o dwóch wyrazach; ponieważ wyrażenie

$$-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

zawiéraiąc same tylko działania znane, które odbyć należy na ilościach danych, powinno bydź uważane, jako wyrażaiące ilości znane.

Wyraziwszy przez a i przez a', dwie wartości tego wyrażenia; będziemy mieli

$$x^m=a \text{ i } x^m=a',$$

skąd wyciągniemy $x=\sqrt[m]{a}$ i $x=\sqrt[m]{a'}$.

Jeżeliby wykładnik m był parzysty, natenczas zamiast dwóch dopiéro położonych wartości, mielibyśmy cztéry; ponieważ każdy znak pierwiastkowy mógłby mieć znak $\pm$; a stąd wypadłoby

$$x=+\sqrt[m]{a},\quad x=+\sqrt[m]{a'},$$
$$x=-\sqrt[m]{a},\quad x=-\sqrt[m]{a'},$$

i cztéry wartości byłyby rzetelne, gdyby ilości a i a' były dodatne.

Wszystkie wartości na x zawarte będą w jednym wzorze, wskazuiąc bezpośrednie pierwiastek z obu stron zrównania

$$x^m=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

które da $$x=\sqrt[m]{-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}.$$

Następuiące pytanie prowadzi do zrównania tego rodzaiu.

§ 161. *Rozłożyć liczbę 6 na dwa mnożniki takie, aby summa ich sześcianów była 35.*

Niech jednym z tych mnożników będzie x, drugim będzie $\frac{6}{x}$, aże summa, ich sześcianów x^3 i $\frac{216}{x^3}$, ma wynosić 35; zatém będziemy mieli zrównanie

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35,$$

co wypada na $x^6+216=35x^3$,

czyli na $x^6-35x^3=-216$.

Jeżeli uważamy x^3 za niewiadomą, to podług prawidła na zrównania drugiego stopnia, otrzymamy

$$x^3=\frac{35}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2-216}.$$

Wykonawszy wskazane rachunki liczbowe, znaydziemy

$$\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{1225}{4},$$

$$\sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2-216}=\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2},$$

a zatém $$x^3=\frac{35}{2}+\frac{19}{2}=\frac{54}{2}=27,$$

$$x^3=\frac{35}{2}-\frac{19}{2}=\frac{16}{2}=8,$$

skąd $$x=\sqrt[3]{27}=3\ ,\quad x=\sqrt[3]{8}=2.$$

Piérwsza wartość, daie za drugiego mnożnika $\frac{6}{3}=2$, gdy druga przywodzi do $\frac{6}{2}$ czyli do 3; mamy więc w jednym przypadku 3 i 2 mnożnikami szukanémi, a w drugim 2 i 3. Oba te rozwiązania nie różnią się prócz zmiany porządku w mnożnikach danéy liczby 6.

§ 162. Zrównania któreśmy tylko co rozważali, równie się zawiéraią w ogólném prawie wysło-

wionem w §*fie* 159; ponieważ wartości z $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{d}$ mnożyć należy przez pierwiastki jedności, w stopniu m,

Przystosowawszy tę uwagę do zrównania

$$x^6 - 35x^3 = -216,$$

wynaydziemy odpowiednych jemu sześć pierwiastków następuiących

$$x = 1 \times 3, \qquad x = 1 \times 2,$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 3, \qquad x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \times 2,$$

z których dwa tylko piérwsze są rzetelne.

O Rachunku znaków pierwiastkowych, czyli o rachunku ilości pod témiż znakami będących.

§ 165. Wielka liczba przypadków, w których nie można zupełnie wyciągnąć pierwiastków, i długość potrzebnego działania na ich otrzymanie przez przybliżenie, do tego algebraistów przywiodły, że na ilościach pierwiastkowémi znakami zaiętych, starali się wprost odbywać główne działania wskazane na ich pierwiastkach, i ile możności uproszczać wypadki, sposobem przywodzącym do końca nayzawikłańsze działanie, jakiém jest wyciąganie pierwiastku, odbywaiąc je na naymnieyszych liczbach, czyli wyrażeniach nayprostszych, jakie przyiąć mogą pytania dane.

Dodawanie i odciąganie różnych ilości niewymiernych nie może się odbywać tylko przez naznaczenie znakami + i —. Naprzykład, summy

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b},$$

różnice $\sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{a}$, $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$,

innego wyrażenia mieć nie mogą.

Nie toż samo jest z ilością

$$4a\sqrt[3]{2b} + \sqrt[3]{16a^3b} - \frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

ponieważ wyrażenia które ją składaią zostaiące pod znakami, stać się mogą podobnémi uprościwszy je sposobem podanym w §*fie* 130. Dostrzeglibyśmy naprzód, że

$$\sqrt[3]{16a^3b} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot 2b} \quad \text{czyli} \quad 2a\sqrt[3]{2b},$$

$$\sqrt[3]{2a^6b} = \sqrt[3]{a^6 \cdot 2b} \quad \text{czyli} \quad a^2\sqrt[3]{2b};$$

a stąd wypadłoby $4a\sqrt[3]{2b} + 2a\sqrt[3]{2b} - \frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b}$,

uprościwszy to wyrażenie, otrzymalibyśmy

$$6a\sqrt[3]{2b} - \frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b}, \text{ czyli } (6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

§ 164. Względem innych działań, rachunek ilości zostaiących pod znakiem pierwiastkowym, polega na tém prawidle już wymienioném: *Jeżeli różne mnożniki jakiéy mnogości podniesiemy do jakowéy potęgi, to i mnogość do téyże saméy potęgi podniesioną będzie*. Z drugiéy strony widoczna, że zniosłszy znak pierwiastkowy pod którym zostaie jaka ilość, tém saném podniesie się ta ilość do téy potęgi, jaką wskazuie wykładnik tego znaku.

Naprzykład, wyrażenie $\sqrt[7]{a}$ podniesione do potęgi siódméy, jest a, ponieważ to działanie odwrótne względem tego jakie znak $\sqrt[7]{}$ wskazuie, nic innego nie czyni, tylko zwraca ilość a do piérwszego stanu.

To założywszy, kiedy naprzykład w wyrażeniu

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b},$$

zniesiemy znaki pierwiastkowe, wypadek ab, będzie siódmą potęgą wskazanéy wyżéy mnogości; a wziąwszy z niego pierwiatek potęgi siódméy, wniesiemy stąd, że

$$\sqrt[7]{a} \times \sqrt[7]{b} = \sqrt[7]{ab}.$$

To rozumowanie, które zastosować się może do wszystkich innych przypadków, pokazuie; że *w mnożeniu dwóch wyrażeń ze znakami pierwiastkowémi jednegoż stopnia, składać należy mnogość z ilości pod znakami będących, i one nacechować jednym znakiem tegoż samego stopnia.*

Za pomocą tego prawidła, mamy

$$3\sqrt{2ab^3} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} = 21a^2b^2\sqrt{10c}$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} =$$

$$4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} = 4\sqrt{a^4-b^4};$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4} \times \frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4} \times \frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)} = \sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2} \times \frac{2a^6-b^6}{a^2-b^2}}$$

z przyczyny, że $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.

§ 165. Jeżeli uważymy, że siódmą potęgą, naprzykład wyrażenia $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, jest $\frac{a}{b}$, wniesiemy stąd, wziąwszy pierwiastek siódméy potęgi z tego ostatniego wypadku, że

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}} = \sqrt[7]{\frac{a}{b}};$$

skąd wynika, że *chcąc dzielić jednę ilość niewymierną przez drugą tegoż samego stopnia, tedy za wieloraz brać należy ilości będące pod pierwiastkowémi znakami, i one nacechować jednym znakiem i tegoż samego stopnia.*

Znaydziemy według tego prawidła, że

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{6ab}{3a}} = \sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = \sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$$

§ 166. Wynika z prawidła danego w §*ie* 164, na mnożenie ilości niewymiernych jednakowego stopnia, że *w podnoszeniu ilości niewymierney do jakieykolwiek potęgi, dosyć jest podnieść do téyże potęgi ilości pod pierwiastkowym znakiem, a wypadkowi tenże sam znak nadać;* ponieważ po-

dnieść naprzykład $\sqrt[5]{ab}$ do potęgi trzeciéy, jest to złożyć mnogość

$$\sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab} \times \sqrt[5]{ab};$$

aże znaki pierwiastkowe są jednakowego stopnia, przeto należy (§ 164) rozmnożyć między sobą ilości pod témi znakami zostaiące, a potém nad mnogością położyć znak pierwiastkowy, co da

$$\sqrt[5]{a^3b^3}.$$

Podobnież, $\sqrt[7]{a^2b^3}$ podniesiony do potęgi czwartéy, daie $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, który przywodzi się do $ab\sqrt[7]{ab^5}$; rozłożywszy a^8b^{12} na $a^7b^7 \times ab^5$, i wziąwszy pierwiastek z mnożnika a^7b^7 (§ 130).

Wypada tu uważyć, że *jeżeli wykładnik znaku pierwiastkowego jest podzielnym przez wykładnik potęgi do któréy jest podniesiona ilość podana, natenczas dzieli się wykładnik piérwszy przez drugi.*

Naprzykład $(\sqrt[6]{a})^2 = \sqrt[3]{a}$,

ponieważ $\frac{6}{2} = 3$.

W rzeczy saméy, $\sqrt[6]{a}$ znaczy ilość, która jest sześć razy mnożnikiem w a; aże ilość $\sqrt[3]{a}$, którą otrzymuiemy po rozdzieleniu wykładnika 6 przez 2, jest tylko trzy razy mnożnikiem w a, przeto wyrównywa mnogości z dwóch mnożników piérwszych, więc jest drugą potęgą jednego z tych mnożników, czyli z $\sqrt[6]{a}$.

Toż samo rozumowanie przystosowalibyśmy

do przykładu następuiącego, i do wszystkich innych:

$$(\sqrt[12]{a^2b})^3 = \sqrt[4]{a^2b}.$$

§ 167. Biorąc w odwrótnym względzie prawidła §*fu* poprzedzaiącego, otrzymamy te, podług których postępować należy w wyciąganiu pierwiastku, z ilości niewymiernych.

Postrzegamy naprzód z piérwszego, że *jeżeli wykładniki ilości pod znakiem pierwiastkowym, są podzielne przez wykładnik pierwiastku jaki wyciągnąć chcemy, wtedy odbywa się działanie jak gdyby znaku pierwiastkowego nie było, a wypadkowi daie się znak pierwiastkowy jaki wprzódy te ilości cechował.*

Znaydziemy naprzykład, że

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2};$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Z prawidła drugiego położonego w §fie poprzedzaiącym wnosimy, że *wyciąganie pierwiastku z ilości znakiem pierwiastkowym zaietych, wskazuie się w ogólności, rozmnożywszy wykładnik pierwiastkowego znaku, przez wykładnik pierwiastku jaki wyciągać mamy.*

Za pomocą tego ostatniego prawidła znaydziemy, że $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

W rzeczy saméy, $\sqrt[5]{a^4}$ jest ilością pięć razy wziętą za mnożnika w a^4 (§§ 24,129); lecz że pierwiastek sześcienny z $\sqrt[5]{a^4}$ powinien bydź tak-

że trzy razy mnożnikiem w téy ostatniéy ilości, znaydzie się przeto 5×3 razy, czyli 15 razy mnożnikiem w piérwszéy a^4: więc

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}=\sqrt[15]{a^4}.$$

Dowiedlibyśmy takoż, że $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[15]{a^4}$.

§ 168. Ponieważ rozmnożywszy wykładnika ilości pod znakiem pierwiastkowym przez pewną liczbę (§ 166), podnosimy pierwiastek wskazany do potęgi oznaczonéy tąż samą liczbą; a rozmnożywszy przez tęż samą liczbę wykładnika pierwiastkowego znaku (§ 167), wyciągamy z wypadku pierwiastek stopnia równego temu, jakiego jest utworzona potęga; wypada stąd, że to drugie działanie powraca ilość podaną do piérwszego stanu.

Naprzykład, wyrażenie $\sqrt[5]{a^3}$, zamienić się może na $\sqrt[35]{a^{21}}$, które otrzymuiemy rozmnożywszy przez 7 wykładniki 5 i 3; gdyż mnożyć przez 7, wykładnik ilości a^3, jest to podnosić podane wyrażenie do potęgi siódméy, i będzie $\sqrt[5]{a^{21}}$, mnożyć zaś przez 7, wykładnik znaku pierwiastkowego, jest to z wypadku wziąć pierwiastek potęgi siódméy; tym sposobem wykonywamy dwa przeciwne działania, a zatém drugie niszczy skutek piérwszego.

§ 169. Przez takowe podwóyne działanie *przywodzimy do jednakowego stopnia, jakąkolwiek bądź liczbę ilości pod różnémi znakami piérwiastkowémi zostaiących, nie naruszaiąc ich wartości, mnożąc razem wykładnika każdego pierwiastkowego znaku i wykładniki ilości pod nim zostaiących, przez mnogość z wykładników wszystkich innych pierwiastkowych znaków*. Tosamość nowych wykładników pierwiastkowych znaków widoczna jest sama przez się, ponieważ one powstaią z mnogości wszystkich wykładników znaków pierwotnych; przekonywamy się zaś z tego co poprzedziło, że ilość zaięta pierwiastkowym znakiem nie zmieniła swoiéy wartości.

Podług tego prawidła, przerabiamy

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \text{ i } \sqrt[7]{c^4d^5},$$

na $\sqrt[35]{a^{21}b^{14}}$ i $\sqrt[3]{c^{20}d^{15}}$.

Podobnież trzy ilości $\sqrt[3]{ab^2}$, $\sqrt[5]{a^2c^3}$, $\sqrt[7]{b^4c^3}$, zamienią się odpowiednie

na $\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}$, $\sqrt[105]{a^{42}c^{63}}$, $\sqrt[105]{b^{60}c^{45}}$.

Jeżeliby pod znakami pierwiastkowémi znaydowały się liczby, należałoby także i te podnieść do potęgi oznaczonéy mnogością wykładników innych pierwiastkowych znaków.

§ 170. Podobnież, można *pod znak pierwiastkowy podciągnąć mnożnik zostaiący za nim, podnosząc go do potęgi oznaczonéy wykładnikiém pierwiastkowego znaku*.

Zamienimy naprzykład

a^2 na $\sqrt[5]{a^{10}}$, i $2a\sqrt[3]{b}$ na $\sqrt[3]{8a^3b}$.

§ 171. Przywiodłszy znaki pierwiastkowe do jednakowego stopnia, za pomocą poprzedzaiącego przerabiania, możemy z łatwością zastosować do nich prawidła dane w (§§. 164, 165), na mnożenie i dzielenie ilości zostaiących pod znakiem

pierwiastkowym jednakiego stopnia.

Niech będzie w ogólności

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s},$$

zamieniamy (§ 169) $\sqrt[m]{a^p b^q}$, $\sqrt[n]{b^r c^s}$

na $\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}$, $\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}$,

a prawidło § 164, daie nam

$$\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}},$$

wyrażenie żądaney mnogości.

Mamy także podług §fu 165,

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{\sqrt[mn]{a^{np} b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq}}{b^{mr} c^{ms}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Uwagi nad niektóremi szczególnemi przypadkami rachunku ilości pod znakami pierwiastkowemi zostaiących.

§ 172. Prawidła pod które podciągaliśmy rachunek ilości znakami pierwiastkowémi obiętych, zastosowalibyśmy z łatwością do ilości rzetelnych; lecz te wprowadzałyby nas w błąd w ilościach urojonych, gdybyśmy nie pamiętali na niektóre uwagi należące do własności zrównań o dwóch wyrazach.

Naprzykład, prawidło (§ 164) bezpośrednie daie

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a \times -a} = \sqrt{a^2},$$

gdybyśmy przestali na wzięciu $+a$, z $\sqrt{a^2}$, wi-

widocznie w tym razie wypadek byłby fałszywy, ponieważ mnogość $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, jako kwadrat z $\sqrt{-a}$, powinniśmy otrzymać znak pierwiastkowy zniosłszy, a zatém jest ta równa $-a$. Bezout naylepiéy wytłumaczył tę trudność, uważywszy że jeżeli niewiémy jakim sposobem powstał kwadrat a^2, a szukamy jego pierwiastku, wtedy powinniśmy razem naznaczyć $+a$ i $-a$; lecz gdy wprzódy wiadomo, która z tych dwóch ilości została rozmnożoną przez się samę na utworzenie a^2, na ten czas już nie jest wolno brać drugiéy. Ten przypadek jest oczywiście w wyrażeniu $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$: wiémy w tym razie, że ilość a^2, pod pierwiastkowym znakiem $\sqrt{a^2}$, powstała z rozmnożenia $-a$ przez $-a$; więc oboiętność niknie i wracaiąc się do pierwiastku kłaśdź należy $-a$.

Zachodziłaby także taż sama trudność i w mnogości z $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$, gdybyśmy nie byli przywiedzeni do brania bezpośrednie wartości dodatnéy z $\sqrt{a^2}$, ponieważ w wyrażeniu nieznayduie się znak —. Należałoby zrobić uwagę, że w tym przypadku a^2 wynikaiąc z rozmnożenia $+a$ przez $+a$, koniecznie dać powinno za pierwiastek $+a$. Te rozumowania żadnéy niezostawuią wątpliwości na przypadek szczególny, któryśmy roważali; ale znayduią się inne takie, które nie inaczéy jaśnie tłumaczyć się mogą, jak tylko przez własność zrównań o dwóch wyrazach.

§ 173. Gdybyśmy naprzykład chcieli miéć mnogość $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, tobyśmy ją otrzymali przywiodłszy znak pierwiastkowy drugi do jednako-

wego stopnia z piérwszym (§ 169), i mielibyśmy

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a},$$

wypadek rzetelny; chociaż dosyć widoczna, że ilość rzetelna $\sqrt[4]{a}$, rozmnożona przez urojoną $\sqrt{-1}$, dać powinna urojoną mnogość. Jednak nie należy sądzić aby wyrażenie $\sqrt[4]{a}$ zupełnie fałszywém było, ale tylko że się na ów czas bierze w nayszczególnieyszém rozumieniu.

W rzeczy saméy, $\sqrt[4]{a}$ algebraicznie uważany, będąc wyrażeniem niewiadomégo x, w zrównaniu o dwóch wyrazach, $x^4 - a = o$, przyiąć może cztéry znaczenia różne (§ 159); bo jeżeli uczynimy $a = \alpha^4$, wyrażaiąc przez α wartość liczbową z $\sqrt[4]{a}$, niedaiąc na znak względu czyli na znaczenie arytmetyczne téyże ilości, otrzymamy cztéry wartości

$$\alpha \times +1,\ \alpha \times -1,\ \alpha \times +\sqrt{-1},\ \alpha \times -\sqrt{-1},$$

z których trzecia jest dokładnie mnogością daną.

Przy niewielkiém zastanowieniu się, łatwo rozpoznamy przyczynę wątpliwości jakąśmy wprzódy dostrzegli. Druga potęga $+1$ z ilości -1, położonéy pod znakiem pierwiastkowym kwadratowym, która równie dobrze mogła powstać z $+1 \times +1$, jak i z -1×-1, wprowadza w ilość $\sqrt[2]{1}$, dwa znaczenia które nieznaydowały się w $\sqrt{-1}$.

W ogólności, sposób przez który odkryliśmy prawidło służące na złożenie mnogości $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b}$, posłuży także i na podniesienie téyże mnogości

do potęgi mn; gdyż wyraziwszy ją przez z, czyli uczyniwszy

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = z,$$

naprzód podniosłszy do potęgi m, mielibyśmy

$$a \sqrt[n]{b^m} = z^m,$$

potém podniosłszy jeszcze do potęgi n, stałoby się

$$a^n b^m = z^{mn}.$$

Ta mnogość nie inaczéy poznaną bydź może, tylko przez swą potęgę stopnia mn, lub też ze zrównania tegoż stopnia o dwóch wyrazach, powinna mieć oznaczenie mn (§ 159): co łatwo poznamy zwróciwszy na to uwagę, że wyrażenia $\sqrt[m]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$ nie są czém inném tylko wartościami niewiadomych x i y, w zrównaniach o dwóch wyrazach

$$x^m - a = o,\quad y^n - b = o;$$

a zatém że przyiąć mogą oznaczenia z m i z n; kombinuiąc bowiem każde oznaczenie m na x, z każdém oznaczeniem n na y, będziemy mogli otrzymać oznaczenia mn mnogości żądanéy.

Kiedy się ma do czynienia z ilościami rzetelnémi, wybor nie jest trudny, ponieważ liczba oznaczeń takowego gatunku nigdy nie przewyższa dwóch (§ 157), które różnią się tylko znakiem.

§ 174. W prowadziwszy w użycie wyłożone przerabianie w §fie 159, zniszczymy wszelką trudność względem pierwiastków z $+1$, i z -1; założywszy bowiem $x = \alpha t$, $y = \beta u$, wyrażaiąc literami α i β oznaczenia liczbowe z $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, niedaiąc na znaki względu, zrównania $x^m \mp a = o$, $y^n \mp = o$,

staną się $t^m \mp 1 = 0$, $u^n \mp 1 = 0$,
a z tych wyciągniemy wyrażenie

$$xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\beta tu = \alpha\beta \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1},$$

w którém $\alpha\beta$ wyraża mnogość liczb $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, czyli oznaczenie arytmetyczne pierwiastku stopnia mn, liczby $a^n b^m$

Gdybyśmy chcieli wyszczególnić mnogość z wyrażeń $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$ przez szczegółowe oznaczenie tychże wyrażeń, należałoby znaleśdź podług zrównań

$$t^m \mp 1 = 0, \quad u^n \mp 1 = 0,$$

rozmaite wyrażenia z $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$ i przyzwoicie je kombinować.

Naostatek, te działania całe nienadarzają się; prócz w niektórych przypadkach nayprostszych, z których są te główniejsze.

1°. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$;

znieśmy znak pierwiastkowy z $\sqrt{-1}$, a otrzymamy

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$$

2°. $\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab}\,(\sqrt[4]{-1})^2$;

nie mnożyliśmy tu -1 przez -1, ponieważ wpadlibyśmy na wątpliwość postrzeżoną w § 173; lecz uważamy, że kwadrat z pierwiastku czwartéy potęgi nie co innego jest, tylko pierwiastek kwadratowy, przeto stanie się w ów czas

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}.$$

3°. $\sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab} \times (\sqrt[6]{-1})^2 =$
$\sqrt[6]{ab} \times \sqrt[3]{-1} = \sqrt[6]{ab} \times -1 = -\sqrt[6]{ab}$.

Tym sposobem wynaydowalibyśmy na przemiany wypadki rzetelne i urojone.

O *Rachunku wykładników ułamkowych.*

§ 175. Kiedy za znaki pierwiastkowe położémy wykładniki ułamkowe im odpowiedne (§ 132), zastosowanie bezpośrednie prawideł na wykładniki, da też same wypadki, jakie daią sposoby używane w rachunku pierwiastkowych znaków.

W rzeczy saméy, jeżeli naprzykład przerobimy

$$\sqrt[5]{a^3 b^2}, \quad \sqrt[5]{a^3 c^2}$$

na $a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}$, $a^{\frac{3}{5}} c^{\frac{2}{5}}$,

będziemy mieli

$$\sqrt[5]{a^3 b^2} \times \sqrt[5]{a^3 c^2} = a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}};$$

po czém uważywszy że $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, a tém samém że $a^{\frac{6}{5}} = a^{1+\frac{1}{5}} = a \times a^{\frac{1}{5}}$ (25), oraz że wyrażenie $a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{2}{5}} c^{\frac{2}{5}}$ jest jednoznaczném z $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, otrzymamy

$$\sqrt[5]{a^3 b^2} \times \sqrt[5]{a^3 c^2} = a \sqrt[5]{ab^2 c^2},$$

wypadek nie tylko dokładny, ale jeszcze przywiedziony do nayprostszego wyrażenia.

Niech będzie przykład ogólny $\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s}$;

przerobiwszy te wyrażenia na $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$, $b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}$,

otrzymamy podług prawideł na wykładniki (§ 25),

$$a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}} \times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}.$$

Gdybyśmy teraz chcieli wykonać dodawanie ułamków $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, należałoby je przywieśdź do jednakowego mianownika; a dla nadania jednokształtności wypadkom, wypadałoby to samo uczynić i z ułamkami $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$; tym sposobem mielibyśmy $a^{\frac{np}{nm}}b^{\frac{nq+mr}{nm}}c^{\frac{ms}{nm}}$, co podciągnąwszy pod znaki pierwiastkowe, otrzymamy

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}.$$

§ 176. Dzielenie odbywa się także poprostu: mamy naprzykład

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}} \text{ (§ 38)},$$

co się przywodzi do $\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}}$;

to ostatnie wyrażenie podciągnąwszy pod znaki pierwiastkowe, będziemy mieli

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}.$$

W ogólności mamy

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

przywiodłszy zaś do jednakowego mianownika wykładniki ułamkowe, aby wykonać wskazane odciąganie, znaydziemy

$$\frac{\sqrt[m]{a^pb^q}}{\sqrt[n]{b^rc^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Łatwo tu widzieć się daie, że przywodzenie wykładników ułamkowych do jednakowego mianownika, zastępuie mieysce przerabiania znaków pierwiastkowych na jednakowy stopień, i z dokładnością przywodzi do tychże samych wypadków (§ 171).

§ 177. Całkiem jest także rzecz widoczna z prawidła §*fu* 127,

że $$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}},$$

tudzież z prawidła §*fu* 129, że

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}.$$

Rachunek wykładników ułamkowych, jest jednym z nayważnieyszych dowodów użyteczności znaków, gdy te są należycie obrane. Podobieństwo zachodzące między całémi a ułamkowémi wykładnikami, podaie nam prawidła podług których postępować należy w rachunku tych ostatnich. Te prawidła stosować się także mogą

do rachunku ilości niewymiernych, czyli do rachunku pierwiastkowych znaków, kiedy musielibyśmy przez szczególne przechodzić rozumowania dla odkrycia prawideł na ten rachunek; ponieważ znak $\sqrt{}$, cechuiący ilości niewymierne niema żadnego związku z tém działaniem z którego wypadaią. Im daléy więc w Algebrze postępuiemy, tém licznieysze dostrzegamy korzyści w téy umieiętności wynikaiące ze znaczenia wykładników wynalezionego przez *Deskarta*.

Teorya ogólna Zrównań.

§ 178. Zrównania piérwszego i drugiego stopnia, są właściwie mówiąc, same tylko jedne, których mamy rozwiązanie zupełne; lecz i zrównań jakichkolwiek stopni odkryto własności ogólne, które nas przywodzą do ich rozwiązania kiedy te są liczbowe, i dla wyższych części Algebry liczne podaią wnioski. Te własności statecznie zachowuią swoią szczególną postać, pod którą każde zrównanie kładzione bydź może.

Przypuściwszy, że ta postać na jakikolwiek stopień tak jest ogólna jak tylko bydź może, tedy zrównanie zawiérać powinno wszystkie potęgi niewiadoméy począwszy od potęgi danéy aż do piérwszéy i nadto jeden wyraz znany.

Naprzykład, zrównanie ogólne piątego stopnia, zawiérać będzie wszystkie potęgi niewiadoméy od piérwszéy aż do ostatniéy, to jest piątéy; a jeźliby się wiele znaydowało wyrazów jednakiéy potęgi niewiadoméy, należałoby je poymować za złączone w jeden, jak się czyniło w zrównaniach drugiego stopnia (§ 108). Potém przeniesiemy (jak czyniliśmy w §*ie* wymienionym) wszystkie wyrazy zrównania do jednéy strony, druga będzie koniecznie równa zero; piérwszy wyraz uczynimy dodatnym, gdyby tego potrzeba wyciągała, przemieniwszy wszystkie znaki w zrównaniu.

Tym sposobem otrzymamy wyrażenie, następuiącemu podobne:

$$nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=o,$$

w którém należy dobrze uważać, że litery n, p, q, r, s, t, mogą wyrażać liczby dodatne lub odjemne; potém rozdzieliwszy wszystko przez n, ażeby piérwszemu wyrazowi zostawić tylko za współczynnika jedność, i uczyniwszy

$$\frac{p}{n}=P,\ \frac{q}{n}=Q,\ \frac{r}{n}=R,\ \frac{s}{n}=S,\ \frac{t}{n}=T,$$

wypadnie $x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=o$.

