Politechnika Białostocka

Tadeusz Kaczorek

ZASTOSOWANIE MACIERZY WIELOMIANOWYCH I WYMIERNYCH W TEORII UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Wydawnictwo Politechniki Białostockiej
Białystok 2004

Recenzenci:
prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

ISBN 83-88229-70-2

Opracowanie redakcyjne: Jadwiga Żukowska

Skład: Pracownia Składu Komputerowego i Usług Edytorskich Małgorzata Gołko

Projekt okładki: Krystyna Krakówka

Druk: Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej

Spis treści

Przedmowa

Monografia ta jest poświęcona wybranym zastosowaniom macierzy wielomianowych i wymiernych w teorii ciągłych i dyskretnych układów liniowych o stałych skupionych parametrach. Powstała ona na podstawie wykładów, które prowadził autor dla słuchaczy studiów doktoranckich Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej w roku akademickim 2003/2004.

Monografia ta składa się z 7 rozdziałów, dodatku i wykazu literatury. Rozdział 1. jest poświęcony macierzom wielomianowym. Podano tu podstawowe działania na macierzach wielomianowych, uogólnione twierdzenie Bezoute'a, twierdzenie Cayleya-Hamiltona, działania elementarne na macierzach wielomianowych, wybór bazy przestrzeni macierzy wielomianowych, równoważne macierze wielomianowe, macierze wierszowe i kolumnowe zredukowane, postać kanoniczną Smitha macierzy wielomianowych, dzielniki elementarne i zera macierzy wielomianowych, podobieństwo macierzy wielomianowych, postacie kanoniczne Frobeniusa i Jordana macierzy, macierze cykliczne, pary macierzy wielomianowych, największe wspólne dzielniki i najmniejsze wspólne wielokrotności macierzy, uogólnioną tożsamość Bezoute'a, dekompozycję pęku regularnego i singularnego macierzy oraz postać kanoniczną Weierstrassa-Kroneckera pęku macierzy.

Funkcje i macierze wymierne są przedmiotem rozdziału 2. Po przypomnieniu podstawowych definicji i działań na funkcjach wymiernych omówiono rozkład na sumę funkcji wymiernych, działania na macierzach wymiernych, rozkład macierzy na sumę macierzy wymiernych, macierz odwrotną macierzy wielomianowej i jej redukowalność, postać kanoniczną McMillana macierzy wymiernych, pierwszą faktoryzację macierzy wymiernych oraz zastosowanie macierzy wymiernych w syntezie układów sterowania.

Rozdział 3. jest poświęcony macierzom i układom normalnym. Macierz wymierną nazywamy macierzą normalną, jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej licznika dzieli się przez wielomian minimalny mianownika tej macierzy. Wykazano, że macierz wymierna jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian McMillana jest równy najmniejszemu wspólnemu mianownikowi wszystkich elementów macierzy wymiernej. Podano postacie ułamkowe macierzy normalnych, sumę i iloczyn macierzy normalnych, macierz odwrotną macierzy normalnej, rozkład macierzy normalnych na sumę macierzy normalnych, rozkład strukturalny macierzy normalnych, normalizacje macierzy za pomocą sprzężeń zwrotnych oraz obwody elektryczne jako przykłady układów normalnych.

Problem realizacji macierzy normalnych został omówiony w rozdziale 4. Podano sformułowanie problemu realizacji, warunki konieczne i wystarczające istnienia realizacji minimalnych i cyklicznych, metody wyznaczania realizacji z macierzą stanu w postaci kanonicznej Frobeniusa lub Jordana, strukturalną stabilność i wyznaczanie normalnej transmitancji.

Rozdział 5. jest poświęcony normalnym układom singularnym, w szczególności singularnym układom dyskretnym, parom cyklicznym macierzy, normalnym macierzom odwrotnym par cyklicznych, normalnym macierzom transmitancji, osiągalności i cykliczności układów singularnych, cykliczności układów ze sprzężeniem zwrotnym, wyznaczaniu równoważnych układów standardowych dla układów singularnych. Pokazano, że obwody elektryczne złożone z rezystancji i indukcyjności lub z rezystancji i pojemności oraz idealnych źródeł napięcia (prądu) są przykładami singularnych układów ciągłych. Uogólniono dekompozycję Kalmana oraz rozkład strukturalny macierzy transmitancji na singularne układy liniowe.

Macierzowe równania wielomianowe wymierne i algebraiczne zostały omówione w rozdziale 6. Rozdział rozpoczyna się od unilateralnych równań wielomianowych z dwiema niewiadomymi macierzami, następnie są omówione: wyznaczanie rozwiązań minimalnego stopnia wielomianowych równań macierzowych, bilateralne równania wielomianowe, wyznaczanie rozwiązań wymiernych macierzowych równań wielomianowych, macierzowe równania wielomianowe m-tego stopnia, iloczyn Kroneckera macierzy i jego zastosowanie oraz metody wyznaczania rozwiązań macierzowych równań Sylvestera i Lapunova.

Ostatni rozdział 7. jest poświęcony problemowi realizacji oraz obserwatorom doskonałym singularnych układów liniowych. Podano tu oryginalną metodę wyznaczania realizacji minimalnych dla danej niewłaściwej macierzy transmitancji operatorowych oraz warunki istnienia, metody wyznaczania obserwatorów stanu pełnego i zredukowanego rzędu oraz funkcjonalnych obserwatorów doskonałych dla układów jedno- i dwuwymiarowych.

W dodatku podano podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące sterowalności i obserwowalności układów liniowych.

Monografia zawiera niektóre oryginalne wyniki badań autora w większości wcześniej publikowane.

Jest ona przeznaczona w pierwszej kolejności dla doktorantów i pracowników naukowych z obszaru teorii sterowania i systemów oraz teorii obwodów elektrycznych. Można ją również polecać studentom wyższych lat studiów magisterskich kierunków: elektrotechnika, elektronika, mechatronika i informatyka.

Składam serdeczne podziękowania recenzentom – Profesorom M. Busłowiczowi i J. Klamce za wnikliwe uwagi i sugestie, które pozwoliły mi ulepszyć tę monografię. Dziękuję również moim Doktorantom Wydziału Elektrycznego Politechniki Warszawskiej, pierwszym czytelnikom maszynopisu, za cenne uwagi do strony formalnej tekstu. Dziękuję wreszcie magistrowi inż. Konradowi Markowskiemu za staranne przygotowanie maszynopisu do druku.

Autor

Warszawa, kwiecień 2004

Wykaz podstawowych oznaczeń

A	macierz
A^T	macierz transponowana
A^*	macierz sprzężona
A^{-1}	macierz odwrotna
A_{ad}	macierz dołączona
$A(s)$	macierz wielomianowa
A_J	macierz A w postaci kanonicznej Jordana
$A_S(s)$	macierz $A(s)$ w postaci kanonicznej Smitha
$\det A$	wyznacznik macierz A
$D_{n-1}(\lambda)$	największy wspólny dzielnik wszystkich elementów macierzy dołączonej $[\lambda I_n - A]_{ad}$
$L[i \times c]$	pomnożenie i-tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$
$L[i, j]$	zamiana miejscami i-tego i j-tego wiersza
$L[i + j \times b(s)]$	dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza pomnożonego przez wielomian $b(s)$
$m \times n$	wymiar macierzy o m wierszach i n kolumnach
$P[i \times c]$	pomnożenie i-tej kolumny przez liczbę $c \neq 0$
$P[i, j]$	zamiana miejscami i-tej i j-tej kolumny
$P[i + j \times b(s)]$	dodanie do i-tej kolumny j-tej kolumny pomnożonej przez wielomian $b(s)$
$\mathrm{tr}\, A$	ślad macierzy A
$\mathrm{st}\, A$	stopień macierzy A
rząd A	rząd macierzy A
$\mathrm{Im}\, A$	obraz macierzy A
$\mathrm{Ker}\, A$	jądro macierzy A
$w(A)$	wielomian charakterystyczny macierzy A
$\varphi(\lambda)$	wielomian charakterystyczny macierzy
$\Psi(\lambda)$	wielomian minimalny macierzy
λ	wartość własna
I_n	macierz jednostkowa stopnia n

0_n	macierz zerowa stopnia n
M_{ij}	minor macierzy
$\otimes$	iloczyn Kroneckera
$\lVert\ \rVert$	norma
$\boldsymbol{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{R}^{m\times n}$	zbiór macierzy o wymiarze $m\times n$ i elementach z ciała liczb zespolonych ***C***, rzeczywistych ***R***
$\boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$	zbiór macierzy wielomianowych o wymiarze $m\times n$
$\boldsymbol{R}^{m\times n}(s)$	zbiór macierzy wymiernych o wymiarze $m\times n$
$\boldsymbol{C}[s], \boldsymbol{R}[s]$	zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała ***C***, ***R***
$\boldsymbol{F}(s)$	ciało funkcji wymiernych zmiennej s
$\boldsymbol{R}_p(s)$	zbiór funkcji wymiernych przyczynowych o współczynnikach z ciała ***R***
$\boldsymbol{R}_s(s)$	zbiór funkcji wymiernych stabilnych o współczynnikach z ciała ***R***
$\boldsymbol{R}[s^{-1}]$	zbiór funkcji wymiernych skończonych o współczynnikach z ciała ***R***
$\boldsymbol{R}_p^{m\times n}(s)$	zbiór macierzy wymiernych przyczynowych o współczynnikach z ciała ***R*** i wymiarze $m\times n$
$\boldsymbol{R}_s^{m\times n}(s)$	zbiór macierzy wymiernych stabilnych o współczynnikach z ciała ***R*** i wymiarze $m\times n$
$\boldsymbol{R}^{m\times n}[s^{-1}]$	zbiór macierzy wymiernych skończonych o współczynnikach z ciała ***R*** i wymiarze $m\times n$
$\boldsymbol{R}_+$	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$\boldsymbol{W}$	zbiór liczb wymiernych
$\boldsymbol{W}(s)$	zbiór funkcji wymiernych
$\boldsymbol{W}[s]$	zbiór wielomianów zmiennej s

Numeracja i powołania

W monografii tej przyjęto następujący trójczłonowy (rozdział, podrozdział, punkt) system numeracji: definicji, lematów, twierdzeń, procedur, algorytmów, przykładów, uwag i wniosków. Na przykład Definicja 1.2.3 oznacza, że jest to 3. definicja tego punktu w podrozdziale 2. rozdziału 1.

Przy powoływaniu się na definicję (lemat, twierdzenie, ...) z tego samego punktu stosujemy numerację jednoczłonową, np. Definicja 2 oznacza 2. definicję tego punktu. Przy powoływaniu się na definicję (lemat, twierdzenie, ...) z innego podrozdziału tego samego rozdziału stosujemy numerację dwuczłonową, np. Definicja 2.3 oznacza 3. definicję podrozdziału 2., itd.

Inny system dwuczłonowy (podrozdział, punkt) przyjęto w numeracji wzorów. Na przykład wzór (2.3) oznacza, że jest to 3. wzór w podrozdziale 2. Przy powoływaniu się na wzór z tego samego punktu stosujemy numerację jednoczłonową np. wzór (3) oznacza 3. wzór tego punktu. Przy powoływaniu się na wzór w innym podrozdziale tego samego rozdziału przyjęto numerację dwuczłonową, a przy powoływaniu się na wzór w innym rozdziale numerację trójczłonową, np. wzór (2.3.4) oznacza wzór 4., podrozdziału 3. w rozdziale 2.

1. Macierze wielomianowe

1.1. Wielomiany

Niech $\boldsymbol{F}$ będzie ciałem, na przykład liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$, liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$, liczb wymiernych $\boldsymbol{W}$, funkcji wymiernych $\boldsymbol{W}(s)$ zmiennej zespolonej s, itp.
Wielomianem $w(s)$ zmiennej s nad ciałem $\boldsymbol{F}$ nazywamy kombinację liniową kolejnych potęg zmiennej s o postaci

(1.1) $$w(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n$$

przy czym $a_i \in \boldsymbol{F}$ dla i=0, 1, ..., n nazywamy współczynnikami tego wielomianu.
Zbiór wielomianów (1) nad ciałem $\boldsymbol{F}$ będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{F}[s]$.
Jeżeli $a_n \neq 0$, to nieujemną liczbę całkowitą n nazywamy stopniem wielomianu i oznaczamy st $w(s)$, czyli n = st $w(s)$. Wielomian (1) nazywamy monicznym, jeżeli $a_n = 1$ oraz wielomianem zerowym, jeżeli $a_i = 0$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$.
Sumą dwóch wielomianów

(1.2a) $$w_1(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n$$

(1.2b) $$w_2(s) = b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m$$

nazywamy wielomian w postaci

(1.3) $$w_1(s) + w_2(s) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i) s^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i s^i, \; n > m \\ \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) s^i, \; n = m \\ \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) s^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i s^i, \; m > n \end{array} \right\}$$

Jeżeli $n > m$, to suma jest wielomianem stopnia n, jeżeli $m > n$ to suma ta jest wielomianem stopnia m. Jeśli natomiast $n = m$ i $a_n + b_n \neq 0$, to suma ta jest wielomianem stopnia n oraz wielomianem stopnia niższego niż n, gdy $a_n + b_n = 0$.
Mamy więc zależność

(1.4) $$\mathrm{st}\left[w_1(s) + w_2(s)\right] \leq \max\left[\mathrm{st}\,[w_1(s)], \mathrm{st}\,[w_2(s)]\right]$$

Analogicznie definiujemy różnicę dwóch wielomianów.
Iloczynem wielomianu (1) i skalara λ (wielomian zerowego stopnia) nazywamy wielomian, którego współczynniki są iloczynami współczynników a_i i skalara λ, czyli

(1.5) $$\lambda w(s) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i s^i$$

Iloczynem wielomianów (2) nazywamy wielomian w postaci

(1.6a) $$w_1(s)w_2(s) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i s^i$$

przy czym

(1.6b) $$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}, \quad i = 0, 1, \ldots, n+m, \quad (a_k = 0 \text{ dla } k > n, \quad b_k = 0 \text{ dla } k > m)$$

Z zależności (6a) wynika, że

(1.7) $$\operatorname{st}\left[w_1(s)w_2(s)\right] = n + m$$

gdyż $a_n b_m \neq 0$ dla $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$.
Niech $w_2(s)$ pary wielomianów (2) będzie wielomianem niezerowym i $n>m$, wtedy istnieją dokładnie dwa wielomiany $q(s)$ i $r(s)$ takie, że

(1.8) $$w_1(s) = w_2(s)q(s) + r(s)$$

przy czym

(1.9) $$\operatorname{st}\left[r(s)\right] < \operatorname{st}\left[w_2(s)\right] = m$$

Wielomian $q(s)$ nazywamy częścią całkowitą, gdy $r(s) \neq 0$ oraz ilorazem, gdy $r(s) = 0$, a $r(s)$ nazywamy resztą.
Jeżeli $r(s) = 0$, to $w_1(s) = w_2(s)q(s)$; mówimy zatem, że wielomian $w_1(s)$ jest podzielny bez reszty przez wielomian $w_2(s)$ lub równoważnie, że wielomian $w_2(s)$ dzieli bez reszty wielomian $w_1(s)$, co zapisujemy następująco: $w_2(s)|w_1(s)$. Mówimy też, że wielomian $w_2(s)$ jest dzielnikiem wielomianu $w_1(s)$.

Weźmy pod uwagę wielomiany (2). Mówimy, że wielomian $d(s)$ jest wspólnym dzielnikiem wielomianów $w_1(s)$ i $w_2(s)$, jeżeli istnieją wielomiany $\overline{w}_1(s)$ i $\overline{w}_2(s)$ takie, że

(1.10) $$w_1(s) = d(s)\overline{w}_1(s), \quad w_2(s) = d(s)\overline{w}_2(s)$$

Wielomian $d_m(s)$ nazywamy największym wspólnym dzielnikiem (NWD) wielomianów $w_1(s)$ i $w_2(s)$, jeżeli każdy wspólny dzielnik tych wielomianów jest dzielnikiem wielomianu $d_m(s)$. NWD $d_m(s)$ wielomianów $w_1(s)$ i $w_2(s)$ jest określony z dokładnością do stałego współczynnika i spełnia równość

(1.11) $$d_m(s) = w_1(s)m_1(s) + w_2(s)m_2(s)$$

przy czym $m_1(s)$ i $m_2(s)$ są wielomianami, które możemy wyznaczyć stosując algorytm Euklidesa lub metodę działań elementarnych.
Istota algorytmu Euklidesa jest następująca. Stosując dzielenie wielomianów wyznaczamy ciąg wielomianów $q_1, q_2, \ldots, q_k$ oraz $r_1, r_2, \ldots, r_k$ spełniających następujące równości

(1.12) $$\left\{\begin{array}{l} w_1 = w_2 q_1 + r_1 \\ w_2 = r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k \\ r_{k-1} = r_k q_{k+1} \end{array}\right\}$$

Obliczenia przerywamy po wyznaczeniu ostatniej niezerowej reszty r_k i stwierdzeniu, że r_{k-1} dzieli się bez reszty przez r_k. Rugując z zależności (12) $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ otrzymujemy zależność (11) dla $d_m(s) = r_k$. Tak więc ostatnia niezerowa reszta r_k jest NWD wielomianów $w_1(s)$ i $w_2(s)$.

Przykład 1.1.1. Niech

(1.13) $$w_1 = w_1(s) = s^3 - 3s^2 + 3s - 1, \quad w_2 = w_2(s) = s^2 + s + 1$$

Stosując algorytm Euklidesa wyznaczamy kolejno

(1.14) $$\begin{array}{l} w_1 = w_2 q_1 + r_1, \quad q_1 = s - 4, \quad r_1 = 6s + 3 \\ w_2 = r_1 q_2 + r_2, \quad q_2 = \dfrac{1}{6}s + \dfrac{1}{12}, \quad r_2 = \dfrac{3}{4} \end{array}$$

Na tym przerywamy obliczenia, gdyż r_1 dzieli się bez reszty przez r_2.
r_2 jest więc NWD wielomianów (13).
Rugując z zależności (14) r_1 otrzymamy

$$w_1(-q_2) + w_2(1 + q_1 q_2) = r_2$$

czyli

$$(-s^3 + 3s^2 - 3s + 1)(\frac{1}{6}s + \frac{1}{12}) + (s^2 + s + 1)(\frac{1}{6}s^2 - \frac{7}{12}s + \frac{2}{3}) = \frac{3}{4}.$$

Wielomiany (2) nazywamy względnie pierwszymi wtedy i tylko wtedy, gdy ich moniczny NWD jest równy 1. Z równości (11) dla $d_m(s) = 1$ wynika, że wielomiany $w_1(s)$ i $w_2(s)$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wielomiany $m_1(s)$ i $m_2(s)$ takie, że

(1.15) $$w_1(s)m_1(s) + w_2(s)m_2(s) = 1$$

Dzieląc obie strony równości (11) przez $d_m(s)$ otrzymamy

(1.16) $$1 = \widehat{w}_1(s)m_1(s) + \widehat{w}_2(s)m_2(s)$$

przy czym

$$\widehat{w}_k(s) = \frac{w_k(s)}{d_m(s)}, \text{ dla } k = 1,2,\ldots$$

Jeżeli więc $d_m(s)$ jest NWD wielomianów $w_1(s)$ i $w_2(s)$, to wielomiany $\widehat{w}_1(s)$ i $\widehat{w}_2(s)$ są względnie pierwsze.
Niech $s_1, s_2, \ldots, s_p$ będą różnymi pierwiastkami o krotnościach odpowiednio $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ równania $w(s) = 0$. Liczby $s_1, s_2, \ldots, s_p$ nazywamy miejscami zerowymi wielomianu (1). Wielomian ten można w sposób jednoznaczny napisać w postaci

(1.17) $$w(s) = a_n(s - s_1)^{m_1}(s - s_2)^{m_2} \ldots (s - s_p)^{m_p}$$

1.2. Pojęcia podstawowe i podstawowe działania na macierzach wielomianowych

Macierzą wielomianową nad ciałem $\boldsymbol{F}$ (krótko macierzą wielomianową) nazywamy macierz, której elementy są wielomianami nad ciałem $\boldsymbol{F}$.

(2.1) $$A(s) = [a_{ij}(s)]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & \cdots & a_{1n}(s) \\ \hline a_{m1}(s) & \cdots & a_{mn}(s) \end{bmatrix}, \ a_{ij}(s) \in \boldsymbol{F}(s)$$

Uporządkowaną parę liczby wierszy m i liczby kolumn n nazywamy wymiarem macierzy (1) i oznaczamy $m \times n$. Zbiór macierzy wielomianowych nad ciałem $\boldsymbol{F}$ o wymiarze $m \times n$ będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{F}^{m \times n}[s]$.
Przykładem macierzy wielomianowej nad ciałem liczb rzeczywistych o wymiarze 2×2 jest macierz w postaci

(2.2) $$A_0(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 1 & s + 2 \\ 2s^2 + s + 3 & 3s^2 + s - 3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{2\times 2}[s]$$

Każdą macierz wielomianową można zapisać w postaci wielomianu macierzowego, tzn. wielomianu o współczynnikach wielomianowych. Na przykład macierz (2) możemy napisać w postaci wielomianu macierzowego

(2.3) $$A_0(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = A_2 s^2 + A_1 s + A_0$$

Niech macierz (1) napisana w postaci wielomianu macierzowego ma postać

(2.4) $$A(s) = A_q s^q + \ldots + A_1 s + A_0, \ A_k \in \boldsymbol{R}^{m \times n}, \quad k = 0, 1, \ldots, q$$

Jeżeli macierz A_q nie jest macierzą zerową, to liczbę q nazywamy stopniem tej macierzy i oznaczamy $q = \operatorname{st} A(s)$. Na przykład macierz (2) (i również (3)) ma stopień równy dwa, $q = 2$.
Jeżeli $n = m$ i $\det A_q \neq 0$, to macierz (4) nazywamy regularną.
Sumą dwóch macierzy wielomianowych

(2.5) $$A(s) = [a_{ij}(s)]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \sum_{k=0}^{q} A_k s^k \ \text{ i } \ B(s) = [b_{ij}(s)]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \sum_{k=0}^{t} B_k s^k$$

o tym samym wymiarze $m \times n$ nazywamy macierz wielomianową w postaci

$$(2.6)\quad A(s)+B(s)=\left[a_{ij}(s)+b_{ij}(s)\right]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{cases}\sum_{k=0}^{t}(A_k+B_k)s^k+\sum_{k=t+1}^{q}A_ks^k, & q>t\\ \sum_{k=0}^{q}(A_k+B_k)s^k, & q=t\\ \sum_{k=0}^{q}(A_k+B_k)s^k+\sum_{k=q+1}^{t}B_ks^k, & q<t\end{cases}$$

Jeżeli $q=t$ oraz $A_q+B_q\neq 0$, to suma (6) jest macierzą wielomianową stopnia q, jeżeli natomiast $A_q+B_q=0$, to suma ta jest macierzą wielomianową stopnia niższego niż q. Mamy więc zależność

$$(2.7)\qquad \text{st}\left[A(s)+B(s)\right]\leq \max\left[\text{st}\,[A(s)],\text{st}\,[B(s)]\right]$$

Analogicznie definiujemy różnicę dwóch macierzy wielomianowych.
Iloczynem macierzy wielomianowej (1) i skalara λ nazywamy macierz wielomianową, której każdy element jest iloczynem elementu macierzy (1) i skalara λ

$$\lambda A(s)=[\lambda\, a_{ij}(s)]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$$

Z definicji tej dla $\lambda\neq 0$ mamy $\text{st}\left[\lambda A(s)\right]=\text{st}\left[A(s)\right]$.
Mnożenie dwóch macierzy wielomianowych jest wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy (1) jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy

$$(2.8)\qquad B(s)=[b_{ij}(s)]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}=\sum_{k=0}^{t}B_ks^k$$

Iloczynem tych macierzy wielomianowych nazywamy macierz wielomianową w postaci

$$(2.9)\qquad C(s)=\left[c_{ij}(s)\right]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}=A(s)B(s)=\sum_{k=0}^{q+t}C_ks^k$$

przy czym

$$(2.10)\qquad C_k=\sum_{l=0}^{k}A_lB_{k-l},\ k=0,1,\dots,q+t,\ (A_l=0,\ l>q,\ B_l=0,\ l>t)$$

Z zależności (10) wynika, że $C_{q+t}=A_qB_t$ i macierz ta jest niezerowa, jeśli przynajmniej jedna z macierzy A_q i B_t jest nieosobliwa, czyli jedna z macierzy $A(s)$ i $B(s)$ jest regularna. Mamy więc zależność

$$(2.11)\qquad \begin{array}{ll}\text{st}\,[A(s)B(s)]=\text{st}\,[A(s)]+\text{st}\,[B(s)], & \text{jeżeli przynajmniej jedna z tych}\\ & \text{macierzy jest regularna}\\ \text{st}\,[A(s)B(s)]\leq\text{st}\,[A(s)]+\text{st}\,[B(s)] & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{array}$$

Na przykład, iloczyn macierzy wielomianowych $A(s)$ i $B(s)$

$$A(s)=\begin{bmatrix}s^2+s & -2s^2+s+1\\ -s^2+2s-1 & 2s^2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&2\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}1&1\\2&0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0&1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$B(s)=\begin{bmatrix}2s+2 & s+3\\ s-1 & \frac{1}{2}s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}2&3\\-1&1\end{bmatrix}$$

jest macierzą wielomianową o postaci

$$A(s)B(s)=\begin{bmatrix}7s^2+2s-1 & \frac{5}{2}s^2+\frac{9}{2}s+1\\ 4s-4 & s^2+6s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&\frac{5}{2}\\0&1\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}2&\frac{9}{2}\\4&6\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1&1\\-4&-1\end{bmatrix}$$

której stopień jest niższy od sumy st $[A(s)]$+ st $[B(s)]$, gdyż

$$A_2B_1=\begin{bmatrix}1&-2\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Macierz (4) możemy również napisać w postaci

$$(2.12)\qquad A(s)=s^qA_q+\dots+sA_1+A_0$$

gdyż mnożenie macierzy $A_i\,(i=1,2,\dots,q)$ przez skalar s jest przemienne. Podstawiając w zależnościach (4) i (12) w miejsce skalara s macierz S, otrzymamy (na ogół) różne macierze

$$A_p(S)=A_qS^q+\dots+A_1S+A_0$$

$$A_l(S)=S^qA_q+\dots+SA_1+A_0$$

Macierz $A_p(S)\,(A_l(S))$ nazywamy prawostronną (lewostronną) wartością macierzy $A(s)$ dla $s = S$.
Niech

$$C(s) = A(s) + B(s)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$C_p(S) = A_p(S) + B_p(S)$$

oraz

$$C_l(S) = A_l(S) + B_l(S)$$

Weźmy pod uwagę macierze wielomianowe (5).