Mniemaymy nakoniec, że zawsze mamy tak przygotowane zrównanie, jakośmy dopiéro uczynili, i wyraźmy zrównanie ogólne jakiegokolwiek bądź stopnia, przez

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\ldots\ldots+Tx+U=o.$$

Przedział kropkowany na ów czas się zapełnia, kiedy wykładnikowi n nada się szczególna wartość.

Każda ilość, czyli każde wyrażenie bądź rzetelne bąd urojone, które się kładzie na mieyscu niewiadoméy x, w zrównaniu już przygotowaném, czyni piérwszą jego stronę równą zero, a tém samém czyni pytaniu zadosyć i nazywa się *pierwiastkiém podanego zrównania;* lecz że tu nieidzie o potęgi, zatém to przyięcie jest ogólnieysze od tego, jakie nadawaliśmy do tych czas wyrazowi *pierwiastek* (§ 90, 129).

§ 179. Daymy założenie podobne podanym w (§ 116, 159), które za główne uważać się powinno.

Pierwiastek jakiegokolwiek zrównania

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U=o,$$

wyraziwszy przez a, *piérwsza strona tego zrównania da się rozdzielić bez reszty przez dwówyraz* x—a.

W rzeczy saméy, ponieważ *a* jest wartością *x*, przeto koniecznie jest

$$a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}\ldots\ldots+Ta+U=o,$$

a zatém $U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta$;

przez co zrównanie podane, nie odmieniaiąc swoiéy wartosci, zamieni się na

$$\left.\begin{array}{l} x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx \\ -a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta \end{array}\right\}=o,$$

i przywiedzie się do

$$\left.\begin{array}{l} x^n-a^n+P(x^{n-1}-a^{n-1})+ \\ Q(x^{n-2}-a^{n-2})\ldots\ldots+T(x-a) \end{array}\right\}=o.$$

Ilości, x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, $x^{n-2}-a^{n-2}$, ... $x-a$, ponieważ wszystkie są rozdzielne przez $x-a$ (§. 158), więc oczywista jest rzecz, że piérwsza strona podanego zrównania miéć będzie wszystkie swe wyrazy rozdzielne przez tęż samę ilość, a tém samém podzieli się przez $x-a$, jak je miéć chce wysłowienie naszego założenia (*).

§ 180. Abyśmy otrzymali wieloraz, dosyć jest podstawić za ilości

(*) *D'Alambert* toż samo założenie dowodzi następuiącym sposobem. Jeżeli poznamy, że piérwsza strona podanego zrównania, może bydź rozdzielną przez $x-a$, i gdy działanie aż do tego pomknięte będzie, że wyczerpną się wszystkie wyrazy maiące przy sobie x, reszta jakaby pozostała nie będzie już mogła zawiérać x. Albowiem wyraziwszy ją przez

x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, $x^{n-2}-a^{n-2}$; . . . . . $x-a$,

wielorazy wypadłe z podzielenia każdéy z nich przez $x-a$, któremi są następuiące:

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-1},$$
$$x^{n-2}+ax^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-2},$$
$$x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+1.$$

Szykuiąc wypadek podług potęg litery x, znaydziemy

$$x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-1},$$
$$+Px^{n-2}+Pax^{n-3}\ldots\ldots+Pa^{n-2}$$
$$+Qx^{n-3}\ldots\ldots+Qa^{n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+T.$$

§ 181. Oczywiście się pokaznie z sąmych prawideł dzielenia, że piérwsza strona zrównania

R, a wieloraz jaki się otrzyma oznaczywszy przez Q; koniecznie będziemy mieli.

$$x^n+Px^{n-1}\ldots\ldots+\text{i t. d.}=Q(x-a)+R.$$

Więc, jeżeli na mieyscu x podstawimy a, zniszczy się piérwsza strona, ponieważ a jest wartością x; wyraz $Q(x-a)$ także się zniszczy z przyczyny mnożnika $x-a$, który się stanie o; więc powinniśmy miéć $R=o$, a to nie zależnie od podstawienia, gdyż ta reszta nie zawiéra x, a zatém przy swéy piérwszéy pozostanie wartości.

Skąd wypada, że we wszystkich przypadkach, $R=o$ a tém samém $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}$, i. t. d. zupełnię jest rozdzielne przez $x-a$.

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \text{i. t. d.} = o,$$

rozdzielona przez $x - a$, da za wieloraz

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + Q'x^{n-3} + \text{i. t. d.}$$

literami P', Q', i. t. d. znacząc ilości znane różne od P, Q, i. t. d.
będziemy więc mieli

$$x^n + Px^{n-1} + \text{i t. d.} = (x-a)(x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{i t. d.});$$

a według uwagi zrobionéy w §fie 116, zrównanie podane dwóma sprawdzi się sposobami to jest czyniąc

$$x - a = o, \text{ albo } x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{i t. d.} = o.$$

Jeżeli zrównanie

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{i t. d.} = o$$

ma jeden pierwiastek b, tedy piérwsza jego strona będzie rozdzielną przez $x-b$; a zatém będziemy jeszcze mieli

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \&. = (x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&.)$$

a tém samém będzie, i

$$x^n + Px^{n-1} + \& = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&.)$$

więc zrównanie podane trzema sposobami sprawdzić się będzie mogło, to jest, czyniąc

$$x - a = o, \text{ albo } x - b = o, \text{ albo } x^{n-2} + P''x^{n-3} + \&. = o.$$

Jeżeli ostatnie z tych zrównań ma pirewiastek c, to piérwsza jego strona rozłoży się na dwa mnożniki

$$x - c, \quad x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \&. = o,$$

i będziemy mieli

$$x^n + Px^{n-1} + \&. = (x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{i t. d});$$

skąd się pokazuie, że zrównanie podane sprawdzić

się będzie mogło cztérma sposobami, to jest, czyniąc

$$x - a = o, \; x - b = o, \; x - c = o,$$
$$x^{n-3} + P'''x^{n-4} + \text{i. t. d.} = o.$$

Takowym sposobem posuwaiąc daléy nasze rozumowanie, otrzymalibyśmy następnie mnożniki stopni

$$n-4, \; n-5, \; n-6, \text{ i t. d.}$$

a jeżeli każdy z tych mnożników przywiedziony do zero, jeden pierwiastek dać może, tedy piérwsza strona podanego zrównania przywiedzie się do takiego wyrażenia

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l), \text{ to jest,}$$

rozłoży się na tyle mnożników piérwszego stopnia, ile zawiéra się jedności w wykładniku stopnia n.

Więc zrównanie $x^n + Px^{n-1} + \text{i t. d.} = o$, sprawdzone bydź może liczbą sposobów n; to jest, czyniąc $x - a = o$, albo $x - b = o$, albo $x - c = o$, albo $x - d = o$, albo nakoniec $x - l = o$.

Dobrze uważyć należy, że te zrównania inaczéy brane bydź nie mogą za prawdziwe, tylko naprzemian, gdyż wpadlibyśmy w oczywistą sprzeczność gdybyśmy przypuszczali, że one jednocześnie maią mieysce. W rzeczy bowiem saméy, z $x - a = o$, wyciągamy $x = a$, kiedy $x - b = o$, przywodzi nas do $x = b$; te wypadki nie mogą się zgodzić, gdy ilości a i b są nie równe.

§ 182. Piérwszą stronę podanego zrównania

$$x^n + Px^{n-1} + \text{i. t. d.} = o,$$

rozłożywszy na liczbę n mnożników piérwszego stopnia,

$$x - a, \; x - b, \; x - c, \; x - d, \ldots\ldots x - l,$$

zrównanie to nie będzie się mogło rozdzielić przez żadne inne wyrażenie tegoż stopnia. W rzeczy saméy, jeżeliby dzielenie przez dwówyraz $x-\alpha$, różny od piérwszych, podobne było, to byśmy mieli $x^n+Px^{n-1}+\&.=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&.)$ a zatém byłoby, i

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\text{i. t. d.});$$

że zaś zamieniwszy x na α, staie się

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)\ldots\ldots(\alpha-l)=(\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1}+p\alpha^{n-2}+\text{i. t. d.})$$

gdzie druga strona zrównania niszczy się z przyczyny mnożnika $\alpha-\alpha$, a nie tożsamo jest z piérwszą, która jest mnogością z mnożników cale różnych od zero, jak α różni się od każdego z pierwiastków $a, b, c, d, \ldots\ldots l$; więc założenie nie jest prawdziwém; przeto *zrównanie jakiegokolwiek stopnia, nie może przypuścić więcéy dzielników dwówyrazowych piérwszego stopnia, nad liczbę jedności zawartych w wykładniku jego stopnia, a tém samém nie może mieć większéy pierwiastków liczby* (*).

§ 183. Uważywszy zrównanie jako mnogość z liczby mnożników $x-a, x-b, x-c, x-d$, i. t. d. równéy wykładnikowi jego stopnia; na tenczas to zrównanie weźmie postać mnogości wskazaney w §*ie* 135, ale wyrazy będą szły naprzemiany dodatne i odjemne.

Jeżeli przestaniemy naprzykład na cztérech mnożnikach, będziemy mieli

$$x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0.$$
$$-bx^3+acx^2-abdx$$
$$-cx^3+adx^2-acdx$$
$$-dx^3+bcx^2-bcdx$$
$$+bdx^2$$
$$+cdx^2$$

Że zaś drugie wyrazy dwówyrazów $x-a$, $x-b$, $x-c$, i. t. d, są pierwiastkami zrównania, wziętémi z przeciwnym znakiém; przeto własności roztrząsane w § 135, i dowiedzione w ogólności w § 136, będą miały mieysce, w teraźnieyszym przypadku sposobem następuiącym:

Współczynnik drugiego wyrazu, wzięty z przeciwnym znakiem będzie summą pierwiastków:

Współczynnik trzeciego wyrazu będzie summą mnogości z pierwiastków mnożonych po dwa na raz.

Współczynnik czwartego wyrazu, wzięty z przeciwnym znakiem, będzie summą mnogości z pierwiastków mnożonych po trzy na raz i tak daléy, zawsze dostrzegaiąc przemiany znaku współczynników parzystego porządku.

Ostatni wyraz, podlegaiąc temuż prawu, *będzie mnogością ze wszystkich pierwiastków.*

Naprzykład zrównawszy z zero mnogość z trzech mnożników

$$x-5,\ x+4,\ x+3,$$

powstanie zrównanie $x^3+2x^2-23x-60=0$,

(*) To dowodzenie daleko prostsze od wykładanego w edycyach poprzedzaiących, jest wyięte z Roczników Matematycznych ogłoszonych przez P. *Gergonne*. (*Annales de Mathématiques publiées par M. Gergonne, Tom* IV *page* 209—210. note).

którego pierwiastki będą $+5$, -4, -3;
ich zaś summa będzie $5-4-3=-2$;
summa ich mnogości wziętych po dwa na raz, będzie

$$+5\times-4+5\times-3-4\times-3=$$
$$-20-15+12=-23.$$

Mnogością z ich trzech, będzie

$$+5\times-4\times-3=60.$$

Toż samo także wyprowadzilibyśmy ze współczynników 2, -23, -60, przemieniwszy znak współczynników drugiego i czwartego wyrazu.

Jeżeli zrównamy z zero mnogość z mnożników

$$x-2,\ x-3,\ \text{i}\ x+5,$$

w zrównaniu stąd powstałém

$$x^3-19x+30=0,$$

nie maiącém wyrazu x^2, to jest potęgi tuż niższéy od potęgi wyrazu piérwszego, *brakuie wyrazu drugiego*; z przyczyny, że summa pierwiastków wziętych z przeciwnym znakiem, stanowi współczynnika dla tego wyrazu, a tym współczynnikiem jest $2+3-5$ czyli zero; albo inaczéy mówiąc, ponieważ summa pierwiastków dodatnych równa jest summie odiemnych (*).

§ 184. Kiedy uważamy zrównanie jako powstałe z mnogości wielu mnożników prostych, tedy dowodzimy (§ 182), że to zrównanie nie może ich mieć, tylko liczbę oznaczoną wykładnikiem n, jego stopnia; lecz jeżeli skombinuiemy te mnożniki po dwa na raz, na ten czas powstaną ilości drugiego stopnia, które także będą mnożnikami tego samego zrównania, i ich mnogość będzie $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$; jeżeli skombinuiemy je po trzy na raz, powstaną ilości trzeciego stopnia, które także będą mnożnikami tego samego zrównania, i ich mnogość będzie $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$; i tak dalej.

(*) Możnaby sądzić, że dla odkrycia pierwiastków jakiegokolwiek zrównania czwartego stopnia

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0,$$

dosyćby było porównać je z mnogością *§fu* 183, równaiąc z sobą ilości mnożące jednakowe potęgi litery x, w mnogości i w zrównaniu daném; i dla téy przyczyny większa część Elementarnych Autorów chce dowodzić, że *zrównanie jakiegokolwiek bądź stopnia jest mnogością z tylu mnożników, ile znayduie się jedności w wykładniku stopnia tego zrównania*; lecz za pomocą tego co następuie okażemy, że ich rozumowanie jest fałszywe. Ja zaś założenie to wnoszę tylko warunkowie w (§ 182), ponieważ, aby je zupełnie ustalić, należałoby pokazać, że zrównanie jakiegokolwiek stopnia ma jeden pierwiastek bądź rzetelny bądź urojony; co w początkowéy algebrze nie łatwo okazać można, a co na szczęście nie jest nam potrzebne: pomimo to jednak widzieć można w *Dopełnieniu Algebry* (Complément d'algèbre), jak zastanawiałem się nad tym przedmiotem.

Ułożywszy zrównania

$$-a-b-c-d=p$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q$$
$$-abc-abd-acd-bcd=r$$
$$abcd=s,$$

ażeby z nich powyciągać wartości liter a, b, c, d, które byłyby pierwiastkami zrównania podanego, rachunek byłby bardzo zawiły, gdybyśmy chcieli na oznaczenie niewiadomych a, b, c, d, użyć sposobu wyłożonego w *§fie* 78; lecz rozmnożywszy piérwsze ze zrównań dopiéro położonych przez a^3, drugie przez a^2, trzecie przez a, i te trzy mnogości dodawszy do zrównania czwartego, stronę ze stroną, będziemy mieli

$$-a^4=pa^3+qa^2+ra+s,$$

skąd wniesiemy przez proste przeniesienie piérwszéy strony do drugiéy,

że $a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0.$

żnikami podanego zrównania, a których liczba wyrazi się przez

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad (\S\ 140).$$

To zrównanie zawiéra tylko same a, i podanemu całkiem jest podobne: trudność otrzymania wartości na a, jest więc taż sama co i w otrzymaniu wartości x.

Przeto, jak powiedział *Castillon* w pamiętniku Berlińskim na rok 1789).„

„ Dowodzi się dobrze we wszystkich Algebrach, „ że z mnogości wielu prostych dwówyrazów składamy zrównanie jakiego zechcemy stopnia, ale się „ przez to nie pokazuie, że złożone zrównanie przez „ mnożenie wielu dwówyrazów prostych, może mieć „ takie współczynniki jakie zechcemy. ”

Jeżelibyśmy zamiast mnożenia trzech piérwszych zrównań przez a^3, a^2, a, rozmnożyli je przez b^3, b^2, b, lub też przez c^3, c^2, c, albo przez d^3, d^2, d, i mnogości dodali do czwartego zrównania, mielibyśmy w przypadku piérwszym

$$-b^4 = pb^3 + qb^2 + rb + s,$$

w 2*gim* $\quad -c^4 = pc^3 + qc^2 + rc + s,$

w 3*cim* $\quad -d^4 = pd^3 + qd^2 + rd + s;$

skąd wypada, że jesteśmy przywiedzeni do tegoż samego zrównania, czy to biorąc a, czyli b, albo też c, i. t. d. W rzeczy saméy wszystkie te ilości są jednakowym sposobem wzięte w każdém zrównaniu, więc nie ma przyczyny dla któréyby jedna z nich mogła bydź oznaczoną przez jakie działanie od tych różne, które oznaczają drugą; a w ogólności, jeżeli w odkrywaniu wielu niewiadomych, musimy na każdą z nich używać jednakowego rozumowania, tychże samych działań i tychże samych ilości znanych, więc te ilości będą koniecznie pierwiastkami tegoż samego zrównania.

Naprzykład, piérwsza strona zrównania

$$x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = o,$$
$$-bx^3 + acx^2 - abdx$$
$$-cx^3 + adx^2 - acdx$$
$$-dx^3 + bcx^2 - bcdx$$
$$+bdx^2$$
$$+cdx^2$$

będąc mnogością, z

$$(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d),$$

rozłożyć się może na mnożniki drugiego stopnia, sześcią następuiącémi sposobami:

$$(x-a)(x-b) \times (x-c)(x-d)$$
$$(x-a)(x-c) \times (x-b)(x-d)$$
$$(x-a)(x-d) \times (x-b)(x-c)$$
$$(x-b)(x-c) \times (x-a)(x-d)$$
$$(x-b)(x-d) \times (x-a)(x-c)$$
$$(x-c)(x-d) \times (x-a)(x-b);$$

a stąd wypada, że zrównanie czwartego stopnia może mieć sześć dzielników drugiego.

Skombinowawszy mnożniki proste po trzy na raz, otrzymamy dzielniki trzeciego stopnia dla podanego zrównania; a dla zrównania stopnia n, liczba dzielników będzie

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

i tak daley.

Sposoby Eliminacyi czyli rugowania na zrównania stopni wyższych.

§ 185. Prawidło §*fu* 78, albo sposób podany w § 84, zawsze nam wystarczały na wyrzucenie między dwóma zrównaniami jedney niewiadomey nieprzechodzącey piérwszego stopnia, choćby inne niewiadome jakiegokolwiek były; i w ten czas nawet zastosowalibyśmy jeszcze prawidło §*fu* 78, kiedy niewiadoma byłaby piérwszego stopnia, choć w jedném z podanych zrównań.

Naprzykład, gdybyśmy mieli zrównania

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2,$$
$$x^2+xy=n^2,$$

wyciągnelibyśmy z drugiego wartość y, która byłaby $y=\frac{n^2-x^2}{x}$; a podstawiwszy tę wartość i jéy kwadrat za y i y^2, w zrównaniu piérwszém, otrzymalibyśmy wypadek tylko na x.

§ 186. Gdyby zrównania dane oba były drugiego stopnia ze względu jedney i drugiéy z niewiadomych, nie inaczéy do nich możnaby było stosować poprzedzaiący sposób, aż chyba rozwiązawszy jedno z tych zrównań, albo co do x, albo co do y.

Naprzykład, niech będą zrównania

$$ax^2+bxy+cy^2=m^2,$$
$$x^2+y^2=n^2,$$

drugie daie

$$y=\pm\sqrt{n^2-x^2};$$

włożywszy tę wartość za y i y^2 w zrównaniu piérwszém, otrzymamy

$$ax^2\pm bx\sqrt{n^2-x^2}+c(n^2-x^2)=m^2.$$

Zdaie się żeśmy odpowiedzieli naszemu zamiarowi, ponieważ ten wypadek nie zawiéra już więcéy niewiadomey y; ale jeszcze nie możemy rozwiązać zrownania na x, nieprzywiodłszy go wprzódy do wymiernego kształtu, niszcząc znak pierwiastkowy obeymuiący niewiadomą.

Łatwo jest widzieć, że jeżeliby znak pierwiastkowy sam jeden był w stronie zrównania, tobyśmy go znieśli, podniosłszy tę stronę do kwadratu; więc zebrawszy wszystkie wyrazy wymierne do jedney strony, będziemy mieli

$$ax^2+c(n^2-x^2)-m^2=\mp bx\sqrt{n^2-x^2},$$

podniosłszy zaś do kwadratu obie strony, złożémy zrównanie

$$\left.\begin{matrix}a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4+2acx^2(n^2-x^2)\\-2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2)\end{matrix}\right\}=b^2x^2(n^2-x^2),$$

które już nie zawiéra pierwiastkowego znaku.

Sposób dopiéro przez nas użyty na oswobodzenie zrównań od znaku pierwiastkowego, powinien bydź dobrze poznany, ponieważ często nadarza się jego użycie: zasadza się on *na odosobnieniu znaku pierwiastkowego, który chcemy zniszczyć, a potém na podniesieniu obu stron podanego zrównania do potęgi oznaczoney stopniem tego pierwiastkowego znaku*.

§ 187. Zawiłość tego sposobu, która naywiększą się staie, kiedy w zrównaniach wiele znayduie się pierwiastkowych znaków, połączona z trudnością rozwiązania jednego z podanych zró-

wnań co do jedney z niewiadomych, z tą mówię trudnością, która często jest nieprzełamaną w stanie teraźnieyszym Algebry, znagliła do szukania innego sposobu, za któregoby pomocą można było bez tego rugowanie odbywać; a zatém iżby rozwiązywanie zrównań, było ostatniém z działań, jakich wymaga rozwiązywanie zagadnień.

Ażeby rachunek łatwieyszym zrobić, położymy zrównania o dwóch niewiadomych pod postacią zrównań o jedney, wystawuiąc tę na widok, którą wyrzucić chcemy. Gdybyśmy naprzykład mieli

$$x^2+axy+bx=cy^2+dy+e,$$

przenieślibyśmy wszystkie wyrazy do jedney strony, szykuiąc je co do x, i byłoby

$$x^2+(ay+b)x-cy^2-dy-e=o,$$

a uczyniwszy dla skrócenia

$$b+ay=P, \quad -cy^2-dy-e=Q,$$

mielibyśmy $x^2+Px+Q=o$.

Zrównanie ogólne stopnia m, o dwóch niewiadomych, zawiérać powinno wszystkie potęgi x i y, nieprzewyższaiące tego stopnia, równie jak mnogości, w których summa wykładników liter x i y niepodnosi się wyżey nad m; możemy więc tak wyrazić zrównanie stopnia m, o dwóch niewiadomych:

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+$$
$$(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}\ldots\ldots+$$
$$(p+qy+ry^2\ldots\ldots+uy^{m-1})x+$$
$$p'+q'y+r'y^2\ldots\ldots+v'y^m=o.$$

W tém zrównaniu niedaiemy współczynnika

dla wyrazu x^m, ponieważ zawsze można przez dzielenie taki oswobodzić wyraz od jego mnożnika, jaki zechcemy, w zrównaniu daném; i jeżeli uczynimy

$$a+by=P,\ c+dy+ey^2=Q,\ f+gy+hy^2+ky^3=R,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p+qy\ldots\ldots+uy^{m-1}=T,\ p'+q'y\ldots\ldots+v'y^m=U,$$

położone ogólne zrównanie prościéy się wyrazi, jak następuie:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=o.$$

§ 188. Jest rzecz pożyteczna uważać, że wyrugowanie ilości x między dwóma zrównaniami drugiego stopnia,

$$x^2+Px+Q=o,\ x^2+P'x+Q'=o.$$

bezpośrednie odbywać się może, odciągaiąc piérwsze od drugiego. To działanie daie

$$(P-P')x+Q-Q'=o,$$

skąd $$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'};$$

włożywszy tę wartość w jedno ze zrównań danych, naprzykład w piérwsze, znaydziemy

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=o;$$

uwolniwszy od mianowników, będziemy mieli

$$(Q-Q')^2-P(Q-Q')(P-P')+Q(P-P')^2=o,$$

nakoniec rozwinąwszy dwa wyrazy ostatnie, i uprościwszy wyrażenie zrównania, wypadnie

$$Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=o.$$

Teraz pozostaie tylko podstawić za P, Q, P' i Q', wartości szczególne na przypadek któryśmy rozważali.

§ 189. Nim daléy postąpimy, wprzódy pokażemy, jak poznaiemy, że wartość jednéy któreykolwiek z niewiadomych, razem czyni zadosyć obu zrównaniom danym. Abyśmy się lepiéy objaśnili w téy rzeczy, weźmy przykład szczególny.

Niech będą zrównania

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0 \ldots\ldots (1)$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0 \ldots\ldots (2.)$$

które przypuszczamy, że wynikaią z tego podanego pytania, w którém powinno bydź $y=3$.

Ażebyśmy to ostatnie twierdzenie sprawdzili, wprzódy należy podstawić 3 za y, w zrównaniach podanych, co daie

$$x^3+9x^2+27x-98=0 \ldots\ldots (A)$$
$$x^2+12x-28=0 \ldots\ldots (B)$$

zrównania, które powinny przyiąć tęż samą wartość na x, jeżeli naznaczona na y jest prawdziwa. Jeżeli wartość na x, oznaczemy przez α, potrzeba będzie na mocy położonego dowodu w §*ie* 179, ażeby zrównania (A) i (B) oba rozdzielić się mogły przez $x-\alpha$; będą więc miały spólnego dzielnika, którego częścią będzie $x-\alpha$; i w rzeczy saméy znaydziemy, że tym spólnym dzielnikiem jest $x-2$ (§ 48); mamy więc $\alpha=2$. A zatém wartość $y=3$, służy na pytanie dane i odpowiada na $x=2$.

Jeźliby pozostawała jakowaś o tém wątpliwość, że spólny dzielnik zrównań (A) i (B), powinien dać wartość na x, to ją zaraz usuniemy

$$x^3+3x^2y+3y^2x-98 \;\big|\; x^2+$$
$$-x^3-4x^2y+2y^2x+10x \;\big|\; x-$$
$$-x^2y+5y^2x+10x-98$$
$$+x^2y+4y^2x-2y^3-10$$

1*sza* Reszta .... $+(9y^2+10)x-2y$

czyli raczéy $(9y^2+10)x^2$

$$-(9y^2+10)x^2$$

czyli raczéy $(38y^3+50y+$

$$-(38y^3+50y+04$$

2*ga* Reszta 04

Tę resztę zrównawszy z zezy piérwszy wyraz dodatnym, wyp

4

022148

uważywszy, że te zrównania wypadaią na

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0,$$
$$(x+14)(x-2)=0,$$

skąd oczywiście się pokazuie, że im zadosyć się czyni kiedy położémy 2, za x.

§ 190 Sposób dopiéro podany na znalezienie wartości x, kiedy na y jest znana; bezpośrednie stosować się może do wyrugowania x.

W rzeczy saméy, kiedy odbywamy działania na zrównaniach (1) i (2), służące do wyśledzenia czy maią one spólnego dzielnika na x, tedy zamiast wynalezienia jego jednego przychodzimy jeszcze do reszty, która zawiéra tylko niewiadomą y i liczby dane; oczywista jest także, że jeżeli za niewiadomą y położemy jéy wartość 3, ona powinnaby zniknąć, ponieważ przez to samo podstawianie, zrównania (1) i (2), staią się zrównaniami (A) i (B) które maią spólny dzielnik. Więc tę resztę zrównawszy z zero, wyrazimy warunki jakie spełnić powinny wartości na y, ażeby oba zrównania dane razem przyiąć mogły wartość na x.

Dołączona tu tablica zawiéra szczegóły działania stosowanego do zrównań

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0,$$

które nas zatrudniały w §*ście* poprzedzaiącym: za dzielnika ostatecznego wynaleźliśmy,

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98;$$

a reszta położona równa zero, daie

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0,$$

zrównanie, które przyimuie, prócz wartości $y=5$ nadaney wyżéy, wszystkie inne wartości niewiadomey y, jakie tylko podane pytanie przyiąć jest zdolne.

Gdybyśmy piérwszą resztę uczynili zero, nim ostatnia stała się spólnym dzielnikiem podanych zrównań, i położyli w niéy za y wartość, otrzymalibyśmy wartość x. Wiedząc naprzykład, że $y=3$, włóżmy tę liczbę za y, w ilość

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98,$$

zrównaymy ją potém z zero, a wypadnie zrównanie piérwszego stopnia

$$91x-182=0 \text{ czyli } x=2.$$

§ 191. Działanie, które odbyliśmy na szczególnych przykładach, do wielu ważnych prowadzi nas uwag. Naprzód wydarzyć się może, że wartość na y, sama stanie się zero, przed ostatnią resztą; w takowym razie reszta poprzedzaiąca, czyli ta w któréy x jest drugiego stopnia, stanie się spólnym dzielnikiem podanych zrównań. Wprowadziwszy do niey wartość y, a potém przywiodłszy ją do zero, będziemy mieli zrównanie drugiego stopnia o jednéy tylko niewiadomey x, któréy dwie wartości odpowiedzą na znaną wartość y. Gdyby jeszcze i ta wartość przywodziła do zero resztę drugiego stopnia, na ten czas należy się udać do reszty poprzedzaiącéy, w któréy x podniosłoby się do trzeciego stopnia, ponieważ w tym razie byłaby spólnym dzielnikiem dwóch podanych zrównań; a wartość na y odpowiadałaby trzem wartościom na x. W ogólności, wrócić się należy do téy reszty, która się nie niszczy przez podstawienie wartości za y.

Może się jeszcze zdarzyć iż żadnéy nie będzie reszty, czyli że reszta zawierać będzie same ilości znane.

W przypadku piérwszym, oba zrównania maią spólny dzielnik bez wszelkiego oznaczania wartości na y; i są one takiego kształtu

$$P \times D=0, \quad Q \times D=0,$$

gdzie D jest spólnym dzielnikiem. Oczywista jest rzecz, iż obu zrównaniom razem uczyni się zadosyć, zrobiwszy $D=0$; i to zrównanie oznaczy jednę z niewiadomych za pomocą drugiéy, jeżeli mnożnik D obie je zawiérać będzie; lecz jeżeli tylko zawiéra ilości dane i x, na ten czas ta niewiadoma oznaczona będzie, a druga nieoznaczona zostanie. Te zaś mnożniki któreby niezawiérały w sobie x, łatwobyśmy otrzymali podług uwagi §*fu* 50.

Jeżeli uczynimy razem

$$P=0, \quad Q=0,$$

przyidziemy jeszcze do dwóch zrównań, które będą mogły dać rozwiązania oznaczone podanego pytania.

Niech będzie naprzykład

$$(ax+by-c)(mx+ny-d)=0,$$
$$(a'x+b'y-c')(mx+ny-d)=0;$$

przypuściwszy naprzód, że drugi mnożnik spólny obudwóm zrównaniom jest zero, tedy między niewiadomémi x i y będziemy mieli jedno tylko zrównanie

$$mx+ny-d=0;$$

i pod tym względem pytanie nieoznaczone będzie: zniosłszy zaś ten mnożnik, wpadniemy

na zrównania $ax+by-c=o$, $a'x+b'y-c'=o$,

czyli $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$;

i w tym przypadku pytanie będzie oznaczone, ponieważ tyle będziemy mieli zrównań ile niewiadomych.

W przypadku, gdzie reszta nie zawiera tylko ilości dane, oba podane zrównania są sobie wbrew przeciwne; gdyż spólny dzielnik stanowiący jednoczasową ich bytność, nie może mieć mieysca tylko za pomocą jednego warunku niepodobnego do spełnienia; ponieważ ten wpada na ilości dane, i wprowadza na wypadek całe sprzeczny. Ten przypadek stosuie się do tego jakiśmy widzieli w §*ie* 68, na zrównaniach piérwszego stopnia (*).

§ 192. Jeżeli więc mamy dwa jakiekolwiek zrównania

$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}.....+Tx+U=o$,

$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}.....+Y'x+Z'=o$,

(*) *Można z łatwością wnosić z tego co poprzedziło, że odkrycie zrównania ostatecznego wyciągnione z dwóch zrównań o dwóch niewiadomych, jest w ogólności zadaniem oznaczoném; lecz toż samo ostateczne zrównanie odpowiedzieć może na nieskończone systemata zrównań o dwóch niewiadomych. Wziąwszy odwrótnie sposoby przez które otrzymuiemy naywiększy spólny dzielnik dwóch ilości, byłoby niezmiernie łatwo, według upodobania te systemata poskładać; ale to pytanie nadto jest małego użycia w matematyce początkowéy, abyśmy się tu nad niém zastanawiali, i obciążali się drobnémi uwagami, jakieby nam te nastręczyć mogło. Są to przedmioty, które należy zostawić przebiegłości poiętnego czytelnika, który zapewne sam ich nieomieszka wynaleśdź, jeźli jakowa okoliczność da mu ich potrzebę uczuć.*

gdzieby druga niewiadoma y, ukrytą była we współczynnikach P, Q, i. t. d. P', Q', i. t. d; na ten czas poszukawszy naywiększego spólnego dzielnika piérwszych stron tych zrównań, rozłożylibyśmy je na inne prostsze, gdziebysmy przyszli do reszty nie zależącéy od x, którą wypadałoby położyć zero. Ta reszta składałaby *ostateczne zrównanie* podanego pytania, gdyby nie zawiérała obcych temu pytaniu mnożników, ale te nayczęściéy w nię wprowadzaią wielowyrazy na y, które w różnych ilościach biorących się następnie za dzielniki, mnożą naywyższą potęgę x; skąd przychodzimy do nayzawilszego wypadku, jakim szukany bydź nie powinien. Abyśmy w błąd niewpadli względem wartości na y, wynikaiących z tych mnożników, ta się naypiérwsza myśl nastręcza, ażeby w podanych zrównaniach podstawiać bezpośrednie każdą z tych wartości, jakie daie samo jedno zrównanie na y; gdyż wszystkie wartości, które tym zrównaniom spólny dzielnik dać mogą, należą koniecznie do pytania; inne zaś powinny bydź usunięte. Czuiemy także, że zrównanie ostateczne mogłoby się stać niezupełném, gdybyśmy w ciągu rachunku znieśli jaki mnożnik na y; ale te wszystkie okoliczności, które rozbiérane były przez P. *Bret* w 15, sexternie Dziennika szkoły Politechnicznéy i przez P. *Lefébure* w Nrze 3, IIgo tomu *Korrespondencyy* téyże szkoły, małe w praktyce stanowią użycie wyżéy wytkniętego sposobu, i nad nie powinien bydź ten przekładany, który podamy, według *Eulera*, w §*ie* następniącym.

§ 193. Niech będą dwa zrównania

$x^3+Px^2+Qx+R=o$,

$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=o$;

wyraziwszy przez $x-\alpha$ mnożnika, który powinien bydź spólny obu zrównaniom, kiedy niewiadoma y, jest należycie oznaczona; będziemy mogli piérwsze z tych zrównań uważać za mnogość z $x-\alpha$, przez mnożnika drugiego stopnia x^2+px+q, a drugie za mnogość z $x-\alpha$, przez mnożnika trzeciego stopnia $x^3+p'x^2+q'x+r'$, gdzie p i q, p', q' i r', są nieoznaczonémi współczynnikami: będziemy więc mieli

$$x^3+Px^2+Qx+R=(x-\alpha)(x^2+px+q),$$
$$x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S'=(x-\alpha)(x^3+p'x^2+q'x+r').$$

Wyrugowawszy dwówyraz $x-\alpha$, jako niewiadomą piérwszego stopnia (§ 84), znaydziemy

$$(x^3+Px^2+Qx+R)(x^3+p'x^2+q'x+r')=$$
$$(x^4+P'x^3+Q'x^2+R'x+S')(x^2+px+q).$$

Ten wypadek powinien się sprawdzić, żadnéy szczególnéy na x nie naznaczaiąc wartości; co się stać nie może, kiedy piérwsza strona niebędzie się składać z tychże samych co i druga wyrazów; należy więc wykonawszy wskazane mnożenia, równać między sobą współczynniki, jakie przy każdéy potędze x, w obudwóch stronach znaydować się będą; przez co otrzymamy następuiące zrównania:

$$P+p'=P'+p, \qquad Rp'+Qq'+Pr'=S'+R'p+Q'q$$
$$Q+Pp'+q'=Q'+P'p+q, \qquad Rq'+Qr'=S'p+R'q$$
$$R+Qp'+Pq'+r'=R'+Q'p+P'q, \qquad Rr'=S'q.$$

Aże mamy te sześć zrównań, które zawiéraią pięć ilości nieoznaczonych, to jest: p,q, p',q' i r'; zatém będziemy mogli wyrzucić te ilości, które są tylko piérwszego stopnia, i przyiśdź do takowego zrównania, które zawiéraiąc same tylko ilości P, Q, R, P', Q', R', i S', wyrażać będzie ten warunek bez którego nie moglibyśmy zadość uczynić warunkom podanego pytania, przeto otrzymamy zrównanie ostateczne na y (*).

Jeżeliby to zrównanie znalazło się *tosamé* (identique), stądby wypadło, że zrównanie podane miałoby przynaymniéy jeden mnożnik kształtu $x-\alpha$, jakimbykolwiek było y; a jeżeliby prze-

(*) Wyłożony tu sposób *Eulera*, polega na mnożeniu każdego z podanych zrównań przez takowego mnożnika, któregoby współczynniki nieoznaczone były, tudzież na równaniu mnogości i takowém szykowaniu współczynników, ażeby wyrazy z niewiadomą x, niszczyły się z sobą. Oto jest, co On podał w swoiém dziele pod tytułem: *Wprowadzenie nieskończoności w rozbiór*, (Introduction à l'analyse des infinis). Tam k znaczy wykładnika stopnia mnogości, wykładnik zaś mnożników znaduie się $k-m$ na zrównanie stopnia m, a $k-n$ na zrównanie stopnia n. Piérwszy wyraz każdego z tych mnożników, ma za współczynnika jedność, piérwsze zrównanie zawiéra $k-m$ współczynników nieoznaczonych, a drugie $k-n$. Summa mnogości obeymuie liczbę k wyrazów z x; lecz należy tylko zniszczyć $k-1$, ponieważ wyraz, który zawiéra naywyższą potęgę x, sam przez się ginie. Skąd wynika, że liczba całkowita $2k-m-n$ nieoznaczonych współczynników, powinna bydź równa $k-1$, a zatém $k=m+n-1$; potrzeba więc mnożyć zrównanie stopnia m, przez mnożnika stopnia $n-1$; stopnia zaś n, przez mnożnika stopnia $m-1$, i mnogości równać wyraz z wyrazem. To prawidło jest podobne podanemu w texcie. Rzecz jest pożyteczna uważyć, że ten piérwszy sposób *Eulera* stanowi zarodek sposobu rozwiniętego przez Bezuta w jégo *Teoryi algebraicznych zrównań*, (Théorie des Equations algébriques par Bezout).

ciwnie zrównanie ostateczne same tylko zamykało ilości znane, na ten czas podane zrównania byłyby sobie sprzeczne.

Kiedy zrównanie ostateczne mieysce mieć może, wtedy otrzymuiemy mnożnika $x-\alpha$, rozdzieliwszy piérwsze z podanych zrównań przez wielowyraz x^2+px+q i znaydniemy za wieloraz

$$x+P-p,$$

a reszta się zaniedbuie, ponieważ koniecznie powinna bydź żadna, kiedy za y położémy wartość wyciągnioną z ostatecznego zrównania. Zrównawszy z zero dopiéro znaleziony wieloraz, wyciągniemy stąd $x=p-P$,

i ta wartość na x będzie znana, albo przynaymniéy wyrażona w y, jeżeli za p położy się jego wartość wyciągniona ze zrównań piérwszego stopnia złożonych wyżéy.

Toż samo wyrażenie weźmie w ogólności postać ułamkową, i będziemy mieli $x=\frac{M}{N}$, czyli $Nx-M=o$; a tu widzimy, że wartości na y, któreby gubiły razem M i N, sprawdziłyby zrównanie poprzedzaiące nie zależnie od x; coby stąd wynikneło, że przez te wartości, oba podane zrównania nabyłyby wspólnego mnożnika stopnia wyższego od piérwszego. Nietrudno byłoby wrócić się aż do warunków bezpośrednich, które wytykaią tę okoliczność; ale podobne szczegóły przechodzą zakrés, jakiśmy sobie w tych naznaczyli początkach.

§ 194. Niech będą naprzód dla przykładu zrównania

$$x^2+Px+Q=o, \quad x^2+P'x+Q'=o;$$

mnożniki, które mnożą $x-\alpha$, będą tu piérwszego stopnia czyli $x+p$ i $x+p'$: będziemy więc mieli

$$R=o, \quad R'=o, \quad S'=o, \quad q=o, \quad q'=o, \quad r'=o,$$

i wypadnie

$$\left.\begin{array}{c} P+p'=P'+p \\ Q+Pp'=Q'+P'p \\ Qp'=Q'p \end{array}\right\} \text{ czyli } \left\{\begin{array}{c} p-p'=P-P' \\ P'p-Pp'=Q-Q' \\ Q'p-Qp'=o. \end{array}\right.$$

Z piérwszych dwóch zrównań wyciągniemy

$$p=\frac{(P-P')P-(Q-Q')}{P-P'};$$

$$p'=\frac{(P-P')P'-(Q-Q')}{P-P'};$$

co podstawiwszy w trzeciém, wypadnie stąd

$$(P-P')Q'P-(Q-Q')Q'=(P-P')P'Q-(Q-Q')Q,$$

czyli $(P-P')(PQ'-QP')+(Q-Q')^2=o$.

Jeżeli teraz w zrównaniu

$$x=p-P,$$

położémy za p jego wartość wyżéy znaleziona, będziemy mieli

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'}.$$

§ 195. Ażeby czytelnikowi dać pobudkę do wprawy, wskażemy rachunki jakie odbyć należy na wyrugowanie x, niędzy dwóma zrównaniami

$$x^3+Px^2+Qx+R=o, \quad x^3+P'x^2+Q'x+R'=o.$$

W tym przypadku będziemy mieli

$$S'=o, \quad r'=o, \text{ (§ 193)},$$

i wypadną te pięć zrównań

$$P+p'=P'+p,$$
$$Q+Pp'+q'=Q+P'p+q,$$
$$R+Qp'+Pq'=R'+Q'p+P'q,$$
$$Rp'+Qq'=R'p+Q'q,$$
$$Rq'=R'q,$$

którym nadamy takową postać:

$$p-p'=P-P',$$
$$P'p-Pp'+q-q'=Q-Q',$$
$$Q'p-Qp'+P'q-Pq'=R-R',$$
$$R'p-Rp'+Q'q-Qq'=o,$$
$$R'q-Rq'=o.$$

Możnaby podług prawidła (§*fu.* 88), wyciągać ze cztérech którychkolwiek z tych zrównań, wartości niewiadomych p, p', q, q', ale prostota piérwszego i ostatniego z tychże samych zrównań przyiśdź prędzéy do wypadku pozwala. Zrobimy więc dla skrócenia, $P-P'=e$, $Q-Q'=e'$, $R-R'=e''$, i wyprowadzimy z piérwszego i drugiego, zrównań podanych,

$$p'=p-e,\quad q'=\frac{R'q}{R};$$

potém włożywszy te wartości w trzy pozostałe i uwolniwszy od mianownika R, otrzymamy

$$(P'-P)Rp+(R-R')q=R(e'-Pe)\ldots\ldots(A),$$
$$(Q'-Q)Rp+(RP'-PR')q=R(e''-Qe)\ldots\ldots(B),$$
$$(R'-R)Rp+(RQ'-QR')q=-R^2e\ldots\ldots\ldots(C).$$

Teraz, jeżeli ze zrównań (A) i (B) wyciągniemy wartości na p i q (§ 88), i zniesiemy w nich

mnożnika R, który spólny będzie licznikom i mianownikowi, otrzymamy

$$p=\frac{(e'-Pe)(RP'-PR')-(R-R')(e''-Qe)}{(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)},$$
$$q=\frac{(P'-P)(e''-Qe)R-R(e'-Pe)(Q'-Q)}{(P'-P)(RP'-PR')-(R-R')(Q'-Q)};$$

włożywszy te wartości w zrównanie (C), otrzymamy ostateczne zrównanie rozdzielne przez R, które przywiedzie się do

$$(R'-R)\left|\overline{(e'-Pe)}(RP'-PR')-(R-R')\overline{(e''-Qe)}\right|$$
$$+(RQ'-QR')\left|\overline{(P'-P)}(e''-Qe)-(e'-Pe)\overline{(Q'-Q)}\right|$$
$$=-Re\left|\overline{(P'-P)}(RP'-PR')-(R-R')\overline{(Q'-Q)}\right|$$

gdzie nic więcéy niepozostaie tylko za litery e, e', e'', podstawić ich wyżéy położone wartości.

§ 196. Gdybyśmy mieli między trzema niewiadomémi x, y, i z, równą liczbę zrównań wyrażonych przez (1), (2) i (3), a chcieli te niewiadome oznaczyć, moglibyśmy naprzykład kombinować zrównanie (1) z (2) i z (3), na wyrugowanie x, potém wypędzić y z dwóch otrzymanych wypadków; lecz należy uważać, że przez takowe rugowanie następne, podane trzy zrównania nierównym przyczyniaią się sposobem do utworzenia ostatecznego zrównania: zrównanie (1) użyte jest dwa razy, kiedy (2) i (3) raz tylko jeden, a stąd się zdarza, że wypadek do którego się przychodzi, bywa zawikłany obcym od pytania mnożnikiem (§ 84). *P. Bezout* w swoiéy *Teoryi zrównań*, użył sposobu który téy nieprzyzwoitości nieulega, a którym dowodzi, że *stopień ostatecznego zró-*

wnania wynikłego z rugowania między jakąkolwiek liczbą zrównań zupełnych, zawiéraiąc równąż niewiadomych liczbę i jakichkolwiek stopni, jest równy mnogości z wykładników oznaczaiących stopień tych zrównań. *P. Poisson* Professor w szkole Politechniczney w Paryżu, na toż samo założenie dał dowodzenie daleko prostsze i krótsze od podanego przez *P. Bezout*: ale wiadomości jakich to dowodzenie wymaga nie pozwalaią nam jego wykładać w tém mieyscu; znaleśdź je można w *Dopełnieniu Algebry* (Complément d'Algèbre par Lacroix), tu jednak możemy tę uwagę zrobić, że to założenie łatwém jest do sprawdzenia na zrównaniach ostatecznych położonych w §§. 194 i 195. Przypuściwszy ze zrównania podane w tych §§ch są zupełne, że niewiadoma y wchodzi do piérwszego stopnia w P i P', do drugiego w Q i Q', do trzeciego w R i R'; wypada stąd, że e będzie piérwszego stopnia, e' drugiego, e'' trzeciego, i że wyrazy naywyższego stopnia mnogości wskazanych, w ostateczném zrównaniu §*fu.* 194, będą miały za wykładnika 4 czyli 2 . 2; a wykładnikiem zrównania ostatecznego w §*fie* 195, będzie 9 czyli 3 . 3.

O Wynaydowaniu pierwiastków wymiernych i o pierwiastkach równych Zrównań liczbowych.

§ 197. Dawszy poznać główne własności zrównań algebraicznych i sposób na rugowanie z nich niewiadomych, kiedy się tych wiele znayduie; zaymiemy się teraz rozwiązywaniem liczbowych zrównań o jedney niewiadomey, to jest: rozezna-

niem ich pierwiastków, jeżeli ich współczynniki są wyrażone w liczbach (*).

Zaczniemy od pokazania że *jeżeli podane zrównanie ma za współczynniki same tylko całkowite liczby, a współczynnikiem piérwszego wyrazu jest jedność, na ten czas jego pierwiastki nie będą mogły wyrażać się przez ułamki, a tém samém nie mogą bydź tylko całkowitémi liczbami, albo liczbami niewymiernémi.*

Abyśmy to założenie dowiedli, niech będzie zrównanie

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots\ldots + Tx + U = o,$$

w którém podstawiwszy ułamek niewydzielny $\frac{a}{b}$ za x, otrzymamy

$$\frac{a^n}{b^n} + P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} \ldots\ldots + T\frac{a}{b} + U = o;$$

w tém zrównaniu przywiodłszy wszystkie wyrazy do jednakowego mianownika, będziemy mieli

$$a^n + Pa^{n-1}b + Qa^{n-2}b^2 \ldots\ldots + Tab^{n-1} + Ub^n = o,$$

co wypada na

$$a^n + b\,(Pa^{n-1} + Qa^{n-2}b \ldots\ldots + Tab^{n-2} + Ub^{n-1}) = o$$

(*) Na stopnie wyższe od czwartego, nie mamy rozwiązania ogólnego, i nie ma właściwie mówiąc tylko rozwiązanie zrównań drugiego stopnia, które może się uważać za zupełne. Wyrażenia pierwiastków, zrównań trzeciego i czwartego stopnia, są nayzwikłańsze, podlegaiące wyiątkom, i w praktyce daleko mniéy wygodne od sposobów któreśmy wyłożyli; jednak znaleśdź je można *w Dopełnieniu téy Algebry* (Complément d'Algèbre par Lacroix), i w *Teoryi Rachunku Algebraicznego* J. Sniadeckiego,

Piérwsza strona tego ostatniego zrównania składa się z dwóch całkowitych części, z których jedna jest rozdzielna przez b, a druga nie jest (§ 98), ponieważ przypuściliśmy że ułamek $\frac{a}{b}$ jest przywiedziony do nayprostszego wyrażenia, w którém a i b nie maią żadnego spólnego dzielnika; jedna więc z tych części niemoże niszczyć drugiéy.

§ 198. Ta to jest uwaga, z któréy przekonaliśmy się o użyteczności oswobodzania zrównań od ułamków czyli raczéy robienia ich współczynników całkiemi; ale tym sposobém iżby współczynnikiem wyrazu piérwszego była tylko jedność: do czego przychodzimy *uczyniwszy niewiadomą podaną, równą nowéy niewiadomey rozdzieloney przez mnogość ze wszystkich mianowników zrównania*, a potém przywiodłszy wszystkie wyrazy do jednakowego mianownika, sposobem wyłożonym w §*ie* 52.

Naprzykład, niech będzie zrównanie

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=o;$$

weźmy $x=\frac{y}{mnp}$, i to wyrażenie na x, włożywszy w zrównanie dane, otrzymamy

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=o;$$

ponieważ dzielnik wyrazu piérwszego zawiéra wszystkie mnożniki dzielników innych, przeto rozmnożywszy przez niego wszystkie wyrazy, przywiedziemy każdy wyraz do nayprostszego wyrażenia, i znaydziemy

$$y^3+anpy^2+bm^2np^2y+cm^3n^3p^2=o.$$

Kiedy mianowniki m, n, p, maią spólne dzielniki, na ten czas należy tylko dzielić y przez naymnieyszą liczbę, która razem przez wszystkie mianowniki dzielić się może. Te uproszczenia dosyć są łatwe do poięcia, abyśmy się nad niémi zastanawiać mieli; przestaniemy tylko na pokazaniu, że jeżeliby wszystkie mianowniki były równe m, dosyćby było uczynić $x=\frac{y}{m}$.

Zrównanie podane któreby w tém razie było

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{m}=o,$$

stałoby się $$\frac{y^3}{m^3}+\frac{ay^2}{m^3}+\frac{by}{m^2}+\frac{c}{m}=o,$$

i mielibyśmy $y^3+ay^2+bmy+m^2c=o$.

Oczywista jest rzecz, że dopiéro wymienione działanie wypada na mnożenie wszystkich pierwiastków podanego zrównania przez liczbę m, ponieważ $x=\frac{y}{m}$ daie $y=mx$.

§ 199. Teraz, ponieważ a jest pierwiastkiém zrównania $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots..+Tx+U=o$, przeto mamy $U=-a^n-Pa^{n-1}\ldots..-Ta$ (§ 179); skąd wypada, że a jest koniecznie jednym z dzielników liczby całkowitéy U, a zatém jeżeli ta liczba mało ma dzielników, to dosyć będzie koleyno je podstawiać za x, w zrównaniu podaném, aby rozeznać czy to zrównanie ma jaki pierwiastek w liczbie całkowitéy lub nie.

Naprzykład, gdybyśmy mieli zrównanie

$$x^3-6x^2+27x-38=0,$$

w którém liczba 38, nie ma innych dzielników tylko liczby 1, 2, 19, 38,

wtedy probuiąc je tak dodatnie jak i odjemnie, znaleźlibyśmy, że jedna tylko liczba całkowita $+2$, zadosyć czyni podanemu zrównaniu, czyli że $x=2$. Rodzieliwszy potém zrównanie podane przez $x-2$, i wieloraz przywiodłszy do zero, otrzymalibyśmy zrównanie $x^2-4x+19=0$,

którego pierwiastki są urojone; a rozwiązawszy to zrównanie, odkrylibyśmy, że podane ma trzy pierwiastki

$$x=2,\ x=2+\sqrt{-15},\ x=2-\sqrt{-15}.$$

§ 200. Sposób któryśmy wskazali na odkrycie liczby całkowitéy, która zadosyć czyni zrównaniu, staie się bezużytecznym kiedy ostatni wyraz tego zrównania ma wiele dzielników; ale zrównanie

$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta,$$

podaie nowe warunki, które rachunek niezmiernie skracaią. Ażeby ten sposób jaśnieyszym zrobić, weźmiemy dla przykładu zrównanie

$$x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$

oznaczywszy przez a jego pierwiastek, będziemy mieli

$$a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0,$$

$$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4,$$

skąd wyciągniemy $\frac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3$.

Widzimy naprzód w tém ostatniém zrównaniu, że $\frac{S}{a}$ powinno bydź liczbą całkowitą.

Potém przeniosłszy R do drugiéy strony, wypadnie $\frac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3$;

dla skrócenia uczyniwszy $\frac{S}{a}+R=R'$, i podzieliwszy obie strony zrównania $R'=-Qa-Pa^2-a^3$, przez a, będziemy mieli

$$\frac{R'}{a}=-Q-Pa-a^2,$$

skąd wniesiemy, że $\frac{R'}{a}$ powinno bydź jeszcze całkowitą liczbą. Przeniosłszy Q do drugiéy strony, i uczyniwszy $\frac{R'}{a}+Q=Q'$, a potém rozdzieliwszy obie strony przez a, otrzymamy $\frac{Q'}{a}=-P-a$,

skąd wniesiemy, że $\frac{Q'}{a}$ powinno bydź liczbą całkowitą. Nakoniec przeniosłszy P do piérwszéy strony, uczyniwszy $\frac{Q'}{a}+P=P'$ i rozdzieliwszy przez a, będziemy mieli

$$\frac{P'}{a}=-1.$$

Zebrawszy warunki któreśmy dopiéro wysłowili, obaczémy, że liczba a będzie pierwiastkiem podanego zrównania, jeżeli zadosyć uczyni zró-

wnaniom $\frac{S}{a}+R=R'$, $\frac{R'}{a}+Q=Q'$,

$$\frac{Q'}{a}+P=P',\quad \frac{P'}{a}+1=0,$$

takim sposobem, ażeby R', Q' i P' były liczbami całkowitémi. Stąd wynika, że dla upewnienia się czy jeden z dzielników a, ostatniego wyrazu S, może bydź pierwiastkiem podanego zrównania, należy

1°. *Dzielić ostatni wyraz przez dzielnika* a, *i do wielorazu dodać współczynnik wyrazu w którym jest* x;

2°. *Dzielić tę summę przez dzielnika* a, *i do wielorazu dodać współczynnik wyrazu w którym jest* x^2;

3°. *Dzielić tę summę przez dzielnika* a, *i do wielorazu dodać współczynnik wyrazu w którym jest* x^3;

4°. *Dzielić tę summę przez dzielnika* a, *i do wielorazu dodać jedność, czyli współczynnik wyrazu w którym jest* x^4; *wypadek powinien bydź równy zeru, jeżeli* a, *jest w rzeczy saméy pierwiastkiem.*

Te prawidła służą na jakikolwiek stopień, uważywszy że za wypadek powinniśmy znaleśdź zero, kiedy przyidziemy do piérwszego wyrazu podanego zrównania (*).

(*) Nietrudno byłoby upewnić się za pomocą wzoru danego na wielorazy w §fie 18o, że ilości $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, wzięte ze znakiem —, są, począwszy od ostatniego wyrazu, współczynnikami wielorazu wielowyrazu $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S$ rozdzielonego przez $x-a$, którym wielorazem jest

$$x^3-\frac{Q'}{a}x^2-\frac{R'}{a}x-\frac{S}{a}.$$

§ 201. Stosuiąc te prawidła do liczbowego przykładu, tak można rachunek urządzić, iżby każdy dowod na wszystkie dzielniki ostatniego wyrazu zarazem był rozciągniony.