Twierdzenie 1.2.1. Jeżeli mnożenie macierzy S jest przemienne z macierzami A_i dla $i = 1, 2, ..., q$ oraz B_j dla $i = 1, 2, ..., t$, to prawostronna oraz lewostronna wartość iloczynu macierzy (5) dla $s = S$ jest równa iloczynowi prawostronnych i odpowiednio lewostronnych wartości tych macierzy dla $s = S$.

Dowód. Biorąc pod uwagę (5), możemy napisać

$$D(s) = A(s)B(s) = \left(\sum_{i=0}^{q} A_i s^i\right)\left(\sum_{j=0}^{t} B_j s^j\right) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{t} A_i B_j s^{i+j}$$

oraz

$$D(s) = A(s)B(s) = \left(\sum_{i=0}^{q} s^i A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{t} s^j B_j\right) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{t} s^{i+j} A_i B_j$$

Podstawiając w miejsce skalara s macierz S otrzymamy

$$D_p(S) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{t} A_i B_j S^{i+j} = \left(\sum_{i=0}^{q} A_i S^i\right)\left(\sum_{j=0}^{t} B_j S^j\right) = A_p(S) B_p(S)$$

gdyż $B_j S = S B_j$ dla $j = 1, 2, ..., t$, oraz

$$D_l(S) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} S^{i+j} A_i B_j = \left(\sum_{i=0}^{p} S^i A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} S^j B_j\right) = A_l(S) B_l(S)$$

gdyż $SA_i = A_i S$ dla $i = 1, 2, ..., q$.

■

1.3. Dzielenie macierzy wielomianowych

Weźmy pod uwagę kwadratowe macierze wielomianowe $A(s)$ i $B(s)$ przy czym $\det A(s) \neq 0$ i $\operatorname{st} A(s) < \operatorname{st} B(s)$. Macierz $A(s)$ nie musi być regularna, tzn. macierz współczynników przy najwyższej potędze zmiennej s może być osobliwa.

Twierdzenie 1.3.1. Jeżeli $\det A(s) \neq 0$, to dla pary macierzy wielomianowych $A(s)$ i $B(s)$, $\operatorname{st} B(s) > \operatorname{st} A(s)$ istnieje para macierzy $Q_p(s), R_p(s)$ taka, że zachodzi równanie

(3.1a) $$B(s) = Q_p(s)A(s) + R_p(s), \quad \operatorname{st} A(s) > \operatorname{st} R_p(s)$$

oraz istnieje para macierzy $Q_l(s), R_l(s)$ taka, że zachodzi równość

(3.1b) $$B(s) = A(s)Q_l(s) + R_l(s), \quad \operatorname{st} A(s) > \operatorname{st} R_l(s)$$

Dowód. Dzieląc elementy macierzy $B(s)A_{ad}(s)$ przez wielomian $\det A(s)$, otrzymamy parę macierzy $Q_p(s), R_1(s)$ taką, że

(3.2) $$B(s)A_{ad}(s) = Q_p(s)\det A(s) + R_1(s), \quad \operatorname{st}[\det A(s)] > \operatorname{st} R_1(s)$$

Mnożąc prawostronnie (2) przez $\frac{A(s)}{\det A(s)}$, otrzymamy

(3.3) $$B(s) = Q_p(s)A(s) + R_p(s)$$

gdyż $A_{ad}(s)A(s) = I_n \det A(s)$, przy czym

(3.4) $$R_p(s) = \frac{R_1(s)A(s)}{\det A(s)}$$

Z zależności (4) mamy

$$\text{st } R_p(s) = \text{st } R_1(s) + \text{st } A(s) - \text{st}\left[\det A(s)\right] < \text{st } A(s)$$

gdyż $\text{st}\left[\det A(s)\right] > \text{st } R_1(s)$.
Dowód równości (1b) jest analogiczny.

■

Uwaga 1.3.1. Pary macierzy $Q_p(s), R_p(s)$ i $Q_l(s), R_l(s)$ spełniające równość (1) nie są wyznaczane jednoznacznie (nie są jedyne), gdyż

(3.5a) $$B(s) = [Q_p(s) + C(s)]A(s) + R_p(s) - A(s)C(s)$$

oraz

(3.5b) $$B(s) = A(s)[Q_l(s) + C(s)] + R_l(s) - A(s)C(s)$$

są spełnione dla dowolnej macierzy $C(s)$ takiej, że

$$\text{st}\left[C(s)A(s)\right] < \text{st } A(s), \quad \text{st}\left[A(s)C(s)\right] < \text{st } A(s)$$

Przykład 1.3.1. Dla macierzy

$$A(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(s) = \begin{bmatrix} s & -s \\ -1 & s^2+1 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć macierze $Q_p(s), R_p(s)$ spełniające równość (1a).
W tym przypadku $\det A_1 = 0$, ale $\det A(s) = s+1$
Obliczamy

$$A_{ad}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad B(s)A_{ad}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -s^2-s \\ s^2 & s^3+s+1 \end{bmatrix}$$

oraz korzystając z (2b)

$$\begin{bmatrix} 0 & -s^2-s \\ s^2 & s^3+s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s-1 & s^2-s+2 \end{bmatrix}(s+1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$Q_p(s) = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s-1 & s^2-s+2 \end{bmatrix}, \quad R_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wobec tego zgodnie z (4) otrzymamy

$$R_p(s) = \frac{R_1(s)A(s)}{\det A(s)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech dane będą dwie kwadratowe macierze wielomianowe

(3.6a) $$A(s) = A_n s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \ldots + A_1 s + A_0$$

(3.6b) $$B(s) = B_m s^m + B_{m-1}s^{m-1} + \ldots + B_1 s + B_0$$

Twierdzenie 1.3.2. Jeżeli $A(s)$ i $B(s)$ są kwadratowymi macierzami wielomianowymi o tych samych wymiarach, a $A(s)$ jest macierzą regularną ($\det A_n \neq 0$), to istnieje dokładnie jedna para macierzy wielomianowych $Q_p(s)$, $R_p(s)$ spełniających zależność

(3.7a) $$B(s) = Q_p(s)A(s) + R_p(s)$$

oraz dokładnie jedna para macierzy wielomianowych $Q_l(s)$, $R_l(s)$ spełniających zależność

(3.7b) $$B(s) = A(s)Q_l(s) + R_l(s)$$

przy czym

$$\text{st } A(s) > \text{st } R_p(s), \quad \text{st } A(s) > \text{st } R_l(s)$$

Dowód. Jeżeli $n > m$, to $Q_p(s) = 0$, a $R_p(s) = B(s)$. Załóżmy więc, że $m \geq n$. Z założenia $\det A_n \neq 0$ wynika istnienie macierzy odwrotnej A_n^{-1}. Zauważmy, że macierz $B_m A_n^{-1} s^{m-n} A(s)$ ma człon o najwyższej potędze s, równy $B_m s^m$. Zatem

$$B(s) = B_m A_n^{-1} s^{m-n} A(s) + B^{(1)}(s)$$

przy czym $B^{(1)}(s)$ jest macierzą wielomianową stopnia $m_1 \leq m-1$ o postaci

$$B^{(1)}(s) = B_{m_1}^{(1)} s^{m_1} + B_{m_1-1}^{(1)} s^{m_1-1} + \ldots + B_1^{(1)} s + B_0^{(1)}$$

Jeżeli $m_1 \geq n$, to powtarzamy tę procedurę, biorąc w miejsce macierzy B_m macierz $B^{(1)}_{m_1}$. Otrzymamy wówczas

$$B^{(1)}(s) = B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} s^{m_1-n} A(s) + B^{(2)}(s)$$

przy czym

$$B^{(2)}(s) = B^{(2)}_{m_2} s^{m_2} + B^{(2)}_{m_2-1} s^{m_2-1} + \ldots + B^{(2)}_1 s + B^{(2)}_0 \; (m_2 < m_1)$$

Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciąg macierzy wielomianowych $B(s)$, $B^{(1)}(s)$, $B^{(2)}(s)$, ..., o malejących stopniach m, m_1, m_2, ... Po skończonej liczbie r kroków otrzymamy macierz $B^{(r)}(s)$ stopnia $m_r < n$ oraz

$$B(s) = \left(B_m A_n^{-1} s^{m-n} + B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} s^{m_1-n} + \ldots + B^{(r-1)}_{m_{r-1}} A_n^{-1} s^{m_{r-1}-n}\right) A(s) + B^{(r)}(s)$$

czyli zależność (7a) dla

(3.8)
$$\begin{aligned} Q_p(s) &= B_m A_n^{-1} s^{m-n} + B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} s^{m_1-n} + \ldots + B^{(r-1)}_{m_{r-1}} A_n^{-1} s^{m_{r-1}-n} \\ R_p(s) &= B^{(r)}(s) \end{aligned}$$

Wykażemy, że istnieje tylko jedna para $Q_p(s)$, $R_p(s)$ spełniająca (7a). Załóżmy, że istnieją dwie różne pary $Q^{(1)}_p(s)$, $R^{(1)}_p(s)$ i $Q^{(2)}_p(s)$, $R^{(2)}_p(s)$ takie, że

(3.9a)
$$B(s) = Q^{(1)}_p(s) A(s) + R^{(1)}_p(s)$$

oraz

(3.9b)
$$B(s) = Q^{(2)}_p(s) A(s) + R^{(2)}_p(s)$$

przy czym st $A(s) >$ st $R^{(1)}_p(s)$ i st $A(s) >$ st $R^{(2)}_p(s)$. Z zależności (9) mamy

(3.10)
$$[Q^{(1)}_p(s) - Q^{(2)}_p(s)] A(s) = R^{(2)}_p(s) - R^{(1)}_p(s)$$

Dla $Q^{(1)}_p(s) \neq Q^{(2)}_p(s)$ macierz $[Q^{(1)}_p(s) - Q^{(2)}_p(s)] A(s)$ jest macierzą wielomianową stopnia nie niższego od n, natomiast $[R^{(2)}_p(s) - R^{(1)}_p(s)]$ – macierzą wielomianową

stopnia niższego od *n*. Wobec tego z zależności (10) wynika, że $Q^{(1)}_p(s) = Q^{(2)}_p(s)$ oraz $R^{(1)}_p(s) = R^{(2)}_p(s)$. W analogiczny sposób dowodzi się, że

(3.11)
$$\begin{aligned} Q_l(s) &= A_n^{-1} B_m s^{m-n} + A_n^{-1} B^{(1)}_{m_1} s^{m_1-n} + \ldots + A_n^{-1} B^{(r-1)}_{m_{r-1}} s^{m_{r-1}-n} \\ R_l(s) &= B^{(r)}(s) \end{aligned}$$

■

Macierze $Q_p(s)$, $R_p(s)$ $(Q_l(s), R_l(s))$ nazywamy odpowiednio: prawostronnym (lewostronnym) ilorazem i resztą dzielenia macierzy $B(s)$ przez macierz $A(s)$.
Z dowodu twierdzenia 2 wynika następujący algorytm wyznaczania macierzy $Q_p(s)$ i $R_p(s)$ $(Q_l(s)$ i $R_l(s))$.

Procedura 1.3.1.
Krok 1. Mając macierz A_n obliczamy A_n^{-1}.
Krok 2. Obliczamy

$$B_m A_n^{-1} s^{m-n} A(s) \quad \left(A(s) A_n^{-1} B_m s^{m-n}\right)$$

oraz

$$B^{(1)}(s) = B(s) - B_m A_n^{-1} s^{m-n} A(s) = B^{(1)}_{m_1} s^{m_1} + \ldots + B^{(1)}_1 s + B^{(1)}_0$$

$$\left(B^{(1)}(s) = B(s) - A(s) A_n^{-1} B_m s^{m-n} = B^{(1)}_{m_1} s^{m_1} + \ldots + B^{(1)}_1 s + B^{(1)}_0\right)$$

Krok 3. Jeżeli $m_1 \geq n$, to obliczamy

$$B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} s^{m_1-n} A(s) \quad \left(A(s) A_n^{-1} B^{(1)}_{m_1} s^{m_1-n}\right)$$

oraz

$$B^{(2)}(s) = B^{(1)}(s) - B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} s^{m_1-n} A(s) = B^{(2)}_{m_2} s^{m_2} + \ldots + B^{(2)}_1 s + B^{(2)}_0$$

$$\left(B^{(2)}(s) = B^{(1)}(s) - A(s) A_n^{-1} B^{(1)}_{m_1} s^{m_1-n} = B^{(2)}_{m_2} s^{m_2} + \ldots + B^{(2)}_1 s + B^{(2)}_0\right)$$

Krok 4. Jeżeli $m_2 \geq n$, to zastępując w powyższych zależnościach m_1 i $B^{(1)}(s)$ przez m_2 i $B^{(2)}(s)$ obliczamy $B^{(3)}(s)$. Procedurę tę powtarzamy r razy aż do otrzymania $m_r < n$.
Krok 5. Wyznaczamy poszukiwane macierze $Q_p(s)$, $R_p(s)$ $(Q_l(s), R_l(s))$.

Przykład 1.3.2. Mając dane

$$A(s)=\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix} \text{ i } B(s)=\begin{bmatrix} s^4+s^2+1 & s^3-s^2+2s \\ 2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć należy macierze $Q_p(s), R_p(s)$ *i* $Q_l(s), R_l(s)$ spełniające równości (7).
Macierz $A(s)$ jest regularna, gdyż

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z procedury 1 obliczamy kolejno:

Kroki 1–3. W tym przypadku mamy:

$$B_4A_2^{-1}s^2A(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}s^2\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^4+s & -s^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(1)}(s)=B(s)-B_4A_2^{-1}s^2A(s)=\begin{bmatrix} s^4+s^2+1 & s^3-s^2+2s \\ 2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} s^4+s^2 & -s^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2s^3-s^2+2s \\ 2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}$$

Wobec tego, że $m_1=3, n=2$,

$$B_3^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mamy więc

$$B_3^{(1)}A_2^{-1}sA(s)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}s\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2s^2 & 2s^3+2s^2 \\ s^2 & s^3+s^2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(2)}(s)=B^{(1)}(s)-B_3^{(1)}A_2^{-1}sA(s)=\begin{bmatrix} 1 & 2s^3-s^2+2s \\ 2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2s^2 & 2s^3+2s^2 \\ s^2 & s^3+s^2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -2s^2+1 & -3s^2+2s \\ s^2+s & -s^2+s+2 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Procedurę powtarzamy, gdyż $m_2=2=n$. Uwzględniając, że

$$B_2^{(2)}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

obliczamy

$$B_2^{(2)}A_2^{-1}A(s)=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2s^2-3s-2 & -3s^2-s \\ s^2-s+1 & -s^2-2s \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(3)}(s)=B^{(2)}(s)-B_2^{(2)}A_2^{-1}A(s)=\begin{bmatrix} -2s^2+1 & -3s^2+2s \\ s^2+s & -s^2+s+2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} -2s^2-3s-2 & -3s^2-s \\ s^2-s+1 & -s^2-2s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3s+3 & 3s \\ 2s-1 & 3s+2 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Stopień tej macierzy jest niższy od stopnia macierzy $A(s)$. Wobec tego, zgodnie ze wzorami (8) otrzymamy

$$Q_p(s)=B_4A_2^{-1}s^2+B_3^{(1)}A_2^{-1}s+B_2^{(2)}A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}s+\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s^2-2 & 2s-3 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$R_p(s)=B^{(3)}(s)=\begin{bmatrix} 3s+3 & 3s \\ 2s-1 & 3s+2 \end{bmatrix}$$

Przechodzimy do wyznaczania $Q_l(s)$ i $R_l(s)$ zgodnie z procedurą 1.

Krok 1–3. Obliczamy

$$A(s)A_2^{-1}B_4s^2=\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}s^2=\begin{bmatrix} s^4+s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(1)}(s)=B(s)-A(s)A_2^{-1}B_4s^2=\begin{bmatrix} s^4+s^2+1 & s^3-s^2+2s \\ 2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} s^4+s^2 & 0 \\ s^3 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & s^3-s^2+2s \\ -s^3+2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając, że $m_1=3>n=2$ i

$$B_3^{(1)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

obliczamy

$$A(s)A_2^{-1}B_3^{(1)}s=\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}s=\begin{bmatrix} s^2 & s^3-s^2+s \\ -s^3-s^2 & s^3+2s^2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(2)}(s)=B^{(1)}(s)-A(s)A_2^{-1}B_3^{(1)}s=\begin{bmatrix} 1 & s^3-s^2+2s \\ -s^3+2s^2+s & s^3+s+2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} s^2 & s^3-s^2+s \\ -s^3-s^2 & s^3+2s^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s^2+1 & s \\ 3s^2+s & -2s^2+s+2 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Procedurę powtarzamy, gdyż $m_2=2=n$. Wobec tego, że

$$B_2^{(2)}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

mamy więc

$$A(s)A_2^{-1}B_2^{(2)}=\begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ s & s^2+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s^2-3s-1 & 2s \\ 3s^2+2 & -2s^2-2s \end{bmatrix}$$

oraz

$$B^{(3)}(s)=B^{(2)}(s)-A(s)A_2^{-1}B_2^{(2)}=\begin{bmatrix} -s^2+1 & s \\ 3s^2+s & -2s^2+s+2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} -s^2-3s-1 & 2s \\ 3s^2+2s & -2s^2-2s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3s+2 & -s \\ -s & 3s+2 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Stopień tej macierzy jest niższy od stopnia danej macierzy $A(s)$. Wobec tego, zgodnie z zależnościami (11) mamy

$$Q_l(s)=A_2^{-1}B_4s^2+A_2^{-1}B_3^{(1)}s+A_2^{-1}B_2^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}s+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} s^2-1 & s \\ -s+3 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$R_l(s)=B^{(3)}(s)=\begin{bmatrix} 3s+2 & -s \\ -s & 3s+2 \end{bmatrix}$$

1.4. Uogólnione twierdzenie Bezoute'a oraz twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Rozpatrzmy dzielenie wielomianowej macierzy kwadratowej

$$F(s)=F_ns^n+F_{n-1}s^{n-1}+\cdots+F_1s+F_0\in \boldsymbol{C}^{m\times m}[s] \tag{4.1}$$

przez macierz wielomianową stopnia pierwszego $[I_ms-A]$, przy czym $F_k\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$, $k=0,1,\ldots,n$ oraz $A\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$. Prawostronna (lewostronna) R_p (R_l) reszta dzielenia $F(s)$ przez $[I_ms-A]$ jest macierzą wielomianową stopnia zerowego, czyli nie zależy od s.

Twierdzenie 1.4.1. (Uogólnione twierdzenie Bezoute'a). Prawostronna (lewostronna) reszta R_p (R_l) dzielenia macierzy $F(s)$ przez $[I_ms-A]$ jest równa $F_p(A)$ $(F_l(A))$, czyli

$$R_p=F_p(A)=F_nA^n+F_{n-1}A^{n-1}+\cdots+F_1A+F_0\in\boldsymbol{C}^{m\times m} \tag{4.2a}$$

(4.2b) $$\left(R_l = F_l(A) = A^n F_n + A^{n-1}F_{n-1} + \cdots + AF_1 + F_0 \in C^{m\times m}\right)$$

Dowód. Dzieląc prawostronnie macierz $F(s)$ przez $[I_m s - A]$ otrzymamy

$$F(s) = Q_p(s)(I_m s - A) + R_p$$

a dzieląc lewostronnie otrzymamy

$$F(s) = [I_m s - A]Q_l(s) + R_l$$

Podstawiając w powyższych zależnościach na miejsce skalara s macierz A otrzymamy

$$F_p(A) = Q_p(A)(A - A) + R_p = R_p$$

oraz

$$F_l(A) = (A - A)Q_l(A) + R_l = R_l$$

■

Z twierdzenia 1. wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.4.1. Macierz wielomianowa $F(s)$ dzieli się prawostronnie (lewostronnie) bez reszty przez $I_m s - A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F_p(A) = 0$ $\left(F_l(A) = 0\right)$.

Niech $\varphi(s)$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy kwadratowej A stopnia n, czyli

$$\varphi(s) = \det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Z definicji macierzy odwrotnej mamy

(4.3a) $$[I_n s - A][I_n s - A]_{ad} = I_n \varphi(s)$$

oraz

(4.3b) $$[I_n s - A]_{ad}[I_n s - A] = I_n \varphi(s)$$

Z zależności (3) wynika, że macierz wielomianowa $I_n\varphi(s)$ dzieli się prawostronnie i lewostronnie przez $[I_n s - A]$. Zgodnie z wnioskiem 1 jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $I_n\varphi(A) = \varphi(A) = 0$. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4.2. (Twierdzenie Cayleya-Hamiltona). Każda macierz kwadratowa A spełnia swoje równania charakterystyczne

(4.4) $$\varphi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

Przykład 1.4.1. Wielomian charakterystyczny macierzy

(4.5) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ma postać

$$\varphi(s) = \det[I_n s - A] = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix} = s^2 - 5s - 2$$

Łatwo można sprawdzić, że

$$\varphi(A) = A^2 - 5A - 2\cdot I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1.4.3. Niech wielomian $w(s) \in C[s]$ ma stopień N, a $A \in C^{n\times n}$, przy czym $N \geq n$. Istnieje wielomian $r(s)$ stopnia niższego od n taki, że

(4.6) $$w(A) = r(A)$$

Dowód. Dzieląc wielomian $w(s)$ przez wielomian charakterystyczny $\varphi(s)$ macierzy A, otrzymamy

$$w(s) = q(s)\varphi(s) + r(s)$$

przy czym $q(s)$ i $r(s)$ są ilorazem i resztą dzielenia wielomianu $w(s)$ przez $\varphi(s)$ oraz st $\varphi(s) = n >$ st $r(s)$. Podstawiając w miejsce skalara s macierz A i uwzględniając równanie (4), otrzymamy

$$w(A) = q(A)\varphi(A) + r(A) = r(A)$$

■

Przykład 1.4.2. Dany jest wielomian

$$w(s) = s^6 - 5s^5 - 3s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + 2$$

Korzystając ze wzoru (6) należy wyznaczyć $w(A)$ dla macierzy (5). Wielomian charakterystyczny tej macierzy ma postać $\varphi(s)=s^2-5s-2$. Dzieląc wielomian $w(s)$ przez $\varphi(s)$ otrzymamy

$$w(s)=\left(s^4-s^2\right)\left(s^2-5s-2\right)+3s+2$$

czyli

$$r(s)=3s+2$$

Wobec tego

$$w(A)=r(A)=3A+2\cdot I_2=3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 9 & 14\end{bmatrix}$$

Powyższe rozważania można uogólnić na przypadek kwadratowych macierzy wielomianowych.

Twierdzenie 1.4.4. Niech $W(s)\in \boldsymbol{C}^{n\times n}[s]$ będzie wielomianową kwadratową macierzą stopnia N, a $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, przy czym $N\geq n$. Istnieje macierz wielomianowa $R(s)$ stopnia niższego od n taka, że

(4.7) $$W_p(A)=R_p(A) \quad \text{oraz} \quad W_l(A)=R_l(A)$$

gdzie $W_p(A)$ jest prawostronną wartością macierzy $W(s)$ po podstawieniu A w miejsce s, a $W_l(A)$ – lewostronną wartością macierzy $W(s)$ po podstawieniu A w miejsce s.

Dowód. Dzieląc elementy macierzy $W(s)$ przez wielomian charakterystyczny $\varphi(s)$ macierzy A otrzymamy

$$W(s)=Q(s)\varphi(s)+R(s)$$

przy czym $Q(s)$ i $R(s)$ są ilorazem i resztą dzielenia macierzy $W(s)$ przez $\varphi(s)$ oraz $\operatorname{st}\varphi(s)=n>\operatorname{st}R(s)$. Podstawiając w miejsce skalara s macierz A i uwzględniając równanie (4), otrzymamy

$$W_p(A)=Q_p(A)\varphi(A)+R_p(A)=R_p(A)$$

oraz

$$W_l(A)=Q_l(A)\varphi(A)+R_l(A)=R_l(A)$$

■

Przykład 1.4.3. Dana jest macierz wielomianowa

$$W(s)=\begin{bmatrix}s^6-5s^5-2s^4+s^2-3s+1 & s^5-5s^4-2s^3-s-1\\ s^4-5s^3-3s^2+5s+3 & -2s^6+10s^5+4s^4-s+2\end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzorów (7) należy wyznaczyć $W_p(A)$ i $W_l(A)$ dla macierzy (5). Dzieląc każdy element macierzy $W(s)$ przez wielomian charakterystyczny $\varphi(s)$ macierzy A, otrzymamy

$$W(s)=\begin{bmatrix}s^4+1 & s^3\\ s^2-1 & -2s^4\end{bmatrix}\left(s^2-5s-2\right)+\begin{bmatrix}2s+3 & -s-1\\ 1 & -s+2\end{bmatrix}$$

czyli

$$R(s)=\begin{bmatrix}2s+3 & -s-1\\ 1 & -s+2\end{bmatrix}$$

Wobec tego

$$W_p(A)=R_p(A)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}A+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

oraz

$$W_l(A)=R_l(A)=A\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

1.5. Działania elementarne na macierzach wielomianowych

Definicja 1.5.1. Działaniami elementarnymi na macierzy wielomianowej $A(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$ nazywamy:

1) pomnożenie dowolnego i-tego wiersza (kolumny) przez liczbę $c\neq 0$,
2) dodanie do dowolnego i-tego wiersza (kolumny) j-tego wiersza (kolumny), pomnożonego przez dowolny wielomian $w(s)$,
3) zamianę miejscami dowolnych dwóch wierszy (kolumn), np. i-tego i j-tego wiersza (kolumny).