Oto, na zrównanie

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0,$$

tablica rachunku:

$$+15,+5,+3,+1,-1,-3,-5,-15,$$
$$+1,+3,+5,+15,-15,-5,-3,-1,$$
$$-19,-17,-15,-5,-35,-25,-23,-21,$$
$$-5,-5,+35,$$
$$+18,+18,+58,$$
$$+6,+18,-58,$$
$$-3,+9,-67,$$
$$-1,+9,+67,$$
$$0.$$

Wszystkie dzielniki ostatniego wyrazu 15, są uszykowane porządkiem wielkości, tak ze znakiem + jak i ze znakiem —, na jednéy linii, (jest to linija dzielników a).

Druga linija zawiéra wielorazy liczby 15, dzielonéy koleyno przez wszystkie jéy dzielniki, (jest to linija ilości $\frac{S}{a}$).

Trzecia linija powstała z dodawania do liczb

na linii poprzedzaiącéy, współczynnika -20, który mnoży x, (jest to linija ilości $R' = \frac{S}{a} + R$).

Czwarta linija zawiéra wielorazy z podzielenia w poprzedzaiącéy każdéy liczby przez jéy odpowiadaiącego dzielnika, (jest to linija ilości $\frac{R'}{a}$). Zaniedbuią się w téy linii wszystkie liczby któreby nie były całkowitémi.

Piąta linija wypada z liczb napisanych w poprzedzaiącey, przydaiąc do każdey z nich liczbę 23 która mnoży x^2, (ta linija odpowiada ilości Q').

Szósta linija zawiéra wielorazy z podzielenia liczb będących na linii poprzedzaiącéy przez odpowiadaiącego dzielnika (zamyka ona ilości $\frac{Q'}{a}$).

Siódma zaymuie summę liczb poprzedzaiącéy i współczynnika -9, który mnoży x^3, (znayduią się w niéy ilości $\frac{Q'}{a} + P$).

Ósma nakoniec otrzymuie się z dzielenia każdéy liczby linii poprzedzaiącéy przez odpowiadaiącego dzielnika, (jest to linija ilości $\frac{P}{a}$); ażeli znaydzie się tylko w téy kolumnie, w któréy jest i $+3$, stąd wnosimy że zrównanie podane ma pierwiastek wymierny $+3$; a zatém że jest rozdzielne przez $x-3$ (*).

Na tablicy poprzedzaiącéy można nie kłaśdź

(*) Składaiąc wieloraz podług noty poprzedzaiącéy wynayduiemy

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 5.$$

dzielników $+1$ i -1, gdyż łatwiéy się one dowodzą przez podstawiania bezpośrednie w podaném zrównaniu.

§ 202. Niech jeszcze dla przykładu będzie zrównanie

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0.$$

Upewniwszy się, że liczby $+1$ i -1 nie czynią zadosyć temu zrównaniu, układa się podług poprzedzaiących prawideł niżéy położona tablica, na to wzgląd daiąc, że wyraz mnożony przez x, jako nieznayduiący się w zrównaniu, musi miéć za współczynnika 0; należy więc znieść liniją trzecią, a czwartą wprost wyprowadzać z drugiéy.

+36,	+18,	+12,	+9,	+6,	+4,	+ 3,	+ 2,	− 2,	− 3,	−4,	−6,	−9,	−12,	−18,	−36
+ 1,	+ 2,	+ 3,	+4,	+6,	+9,	+12,	+18,	−18,	−12,	−9,	−6,	−4	− 3,	− 2,	− 1
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
			+ 1,		+4,	+9,	+ 9	+ 4,		+ 1,							
			−6,		−3,	+2,	+ 2,	− 3,		− 6,							
			− 1,		− 1,		− 1,	+ 1,		+ 1,							
			0,		0,			0,									

W tym przykładzie znayduią się trzy liczby zadość czyniące wszystkim warunkom: témi liczbami są: $+6$, $+3$, i -2. Przeto otrzymuiemy razem trzy piérwiastki do podanego zrównania należące, i przekonywamy się przytém, ze to zrównanie jest mnogością z trzech mnożników prostych $x-6$, $x-3$ i $x+2$.

§ 203. Rzecz jest pożyteczna uważać, że są takie zrównania literalne, które się natychmiast przerabiaią na zrównania liczbowe.

Gdybyśmy naprzykład mieli

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0,$$

tedy uczyniwszy $y = px$, otrzymalibyśmy

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = o,$$

wypadek rozdzielny przez p^3, który przywiedzie się do

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = o.$$

Aże tego ostatniego zrównania, dzielnikiem wymiernym jest $x + 7$, i daie $x = -7$, będziemy więc mieli $y = -7p$.

Zrównanie na y, jest z liczby tych zrównań, które się nazywaią *jednorodne* (équations homogènes), ponieważ bez względu na współczynniki liczbowe, każdy z wyrazów takowego zrównania zamyka równą liczbę mnożników. (*)

§ 204. Gdybyśmy odkryli jeden z pierwiastków zrównania, moglibyśmy brać za niewiadomą, różnicę zachodzącą między tym pierwiastkiem a jednym którymkolwiek z innych, i tym sposobem przyszlibyśmy do zrównania zmnieyszonego o jeden stopień, zawiéraiącego wiele własności znacznych.

Daymy ogólne zrównanie

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = o,$$

i niech będą jego pierwiastkami a, b, c, d, i. t. d; podstawiwszy w niém $a + y$ za x, i rozwinąwszy potęgi, otrzymamy

(*) Czytelnicy którzyby chcieli miéć więcéy odkryć o wyszukiwaniu *wymiernych dzielników* zrównań, znaydą je w IIIciéy części Początków Algebry Kléro (*Elémens d'Algebre de Clairaut*). Ten Jeometra równie dobrze zatrudniał się zrównaniami liczbowémi jak i literalnémi.

$$\left.\begin{array}{l} a^m + ma^{m-1}y \quad + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 + \ldots\ldots + y^m \\ + Pa^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2}y + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2 + \ldots \\ + Qa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3}y + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 + \ldots \\ + Ra^{m-3} + (m-3)Ra^{m-4}y + \frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Ta \quad + Ty \\ + U \end{array}\right\} = o.$$

wypadek, którego piérwsza kolumna podobna do podanego zrównania sama się niszczy, ponieważ a jest jednym z pierwiastków tego zrównania; możemy więc usunąć tę kolumnę, a potém dzielić przez y wszystkie pozostałe wyrazy: na ten czas stanie się

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y + \ldots\ldots\ldots + y^{m-1} \\ + (m-1)Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y + \ldots\ldots\ldots \\ + (m-2)Qa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y + \ldots\ldots\ldots \\ + (m-3)Ra^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y + \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + T \end{array}\right\} = o.$$

To zrównanie oczywiście będzie miało za swoie $m-1$ pierwiastki,

$y = b - a$, $y = c - a$, $y = d - a$ ..... i. t. d.

Wyrazimy je przez

$$A+\frac{B}{2}y+\frac{C}{2.3}y^2\ldots.+y^{m-1}=o\ldots.(D);$$

uczyniwszy dla skrócenia

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots.+T=A,$$

$$m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}\ldots\ldots\ldots=B,$$

i. t. d,

i oznaczémy przez V, wyrażenie

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots.+Ta+U.$$

§ 205. Jeżeli zrównanie podane ma dwa pierwiastki równe, jeżeli naprzykład jest $a=b$, w ten czas jedna z wartości na y, to jest, $b-a$, stanie się zero; więc potrzeba będzie, ażeby zrównaniu (D) zadosyć się stało uczyniwszy w niém $y=o$; aże to przypuszczenie wszystkie wyrazy niszczy, wyłączywszy wyraz cale znany A; więc ten ostatni sam przez się powinien bydź zero; wartość zatém a, powinna razem zadosyć uczynić dwóm zrównaniom

$$V=o,\quad A=o.$$

Kiedy podane zrównanie miéć będzie trzy pierwiastki równe, to jest: $a=b=c$, wtedy dwa z pierwiastków zrównania (D), razem staną się zero, to jest: $b-a$ i $c-a$; w tym przypadku zrównanie (D) będzie rozdzielne ciągiem dwa razy przez $y-o$ (§ 179), czyli przez y; co się w ten czas tylko zdarza, kiedy współczynniki A i B są żadne; potrzeba więc ażeby wartość a, razem zadość czyniła trzem zrównaniom

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o.$$

Postępuiąc drógą tych rozumowań obaczémy, że jeżeli zrównanie podane będzie miało cztéry pierwiastki równe, to zrównanie (D) miéć będzie

trzy pierwiastki równe zero, czyli będzie rozdzielne przez y, ciągiem trzy razy, co wymaga ażeby współczynniki A, B i C, razem były zero, a tém samém iżby wartość na a, czyniła zadosyć jednoczasowie cztérem zrównaniom

$$V=o,\quad A=o,\quad B=o,\quad C=o.$$

Za pomocą tego sposobu, nie tylko rozpoznawać możemy czy pierwiastek a, znayduie się wiele razy po między pierwiastkami podanego zrównania; ale jeszcze wyprowadzamy sposób zapewnienia się, czy ma to zrównanie powtarzane pierwiastki, których nie znamy wartości. Na ten koniec uważać należy, że w przypadku, gdzie $A=o$, czyli

$$ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}\ldots.+T=o,$$

uważać możemy a za pierwiastek zrównania

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots.+T=o,$$

niewiadomą jakąkolwiek znaczy w ten czas x: aże a jest także pierwiastkiém zrównania $V=o$, czyli zrównania

$$x^m+Px^{m-1}+\text{ i. t. d.}=o,$$

wynika zatém z §fu 189, że $x-a$ jest spólnym mnożnikiem dwóch tylko co wymienionych zrównań.

Zamieniwszy podobnież a na x, w ilościach B, C, i. t. d. dwówyraz $x-a$, stanie się równie mnożnikiém nowych zrównań $B=o$, $C=o$, i. t. d, jeżeli pierwiastek a, niszczy pierwotne ilości B, C, i. t. d.

Cośmy powiedzieli o pierwiastku a, toż samo ma się stosować i do każdego innego, któryby wiele razy był powtórzony; przeto, sposobem po-

danym na wynaydowanie naywiększego spólnego dzielnika, poszukawszy spólnych mnożników zrównań $V=o$, $A=o$, $B=o$, $C=o$, i. t. d. te mnożniki dadzą pierwiastki równe podanego zrównania, w następuiącym porządku:

Mnożniki spólne dwóm tylko piérwszém zrównaniom, są podwóynémi mnożnikami podanego zrównania, to jest: jeżeli za spólnego dzielnika między $V=o$ i $A=o$, znayduiemy wyrażenie naprzykład $(x-\alpha)(x-\beta)$, niewiadoma x będzie miała dwie wartości $=\alpha$, i drugie dwie równe β, czyli zrównanie podane będzie miało te cztéry mnożniki:

$$(x-\alpha),\ (x-\alpha),\ (x-\beta),\ (x-\beta).$$

Mnożniki razem spólne trzem powyższém zrównaniom wskazuią mnożniki potróyne podanego; to jest, jeżeli piérwsze są naprzykład $(x-\alpha)(x-\beta)$ drugiemi będą $(x-\alpha)^3(x-\beta)^3$. Łatwo jest te uwagi jak chcąc daleko posuwać.

§ 206. W tém mieyscu naywłaściwiéy uważać, że zrównanie $A=o$, które przez zamianę a na x, staie się

$$mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}\ldots.+T=o,$$

wprost wyciąga się ze zrównania $V=o$, albo z podanego

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Tx+U=o,$$

rozmnożywszy każdy wyraz tego ostatniego, przez wykładnika potęgi x, którą on zawiéra, a potém z mnieyszywszy ten wykładnik jednością; nadto uważać należy, że wyraz U, będąc toż samo co $U\times x^o$, zginąć powinien w tém działaniu, gdzie jest on rozmnożony przez o. Zrównanie $B=o$, wyciąga się z $A=o$, równie jak $A=o$ wyciąga

się z $V=o$; jak $C=o$ wyciąga się z $B=o$, jak to ostatnie z $A=o$, i tak daléy (*).

§ 207. Abyśmy to wyiaśnili przykładem, weźmy zrównanie

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=o;$$

zrównanie $A=o$, staie się w tym przypadku

$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=o,$$

tego zrównania spólnym dzielnikiém oraz i podanego, jest $x^3-8x^2+21x-18$.

Ponieważ ten dzielnik jest trzeciego stopnia, zatém powinien i sam składać się z kilku dzielników; więc należy szukać czy nie ma on spólnych dzielników ze zrównaniem $B=o$, które w tym razie jest $20x^3-156x^2+402x-342=o$;
a znaydziemy w saméy rzeczy za wypadek $x-3$; więc podane zrównanie ma trzy pierwiastki równe 3, czyli przyimuie $(x-3)^3$ liczbę swoich mnożników. Dzieląc na ówczas piérwszy spólny dzielnik przez $x-3$, ciągiem tyle razy ile podobna, to jest razy dwa, znaydziemy $x-2$. Że zaś ten dzielnik, spolny jest zrównaniu podanemu i zrównaniu $A=o$, przeto dwa razy tylko wchodzi w zrównanie dane. W końcu widzimy że to zrównanie jest jednoznaczne, ze zrównaniem

---

(*) Po wielu xiążkach elementarnych dowodzi się ale nayniedokładniéy, że spólny dzielnik między zrównaniami $V=o$ i $A=o$, zawiéra mnożniki równe, podniesione do potęgi mnieyszéy jednością, od potęgi podanego zrównania: łatwobyśmy to wnieśli z tego co poprzedziło; ale ja to założenie do *Dopełnienia téy Algebry* odniosłem, gdzie jest dowiedzione sposobem jak mi się zdaie prostym i nowym.

$$(x-3)^3\,(x-2)^2=0.$$

§ 208. Zrównanie (D), daiąc różnice między pierwiastkiem b a każdym z pozostałych, kiedy się w niém położy b za a, różnice między pierwiastkiem c, a każdym z pozostałych, położywszy w niém c za a, i. t. d, bynaymniéy nieodmieniąc swoiéy formy przez te rozmaite podstawiania, i zachowuiąc też same współczynniki jak i podane, tak z ogólnione bydź może iżby zamykało wszystkie różnice pierwiastków skombinowanych po dwa na raz. Na ten koniec dosyć jest wyrugować z niego a, za pomocą zrównania

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots\ldots+Ta+U=0;$$

gdyż wypadek nie zależący tylko od współczynników, i niezachowuiący żadnego śladu pierwiastku, jaki się w szczególności roztrząsa, równie służyć będzie do wszystkich.

Widoczna jest, że zrównanie ostateczne powinno się podnieść do stopnia $m(m-1)$; gdyż jego piérwiastki

$$a-b,\quad a-c,\quad a-d,\quad \text{i. t. d.}$$
$$b-a,\quad b-c,\quad b-d,\quad \text{i. t. d.}$$
$$c-a,\quad c-b,\quad c-d,\quad \text{i. t. d.}$$

są też same co do liczby, co i przemiany jakie dać mogą m liter $a, b, c,$ i. t. d, szykowanych po dwie na raz. Nadto, ponieważ ilości

$$a-b \text{ i } b-a,\quad a-c \text{ i } c-a,\quad b-c \text{ i } c-b,\quad \text{i. t. d.}$$

nie różnią się tylko znakiem, zatém pierwiastki zrównania będą równe, brane po dwa, na znak niemaiąc względu; a tak jeżeli będziemy mieli $y=a$, razem także będziemy mieli $y=-a$. A stąd wynika, że to zrównanie nie powinno zawiérać tylko te wyrazy, w których niewiadoma jest parzystego stopnia, ponieważ jego piérwsza strona powinna bydź mnogością z pewnéy liczby mnożników drugiego stopnia następuiącego kształtu

$$y^2-\alpha^2=(y-\alpha)(y+\alpha)\ (\S\,184);$$

więc samo zrównanie będzie kształtu

$$y^{2n}+py^{2n-2}+qy^{2n-4}\ldots\ldots+ty^2+u=0.$$

Uczyniwszy $y^2=z$, zamienimy je na

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots\ldots+tz+u=0;$$

że zaś niewiadoma z, jest kwadratem z y, przeto jéy wartościami będą kwadraty różnic pierwiastków podanego zrównania.

Rozważmy tu jeszcze tę okoliczność, że różnice między pierwiastkami rzetelnémi podanego zrównania, koniecznie rzetelne bydź muszą, przeto ich kwadraty będą dodatne, a tém samém i zrównanie na z, nie będzie miało tylko same pierwiastki dodatne, jeżeli podanego same tylko rzetelne będą.

Naprzykład, niech będzie zrównanie

$$x^3-7x+7=0;$$

w tém uczyniwszy $x=a+y$, będziemy mieli

$$\left.\begin{array}{l} a^3+3a^2y+3ay^2+y^3 \\ -7a-7y \\ +7 \end{array}\right\}=0.$$

Zniosłszy wyrazy a^3-7a+7, których zbiór jest zero, według podanego zrównania, i rozdzieliwszy resztę przez y, wypadnie

$$3a^2+3ay+y^2-7=0;$$

wyrugowawszy a, między tém zrównaniem a zrównaniem

$$a^3 - 7a + 7 = o,$$

będziemy mieli

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = o;$$

uczyniwszy $z = y^2$, otrzymamy

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = o.$$

§ 209. Podstawienie $a+y$ za x, w zrównaniu $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + U = o$ (§ 204), niekiedy się także używa na wyrzucenie jednego z wyrazów tego zrównania. Szykuie się na ten czas wypadek według potęg niewiadomey y, która zastępuie niewiadomą x, i uważa się ilość a za niewiadomą drugą, która się otrzymuie przywodząc do zero współczynnika tego wyrazu, który wyrzucić chcemy: tym sposobem mamy

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2y^{m-2} \ldots\ldots + a^m \\ + Py^{m-1} + (m-1)Pay^{m-2} \ldots\ldots + Pa^{m-1} \\ + Qy^{m-2} \ldots\ldots + Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + U \end{array}\right\} = o.$$

Jeżeli wyraz który wyrzucić chcemy jest drugim, czyli ten w którym się mieści y^{m-1}, tedy czynimy $ma + P = o$, skąd wyciągamy $a = -\frac{P}{m}$. Włożywszy tę wartość w wypadek, pozostaną tylko te wyrazy, w których znayduią się

$$y^m, \quad y^{m-2}, \quad y^{m-3}, \text{ i. t. d.}$$

Skąd wynika, że *niszczymy drugi wyrdz zrównanią, podstawiaiąc na mieyscu niewiadomey tego*

zrównania niewiadomą nową, do któréy dołączamy współczynnik drugiego wyrazu z przeciwnym znakiem jaki miał wprzódy, i dzielimy go przez wykładnik wyrazu piérwszego.

Naprzykład, niech będzie zrównanie

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = o;$$

prawidło daie

$$x = y - \frac{6}{3} = y - 2,$$

a podstawuiąc za x, wypadnie

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ + 6y^2 - 24y + 24 \\ - 3y + 6 \\ + 4 \end{array}\right\} = o,$$

co przywodzi się do

$$y^3 - 15y + 26 = o,$$

gdzie już więcéy niewchodzi wyraz y^2. Wyrzucilibyśmy także wyraz trzeci, (w którym jest y^{m-2}), równaiąc do zero zbiór ilości które go mnożą, to jest: położywszy zrównanie

$$\frac{m(m-1)}{1.2}a^2 + (m-1)Pa + Q = o.$$

Postępuiąc daléy tąż samą drogą, łatwo się przekonamy, że zniszczenie wyrazu czwartego, zależéć będzie od zrównania trzeciego stopnia, i tak daléy, aż do ostatniego, który w ten czas tylko będziemy mogli zgubić, kiedy położymy zrównanie

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + U = o,$$

zupełnie podobne do podanego.

Przyczyna tego podobieństwa łatwą jest do odkrycia. Uczynić zero wyraz ostatni zrównania

na y, jest to przypuścić że jedna z wartości téy niewiadomey jest, zero; i jeżeli użyiemy tego przypuszczenia w zrównaniu $x = y + a$, wypadnie stąd $x = a$; to jest, że w tym przypadku ilość a, koniecznie jest wartością x.

§ 210. Mamy niekiedy potrzebę rozkładania zrównań na mnożniki wyższego stopnia od piérwszego; nie będziemy mogli wyłożyć tu ze szczegółami różnych własności, jakie użyte bydź mogą na ten koniec, damy tylko przykład tego wyszukiwania.

Niech będzie zrównanie

$$x^3 - 24x^2 + 12x^2 - 11x + 7 = 0,$$

którego należy oznaczyć mnożniki trzeciego stopnia; wyraźmy jeden z tych mnożników przez

$$x^3 + px^2 + qx + r,$$

współczynniki p, q i r są nieoznaczone. Takiémi one bydź powinny, ażeby piérwsza strona podanego zrównania, była zupełnie rozdzielną przez mnożnika $x^3 + px^2 + qx + r$,

niezależnie od żadnéy wartości na x; lecz odbywszy dzielénie, znaydziemy resztę

$$\begin{aligned} &-(p^3 - 2pq - 24p + r - 12)x^2 \\ &-(p^2q - pr - q^2 - 24q + 11)x \\ &-(p^2r - qr - 24r - 7), \end{aligned}$$

to wyrażenie samo się niszczy niezależnie od x, położywszy w niém za litery p, q i r, wartości przynależne pytaniu: Więc na ten czas będziemy mieli

$$\begin{aligned} p^3 - 2pq - 24p + r - 12 &= 0 \\ p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 &= 0 \\ p^2r - qr - 24r - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Te trzy zrównania zawiérają warunki konieczne na oznaczenie niewiadomych p, q i r; i do ich rozwiązania przywodzi się zrównanie dane.

O Rozwiązywaniu przez przybliżenie zrównań liczbowych.

§ 211. Wyłożywszy sposoby odkrywania dzielników wymiernych, udaymy się teraz do sposobów przybliżania, które polegaią na następuiącém prawidle:

Kiedy wynaydziemy dwie ilości takie, które włożone w zrównanie na mieyscu niewiadomey, daią dwa wypadki z przeciwnémi znakami; możemy stąd wnosić, że jeden z pierwiastków podanego zrównania zawiéra się między témi dwiema ilościami, a zatém że jest rzetelny.

Niech będzie naprzykład zrównanie

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0;$$

jeżeli w niém podstawimy następnie 2 i 20 za x, piérwsza strona coby się miała stać zero, będzie równa -31 w przypadku piérwszym, a $+2939$ w drugim: skąd wnieść możemy, że to zrównanie ma jeden pierwiastek rzetelny zawarty między 2 i 20, to jest większy od 2, a mnieyszy od 20.

Ponieważ często wypadnie nam wyrażać ten związek, użyiemy przeto znaków $>$ i $<$, którémi algebraiści znaczą nierówność dwóch wielkości, kładąc naywiększą z dwóch ilości przed rozwartością znaku, a drugą przy jego spiczastości.

Napiszemy zatém

$x > 2$, za x większe od dwóch,

$x < 20$, za x mnieysze od 20.

To założywszy, abyśmy dowiedli poprzedzające twierdzenie, możemy rozumować jak następuie. Zebrawszy do jednéy strony wyrazy dodatne podanego zrównania, a do drugiéy wyrazy odjemne, otrzymamy ilość

$$x^3+7x-(13x^2+1),$$

która znaydzie się odjemną, kiedy uczynimy $x=2$, ponieważ w tém przypuszczeniu

$$x^2+7x<13x^2+1,$$

a która się dodatną staie, jeżeli uczynimy $x=20$, ponieważ w ów czas

$$x^3+7x>13x^2+1;$$

prócz tego jest widoczna, że ilości

$$x^3+7x \text{ i } 13x^2+1,$$

powiększaią się z obu stron, kiedy na x naznaczaią się coraz większe wartości; biorąc zaś te wartości jak chcąc blizkie jedne drugich, będziemy mogli zrobić, że ilości podane rość będą tak małémi stopniami, jakie osądzimy dla siebie za dogodne. Lecz ponieważ piérwsza z ilości powyższych, wprzódy mnieysza od drugiéy, staie się potém większą, oczywista zatém że jéy wzrost jest daleko prędszy od drugiéy, którym odzyskuie przewyższkę jaką ostatnia nad nią miała, i potém tę przewyższa jest więc moment w którym te dwie ilości są sobie równe.

Wartość na x, jakaby tylko była (byleby jéy bytność dowiedzioną bydź mogła), która czyni

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

i daie $\quad x^3+7x-(13x^2+1)=0,$

czyli $\quad x^3-13x^2+7x-1=0,$

jest koniecznie pierwiastkiem podanego zrównania.

Cośmy widzieli na szczególném zrównaniu

$$x^3-13x^2+7x-1=0,$$

toż samo stosować się może i do jakiegokolwiek innego, którego wyrazy dodatne oznaczémy przez P, a odjemne przez N. Niech będzie a wartością x, która daie wypadek odjemny, i b, która daie dodatny; te dwie okoliczności nie mogłyby mieć miéysca, gdyż przez piérwsze podstawienie mielibyśmy $P<N$, a przez drugie $P>N$: że zaś w tym drugim razie, P przewyższa N, więc stąd wniesiemy, że musi bydź na x jakaś pewna wartość, zawarta między a i b, która daie $P=N$. (*)

Dopiéro odbyte rozumowanie zdaie się wymagać, ażeby wartości które daiemy na x, obie

---

(*) Rozumowania dopiéro odbyte, ogólnie uważane za dosyć widoczne, rozwinięte zostały przez P. Encontre; osądziłem więc za rzecz pożyteczną położyć tu je dla czytelników, którzyby żądali szczegółowych dowodów.

1°. Obaczmy, jak możemy się zapewnić o możności brania przybyszów tak małych jak zechcemy dla, wielowyrazów P i N.

Niech będzie $P=\alpha x^m+\beta x^n\ldots\ldots+\lambda x^q$ (m jest naywiększym wykładnikiem ilości x); jeżeli położymy $a+y$ za x, ten wielowyraz, zamieni się na

$$A+By+Cy^2\ldots\ldots+Ty^m,$$

aże współczynniki $A, B, C, \ldots\ldots T$, są skończoney liczby i skończoney wartości; przeto piérwszy wyraz A, miéć będzie takową wartość, jaką bierze wielowyraz P, kiedy $x=a$; reszta

$$By+Cy^2\ldots\ldots+Ty^m=y(B+Cy\ldots\ldots+Ty^{m-1})$$

będzie tą ilością, na jaką powiększa się ten sam wie-

były albo dodatne, albo odjemne; ponieważ kiedy one są różnych znaków, to ta, która jest odjemną, przemienia znak w wyrazach podanego zrównania, zawiéraiących nieparzyste potęgi x, a za-

---

lowyraz, za powiększeniem y, kiedy wartość $x=a$. To założywszy, jeżeli S wyraża naywiększego ze współczynników $B, C, \ldots T$, tedy będziemy mieli

$$B+Cy\ldots.+Ty^{m-1}<S(1+y\ldots..+y^{m-1});$$

że zaś $1+y\ldots.+y^{m-1}=\frac{1-y^m}{1-y}$ (§ 158);

więc $y(B+Cy\ldots.+Ty^{m-1})<Sy\frac{(1-y^m)}{1-y}$,

a zatém przybysz wielowyrazu P, będzie mnieyszy od ilości jakieykolwiek daney m, jeźli zrobimy $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ mnieyszém od téy ilości; do czego przyidziemy uczyniwszy $\frac{Sy}{1-y}=m$, ponieważ w ten czas $y=\frac{m}{S+m}$, będąc <1, i ilość $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$ równaiąc do $\frac{Sy}{1-y}-\frac{Sy^{m+1}}{1-y}$, koniecznie będzie mnieyszém od ilości m, któréy nic nie ogranicza małości.

2°. Jeżeli przez h wyrazimy przybysz wielowyrazu P, a przez k wielowyrazu N, zachodząca stąd odmiana w wartości ich różnicy, będzie $h-k$, i będzie się mogła stać mnieyszą od ilości daney, uczyniwszy mnieyszym od téy ilości ten przybysz, który jest z dwóch naywiększym; więc w przedziale od $x=a$ do $x=b$, będziemy mogli odmieniać, przez ilości tak małe jak zechcemy, różnicę wielowyrazów P i N; a ponieważ przechodzi ona w tym przedziale z odjemnéy na dodatną, zatém koniecznie zbliży się do zero tak blizko jak zechcemy. (Obacz *les Annales de Mathématiques pures et appliquées*, publiées par M. Gergonne. T. IV. pag. 210).

tém wyrażenia P i N nie są złożone jednakowym sposobem w obu podstawianiach. Ta trudność zniknie uczyniwszy $x=o$; przez co podane zrównanie przywiedzie się do swoiego wyrazu ostatniego, który koniecznie się znaydzie ze znakiem przeciwnym będącemu w wypadku, z piérwszego lub drugiego podstawienia. Niech będzie naprzykład zrównanie $x^4-2x^3-3x^2-15x-3=o$, którego piérwsza strona, (uczyniwszy $x=-1$ i $x=2$) stanie się $+12$ i -45. Dwa podstawiania $x=o$, i $x=-1$, daią więc dwa wypadki przeciwnych znaków; lecz położywszy $-y$ za x, zrównanie podane zamieni się na

$$y^4+2y^3-3y^2+15y-3=o,$$

i mamy $P=y^4+2y^3+15y$, $N=3y^2+3$,

skąd $P<N$, kiedy $y=o$,

$P>N$, kiedy $y=1$.

Możemy więc rozumować w teraźnieyszym przypadku jak w poprzedzaiącym, a stąd wnosić, że zrównanie na y ma pierwiastek rzetelny zawarty między o i $+1$; skąd wypada, że pierwiastek zrównania na x, znayduie się między o i -1, a tém samém między $+2$ i -1.

Założenie dopiéro wysłowione nie mogące dać tylko te przypadki, które wpadaią na jeden lub drugi z tych któreśmy tylko co roztrząsali, jest dostatecznie dowiedzione.

§ 212. Wprzód nim daléy postąpimy, zrobmy tę uwagę, że *jakikolwiek byłby stopień zrównania i jakiekolwiek byłyby jego współczynniki, możemy zawsze naznaczyć taką liczbę, która podstawiona za niewiadomą, robi piérwszy wyraz większym od summy wszystkich innych*. Czuiemy na-

wstępie prawdę tego twierdzenia, chociaż niewiele zastanawialiśmy się nad drogą, którą postępują przybysze różnych potęg liczby od jedności większéy (§ 126), ponieważ pomiędzy témi potęgami, naywyższa tém bardziéy przewyższa inne niższe, im liczba wprowadzona jest większa, tak dalece, że ta przewyższka terminu naywyższéy potęgi, od innych niczém się nieogranicza i nie ścieśnia. Obaczmyż teraz jakim sposobem możemy wynaleśdź liczbę, któraby spełniała wysłowiony warunek.

Widoczna rzecz, że ten byłby nayniepryjaźnieyszy przypadek, w którymby wszystkie współczynniki zrównania stały się odjemnémi, i równémi naywiększemu, to jest, gdybyśmy za

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = o,$$

wzięli $x^m - Sx^{m-1} - Sx^{m-2} \ldots\ldots - Sx - S = o$,

gdzie S znaczy naywiększego ze współczynników $P, Q \ldots T, U$.

Piérwsza strona tego ostatniego zrównania, położona pod kształtem

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1),$$

da nam postrzedz, że

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \text{ (§ 158)};$$

to wyrażenie zamieni poprzedzaiące, na

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}, \text{ czyli na } x^m - \frac{Sx^m}{x - 1} + \frac{S}{x - 1};$$

i jeżeli położymy M na mieyscu x, będziemy mieli

$$M^m - \frac{SM^m}{M - 1} + \frac{S}{M - 1},$$

ilość oczywiście dodatną, kiedy uczynimy

$$M^m = \frac{SM^m}{M - 1}.$$

Rozdzieliwszy teraz obie strony tego zrównania przez M^m, otrzymamy $1 = \frac{S}{M - 1}$ czyli $M = S + 1$.

Podstawiwszy więc za x, naywiększy ze współczynników zrównania powiększony jednością, zrobimy piérwszy wyraz większym od summy wszystkich innych.

Liczba M mogłaby bydź mnieyszą, gdybyśmy zechcieli część dodatną podanego zrównania uczynić większą od części odjemnéy; gdyż na ten koniec, dosyć byłoby piérwszy wyraz większy od summy, którąby dały wszystkie inne, a nawet gdyby ich współczynniki były równe, zrobić nie od wszystkich naywiększym, ale tylko naywiększym od jednego ze współczynników odjemnych; nie należałoby więc tylko wziąć za M tego współczynnika powiększonego jednością. (*)

Stąd wynika, że pierwiastki dodatne podanego zrównania, zawiérać się koniecznie muszą między o i $S + 1$.

Tymże samym sposobem możemy odkryć granicę pierwiastków odjemnych; potrzeba tylko na ten koniec podstawić $-y$ za x, w podaném zró-

(*) W dziele pod tytułem: *La Résolution des équations numériques* par Lagrange (Rozwiązanie zrównań liczbowych przez Lagranza), znayduią się wzory daiące granice bardziéy ściśnięte; lecz to cośmy dopiéro powiedzieli dostateczném dla nas będzie do wyłożenia głównych założeń rozwiązywania zrównań całe nie potrzebuiąc uważania nieskończoności.

wnaniu, i uczynić przez to, piérwszy wyraz dodatnym, jeżeli stał się odjemnym (§ 178). Z tego przerabiania widoczna, że wartości dodatne na y, odpowiadaią wartościom odjemnym na x, i nawzajem. Jeżeli po téy zamianie, R jest naywiększym współczynnikiem odjemnym, tedy $R+1$ będzie granicą wartości dodatnych na y; a zatém $-R-1$ będzie granicą wartości odjemnych na x. Naostatek, jeżelibyśmy chcieli otrzymać, za naymnieyszego z pierwiastków, granicę bardziéy przybliżaiącą się niż zero, tedy przyszlibyśmy do tego, podstawiwszy $\frac{1}{y}$ za x, w podaném zrównaniu, i przerabianie na y tak przygotowawszy, jak przepisaliśmy w *§fie* 178. Aże wartości na y, są odwrótnémi wartości na x, przeto naywiększa z piérwszych, odpowiadałaby naymnieyszéy z drugich, i przeciwnie. Więc gdyby $S'+1$ znaczyło granicę wyższą wartości na y, czyli gdybyśmy mieli

$$y < S'+1, \text{ co dałoby } \frac{1}{x} < S'+1,$$

wypadłoby stąd $1 < (S'+1)x$, $\frac{1}{S'+1} < x$.

W rzeczy bowiem saméy, łatwo postrzegać się daie, że nie mieszaiąc porządku wielkości dwóch ilości oddzielonych znakami $<$ albo $>$, możemy je mnożyć lub dzielić przez jednakową ilość; tudzież możemy także dodać lub odciągać jednakową ilość z każdéy strony znaków $>$ i $<$, które z tego względu jednostayne ze znakiem równości, własności maią.

§ 213. Z tego co poprzedziło wynika, że *każde zrównanie nieparzystego stopnia, ma koniecznie jeden pierwiastek rzetelny z przeciwnym znakiem*

znakowi jego ostatniego wyrazu; albowiem jeżeli weźmiemy liczbę M taką, że znak ilości

$$M^m + PM^{m-1} + QM^{m-2} \ldots\ldots + TM \pm U$$

zależy tylko od znaku piérwszego jéy wyrazu M^m, kiedy wykładnik m jest nieparzysty; wyraz M^m tenże sam znak mieć będzie co i liczba M (§ 128). To założywszy, jeżeli ostatni wyraz U ma znak $+$, a uczynimy $x = -M$, będziemy mieli wypadek z przeciwnym znakiem temu, jaki daie przypuszczenie $x = o$; skąd się pokazuie, że podane zrównanie ma jeden pierwiastek między o i $-M$, to jest odjemny. Jeżeli zaś wyraz ostatni U, ma znak $-$, czynimy w ów czas $x = +M$, a wypadek wynika z przeciwnym znakiem wypadaiącemu z przypuszczenia $x = o$; i w tym przypadku pierwiastek znayduie się między o i $+M$, to jest dodatny.

§ 214. Jeżeli podane zrównanie jest parzystego stopnia, a wyraz piérwszy M^m będzie dodatny, na ten czas jakikolwiek damy znak dla M, nie możemy się upewnić przez to co poprzedziło o bytności pierwiastku rzetelnego, gdy ostatni wyraz ma znak $+$; ponieważ, gdybyśmy i uczynili $x = o$, albo $x = \pm M$, mielibyśmy zawsze wypadek dodatny; ale kiedy ten wyraz jest odjemnym, wtedy uczyniwszy $x = +M$, $x = o$, $x = -M$, znaydziemy trzy wypadki maiące znaki $+$, $-$ i $+$; zatém podane zrównanie ma w tym przypadku przynaymniey dwa pierwiastki rzetelne, jeden dodatny zawarty między M i o, drugi odjemny między o i $-M$; więc, *każde zrównanie parzystego stopnia, którego ostatni wyraz jest odjemny, dwa przynaymniéy ma pierwiastki rzetelne, jeden dodatny, a drugi odjemny.*

§ 215. Przystąpmy teraz do rozwiązywania zrównań przez przybliżenie, a dla lepszego wyiaśnienia tego cośmy już w téy rzeczy powiedzieli, weźmy naprzód przykład. Niech będzie zrównanie

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0;$$

ponieważ tego zrównania naywiększy współczynnik odjemny jest -4, wypada zatém z §*fu* 212, że naywiększy jego pierwiastek dodatny, będzie mnieyszy od 5. Podstawiwszy w niém $-y$ za x, stanie się

$$y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0;$$

ten wypadek, jako maiący wszystkie wyrazy dodatne, pokaznie, że y powinno bydź odjemne, skąd wynika że x jest koniecznie dodatném, oraz że podane zrównanie odjemnych pierwiastków mieć nie będzie; więc pierwiastki rzetelne zawarte bydź muszą między 0 i $+5$.

Piérwszy sposób jaki się nastręcza dla otrzymania bardziéy przybliżonych granic, zależy od następuiących przypuszczeń

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4:$$

jeżeli dwie z tych liczb wstawione w podane zrównanie, daią wypadki z przeciwnémi znakami, tedy te będą nowémi granicami pierwiastków. Przeto uczyniwszy

$x = 1$, piérwsza strona zrównania stanie się $+21$,

$x = 2$, ... $+5$,

$x = 3$, ... -9,

$x = 4$, ... $+15$;

widzimy więc, że to zrównanie ma dwa pierwiastki rzetelne, jeden zawarty między 2 i 3, a drugi

między 3 i 4. Abyśmy się jeszcze bardziéy przybliżyli do piérwszego, weźmiemy średnią między dwiema liczbami które zawiéraią pierwiastek, co nam da 2,5 (*); potém położymy $x = 2,5$; wypadek z tego podstawienia, który jest

$+39,0625 - 62,5 - 7,5 + 27 = -3,9375$, ponieważ jest odjemny, pokazuie zatém, że pierwiastek szukany jest między 2 i 2,5. Między témi dwiema liczbami wziąwszy średnią, otrzymamy 2,25; położywszy tylko $x = 2,3$, będziemy mieli piérwiastek szukany przybliżony o jednę dziesiątą do jego wartości, i jeszcze nagléy go przybliżymy sposobem następuiącym, który winniśmy Newtonowi.

Uczyńmy $x = 2,3 + y$; oczywista jest rzecz, że niewiadoma y będzie tylko małym ułamkiem, którego kwadrat i potęgi wyższe zaniedbać się mogą: więc tym sposobem będziemy mieli

$$x^4 = (2,3)^4 + 4(2,3)^3 y$$
$$-4x^3 = -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 y$$
$$-3x = -3(2,3) - 3y;$$

przez te podstawiania, zrównanie podane stanie się

$$-0,5839 - 17,812y = 0,$$

i da $$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

W tém piérwszém działaniu weźmiemy tylko części setne, a stąd wypadnie $y = -0,03$, i $x = 2,3 - 0,03 = 2,27$. Ażebyśmy otrzymali nową wartość na x, od poprzedzaiącéy dokładniey-

(*) Obacz w Arytmetyce Czecha *o Stosunkach i Proporcyach* § VI. po 5te.

szą, założémy $x = 2,27 + y'$, co podstawiwszy w zrównaniu podaném, wprowadzaiąc w rachunek tylko piérwsze potęgi y', znaydziemy

$$-0,04595559 - 18,046468y' = 0,$$

skąd $$y' = -\frac{0,04595559}{18,046468} = -0,0025,$$

a zatém $x = 2,2675$. Przedłużaiąc ten sposób, możemy o tyle o ile zechcemy przybliżyć prawdziwą wartość na x.

Drugi pierwiastek rzetelny zawarty między 3 i 4, rachowany tym sposobem, będzie $x = 3,6797$, przestaiąc na czwartéy dziesiątkowéy.

§ 216. Ocenimy dokładność dopiéro wyłożonego sposobu, szukaiąc granicy wartości wyrazów które zaniedbuiemy. Gdyby podane zrównanie było

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

podstawienie $a + y$ za x, dałoby za wypadek, piérwszy z wynalezionych w *§fie* 204, ponieważ a nie będąc pierwiastkiem zrównania, ale tylko przybliżoną na x wartością, nieprzywodzi do zero ilości

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U.$$

Wyraziwszy tę ostatnią przez V, będziemy mieli, za zrównanie (D) *§fu* wymienionego, następuiące

$$V + \frac{A}{1}y + \frac{B}{1.2}y^2 + \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots + y^m = 0,$$

z którego wyciągniemy

$$Ay = -V - \frac{B}{1.2}y^2 - \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots - y^m,$$

$$y = -\frac{V}{A} - \frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Kiedy potęgi ilości y wyższe nad piérwszą, zaniedbamy, i przestaniemy na

$$y = -\frac{V}{A},$$

błędem będzie

$$-\frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Jeżeli a nie różni się od prawdziwéy wartości na x, tylko ilością mnieyszą od $\frac{1}{p}a$, błąd dopiéro położony, stanie się mnieyszym od liczby, którąbyśmy otrzymali, włożywszy weń $\frac{1}{p}a$ za y, co dałoby

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2 - \frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3 \ldots\ldots - \frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Obrachowawszy tę ilość, będziemy się mogli upewnić, czy może ona bydź zaniedbaną przy ilości $\frac{V}{A}$; a jeżeli znaydziemy, że nadto jest wielka iżby opuszczoną bydź mogła, tedy wypadnie za a, szukać liczby bliższéy prawdziwéy wartości na x.

Naostatek, kiedy już wiele wyrachuiemy liczb y', y'', y''', i. t. d, a wypadki otrzymane złożą szereg malejący, nie będzie wtedy przybliżenie wątpliwém.

§ 217. Sposób dopiéro przez nas używany, znaiomy jest pod imieniem: *Sposobu Podstawiań następnych*. Lagranż znacznie go wydoskonalił. (Obacz Jego dzieło o *Rozwiązywaniu zrównań liczbowych*). Uważał on naprzód, że niepodstawuiąc

tylko całkowite liczby, możnaby przeminąc wiele pierwiastków, bez ich dostrzeżenia. W rzeczy saméy, gdybyśmy naprzykład mieli zrównanie

$$(x-\tfrac{1}{3})(x-\tfrac{1}{2})(x-3)(x-4)=o,$$

i podstawiali za x, liczby $o, 1, 2, 3$, i. t. d, opuścilibyśmy pierwiastki $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, niepostrzegłszy ich bytności; gdyż mielibyśmy

$$(o-\tfrac{1}{3})(o-\tfrac{1}{2})(o-3)(o-4)=+\tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 3\times 4$$
$$(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{2})(1-3)(1-4)=+\tfrac{2}{3}\times\tfrac{1}{2}\times 2\times 3,$$

wypadki z jednakowym znakiem. Łatwo jest widzieć, iż ta okoliczność zależy od tego, że podstawienie 1 za x, zmienia razem znak w obu mnożnikach $x-\frac{1}{3}$ i $x-\frac{1}{2}$, które z odjemnych jakiémi wprzódy były, kiedy kładliśmy o za x, staią się oba dodatne; lecz gdybyśmy za x włożyli liczbę zawartą między $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, mnożnik $x-\frac{1}{3}$ samby tylko znak zmienił, i otrzymalibyśmy wypadek odjemny.

Wpadniemy niechybnie na podobną liczbę, podstawuiąc za x takie liczby, którychby różnice mnieysze były od różnicy pierwiastków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$.

Ggdybyśmy naprzykład podstawiali $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$, i. t. d, wynaleźlibyśmy dwie zmiany znaku.

Możnaby zarzucić przeciw powyższemu przykładowi, że kiedy usuneliśmy współczynniki ułamkowe, tedy to zrównanie nie będzie mogło miéć za pierwiastki tylko liczby całkowite, lub niewymierne, nie zaś ułamki; ale łatwo widzieć się daie, że liczby niewymierne, zastępuiące tu mieysce ułamków, dla większego uproszczenia, mogą się różnić mniéy jak jednością.

W ogólności, wypadki będą z jednakowym znakiem w każdym razie, kiedy podstawiania odmienią znak liczby parzystéy mnożników (*). Ażeby téy niedogodności zapobiedz, kładź należy między liczbami do postawiania, od naymnieyszéy granicy aż do naywiększéy, różnicę mnieyszą od naymnieyszéy z różnić, jakie między różnicami pierwiastków podanego zrównania zachodzić mogą; przez ten sposób, podstawiania koniecznie wpadną między pierwiastkami tuż następuiącémi po sobie, i nie odmienią znaku tylko w jednym mnożniku. To działanie niewymaga, ażeby znaioma była naymnieysza różnica pierwiastków, ale tylko iżbyśmy mieli granicę za którąby ona niemogła wpadać.

Ażebyśmy otrzymali tę granicę, złóżmy zrównanie z kwadratów różnić pierwiastków (208).

Niech będzie tém zrównaniem

$$z^n+pz^{n-1}+qz^{n-2}\ldots\ldots+tz+u=o\ldots.\ (D),$$

aby otrzymać naymnieyszą granicę jego pierwiastków, uczynimy (§ 212) $z=\frac{1}{v}$, i wypadnie

$$\frac{1}{v^n}+p\frac{1}{v^{n-1}}+q\frac{1}{v^{n-2}}\ldots\ldots+t\frac{1}{v}+u=o,$$

przywiodłszy wszystkie wyrazy do jednakowego mianownika,

będzie $1+pv+qv^2\ldots\ldots+tv^{n-1}+uv^n=o$,

potém uwolniwszy od u, mnożnik v^n, wypadnie

$$v^n+\frac{t}{u}v^{n-1}\ldots\ldots+\frac{q}{u}v^2+\frac{p}{u}v+\frac{1}{u}=o,$$

(*) Nie jest więc podobna odkryć tym sposobem pierwiastki równe, kiedy te są parzystéy liczby, ale w ten czas użyć należy sposobu wyłożonego w §ście 205.

i jeżeli przez $\frac{r}{u}$ wyrazimy naywiększy współczynnik odjemny tego zrównania, będziemy mieli

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} < z.$$

Uważać tu należy jednę tylko granicę dodatną, ponieważ tá sama jedna stosuie się do piérwiastków rzetelnych podanego zrównania. Poznawszy granicę $\frac{1}{\frac{r}{u}+1} = \frac{u}{r+u}$, mnieyszą od kwadratu z naymnieyszéy różnicy pierwiastków podanego zrównania: wyciąga się z niéy pierwiastek kwadratowy, albo przynaymniéy bierze się liczba wymierna tuż od tego pierwiastku niższa; liczba ta, którą oznaczymy przez k, znaczyć będzie przedział, jaki należy zostawiać między każdą z liczb do podstawienia branych. Tym sposobem złozymy dwa szeregi

$$0, +k, +2k, +3k, \text{ i. t. d.}$$
$$-k, -2k, -3k, \text{ i. t. d.}$$

z których weźmiemy tylko wyrazy zawarte między granicami naymnieyszego i naywiększego z pierwiastków dodatnych, i między granicami naymnieyszego i naywiększego z pierwiastków odjemnych podanego zrównania. Zmiany znaku, które wskaże szereg otrzymanych wypadków, przez podstawianie każdéy z tych liczb za x w podaném zrównaniu, objawią różne jego pierwiastki rzetelne, bądź dodatne bądź też odjemne.

§ 218. Niech naprzykład będzie zrównanie

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

które nas przywiodło w *§fie* 208, do zrównania

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0;$$

uczyniwszy $z = \frac{1}{v}$, i uszykowawszy co do v wypadek otrzymany z tego podstawienia, będziemy mieli $v^3 - 9v^2 + \frac{42}{49}v - \frac{1}{49} = 0$,

skąd wyciągniemy

$$v < 10, \quad z > \frac{1}{10};$$

należy więc wziąć $k =$ albo $< \frac{1}{\sqrt{10}}$. Zadosyć stałoby się temu warunkowi wziąwszy $k = \frac{1}{4}$, lecz dosyć jest położyć $k = \frac{1}{3}$; gdyż włożywszy 9 za v, w podane zrównanie, otrzymamy wypadek dodatny, który w ten czas tylko stać się może większym, kiedy dla v znacznieyszą nadamy wartość, ponieważ wyrazy v^3 i $9v^2$ niszczą się, a $\frac{42}{49}v$ przewyższa $\frac{1}{49}$.

Naywiększą granicą pierwiastków dodatnych, podanego zrównania $x^3 - 7x + 7 = 0$, jest 8, a pierwiastków odjemnych jest -8; będziemy więc mieli do podstawienia za x, liczby

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3} \ldots\ldots \frac{24}{3},$$
$$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{3} \ldots\ldots -\frac{24}{3}.$$

Możemy uniknąć ułamków, uczyniwszy $x = \frac{x'}{3}$; gdyż w ów czas różnice między wartościami dla x', będą potróynémi różnic zachodzących między wartościami dla x, a zatém przewyższą jedność; nie pozostanie nic więcéy tylko samo podstawianie następne

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 24,$$
$$-1,-2,-3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -24,$$

w zrównaniu $x'^3 - 63x' + 189 = 0$.

Znaki wypadków, zamienią $+4$ na $+5$, $+5$ na $+6$, i -9 na -10, tym sposobem będziemy mieli wartości dodatne

$$\left.\begin{array}{l} x' > 4 \text{ a } < 5 \\ x' > 5 \text{ a } < 6 \end{array}\right\} \text{ skąd } \left\{\begin{array}{l} x > \frac{4}{3} \text{ a } < \frac{5}{3} \\ x > \frac{5}{3} \text{ a } < \frac{6}{3} \end{array}\right.$$

wartość zaś odjemna na x' wpadaiąc między -9 a -10, odkryie wartość także odjemną między $-\frac{9}{3}$ a $-\frac{10}{3}$ na x.

Poznawszy już teraz różne pierwiastki podanego zrównania przybliżone o $\frac{1}{3}$, moglibyśmy je jeszcze bardziéy przybliżać, jak w §*ie* 215,

§ 219. Cośmy wykonali na przykładzie §*ie* 215, i położonym w §*ie* poprzedzaiącym, toż samo stosować się może do zrównania jakiegokolwiek stopnia, i odkrywać wartości przybliżone wszystkich pierwiastków rzetelnych tego zrównania. Nie możnaby zaprzeczać aby rachunek nie stawał się długim i zmudnym; kiedy podane zrównanie podnosi się co raz wyżéy; ale w wielu przypadkach nie będzie potrzeby udawać się do zrównania (*D*), albowiem je zastąpić mogą sposoby inne, jakie nam nauka dalszych gałęzi analizy poda (*).

Uważymy jednak, że podstawiania następne, liczb 0, 1, 2, 3, i. t. d, za x, nastręczaią częstokroć dostateczne znaki po których domniemywać się możemy o bytności tych pierwiastków, których różnica mnieyszą jest od jedności. W przykładzie którym się zaymuiemy, daią one takie wypadki $+7$, $+1$, $+1$, $+13$, które staią się rosnącémi, kiedy od 7 do 1 malały. Ten postęp wsteczny naturalnie nas na tę myśl wprowadza, że między $+1$ a $+2$, wpadaią dwa pierwiastki, albo równe, albo przynaymniéy przybliżaiące się do równych. Dla sprawdzenia tego domysłu, mnożyć należy niewiadomą.

Uczyniwszy $x = \frac{y}{10}$, wynaydziemy

$$y^3 - 700y + 7000 = 0,$$

zrównanie maiące dwa pierwiastki dodatne, jeden wpadaiący pomiędzy 13 a 14, drugi pomiędzy 16 a 17.

Liczby nieodbicie potrzebne na odkrycie tych pierwiastków, nienadto są wielkie, gdyż tylko między 10 a 20 należy szukać y: aże wartości téy niewiadomey są oznaczone całkowitémi liczbami, stąd zatém wnosimy, że wartości na x są przybliżone o jedną dziesiątą.

(*) Widzieć można w dziele pod tytułem (*Traité de la resolution des Equations numériques*), naywybornieyszy sposob podany od P. Lagrange, ażeby można było uniknąć zrównania (*D*).

§ 220. Kiedy współczynniki podanego zrównania do rozwiązania, są liczbami bardzo wielkiémi, wtedy wygodniéy jest przerobic to zrównanie na inne takie, któregoby współczynniki w ściśleyszych granicach zamknięte były.

Gdybyśmy naprzykład mieli

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14957x + 5000 = 0,$$

uczynilibyśmy $x = 10z$; i stałoby się

$$z^4 - 8z^3 + 19{,}98z^2 - 14{,}957z + 0{,}5 = 0.$$

W tym wypadku przestalibyśmy nasamprzód na wzięciu liczb całkowitych, które naybardziéy przybliżaią współczynniki; przez co mielibyśmy

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0{,}5 = 0.$$

Wynaleźlibyśmy z łatwością, że z ma dwie wartości rzetelne, pomiędzy 0 a 1, i pomiędzy 1 a 2, zawarte; skąd wynika, że wartości podanego zrównania znayduią się między 0 a 10, i między 10 a 20.

Nic tu niepowimy o rozeznaniu pierwiastków urojonych, ponieważ tych odkrycie gruntuie się na takowych prawidłach, których wykład bardzoby nas daleko zaprowadził. Znayduie się ten artykuł *w Dopełnieniu Algebry Lacroix* (Complément d'Algèbre par Lacroix), i w Rozdziale IV. Części I. *Algebry* J. SNIADECKIEGO.

§ 221. Lagranż podstawianiom następném taką nadał formę, iż ta przynosi tę korzyść, że wprost daie poznać za każdém działaniem, o ile się przybliżono do prawdziwego pierwiastku; wymaga tylko, ażeby wprzódy miano jego wartość przybliżoną przynaymniey o jednę dziesiątą.

Wyraźmy przez a liczbę całką bezpośrednie niższą od szukanego pierwiastku; abyśmy otrzymali ten pierwiastek niepotrzeba nic więcéy tylko powiększyć a ułamkiem: będziemy więc mieli $x = a + \frac{1}{y}$. Zrównanie na y wypadaiące z podstawienia téy wartości w podaném, koniecznie będzie miało pierwiastek większy od jedności; liczbę całką bezpośrednie niższą od tego pierwiastku nazwawszy b, wypadnie za drugie przybliżenie $x = a + \frac{1}{b}$. Aże b tém jest względem y, czém a względem x, przeto można będzie w zrównaniu na y, uczynić $y = b + \frac{1}{y'}$, i y' koniecznie będzie większe od jedności; nazwawszy b' liczbę całką bezpośrednie niższą od pierwiastku zrównania na y', będziemy mieli

$$y = b + \frac{1}{b'} = \frac{bb' + 1}{b'};$$

włożywszy tę wartość w wartości x, wypadnie stąd

$$x = a + \frac{b'}{bb' + 1},$$

za trzecią wartość przybliżoną na x. Z téy wynaydziemy czwartą, uczyniwszy $y' = b' + \frac{1}{y''}$; bo jeżeli b'' znaczy liczbę całką bezpośrednie niższą od y'', to będziemy mieli

$$y' = b' + \frac{1}{b''} = \frac{b'b'' + 1}{b''},$$

skąd $$y = b + \frac{b''}{b'b'' + 1} = \frac{bb'b'' + b'' + b}{b'b'' + 1},$$

$$x = a + \frac{b'b''+1}{bb'b''+b''+b}, \text{ i tak daléy.}$$

§ 222. Przystosuymy ten sposób do zrównania

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Widzieliśmy już w §fie 218, że naymnieyszy z pierwiastków dodatnych tego zrównania, wpadał po między $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$, to jest, między 1 a 2; uczyńmy więc $x = 1 + \frac{1}{y}$, a będziemy mieli

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Granicą pierwiastków dodatnych tego ostatniego zrównania jest 5; podstawuiąc następnie 0, 1, 2, 3, 4, za y, przekonamy się, że ma dwa pierwiastki większe od jedności, to jest, piérwszy między 1 a 2, drugi między 2 a 3. Stąd więc wypadnie

$$x = 1 + \frac{1}{1} \text{ i } x = 1 + \frac{1}{2},$$

to jest, $x = 2$ i $x = \frac{3}{2}$.