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z następujących oznaczeń działań:

$L[i\times c]$	pomnożenie i-tego wiersza przez liczbę $c\neq 0$,
$P[i\times c]$	pomnożenie i-tej kolumny przez liczbę $c\neq 0$,
$L[i+j\times w(s)]$	dodanie do i-tego wiersza j-tego wiersza, pomnożonego przez wielomian $w(s)$,
$P[i+j\times w(s)]$	dodanie do i-tej kolumny j-tej kolumny, pomnożonej przez wielomian $w(s)$,
$L[i,j]$	zamiana miejscami i-tego i j-tego wiersza,
$P[i,j]$	zamiana miejscami i-tej i j-tej kolumny.

Łatwo sprawdzić, że powyższe działania elementarne wykonywane na wierszach są równoważne lewostronnemu pomnożeniu macierzy $A(s)$ przez odpowiednie macierze:

$$L_m(i,c)=\begin{array}{cl} \begin{array}{cccccc} & & & \underbrace{\qquad}_{} & & \\[-4pt] & & & \scriptstyle i\text{ - ta kolumna} & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccc}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&c&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&1\end{array}\right] & \begin{array}{l}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}\\ \scriptstyle i\text{-ty wiersz}\end{array}\end{array}$$

(5.1)

$$L_d(i,j,w(s))=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}1&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&1&\cdots&w(s)&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{array}\right]\end{array}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}[s],$$

$$L_z(i,j)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}1&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{array}\right]\end{array}$$

Te same działania wykonywane na kolumnach są równoważne prawostronnemu pomnożeniu macierzy $A(s)$ przez odpowiednie następujące macierze:

$$P_m(i,c)=\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccc} & & & \underbrace{\qquad}_{} & & & \\[-4pt] & & & \scriptstyle i\text{ - ta kolumna} & & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccc}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&c&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{array}\right] & \begin{array}{l}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}\\ \scriptstyle i\text{-ty wiersz}\end{array}\end{array}$$

(5.2)

$$P_d(i,j,w(s))=\begin{array}{cl} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccccccc}1&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&w(s)&\cdots&1&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\end{array}\right] & \begin{array}{l}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}\\ \\ \scriptstyle j\text{-ty wiersz}\end{array}\end{array}$$

$$P_z(i,j)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}1&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\ \hdashline 0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{array}\right]\end{array}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$$

Łatwo sprawdzić, że wyznaczniki macierzy wielomianowych (1) i (2) są niezerowe i nie zależą od zmiennej s. Macierze takie nazywamy macierzami unimodularnymi.

1.6. Liniowa niezależność, baza przestrzeni i rząd macierzy wielomianowych

Niech $a_i=a_i(s)$, $i=1,\ \ldots,\ n$ będzie i-tą kolumną macierzy wielomianowej $A(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$. Kolumny te będziemy traktować jako m-wymiarowe wektory wielomianowe, $a_i\in \boldsymbol{R}^m[s]$, $i=1,\ldots,n$.

Definicja 1.6.1. Wektory $a_i\in \boldsymbol{R}^m[s]$ nazywamy wektorami liniowo zależnymi nad ciałem funkcji wymiernych $\boldsymbol{F}(s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją nie wszystkie równe zeru funkcje wymierne $w_i=w_i(s)\in \boldsymbol{F}(s)$ takie, że

(6.1) $$w_1a_1 + w_2a_2 + ... + w_na_n = 0 \text{ (wektor zerowy)}$$

Wektory te nazywamy wektorami liniowo niezależnymi nad ciałem funkcji wymiernych, jeżeli równość (1) implikuje $w_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Na przykład wektory wielomianowe

(6.2) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} s \\ 1+s^2 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne nad ciałem funkcji wymiernych, gdyż równanie

$$w_1a_1 + w_2a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} w_1 + \begin{bmatrix} s \\ 1+s^2 \end{bmatrix} w_2 = \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ma tylko zerowe rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wykażemy, że w zależności (1) funkcje wymierne w_i, $i = 1, \ldots, n$ można zastąpić wielomianami $p_i = p_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$. W tym celu obie strony równości (1) mnożymy przez najmniejszy wspólny mianownik funkcji wymiernych w_i, $i = 1, \ldots, n$. Otrzymamy wówczas

(6.3) $$p_1a_1 + p_2a_2 + ... + p_na_n = 0$$

gdzie $p_i = p_i(s)$ są wielomianami.
Na przykład wektory wielomianowe

(6.4) $$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} s+1 \\ s^2+s \end{bmatrix}$$

są liniowo zależne nad ciałem funkcji wymiernych, gdyż dla $w_1 = -1$ oraz $w_2 = \dfrac{1}{s+1}$ otrzymamy

(6.5) $$w_1a_1 + w_2a_2 = -\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix} s+1 \\ s^2+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mnożąc obie strony równości (5) przez najmniejszy wspólny mianownik funkcji wymiernych w_1 i w_2 równy $s+1$, otrzymamy

$$-(s+1)\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s+1 \\ s^2+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli liczba wektorów wielomianowych przestrzeni $\boldsymbol{R}^n[s]$ jest większa niż n, to wektory te są liniowo zależne. Na przykład, dodając do dwóch wektorów liniowo niezależnych (2) dowolny wektor $a = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2[s]$, otrzymamy wektory liniowo zależne, tzn.

(6.6) $$p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a = 0$$

dla $p_1, p_2, p_3 \in \boldsymbol{R}[s]$ nie wszystkich jednocześnie równych zeru.
Zakładając na przykład $p_3 = -1$ z zależności (6) i (2), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+1 & -s \\ -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s^2+1)a_{11} - sa_{21} \\ -sa_{11} + a_{21} \end{bmatrix}$$

Tak więc wektory a_1, a_2, a są liniowo zależne dla dowolnego wektora a.

Definicja 1.6.2. Wektory wielomianowe $b_i = b_i(s) \in \boldsymbol{R}^n[s]$, $i = 1, \ldots, n$ nazywamy bazą przestrzeni $\boldsymbol{R}^n[s]$, jeżeli wektory te są liniowo niezależne nad ciałem funkcji wymiernych oraz dowolny wektor $a \in \boldsymbol{R}^n[s]$ tej przestrzeni można przedstawić jako kombinację liniową tych wektorów

(6.7) $$a = p_1b_1 + p_2b_2 + ... + p_nb_n$$

gdzie $p_i \in \boldsymbol{R}[s]$, $i = 1, \ldots, n$

Istnieje wiele różnych baz dla tej samej przestrzeni. Na przykład dla przestrzeni $R^2[s]$ za bazę możemy przyjąć wektory (2). Rozwiązując układ równań dla dowolnego wektora $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in R^2[s]$

$$[a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s^2+1)a_{11} - sa_{21} \\ -sa_{11} + a_{21} \end{bmatrix}$$

Za bazę tej przestrzeni możemy również przyjąć

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku $p_1 = a_{11}$ i $p_2 = a_{21}$.

Definicja 1.6.3. Rzędem normalnym (krótko rzędem) macierzy wielomianowej $A(s) \in R^{n \times m}[s]$ nazywamy liczbę liniowo niezależnych wierszy (kolumn) tej macierzy.

Rząd macierzy wielomianowej $A(s)$ możemy również zdefiniować w sposób równoważny jako największy stopień minora będącego wielomianem niezerowym tej macierzy.
Rząd macierzy $A(s) \in R^{n \times m}[s]$ nie jest większy niż liczba jej wierszy n lub kolumn m tj.

(6.8) $$\text{rząd } A(s) \le \min(n, m)$$

Jeżeli macierz kwadratowa $A(s) \in R^{n \times n}[s]$ ma pełny rząd, tzn. rząd $A(s) = n$, to jej wyznacznik jest niezerowym wielomianem $w(s)$, czyli

(6.9) $$\det A(s) = w(s) \ne 0$$

Macierz taką nazywamy macierzą nieosobliwą lub odwracalną oraz osobliwą, gdy $\det A(s) = 0$ (wielomian zerowy). Na przykład macierz kwadratowa złożona z wektorów liniowo niezależnych (2) jest macierzą nieosobliwą, gdyż

$$\det\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & 1+s^2 \end{bmatrix} = 1$$

a macierz złożoną z wektorów liniowo zależnych (4) jest macierzą osobliwą, gdyż

$$\det\begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ s & s^2+s \end{bmatrix} = 0$$

Twierdzenie 1.6.1. Działania elementarne wykonane na macierzy wielomianowej nie zmieniają jej rzędu.

Dowód. Niech

(6.10) $$\overline{A}(s) = L(s)A(s)P(s) \in R^{n \times m}[s]$$

przy czym $L(s) \in R^{n \times n}[s]$ i $P(s) \in R^{m \times m}[s]$ są odpowiednio macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach.
Z zależności (10) mamy natychmiast

$$\text{rząd } \overline{A}(s) = \text{rząd } [L(s)A(s)P(s)] = \text{rząd } A(s)$$

gdyż macierze $L(s)$ i $P(s)$ są macierzami unimodularnymi.

■

Na przykład: wykonując na wierszach macierzy złożonej z kolumn (2) działanie $L_d(2 + 1 \times (-s))$, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obie macierze wielomianowe $\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2+1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są macierzami pełnego rzędu.

1.7. Równoważne macierze wielomianowe

1.7.1. Macierze lewostronnie i prawostronnie równoważne

Definicja 1.7.1. Dwie macierze wielomianowe $A(s)$, $B(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times n}[s]$ nazywamy macierzami lewostronnie (prawostronnie) lub wierszowo (kolumnowo) równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z nich można otrzymać z drugiej w wyniku wykonania dowolnej liczby działań elementarnych odpowiednio na jej wierszach (kolumnach)

(7.1) $$B(s) = L(s)A(s) \quad \big(\text{odpowiednio } B(s) = A(s)P(s)\big)$$

przy czym $L(s)\ \big(P(s)\big)$ jest iloczynem macierzy unimodularnych działań elementarnych na wierszach (kolumnach).

Definicja 1.7.2. Dwie macierze wielomianowe $A(s), B(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times n}[s]$ nazywamy równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy jedną z nich można otrzymać z drugiej w wyniku wykonania dowolnej liczby działań elementarnych na wierszach i kolumnach, czyli

(7.2) $$B(s) = L(s)A(s)P(s)$$

przy czym $L(s)$ *i* $P(s)$ są iloczynami unimodularnych macierzy działań elementarnych na wierszach i odpowiednio na kolumnach.

Twierdzenie 1.7.1. Macierz wielomianowa $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times l}[s]$ pełnego rzędu jest lewostronnie równoważna macierzy trójkątnej górnej w postaci

(7.3)
$$\bar{A}(s) = L(s)A(s) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & \bar{a}_{12}(s) & \cdots & \bar{a}_{1l}(s) \\ 0 & \bar{a}_{22}(s) & \cdots & \bar{a}_{2l}(s) \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{ll}(s) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla} \quad m > l \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & \bar{a}_{12}(s) & \cdots & \bar{a}_{1m}(s) \\ 0 & \bar{a}_{22}(s) & \cdots & \bar{a}_{2m}(s) \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{mm}(s) \end{bmatrix} & \text{dla} \quad m = l \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & \bar{a}_{12}(s) & \cdots & \bar{a}_{1m}(s) & \cdots & \bar{a}_{1l}(s) \\ 0 & \bar{a}_{22}(s) & \cdots & \bar{a}_{2m}(s) & \cdots & a_{2l}(s) \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{mm}(s) & \cdots & a_{ml}(s) \end{bmatrix} & \text{dla} \quad m < l \end{cases}$$

przy czym elementy $\bar{a}_{1i}(s), \bar{a}_{2i}(s), \ldots, \bar{a}_{i-1,i}(s)$ są wielomianami stopnia niższego niż $\bar{a}_{ii}(s)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$, a $L(s)$ jest iloczynem macierzy unimodularnych działań elementarnych wykonywanych na wierszach.

Dowód. Spośród niezerowych elementów pierwszej kolumny macierzy $A(s)$ wybieramy element, który jest wielomianem najniższego stopnia i wykonując $L[i, j]$ przenosimy ten element na miejsce (1,1). Oznaczmy ten element przez $\widetilde{a}_{11}(s)$. Następnie wszystkie pozostałe elementy pierwszej kolumny dzielimy przez $\widetilde{a}_{11}(s)$. Otrzymamy wówczas

$$\widetilde{a}_{i1}(s) = \widetilde{a}_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s) \text{ dla } i = 2, 3, \ldots, m$$

przy czym $q_{i1}(s)$ jest ilorazem, a $r_{i1}(s)$ resztą dzielenia wielomianu $\widetilde{a}_{i1}(s)$ przez $\widetilde{a}_{11}(s)$. Wykonując działanie $L\big[i + 1 \times \big(-q_{i1}(s)\big)\big]$ zastępujemy element $\widetilde{a}_{i1}(s)$ resztą $r_{i1}(s)$. Jeżeli nie wszystkie reszty są równe zeru, to wybieramy tę, która jest wielomianem najniższego stopnia i wykonując działania $L[i, j]$ przenosimy ją na miejsce (1,1). Oznaczamy tę resztę przez $\widetilde{r}_{11}(s)$. Jeżeli nie wszystkie elementy pierwszej kolumny dzielą się przez $\widetilde{r}_{11}(s)$, to powtarzamy powyższą procedurę biorąc zamiast $\widetilde{a}_{11}(s)$ resztę $\widetilde{r}_{11}(s)$. Stopień $\widetilde{r}_{11}(s)$ jest niższy od stopnia $\widetilde{a}_{11}(s)$. Po skończonej liczbie kroków otrzymamy macierz $\widetilde{A}(s)$ w postaci

$$\tilde{A}(s)=\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(s) & \tilde{a}_{12}(s) & \cdots & \tilde{a}_{1l}(s) \\ 0 & \tilde{a}_{22}(s) & \cdots & a_{2l}(s) \\ \hdashline 0 & \tilde{a}_{m2}(s) & \cdots & \tilde{a}_{ml}(s) \end{bmatrix}$$

Powyższą procedurę powtarzamy następnie dla pierwszej kolumny podmacierzy powstałej z macierzy $A(s)$ w wyniku wykreślenia pierwszego wiersza i kolumny. Otrzymamy wówczas macierz o postaci

$$\hat{A}(s)=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & \tilde{a}_{12}(s) & \tilde{a}_{13}(s) & \cdots & \tilde{a}_{1l}(s) \\ 0 & \bar{a}_{22}(s) & \hat{a}_{23}(s) & \cdots & \hat{a}_{2l}(s) \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33}(s) & \cdots & \hat{a}_{3l}(s) \\ \hdashline 0 & 0 & \hat{a}_{m3}(s) & \cdots & \hat{a}_{ml}(s) \end{bmatrix}$$

Jeżeli $\tilde{a}_{12}(s)$ nie jest wielomianem niższego stopnia od $\bar{a}_{22}(s)$, to dzielimy $\tilde{a}_{12}(s)$ przez $\bar{a}_{22}(s)$ i stosując działanie $L[1+2\times(-q_{12}(s))]$ zastępujemy element $\tilde{a}_{12}(s)$ elementem $\bar{a}_{12}(s)=r_{12}(s)$, przy czym $q_{12}(s)$ i $r_{12}(s)$ są ilorazem i resztą z dzielenia wielomianu $\tilde{a}_{12}(s)$ przez $\bar{a}_{22}(s)$.

Następnie przechodzimy do podmacierzy powstałej z macierzy $\hat{A}(s)$ w wyniku wykreślenia dwóch pierwszych wierszy i dwóch pierwszych kolumn. Kontynuując tę procedurę otrzymamy poszukiwaną macierz (3). ■

Z dowodu tego wyniku natychmiast algorytm wyznaczania macierzy lewostronnie równoważnej mającej postać (3).

Przykład 1.7.1. Daną macierz

$$A(s)=\begin{bmatrix} 1 & -s & 2 \\ s+1 & -s+2 & 1 \\ s^2 & -s^3+1 & 2s^2 \end{bmatrix}$$

przekształcić do postaci lewostronnie równoważnej (3).
Aby to osiągnąć, wykonujemy następujące działania elementarne:

$$\xrightarrow[L[3+1\times(-s^2)]]{L[2+1\times(-(s+1))]}\begin{bmatrix} 1 & -s & 2 \\ 0 & s^2+2 & -2s-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{L[2,3]}\begin{bmatrix} 1 & -s & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2+2 & -2s-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L[3+2\times(-(s^2+2))]]{L[1+2\times s]}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2s-1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1.7.1'. Macierz wielomianowa $A(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times l}[s]$ pełnego rzędu jest prawostronnie równoważna macierzy trójkątnej dolnej mającej postać

(7.4)

$$\bar{A}(s)=A(s)P(s)=\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{21}(s) & \bar{a}_{22}(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \bar{a}_{m1}(s) & \bar{a}_{m2}(s) & \bar{a}_{m3}(s) & \cdots & \bar{a}_{mm}(s) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } n>m \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{21}(s) & \bar{a}_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \hdashline \bar{a}_{m1}(s) & \bar{a}_{m2}(s) & \cdots & \bar{a}_{mm}(s) \end{bmatrix} & \text{dla } n=m \\ \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{a}_{21}(s) & \bar{a}_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \hdashline \bar{a}_{l1}(s) & \bar{a}_{l2}(s) & \cdots & \bar{a}_{l2}(s) \\ \hdashline \bar{a}_{m1}(s) & \bar{a}_{m2}(s) & \cdots & \bar{a}_{ml}(s) \end{bmatrix} & \text{dla } n<m \end{cases}$$

przy czym elementy $\bar{a}_{i1}(s),\bar{a}_{i2}(s),\ldots,\bar{a}_{i-1,i}(s)$ są wielomianami stopnia niższego od $\bar{a}_{ii}(s)$ dla $i=1,2,\ldots,n$, a $P(s)$ jest iloczynem macierzy unimodularnych działań elementarnych wykonywanych na kolumnach.

1.7.2. Macierze kolumnowo lub wierszowo zredukowane

Stopniem i-tej kolumny (wiersza) macierzy wielomianowej nazywamy najwyższy stopień wielomianu, który jest elementem tej kolumny (tego wiersza).
Stopień i-tej kolumny (wiersza) macierzy $A(s)$ będziemy oznaczać symbolem st $k_i[A(s)]$ (st $w_i[A(s)]$ lub krótko st k_i (st w_i).
Niech L_k (L_w) będzie macierzą utworzoną ze współczynników stojących przy najwyższych potęgach zmiennej s w poszczególnych kolumnach (wierszach) macierzy $A(s)$. Na przykład: dla macierzy wielomianowej

$$(7.5) \qquad A(s)=\begin{bmatrix} s^2-1 & s & -3s \\ s+2 & -s & 2 \\ s^2 & s-1 & 2s-1 \end{bmatrix}$$

mamy $\mathrm{st}\ A(s)=2$

$$\mathrm{st}\ k_1=2, \quad \mathrm{st}\ k_2=\mathrm{st}\ k_3=1, \quad \mathrm{st}\ w_1=\mathrm{st}\ w_3=2, \quad \mathrm{st}\ w_2=1$$

oraz

$$L_k=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ L_w=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz (5) możemy zapisać, korzystając z powyższych macierzy, następująco

$$A(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ s+2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

lub

$$A(s)=\begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & s & -3s \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & s-1 & 2s-1 \end{bmatrix}$$

W przypadku ogólnym dla macierzy $A(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ mamy

$$(7.6) \qquad A(s)=L_k \mathrm{diag}\left[s^{\mathrm{st}k_1}, s^{\mathrm{st}k_2}, \dots, s^{\mathrm{st}k_l}\right]+\overline{A}(s)$$

oraz

$$(7.7) \qquad A(s)=\mathrm{diag}\left[s^{\mathrm{st}w_1}, s^{\mathrm{st}w_2}, \dots, s^{\mathrm{st}w_m}\right]L_w+\widetilde{A}(s)$$

przy czym $\overline{A}(s)$, $\widetilde{A}(s)$ są macierzami wielomianowymi spełniającymi warunki: $\mathrm{st}\ \overline{A}(s)<\mathrm{st}\ A(s)$, $\mathrm{st}\ \widetilde{A}(s)<\mathrm{st}\ A(s)$. Jeżeli $m=n$ oraz $\det L_k\neq 0$, to wyznacznik macierzy (6) jest wielomianem stopnia $n_k=\sum_{i=1}^{l}\mathrm{st}\ k_i$, gdyż

$$\det A(s)=\det L_k \det \mathrm{diag}\left[s^{\mathrm{st}k_1}, s^{\mathrm{st}k_2}, \dots, s^{\mathrm{st}k_l}\right]+\dots=s^{n_k}\det L_k+\dots$$

Analogicznie, jeżeli $\det L_w\neq 0$, to wyznacznik macierzy (7) jest wielomianem stopnia $n_w=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{st}\ w_j$.

Definicja 1.7.3. Macierz wielomianową $A(s)$ nazywamy kolumnowo (wierszowo) zredukowaną wtedy i tylko wtedy, gdy L_k (L_w) tej macierzy jest macierzą pełnego rzędu.

Macierz kwadratowa $A(s)$ jest więc kolumnowo (wierszowo) zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\det L_k\neq 0$ $(\det L_w\neq 0)$.

Na przykład: macierz (5) jest macierzą kolumnowo zredukowaną oraz wierszowo zredukowaną, gdyż

$$\det L_k=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-5, \ \det L_w=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Z powyższych rozważań oraz twierdzeń 1 i 1' wynika natychmiast następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.7.1. Wykonując tylko działania elementarne na wierszach lub kolumnach można nieosobliwą macierz wielomianową przekształcić do postaci macierzy kolumnowo i odpowiednio wierszowo zredukowanej.

1.8. Sprowadzanie macierzy wielomianowej do postaci kanonicznej Smitha

Weźmy pod uwagę macierz wielomianową $A(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$ rzędu r.

Definicja 1.8.1. Macierz wielomianową o postaci

$$
(8.1)\qquad A_S(s) = \left[\begin{array}{cccccc} i_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & i_2(s) & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & i_r(s) & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \end{array}\right] \in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]
$$

$r \le \min(n,m)$ nazywamy postacią kanoniczną Smitha macierzy $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$, przy czym $i_1(s), i_2(s), \dots, i_r(s)$ są niezerowymi wielomianami, zwanymi niezmienniczymi (inwariantnymi), o współczynnikach równych jedności przy najwyższych potęgach zmiennej s takimi, że wielomian $i_k(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $i_{k+1}(s)$, tzn. $i_k | i_{k+1}$ dla $k = 1, \dots, r-1$.

Twierdzenie 1.8.1. Dla dowolnej macierzy wielomianowej $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$ rzędu r $(r \le \min(n,m))$ istnieje równoważna jej postać kanoniczna Smitha (1).

Dowód. Wśród elementów macierzy $A(s)$ znajdujemy element niezerowy, który jest wielomianem najniższego stopnia względem s i dokonując zamian miejsc wierszy i kolumn, przenosimy go na miejsce (1,1). Oznaczamy ten element przez $\overline{a}_{11}(s)$. Załóżmy na początku, że wszystkie elementy macierzy $A(s)$ dzielą się bez reszty przez element $\overline{a}_{11}(s)$. Dzieląc elementy $\overline{a}_{i1}(s)$ pierwszej kolumny i pierwszego wiersza $\overline{a}_{1j}(s)$ przez $\overline{a}_{11}(s)$ otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_{i1}(s) &= \overline{a}_{11}(s) q_{i1}(s) \qquad (i = 2,3,\dots,m) \\
\overline{a}_{1j}(s) &= \overline{a}_{11}(s) q_{1j}(s) \qquad (j = 2,3,\dots,n)
\end{aligned}
$$

przy czym $q_{i1}(s)$ i $q_{1j}(s)$ są odpowiednio ilorazami z dzielenia $\overline{a}_{i1}(s)$ i $\overline{a}_{1j}(s)$ przez $\overline{a}_{11}(s)$.
Odejmując od i-tego wiersza $(i = 2, 3, \dots, m)$ pierwszy wiersz pomnożony przez $q_{i1}(s)$ i – odpowiednio – od j-tej kolumny $(j = 2, 3, \dots, n)$ pierwszą kolumnę pomnożoną przez $q_{1j}(s)$, otrzymamy macierz w postaci

$$
(8.2)\qquad \begin{bmatrix} \overline{a}_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{a}_{22}(s) & \cdots & \overline{a}_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \overline{a}_{m2}(s) & \cdots & \overline{a}_{mn}(s) \end{bmatrix}
$$

Jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze s wielomianu $\overline{a}_{11}(s)$ nie jest równy 1, to – aby to osiągnąć – mnożymy pierwszy wiersz (lub kolumnę) przez odwrotność tego współczynnika.
Załóżmy z kolei, że nie wszystkie elementy macierzy $A(s)$ dzielą się bez reszty przez $\overline{a}_{11}(s)$ i że elementy takie znajdują się w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie. Dzieląc elementy pierwszego wiersza i pierwszej kolumny przez $\overline{a}_{11}(s)$ otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_{1i}(s) &= \overline{a}_{11}(s) q_{1i}(s) + r_{1i}(s) \qquad (i = 2,3,\dots,n) \\
\overline{a}_{j1}(s) &= \overline{a}_{11}(s) q_{j1}(s) + r_{j1}(s) \qquad (j = 2,3,\dots,m)
\end{aligned}
$$

przy czym $q_{1i}(s)$ i $q_{j1}(s)$ oraz $r_{1i}(s)$, $r_{j1}(s)$ są odpowiednio ilorazami i resztami dzielenia $\overline{a}_{1i}(s)$ i $\overline{a}_{j1}(s)$ przez $\overline{a}_{11}(s)$. Odejmując od j-tego wiersza (i-tej kolumny) pierwszy wiersz (pierwszą kolumnę) pomnożony przez $q_{j1}(s)$ (pomnożoną przez $q_{1i}(s)$) zastąpimy element $\overline{a}_{j1}(s)$ $(\overline{a}_{1i}(s))$ przez resztę $r_{j1}(s)$ $(r_{1i}(s))$.
Następnie wśród tych reszt znajdujemy wielomian najniższego stopnia względem s i dokonując zamian miejscami wierszy i kolumn przenosimy go na miejsce (1,1). Oznaczamy ten wielomian przez $\overline{r}_{11}(s)$. Jeżeli nie wszystkie elementy pierwszego wiersza i pierwszej kolumny dzielą się bez reszty przez $\overline{r}_{11}(s)$, to powtarzamy tę procedurę biorąc zamiast wielomianu $\overline{a}_{11}(s)$ wielomian $\overline{r}_{11}(s)$. Stopień wielomianu $\overline{r}_{11}(s)$ jest niższy od stopnia $\overline{a}_{11}(s)$. Po skończonej liczbie kroków otrzymamy więc na miejscu (1,1) wielomian, przez który dzielą się bez reszty wszystkie elementy pierwszego wiersza i pierwszej kolumny. Jeżeli element $\overline{a}_{ik}(s)$ nie dzieli się bez reszty przez $\overline{a}_{11}(s)$, to dodając i-ty wiersz (lub k-tą kolumnę) do wiersza pierwszego (pierwszej kolumny), sprowadzamy przypadek ten do przypadku poprzedniego.
Powtarzając tę procedurę otrzymamy w końcu na miejscu (1,1) wielomian, przez który dzielą się bez reszty wszystkie elementy macierzy. Dalszy tok postępowania jest taki sam jak w przypadku pierwszym, gdy wszystkie elementy macierzy dzielą się bez reszty przez element $\overline{a}_{11}(s)$.

Jeżeli nie wszystkie elementy $\bar{a}_{ij}(s)$ $(i=2,3,\ldots,m;\ j=2,3,\ldots,n)$ macierzy (2) są równe zeru, to znajdujemy wśród nich element niezerowy, który jest wielomianem najniższego stopnia względem s, i dokonując zamian miejsc wierszy i kolumn przenosimy go na miejsce (2,2). Postępując dalej podobnie jak wyżej, otrzymamy macierz w postaci

$$\left[\begin{array}{ccccc} \bar{a}_{11}(s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33}(s) & \cdots & \bar{a}_{3n}(s) \\ \hdashline 0 & 0 & \bar{a}_{m3}(s) & \cdots & \bar{a}_{mn}(s) \end{array}\right]$$

przy czym $\bar{a}_{22}(s)$ dzieli się bez reszty przez $\bar{a}_{11}(s)$, a wszystkie elementy $\bar{a}_{ij}(s)$ $(i=3,4,\ldots,m;\ j=3,4,\ldots,n)$ dzielą się bez reszty przez $\bar{a}_{22}(s)$. Kontynuując tę procedurę otrzymamy macierz o postaci kanonicznej Smitha (1).

■

Z dowodu tego wynika natychmiast algorytm wyznaczania postaci kanonicznej Smitha, zilustrowany na poniższym przykładzie.

Przykład 1.8.1. Aby przekształcić macierz wielomianową

$$A(s)=\begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

do postaci kanonicznej Smitha, poddajemy tę macierz kolejno działaniom elementarnym

Krok 1. Wykonujemy działanie $P[1,3]$

$$A_1(s)=\begin{bmatrix} s+2 & (s+2)(s+3) & (s+2)^2 \\ s+3 & (s+2)^2 & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

Wszystkie elementy tej macierzy dzielą się bez reszty przez $s+2$ z wyjątkiem elementu $s+3$.

Krok 2. Uwzględniając równość

$$\frac{s+3}{s+2}=1+\frac{1}{s+2}$$

wykonujemy działanie $L[2+1\times(-1)]$

$$A_2(s)=\begin{bmatrix} s+2 & (s+2)(s+3) & (s+2)^2 \\ 1 & -(s+2) & s+2 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Wykonujemy działanie $L[1,2]$

$$A_3(s)=\begin{bmatrix} 1 & -(s+2) & s+2 \\ s+2 & (s+2)(s+3) & (s+2)^2 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Wykonujemy działania $P[2+1\times(s+2)]$ oraz $P[3+1\times(-s-2)]$

$$A_4(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s+2 & (s+2)(2s+5) & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Wykonujemy działanie $L[2+1\times(-s-2)]$ oraz $P\left[2\times\frac{1}{2}\right]$

$$A_s(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)\left(s+\frac{5}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz ta ma poszukiwaną postać kanoniczną Smitha macierzy (3).

Z podzielności wielomianów inwariantnych $i_k | i_{k+1}$, k=1, ..., $r-1$ wynika, że istnieją wielomiany $d_1, d_2, \ldots, d_r$ takie, że

$$i_1=d_1,\ i_2=d_1d_2,\ \ldots,\ i_r=d_1d_2\ldots d_r$$

Wobec tego macierz (1) możemy napisać w postaci

$$A_S(s)=\left[\begin{array}{cccccccc} d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1d_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & d_1d_2\ldots d_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \tag{8.1'}$$

Twierdzenie 1.8.2. Wielomiany niezmiennicze $i_1(s), i_2(s), ..., i_r(s)$ macierzy (1) są jednoznacznie określone zależnością

$$i_k(s) = \frac{D_k(s)}{D_{k-1}(s)} \text{ dla } k = 1, 2, ..., r \tag{8.4}$$

przy czym $D_k(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k macierzy $A(s)$ $(D_0(s) = 1)$.

Dowód. Wykażemy, że działania elementarne nie zmieniają $D_k(s)$. Zauważmy, że działanie elementarne 1) polegające na pomnożeniu i-tego wiersza (kolumny) przez liczbę $c \neq 0$ powoduje pomnożenie minorów zawierających ten wiersz (kolumnę) przez tę liczbę c. Działanie to nie zmienia więc $D_k(s)$. Z kolei działanie elementarne 2) polegające na dodaniu do i-tego wiersza (kolumny) j-tego wiersza (kolumny) pomnożonego przez wielomian $w(s)$ nie zmienia $D_k(s)$, jeżeli minor stopnia k zawiera i-ty i j-ty wiersz lub jeżeli nie zawiera żadnego z nich. Jeżeli natomiast minor stopnia k zawiera i-ty wiersz, a nie zawiera j-tego wiersza, to można go przedstawić jako kombinację liniową dwóch minorów stopnia k macierzy $A(s)$. Wobec tego największy wspólny dzielnik minorów stopnia k nie zmienia się. Wreszcie działanie 3), polegające na zamianie miejscami i-tego i j-tego wiersza (kolumny), również nie zmienia $D_k(s)$, gdyż w wyniku tego działania minor stopnia k albo nie ulega zmianie (oba te wiersze (kolumny) nie należą do tego minora), albo zmienia tylko znak (oba te wiersze należą do tego minora), albo wreszcie zostanie zastąpiony innym minorem stopnia k macierzy $A(s)$ (tylko jeden z tych wierszy należy do tego minora).

Macierze równoważne $A(s)$ i $A_S(s)$ mają więc te same dzielniki $D_1(s)$, $D_2(s)$, ..., $D_r(s)$. Z postaci kanonicznej Smitha (1) wynika, że

$$\begin{aligned} D_1(s) &= i_1(s) \\ D_2(s) &= i_1(s)i_2(s \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D_r(s) &= i_1(s)i_2(s)...i_r(s) \end{aligned} \tag{8.5}$$

Z zależności (5) otrzymujemy natychmiast wzór (4).

■

Korzystając z wielomianów $d_1, d_2, ..., d_r$ możemy zależność (5) napisać w postaci

$$\begin{aligned} D_1(s) &= d_1 \\ D_2(s) &= d_1^2 d_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ D_r(s) &= d_1^r d_2^{r-1}...d_r \end{aligned} \tag{8.6}$$

Z definicji (1) oraz twierdzeń 1 i 2 wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.8.1. Dwie macierze $A(s)$, $B(s) \in C^{m \times n}[s]$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same wielomiany inwariantne.

1.9. Dzielniki elementarne i zera macierzy wielomianowych

1.9.1. Dzielniki elementarne

Weźmy pod uwagę macierz wielomianową $A(s) = C^{m \times n}[s]$ rzędu r, której postać kanoniczna Smitha $A_s(s)$ jest dana wzoru (8.1).
Niech k-ty wielomian inwariantny tej macierzy ma postać

$$i_k(s) = (s - s_1)^{m_{k1}} (s - s_2)^{m_{k2}} ... (s - s_q)^{m_{kq}} \tag{9.1}$$

Z podzielności wielomianu $i_k(s)$ przez wielomian $i_{k+1}(s)$ wynika, że

$$\begin{aligned} &m_{r,1} \geq m_{r-1,1} \geq ... \geq m_{1,1} \geq 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &m_{r,q} \geq m_{r-1,q} \geq ... \geq m_{1,q} \geq 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Jeżeli na przykład $i_1(s) = 1$, to $m_{11} = m_{12} = ... = m_{1q} = 0$

Definicja 1.9.1. Różne od jedności wyrażenia $(s - s_1)^{m_{11}}$, $(s - s_2)^{m_{12}}, ..., (s - s_q)^{m_{rq}}$ występujące w wielomianach inwariantnych (1) nazywamy dzielnikami elementarnymi macierzy wielomianowej $A(s)$.

Na przykład dzielnikami elementarnymi macierzy wielomianowej (8.3) są $(s + 2)$ i $(s + 2{,}5)$.

Dzielniki elementarne macierzy wielomianowej są wyznaczane jednoznacznie. Wynika to natychmiast z jednoznaczności wielomianów inwariantnych macierzy wielomianowych. Równoważne macierze wielomianowe mają te same dzielniki elementarne. Rząd macierzy oraz jej dzielniki elementarne określają jednoznacznie postać kanoniczną Smitha macierzy wielomianowej o znanych wymiarach.

Na przykład znając dzielniki elementarne $s-1$, $(s-1)(s-2)$, $(s-2)^2$, $s-3$, rząd macierzy $r=4$ oraz jej wymiary 4×4 możemy napisać postać kanoniczną Smitha tej macierzy wielomianowej

$$(9.3)\qquad A_s(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & s-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (s-1)(s-2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (s-1)(s-2)^2(s-3)\end{bmatrix}$$

Weźmy pod uwagę wielomianową macierz blokowo-diagonalną o postaci

$$(9.4)\qquad A(s)=\operatorname{diag}[A_1(s),\ A_2(s)]=\begin{bmatrix}A_1(s) & 0\\ 0 & A_2(s)\end{bmatrix}$$

Niech $A_{kS}(s)$ będzie postacią kanoniczną Smitha macierzy $A_k(s)$, $k=1,2$, a $(s-s_{k_1})^{m^k_{l1}}, \ldots, (s-s_{kq})^{m^k_{r_k,q_k}}$ jej dzielnikami elementarnymi.

Biorąc pod uwagę, że równoważne macierze wielomianowe mają te same dzielniki elementarne stwierdzamy, że zbiór dzielników elementarnych macierzy (4) jest sumą zbiorów dzielników elementarnych macierzy $A_k(s)$, $k=1,2$.

Przykład 1.9.1. Wyznaczyć dzielniki elementarne macierzy blokowo-diagonalnej (4) dla

$$(9.5)\qquad A_1(s)=\begin{bmatrix}s-1 & 1 & 0\\ 0 & s-1 & 1\\ 0 & 0 & s-1\end{bmatrix},\quad A_2(s)=\begin{bmatrix}s-1 & 1 & 0\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & 0 & s-2\end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że postacie kanoniczne Smitha macierzy (5) są równe

$$(9.6)\qquad A_{1S}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (s-1)^3\end{bmatrix},\quad A_{2S}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (s-1)^2(s-2)\end{bmatrix}$$

Dzielniki elementarne macierzy (5) są więc równe $(s-1)^3$ i odpowiednio $(s-1)^2, (s-2)$. Łatwo wykazać, że postać kanoniczna Smitha macierzy (4) z blokami (5) jest równa

$$(9.7)\qquad A_S(s)=\operatorname{diag}[1,1,1,1,(s-1)^2,(s-1)^3(s-2)]$$

a jej dzielnikami elementarnymi są $(s-1)^2, (s-1)^3, (s-2)$.

Weźmy pod uwagę macierz $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ oraz odpowiadającą jej macierz wielomianową $[I_n s-A]$. Niech

$$(9.8)\qquad [I_n s-A]_S=\operatorname{diag}[i_1(s),\ i_2(s),\ \ldots,\ i_n(s)]$$

przy czym

$$(9.9)\qquad i_k(s)=(s-s_1)^{m_{k1}}(s-s_2)^{m_{k2}}\ldots(s-s_q)^{m_{kq}},\quad k=1,\ \ldots,\ n$$

a $s_1, s_2, \ldots, s_q, q\le n$ są wartościami własnymi macierzy A.

Definicja 1.9.2. Różne od jedności wyrażenia $(s-s_1)^{m_{11}}, (s-s_2)^{m_{12}}, \ldots, (s-s_q)^{m_{nq}}$ występujące w wielomianach inwariantnych (9) nazywamy dzielnikami elementarnymi macierzy A.

Dzielniki elementarne macierzy A są wyznaczane jednoznacznie i określają istotne właściwości strukturalne tej macierzy.

1.9.2. Zera macierzy wielomianowej

Weźmy pod uwagę macierz wielomianową $A(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$ rzędu r, której postać kanoniczna Smitha jest równa (8.1). Z zależności (8.5) wynika, że

$$(9.10)\qquad D_r(s)=i_1(s)i_2(s)\ldots i_r(s)$$

Definicja 1.9.3. Miejsca zerowe wielomianu (10) nazywamy zerami macierzy wielomianowej $A(s)$.

Zera macierzy wielomianowej $A(s)$ można równoważnie określić jako te wartości zmiennej s, dla których macierz ta traci swój pełny (normalny) rząd. Na przykład dla macierzy wielomianowej (8.3) mamy

$$D_r(s) = (s+2)(s+2.5)$$

Zerami tej macierzy są więc $s_1^0 = -2,\ s_2^0 = -2.5$.
Łatwo sprawdzić, że dla tych wartości zmiennej s macierz (8.3) (której rząd normalny jest 2) ma rząd równy 1.
Jeżeli macierz wielomianowa $A(s)$ jest kwadratowa i jest macierzą pełnego rzędu $r = n$, to

(9.11) $$\det A(s) = cD_r(s) \quad (c - \text{stały współczynnik niezależny od } s)$$

i zera tej macierzy pokrywają się z pierwiastkami jej równania charakterystycznego $\det A(s) = 0$.
Na przykład dla pierwszej spośród macierzy (5) mamy

$$\det A_r(s) = \begin{vmatrix} s-1 & 1 & 0 \\ 0 & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^3$$

Macierz ta ma więc potrójne zero $s = 1$. Ten sam wynik otrzymamy z (10), gdyż $D_r(s) = (s-1)^3$ dla $A_{1S}(s)$.

Twierdzenie 1.9.1. Niech macierz wielomianowa $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m\times n}[s]$ ma rząd (normalny) równy $r \le \min(m,n)$. Wtedy

(9.12) $$\text{rząd } A(s) = \begin{cases} r & s \notin \sigma \\ r - d_i & s = s_i \in \sigma_A \end{cases}$$

gdzie σ_A jest zbiorem zer macierzy $A(s)$, a d_i jest liczbą różnych dzielników elementarnych zawierających s_i.

Dowód. Z definicji zera wynika, że macierz $A(s)$ nie traci swojego pełnego rzędu po podstawieniu na miejsce zmiennej s liczby nienależącej do zbioru σ_A, czyli rząd $A(s) = r$ dla $s \notin \sigma_A$. Działania elementarne nie zmieniają rzędu macierzy wielomianowej. Wobec tego rząd $A(s) =$ rząd $A_S(s) = r$, gdzie r jest liczbą wielomianów inwariantnych (łącznie z równymi 1). Jeżeli wielomian inwariantny zawiera s_i, to wielomian ten jest równy zeru dla $s = s_i$. Mamy więc rząd $A(s_i) = r = d_i, s_i \in \sigma_A$, gdyż liczba wielomianów zawierających s_i jest równa liczbie różnych dzielników elementarnych zawierających s_i.

■

Na przykład macierz wielomianowa (3) pełnego rzędu kolumnowego ma jeden dzielnik elementarny zawierający $s_1^0 = 3$, dwa dzielniki elementarne zawierające $s_2^0 = 2$ oraz trzy dzielniki elementarne zawierające $s_3^0 = 1$. Wobec tego zgodnie z (12) mamy

$$\text{rząd } A_S(3) = 3, \quad \text{rząd } A_S(2) = 2, \quad \text{rząd } A_S(1) = 1$$

Uwaga 1.9.1. Macierz unimodularna $U(s) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$ nie ma zer, gdyż $\det U(s) = c$, gdzie c jest pewną stałą niezależną od zmiennej s.

Twierdzenie 1.9.2. Dowolną prostokątną macierz wielomianową $A(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ pełnego rzędu, która nie ma zer, można napisać w postaci

(9.13) $$A(s) = \begin{cases} [I_m \quad 0]P(s), & m < n \\ L(s)\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, & m > n \end{cases}$$

gdzie $P(s) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$ i $L(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s]$ są macierzami unimodularnymi.

Dowód. Jeżeli $m < n$ i macierz nie ma zer, to stosując działania elementarne na kolumnach macierz tę można sprowadzić do postaci $[I_m \quad 0]$. Analogicznie, jeżeli $m > n$ i macierz nie ma zer, to stosując działania elementarne na wierszach można tę macierz sprowadzić do postaci $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$.

■

Uwaga 1.9.2. Z zależności (13) wynika, że macierz wielomianowa utworzona z dowolnej liczby wierszy lub kolumn macierzy nie mającej zer nie ma również zer.

Twierdzenie 1.9.3. Dowolną macierz wielomianową $A(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ rzędu $r \le \min(m,n)$ mającą zera można przedstawić w postaci iloczynu macierzy

$$A(s) = B(s)C(s) \tag{9.14}$$

przy czym macierz $B(s) = L^{-1}(s)\,\mathrm{diag}\,[i_1(s), \ldots, i_r(s), 0, \ldots, 0] \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ jest macierzą zawierającą wszystkie zera macierzy $A(s)$, a

$$C(s) = \begin{Bmatrix} [I_m \quad 0]P^{-1}(s), & n > m \\ P^{-1}(s), & n = m \\ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1}(s), & n < m \end{Bmatrix} \tag{9.15}$$

Dowód. Niech $L(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s]$ i $P(s) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$ będą macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach, i odpowiednio kolumnach, sprowadzającymi macierz $A(s)$ do postaci kanonicznej Smitha $A_S(s)$, czyli

$$A_S(s) = L(s)A(s)P(s) \tag{9.16}$$

Mnożąc równanie (16) lewostronnie przez $L^{-1}(s)$ i prawostronnie przez $P^{-1}(s)$, otrzymamy

$$A(s) = L^{-1}(s)A_S(s)P^{-1}(s) = B(s)C(s)$$

gdyż

$$A_S(s) = \begin{Bmatrix} \mathrm{diag}\,[i_r(s), \ldots, i_r(s), 0, \ldots, 0][I_m \quad 0], & n > m \\ \mathrm{diag}\,[i_r(s), \ldots, i_r(s), 0, \ldots, 0], & n = m \\ \mathrm{diag}\,[i_r(s), \ldots, i_r(s), 0, \ldots, 0]\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, & n < m \end{Bmatrix}$$

Z zależności (15) wynika, że macierz $C(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ nie ma zer, gdyż macierz $P^{-1}(s)$ jest macierzą unimodularną.

■

1.10. Podobieństwo macierzy i równoważność macierzy wielomianowych pierwszego stopnia

Definicja 1.10.1. Dwie macierze kwadratowe A i B tego samego stopnia nazywamy macierzami podobnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka nieosobliwa macierz P, że

$$B = P^{-1}AP \tag{10.1}$$

przy czym macierz P nazywamy macierzą przekształcenia przez podobieństwo.

Twierdzenie 1.10.1. Macierze podobne mają równe wielomiany charakterystyczne, czyli

$$\det\,[sI - B] = \det\,[sI - A] \tag{10.2}$$

Dowód. Biorąc pod uwagę zależność (1), możemy napisać

$$\det\,[sI - B] = \det\left[sP^{-1}P - P^{-1}AP\right] = \det\left[P^{-1}(sI - A)P\right] = \det P^{-1} \det\,[sI - A] \det P$$
$$= \det\,[sI - A]$$

gdyż $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$.

■

Twierdzenie 1.10.2. Macierze wielomianowe $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A i B są podobne.

Dowód. Wykażemy najpierw, że jeżeli macierze A i B są podobne, to macierze wielomianowe $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są równoważne. Jeżeli macierze A i B są podobne, czyli spełniają zależność (1), to

$$[sI - B] = \left[sI - P^{-1}AP\right] = P^{-1}[sI - A]P$$

Zależność ta jest szczególnym przypadkiem (dla $L(s) = P^{-1}$ i $P(s) = P$) zależności (7.2). Macierze wielomianowe $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są więc równoważne. Wykażemy z kolei, że jeżeli macierze $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są równoważne, to macierze A i B są podobne. Zakładając, że macierze $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są równoważne, mamy

(10.3) $$[sI - B] = L(s)[sI - A]P(s)$$

przy czym $L(s)$ i $P(s)$ są macierzami unimodularnymi. Wyznacznik macierzy $L(s)$ jest różny od zera i nie zależy od zmiennej s. Wobec tego macierz odwrotna

$$Q(s) = L^{-1}(s)$$

jest również macierzą wielomianową unimodularną. Dzieląc lewostronnie macierz $Q(s)$ przez $[sI - A]$ oraz prawostronnie macierz $P(s)$ przez $[sI - B]$ otrzymamy

(10.4) $$Q(s) = [sI - A]Q_1(s) + Q_0$$

(10.5) $$P(s) = P_1(s)[sI - B] + P_0$$

przy czym $Q_1(s)$ i $P_1(s)$ są macierzami wielomianowymi, a macierze Q_0 i P_0 nie zależą od zmiennej s. Po pomnożeniu lewostronnie równania (3) przez $Q(s) = L^{-1}(s)$ otrzymamy

(10.6) $$Q(s)[sI - B] = [sI - A]P(s)$$

a po podstawieniu zależności (4) i (5)

(10.7) $$[sI - A][Q_1(s) - P_1(s)][sI - B] = [sI - A]P_0 - Q_0[sI - B]$$

Zauważmy, że musi zachodzić równość

(10.8) $$Q_1(s) = P_1(s)$$

gdyż w przeciwnym wypadku lewa strona równości (7) byłaby wielomianem macierzowym stopnia co najmniej drugiego, a prawa strona – wielomianem macierzowym stopnia co najwyżej pierwszego. Po uwzględnieniu równości (8) z zależności (7) otrzymujemy

(10.9) $$Q_0[sI - B] = [sI - A]P_0$$

Dzielimy lewostronnie macierz $L(s)$ przez $[sI - B]$ i otrzymujemy

(10.10) $$L(s) = [sI - B]L_1(s) + L_0$$

przy czym $L_1(s)$ jest macierzą wielomianową, a L_0 – macierzą niezależną od zmiennej s.

Wykażemy, że macierze Q_0 i L_0 są macierzami nieosobliwymi, spełniającymi warunek

(10.11) $$Q_0 L_0 = I$$

Podstawiając zależności (4) i (10) do równości

$$Q(s)L(s) = I$$

otrzymamy

(10.12)
$$I = Q(s)L(s) = [(sI - A)Q_1(s) + Q_0][(sI - B)L_1(s) + L_0] =$$

$$= [sI - A]Q_1(s)[sI - B]L_1(s) + Q_0[sI - B]L_1(s) + [sI - A]Q_1(s)L_0 + Q_0 L_0$$

Zauważmy, że równość ta może być spełniona tylko wtedy, gdy

(10.13) $$[sI - A]Q_1(s)[sI - B]L_1(s) + Q_0[sI - B]L_1(s) + [sI - A]Q_1(s)L_0 = 0$$

W przeciwnym przypadku lewa strona równości (12) byłaby wielomianem macierzowym stopnia zerowego, a prawa strona – wielomianem macierzowym stopnia co najmniej pierwszego. Po uwzględnieniu równości (13) z zależności (12) otrzymamy równość (11).
Z równości tej wynika natychmiast nieosobliwość macierzy Q_0 i L_0 oraz równość $L_0 = Q_0^{-1}$.
Mnożąc lewostronnie równanie (9) przez Q_0^{-1}, otrzymamy

$$[sI - B] = L_0[sI - A]P_0$$

oraz

$$B = L_0 A P_0, \quad L_0 P_0 = I$$

Z zależności tych wynika, że macierze A i B są podobne.

■

Twierdzenie 1.10.3. Macierze A i B są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $[sI - A]$ i $[sI - B]$ mają te same wielomiany inwariantne.

Dowód. Zgodnie z wnioskiem 8.1 dwie macierze są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same wielomiany inwariantne. Z twierdzenia 2 natomiast wynika, że macierze wielomianowe $[sI - A]$ i $[sI - B]$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A i B są podobne. Zatem macierze A i B są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $[sI - A]$ i $[sI - B]$ mają te same wielomiany inwariantne.

■

1.11. Wyznaczanie postaci kanonicznych Frobeniusa i Jordana macierzy

1.11.1. Wyznaczanie postaci kanonicznych Frobeniusa macierzy kwadratowej

Weźmy pod uwagę macierze o wymiarach $n \times m$ i postaci

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \overline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \hdashline 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(11.1)

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{F} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdashline -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

O macierzach (1) mówimy, że mają postacie kanoniczne Frobeniusa (lub normalne).
Rozwijając według wiersza (lub kolumny) zawierającego $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, łatwo wykazać, że

(11.2)
$$\det[I_n s - F] = \det[I_n s - \overline{F}] = \det[I_n s - \hat{F}] = \det[I_n s - \widetilde{F}] = \\ = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Wykażemy, że wielomian (2) jest jedynym różnym od 1 wielomianem inwariantnym macierzy (1). Szczegółowe rozważania przeprowadzimy tylko dla macierzy F. Dowód w pozostałych trzech wypadkach jest analogiczny.
Po wykreśleniu w macierzy

(11.3)
$$[I_n s - F] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

pierwszej kolumny i n-tego wiersza otrzymamy minor M_{n1} równy $(-1)^{n-1}$. Wobec tego największy wspólny dzielnik wszystkich minorów stopnia n-1 tej macierzy jest równy 1, tj. $D_{n-1}(s) = 1$. Z zależności (8.4) wynika więc, że wielomian (2) jest jedynym wielomianem różnym od 1 macierzy F.