Obie te wartości tym odpowiadaią, które wynaleźliśmy między $\frac{6}{3}$ a $\frac{5}{3}$, między $\frac{5}{3}$ a $\frac{4}{3}$, i nieróżnią się tylko jednością.

Ażeby pomknąć daléy stopień pewności piérwszéy wartości, odpowiadaiącéy na $y = 1$, zrobmy $y = 1 + \frac{1}{y'}$ a będziemy mieli

$$y'^3 - 2y'^2 - y' + 1 = 0.$$

Znaydziemy tylko jeden pierwiastek tego zrównania większy od jedności, zawarty między 2 a 3, co da $y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

skąd $x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

Założywszy potém $y' = 2 + \frac{1}{y''}$, wypadnie stąd

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0;$$

i wynaydziemy y'' między 4 a 5; wziąwszy naymnieyszą granicę 4, wypadnie

$$y' = 2 + \frac{1}{4}, \quad y = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}, \quad x = 1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}.$$

Nic niemasz łatwieyszego jak postępować tym sposobem, czyniąc $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$ i tak daléy.

Wróćmy się teraz do drugiéy wartości na x, którą wynaleźliśmy równą $\frac{3}{2}$, według piérwszego przybliżenia, a która odpowiada na $y = 2$; uczyńmy $y = 2 + \frac{1}{y'}$ i włóżmy tę wartość w zrównanie na y; zamieniwszy znaki, aby zrobić piérwszy wyraz dodatnym, będziemy mieli

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

To zrównanie równie jak jemu odpowiadaiące w działaniu wyższém, będzie tylko miało jeden pierwiastek większy od jedności, to jest, między 1 a 2; jeżeli weźmiemy $y' = 1$, wypadnie stąd

$$y = 3, \quad x = \frac{4}{3}.$$

Położywszy jeszcze $y' = 1 + \frac{1}{y''}$, stanie się

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0,$$

zrównanie, które daie y'' między 4 a 5, i skąd wynika $y' = \frac{5}{4}$, $y = \frac{14}{5}$, $x = \frac{19}{14}$.

Ażeby stąd postąpić daléy, możemy uczynić $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, i tak daléy.

Zrównanie $x^3 - 7x + 7 = 0$, ma także pierwiastek odjemny zawarty między -3 a -4. Chcąc go bardziéy przybliżyć, uczynimy $x = -3 - \frac{1}{y}$; co da

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0, \quad y > 20 \text{ a } < 21;$$

skąd wypadnie $x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}$.

Pomykaiąc daléy ten sposób, zakładalibyśmy $y = 20 + \frac{1}{y'}$ i. t. d. a następnie otrzymywalibyśmy coraz dokładnieysze wartości.

Różne przerabiania na y, y', y'', i. t. d, czynione, nigdy nie będą miały tylko jeden pierwiastek większy od jedności, kiedy tylko dwa lub większa liczba pierwiastków podanego zrównania nie będzie się zawiérała między témiż samémi granicami a i $a + 1$; ale jeżeli ta okoliczność będzie miała mieysce, jak już widzieliśmy w przykładzie wyższym, na ten czas w jedném któremkolwiek ze zrównań na y, y', y'' i. t. d. wynaydziemy wiele wartości większych od jedności, z których póydzie szereg zrównań, które wykryią

w szczególności różne pierwiastki, jakie ma zrównanie podane, między granicami a i $a + 1$.

Czytelnik może się jeszcze wprawiać na zrównaniu $x^3 - 2x - 5 = 0$,
którego pierwiastki rzetelne wpadaią między 2 a 3; a za wartości całkowite na y, y' i. t. d, znaydzie

$$10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, \text{ i. t. d.}$$

a za wartości przybliżone na x,

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1507}{624}, \frac{16415}{7837}.$$

O Proporcyach i Postępach.

§ 223. Widzieliśmy w Arytmetyce definicyą i główne własności *proporcyi arytmetycznéy* i *jeometrycznéy* (*); tu zaś stosować będziemy Algebrę do tych wiadomości, i tym sposobem przyidziemy do pewnych wypadków, które w Jeometryi są częstego użycia.

Poczniemy od uważania, że obie te proporcye mogą się przez zrównania wyrażać. Niech będą A, B, C, D cztéry wyrazy proporcyi arytmetycznéy; a, b, c, d, drugiéy; będziemy mieli

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

zrównania, które uważane bydź powinny za jednoznaczne z wyrażeniami

$$A.B : C.D, \quad a : b :: c : d,$$

które daią $A + D = B + C$, $ad = bc$.

(*) Obacz w Arytmetyce Czecha, *O Stosunkach i Proporcyach*.

Stąd wynika, że *w proporcyi arytmetyczney, zbiór wyrazów skraynych równy jest zbiorowi wyrazów średnich; a w jeometryczney mnogość z wyrazów skraynych, równa mnogości z wyrazów średnich;* co w arytmetyce wypadało z rozumowania, którego dopiéro położone zrównania są tylko tłumaczeniem.

Założenia poprzedzaiącym odwrótne łatwo się dowodzą; gdyż ze zrównań

$$A+D=B+C, \qquad ad=bc,$$

wnet wpadamy na $D-C=B-A$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,

a zatém, *jeżeli cztéry ilości są takie, że dwie z nich tenże sam zbiór daią, lub też samą mnogość, co dwie drugie; piérwsze są średniemi, a drugie skraynémi proporcyi arytmetyczney lub jeometryczney*, i naodwrót.

Kiedy $B=C$, mówimy że proporcya arytmetyczna jest *ciągła*; toż samo jest i w jeometryczney kiedy $b=c$; i mamy w ten czas

$$A+D=2B, \qquad ad=b^2:$$

to jest, że *w arytmetyczney ciągłéy, zbiór skraynych jest równy podwóynemu wyrazowi średniemu; w jeometryczney ciągłéy, mnogość ze skraynych jest równa kwadratowi wyrazu średniego.* Wyciągamy

stąd $B=\frac{A+D}{2}$, $b=\sqrt{ad}$,

ilość B jest *średnią* (czyli *średnią proporcyonalną arytmetyczną*) między A i D; a ilość b *średnią proporcyonalną jeometryczną*, między a i d.

Zrównania główne $B-A=D-C$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$,

jeszcze nas przywodzą do następuiących:

$$C-A=D-B, \quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b};$$

co pokazuie, że w wyrażeniach $A.B:C.D$, $a:b::c:d$, można odmienić mieysce wyrazom średnim, i stąd wyprowadzić $A.C:B.D$, $a:c::b:d$. W ogólności, z wyrazami proporcyy można czynić różne odmiany, które się zgodzą ze zrównaniami $A+D=B+C$, i $ad=bc$. (*)

Omiąwszy proporcyę arytmetyczną, nad samą tylko jeometryczną zastanowimy uwagę naszą.

§ 224. Można do obudwóch stron zrównania $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, dodać, lub od obudwóch odciągnąć jednakową ilość m, tak iżbyśmy mieli

$$\frac{b}{a}\pm m=\frac{d}{c}\pm m;$$

wyrazy w obudwóch stronach przywiodłszy do jednakowego mianownika, stanie się $\frac{b\pm ma}{a}=\frac{d\pm mc}{c}$,

zrównanie, które możemy tak napisać

$$\frac{c}{a}=\frac{d\pm mc}{b\pm ma},$$

a które wypada na tę proporcyą

$$b\pm ma:d\pm mc::a:c;$$

że zaś $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$, równie także będziemy mieli

(*) *Obacz* w Arytmetyce Czecha Artykuł: *Odmiany naywięcéy używane w proporcyach.*

$\frac{d \pm mc}{b \pm ma} = \frac{d}{b}$, czyli $b \pm ma : d \pm mc :: b : d.$

Te dwie proporcye mogą się tak wysłowić: *Następnik piérwszy powiększony lub zmnieyszony pewną liczbą razy swoim poprzednikiem, tak się ma do drugiego następnika powiększonego lub zmnieyszonego takąż liczbą razy swoiego poprzednika, jak się ma wyraz piérwszy do trzeciego, lub drugi do czwartego.*

Porównawszy między sobą oddzielnie summy, a oddzielnie różnice, będziemy mieli

$$\frac{d+mc}{b+ma} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d-mc}{b-ma} = \frac{c}{a},$$

skąd wniesiemy

$$\frac{d+mc}{b+ma} = \frac{d-mc}{b-ma},$$

to jest, $b+ma : d+mc :: b-ma : d-mc;$

albo raczéy odmieniwszy mieysce średnich, będzie

$$b+ma : b-ma :: d+mc : d-mc;$$

a jeżeli uczynimy $m = 1$, będziemy tylko mieli

$$b+a : b-a :: d+c : d-c,$$

co się tak wysłowi:

Summa dwóch piérwszych wyrazów tak się ma do ich różnicy, jak summa dwóch drugich do swoiéy różnicy.

§ 225. Proporcya $a : b :: c : d$ może się tak napisać, $a : c :: b : d,$

i będziemy mieli

$\frac{c}{a} \pm m = \frac{d}{b} \pm m$, skąd $\frac{c \pm ma}{a} = \frac{d \pm mb}{b}$,

a nakoniec $c \pm ma : d \pm mb :: a : b$, albo $:: c : d$,

skąd wypada, że *drugi poprzednik powiększony lub zmnieyszony piérwszym, wziętym pewną liczbę razy, tak się ma do drugiego następnika powiększonego lub zmnieyszonego piérwszym, tąż samą liczbą razy wziętym, jak którykolwiek poprzednik do swoiego następnika.*

To założenie może się także bezpośrednie wnosić z założenia §fu poprzedzaiącego; zmieniwszy bowiem mieysce wyrazów średnich w pierwotném założeniu $a : b :: c : d$, potém przystosowawszy do niego założenie wymienione, będziemy mieli

$$a : c :: b : d$$

$c \pm ma : d \pm mb :: a : b$, lub $:: c : d$,

w téy ostatniéy proporcyi nądawszy literom a, b, c, d, mianowania, jakie one maią w proporcyi pierwotnéy, otrzymamy wysłowienie poprzedzaiące.

Uczyniwszy $m = 1$, wyciągniemy stąd proporcye szczególne

$$c \pm a : d \pm b :: a : b \text{ lub } :: c : d,$$
$$c+a : c-a :: d+b : d-b;$$

co się zwykło mówić, że *summa lub różnica poprzedników, ma się do summy lub różnicy następników, jak którykolwiek poprzednik do swoiego następnika:* Tudzież, że *summa poprzedników tak ma się do ich różnicy, jak summa następników do swéy różnicy.*

W ogólności, jeżeli mamy

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{h}{g}, \text{ i. t. d,}$$

a uczynimy $\frac{b}{a} = q$, będziemy mieli

$$\frac{d}{c}=q,\quad \frac{f}{e}=q,\quad \frac{h}{g}=q,\ \text{i. t. d,}$$

co da, $b=aq$, $d=cq$, $f=eq$, $h=gq$, i. t. d,

te zrównania dodawszy razem, strona ze stroną, stanie się

$$b+d+f+h=aq+cq+eq+gq,$$

czyli $$b+d+f+h=q(a+c+e+g),$$

skąd wypada

$$\frac{b+d+f+h}{a+c+e+g}=q=\frac{b}{a}.$$

Wysłowia się ten wypadek mówiąc, że *w ciągu stosunków równych*, a : b : : c : d : : e : f : : g : h, i. t. d, *summa jakiekolwiek liczby poprzedników ma się do summy równéy liczby następników, jak jeden poprzednik do swego następnika*.

§ 226. Gdybyśmy mieli te dwa zrównania

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \text{i}\ \frac{f}{e}=\frac{h}{g},$$

moglibyśmy mnożyć między sobą piérwsze ich strony i drugie także między sobą, a wypadłoby

$$\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg},$$

zrównanie jednoznaczne z proporcyą następuiącą:

$$ae : bf : : cg : dh,$$

którąbyśmy także otrzymali, mnożąc każdy wyraz proporcyi

$$a : b : : c : d$$

przez wyraz odpowiedny z proporcyi

$$e : f : : g : h.$$

Dwie proporcye tak mnożone co do wyrazów, nazywaią się *mnożone porządkiem*; i mnogości z nich powstałe, są jak widzieliśmy, w proporcyi: nowe zaś stosunki są *złożone* ze stosunków pierwotnych.

Łatwo się także przekonać, że równie przyszlibysmy do proporcyi, rozdzieliwszy wyrazy jednéy przez wyrazy drugiéy, dwóch proporcyy danych.

§ 227. Kiedy mamy $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, możemy stąd wnosić, że

$$\frac{b^m}{a^m}=\frac{d^m}{c^m},$$

co daie $a^m : b^m = c^m : d^m$;

skąd wypada, że *kwadraty, sześciany i w ogólności potęgi podobne, cztérech ilości w proporcyi będących, są i same w proporcyi*.

Taż sama rzecz miałaby mieysce i w ułamkowych potęgach, ponieważ

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}};\ \text{i}\ \sqrt[m]{\frac{d}{c}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

skąd wypada $$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

czyli $$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} : : \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d},$$

jeżeli jest a : b : : c : d, to mówimy, że *pierwiastki jednakowych stopni, cztérech proporcyonalnych ilości, są i same w proporcyi*.

Te są głównieysze punkta teoryi proporcyy. Teorya ta jedynie wynalezioną została dla odkrycia ilości i ich porównywania z drugiémi. Przez długi przeciąg czasu zachowywano imiona łacińskie przywiązane do różnych odmian czyli przerabiań, którym proporcya ulegać może; lecz teraz już więcéy onémi nie obciążamy pamięci uczących się matematyki; wszystkie zaś do proporcyi przystępy nieużytecznémi się stały, kiedy za nie podstawiono odpowiedne zrównania; co daie jak sądzę, więcéy jednostayności sposobom, i więcéy wyobrażeniom czystości.

§ 228. Z proporcyy do progressyy czyli postępów łatwe jest przeyście. Poznawszy w proporcyi arytmetyczney ciągłéy, trzy ilości, z którychby ostatnia tyle przewyższała drugę, ile ta pierwszą; natychmiast pomyślano że można uważać nieskończoną liczbę ilości a, b, c, d, i. t. d, takich, że każda z nich przewyższa poprzedzaiącą jednakową ilością δ; a zatém że

$b = a + \delta$, $c = b + \delta$, $d = c + \delta$, $e = d + \delta$, i. t. d.

Zbiór tych ilości tak się pisze

$$\div a . b . c . d . e . f .$$ i. t. d,

i nazywa się *progressyą* albo *postępem arytmetycznym;* sądzę że to nazwisko odmienić należy na następuiące: *postęp różnicowy*.

Można wyrachować którykolwiek wyraz tego postępu, nieużywaiąc pośrednich. W rzeczy saméy, jeżeli w wartości c, położymy za b, jego wartość, wypadnie stąd

$$c = a + 2\delta;$$

przy pomocy téy ostatniéy, znaydziemy

$d = a + 3\delta$, potém $c = a + 4\delta$, i tak

daléy; skąd się pokazuie, że nazwawszy l ten wyraz, którego porządek byłby oznaczony przez n, mielibyśmy $l = a + (n - 1)\,\delta$.

Niech będzie naprzykład, postęp

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 .$$ i. t. d;

w tym piérwszy wyraz $a = 3$, różnica (czyli *wykładnik postępu*) $\delta = 2$; przeto wynaydziemy za wyraz ósmy

$$3 + (8 - 1)\,2 = 17,$$

równie jakbyśmy nań wpadli, rachuiąc wszystkie wyrazy które go poprzedzaią.

Postęp któryśmy tylko co rozważali był rosnący; ale napisawszy go w porządku odwrótnym, jak następuie

$$\div 17 . 15 . 13 . 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . 1 . - 1 . - 3,$$ i. t. d

stanie się *malejącym*. Wynaleźlibyśmy jeszcze którykolwiek jego wyraz za pomocą wzoru $a + (n - 1)\,\delta$, uważaiąc, że δ powinno się tu zakładać odjemne, ponieważ w tym razie różnica powinna się odciągać od któregokolwiek wyrazu dla otrzymania następuiącego po nim.

§ 229. Przychodzimy także nayprościéy do wynalezienia summy jakiéykolwiek liczby wyrazów arytmetycznego postępu. I tak wyraziwszy ten postęp przez

$$\div a . b . c . \ldots\ldots\ldots\ldots . i . k . l,$$

i oznaczywszy przez S summę tych wszystkich wyrazów, będziemy mieli

$$S = a + b + c \ldots\ldots\ldots + i + k + l.$$

Wyrazy drugiéy strony tego zrównania napisawszy w porządku wspacznym poprzedzaiącemu, będziemy mieli jeszcze

$$S = l + k + i \ldots\ldots + c + b + a.$$

Dodawszy oba te zrównania, i wyrazy sobie odpowiadaiące połączywszy, wypadnie

$$2S = (a+l)+(b+k)+(c+i)\ldots+(i+c)+(k+b)+(l+a)$$

aże z natury postępu mamy, poczynaiąc od wyrazu piérwszego, że

$$a+\delta = b,\ b+\delta = c \ldots\ldots i+\delta = k,\ k+\delta = l,$$

także i $l-\delta = k,\ k-\delta = i \ldots\ldots c-\delta = b,\ b-\delta = a$:

a dodawanie sobie odpowiadaiących zrównań, nayoczywiściey pokazuie, że

$$a + l = b + k = c + i = \text{i. t. d.}$$

a tém samém, że $2S = n\,(a+l)$;

więc stąd wypada $S = \dfrac{n(a+l)}{2}$.

Stosuiąc ten wzór do postępu

$$\div 3 . 5 . 7 . 9 . \text{i. t. d},$$

wynaydziemy, że summa ośmiu wyrazów piérwszych, jest $\dfrac{8(3+17)}{2} = 80$.

§ 230. Zrównanie

$$l = a + (n-1)\,\delta,$$

łącznie ze zrównaniem

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2},$$

daie sposób wynaydowania dwóch którychkolwiek z pięciu ilości a, δ, n, l i S, kiedy są znane trzy inne; ale tu nie będziemy się zastanawiać nad każdym z tych przypadków jakie się przytrafiać mogą.

§ 231. Z proporcyi wyciągneliśmy postęp *ilorazowy* czyli jeometryczny, który składa się z szeregu takich wyrazów że wieloraz z podzielenia jakiego wyrazu przez wyraz tuż poprzedzaiący, zawsze jest jednakowy, z któreybykolwiek strony oba te wyrazy były brane. Postępy

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : \text{i. t. d.}$$

$$\div 45 : 15 : 5 : \frac{5}{3} : \frac{5}{9} : \text{i. t. d.}$$

są postępami tego rodzaju; wieloraz (czyli *wykładnik stosunku*) w piérwszym jest 3, a w drugim $\frac{1}{3}$; piérwszy jest *rosnący*, drugi zaś *malejący*. Każdy z tych postępów składa szereg stosunków równych, i dla téy przyczyny tak się one piszą, jak je napisaliśmy wyżéy.

Niech będą $a, b, c\ d, \ldots\ldots k, l,$

wyrazy jakiegokolwiek ilorazowego postępu; uczyniwszy $\dfrac{b}{a} = q$, będziemy mieli podług natury tego postępu,

$$q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = \ldots\ldots = \frac{l}{k},$$

czyli $b = aq,\ c = bq,\ d = cq,\ e = dq, \ldots l = kq.$

Wkładaiąc następnie wartość b, w wartość na c, tę ostatnią w wartość na d, i tak daléy, stanie się

$$b = aq,\ c = aq^2,\ d = aq^3,\ e = aq^4 \ldots\ldots l = aq^{n-1},$$

wyraziwszy przez n porządek wyrazu l, czyli liczbę wyrazów podanego postępu.

Za pomocą wzoru $l = aq^{n-1}$ możemy wyrachować którykolwiek wyraz, przez wszystkie pośrednicze nieprzechodząc.

Naprzykład, wyraz dziesiąty postępu

$\div\div 2 : 6 : 18$: i. t. d

jest równy $2 \times 3^9 = 39366$.

§ 232. Możemy także otrzymać summę tylu wyrazów postępu ilu zechcemy.

Niech będzie postęp

$\div\div a : b : c : d$, i. t. d.

dodawszy do siebie wyrazy zrównań następuiących

$b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, ... $l = kq$;

wypadnie stąd

$b + c + d + e \ldots + l = (a + b + c + d \ldots + k)q$;

summę szukaną nazwawszy S, będziemy mieli

$$b + c + d + e \ldots + l = S - a$$

$$a + b + c + d \ldots + k = S - l,$$

skąd wniesiemy $S - a = q(S - l)$;

a zatém $$S = \frac{ql - a}{q - 1}.$$

W przykładzie wyżéy danym, znaleźlibyśmy za summę piérwszych dziesięciu wyrazów postępu $\div\div 2 : 6 : 18$: i. t. d.

$$\frac{2 \times 3^{10} - 2}{2} = 3^{10} - 1 = 59048.$$

§ 233. Dwa zrównania

$$l = aq^{n-1}, \quad S = \frac{ql - a}{q - 1},$$

zawiéraią stosunki, jakie w postępie jeometrycznym, między sobą mieć powinny, pięć ilości a, q, n, l i S, i przywodzą do poznania którychkolwiek dwóch z tych ilości, kiedy są dane trzy inne.

§ 234. Kiedy podstawimy aq^{n-1} na mieyscu l, w wyrażeniu wartości na S, otrzymamy

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Jeżeli q będzie całkowitą liczbą, ilość q^n tém większą będzie, im liczba n będzie znacznieysza; i na ten czas S będzie mogło przewyższyć taką ilość jaką zechcemy, nadawszy dla n przyzwoitą wartość; to jest, wziąwszy dostarczaiącą liczbę wyrazów podanego postępu. Lecz jeżeli q jest ułamkiem wyrażonym przez $\frac{1}{m}$, wtedy będziemy mieli

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1};$$

i widoczna jest rzecz, że tém większą stanie się liczba n, im wyraz $\frac{a}{m^{n-1}}$ będzie mnieyszym, a tém samém, tém więcéy wartość na S, przybliży się do ilości $\frac{am}{m-1}$, od któréy się nie różni, tylko ilością $\frac{a}{(m-1)m^{n-1}}$: więc, im więcéy weźmiemy wyrazów w podanym postępie, tém ich summa bardziéy się przybliży do $\frac{am}{m-1}$, a nawet do tego przywiedzioną bydź może, że różnica mnieysza będzie od ilości mogącéy się naznaczyć; jednak

nigdy jéy w całéy ścisłości nie będzie równa.

Jlość $\frac{am}{m-1}$, którą oznaczymy przez L, jest jak widzimy granicą, do któréy summy szczególne wyrażone przez S, coraz się bardziéy zbliżaią.

Przystosowawszy te uwagi do postępu

$$\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \text{i. t. d.}$$

będziemy mieli $a = 1$, $q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$,

skąd $m = 2$, $L = \frac{am}{m-1} = 2$;

i im więcéy weźmiemy wyrazów położonego postępu, tém bardziéy ich summa zbliżać się będzie do 2.

Znayduiemy w rzeczy saméy

$$1 = 1 = 2 - 1$$
$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$

i. t. d.

Wyrażenie wartości na L, uważane bydź może za zbiór malejącego jeometrycznego postępu rozciągaiącego się nieskończenie, który pospolicie tak się wystawia, jak tu jest położono; jednak nie można z tego mieć o nim czystego wyobrażenia, nie położywszy widocznie pewnéy granicy.

§ 235. Z wyrażenia $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, możemy wyciągnąć wszystkie wyrazy składaiące ten postęp, którego to wyrażenie oznacza summę; wykonawszy bowiem dzielenie ilości $q^n - 1$ przez $q - 1$ (§ 158), znaydziemy

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots\ldots + q^{n-1},$$

co daie $S = a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots + aq^{n-1}$.

Wartość na L, odpowié temuż samemu celowi, kiedy odbędziemy dzielenie ilości m przez $m - 1$, jak następuie:

$$\begin{array}{r|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{i. t. d.} \\ \hline -1 + \frac{1}{m} & \\ -\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} & \\ -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} & \\ \text{i. t. d.} & \end{array}$$

Dzielimy naprzód m, jak zwyczaynie przez piérwszy wyraz dzielącéy, co da za wieloraz 1; mnożymy ten wieloraz przez dzielącą, i mnogość odciągamy od podzielnéy; potém dzielimy resztę 1, przez piérwszy wyraz dzielącéy, a otrzymany wieloraz $\frac{1}{m}$, mnożymy przez dzielącą, i wypadek

odciągamy od piérwszéy reszty; po czém będziemy mieli za drugą resztę $\frac{1}{m}$, z którą tak postąpimy jak z piérwszą. Takim sposobem posuwaiąc daléy działanie, postrzeżemy prawo podług którego idą wszystkie wielorazy cząstkowe i obaczymy, że wyrażenie $\frac{m}{m-1}$ jest to samo, co szereg

$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+$ i. t. d, przedłużaiący się nieskończenie; włożywszy za m jego wartość $\frac{1}{q}$, i rozmnożywszy przez a, wynaydziemy napowrót postęp $a+aq+aq^2+aq^3+$ i. t. d,
którego granicę wyraża L.

§ 256. Rozwinienie $1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+$ i. t. d. uważamy za wartość ułamku $\frac{m}{m-1}$, w każdym razie, kiedy tylko ten szereg jest *malejący*: to jest, kiedy składaiące go wyrazy, coraz się zmnieyszaią oddalaiąc się od piérwszego.

W rzeczy saméy, gdybyśmy wstrzymywali dzielenie poprzedzaiące, na piérwszéy, drugiéy, trzeciéy..... reszcie; wynaleźlibyśmy

wielorazy	i reszty
1	1
$1+\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
i. t. d.	i. t. d.

Piérwsze nie inaczéy przybliżaią się do prawdziwéy wartości, tylko w miarę jak zmnieyszaią się drugie; i ta okoliczność w ten czas ma mieysce, kiedy m przewyższa jedność. We wszystkich zaś innych przypadkach, nie można reszt zaniedbywać, które nieustannie rosnąc, pokazuią, że wielorazy coraz bardziéy oddalaią się od prawdziwéy wartości.

Ażebyśmy tę rzecz wyiaśnili, dosyć jest następnie czynić $m=2$, $m=1$, $m=\frac{1}{2}$. Piérwsze założenie daie

$$\frac{m}{m-1}=2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\text{ i. t. d,}$$

i już widzieliśmy w §*ie* 234, że w rzeczy saméy szereg składaiący drugą stronę zrównania, coraz bardziéy przybliżał się do 2.

Drugie założenie przywodzi, do

$$\frac{m}{m-1}=\frac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+1+1+\text{ i. t. d.}$$

Ten wypadek, $1+1+1+1+1+1+1+$ i. t. d, rozciągaiący się nieskończenie, daie zawsze ilość nieskończoną, jak wymaga natura wyrażenia $\frac{1}{0}$; jednak, gdyby w tym przykładzie reszt niewprowadzano w rachunek, zawsze wpadniętoby na sprzeczność; ponieważ dzieląca rozmnożona przez wieloraz, powinna wydać podzielną; przeto należy, ażeby $1=(1+1+1+1+1+.....)0$; że zaś druga strona zupełnie się niszczy, więc będziemy mieli $1=0$.

Trzecie założenie prowadzi niemniéy do fałszywych wniosków, kiedy się zaniedbuią reszty,

a szereg wypadaiący, kiedy się uważa jako wyrażaiący wartość ułamku z którego pochodzi.

I tak uczyniwszy $m = \frac{1}{2}$, znaydziemy

$$\frac{m}{m-1} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{i. t. d.}$$

co jest oczywiście fałszywém.

Te sprzeczności znikną kiedy uważymy, że w przypadku drugim, reszty $1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}$, i. t d, wszystkie są równe 1; aże się niezmnieyszaią, więc nie można ich zaniedbywać, jakkolwiek daleko posuwamy szereg. Jednę więc z tych reszt przydawszy do drugiéy strony zrównania

$$1 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots)\, o,$$

tedy to zrównanie stanie się zupełném.

W przypadku trzecim, reszty

$$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \text{ i. t. d.}$$

stanowią postęp rosnący $1, 2, 4, 8, 16$, i. t. d; do każdego wielorazu przydawszy ułamek z reszty do niego należącéy, wyrażenia ścisłe ilości $\frac{m}{m-1}$, będą

$$1 + \frac{1}{m-1}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)}$$

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2(m-1)}$$

i. t. d,

które wszystkie zgadzaią się z daną -1, kiedy $m = \frac{1}{2}$.

Gdybyśmy wzięli $m = -n$, ułamek $\frac{m}{m-1}$ stałby się $\frac{n}{n+1}$, a szereg wyrażaiący rozwinienie tego ułamku, zamieniłby się na

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \text{i. t. d,}$$

w którym uczyniwszy $n = 1$, mielibyśmy rozwinienie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ i. t. d, które staie się już 1, już o, i które tém samém albo przez przewyższkę, albo przez niedostatek oddala się od prawdziwéy wartości na $\frac{n}{n-1}$, równéy w tym przypadku $\frac{1}{2}$: lecz że szereg tylko co położony nie jest maleiący, więc nie może dać téy prawdziwéy wartości; zaczém koniecznie należy resztę wprowadzać w rachunek aż do tego wyrazu, na którym przestaiemy. Jeżeli w poprzedzaiącym szeregu założymy $n = 2$, otrzymamy postęp $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} -$ i. t. d.

którego szczególne summy $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ i. t. d. są naprzemiany większe i mnieysze od prawdziwéy wartości na $\frac{n}{n-1}$, którą jest $\frac{2}{3}$, a do któréy nieskończenie się przybliżaią, ponieważ podany szereg jest maleiący.

Chociaż szeregi *rosnące*, to jest te, których wyrazy powiększaiąc się postępuią, coraz się oddalaią od prawdziwéy wartości wyrażenia z którego pochodzą; uważane jednak za rozwinienia owych wyrażeń, mogą dać poznać te ich własności, które bynaymniéy od ich summowania nie zależą.

§ 237. Posuwaiąc coraz daléy jakiekolwiek bądź algebraiczne dzielenie, jak czyniliśmy w *§ie* 235, dzieląc m przez $m-1$, zawsze przyidziemy do wyrażenia wielorazu przez szereg nieskończony wyrazów jednowyrazowych. Tymże samym sposobem przedłużane wyciąganie pierwiastków na resztach następuiących jednych za drugiémi, w przypadku nie zupełnych potęg, także przywodzi do nieskończonych szeregów; lecz te szeregi łatwiéy się otrzymuią za pomocą wzoru *dwówyrazowego*, co w *Dopełnieniu téy Algebry* widzieć się daie, i w *Iiéy części Algebry* J. SNIADECKIEGO.

Teorya ilości Wykładniczych i Logarytmowych.

§ 238. We wszystkich dotąd rozwiązywanych pytaniach, nigdzie niewiadome za wykładników niewchodziły; lecz nie byłoby toż samo, gdybyśmy chcieli oznaczyć liczbę wyrazów jeometrycznego postępu, którego byłby nam znany, wyraz piérwszy, ostatni i wykładnik. W rzeczy saméy, mielibyśmy na ten koniec zrównanie

$$l = aq^{n-1} \quad (\S\ 231),$$

w którém niewiadomą byłoby n; uczyniwszy dla skrócenia $n-1=x$, stałoby się $l=aq^x$. Proste sposoby wprzódy wyłożone nie mogłyby rozwiązać tego zrównania, a takie ilości jak x, nie-

mogą bydź wyrażane żadnym znakiem, jakicheśmy dotychczas używali. Abyśmy się dostatecznie objaśnili w téy rzeczy, zważémy z *Eulerem* zachodzący związek między różnémy algebraicznémi działaniami, i zastanowimy się nad tém, jakim sposobem każde z nich nowy gatunek ilości rodzi.

§ 239. Daymy dwie ilości a i b, i załóżmy, że mamy je do siebie dodać; będziemy mieli

$$a+b=c;$$

a jeżeli z tego zrównania zechcemy wyciągnąć a albo b, wynaydziemy $a=c-b$, $b=c-a$.

Oto jest, jak widzimy, początek odciągania: więc kiedy to działanie nie może się wykonać w porządku, w jakim jest wskazane, w ten czas wypadek stanie się odjemnym.

Dodawanie powtarzane téyże saméy ilości, rodzi mnożenie: albowiem oznaczywszy przez a mnożną, przez b mnożącą, a przez c mnogość, mamy $ab=c$,

skąd wyciągamy $a=\frac{c}{b}$, $b=\frac{c}{a}$;

a stąd rodzą się dzielenie i ułamki, które są piérwszego działania dalszym ciągiem, kiedy dzielenie nie może się odbyć bez reszty.

Powtarzane mnożenie jakieykolwiek ilości przez się sąmę, daie téy ilości potęgi; wyraziwszy naprzykład literą b, liczbę razy, ile a jest mnożnikiem w potędze, jaka się uważa; będzie

$$a^b=c.$$

To zrównanie, istotniéy tém się różni od poprzedzaiących, że ilości a i b nie wchodzą tu obie jednakowym sposobem: skąd wynika, że niemożna rozwiązać tego zrównania, tak co do jednéy biorąc, jako też i co do drugiéy ilości. Je-

żeli tą ilością którey szukamy jest a, tedy proste wyciąganie pierwiastków wystarczy na jey znalezienie, a to działanie daie mieysce nowemu gatunkowi ilości, to jest, niewymiernych; lecz oznaczenie ilości b, zależy od szczególnych sposobów, które poznamy, wyłożywszy wprzódy istotne własności zrównania $a^b = c$.

§ 240. Możemy łatwo widzieć, ze zachowawszy tęż samę wartość litery a, którą założymy większą od jedności, a wartość b stosownie odmieniaiąc, będziemy mogli otrzymać za c, wszystkie liczby mogące się pomyślić. W rzeczy saméy, uczyniwszy $b = o$, mamy $c = 1$; potém, kiedy b wzrastać będzie, wartości odpowiadaiące na c, będą coraz bardziéy przewyższać jedność, i będziemy mogli według upodobania je powiększać. Przeciwnie zaś będzie, kiedy weźmiemy b odjemne; zrównanie $a^b = c$, odmieniwszy się na $a^{-b} = c$ czyli na $\frac{1}{a^b} = c$, przywiedzie do tego, że wartości na c postępuią zmnieyszaiąc się coraz bardziéy, i tak jak zechcemy stać się będą mogły małémi. Można więc z tego samego zrównania wyciągać wszystkie liczby dodatne mogące się pomyślić, bądź całkie bądź ułamkowe, w przypadku kiedy a przewyższa jedność. Byłoby także toż samo gdybyśmy mieli $a < 1$; wartości tylko na c, postępowałyby w odwrótném rozumieniu poprzedzaiącemu przypadkowi; lecz założywszy $a = 1$, zawszebyśmy znaleźli $c = 1$, jakąbyśmykolwiek dla b nadali wartość: należy więc, w tém co następuie, uważać a, za istotnie różne od jedności.

Dla lepszego oznaczenia, że a bynaymniéy się niezmienia, i że inne dwie ilości b i c są nieoznaczone, wyraźmy je literami x i y, a będziemy mieli zrównanie $a^x = y$, w którém, każdéy wartości na y, odpowiada wartość na x, z przyczyny że piérwszą z tych ilości oznaczamy przez drugą, i nawzaiem.

§ 241. To rodzenie się wszystkich liczb za pomocą samych potęg, jest nayważnieyszą rzeczą, nie tylko z użytku w Algebrze, ale jeszcze i z tego względu, że wielce jest pomocném do skracania rachunków liczbowych. W rzeczy saméy, jeżeli uważymy inną liczbę y' i wyrazimy przez x', wartość odpowiadaiącą na x; będziemy mieli $a^{x'} = y'$, a zatém gdy rozmnożymy y przez y', otrzymamy

$$yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'};$$

co rozdzieliwszy, znaydziemy

$$\frac{y'}{y} = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x},$$

naostatek, jeżeli weźmiemy liczby y, potęgę m, i jéy pierwiastek n, będziemy mieli

wyrażenie potęgi $y^m = (a^x)^m = a^{mx}$

——— pierwiastku $y^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$.

Wynika z dwóch wypadków piérwszych, że poznawszy wykładniki x i x', odpowiadaiące liczbom y i y', wynaydziemy, wziąwszy ich summę, wykładnik odpowiadaiący mnogości yy'; wziąwszy zaś ich różnicę, odkryiemy wykładnik odpowiadaiący wielorazowi $\frac{y'}{y}$. Dwa ostatnie zrównania pokazuią, że wykładnik służący potędze m, liczby y, przez proste otrzymuie się mnożenie;

a odpowiadaiący pierwiastkowi n, przez proste dzielenie.

Łatwo stąd możemy wnosić, że gdybyśmy mieli taką tablicę, na któréyby obok liczb na y, znaydowały się wartości odpowiadaiące na x, aby tym sposobem maiąc dane y, można było miéć i x, i nawzaiem; wtedy *mnożenie dwóch liczb jakichkolwiek byłoby przywiedzione do prostego dodawania*; ponieważ, cobyśmy mieli odbywać działanie na tych liczbach, dodawalibyśmy stosowne na x wartości, a potém szukaiąc na tablicy liczby odpowiadaiącéy téy summie, otrzymalibyśmy szukaną mnogość. Wieloraz zaś liczb podanych znaydowałby się na téyże saméy tablicy, na przeciw różnicy wartości odpowiadaiących na x, i na ów czas *dzielenie wykonałoby się przez odciąganie.*

Z tych dwóch przykładów, możemy łatwo przewidziéć pożytek, jaki miéć mogą tablice téy podobne, o któréy dopiérośmy mówili, a których użycie wielce się rozszérzyło od czasów Nepera, który je piérwszy wynalazł. W tych tablicach wartości na x, są pod imieniem *Logarytmów* znane; zaczém *Logarytmy są to wykładniki potęg do których należy podnieść niezmienną liczbę, aby stąd kolcyno wyprowadzać wszystkie liczby, jakie tylko pomyślić się mogą.*

Liczba niezmienna nazywa się gruntem Tablic albo układem Logarytmów.

W ciągu dalszym, logarytm liczby y, wyrażać będziemy przez ly; zatém będziemy mieli $x = ly$ aże $y = a^x$, przeto stanie się $y = a^{ly}$.

§ 242. Ponieważ własności logarytmów są niezawisłe od szczególnych wartości liczby a, czyli od ich gruntu; zatém stąd wypada, że można układać tablice nieskończenie różne, nadaiąc téy

liczbie rozmaite wartości. Wziąwszy naprzykład $a = 10$, będziemy mieli $y = (10)^{ly}$, i natychmiast znaydziemy, że liczby

$$1 , 10 , 100 , 1000 , 10000 , 100000, \text{ i. t. d.}$$

które wszystkie są potęgami z 10, maią za logarytmy w tém przypuszczeniu, liczby

$$0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , \text{ i. t. d.}$$

Na tym szeregu możemy już sprawdzać własności wysłowione w §*ie* poprzedzaiącym: dodawszy logarytmy 10 i 1000, którémi są 1 i 3, obaczymy, że ich summa 4, znayduie się pod 10000, które są podanych liczb mnogością.

§ 243. Logarytmy liczb środkuiących między 1 i 10, 10 i 100, 100 i 1000, i. t. d, nie mogą się inaczéy otrzymywać, tylko przez przybliżenie. Gdyby bowiem wypadało nam miec logarytm 2, musielibyśmy rozwiązać zrównanie $(10)^x = 2$, stosuiąc do niego sposób podany w §*ie* 221, i wynaleśdź naprzód liczbę całką wartości x naybliższą; poczém wkrótcebyśmy postrzegli, że x jest między 0 i 1, ponieważ $(10)^0 = 1$, $(10)^1 = 10$; więc uczynimy $x = \frac{1}{z}$, przez co stanie się $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$, czyli $10 = 2^z$; aże z, znayduie się między 3 i 4, przeto założymy $z = 3 + \frac{1}{z'}$, i wypadnie stąd

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}},$$

czyli

$$2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4},$$

czyli nakoniec $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}$.

Wartość na z', wpadaiąca między 3 i 4, uczyni

$$z' = 3 + \frac{1}{z''};$$

i będziemy mieli

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z''}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}$$

skąd wyciągniemy

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{3} = \frac{128}{125}, \text{ czyli } \left(\frac{128}{125}\right)^{z''} = \frac{5}{4};$$

a po kilku probach znaydziemy, że z'' jest między 9 i 10. Moglibyśmy i daléy posuwać ten sposób; lecz żeśmy go jedynie tu wprowadzili dla pokazania, jak możemy wynaydować wszystkich liczb logarytmy, ograniczémy się przeto przypuszczeniem że $z'' = 9$; a wróciwszy się do piérwszego założenia, otrzymamy

$$z' = \frac{28}{9}, \quad z = \frac{93}{28}, \quad x = \frac{28}{93}.$$

Ta wartość na x przerobiona na ułamki dziesiątkowe, jest dokładną do czwartéy cyfry, albowiem daie $x = 0,3010$7;
a rachunek pomknięty do wyższego stopnia ścisłości, uczy, że rozciągnąwszy go do 7 dziesiątkowych, będziemy mieli

$$x = 0,3010300.$$

Aby tę wartość na x, wyrazić przez wartość wykładnika, należy poznać, że jeźli podniesiemy liczbę 10 do potęgi oznaczonéy liczbą 3010300, i z wypadku wyciągniemy pierwiastek stopnia 10000000, otrzymamy liczbę naybardziéy przybliżaiącą się do 2; to jest, że $(10)^{\frac{3010300}{10000000}} = 2$, bardzo blizko: piérwsza strona większa jest nieco od 2: ale liczba

$(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ byłaby mnieyszą (*).

§ 244. Mnożąc następnie przez 2, 3, 4, i. t. d. logarytm 2, otrzymamy logarytmy liczb 4, 8, 16, i. t. d, które są 2gą, 3cią, 4tą i. t. d, potęgą liczby 2.

(*) Sposobu w tym §fie wskazanego niemoglibyśmy w praktyce przystosować do liczb nieco większych; ale mamy inny przez P. Long jeometry angielskiego podany w Transakcyach filozoficznych, (*Transactions philosophiques pour l'année* 1724, n°. 339) który nayużyteczniejszym bydź może.

Ponieważ oznaczenie x, w zrównaniu $(10)^x = y$, jest bardzo pracowite, możemy zatém postępować porządkiem wspacznym, wprzódy naznaczyć sobie x, dla otrzymania y, i układać tablicę wartości na y, odpowiadaiących wartościom na x, co potém posłuży do oznaczenia x przez y.

Biorą się naprzód za x wartości od 0,1 aż do 0,9, i wszystko przywodzi się do oznaczenia wartości na y, która odpowiada na $x = 0,1$ czyli która jest $(10)^{\frac{1}{10}}$, ponieważ inne wartości na y, to jest

$$(10)^{\frac{2}{10}}, \quad (10)^{\frac{3}{10}}, \text{ i. t. d.}$$

są drugiémi trzeciemi i, t. d, potęgami piérwszéy.

Wyciąganie pierwiastku kwadratowego na samprzód pokazuie, że

$$(10)^{\frac{1}{2}} \text{ czyli } (10)^{\frac{5}{10}} = 3,162277660;$$

Do logarytmu 2, dodaiąc logarytmy 10, 100, 1000, i. t. d. wyprowadzimy stąd logarytmy 20, 200, 2000, i. t. d; skąd oczywiście się pokazuie, że dosyć jest miéć logarytmy liczb piérwszych, aby wynaleśdź logarytmy wszystkich liczb składanych, które są potęgami albo mnogościami liczb piérwszych. Liczba 210, ponieważ równa jest $2\times3\times5\times7$, zatém jéy logarytm będzie równy

$$l2+l3+l5+l7, \text{ i. t. d.}$$

aże $5=\frac{10}{2}$, przeto będziemy mieli

$$l5=l10-l2.$$

§ 245.

---

potém wyciągnąwszy pierwiastek potęgi piątéy z tego wypadku, przydziemy do

$$(10)^{\frac{1}{10}}=1,258925412.$$

Podobnym sposobem postępuiąc, wyciągniemy z $(10)^{\frac{1}{10}}=1,258925412$ wartość na

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}}=(10)^{\frac{1}{20}}=(10)^{\frac{5}{100}}=1,122018454;$$

potém biorąc pierwiastek potęgi piątéy, wypadnie

$$(10)^{\frac{1}{100}}=1,023292992,$$

a wracaiąc się do potęg 2iéy, 3iéy ..... 9téy, otrzymamy wartości na y, odpowiadaiące wartościom x, od 0,01 aż do 0,09.

Łatwo poymuiemy, że tym sposobem będziemy mogli ułożyć wartości na y, odpowiadaiące wartościom na x od 0,001, aż do 0,009; potém od 0,0001, aż do 0,0009, i tym sposobem złożyć następuiącą tablicę.

Logaryt:	Liczby Natur:	Logaryt:	Liczby Natur:
0,9	7,943282347	0,00000	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184224
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092106
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893193	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020724
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002302
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248694	7	1,000001611
6	1,013911386	6	1,000001381
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000690
2	1,004615794	2	1,000000460
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921459	4	1,000000092
3	1,000691015	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

§ 245. Logarytmy które zawsze wyrażaią się przez ułamki dziesiątne, składać się koniecznie muszą z dwóch części, to jest: z jedności poło-

---

Za pomocą téy Tablicy, wynaleśdź można logarytm jakieykolwiek liczby, dzieląc ją przez 10, tyle razy, ile potrzebować będziemy. Naprzykład, chcąc otrzymać logarytm liczby 2549: naprzód podzielimy tę liczbę przez $(10)^3$ czyli przez 1000, które znaczą naywiększą potęgę 10*ciu* zawartą w liczbie danéy, i otrzymamy

$$2549 = (10)^3 \times 2{,}549;$$

potém poszukamy na tablicy potęgi 10*ciu* bezpośrednie niższéy od 2,549, i znaydziemy

$$(10)^{0{,}4} = 2{,}511886432,$$

a rozdzieliwszy 2,549, przez tę ostatnią liczbę, wypadnie

$$2{,}549 = (10)^{0{,}4} \times 1{,}014775177.$$

Poszukawszy jeszcze na tablicy potęgi 10*ciu* bezpośrednie niższéy od 1,014775177, znaydziemy

$$(10)^{0{,}006} = 1{,}013911386;$$

Rozdzieliwszy potém przez tę liczbę poprzedzaiący wieloraz 1,014775177, będziemy mieli wieloraz 3*ci* 1,000851742.

Takowe działanie dopóty przedłużamy, aż póki nieprzyidziemy do wielorazu nieróżniącego się tylko jednością w tym porządku dziesiątkowych, który zaniedbać mamy.

Uważaiąc tu trzeci wieloraz za równy jedności, liczba podana łatwo się rozłoży na mnożniki, które będą potęgami 10*ciu*, ponieważ będziemy mieli

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0{,}4} \times (10)^{0{,}006} = (10)^{3{,}406},$$

skąd się pokazuie, że 3,406 jest logarytmem liczby 2549. Posunąwszy dzielenie aż do 7*miu* cyfer, znaydziemy, że tym logarytmem jest 3,406369.

żonych na lewéy stronie przecinka, i z cyfer dziesiątkowych leżących na stronie prawéy. Piérwsze mianuią się *cechami*, ponieważ w logarytmach, które teraz uważamy, a które wypadaią z założenia $a = 10$, i nazywaią się *logarytmami zwyczaynémi*, ta część pokaznie, w jaki porządek jedności wpada ta liczba, któréy mamy logarytm. Wszystkie logarytmy liczb zawartych między 1 i 10, wpadaią między 0 i 1, przeto ich cechą jest zero; wszystkie zaś zawiéraiące się między 10 i 100, maią za cechę 1; zawarte między 100 i 1000, maią 2; a w ogólności cecha logarytmu tyle ma w sobie jedności, ile liczba podana ma cyfer, mniéy jedną.

Taż sama tablica łatwiéy jeszcze służy do wynaydowania liczby, maiąc jéy logarytm. Oto jest przykład.

Niech będzie 2,547 logarytm dany, liczba szukana będzie

$$(10)^{2{,}547} = (10)^2 \times (10)^{0{,}5} \times (10)^{0{,}04} \times (10)^{0{,}007},$$

będzie więc równa mnogości liczb

$$(10)^2 = 100$$
$$(10)^{0{,}5} = 3{,}162277660$$
$$(10)^{0{,}04} = 1{,}096478196$$
$$(10)^{0{,}007} = 1{,}016248694$$

wziętych, na wymienionéy tablicy; zaczém będziemy mieli

$$2{,}547 = 1.352{,}357.$$

P. *Dodson* wydał w języku angielskim pod tytułem *Anti-logarithmiccanon* tablicę tegoż samego gatunku z położoną przez nas, ale daleko rozlegleyszą, która służy do wynalezienia, jakiéy liczbie odpowiada logarytm dany.

§ 246. Jest jeszcze jedna niemniéy ważna uwaga, że logarytmy liczb, które są dziesiątnémi jedne drugich, maią tęż samą część dziesiątkową: Naprzykład,

54360 ma za Log:	4,7352794,
5436	3,7352794,
543,6	2,7352794,
54,36	1,7352794,
5,436	0,7352794;

gdyż każda z tych liczb, będąc wielorazem z rozdzielenia poprzedzaiącéy przez 10, ma za logarytm, logarytm poprzedzaiącéy, którego cecha zmnieysza się tylko jednością. (§§ 241, 242).

§ 247. Na mocy tego cośmy już powiedzieli w *§ście* 240, logarytmy liczb ułamkowych są odjemne w przypuszczeniu istotném; i łatwo się wyprowadzaią z logarytmów liczb całkich, uważywszy, że ułamek wyraża wieloraz z podzielenia licznika przez mianownika. Jeżeli licznik mnieyszy jest od mianownika, jego logarytm jest także mnieyszy od logarytmu mianownika, a zatém odciągnąwszy ostatni od piérwszego, zostanie reszta odjemna.

Naprzykład chcąc otrzymać logarytm ułamku $\frac{1}{2}$, odciągamy od 0, które wyraża logarytm jedności, ułamek 0,3010300, wyrażaiący logarytm 2, i wypadnie — 0,3010300.

Odciągnąwszy od 0, liczbę 1,3010300 która jest logarytmem 20, pozostanie logarytm $\frac{1}{20}$, równy — 1,3010300.

Aże logarytm 3 jest 0,4771213, przeto logarytm $\frac{2}{3}$, będzie

0,3010300 — 0,4771213 = — 0,1760913.

§ 248. Tym sposobem otrzymane logarytmy ułamków, bez względu na ich znaki, należą (§ 241) do wielorazu, z podzielenia mianownika przez licznika, a tém samém odpowiadaią téy liczbie, przez którą należałoby dzielić jedność, aby otrzymać ułamek dany. W rzeczy saméy, naprzykład $\frac{2}{3}$, możemy tak wystawić

$\frac{\frac{1}{3}}{2}$, a $1\frac{3}{2} = 13 - 12 = 0,1760913.$

Dla wynalezienia wartości ułamku, któremu odpowiada logarytm odjemny dany, byłoby niewygodnie szukać takiéy liczby, któréy on odpowiada, kiedy jest dodatnym; ponieważ należałoby wykonać dzielenie jedności przez tę liczbę; lecz jeżeli ten logarytm odciągnie się od 1, 2, 3, i. t. d, jedności, reszta należéć będzie do liczby wyrażaiącéy ułamek szukany, kiedy go na dziesiątkowe obrócimy; ponieważ to odciąganie odpowiada dzieleniu liczb 10, 100, 1000, i. t. d, przez liczbę podanego logarytmu.

Naprzykład, niech będzie — 0,3010300; jeżeli na znak nie maiąc względu odciągniemy ten logarytm od 1, czyli od 1,0000000, reszta 0,6989700 odpowiadaiąca liczbie 5, wskaże, że ułamek szukany jest równy 0,5, ponieważ przypuszczamy, że jedność składa się z 10 części.

Jeżeli, szukaiąc logarytmu ułamku, wyobra-

zimy jedność składaiącą się z 10, albo 100, lub 1000 i. t. d. części, czyli co na jedno wypada, jeżeli cechę logarytmu licznika powiększamy dogodną liczbą jedności, ażebyśmy mogli odciągnąć logarytm mianownika od logarytmu licznika, otrzymamy tym sposobem logarytm dodatny, który użyty bydź może na mieyscu wskazanego wyżéy.

Nakoniec, dla jednostayności w rachunku, nayczęściéy się powiększa 10, cecha logarytmu licznika. Naprzykład, stosownie do ułamku $\frac{2}{3}$, mamy

$$10,3010300 - 0,4771213 = 9,8239087.$$

Łatwo daie się widziéć, że ten logarytm przewyższa 10 jednościami, logarytm odjemny $-0,1760913$, a tém samém, że w każdém zdarzeniu ile razy dodawać się będzie do innych, wprowadzi 10 jedności nadto w wypadek; lecz odciąganie tych 10 jedności niepowinno się liczyć za działanie, albowiem kiedy się to odbywać będzie, zarazem wykona się i odciąganie $0,1760913$. W rzeczy saméy, niech N znaczy liczbę do któréy dodaie się logarytm dodatny $9,8239087$, wypadek z działania wyrazi się przez $N+10-0,1760913$; od którego gdy odciągnie się dziesięć, będzie tylko

$$N - 0,1760913.$$

Podług tego co poprzedziło, zamieniamy odciąganie na dodawanie, wziąwszy, za liczbę do odciągania, jéy *arytmetyczne dopełnienie*, to jest co pozostaie, kiedy odciągniemy tę liczbę od jednéy z liczb 10, 100, 1000, i. t. d; a wypadek otrzymany odciągniemy od 10 jedności prostych podanéy liczby, wszystkie zaś inne od 9; to zrobiwszy dadaiemy to dopełnienie do liczby od któréy wypada odciągać podaną, a od summy odciągamy jedność porządku, z którego wzieliśmy dopełnienie.

Oczywista jest rzecz, że jeżeli dopełnienie powtórzone jest kilka razy, to po dodaniu potrzeba będzie odciągnąć tyle jedności tego porządku z którego dopełnienie było wzięte, ile się znayduie jedności w jego mnożącéy; i dla téy to przyczyny, jeżeliby kilka dopełnień brano, tedy koniecznie należałoby odciągać na każde dopełnienie, jedność tego poprządku, z którego dopełnienie wzięto, czyli tyle jedności ile jest dopełnień, kiedy wszystkie są wzięte z jednakiéy jedności.

Niekiedy to odciąganie wykonać się niemoże, a w ten czas wypadek jest arytmetyczném dopełnieniem logarytmu ułamku i w tablicy odpowiada wyrażeniu tegoż ułamku obróconego na dziesiętne. Kiedy pozostanie jeszcze 10 jedności do odciągnienia od cechy, co jest naypowszechnieyszym przypadkiem, jest to właśnie jakby rozmnożono przez 10000000000 licznika szukanego ułamku, aby go uczynić podzielnym przez mianownika; pod ów czas cecha logarytmu wielorazu pokaże, jaki jest naywyższy porządek jedności zawartych w tym wielorazie, stosownie do jedności w podzielnéy. W log: $9,8239087$, cecha 9 pokaznie, że wieloraz powinien mieć mniéy jedną cyfrą od liczby, przez którą mnożono jedność; a zatém, jeżeli dla przywiedzenia wielorazu do jego prawdziwéy wartości, oddzielimy 10 dziesiątkowych cyfer, piérwsza jego cyfra po lewéy stronie będzie dziesiątkami: przeto za liczby, którychby arytmetyczne dopełnienia miały cechy 8, 7, i. t. d. znaleźlibyśmy tylko setne, tysiączne, i. t. d.