Niech $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, a wielomiany moniczne

$$i_1(s) = 1, \ \dots, \ i_p(s) = 1, \quad i_{p+1}(s), \ \dots, \ i_n(s)$$

będą wielomianami inwariantnymi macierzy wielomianowej $[I_n s - A]$ przy czym $i_{p+1}(s), \ \dots, \ i_n(s)$ są wielomianami co najmniej stopnia pierwszego takimi, że $i_k(s)$ dzieli bez reszty $i_{k+1}(s)$ $(k = p+1, \dots, n-1)$. Macierz $[sI - A]$ sprowadzona do postaci kanonicznej Smitha ma więc postać

(11.4)
$$[sI - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i_{p+1}(s) & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & i_n(s) \end{bmatrix}$$

Niech $F_{p+1}, \dots, F_n$ będą macierzami o postaci (1), odpowiadającymi wielomianom niezmienniczym $i_{p+1}(s), \ \dots, \ i_n(s)$. Z rozważań p. 10 wynika, że macierz quasi-diagonalna

(11.5)
$$F_A = \begin{bmatrix} F_{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{p+2} & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & F_n \end{bmatrix}$$

oraz A mają te same wielomiany inwariantne. Zgodnie z twierdzeniem 10.2, macierze A i F_A są więc podobne. Istnieje zatem taka nieosobliwa macierz P, że

$$A = PF_AP^{-1} \tag{11.6}$$

Macierz F_A określoną wzorem (5) nazywamy postacią kanoniczną Frobeniusa lub normalną macierzy kwadratowej A.
Zostało więc udowodnione następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 1.11.1. Dla każdej macierzy $A \in C^{n \times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in C^{n \times n}$ taka, że zachodzi równość (6).

Przykład 1.11.1. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

Wykonując działania elementarne: $P[1+2\times(s-1)]$, $L[2+1\times(s-1)]$, $P[3+1\times(-s+2)]$, $L[2\times(-1)]$, $L[2+3\times(s-1)^2]$, $L[1\times(-1)]$, $L[2,3]$, $L[1,2]$ na macierzy

$$[sI_3 - A] = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

przekształcamy macierz tę do postaci kanonicznej Smitha

$$[sI_3 - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2(s-2) \end{bmatrix}$$

Macierz A ma więc tylko jeden wielomian inwariantny różny od jedności

$$i_3(s) = (s-1)^2(s-2) = s^3 - 4s^2 + 5s - 2$$

Wobec tego, postać kanoniczna Frobeniusa macierzy (7) jest następująca

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

1.11.2. Wyznaczanie postaci kanonicznej Jordana macierzy kwadratowej

Weźmy pod uwagę dzielnik elementarny w postaci

$$(s - s_0)^m \tag{11.9}$$

Wykażemy, że wielomian (9) jest jedynym dzielnikiem elementarnym macierzy kwadratowej w postaci

$$J = J(s_1^0, m) = \begin{bmatrix} s_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_0 \end{bmatrix} \in C^{m \times m} \tag{11.10a}$$

lub

$$J' = J'(s_1^0, m) = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & s_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & s_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_0 \end{bmatrix} \in C^{m \times m} \tag{11.10b}$$

Wyznacznik macierzy wielomianowej

$$[sI_m - J] = \begin{bmatrix} s-s_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s-s_0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & s-s_0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s-s_0 \end{bmatrix} \tag{11.11}$$

jest równy wielomianowi (9).

Minor M_{n_1} macierzy (11) otrzymamy po wykreśleniu pierwszej kolumny i m-tego wiersza; jest on równy $(-1)^{m-1}$. Wobec tego największy wspólny dzielnik wszystkich minorów stopnia m-1 macierzy (11) jest równy 1, $D_{m-1}(s)=1$. Z zależności (8.4) wynika, że wielomian (9) jest jedynym różnym od 1 wielomianem inwariantnym macierzy (11). Dowód dla macierzy J' jest analogiczny.

Macierz J lub J' nazywamy klatką Jordana pierwszego rodzaju i odpowiednio drugiego rodzaju.

Jeżeli jednej wartości własnej odpowiada q dzielników elementarnych, to tej samej wartości własnej odpowiada q klatek Jordana. Klatki te tworzą macierz quasi-diagonalną, którą nazywamy blokiem odpowiadającym tej wartości własnej.
Niech $J_1, J_2, ..., J_p$ będą klatkami Jordana o postaci (10a) (lub (10b)), odpowiadającymi elementarnym dzielnikom macierzy A, przy czym p jest liczbą dzielników elementarnych tej macierzy. Zauważmy, że wszystkie te elementarne dzielniki macierzy A są również dzielnikami elementarnymi macierzy quasi-diagonalnej o postaci

(11.12)
$$J_A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_p \end{bmatrix} \in C^{n\times n}$$

Macierze mające te same dzielniki elementarne mają również te same wielomiany inwariantne. Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 10.2, macierze A i J_A, jako macierze mające te same wielomiany inwariantne, są podobne. Istnieje zatem taka nieosobliwa macierz T, że

(11.13)
$$A = TJ_AT^{-1}$$

Macierz (12) nazywamy postacią kanoniczną Jordana macierzy A, lub krótko – macierzą Jordana. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.11.2. Dla każdej macierzy $A \in C^{n\times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $T \in C^{n\times n}$ taka, że zachodzi równość (13).

Jeśli wszystkie dzielniki elementarne macierzy A są stopnia pierwszego (w zależności (9) $m=1$), to macierz Jordana przyjmuje postać macierzy diagonalnej. Mamy więc następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.11.1. Macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej złożonej z wartości własnych tej macierzy wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej dzielniki elementarne są dzielnikami stopnia pierwszego.

Przykład 1.11.2. Macierz (7) ma tylko jeden wielomian inwariantny różny od jedności, równy $i(s)=(s-1)^2(s-2)$. Wobec tego macierz ta ma dwa dzielniki elementarne $(s-1)^2$ i $(s-2)$. Postać kanoniczna Jordana macierzy (7) jest więc równa

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.12. Wyznaczanie macierzy przekształceń przez podobieństwo

1.12.1. Metoda par macierzy

Dana jest macierz cykliczna $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ oraz jej postać Frobeniusa F_A. Należy wyznaczyć macierz nieosobliwą $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ taką, że

(12.1)
$$PAP^{-1} = F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dla danej macierzy A dobieramy macierz wierszową $c \in \boldsymbol{R}^{1\times n}$ tak, aby

(12.2)
$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0$$

Prawie każda macierz c wybrana na „chybił trafił" będzie spełniać warunek (2), gdyż w przestrzeni parametrów elementy macierzy c niespełniające tego warunku leżą na płaszczyźnie.
Macierz P wybieramy tak, aby był spełniony warunek (1) oraz

(12.3) $$cP^{-1} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \boldsymbol{R}^{1\times n}$$

Niech p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ będzie i-tym wierszem macierzy P. Korzystając z (1) i (3), możemy napisać

(12.4)
$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \text{ oraz } c = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie wiersze z (4), otrzymamy

(12.5) $$p_1 = c,\ p_2 = p_1 A,\ p_3 = p_2 A, \cdots,\ p_n = p_{n-1} A$$

Korzystając z zależności (5) możemy wyznaczyć poszukiwane wiersze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ macierzy P.

Mamy wiec następującą procedurę wyznaczania macierzy P.

Procedura 1.12.1.
Krok 1. Obliczamy współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ wielomianu

(12.6) $$\det[I_n s - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Krok 2. Znając a_0, a_1, ..., a_{n-1}, wyznaczamy macierz F_A.
Krok 3. Wybieramy $c \in \boldsymbol{R}^{1\times n}$ tak, aby był spełniony warunek (2).
Krok 4. Korzystając z zależności (5), wyznaczamy wiersze $p_1, p_2, \ldots, p_n$ macierzy P.

Przykład 1.12.1. Dana jest macierz cykliczna w postaci:

(12.7) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Należy wyznaczyć macierz P przekształcającą tę macierz przez podobieństwo do postaci kanonicznej Frobeniusa F_A.

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wielomian charakterystyczny macierzy (7) ma postać:

(12.8) $$\det[I_n s - A] = \begin{vmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)(s-1)^2 = s^3 - 4s^2 + 5s - 2$$

Krok 2. Macierz F_A ma więc postać

(12.9) $$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Wybieramy $c = [1 \quad 0 \quad 1]$, które spełnia warunek (2), gdyż

$$\det \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

Krok 4. Korzystając z zależności (5) otrzymamy

$$p_1 = c = [1 \quad 0 \quad 1],\quad p_2 = p_1 A = [0 \quad 1 \quad 2],\quad p_3 = p_2 A = [-2 \quad 1 \quad 4]$$

Poszukiwana macierz P ma więc postać

(12.10) $$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Jeżeli poszukujemy macierzy $\overline{P}$ spełniającej warunek

(12.11) $$\overline{P}^{-1}A\overline{P} = \overline{F}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

to wygodnie jest wybrać macierz kolumnową $b \in \boldsymbol{R}^n$ tak, aby

(12.12) $$\det[b, Ab, \cdots, A^{n-1}b] \neq 0$$

Niech $\overline{p}_i$ $(i = 1, ..., n)$ będzie i-tą kolumną macierzy $\overline{P}$. Korzystając z (11) oraz $\overline{P}^{-1}b = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \in \boldsymbol{R}^n$, możemy napisać

(12.13) $$A[\overline{p}_1 \quad \overline{p}_2 \quad \cdots \quad \overline{p}_n] = [\overline{p}_1 \quad \overline{p}_2 \quad \cdots \quad \overline{p}_n]\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$b = [\overline{p}_1 \quad \overline{p}_2 \quad \cdots \quad \overline{p}_n]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wykonując mnożenie i porównując odpowiednie kolumny z (13), otrzymamy

(12.14) $$\overline{p}_1 = b, \overline{p}_2 = A\overline{p}_1, \overline{p}_3 = A\overline{p}_2, \cdots, \overline{p}_n = A\overline{p}_{n-1}$$

Korzystając z zależności (14), możemy wyznaczyć kolejno kolumny $\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n$ macierzy $\overline{P}$. Mamy więc następującą procedurę wyznaczania macierzy $\overline{P}$.

Procedura 1.12.2.
Krok 1. Jest taki sam jak w procedurze 1.
Krok 2. Znając współczynniki $a_0, a_1, ..., a_n$ wielomianu (6), wyznaczamy macierz $\overline{F}_A$.
Krok 3. Wybieramy $b \in \boldsymbol{R}^n$ tak, aby był spełniony warunek (12).
Krok 4. Korzystając z zależności (14), wyznaczamy kolumny $\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_n$ macierzy $\overline{P}$.

Przykład 1.12.2. Dla macierzy (7) należy wyznaczyć macierz $\overline{P}$ przekształcającą tę macierz do postaci kanonicznej $\overline{F}_A$.

Korzystając z procedury 2, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Wielomian charakterystyczny macierzy (7) ma postać (8).
Krok 2. Macierz $\overline{F}_A$ ma więc postać

(12.15) $$\overline{F}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Wybieramy $b = [0 \quad 1 \quad -1]^T$, które spełnia warunek (12), gdyż

$$\det[b, Ab, A^2b] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 2$$

Krok 4. Korzystając z zależności (14), otrzymamy

$$\overline{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overline{p}_2 = A\overline{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \overline{p}_3 = A\overline{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Poszukiwana macierz ma wiec postać

$$\overline{P} = [\overline{p}_1 \quad \overline{p}_2 \quad \overline{p}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Powyższe rozważania można uogólnić na pozostałe postacie kanoniczne Frobeniusa $\hat{F}_A$ i $\widetilde{F}_A$ macierzy A.

1.12.2. Metoda działań elementarnych

Podstawiając w zależnościach (10.5) i (10.10) zamiast zmiennej s macierz B, otrzymamy

(12.16) $$P(B) = P_0,\ L(B) = L_0$$

Z zależności $B = L_0 A P_0$ wynika więc, że jeżeli macierze A i B są podobne, tzn. $B = P^{-1}AP$, to macierz przekształcenia P jest określona zależnością

(12.17) $$P = P(B) = [L(B)]^{-1}$$

przy czym $P(s)$ i $L(s)$ są macierzami unimodularnymi występującymi w równości

(12.18) $$[sI - B] = L(s)[sI - A]P(s)$$

Aby wyznaczyć macierz $P(s)$, stosując działania elementarne, sprowadzamy macierze $[sI - A], [sI - B]$ do postaci kanonicznych Smitha

(12.19) $$[sI - A]_S = L_1(s)[sI - A]P_1(s)$$

(12.20) $$[sI - B]_S = L_2(s)[sI - B]P_2(s)$$

przy czym

(12.21) $$P_1(s) = P_{11}(s)P_{12}(s)...P_{1k_1}(s)$$

(12.22) $$P_2(s) = P_{21}(s)P_{22}(s)...P_{2k_2}(s)$$

a $P_{11}(s), P_{12}(s),..., P_{1k_1}(s)$ i $P_{21}(s), P_{22}(s),..., P_{2k_2}(s)$ są macierzami działań elementarnych wykonywanych na kolumnach odpowiednio macierzy $[sI - A]$ i $[sI - B]$. Macierze $L_1(s)$ i $L_2(s)$ określamy analogicznie. Z podobieństwa macierzy A i B wynika

$$[sI - A]_S = [sI - B]_S$$

a uwzględniając zależności (19) i (20) mamy:

$$L_2(s)[sI - B]P_2(s) = L_1(s)[sI - A]P_1(s)$$

czyli

(12.23) $$[sI - B] = L_2^{-1}(s)L_1(s)[sI - A]P_1(s)P_2^{-1}(s)$$

Z porównania zależności (18) i (23) oraz (21) i (22) mamy:

(12.24) $$P(s) = P_1(s)P_2^{-1}(s) = P_{11}(s)P_{12}(s)...P_{1k_1}(s)P_{2k_2}^{-1}(s)...P_{22}^{-1}(s)P_{21}^{-1}(s)$$

Macierz $P(s)$ wyznaczamy więc poddając macierz jednostkową kolejno działaniom elementarnym określonym macierzami

$$P_{11}(s),\ P_{12}(s),\ ...,\ P_{1k_1}(s),\ P_{2k_2}^{-1}(s),\ ...,\ P_{22}^{-1}(s),\ P_{21}^{-1}(s)$$

Przy wyznaczaniu macierzy odwrotnych macierzy działań elementarnych korzystamy z następujących zależności:

(12.25) $$P^{-1}[i \times c] = P\left[i \times \frac{1}{c}\right],\ P^{-1}[i + j \times b(s)] = P[i - j \times w(s)]$$
$$P^{-1}[i, j] = P[j, i] = P[i, j]$$

Z powyższych rozważań wynika następujący algorytm wyznaczania macierzy P.

Algorytm 1.12.1.
Krok 1. Przekształcając macierze $[sI - B]$, $[sI - A]$ do postaci kanonicznych Smitha wyznaczamy ciąg działań elementarnych określonych macierzami

$$P_{11}(s),\ P_{12}(s),\ ...,\ P_{1k_1}(s),\ P_{21}(s),\ P_{22}(s),\ ...,\ P_{2k_2}(s).$$

Krok 2. Poddając macierz jednostkową kolejno działaniom elementarnym określonym przez macierze $P_{11}(s),\ P_{12}(s),\ ...,\ P_{1k_1}(s),\ P_{2k_2}^{-1}(s),\ ...,\ P_{22}^{-1}(s),\ P_{21}^{-1}(s)$, wyznaczamy macierz $P(s)$.
Krok 3. Podstawiając w macierzy $P(s)$ w miejsce zmiennej s macierz B, wyznaczamy poszukiwaną macierz $P = P(B)$.

Przykład 1.12.3. Wyznaczyć macierz P przekształcającą macierz (11.7) do postaci kanonicznej Frobeniusa (11.8).

W tym wypadku macierzą B jest macierz F_A.

Krok 1. Aby macierz

$$sI - F_A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & 5 & s-4 \end{bmatrix}$$

sprowadzić do postaci kanonicznej Smitha

$$[sI - F_A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2(s-2) \end{bmatrix}$$

należy wykonać następujące działania elementarne

$L[3+2\times(s-4)]$, $P[2+3\times(s)]$, $P[1+2\times(s)]$, $L[3+1\times(s^2-4s+5)]$, $L[1\times(-1)]$, $L[2\times(-1)]$, $P[2,3]$, $P[1,2]$.

Krok 2. W przykładzie 11.1, aby sprowadzić macierz $[I_n s - A]$ do postaci kanonicznej Smitha, należało wykonać następujące działania elementarne:

$$P[1+2\times(s-1)],\ L[2+1\times(s-1)],\ P[3+1\times(2-s)],\ L[2\times(-1)],$$
$$L[2+3\times(s-1)^2],\ L[1\times(-1)],\ L[2,3],\ L[1,2]$$

Aby wyznaczyć macierz $P(s)$, należy więc na kolumnach macierzy jednostkowej stopnia trzeciego wykonać następujące działania elementarne:

$P[1+2\times(s-1)]$, $P[3+1\times(2-s)]$, $P[2,3]$, $P[1,2]$, $P[1+2\times(-s)]$, $P[2+3\times(-1)]$.

Wówczas otrzymamy:

$$P(s) = \begin{bmatrix} 2(1-s) & 1 & 0 \\ -2(s-1)^2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Podstawiamy w tej macierzy w miejsce zmiennej s macierz

$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ otrzymamy:

$$P = P(F_A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz ta przekształca macierz (11.7) do postaci normalnej F_A.

1.12.3. Metoda wektorów własnych

Niech dana będzie macierz $A \in C^{n\times n}$ oraz jej postać kanoniczna Jordana (11.12), zawierająca p klatek o postaci (11.10a). Niech i-ta klatka, odpowiadająca wartości własnej s_i, ma wymiary $m_i \times m_i$ $(i = 1, \dots, p)$. Należy wyznaczyć macierz

(12.26) $$T = [T_1\ T_2 \dots T_p],\quad T_i = [t_{i1}\ t_{i2} \dots t_{im_i}]$$

spełniającą zależność (11.13).
Mnożąc prawostronnie (11.13) przez T otrzymamy

$$AT = TJ_A$$

a po uwzględnieniu (26), (11.10) i (11.12)

$$AT_i = T_i J_i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,p$$

oraz

(12.27) $$[A - Is_i]t_{i1} = 0,\ [A - Is_i]t_{i2} = t_{i1},\ \dots,\ [A - Is_i]t_{im_i} = t_{i,m_i-1},\ i = 1,\dots,p$$

Dla wartości własnej s_i z pierwszego spośród równań (27) wyznaczamy kolumnę t_{i1}, znając t_{i1} obliczamy z drugiego równania kolumnę t_{i2} i wreszcie z ostatniego z tych równań wyznaczamy kolumnę t_{im_i}.
Powtarzając te obliczenia kolejno dla $i = 1, 2, \dots, p$ otrzymamy poszukiwaną macierz (26).

Przykład 1.12.4. Wyznaczyć macierz T przekształcającą macierz

$$(12.28)\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

do jej postaci kanonicznej Jordana

$$(12.29)\qquad J_A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Z (29) wynika, że macierz (28) ma jedną wartość własną potrójną $s_1=2$ oraz jedną wartość własną pojedynczą $s_2=1$.
W tym wypadku poszukiwana macierz (26) ma postać

$$T=[T_1\ T_2]=[t_{11}\ t_{12}\ t_{13}\ t_{21}]$$

Równania (27) dla $i=1$ przyjmują postać

$$[A-Is_1]t_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}t_{11}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$[A-Is_1]t_{12}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}t_{12}=t_{11},\quad [A-Is_1]t_{13}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}t_{13}=t_{12}$$

a dla $i=2$

$$[A-Is_2]t_{21}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}t_{21}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Rozwiązując kolejno te równania otrzymamy

$$t_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad t_{12}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad t_{13}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad t_{21}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

oraz poszukiwaną macierz w postaci

$$T=[t_{11}\ t_{12}\ t_{13}\ t_{21}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Jeżeli klatki mają postać (11.10b), rozważania są analogiczne.

1.13. Macierze prostej struktury i diagonalizacja macierzy

1.13.1. Macierze prostej struktury

Weźmy pod uwagę macierz $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, której wielomian charakterystyczny ma postać

$$(13.1)\qquad \psi(\lambda)=\det[I_n\lambda-A]=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots..+a_1\lambda+a_0$$

Pierwiastki $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ $(p\le n)$ równania $\psi(\lambda)=0$ nazywamy wartościami własnymi macierzy A, a zbiór tych wartości własnych widmem tej macierzy.

Definicja 1.13.1. Mówimy, że wartość własna λ_i ma krotność algebraiczną n_i, jeżeli λ_i jest n_i krotnym pierwiastkiem równania $\psi(\lambda)=0$, tzn.

$$(13.2)\qquad \psi(\lambda_i)=\psi'(\lambda_i)=\dots.=\psi^{(n_i-1)}(\lambda_i)=0,\ \text{ale}\ \psi^{(n_i)}(\lambda_i)\neq 0,\ i=1,\dots,p$$

gdzie $\psi^{(k)}(\lambda)=\frac{d^k\psi(\lambda)}{d\lambda^k}$, czyli

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_p)^{r_p} \tag{13.3}$$

Mówimy, że wartość własna λ_i ma krotność geometryczną m_i, jeżeli

$$\text{rząd}\,[I_n\lambda_i-A]=n-m_i, \quad i=1,\ldots,p. \tag{13.4}$$

Z postaci kanonicznej Jordana macierzy A wynika, że $n_i \geq m_i$ dla $i=1,\ldots,p$.

Definicja 1.13.2. Macierz $A\in C^{n\times n}$, dla której $n_i=m_i$ dla $i=1,\ldots,p$ nazywamy macierzą prostej struktury. W przeciwnym wypadku mówimy, że macierz ma strukturę złożoną.

Na przykład macierz

$$A=\begin{bmatrix}2 & a\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{13.5}$$

dla a=0 jest macierzą prostej struktury, gdyż $n_1=m_1=2$, a dla $a\neq 0$ jest macierzą złożonej struktury, gdyż $n_1=2$; $m_1=1$ (rząd $[I_2 2-A]=1$).

Twierdzenie 1.13.1. Macierze podobne $A\in C^{n\times n}$ i $B=PAP^{-1}$, $\det P\neq 0$ mają wartości własne o tych samych krotnościach algebraicznych i geometrycznych.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 10.1 macierze podobne A i B mają równe wielomiany charakterystyczne, tzn.

$$\det[I_n\lambda-A]=\det[I_n\lambda-B] \tag{13.6}$$

Równość (6) oznacza, że macierze A i B mają te same wartości własne o tych samych krotnościach algebraicznych.
Z zależności

$$\text{rząd}\,[I_n\lambda_i-B]=\text{rząd}\,[P[I_n\lambda_i-A]P^{-1}]=\text{rząd}\,[I_n\lambda_i-A] \text{ dla } i=1,\ldots,p \tag{13.7}$$

wynika równość krotności geometrycznej macierzy A i B.

■

Ze struktury postaci kanonicznej Jordana oraz zależności (4) wynika następujący ważny wniosek

Wniosek 1.13.1. Krotność geometryczna m_i wartości własnej λ_i, $i=1,\ldots,p$ macierzy A jest równa liczbie klatek odpowiadających tej wartości własnej.

Twierdzenie 1.13.2. Macierz $A\in C^{n\times n}$ jest macierzą prostej struktury wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej dzielniki elementarne są dzielnikami stopnia pierwszego.

Dowód. Zgodnie z wnioskiem 11.1 macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej złożonej z wartości własnej tej macierzy wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej dzielniki elementarne są dzielnikami pierwszego stopnia. W tym wypadku

$$\text{rząd}\,[I_n\lambda_i-A]=n-n_i \text{ dla } i=1,\ldots,p \tag{13.8}$$

Wobec tego $m_i=n_i$ dla $i=1,\ldots,p$ i macierz A jest macierzą prostej struktury wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej dzielniki są dzielnikami pierwszego stopnia.

■

Przykład 1.13.1. Macierz (5) jest macierzą prostej struktury wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$, gdyż postać kanoniczna Smitha macierzy

$$[I_2 s-A]=\begin{bmatrix}s-2 & -a\\ 0 & s-2\end{bmatrix}$$

jest równa

$$[I_2 s-A]_s=\begin{bmatrix}s-2 & 0\\ 0 & s-2\end{bmatrix} \quad \text{dla } a=0$$

$$[I_2 s-A]_s=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s-2)^2\end{bmatrix} \quad \text{dla } a\neq 0$$

Dla $a=0$ macierz (5) ma więc dwa dzielniki elementarne stopnia pierwszego, dla $a\neq 0$ jeden dzielnik elementarny $(s-2)^2$. Zgodnie z twierdzeniem 2 macierz (5) jest zatem macierzą prostej struktury wtedy i tylko wtedy, gdy a=0.

1.13.2. Diagonalizacja macierzy prostej struktury

Twierdzenie 1.13.3 Dla każdej macierzy $A \in C^{n \times n}$ prostej struktury istnieje macierz nieosobliwa $P \in C^{n \times n}$ taka, że

(13.9) $$P^{-1}AP = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$$

przy czym niektóre wartości własne λ_i, $i = 1, ..., p$ mogą być równe.

Dowód. Z faktu, że A jest macierzą prostej struktury wynika, że każdej wartości własnej λ_i odpowiada tyle wektorów własnych P_i, ile wynosi krotność tej wartości własnej

(13.10) $$AP_i = \lambda_i P_i \quad \text{dla } i = 1, ..., n$$

Wektory własne $P_1, P_2, ..., P_n$ są liniowo niezależne. Wobec tego macierz $P = [P_1, P_2, ..., P_n]$ jest nieosobliwa.
Z zależności (10) dla $i = 1, ..., n$ mamy

(13.11) $$AP = P \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$$

Mnożąc lewostronnie (11) przez P^{-1}, otrzymamy (9).