§ 249. Wszystko to cośmy mówili o *układzie* logarytmów, w którym $a = 10$, zawiéra gło-

wne prawidła potrzebne do wyrozumienia tablic, które prawie wszystkie poprzedziła stosowna wiadomość, tak co do ich szczególnego układania jak i samego sposobu używania, do któréy odsyłamy czytelników. Tablice logarytmowe *Kalleta* i *Borda* są nayrozlegleysze i naywygodnieysze.

§ 250. Kiedy mamy logarytm liczby y, na szczególną wartość a, czyli na szczególny grunt, łatwo jest otrzymać logarytm téyże saméy liczby w każdym innym układzie. Albowiem jeźli mamy $a^x = y$; na drugi grunt A, będziemy mieli $A^x = y$, (x różne jest od x); skąd wyciągniemy $A^x = a^x$. Wziąwszy zaś logarytmy w układzie, którego gruntem jest a, wypadnie $1A^x = 1a^x$; ażeż $1a^x = x$ przez przypuszczenie, i $1A^x = x1A$ (§ 241): więc $x1A = x$, czyli $x = \frac{x}{1A}$; lecz za grunt wziąwszy A, x będzie logarytmem y w układzie tego gruntu: jeżeli więc ten ostatni oznaczymy przez Ly dla rozróżnienia od drugiego, będziemy mieli

$$Ly = \frac{1y}{1A},$$

i znaydziemy logarytm y, *w drugim układzie, rozdzieliwszy logarytm wzięty w piérwszym, przez logarytm gruntu układu drugiego.*

Zrównanie poprzedzaiące daie także $\frac{1y}{Ly} = 1A$;

co pokazuie, że jakakolwiek byłaby liczba y, zawsze między logarytmami Ly i $1y$ zachodzi stateczny stosunek wyrażony przez $1A$.

§ 251. W każdym jakimkolwiek bądź układzie, logarytm 1, jest zawsze 0, ponieważ jakiebykolwiek było a, mamy zawsze $a^0 = 1$. Ażeż logarytmy mogą nieskończenie wzrastać, przeto mówimy iż one razem z liczbami nieskończonémi się staią; gdy zaś y jest ułamkiem, wtedy mamy $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$; przez co się pokazuie, że im bardziéy zmnieysza się y, tém bardziéy x powinno się powiększać odjemnie, jednak za x nigdy nie można naznaczyć takiéy liczby, któraby zupełnie czyniła y równe zero. Taka jest myśl w któréy rozumiéć należy, że *logarytm zera, jest równy nieskończoności odjemnéy*, jakim się znayduie w wielu tablicach.

§ 252. Teraz wyłożymy użycie logarytmów jakie mieć z ich możemy, w obrachowaniu liczbowym wzorów. Z §*fu* 241, i z definicyi logarytmów która daie $a^{1y} = y$, wypada, że

$$1(AB) = 1A + 1B, \quad 1\left(\frac{A}{B}\right) = 1A - 1B,$$

$$1A^m = m1A, \quad 1A^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}1A.$$

Przystosowawszy te prawidła do wzoru $\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}}$ który jest dosyć zawiły, wynaydziemy

$$1(A^2\sqrt{B^2 - C^2}) = 1(A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}) =$$

$$2\,1A + \frac{1}{2}1(B+C) + \frac{1}{2}1(B-C),$$

$$1(C\sqrt[5]{D^3EF} = 1C + \frac{3}{5}1D + \frac{1}{5}1E + \frac{1}{5}1F,$$

a zatém

$$1\left(\frac{A^2\sqrt{B^2-C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}}\right)=21A+\frac{1}{2}1(B+C)+\frac{1}{2}1(B-C)-1C-\frac{3}{5}1D-\frac{1}{5}1E-\frac{1}{5}1F.$$

Gdybyśmy wzięli arytmetyczne dopełnienie logarytmów $1C, \frac{3}{5}1D, \frac{1}{5}1E, \frac{1}{5}LF$, i oznaczywszy je przez C', D', E', F', położyli w wypadku na mieyscu logarytmów poprzedzaiących, mielibyśmy

$$21A+\frac{1}{2}1(B+C)+\frac{1}{2}1(B-C)+C'+D'+E'+F',$$

nie zaniedbuiąc odciągnąć od summy, tyle jedności tego porządku z którego dopełnienie wzięto, ile jest dopełnień, jak w tym przypadku jest 4. Gdy już przyidziemy do logarytmu podanego wzoru, tablice wskażą nam liczbę, któréy on odpowiada, a która jest wartością szukaną.

§ 253. Nayczęstsze jest użycie logarytmów w wynaydowaniu czwartego wyrazu proporcyi. Oczywista bowiem, że jeżeli

$a:b::c:d$, tedy będziemy mieli

$$d=\frac{bc}{a}, \text{ skąd } 1d=1b+1c-1a;$$

to jest, że *logarytm czwartego wyrazu szukanego, jest równy summie logarytmów dwóch wyrazów średnich, zmnieyszonéy logarytmem znanego wyrazu skraynego:* czyli raczéy, *summie logarytmów wyrazów średnich, powiększonéy arytmetyczném dopełnieniem logarytmu skraynego wyrazu znaiomego.*

§ 254. Jeżeli wezmiemy logarytmy obudwóch stron zrównania $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, wyrażaiącego własność proporcyi, będziemy mieli $1b-1a=1d-1c$ (§ 252); skąd wypada, że cztéry logarytmy

$$1a.1b:1c.1d$$

stanowią proporcyą arytmetyczną (§ 223).

Szereg zrównań $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}$, &. (231)

przywodzi także do

$1b-1a=1c-1b=1d-1c=1e-1d$, i. t. d,

a stąd wnosimy, że na postęp jeometryczny

$$\div a:b:c:d:e, \text{ i. t. d,}$$

odpowiada postęp arytmetyczny

$$\div 1a.1b.1c.1d.1e, \text{ i. t. d,}$$

a zatém, że *logarytmy liczb będących w postępie jeometrycznym, same są w postępie arytmetycznym.*

§ 255. Jeżeli mielibyśmy zrównanie $b^z=c$, łatwobyśmy je rozwiązali za pomocą logarytmów; ponieważ $1b^z$ równy jest $z1b$, przeto mielibyśmy $z1b=1c$, a tém samém $z=\frac{1c}{1b}$.

Ze zrównaniem $b^{c^z}=d$ podobniebyśmy postąpili: uczyniwszy naprzód $c^z=u$, wypadłoby

$$b^u=d,\ u1b=1d,\ u=\frac{1d}{1b}, \text{ czyli } c^z=\frac{1d}{1b};$$

wziąwszy zaś nanowo logarytmy, wynaleźlibyśmy

$$z1c=1\left(\frac{1d}{1b}\right)=11d-11b, \text{ i } z=\frac{11d-11b}{1c}.$$

W tém ostatniém wyrażeniu, $\mathrm{l}\,\mathrm{l}\,b$ znaczy logarytm z logarytmu ilości b, i otrzymnie się uważaiąc ten logarytm jak liczbę. Ilości b^z, bc^z, i wszystkie inne które z nich pochodzą, nazywaią się *wykładnicze*.

Pytania stosowane do procentu od kapitałów.

§ 256. Teorya postępów jeometrycznych i teorya logarytmów, maią swoie przystosowanie w spekulacyach procentowych. Ażeby poiąć co zamierzamy w téy materyi mówić, należy wprzódy wiedzieć, że zyski, jakie summa pieniężna temu przynosi, który jéy używa na zamiany handlowe, albo wkłada na wykonanie jakowegoś korzystnego wyrobku, tém są większe, im więcéy razy mógł on ponowić te zamiany, lub też pomnożyć wyrobki. Stąd wynika, że pożyczaiący pewną summę, aby z niéy korzystał, powinien oddaiąc ją po pewnym przeciągu czasu, dołączyć jeszcze pewną ilość pieniężną, którąby zastąpiła te zyski, jakie wierzycielowi przyniosłaby ta summa gdyby jéy był sam użył. Takie jest wyobrażenie jakie mieć należy o procencie. Aby go oznaczyć, porównywaią się wszystkie summy do summy *100* złł: albo rubli, wziętych za jedność, i przyzwoita jest, ażeby ta ostatnia przywiązana była do pewnego danego czasu, naprzykład roku. Nie jest tu mieysce wykładać te uwagi, które w każdym rodzaiu spekulacyy podnoszą lub zniżaią procenta, gdyż te wchodzić tylko mogą w początki arytmetyki politycznéy i handlowéy, które poprzedzić powinny początki *rachunku losów:* naszym zaś jest zamiarem w tém co następuie, samo tylko rozwiązanie kilku zadań, które nam nastręczaią jeometryczne postępy.

Założémy w ogólności, że zgodzono się za summę 1, przy końcu roku zapłacić procent wyrażony przez r; oczywista jest rzecz, że od summy *100*, przez tenże sam czas, procent będzie $100r$; a od summy jakieykolwiek a, procent wyrazi się przez ar; i gdy ten ostatni oznaczymy przez α, będziemy mieli $\alpha = ar$.

Przez ten związek łatwo można wynaleśdź procent od jakieykolwiek summy, kiedy wiadomo, jaki daią *100* złł: albo rubli, lub też każda inna summa przez czas wiadomy: to pytanie nazywa się *rachunek prostego procentu*.

§ 257. Lecz jeżeli wierzyciel, zamiast odbierania rocznego procentu od kapitału, pozwoli aby pożyczaiący, łącznie z pierwotną summą kapitalną obracał go na zysk dalszy, przez rok następuiący; tedy przy końcu tego roku kapitał nabędzie nowéy wartości, która się także wynaydzie. Ponieważ kapitał pierwotny był a, więc powiększony procentem ar, stanie się przy końcu roku

$$a + ar = a(1 + r).$$

Jeżeli uczynimy $a(1 + r) = a'$,

procent od summy a', za jeden rok jest $a'r$, takiż od summy $a(1 + r)$, będzie za rok drugi $ar(1 + r)$; aże kapitał a powiększony procentem, który miał bydź wypłacony przy końcu piérwszego roku, stanie się $a(1+r)$, przeto i kapitał a' stanie się na końcu drugiego roku, $a'(1+r) = a(1+r)^2 = a''$.

Jeżeli wierzyciel jeszcze nie odbiéra kapitału a'', przy końcu tego roku, i zostawuie go w ręku swego dłużnika na rok trzeci, w takowym razie, przy końcu tego roku będzie mu winien, według tego co poprzedziło:

$$a''(1+r) = a(1+r)^3 = a'''.$$

Możemy więc łatwo widzieć, że po czwartym roku, kapitał a''' zamieni się na $a'''(1+r)=a(1+r)^4$, i tak daléy; a tém samém że summa nasamprzód pożyczona, i summy maiące się oddawać na końcu piérwszego, drugiego, trzeciego, i czwartego, i. t. d. roku, składaią ten jeometryczny postęp.;

$\therefore a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4$: i. t. d,

którego wykładnikiem jest $1+r$, a wyrazem ogólnym

$$a(1+r)^n = A,$$

liczbą n znacząc liczbę lat upłynionych od czasu pożyczki.

Daymy naprzykład, że taxa rocznego procentu jest po 5 od *100*, to jest: że za pożyczone *100* złł: na rok jeden, oddać należy *105* złł: mamy więc

$$100\,r = 5, \text{ czyli } r = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \text{ i } 1+r = \frac{21}{20}.$$

Gdybyśmy chcieli wiedzieć jaką stanie się summa a, zostawiona przez *25* lat pod warunkami wymienionemi, mielibyśmy w ten czas

$$n = 25, \text{ i } a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

zamiast pierwotnéy summy. Potęga *25ta* z $\frac{21}{20}$ łatwo się ocenia za pomocą logarytmów; ponieważ wiémy z (§ 252), że

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 25\,l\frac{21}{20} = 25(l21 - l20) = 0{,}529322$$

co daie $\left(\frac{21}{20}\right)^{25} = 3{,}386$ blisko, $A = 3{,}386a$;

Przez co się pokaznie, że *1000* złł: pożyczone takowym sposobem na lat *25*, zrobiłyby razem z procentami, *3386* złł.

Gdyby summa na procent dana trwała *100* lat, wynaleźlibyśmy

$$A = a\left(\frac{21}{20}\right)^{100} = 131\,a, \text{ prawie; przeto } 1000 \text{ złł:}$$

zrobiłyby przez ten przeciąg czasu, około *131000* złł. Te przykłady pokażuią widocznie, jak nagle powiększaią się kapitały przez zgromadzanie procentów składanych.

§ 258. Zrównanie

$$A = a(1+r)^n$$

służy do cztérech pytań. *Piérwsze*: wynaleśdź A, gdy są znane a, r i n, wydarza się w każdym razie, kiedy szukamy, jakim stanie się kapitał po liczbie lat n; co okażemy w przykładzie.

Drugie: maiąc wiadome a, A i n, wynaleśdź r, prowadzi do poznania taxy procentu, z wiadomych summ pierwotnéy, wypłaconéy w końcu i z wiadomego czasu, przez który pierwotna na procencie trwała: mamy w tym przypadku

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

Trzecie: znaiąc A, r i n, wynaleśdź a, w którym staie się

$$a = \frac{A}{(1+r)^n},$$

ma w przedmiocie oznaczenie kapitału jaki należy dać na procent, aby miéć prawo do summy A, po upłynionéy liczbie lat n.

Czwarte: maiąc wiadome A, a i r, wynaleśdź n, nie może się inaczéy rozwiązać tylko przez logarytmy (§ 238 i 252). Wziąwszy logarytmy każdéy strony podanego zrównania, będzie

$$1A = 1a + n1(1+r),$$

skąd $$n = \frac{1A - 1a}{1(1+r)}.$$

Za pomocą tego ostatniego zrównania wynayduie się, w jakim przeciągu lat kapitał a powinien wydać summę A.

Abyśmy tego przypadku dali przykład, załóżmy, że mamy wynaleśdź czas, jaki jest potrzebny na podwoienie pierwotnéy kapitalnéy summy; położywszy że taxa procentu zawsze jest 5 od $\frac{0}{0}$; będziemy mieli

$$A = 2a, \quad 1A = 1a + 12,$$

a zatém

$$n = \frac{12}{1\frac{21}{20}} = \frac{12}{121 - 120} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14{,}21, \text{ blizko.}$$

§ 259. Pytanie następuiące jest jedno z nayzawilszych, jakie w materyi o któréy mowa zadawane bydź mogą. Zakładamy, że kapitalista daie na procent co rok nową summę, i tę każdego roku dolicza do kapitału danego wprzódy, tak postępuiąc przez liczbę lat n: Pytanie jaki jest ogólny kapitał na końcu ostatniego roku, z tych summ szczególnych z ich składanémi procentami.

Niech a, b, c, d .... k, znaczą summy dawane piérwszego, drugiego, trzeciego, czwartego, i. t. d, roku; summa a zostaiąca w ręku pożyczaiącego, przez liczbę lat n, stanie się $a(1+r)^n$;

summa b, która była u niego przez lat $n-1$, zamieni się na $b(1+r)^{n-1}$; summa c, pożyczona na liczbę lat $n-2$, stanie się potém $c(1+r)^{n-2}$, i tak inne; nakoniec ostatnia k, będąc tylko użyta przez rok jeden, da $k(1+r)$: będzie więc

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \ldots + k(1+r).$$

Obrachowawszy oddzielnie każdy wyraz drugiéy strony, otrzymamy wartość dla A.

Działanie bardzo się uproszcza kiedy $a = b = c = d \ldots = k$, gdyż w tym przypadku, mamy

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \ldots + a(1+r);$$

druga strona tego zrównania stanowi postęp jeometryczny, którego piérwszym wyrazem jest $a(1+r)$, ostatnim $a(1+r)^n$, wykładnikiem $1+r$; a zatém jego summą jest

$$\frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r} \text{ (§ 252):}$$

będziemy więc mieli

$$A = \frac{a(1+r)\,((1+r)^n - 1)}{r}.$$

Z tego zrównania wypływaią także cztéry pytania, odpowiadaiące wysłowionym na zrównaniu

$$A = a(1+r)^n.$$

§ 260. Wypłaty, które nazywaią się *roczne*, są względem poprzedzaiących odwrótne: są to summy które z ich procentami pożyczaiący oddaie wierzycielowi z kapitału ogólnego zostaiącego na procencie, w terminach równie odległych. Płace uskuteczniane przez pożyczaiącego przed terminem uiszczenia się z długu, uważane bydź mogą za summy szczególne z góry zaliczane wierzy-

cielowi, których wartość zawisła od czasu upływaiącego między jedną a epoką drugą. Przeto oznaczaiąc przez a, każde wypłacanie cząstkowe, piérwsze dokonane laty $n-1$, przed upłynieniem terminu ostatecznego, do téy epoki odniesione, koniecznie wyniesie $a(1+r)^{n-1}$; druga wypłata do téyże saméy epoki stosowana, wyniesie tylko $a(1+r)^{n-2}$; trzecia jest $a(1+r)^{n-3}$, i tak inne aż do ostatniéy, któréy wartość jest a. Lecz z drugiéy strony, summa pożyczona wyrażona przez A, w ręku pożyczaiącego zostaiąca, powinna wydać przez liczbę lat n, kapitał $A(1+r)^n$, przeto musi bydź równa wszystkim summom szczególnym razem wziętym, które wierzyciel od pożyczaiącego różnémi czasy odbiérał; będzie więc

$$A=(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}\ldots\ldots\ldots+a,$$

czyli, obrachowawszy summę całego postępu składaiącego drugą stronę, stanie się

$$A(1+r)^n=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r},$$

zrównanie, w którém można wziąć naprzemiany za niewiadomą ilość A, którą nazwiemy wartością rocznéy wypłaty, ponieważ jest to summa którą ta ilość wyraża; ilość a, jest szczególną wypłatą roczną, ilość r jest taxą procentu, a nakoniec ilość n, znaczy czas przez jaki trwaią wypłaty roczne.

Dla wynalezienia tego czasu, koniecznie udać się należy do logarytmów; naprzód oswobodza się zrównanie

$$A(1+r)^n=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r},$$

od $(1+r)^n$, co daie

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-Ar},$$

potém wziąwszy logarytmy tego zrównania, wypadnie

$$n\,1(1+r)=1a-1(a-Ar),$$

skąd

$$n=\frac{1a-1(a-Ar)}{1(1+r)}.$$

§ 261. Ażebyśmy pokazali użycie dopiéro wyłożonych wzorów, przystosuymy je do następuiącego pytania:

Wynaleśdź, jaką należy corocznie oddawać summmę, ażeby po 12 *leciech zgasić dług* 100 *czer: złłch, z należącémi za ten czas procentami, licząc roczny procent po* 5 $\frac{0}{0}$.

W tym przykładzie ilości znane, są

$$A=100,\quad n=12,\quad r=\frac{1}{20},$$

a szukamy rocznéy wypłaty a; zrównanie

$$A(1+r)^n=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r},$$

rozwiązane co do a, daie

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

W tém wyrażeniu, za litery A, r i n, położyć należy im odpowiadaiące wartości, a dla większéy łatwości obrachować naprzód za pomocą logarytmów, ilość $(1+r)^n$, która przywodzi się do $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}$, i wynaydzie się $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}=1{,}79586$.

Za pomocą téy wartości, wypadnie:

$$a = \frac{100 \cdot \frac{1}{20} \cdot 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5.1{,}79586}{0{,}79586};$$

działanie wskazane odbywszy na ostatniém wyrażeniu, albo poprostu, albo przez logarytmy, wynaydzie się

$$a = 11{,}2826.$$

Należy więc corok wypłacać po 11, 28 czer: złł. ażeby we 12 lat zgasić dług kapitału 100 czer: złł: kiedy taxa rocznego procentu jest $5\frac{0}{0}$.

§ 262. Większe szczegóły tyczące się tych pytań, przeszłyby granicę którąśmy sobie zakréślili; przeto uważemy tylko, że dla porównania wartości summ wielu, w stosunku do osoby, która je wypłacić powinna albo odebrać; należy te summy do jednéy epoki przywieśdź; to jest, szukać jakiby one kapitał dały w epoce jednakowéy. Naprzykład, Bankierz obowiązany wypłacić summę a, w latach n; lecz dla uyszczenia się daie wexel, którego wartość wyraża się przez b, i zobowiązuie się wypłacić w lat p; piérwszą summę odnosząc do momentu w którym on umowę zrobił, jéy wartość wyniesie tylko $\frac{a}{(1+r)^n}$, ponieważ powinna bydź uważana jako pierwotna wartość kapitału, który staie się a w lat n; summa b, dla teyże saméy przyczyny, w téyże epoce wyniesie $\frac{b}{(1+r)^p}$: więc różnica

$$\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}$$

wskaże, podług tego jak będzie dodatną lub odjemną, co dać powinien lub odebrać bankierz odbiéraiąc swóy wexel; który gdyby się nie mógł wykupić aż w liczbie lat q, więc oznaczywszy przez c jego wartość w moment umowy, stałby się $c(1+r)^q$, i tym sposobem byłby równy ilości

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n} - \frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

Summy $a, b, c, \ldots\ldots k$, w (§ 259) położone, wszystkie odnoszą się do epoki, w któréy powinna się wypłacać summa A; a w §fie 160, każda wypłata równie jak i summa A, maią bydź stosowane do epoki, w któréy kończy się całkowita wypłata.

KONIEC.

Wojewódzka Biblioteka Publiczna w Białymstoku
Biblioteka Uniwersytecka w Białymstoku
Biblioteka Pedagogiczna w Białymstoku
Biblioteka Publiczna dla Dorosłych
BIBLIOTEKA PODLASKA Zakładu Górnictwa
103541
Czytelnia Książek

DODATEK

Nota wspomniana na stronicy 114.

W §§ 66 i 75, wyłożyłem rozwiązania odjemne, roztrząsaiąc zrównanie na którém się one bezpośrednie sprawdzaią, tak jak ich użyłem wyżéy. Ten sposób zawsze mi się wydawał dokładnym, ponieważ tu idzie tylko o pokazanie, że te rozwiązania w pewném rozumieniu czynią zadosyć warunkom zadań, z których wypływaią, gdyż rozwiązuią pytania do podanego podobne; lecz często wiele można znaleśdź sposobów do tworzenia tych pytań: i następuiące, które mi przysłał P. Fransе (*Français*) ważny jeometra i Professor szkoły Artyleryiskiéy w *Mayence*, zdaiemi się że jest prostsze od położonego przezemie w tych Początkach.

„ Sądzi on, że z pytania §*fu* 65, należy usunąć wysłowienie myśli odjazdu gońców, aby „ można było przypuścić, że oni są w drodze od „ nieoznaczonego czasu, a tém samém, że to pytanie należałoby tak położyć. *Dway gońce jadą „ jedną drogą i w jedną stronę* C'ABC (*stron.* 102), „ *po pewnym przeciągu czasu, jeden z nich znayduie się w* A, *w téyże saméy chwili, w któréy drugi staie w* B: *znaiąc ich prędkość i długość drogi* AB, *dóyść, w jakim punkcie téy drogi spotkaią się z sobą*.

To wysłowienie prowadzi do zrównania położonego w §*fie* 65; ale „ ustanowiwszy ciągłość „ biegu, rozwiązanie odjemne tłumaczy się dosyć „ dobrze, niezmieniaiąc kierunku drogi jednego „ z gońców. W rzeczy saméy, ponieważ ich bie„ gi niepoczynały się w punktach *A* i *B*, ale oba

„ nim do tych punktów przybyli, zostawali już „ w biegu jednakowym sposobem przez czas nie„ oznaczony jadąc od *C'* ku punktowi *B*, łatwo „ więc jest poiąć, że goniec, który w tym punkcie wyprzedza będącego w ten czas w *A*, jako „ jadącego powolniéy, powinien w pewnym cza„ sie znaleśdź się za nim i spotkać go przed przy„ byciem do punktu *A*. Znak — pokazuie w tym „ razie, (jak i w przystosowaniu Algebry do „ Jeometryi), że należy wziąć odległość *AR'* „ w przeciwnym kierunku odległości *AR*, która „ uważa się za dodatną. Odmiana jaką zrobić „ należy w wysłowieniu, aby rozwiązanie odjemne stało się dodatném, przywodzi się do tego „ naznaczenia, iż gońce powinni się spotkać, nim „ przybędą do puuktu *A*, a nie zaś za nim. ”

W rzeczy saméy, położywszy punkt *R'*, między punktami *A* i *C'*, zamiast coby miano go kłaśdź między punktami *A* i *B*, znaydziemy $AB = BR' - AR'$, skąd wypada zrównanie $y - x = a$, na mieysce zrównania $x - y = a$, które otrzymaliśmy wprzódy; i niemasz już potrzeby przemieniać znaku dla c, albowiem drugie zrówanie zostaie jak piérwéy $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

P. Français stosuie te uwagi równie szczęśliwie i do przypadku §*fu* 75, kładąc za gońców, dwa ciała ruchome będące w nieustannym biegu od nieoznaczonego czasu. Zadanie tak wysłowia: „ *Dwa ciała ruszaią się jednostaynie po jednéy „ drodze* CB (str. 113), *jedno w kierunku* BC, *drugie w kierunku* CB, *prędkościami danémi; ciało „ ruszaiące się w kierunku piérwszym, znayduie się „ w* B, *na pewną liczbę godzin wprzódy, nim dru-*

„ *gie przybyło do* A; *pytanie, w jakim punkcie*
„ *nieoznaczoney drogi* BC, *spotkaią się z sobą?*

„ Rozwiązanie, $x = -48$ *mil*, dane w §*fie* 75,
„ stosowane do przykładu dopiéro położonego,
„ pokazuie, że dwa ciała ruchome spotkały się
„ w punkcie *R*, wprzódy, nim to, które szło od
„ *C* ku *B*, przybyło do punktu *A*, a drugie idące
„ od punktu *B* ku *C*, nim przyszło do *C*, gdzie
„ znaydzie się w ów czas, kiedy piérwsze stanie
„ w punkcie *A*. ”

Położenie naznaczone w punkcie *A*, sprawdza się uważywszy, że $AC = BC - AB = cd - a$, zamiast $a + cd$, jak otrzymaliśmy wprzódy (stro. 112); zaczém mamy zrównanie $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$, które daie $x = 48$.

Tym sposobem postępuiąc, niemasz już żadney potrzeby przemieniać kierunku biegu, chociaż wprawdzie okoliczności materyalne zadania odmienione zostały; co dowodzi, jak powiedziałem wyżéy, że wiele jest pytań fizycznych, które odpowiadaią na tenże sam matematyczny związek: lecz wysłowienia dopiéro położone, tę maią korzyść, że nie łamią prawa ciągłości, i zbliżaią się do uważania linii, którémi nayprostszym i nayogólnieyszym sposobem wykréślaią się okoliczności zmiany znaku w wielkościach.

OMYŁKI.

Stronica.	*Wiérsz.*	*Omyłka.*	*Czytay.*
2	17	wiadową	wiadomą
3	15	naymnieyszę	naymnieyszą
—	31	znaczny	znaczy
59	23	zawiéra	zawiérała
71	5	wstrymać	wstrzymać
—	25	*Algegraicznym*	*Algebraycznym*
—	27	literów	literom
94	16	*żadań*	*zadań*
—	25	*rozwiązanie*	*rozwiązania*
116	*nota* 2 od końca	$\frac{A}{B}$	$\frac{A}{C}$
136	16	na tych	na innych
142	23	wynalezienie	wynalezienia
148	25	tak	taka
220	23	szesiennego	sześciennego
246	11	pierwiatek	pierwiastek
249	18	zaietych	zaiętych
251	12	$\sqrt[3]{c^{20}d^{15}}$	$\sqrt[35]{c^{20}d^{15}}$
252	11	$\sqrt[n]{bc^s}$	$\sqrt[n]{b^r c^s}$
275	25	$Q - Q')^2$	$(Q - Q')^2$
323	3	postawiania	podstawiania
366	33	dadaiemy	dodaiemy
381	7	w §*fie* 160,	w §*fie* 260,

BIBLIOTEKA PODLASKA
Ks. Kanonika Chmielińskiego
Biała

400,1

~~022118~~

103541
52.
XIX

1939