■

W przypadku szczególnym, gdy macierz A ma różne wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, z twierdzenia 3 wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.13.2. Każdą macierz $A \in C^{n \times n}$ o różnych wartościach własnych $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ można przekształcić przez podobieństwo do postaci diagonalnej $\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$.

Wektory własne $P_1, P_2, ..., P_n$ wyznaczamy rozwiązując równanie

(13.12) $$[I_n\lambda_i - A]P_i = 0 \quad \text{dla } i = 1, ..., n$$

lub biorąc za P_i dowolną niezerową kolumnę macierzy dołączonej macierzy

$$[I_n\lambda_i - A]$$

Z definicji macierzy odwrotnej $[I_n\lambda - A]^{-1} = \dfrac{[I_n\lambda - A]_{ad}}{\det[I_n\lambda - A]}$ mamy

(13.13) $$[I_n\lambda - A][I_n\lambda - A]_{ad} = I_n \det[I_n\lambda - A]$$

Podstawiając w (13) $\lambda = \lambda_i$ i uwzględniając, że $\det[I_n\lambda_i - A] = 0$ otrzymamy

(13.14) $$[I_n\lambda_i - A][I_n\lambda_i - A]_{ad} = 0 \quad \text{dla } i = 1, ..., p$$

Z (14) wynika, że każda niezerowa kolumna macierzy dołączonej $[I_n\lambda_i - A]_{ad}$ jest wektorem własnym wartości własnej λ_i macierzy A.

Przykład 1.13.2. Wyznaczyć macierz P przekształcającą macierz

(13.15) $$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

do postaci diagonalnej.

Równanie charakterystyczne macierzy (15)

$$\det[\lambda I_n - A] = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda + \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda_3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

ma trzy pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. Aby wyznaczyć wektory własne P_1, P_2, P_3, wyznaczamy macierz dołączoną

(13.16) $$[I_n\lambda - A]_{ad} = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \frac{9}{2}\lambda + \frac{9}{2} & -\frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} & \lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda + \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \\ \lambda + 2 & -\lambda - 2 & \lambda^2 + 4\lambda + 4 \end{bmatrix}$$

Za wektory własne P_1, P_2, P_3 macierzy (15) przyjmujemy trzecią kolumnę macierzy dołączonej kolejno dla $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$. Macierz utworzona z tych wektorów (po pomnożeniu trzeciej kolumny dla $\lambda_2 = -2$ przez 2) ma postać

$$P = [P_1, P_2, P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jej macierz odwrotna

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wobec tego

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.13.3. Wyznaczyć macierz P sprowadzającą macierz

(13.17) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

do postaci diagonalnej.

Równanie charakterystyczne macierzy (17)

$$\det[I_3\lambda - A] = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

ma jeden pierwiastek podwójny $\lambda_1 = 2$ oraz jeden pierwiastek jednokrotny $\lambda_2 = 1$. Macierz (17) jest macierzą prostej struktury, gdyż

$$\text{rząd}\,[I_3\lambda_1 - A] = \text{rząd}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Wobec tego macierz (17) można sprowadzić do postaci diagonalnej, stosując przekształcenie przez podobieństwo.

Z równania

$$[I_3\lambda_1 - A]P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P_i = 0 \quad (i = 1,2)$$

wynika, że za wektory P_1 i P_2 można przyjąć

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując równanie

$$[I_3\lambda_2 - A]P_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} P_3 = 0$$

otrzymamy $P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wobec tego

$$P = [P_1, P_2, P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.13.3. Diagonalizacja dowolnej macierzy kwadratowej za pomocą macierzy o zmiennych elementach

Niech dana będzie macierz kwadratowa A oraz macierz diagonalna Λ tego samego stopnia. Wykażemy, że dowolną macierz A można przekształcić do postaci diagonalnej Λ, korzystając z przekształcenia macierzy o zmiennych elementach.

Twierdzenie 1.13.4. Dla dowolnej macierzy $A \in C^{n \times n}$ i danej macierzy diagonalnej $\Lambda \in C^{n \times n}$ istnieje macierz nieosobliwa

(13.18) $$T = T(t) = e^{(A-\Lambda)t}$$

taka, że

(13.19) $$(AT - \dot{T})T^{-1} = \Lambda$$

Dowód. Z postaci (18) wynika, że macierz ta jest nieosobliwa dla dowolnych macierzy A i Λ. Biorąc pod uwagę, że

$$\dot{T} = (A - \Lambda)e^{(A-\Lambda)t} = (A - \Lambda)T$$

otrzymamy

$$\left(AT - \dot{T}\right)T^{-1} = \left(AT - (A - \Lambda)T\right)T^{-1} = \Lambda .$$

■

Przykład 1.13.4. Wyznaczyć macierz T przekształcającą macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

do postaci diagonalnej

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że dana macierz A ma postać kanoniczną Jordana i za pomocą przekształcenia przez podobieństwo (o macierzy P ze stałymi elementami) nie można jej przekształcić do postaci diagonalnej, gdyż nie jest macierzą prostej struktury.

Korzystając ze wzoru (18) obliczamy

$$T = e^{(A-\Lambda)t} = \exp\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; \dot{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

łatwo sprawdzić, że

$$\Lambda = \left(AT - \dot{T}\right)T^{-1} = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 2t+1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rozważania te można uogólnić na przypadek macierzy $A(t)$ o elementach zależnych od czasu t.

Wykażemy, że macierz kwadratową $A(t)$ stopnia n o elementach będących ciągłymi funkcjami czasu t można przekształcić do postaci diagonalnej

(13.20) $$A(t) = \mathrm{diag}\left[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\right]$$

Niech macierz $\phi(t)$ będzie rozwiązaniem macierzowego równania różniczkowego

(13.21) $$\dot{\phi}(t) = A(t)\,\phi(t)$$

spełniającym np. warunek początkowy $\phi(0) = I_n$.
Niech

(13.22) $$T(t) = \phi(t)e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}$$

Jak wiadomo, macierz (22) jest macierzą nieosobliwą dla każdego $t \geq 0$.

Wykażemy, że macierz (22) spełnia równanie

(13.23) $$\dot{T}(t) = A(t)T(t) - T(t)\lambda(t)$$

Różniczkując macierz (22) względem t i biorąc pod uwagę (21) otrzymamy

$$\dot{T}(t) = \dot{\phi}(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} - \phi(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}\lambda(t) = A(t)\phi(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} - \phi(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}\lambda(t) =$$

$$= A(t)T(t) - T(t)\lambda(t)$$

Z równania (23) mamy

$$\lambda(t) = T^{-1}(t)\left[A(t)T(t) - \dot{T}(t)\right] = \operatorname{diag}\left[\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)\right]$$

Poszukiwana macierz przekształcenia jest więc określona zależnością (22), przy czym macierz $\phi(t)$ jest rozwiązaniem równania (21).

1.14. Proste macierze wielomianowe oraz cykliczne

1.14.1. Proste macierze wielomianowe

Weźmy pod uwagę macierz wielomianową $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times n}[s]$ rzędu $r \le \min(m, n)$.

Definicja 1.14.1 Macierz wielomianową $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times n}$ rzędu r nazywamy prostą wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona tylko jeden wielomian inwarianty różny od 1. Biorąc pod uwagę zależność (8.4), możemy macierz prostą zdefiniować równoważnie jako macierz wielomianową spełniającą warunki

(14.1) $$D_1(s) = D_2(s) = ... = D_{r-1}(s) \text{ oraz } D_r(s) = i_r(s)$$

gdzie $D_k(s)$, $k = 1, ..., r$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k macierzy $A(s)$.

Postać kanoniczna Smitha prostej macierzy $A(s)$ jest więc równa

(14.2) $$A_S(s) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i_r(s) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } n > m = r \\ \operatorname{diag}[1, \cdots, 1, i_r(s)] & \text{dla } n = m = r \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i_r(s) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{dla } m > n = r \end{cases}$$

Twierdzenie 1.14.1. Macierz wielomianowa $A(s) \in \boldsymbol{C}^{m \times n}$ [s] rzędu r jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy

(14.3) $$\text{rząd } A(s_i^0) = r - 1 \quad \text{dla} \quad s_i^0 \in \sigma_A$$

gdzie σ_A jest zbiorem zer macierzy $A(s)$.

Dowód. Rząd normalny macierzy $A(s)$ i jej postaci kanonicznej $A_S(s)$ jest taki sam, czyli rząd $A(s) =$ rząd $A_S(s) = r$. Z zależności (2) wynika, że defekt rzędu macierzy $A(s)$ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy s jest zerem tej macierzy.

■

Z definicji 1 wynika następujący ważny warunek.

Wniosek 1.14.1. Macierz wielomianowa $A(s)$ jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu jej zeru odpowiada tylko jeden dzielnik elementarny.

Przykład 1.14.1. W przykładzie 8.1 wykazano, że macierzy wielomianowej

$$A(s)=\begin{bmatrix}(s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2\\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3\end{bmatrix} \tag{14.4}$$

odpowiada postać kanoniczna Smitha

$$A_S(s)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (s+2)(s+2.5) & 0\end{bmatrix} \tag{14.5}$$

Z postaci (5) wynika, że $i_1(s)=1, i_2(s)=(s+2)(s+2.5)$, a więc macierz (4) jest prosta.
Łatwo sprawdzić, że macierz (4) traci swój pełny rząd równy 2 dla zer $s_1=-2$ i $s_2=-2.5$, gdyż

$$A(-2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ A(-2.5)=\begin{bmatrix}0.25 & -0.25 & -0.5\\ -0.25 & 0.25 & 0.5\end{bmatrix}$$

Ten sam wynik otrzymamy z macierzy (5).

1.14.2. Macierze cykliczne

Weźmy pod uwagę macierz liczbową $A\in C^{n\times m}$.

Definicja 1.14.2. Macierz $A\in C^{n\times m}$ nazywamy cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadająca jej macierz wielomianowa $[I_n s-A]$ jest macierzą prostą.

Weźmy pod uwagę macierze w postaci

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix},\ \overline{F}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

(14.6)

$$\hat{F}=\begin{bmatrix}-a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix},\ \widetilde{F}=\begin{bmatrix}-a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

O macierzach (6) mówimy, że mają one postać kanoniczną Frobeniusa.
Rozwijając wyznacznik według wiersza (lub kolumny) zawierającego $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ łatwo wykazać, że zachodzi równość

$$\begin{aligned}\det[I_n s-F] &= \det[I_n s-\overline{F}]=\det[I_n s-\hat{F}]=\det[I_n s-\widetilde{F}]\\ &= s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0\end{aligned} \tag{14.7}$$

Twierdzenie 1.14.2. Macierze (6) są macierzami cyklicznymi dla dowolnych wartości współczynników $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.

Dowód. Szczegółowo dowód ten przeprowadzimy tylko dla macierzy F, gdyż w pozostałych trzech przypadkach dowód ten jest analogiczny.
Po wykreśleniu z macierzy

$$[I_n s-F]=\begin{bmatrix}s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & s & -1 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & s & -1\\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\end{bmatrix} \tag{14.8}$$

pierwszej kolumny i n-tego wiersza otrzymamy minor M_{n1} równy $(-1)^{n-1}$. Wobec tego największy wspólny dzielnik $D_{n-1}(s)$ wszystkich minorów stopnia n-1-szego macierzy (8) jest równy 1, czyli $D_{n-1}(s)=1$. Warunek (1) jest więc spełniony i macierz F jest macierzą cykliczną.

■

Twierdzenie 1.14.3. Macierz $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ jest cykliczna, jeżeli są spełnione warunki

$$a_{ij}\begin{cases}=0 & \text{dla } j>i+1\\ \neq 0 & \text{dla } j=i+1\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,n \tag{14.9a}$$

lub

(14.9b) $$a_{ij}\begin{cases}=0 & \text{dla } i>j+1\\ \neq 0 & \text{dla } i=j+1\end{cases}\quad i,j=1,\cdots,n$$

Dowód. Jeżeli są spełnione warunki (9a), to po wykreśleniu z macierzy

(14.10) $$[I_n s-A]=\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{21} & s-a_{22} & -a_{23} & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & -a_{n-2,3} & \ddots & s-a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n}\\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & -a_{n,n-1} & s-a_{nn}\end{bmatrix}$$

pierwszej kolumny i n-tego wiersza otrzymamy minor M_{n1} równy $M_{n1}=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}\neq 0$. Wobec tego $D_{n-1}(s)=1$ i warunek (1) jest spełniony. Dowód w przypadku (9b) jest analogiczny. ■

Przykład 1.14.2. Wyznaczyć warunki, przy spełnieniu których macierz

(14.11) $$A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

jest lub nie jest macierzą cykliczną.
Jeżeli $a_{21}\neq 0$, to wykonując działanie elementarne:
$L[1+2\times\frac{1}{a_{21}}(s-a_{11})]$, $L[2\times(-a_{21})]$, $L[1,2]$ i $L[2\times a_{21}]$ na macierzy

$$[I_2 s-A_2]=\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & s-a_{22}\end{bmatrix}$$

otrzymamy jej postać kanoniczną Smitha równą

(14.12) $$[I_2 s-A_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & \varphi(s)\end{bmatrix},$$

$$\varphi(s)=\det[I_2 s-A]=s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Z (12) wynika, że dla $a_{21}\neq 0$ macierz (11) jest macierzą cykliczną dla dowolnych pozostałych jej elementów.
Analogiczny wynik otrzymamy dla $a_{12}\neq 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla $a_{12}=a_{21}=0$ macierz diagonalna $A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & 0\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}$ jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11}\neq a_{22}$.

Twierdzenie 1.14.4. Macierz $A\in C^{n\times n}$ jest macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy każdej jej różnej wartości własnej $s_1, s_2, \dots, s_p$ odpowiada tylko jedna klatka jej postaci kanonicznej Jordana, czyli

(14.13a) $$J_A=\begin{bmatrix} J_{(s_1,n_1)} & 0 & \dots & 0\\ 0 & J_{(s_2,n_2)} & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & J_{(s_p,n_p)}\end{bmatrix}\in C^{n\times n}$$

przy czym

(1.14.13b) $$J(s_k,n_k)=\begin{bmatrix} s_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & s_k & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_k\end{bmatrix}\in C^{n_k\times n_k}$$

lub

$$J(s_k,n_k)=\begin{bmatrix} s_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & s_k & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_k\end{bmatrix}\in C^{n_k\times n_k},\quad k=1,\dots,p$$

Dowód. Macierz wielomianowa

(14.14) $$I_n s-J_A=\operatorname{diag}[I_{n_1}s-J(s_1,n_1),\dots,I_{n_p}s-J(s_p,n_p)]$$

jest macierzą prostą, gdyż

(14.15) $\quad \text{rząd}\,[I_n s - J_A]_{|s=s_k} = n-1 \text{ dla } k=1,...,p$

Zgodnie więc z twierdzeniem 1 i definicją 2 macierz (3) oraz A jest macierzą cykliczną.
Jeżeli jednej wartości własnej s_k odpowiadają przynajmniej dwie klatki, to defekt rzędu macierzy (14) jest większy od 1 i macierz A nie jest macierzą cykliczną.

■

Przykład1.14.3. Z twierdzenia 4 wynika, że macierz

(14.16)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest macierzą cykliczną dla $a \neq 1$. Nie jest natomiast macierzą cykliczną dla $a = 1$, gdyż wartości własnej tej macierzy równej 1 odpowiadają dwie klatki Jordana

$$J(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad J(1,1) = [1]$$

Z twierdzenia 4 dla $J(s_k, n_k) = a_k, n_k = 1,\ k = 1,...,n$ wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.14.1. Macierz diagonalna

(14.17)
$$A = \text{diag}\,[a_1, a_2, ..., a_n] \in C^{n \times n}$$

jest macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie 1.14.5. Niech $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ będą wartościami własnymi o krotnościach odpowiednio $n_1, n_2, ..., n_p$ macierzy $A \in C^{n \times n}$. Macierz ta jest macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy

(14.18) $\quad \text{rząd}\,[I_n\lambda_i - A]^{n_i} = \text{rząd}\,[I_n\lambda_i - A]^{n_i+1} \quad \text{dla } i = 1,...,p$

Dowód. Jak wiadomo przekształcenie przez podobieństwo nie zmienia rzędu macierzy, czyli

(14.19) $\quad \text{rząd}\,[I_n\lambda_i - A]^{n_i} = \text{rząd}\,[I_n\lambda_i - J_A]^{n_i} \quad \text{dla } i = 1,...,p$

gdzie J_A jest postacią kanoniczną Jordana macierzy A.

Biorąc pod uwagę (13.6), łatwo sprawdzić, że

(14.20) $\quad [I_{n_i}\lambda_i - J(\lambda_i, n_i)]^{n_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1,...,p$

Z postaci kanonicznej Jordana J_A macierzy A oraz (20) wynika, że każdej wartości własnej λ_i odpowiada tylko jedna klatka wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (18). Zgodnie z twierdzeniem 4 macierz A jest więc macierzą cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (18).

■

Przykład 1.14.4. Macierz (16) dla $a \neq 1$ ma tylko jedną wartość własną $\lambda_1 = 1$ podwójną (dwukrotną), $n_1 = 2$ oraz jedną wartość własną $\lambda_2 = a$ pojedynczą (jednokrotną).
Łatwo sprawdzić, że

$$[I_3\lambda_1 - A]^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^2 \end{bmatrix}, \quad [I_3\lambda_1 - A]^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{rząd}\,[I_3\lambda_1 - A]^2 = \text{rząd}\,[I_3\lambda_1 - A]^3 = \begin{cases} 1 & \text{dla } a \neq 1 \\ 0 & \text{dla } a = 1 \end{cases}$$

oraz

$$[I_3\lambda_2 - A] = \begin{bmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I_3\lambda_2 - A]^2 = \begin{bmatrix} (a-1)^2 & -2(a-1) & 0 \\ 0 & (a-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rząd}\,[I_3\lambda_2 - A] = \text{rząd}\,[I_3\lambda_2 - A]^2 = \begin{cases} 2 & \text{dla } a \neq 1 \\ 0 & \text{dla } a = 1 \end{cases}$$

Warunek (19) jest więc spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 1$ i macierz jest cykliczna.

Twierdzenie 1.14.6. Macierz $A \in C^{n \times n}$ można przekształcić przez podobieństwo do postaci kanonicznej Frobeniusa (6) lub do postaci kanonicznej Jordana (13) wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest macierzą cykliczną.

Dowód. Jak wiadomo istnieją macierze nieosobliwe P_1 i P_2 przekształcenia przez podobieństwo takie, że

$$A_F = P_1 A P_1^{-1} \quad \text{oraz} \quad J_A = P_2 A P_2^{-1} \tag{14.21}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy macierze wielomianowe $[I_n s - A]$, $[I_n s - A_F]$ oraz $[I_n s - J_A]$ są równoważne, czyli mają te same wielomiany inwariantne. Fakt ten ma miejsce tylko wtedy, gdy macierz A jest cykliczna. Dostateczność natomiast wynika z twierdzeń 11.1 i 11.2.

■

Przykład 1.14.5. Weźmy pod uwagę macierz (16). Macierz ta dla $a \neq 1$ jest macierzą cykliczną i można ją przekształcić przez podobieństwo do postaci kanonicznej Frobeniusa A_F równej

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -2a-1 & 2+a \end{bmatrix} \tag{14.21}$$

gdyż

$$\det[I_3 s - A] = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-a \end{bmatrix} = (s-a)^2(s-a) = s^3 - (2+a)s^2 + (2a+1)s - a$$

Natomiast dla $a = 1$ macierz (16) ma postać kanoniczną Jordana o dwóch klatkach odpowiadających wartości własnej równej 1 i nie jest macierzą cykliczną. Macierzy (16) dla $a = 1$ nie można przez podobieństwo przekształcić do postaci kanonicznej Frobeniusa.

1.15. Pary macierzy wielomianowych

1.15.1. Największe wspólne dzielniki i najmniejsze wspólne wielokrotności macierzy wielomianowych

Niech $C^{m\times n}[s]$ będzie zbiorem macierzy wielomianowych o wymiarach $m \times n$ zmiennej s oraz współczynnikach zespolonych.

Definicja 1.15.1. Macierz $B(s) \in C^{m\times q}[s]$ nazywamy lewym dzielnikiem (LD) macierzy $A(s) \in C^{m\times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz $C(s) \in C^{q\times l}[s]$, że

$$A(s) = B(s)C(s) \tag{15.1}$$

Macierz $C(s) \in C^{m\times l}[s]$ nazywamy prawym dzielnikiem (PD) macierzy $A(s) \in C^{m\times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz $B(s) \in C^{m\times q}[s]$, że zachodzi (1).

Definicja 1.15.2. Macierz $A(s) \in C^{q\times l}[s]$ nazywamy prawą wielokrotnością (PW) macierzy $B(s) \in C^{m\times q}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz $C(s) \in C^{q\times n}[s]$, że zachodzi równość (1).

Macierz $A(s) \in C^{m\times l}[s]$ nazywamy lewą wieloktrotnością (LW) macierzy $C(s) \in C^{q\times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka macierz $B(s) \in C^{m\times l}[s]$, że zachodzi (1).

Weźmy teraz pod uwagę dwie macierze wielomianowe $A(s) \in C^{m\times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m\times p}[s]$.

Definicja 1.15.3. Macierz $L(s) \in C^{m\times q}[s]$ nazywamy wspólnym lewym dzielnikiem (WLD) macierzy $A(s) \in C^{m\times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m\times p}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $A_1(s) \in C^{q\times l}[s]$ i $B_1(s) \in C^{q\times p}[s]$, że

$$A(s) = L(s)A_1(s) \quad \text{oraz} \quad B(s) = L(s)B_1(s) \tag{15.2}$$

Macierz $P(s) \in C^{q \times l}[s]$ nazywamy wspólnym prawym dzielnikiem (WPD) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{p \times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $A_2(s) \in C^{m \times q}[s]$ i $B_2(s) \in C^{p \times q}[s]$, że

(15.3) $$A(s) = A_2(s)P(s) \quad \text{oraz} \quad B(s) = B_2(s)P(s)$$

Definicja 1.15.4. Macierz $D(s) \in C^{p \times l}[s]$ nazywamy wspólną lewą wielokrotnością (WLW) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{q \times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $D_1(s) \in C^{p \times m}[s]$ i $D_2(s) \in C^{p \times q}[s]$, że

(15.4) $$D(s) = D_1(s)A(s) \quad \text{oraz} \quad D(s) = D_2(s)B(s)$$

Macierz $F(s) \in C^{m \times p}[s]$ nazywamy wspólną prawą wielokrotnością (WPW) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m \times q}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie macierze $F_1(s) \in C^{l \times p}[s]$ i $F_2(s) \in C^{q \times p}[s]$, że

(15.5) $$F(s) = A(s)F_1(s) \quad \text{oraz} \quad F(s) = B(s)F_2(s)$$

Definicja 1.15.5. Macierz $L(s) \in C^{m \times q}[s]$ nazywamy największym wspólnym lewym dzielnikiem (NWLD) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m \times p}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Macierz $L(s)$ jest wspólnym lewym dzielnikiem macierzy $A(s)$ i $B(s)$,
2. Macierz $L(s)$ jest prawą wielokrotnością każdego wspólnego lewego dzielnika macierzy $A(s)$ i $B(s)$, tzn. że jeżeli $A(s) = L_1(s)A_3(s)$ oraz $B(s) = L_1(s)B_3(s)$, to $L(s) = L_1(s)T(s)$, przy czym $L_1(s)$, $A_3(s)$, $B_3(s)$ i $T(s)$ są macierzami wielomianowymi odpowiednich wymiarów.

Macierz $P(s) \in C^{q \times l}[s]$ nazywamy największym wspólnym prawnym dzielnikiem (NWPD) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{p \times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Macierz $P(s)$ jest wspólnym prawym dzielnikiem macierzy $A(s)$ i $B(s)$,
2. Macierz $P(s)$ jest lewą wielokrotnością każdego wspólnego prawego dzielnika macierzy $A(s)$ i $B(s)$, tzn. że jeżeli $A(s) = A_4(s)P_1(s)$ oraz $B(s) = B_4(s)P_1(s)$, to $P(s) = T(s)P_1(s)$, przy czym $A_4(s)$, $P_1(s)$, $B_4(s)$ i $T(s)$ są macierzami wielomianowymi odpowiednich wymiarów.

Definicja 1.15.6. Macierz $D(s) \in C^{p \times l}[s]$ nazywamy najmniejszą wspólną lewą wielokrotnością (NWLW) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{q \times l}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Macierz $D(s)$ jest wspólną lewą wielokrotnością macierzy $A(s)$ i $B(s)$,
2. Macierz $D(s)$ jest prawym dzielnikiem każdej wspólnej wielokrotności macierzy $A(s)$ i $B(s)$, tzn. że jeżeli $\overline{D}(s) = D_3(s)A(s)$ oraz $\overline{D}(s) = D_4(s)B(s)$, to $\overline{D}(s) = T(s)D(s)$, przy czym $\overline{D}(s)$, $D_3(s)$, $D_4(s)$ i $T(s)$ są macierzami wielomianowymi odpowiednich wymiarów.

Macierz $F(s) \in C^{m \times p}[s]$ nazywamy najmniejszą wspólną prawą wielokrotnością (NWPW) macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m \times q}[s]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Macierz $F(s)$ jest wspólną prawą wielokrotnością $A(s)$ i $B(s)$,
2. Macierz $F(s)$ jest lewym dzielnikiem każdej wspólnej wielokrotności macierzy $A(s)$ i $B(s)$, tzn. że jeżeli $\overline{F}(s) = A(s)F_3(s)$ oraz $\overline{F}(s) = B(s)F_4(s)$, to $\overline{F}(s) = F(s)T(s)$, przy czym $\overline{F}(s)$, $F_3(s)$, $F_4(s)$ i $T(s)$ są macierzami wielomianowymi odpowiednich wymiarów.

1.15.2. Wyznaczanie największych dzielników danej macierzy wielomianowej

Zadanie 1.15.1. Mając dane $C \in C^{l \times m}[s]$, $L \in C^{l \times l}[s]$ należy wyznaczyć macierz C_1 taką, że

(15.6) $$C = LC_1$$

przy czym L jest macierzą trójkątną dolną oraz rząd $L \geq$ rząd C.

Rozwiązanie zadania. Załóżmy, że macierz L rzędu r ma postać

(15.7) $$L = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline g_{l1} & g_{l2} & \cdots & g_{lr} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

a macierz C_1

$$C_1 = \left[\begin{array}{ccc} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \hdashline x_{l1} & \cdots & x_{lm} \end{array}\right] \tag{15.8}$$

Równość (6) możemy więc napisać w postaci

$$\left[\begin{array}{ccc} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \hdashline c_{l1} & \cdots & c_{lm} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccccccc} g_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline g_{l1} & g_{l2} & \cdots & g_{lr} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \hdashline x_{l1} & \cdots & x_{lm} \end{array}\right] \tag{15.9}$$

Wykonując mnożenie oraz porównując odpowiednie elementy z równości (9), otrzymamy

$$c_{1j} = g_{11}x_{1j}, \text{ czyli } x_{1j} = \frac{c_{1j}}{g_{11}}$$

oraz

$$c_{2j} = g_{21}x_{1j} + g_{22}x_{2j}, \; x_{2j} = \frac{1}{g_{22}}\left(c_{2j} - g_{21}x_{1j}\right).$$

W przypadku ogólnym dla $i \le r$ otrzymamy więc

$$x_{ij} = \frac{1}{g_{ii}}\left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}x_{kj}\right) \tag{15.10}$$

Elementy wierszy macierzy C_1 o wskaźnikach (i, j), $i = r+1, \ldots, l$; $j = 1, \ldots, m$ można przyjąć dowolnie.

Przykład 1.15.1. Mając dane macierze

$$C = \begin{bmatrix} 1+s & 1+s & 1-s^2 \\ 1+s & 1-s & 1 \\ 2 & 0 & 2-s \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1+s & 0 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

należy wyznaczyć macierz C_1 spełniającą zależność (6). W tym wypadku rząd $L = 2$. Zgodnie z zależnością (10), aby wyznaczyć x_{1j}, dzielimy pierwszy wiersz macierzy C przez $g_{11} = 1+s$, a następnie pierwszy wiersz macierzy C_1 odejmujemy od wiersza drugiego macierzy C i wynik dzielimy przez s. Otrzymana macierz ma postać

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-s \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2-s \end{bmatrix}$$

Przykład 1.15.2. Mając dane $C \in \mathbf{C}^{l \times m}[s]$, $P \in \mathbf{C}^{m \times m}[s]$, należy wyznaczyć macierz C_2 taką, że

$$C = C_2 P \tag{15.11}$$

przy czym P jest macierzą trójkątną górną oraz rząd $P \ge$ rząd C.
Przez transpozycję można rozwiązanie zadania 2 sprowadzić do rozwiązania zadania 1.

1.15.3. Wyznaczanie największych wspólnych dzielników i najmniejszych wspólnych wielokrotności macierzy wielomianowych

Twierdzenie 1.15.1. Macierz $L(s) \in \mathbf{C}^{m \times m}[s]$ jest NWLD macierzy $A(s) \in \mathbf{C}^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in \mathbf{C}^{m \times q}[s]$ ($m \le l + q$) wtedy i tylko wtedy, gdy macierze

$$[A(s) \;\; B(s)] \text{ i } [L(s) \;\; 0] \tag{15.12}$$

są macierzami prawostronnie równoważnymi.

Dowód. Jeżeli macierze (12) są prawostronnie równoważne, to istnieje macierz unimodularna

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix}$$

taka, że

(15.13) $$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(s) & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

(15.14) $$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix}$$

przy czym

$$\begin{bmatrix} V_{11}(s) & V_{12}(s) \\ V_{21}(s) & V_{22}(s) \end{bmatrix} = U^{-1}(s)$$

Z zależności (14) mamy

$$A(s) = L(s)V_{11}(s) \quad \text{i} \quad B(s) = L(s)V_{12}(s)$$

Macierz $L(s)$ jest więc WLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$. Aby wykazać, że macierz $L(s)$ jest NWLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$, weźmy pod uwagę zależność

(15.15) $$A(s)U_{11}(s) + B(s)U_{21}(s) = L(s)$$

wynikającą z (13). Stąd wynika, że każdy WLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$ jest również LD macierzy $L(s)$. Macierz $L(s)$ jest więc PW każdego WLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$, czyli NWLD tych macierzy.
Wykażemy z kolei, że jeżeli macierz $L(s)$ jest NWLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$, to macierze (12) są prawostronnie równoważne. Z założenia mamy

(15.16) $$A(s) = L(s)A_1(s), \quad B(s) = L(s)B_1(s)$$

przy czym NWLD macierzy $A_1(s)$ i $B_1(s)$ jest macierz I_m.
Z zależności (16) mamy

(15.17) $$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ N(s) & M(s) \end{bmatrix}$$

przy czym $N(s)$ i $M(s)$ są dowolnymi macierzami wielomianowymi.

Wykażemy, że istnieją macierze wielomianowe $N(s)$ i $M(s)$ takie, że macierz

(15.18) $$\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ N(s) & M(s) \end{bmatrix}$$

jest macierzą unimodularną. NWLD macierzy $A_1(s)$ i $B_1(s)$ jest macierz I_m. Wobec tego istnieje taka macierz unimodularna $U_1(s)$, że

$$\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \end{bmatrix} U_1(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz $U_1^{-1}(s)$ jest również macierzą unimodularną. Z ostatniej zależności mamy więc

$$\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} U_1^{-1}(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ N(s) & M(s) \end{bmatrix}$$

Macierz (18) jest więc macierzą unimodularną, a z zależności (17) wynika, że macierze (12) są prawostronnie równoważne.

■

Wniosek 1.15.1. Jeżeli macierz $L(s)$ jest NWLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$, to istnieją takie macierze wielomianowe $U_{11}(s), U_{21}(s)$, że zachodzi (15).
Macierz $L(s)$ może mieć postać macierzy trójkątnej dolnej.

Wniosek 1.15.2. Jeżeli NWLD macierzy $A_1(s)$ i $B_1(s)$ jest równy $L(s)=I$, to istnieją macierze wielomianowe $N(s)$ i $M(s)$ takie, że macierz kwadratowa (18) jest macierzą unimodularną.

Z zależności (13) wynika, że

(15.19) $$A(s)U_{12}(s) = -B(s)U_{22}(s) = F(s)$$

Twierdzenie 1.15.2. Macierz $F(s)$ określona równością (19) jest WPW macierzy $A(s)$ i $B(s)$.

Dowód. Z definicji 4 oraz zależności (19) wynika, że macierz $F(s)$ jest WPW macierzy $A(s)$ i $B(s)$. Należy wykazać jeszcze, że macierz $F(s)$ jest lewym dzielnikiem każdej WPW macierzy $A(s)$ i $B(s)$. Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że NWPD macierzy $U_{12}(s), U_{22}(s)$ jest macierz jednostkowa I_{m-l-q}.

■

Aby wyznaczyć NWLD i NWPW macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{m \times q}[s]$, możemy stosować następujący

Algorytm 1.15.1.

Krok 1. Macierze $A(s)$ i $B(s)$ oraz macierze jednostkowe I_l i I_q piszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ I_l & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

Krok 2. Wykonując na kolumnach odpowiednie działania elementarne, sprowadzamy macierz $[A(s)\ B(s)]$ do postaci $[L(s)\ 0]$, a wykonując te same działania elementarne na kolumnach macierzy I_{l+q} otrzymujemy macierz $U(s)$, którą następnie dzielimy na podmacierze $U_{11}(s), U_{12}(s), U_{21}(s), U_{22}(s)$ o wymiarach odpowiadających wymiarom macierzy $A(s)$ i $B(s)$, czyli

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ I_l & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} L(s) & 0 \\ U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{15.20}$$

Krok 3. Poszukiwany NWLD jest równy macierzy $L(s)$, a NWPW równy macierzy $F(s)$ wyznaczamy z zależności (19).

Przykład 1.15.1. Należy wyznaczyć NWLD i NWPW macierzy

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2-2s & s \\ s-2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(s) = \begin{bmatrix} s-2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku $m = l = 2$, $q = 1$. Aby wyznaczyć macierze $L(s)$ i $U(s)$, macierze $A(s), B(s)$ oraz I_2 i I_1, zapisujemy w postaci

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2-2s & s & s-2s \\ s-2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i poddajemy następującym działaniom elementarnym

$$\xrightarrow[P[3+2\times(-1)]]{P[1+2\times(2-s)]} \begin{bmatrix} 0 & s & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2-s & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[P[2,3]]{P[1,2]} \begin{bmatrix} s & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2-s \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mamy więc

$$L(s) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U(s) = \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 2-s \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

NWPW macierzy $A(s)$ i $B(s)$ wyznaczamy korzystając z postaci (19)

$$F(s) = A(s)U_{12}(s) = \begin{bmatrix} s^2-2s & s \\ s-2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 1.15.3. Macierz $P(s) \in C^{q \times l}[s]$ jest NWPD macierzy $A(s) \in C^{m \times l}[s]$ i $B(s) \in C^{p \times l}[s] (m + p \geq l)$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierze

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} P(s) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15.21}$$

są macierzami lewostronnie równoważnymi.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1. Stosując działania elementarne na wierszach, wykonujemy przekształcenie

$$\begin{bmatrix} A(s) & I_m & 0 \\ B(s) & 0 & I_p \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} P(s) & U'_{11}(s) & U'_{12}(s) \\ 0 & U'_{21}(s) & U'_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{15.22}$$

Wykonując na wierszach macierzy I_{m+p} działania elementarne przekształcające macierz $\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$ do postaci $\begin{bmatrix} P(s) \\ 0 \end{bmatrix}$, wyznaczamy macierz unimodularną

$$U'(s)=\begin{bmatrix} U'_{11}(s) & U'_{12}(s) \\ U'_{21}(s) & U'_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Wniosek 1.15.3. Jeżeli macierz $P(s)$ jest NWPD macierzy $A(s)$ i $B(s)$, to istnieją takie macierze wielomianowe $U'_{11}(s)$ i $U'_{12}(s)$, że zachodzi równość

(15.23) $$U'_{11}(s)A(s)+U'_{12}(s)B(s)=P(s)$$

Wniosek 1.15.4. Jeżeli NWPD macierzy $A_1(s)$ i $B_1(s)$ jest równy $P(s)=I$, to istnieją macierze wielomianowe $N'(s)$ i $M'(s)$ takie, że macierz kwadratowa

(15.24) $$\begin{bmatrix} A_1(s) & N'(s) \\ B_1(s) & M'(s) \end{bmatrix}$$

jest macierzą unimodularną.

Twierdzenie 1.15.4. Macierz $D(s)$ określona zależnością

(15.25) $$D(s)=U'_{21}(s)A(s)=-U'_{22}(s)B(s)$$

jest NWLW macierzy $A(s)$ i $B(s)$.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2.

Algorytm wyznaczania NWPD i NWLW macierzy $A(s)$ i $B(s)$ różni się tym tylko od algorytmu 1, że zamiast przekształcenia (20) wykonujemy przekształcenie (22) i zamiast działań elementarnych na kolumnach wykonujemy działania elementarne na wierszach. Poszukiwany NWPD jest równy macierzy $P(s)$, a NWLW równy macierzy $D(s)$ wyznaczamy z zależności (25).

Uwaga 1.15.1. Największe wspólne dzielniki oraz najmniejsze wspólne wielokrotności są wyznaczane z dokładnością do macierzy unimodularnych.

1.15.4. Macierze wielomianowe względnie pierwsze i uogólniona tożsamość Bezoute'a

Definicja 1.15.7. Macierze $A(s)\in C^{m\times l}[s]$ i $B(s)\in C^{m\times q}[s]$ nazywamy lewostronnie względnie pierwszymi LWP wtedy i tylko wtedy, gdy ich wspólnymi lewymi dzielnikami są tylko macierze unimodularne.

Macierze $A(s)\in C^{m\times l}[s]$ i $B(s)\in C^{p\times l}[s]$ nazywamy prawostronnie względnie pierwszymi PWP wtedy i tylko wtedy, gdy ich wspólnymi prawymi dzielnikami są tylko macierze unimodularne.

Twierdzenie 1.15.5. Macierze $A(s)\in C^{m\times l}[s]$, $B(s)\in C^{m\times q}[s]$ są LWP wtedy i tylko wtedy, gdy macierze

(15.26) $$[A(s)\ \ B(s)] \text{ i } [I_m\ \ 0]$$

są prawostronnie równoważne.
Macierze $A(s)\in C^{m\times l}[s]$, $B(s)\in C^{p\times l}[s]$ są PWP wtedy i tylko wtedy, gdy macierze

(15.27) $$\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix}$$

są lewostronnie równoważne.

Dowód. Jeżeli macierze (26) są prawostronnie równoważne, to zgodnie z twierdzeniem 1, NWLD macierzy $A(s)$ i $B(s)$ jest I_m, czyli macierze te są LWP. Jeżeli natomiast macierze $A(s)$ i $B(s)$ są LWP, to NLWD jest macierzą unimodularną, którą za pomocą działań elementarnych na kolumnach można sprowadzić do postaci $[I_m\ \ 0]$, czyli macierze (26) są prawostronnie równoważne. Dowód drugiej części twierdzenia jest analogiczny.

■

Z wniosku 1 dla $L(s)=I_m$ oraz z wniosku 3 dla $P(s)=I_l$ otrzymujemy

Wniosek 1.15.5. Jeżeli macierze $A(s)$ i $B(s)$ są LWP, to istnieją takie macierze wielomianowe $U_{11}(s)$ i $U_{21}(s)$, że

(15.28) $$A(s)U_{11}(s)+B(s)U_{21}(s)=I_m$$

Jeżeli macierze $A(s)$ i $B(s)$ są PWP, to istnieją takie macierze wielomianowe $U'_{11}(s)$ i $U'_{12}(s)$, że

$$U'_{11}(s)A(s)+U'_{12}(s)B(s)=I_l \tag{15.29}$$

Macierze $U_{11}(s)$, $U_{21}(s)$ oraz $U'_{11}(s)$, $U'_{12}(s)$ możemy wyznaczyć jako podmacierze macierzy $U(s)$ i odpowiednio $U'(s)$ korzystając z algorytmu 1.

Przykład 1.15.2. Wykazać, że macierze

$$A(s)=\begin{bmatrix} s^2 & s \\ s+1 & 1 \end{bmatrix},\quad B(s)=\begin{bmatrix} s^2+2 \\ s \end{bmatrix}$$

są LWP oraz wyznaczyć dla tych macierzy macierze wielomianowe $U_{11}(s)$ i $U_{21}(s)$ spełniające zależność (28).

Wykażemy, że dane macierze $A(s)$ i $B(s)$ mają NWLD równy I_2. W tym celu macierze te oraz macierz I_3 zapisujemy w postaci

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ I_l & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2 & s & s^2+2 \\ s+1 & 1 & s \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i poddajemy następującym działaniom elementarnym

$$\xrightarrow[P[3+2\times(-s)]]{P[1+2\times(-s)]}\begin{bmatrix} 0 & s & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow[P\left[2+3\times\left(-\frac{1}{2}s\right)\right]]{P[2+1\times(-1)]}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 \\ -s & 1+s+\frac{1}{2}s^2 & -s \\ 0 & -\frac{1}{2}s & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{P\left[3\times\frac{1}{2}\right],\ P[2,3],\ P[1,2]}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2}s & -s & 1+s+\frac{1}{2}s^2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}$$

NWLD danych macierzy $A(s)$ i $B(s)$ jest więc równy I_2, czyli macierze te są LWP.

Z macierzy

$$U(s)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & -1 \\ -\frac{1}{2}s & -s & \vdots & 1+s+\frac{1}{2}s^2 \\ \hdashline \frac{1}{2} & 0 & \vdots & -\frac{1}{2}s \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$U_{11}(s)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -s \end{bmatrix},\quad U_{21}(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo można sprawdzić, że macierze $A(s)$, $B(s)$, $U_{11}(s)$, $U_{21}(s)$ spełniają zależność (28).

1.15.5. Uogólniona tożsamość Bezoute'a

Weźmy pod uwagę macierze wielomianowe $A(s)\in \mathbf{R}^{m\times n}[s]$, $B(s)\in \mathbf{R}^{m\times p}[s]$, ($n+p\geq m$) lewostronnie względnie pierwsze.

Twierdzenie 1.15.6. Jeżeli macierze wielomianowe $A(s)\in \mathbf{R}^{m\times n}[s]$ i $B(s)\in \mathbf{R}^{m\times p}[s]$ są lewostronnie względnie pierwsze, to istnieją macierze wielomianowe $R(s)$, $D(s)$, $M_1(s)$, $M_2(s)$, $M_3(s)$ i $M_4(s)$ o odpowiednich wymiarach takie, że

$$\begin{bmatrix} A(s)\,B(s) \\ C(s)\,D(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1(s)\,M_2(s) \\ M_3(s)\,M_4(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n+p-m} \end{bmatrix} \tag{15.30}$$

oraz

$$(15.31)\qquad \begin{bmatrix} M_1(s)\,M_2(s) \\ M_3(s)\,M_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(s)\,B(s) \\ C(s)\,D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n+p-m} \end{bmatrix}$$

Dowód. Z założenia, że macierze $A(s)$ i $B(s)$ są lewostronnie względnie pierwsze, wynika, że istnieje macierz unimodularna działań elementarnych na kolumnach

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(n+p)\times(n+p)}[s] \text{ taka, że } [A(s)\,B(s)]U(s) = [I_m\ 0]$$

Mnożąc prawostronnie ostatnią równość przez macierz

$$(15.32)\qquad U^{-1}(s) = \begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$[A(s) \quad B(s)] = [I_m\,0]\begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}$$

oraz

$$[A(s) \quad B(s)] = [V_1(s) \quad V_2(s)]$$

Macierz (32) jest unimodularna i zachodzi równość

$$U^{-1}(s)U(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n+p-m} \end{bmatrix}$$

Zatem $[C(s)\,D(s)] = [V_3(s)\ V_4(s)]$ oraz $M_k(s) = U_k(s)$ dla $k = 1, 2, 3, 4$.
Tożsamość (31) wynika z równości $U(s)U^{-1}(s) = U^{-1}U(s) = I_{n+p}$.

■

W analogiczny sposób można udowodnić następujące twierdzenie dualne.

Twierdzenie 1.15.7. Jeżeli macierze wielomianowe $A'(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ i $B'(s) \in \boldsymbol{R}^{p\times n}[s]$ są prawostronnie względnie pierwsze, to istnieją macierze wielomianowe $C'(s)$, $D'(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s)$, $N_3(s)$ i $N_4(s)$ o odpowiednich wymiarach takie, że

$$(15.33)\qquad \begin{bmatrix} A'(s) & C'(s) \\ B'(s) & D'(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \\ N_3(s) & N_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{m+p-n} \end{bmatrix}$$

$$(15.34)\qquad \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) \\ N_3(s) & N_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'(s) & C'(s) \\ B'(s) & D'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_{m+p-n} \end{bmatrix}$$

1.16. Dekompozycja pęku regularnego macierzy

1.16.1. Pęki ściśle równoważne

Definicja 1.16.1. Pęk $[Es - A]$ (lub parę macierzy (E, A)) nazywamy regularnym, jeżeli macierze E i A są kwadratowe oraz

$$(16.1)\qquad \det[Es - A] \neq 0 \text{ dla pewnych } s \in \boldsymbol{C}$$

Definicja 1.16.2. Niech $E_k, A_k \in \boldsymbol{C}^{m\times n}$ dla k=1, 2. Pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ (lub pary macierzy (E_1, A_1) i (E_2, A_2)) nazywamy ściśle równoważnymi, jeżeli istnieją macierze nieosobliwe $P \in \boldsymbol{C}^{m\times m}$, $Q \in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ (o elementach niezależnych od zmiennej s) takie, że

$$(16.2)\qquad P[E_1 s - A_1]Q = E_2 s - A_2$$

Niech $D_k(s, t)$ ($k = 1, ..., n$) będzie największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k macierzy $[Es - At]$. Zgodnie z zależnością (8.4) wielomiany niezmiennicze macierzy $[Es - At]$ są określone jednoznacznie przez

(16.3) $$i_k(s,t)=\frac{D_{n-k+1}(s,t)}{D_{n-k}(s,t)} \quad \text{dla} \quad k=1,2,\dots,r$$

Rozkładając wielomiany (3) na odpowiednie wielomiany nierozkładalne w danym ciele, otrzymujemy dzielniki elementarne $e_i(s,t)$ ($i=1,\dots,p$) macierzy $[Es-At]$. Podstawiając $t=1$ do $e_i(s,t)$ otrzymamy odpowiednie dzielniki elementarne $e_i(s)=e_i(s,1)$ macierzy $[Es-A]$. Znając $e_i(s)$ macierzy $[Es-A]$, możemy również wyznaczyć dzielniki elementarne $e_i(s,t)$ macierzy $[Es-At]$ korzystając z zależności $e_i(s,t)=t^q e_i\left(\frac{s}{t}\right)$, gdzie q jest stopniem wielomianu $e_i(s)$.

W ten sposób możemy wyznaczyć wszystkie skończone dzielniki elementarne macierzy $[Es-At]$ z wyjątkiem dzielników elementarnych postaci t^q. Dzielniki elementarne postaci t^q nazywamy nieskończonymi dzielnikami elementarnymi macierzy $[Es-A]$. Nieskończone dzielniki elementarne występują wtedy i tylko wtedy, gdy $\det E=0$.

Na przykład: sprowadzając pęk

$$[Es-A]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

do postaci kanonicznej Smitha $[Es-A]_S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$ stwierdzamy, że pęk ten ma skończony dzielnik elementarny $s+1$ i nieskończony dzielnik elementarny t, gdyż $e(s)=s+1$, $q=1$ oraz $te\left(\frac{s}{t}\right)=s+t$.

Weźmy teraz dwa pęki kwadratowe tego samego stopnia

(16.4) $[E_1s-A_1]$ i $[E_2s-A_2]$ takie, że $\det E_1\neq 0$ i $\det E_2\neq 0$.

Twierdzenie 1.16.1. Jeżeli jest spełniony warunek (4), to pęki $[E_1s-A_1]$ i $[E_2s-A_2]$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy są ściśle równoważne, tzn. macierze unimodularne $L(s)$ i $P(s)$ w zależności

(16.5) $$E_1s-A_1=L(s)[E_2s-A_2]P(s)$$

można zastąpić nieosobliwymi macierzami L i P niezależnymi od zmiennej s

(16.6) $$E_1s-A_1=L[E_2s-A_2]P$$

Dowód. Macierz odwrotna $M(s)=L^{-1}(s)$ macierzy unimodularnej $L(s)$ jest również macierzą unimodularną. Mnożąc lewostronnie (5) przez $M(s)$ otrzymamy

(16.7) $$M(s)[E_1s-A_1]=[E_2s-A_2]P(s)$$

Dzieląc lewostronnie macierz $M(s)$ przez $[E_2s-A_2]$ oraz prawostronnie macierz $P(s)$ przez $[E_2s-A_2]$ otrzymamy

(16.8) $$M(s)=[E_2s-A_2]Q(s)+M$$
$$P(s)=T(s)[E_1s-A_1]+P$$

przy czym M i P są macierzami niezależnymi od zmiennej s.
Podstawiając zależności (8) do (7) otrzymamy

(16.9) $$[E_2s-A_2][T(s)-Q(s)][E_1s-A_1]=M[E_1s-A_1]-[E_2s-A_2]P$$

Równość ta zachodzi tylko dla $T(s)=Q(s)$; w przeciwnym wypadku lewa strona tego równania byłaby macierzą wielomianową stopnia co najmniej drugiego, a prawa strona macierzą wielomianową stopnia co najwyżej pierwszego.
Po uwzględnieniu $T(s)=Q(s)$ z zależności (9) mamy

(16.10) $$M[E_1s-A_1]=[E_2s-A_2]P$$

Wykażemy, że $\det M\neq 0$. Dzieląc lewostronnie macierz $L(s)$ przez E_1s-A_1 otrzymamy

(16.11) $$L(s)=[E_1s-A_1]R(s)+L$$

przy czym L jest macierzą niezależną od zmiennej s.

Korzystając kolejno z (11), (7) i (8) otrzymamy

(16.12)

$$I=M(s)L(s)=M(s)([E_1s-A_1]R(s)+L)=M(s)[E_1s-A_1]R(s)+M(s)L$$
$$=[E_2s-A_2]P(s)R(s)+[E_2s-A_2]Q(s)L+ML=[E_2s-A_2][P(s)R(s)+Q(s)L]+ML$$

Prawa strona równania (12) jest macierzą stopnia zerowego (równa się macierzy jednostkowej) tylko wtedy, gdy

(16.13) $$P(s)R(s)+Q(s)L=0$$

Po uwzględnieniu tej zależności z zależności (12) mamy

$$ML = I$$

Macierz M jest więc nieosobliwa oraz $L = M^{-1}$. Mnożąc lewostronnie (10) przez $L = M^{-1}$ otrzymamy (6).

■

Z twierdzenia 1 mamy następujący ważny wniosek.

Wniosek 1.16.1 Jeżeli jest spełniony warunek (4), to pojęcia równoważności i ścisłej równoważności pęków $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ pokrywają się.

Z faktu, że dwie macierze wielomianowe są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same dzielniki elementarne oraz wniosku 1 wynika natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.16.2. Jeżeli jest spełniony warunek (4), to pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ są ściśle równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same skończone dzielniki elementarne.

Jeżeli warunek (4) nie jest spełniony, to pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ mogą nie być równoważne, mimo że mają te same skończone dzielniki elementarne.
Wykażemy, że na przykład pęki regularne

(16.14)
$$[E_1 s - A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad [E_2 s - A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nie są ściśle równoważne (gdyż rząd $E_1 = 2$, rząd $E_2 = 1$), mimo że mają ten sam skończony dzielnik elementarny $s+1$, ale (14) mają różne nieskończone dzielniki elementarne.
Stosując do pęku $[E_1 s - A_1 t]$ działania elementarne, otrzymamy twierdzenie.

Twierdzenie 1.16.3. Dwa regularne pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ są ściśle równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same skończone i nieskończone dzielniki elementarne.

Dowód. Ze ścisłej równoważności pęków $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ wynika ścisła równoważność pęków $[E_1 s - A_1 t]$ i $[E_2 s - A_2 t]$. Wobec tego pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$ powinny mieć te same skończone i nieskończone dzielniki elementarne. Odwrotnie, niech dane będą dwa regularne pęki $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$, które mają te same skończone i nieskończone dzielniki elementarne. Niech

(16.15) $$s = a\lambda + b\mu,\ t = c\lambda + d\mu \ (ad - bc \neq 0)$$

Podstawiając (15) do $[E_1 s - A_1 t]$, $[E_2 s - A_2 t]$ otrzymamy

(16.16)
$$[E_1 s - A_1 t] = [E_1(a\lambda + b\mu) - A_1(c\lambda + d\mu)] = [\overline{E}_1\lambda - \overline{A}_1\mu]$$
$$[E_2 s - A_2 t] = [E_2(a\lambda + b\mu) - A_2(c\lambda + d\mu)] = [\overline{E}_2\lambda - \overline{A}_2\mu]$$

przy czym

(16.17) $$\overline{E}_1 = aE_1 - cA_1,\ \overline{A}_1 = dA_1 - bE_1,\ \overline{E}_2 = aE_2 - cA_2,\ \overline{A}_2 = dA_2 - bE_2$$

Z założenia o regularności pęków $[E_1 s - A_1 t]$ i $[E_2 s - A_2 t]$ wynika, że można dobrać liczby a i c tak, aby

(16.18) $$\det\overline{E}_1 \neq 0 \ \text{i} \ \det\overline{E}_2 \neq 0$$

Jeżeli jest spełniony warunek (18), to pęki $[\overline{E}_1\lambda - \overline{A}_1\mu]$ i $[\overline{E}_2\lambda - \overline{A}_2\mu]$ są ściśle równoważne, a ten fakt implikuje, że pęki $[E_1 s - A_1 t]$ i $[E_2 s - A_2 t]$ oraz pęki wyjściowe $[E_1 s - A_1]$, $[E_2 s - A_2]$ są ściśle równoważne.

■

1.16.2. Dekompozycja Weierstrassa regularnego pęku

Załóżmy na początku, że macierze prostokątne $E, A \in C^{q \times n}$ są takie, że

(16.19) $$\text{rząd}\,[Es - A] = q \quad \text{dla pewnego} \quad s \in C$$

Twierdzenie 1.16.4. Jeżeli jest spełniony warunek (19), to istnieją macierze pełnego rzędu $P \in C^{q \times n}$ i $Q \in C^{n \times n}$ takie, że

(16.20)
$$[Es-A]=P\begin{bmatrix} I_{n_1}s-A_1 & 0 \\ 0 & Ns-I_{n_2} \end{bmatrix}Q$$

przy czym n_1 jest najwyższym stopniem wielomianu zmiennej s, będącego minorem stopnia q macierzy $[Es-A]$, $n_1+n_2=n$, a N jest macierzą nilpotentną o indeksie ν $(N^\nu=0)$.

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (19), to istnieje liczba $c\in \boldsymbol{C}$ taka, że macierz $F=[Ec-A]$ ma pełny rząd wierszowy. Wówczas istnieje prawa odwrotność tej macierzy

(16.21)
$$F_p=F^T\left[FF^T\right]^{-1}\in \boldsymbol{C}^{n\times q}$$

spełniająca warunek $FF_p=I_q$.
Zauważmy, że

(16.22) $[Es-A]=[E(s-c)+Ec-A]=[E(s-c)+F]=F[F_pE(s-c)+I_n]$

Zgodnie z rozważaniami przedstawionymi w p. 4.2.2. istnieje macierz nieosobliwa $T\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ taka, że

(16.23)
$$F_pE=T[\mathrm{diag}\,(J_1,J_0)]T^{-1}$$

przy czym $J_1\in \boldsymbol{C}^{n_1\times n_1}$ jest macierzą nieosobliwą, a $J_0\in \boldsymbol{C}^{n_2\times n_2}$ jest macierzą nilpotentną o indeksie ν. Macierz T można tak dobrać, aby $\mathrm{diag}\,(J_1,J_0)$ miała postać kanoniczną Jordana.

Podstawiając (23) do (22) otrzymamy

(16.24)
$$[Es-A]=FT[\mathrm{diag}\,(J_1(s-c)+I_{n_1},\, J_0(s-c)+I_{n_2})]T^{-1}=$$
$$=FT\mathrm{diag}\,(J_1,J_0c-I_{n_2})\left[\mathrm{diag}\,(I_{n_1}s+J_1^{-1}(I_{n_1}-J_1c),\,(J_0c-I_{n_2})^{-1}J_0s-I_{n_2})\right]T^{-1}=$$
$$=P\left[\mathrm{diag}\,(I_{n_1}s-A_1,\,Ns-I_{n_2})\right]Q$$

przy czym

(16.25)
$$P=FT\mathrm{diag}\,(J_1,J_0c-I_{n_2}),\; A_1=J_1^{-1}(J_1c-I_{n_1}),\; N=(J_0c-I_{n_2})^{-1}J_0,\; Q=T^{-1}$$

Zauważmy, że $N^\nu=0$, gdyż $J_0^\nu=0$ oraz $N^\nu=(J_0c-I_{n_2})^{-\nu}J_0^\nu=0$.

■

Uwaga 1.16.3. Przekształcając A_1 i N do postaci kanonicznej Jordana otrzymamy

$$\mathrm{diag}\,[H_{m_1}s-I_{m_1},\dots,H_{m_t}s-I_{m_t},\,I_{n_1}s-J]$$

przy czym

$$H_{m_i}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{m_i\times m_i}\ (i=1,\dots,t),$$

J jest postacią kanoniczną Jordana macierzy A_1, a $m_1+m_2+\cdots+m_t+n_1=n$.

Twierdzenie 4 stanowi uogólnienie klasycznego twierdzenia Weierstrassa na przypadek prostokątnego pęku, spełniającego warunek (19).
Jeżeli $q=n$, to macierz P jest kwadratowa i nieosobliwa. W tym wypadku równość (20) możemy napisać w postaci

(16.26)
$$P^{-1}[Es-A]Q^{-1}=\begin{bmatrix} I_{n_1}s-A_1 & 0 \\ 0 & Ns-I_{n_2} \end{bmatrix}$$

a n_1 jest równe stopniowi wielomianu $\det[Es-A]$.

Twierdzenie 1.16.5. Jeżeli pęk $[Es-A]$ jest regularny, to istnieją dwie macierze nieosobliwe $P,Q\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ takie, że zachodzi (26).

Macierze przekształcenia P i Q występujące w równości (26) można wyznaczyć korzystając z zależności (25). Niżej zostanie przedstawiona inna metoda wyznaczania tych macierzy.
Niech s_i będzie i-tym pierwiastkiem równania

(16.27)
$$\det[Es-A]=0$$

a

(16.28) $$m_i = \dim \operatorname{Ker}[Es_i - A]$$

Obliczamy skończone wektory własne v_{ij}^1 korzystając z równania

(16.29) $$[Es_i - A]v_{ij}^1 = 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m_i$$

a następnie (skończone) wektory własne v_{ij}^{k+1} z równania

(16.30) $$[Es_i - A]v_{ij}^{k+1} = -Ev_{ij}^k \quad \text{dla} \quad k \geq 1$$

Niech

(16.31) $$m_\infty = \dim \operatorname{Ker} E = n - \text{rząd } E$$

Obliczamy nieskończone wektory własne $v_{\infty j}^1$ korzystając z równania

(16.32) $$Ev_{\infty j}^1 = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, m_\infty$$

a następnie wektory własne $v_{\infty j}^{k+1}$ z równania

(16.33) $$Ev_{\infty j}^{k+1} = Av_{\infty j}^k \quad \text{dla} \quad k \geq 1$$

Obliczone wektory są kolumnami poszukiwanych macierzy

(16.34) $$P = [Ev_{ij}^k \,\vdots\, Av_{\infty j}^k], \quad Q^{-1} = [v_{ij}^k \,\vdots\, v_{\infty j}^k]$$

Korzystając z (29)-(33) łatwo sprawdzić, że

(16.35) $$[Es - A][v_{ij}^k \;\vdots\; v_{\infty j}^k] = [Ev_{ij}^k \;\vdots\; Av_{\infty j}^k]\begin{bmatrix} I_{n_1}s - A_1 & 0 \\ 0 & Ns - I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Mnożąc lewostronnie (35) przez $[Ev_{ij}^k \;\vdots\; Av_{\infty j}^k]^{-1}$ otrzymamy (26) dla P i Q danych zależnościami (34).

Przykład 1.16.1. Wyznaczyć macierze P i Q dla pęku regularnego, którego macierze E i A mają postać

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku

$$\det[Es - A] = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = s(s-1)$$

oraz $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $m_1 = \dim \operatorname{Ker}[Es_1 - A] = 1$.
Korzystając z zależności (29), (30), (32) i (33) obliczamy kolejno

$$[Es_1 - A]v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ev_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Es_2 - A_2]v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Ev_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ev_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Av_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Z (33) mamy więc

$$P = [Ev_1, Ev_2, Av_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.17. Dekompozycja pęku singularnego

1.17.1. Twierdzenie Weierstrassa-Kroneckera

Definicja 1.17.1. Pęk $[Es - A](E, A \in C^{m \times n})$ nazywamy pękiem singularnym, jeśli $m \neq n$ lub $\det[Es - A] = 0$ dla wszystkich $s \in C$, gdy $m = n$.

Niech rząd $[Es + A] = r \leq \min(m, n)$ dla prawie wszystkich $s \in C$.
Załóżmy, że $r < n$. W tym wypadku kolumny macierzy $[Es - A]$ są liniowo zależne i równanie

(17.1) $$[Es - A]x = 0$$

ma niezerowe rozwiązanie $x = x(s)$.
Wśród rozwiązań wielomianowych równania (1) będziemy poszukiwać rozwiązań minimalnego stopnia p względem s mających postać

(17.2) $$x(s) = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \cdots + x_p s^p$$

Podstawiając (2) do (1) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s otrzymamy równania

$$-Ax_0 = 0,\ Ex_{i-1} - Ax_i = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, p \text{ oraz } Ex_p = 0,$$

które możemy napisać w postaci

(17.3) $$\begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & -A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & -A & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & E & -A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że równanie (3) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$G_p = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & -A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & -A & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & E & -A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & E \end{bmatrix} \in C^{(p+2)m \times (p+1)n}$$

nie ma pełnego rzędu kolumnowego. Z założenia p jest minimalne, mamy więc rząd $G_i = (i+1)n$ dla $i = 0, 1, \ldots, p-1$ oraz rząd $G_p < (p+1)n$.

Lemat 1.17.1. Jeżeli (1) ma rozwiązanie (2) minimalnego stopnia $p > 0$, to pęk $[Es - A]$ jest ściśle równoważny pękowi

(17.4) $$\begin{bmatrix} L_p & 0 \\ 0 & \overline{E}s - \overline{A} \end{bmatrix}$$

przy czym

$$L_p = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s & 1 \end{bmatrix} \in C^{p \times (p+1)}$$

a równanie

(17.5) $$[\overline{E}s - \overline{A}]x = 0$$

nie ma rozwiązań wielomianowych stopnia mniejszego niż p.

Dowód. Weźmy pod uwagę operator liniowy $[Es - A]$ odwzorowujący C^n w C^m. Pokażmy, że można wybrać bazy w C^n i C^m tak, że odpowiadający mu pęk $[Es - A]$ będzie miał postać

(17.6) $$\begin{bmatrix} L_p & Bs + c \\ 0 & \overline{E}s - \overline{A} \end{bmatrix}$$

Równanie odpowiadające (1) liniowego operatora ma postać

(17.7) $$[Es-A]=0$$

przy czym

$$x=x(s)=x_0+x_1s+x_2s^2+\cdots+x_ps^p.$$

W podobny sposób jak dla (1) otrzymamy

(17.8) $$Ax_0=0,\quad Ex_{i-1}=Ax_i \ \text{dla } i=1,\dots,p,\quad Ex_p=0$$

Pokażemy, że wektory

(17.9) $$Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_p$$

są liniowo niezależne.
Przypuśćmy, że wektor Ax_k zależy liniowo od wektorów $Ax_1,\dots,Ax_{k-1}$ $(k\le p)$, czyli

$$Ax_k=a_1Ax_1+\dots+a_{k-1}Ax_{k-1} \quad \text{dla pewnych } a_i\in \boldsymbol{C}.$$

Korzystając z (8) otrzymamy

$$Ax_k=Ex_{k-1}=a_1Ex_0+a_2Ex_1+\dots+a_{k-1}Ex_{k-2}$$

oraz

$$E\hat{x}_{k-1}=0$$

przy czym

$$\hat{x}_{k-1}=x_{k-1}-a_1x_0-a_2x_1-\dots-a_{k-1}x_{k-2}$$

Zauważmy, że

$$Ax_{k-1}=Ax_{k-1}-a_1Ax_0-a_2Ax_1-\dots-a_{k-1}Ax_{k-2}=$$

$$=E(x_{k-2}-a_2x_0-a_3x_1-\dots-a_{k-1}x_{k-3})=E\hat{x}_{k-2}$$

przy czym

$$\hat{x}_{k-2}=x_{k-2}-a_2x_0-a_3x_1-\dots-a_{k-1}x_{k-3}$$

Podobnie

$$A\hat{x}_{k-2}=Ax_{k-2}-a_2Ax_0-a_3Ax_1-\dots-a_{k-1}Ax_{k-3}=$$

$$=E(x_{k-3}-a_3x_1-\dots-a_{k-1}x_4)=E\hat{x}_{k-3}$$

przy czym

$$\hat{x}_{k-3}=x_{k-3}-a_3x_1-\dots-a_{k-1}x_{k-4}$$

Kontynuując tę procedurę otrzymamy

$$A\hat{x}_{k-3}=E\hat{x}_{k-4},\dots, A\hat{x}_1=E\hat{x}_0,\ A\hat{x}_0=0$$

przy czym

$$\hat{x}_{k-4}=x_{k-4}-a_4x_1-\dots-a_{k-1}x_{k-5},\dots,\ \hat{x}_1=x_1-a_{k-1}x_0,\ \hat{x}_0=x_0$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności łatwo sprawdzić, że wektor

$$\mathrm{x}=\hat{\mathrm{x}}(s)=\hat{\mathrm{x}}_0+\hat{\mathrm{x}}_1s+\hat{\mathrm{x}}_2s^2+\dots+\hat{\mathrm{x}}_{k-1}s^{k-1} \quad \text{dla } k\le p$$

jest rozwiązaniem (7) stopnia mniejszego niż p. Ta sprzeczność dowodzi, że wektory (9) są liniowo niezależne.

Wykażemy teraz przez zaprzeczenie, że wektory $x_0, x_1,\dots, x_p$ są również liniowo niezależne.
Przypuśćmy, że wektory te są liniowo zależne, czyli

(17.10) $$b_0x_0+b_1x_1+\dots+b_px_p=0 \ \text{dla pewnych } b_i\in\boldsymbol{C}$$

W tym przypadku otrzymamy

$$b_1Ax_1+b_2Ax_2+\dots+b_pAx_p=0$$

gdyż $Ax_0=0$.
Wektory (9) są liniowo niezależne. Wobec tego $b_1=b_2=\dots=b_p=0$ i z (10) otrzymamy $b_0x_0=0$. Zauważmy, że $x_0\neq 0$, gdyż w przeciwnym wypadku $s^{-1}x(s)$ byłoby również rozwiązaniem równania. Wobec tego $b_0x_0=0$ implikuje $b_0=0$ i wektory $x_0, x_1,\dots, x_p$ są liniowo niezależne. Wybieramy wektory (9) jako

pierwsze wektory bazowe przestrzeni C^n, a wektory $x_0, x_1, ..., x_p$ jako odpowiednio pierwsze wektory bazowe C^m. Korzystając z (8) łatwo sprawdzić, że w tym wypadku pęk $[Es - A]$ ma postać (6). Zauważmy, że (4) można otrzymać z (6) przez dodanie do $[Bs + C]$ odpowiedniej kombinacji liniowej o współczynnikach niezależnych od s kolumn L_p i wierszy $[\overline{E}s - \overline{A}]$.

Wykażemy, że równanie (5) nie ma rozwiązań stopnia niższego niż p.
Biorąc pod uwagę (4), możemy napisać równanie

$$\begin{bmatrix} L_p & 0 \\ 0 & \overline{E}s - \overline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = 0 \tag{17.11}$$

które jest równoważne równaniom

$$\begin{gathered} L_p z = 0 \\ [\overline{E}s - \overline{A}]y = 0 \end{gathered} \tag{17.12}$$

Z postaci specjalnej L_p wynika, że równanie ($L_p z = 0$) ma rozwiązanie stopnia p w postaci

$$z_i = (-1)^{i-1} s^{i-1} z_1 \ (i = 1, ..., p+1)$$

dla dowolnego z_1, gdzie z_i jest i-tą składową wektora z.
Wobec tego macierz G_{p-1} w (3) ma pełny rząd kolumnowy równy pn.

Równanie $[\overline{E}s - \overline{A}]y = 0$ ma rozwiązanie minimalnego stopnia p wtedy i tylko wtedy, gdy w tym równaniu macierz G_{p-1} w postaci

$$\overline{G}_{p-1} = \begin{bmatrix} -\overline{A} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \overline{E} & -\overline{A} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \overline{E} & -\overline{A} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \overline{E} & -\overline{A} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{E} \end{bmatrix} \in C^{(p+1)(n-p)\times p(n-p-1)}$$

ma pełny rząd kolumnowy, równy $p(n-p-1)$. Ze wzoru (4) wynika, że macierz G_{p-1} w (3) po wykonaniu odpowiedniej zamiany wierszy i kolumn można napisać w postaci

$$G_{p-1} = \begin{bmatrix} \hat{G}_{p-1} & 0 \\ 0 & \overline{G}_{p-1} \end{bmatrix}$$

gdzie $\hat{G}_{p-1}$ jest macierzą o wymiarach $p(p+1) \times p(p+1)$ odpowiadającą równaniu $L_p z = 0$. Zauważmy, że warunek rząd $G_{p-1} = np$ implikuje rząd $\hat{G}_{p-1} = p(p+1)$ oraz rząd $\overline{G}_{p-1} = p(n-p-1)$. Wobec tego równanie $L_p z = 0$ nie ma rozwiązania stopnia niższego niż p.

■

W przypadku ogólnym zakładamy, że
1. rząd $[Es - A] = r < \min(m, n)$;
2. kolumny i wiersze $[Es - A]$ są liniowo zależne nad C, tj. istnieją $x \in C^n$ i $v \in C^m$ (niezależne od s) takie, że

$$[Es - A]x = 0 \tag{17.13}$$

oraz

$$[Es - A]^T v = 0 \tag{17.14}$$

Niech równanie (13) ma p_0 liniowo niezależnych rozwiązań $x_1, x_2, ..., x_{p_0}$. Wybierając te rozwiązania jako pierwsze p_0 wektory bazowe przestrzeni C^n, otrzymamy ściśle równoważny pęk mający postać

$$[0_{np_0} \ \vdots \ \overline{E}s - \overline{A}] \tag{17.15}$$

gdzie 0_{np_0} jest macierzą zerową o wymiarach $n \times p_0$.

Analogicznie niech równanie (14) ma q_0 liniowo niezależnych rozwiązań $v_1, v_2, ..., v_{q_0}$. Wybierając te rozwiązania jako pierwsze q_0 wektory bazowe przestrzeni C^m, otrzymamy ściśle równoważny pęk mający postać

$$\begin{bmatrix} & \vdots \ 0_{q_0, n-p_0} \\ 0_{n,p_0} & \vdots \ \tilde{E}s - \tilde{A} \end{bmatrix} \tag{17.16}$$

gdzie $\left[\tilde{E}s - \tilde{A}\right]$ ma wiersze i kolumny liniowo niezależne nad C.

Niech kolumny $[\tilde{E}s - \tilde{A}]$ będą liniowo zależne nad ciałem funkcji wymiernych $C(s)$ i równanie

$$[\tilde{E}s - \tilde{A}]x = 0$$

ma rozwiązanie wielomianowe minimalnego stopnia p_1. Stosując lemat 1 do pęku $[\tilde{E}s-\tilde{A}]$ otrzymamy pęk ściśle równoważny mający postać

$$(17.17)\qquad \left[\begin{array}{c|cc} & 0_{q_0,n-p_0} & \\ 0_{n,p_0} & L_{p1} & 0 \\ & 0 & E_1s-A_1 \end{array}\right]$$

przy czym równanie

$$(17.18)\qquad [E_1s-A_1]x=0$$

nie ma rozwiązań wielomianowych stopnia niższego niż p_1.

Jeżeli równanie (18) ma rozwiązanie wielomianowe stopnia minimalnego p_2, to kontynuując tę procedurę otrzymamy ściśle równoważny pęk o postaci

$$(17.19)\qquad \left[\begin{array}{c|c} & 0_{q_0,n-p_0} \\ 0_{np_0} & \mathrm{diag}\left[L_{p_1}, L_{p_2},\ldots,L_{p_w}, E_ws-A_w\right] \end{array}\right]$$

przy czym $p_1\le p_2\le\cdots\le p_w$, a równanie $[E_ws-A_w]x=0$ nie ma niezerowych rozwiązań wielomianowych.
Jeżeli pęk $[E_ws-A_w]$ ma liniowo zależne wiersze nad $\boldsymbol{C}(s)$, a równanie

$$[E_ws-A_w]^T v=0$$

ma rozwiązanie wielomianowe minimalnego stopnia q_1, to stosując lemat 1 do $[E_ws-A_w]^T$ otrzymamy pęk ściśle równoważny mający postać

$$(17.20)\qquad \left[\begin{array}{c|c} & 0_{q_0,n-p_0} \\ 0_{np_0} & \mathrm{diag}\left[L_{p_1}, L_{p_{2_q}},\ldots,L_{p_w}, L_{q1}^T, E_1's-A_1'\right] \end{array}\right]$$

przy czym równanie

$$(17.21)\qquad [E_1's-A_1']^T v=0$$

nie ma rozwiązań wielomianowych stopnia niższego niż q_1.

Jeżeli równanie (21) ma rozwiązanie wielomianowe stopnia minimalnego q_2, to kontynuując tę procedurę otrzymamy ściśle równoważny pęk mający postać

$$(17.22)\qquad \left[\begin{array}{c|c} & 0_{q_0,n-p_0} \\ 0_{np_0} & \mathrm{diag}\left[L_{p_1},\ldots,L_{p_w}, L_{q1}^T,\ldots,L_{q_s}^T, E_0s-A_0\right] \end{array}\right]$$

gdzie $[E_0s-A_0]$ jest pękiem regularnym.
Stosując do pęku $[E_0s-A_0]$ twierdzenie 16.4 otrzymamy ostatecznie postać kanoniczną Weierstrassa-Kroneckera rozpatrywanego pęku singularnego, czyli

(17.23)
$$\left[\begin{array}{c|c} & 0_{q_0,n-p_0} \\ 0_{np_0} & \mathrm{diag}\left[L_{p_1},\ldots,L_{p_w}, L_{q1}^T,\ldots,L_{q_s}^T, H_{n_1}s-I_{n_1},\ldots,H_{n_t}s-I_{n_t}, I_rs-J\right] \end{array}\right]$$

przy czym pękowi regularnemu E_0s-A_0 odpowiada pęk mający postać

$$\mathrm{diag}\,[H_{n_1}s-I_{n_1},\ldots,H_{n_t}s-I_{n_t}, I_rs-J].$$

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie Weierstrassa-Kroneckera o dekompozycji pęku singularnego.

Twierdzenie 1.17.1. Dowolny pęk singularny $[Es-A]$ jest ściśle równoważny pękowi (23).

1.17.2. Indeksy Kroneckera pęku singularnego oraz ścisła równoważność pęków singularnych

Weźmy pod uwagę pęk $[Es-A]$ dla $E,A\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$. Niech $x_1(s)$ będzie niezerowym rozwiązaniem wielomianowym minimalnego stopnia p_1 równania

$$(17.24)\qquad [Es-A]x=0$$

Spośród rozwiązań wielomianowych równania, liniowo niezależnych od $x_1(s)$ nad $\boldsymbol{C}(s)$ wybieramy rozwiązanie $x_2(s)$ minimalnego stopnia $p_2(p_2\ge p_1)$. Następnie spośród rozwiązań wielomianowych równania (24) liniowo niezależnych od $x_1(s)$

i $x_2(s)$ nad $\boldsymbol{C}(s)$ wybieramy rozwiązania $x_3(s)$ minimalnego stopnia $p_3(p_3 \geq p_2)$. Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciąg rozwiązań wielomianowych równania (24) o postaci

(17.25) $$x_1(s),\ x_2(s), \dots,\ x_w(s)\ (w \leq n)$$

ze stopniami

(17.26) $$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_w$$

W wypadku ogólnym dla danego pęku $[Es - A]$ istnieje wiele ciągów rozwiązań wielomianowych (25) równania (24). Pokażemy, że wszystkie te ciągi rozwiązań wielomianowych mają ten sam ciąg stopni (26).

Przypuśćmy, że $\overline{x}_1(s),\ \overline{x}_2(s),\ \dots,\ \overline{x}_w(s)$ ze stopniami $\overline{p}_1 \leq \overline{p}_2 \leq \dots \leq \overline{p}_w$ jest innym ciągiem rozwiązań wielomianowych równania (24). Niech

$$p_1 = \dots = p_{n_1} < p_{n_1+1} = \dots = p_{n_2} < p_{n_2+1} = \dots$$

oraz

$$\overline{p}_1 = \dots = \overline{p}_{\overline{n}_1} < \overline{p}_{\overline{n}_1+1} = \dots = \overline{p}_{\overline{n}_2} < \overline{p}_{\overline{n}_2+1} = \dots$$

Ze sposobu wyboru $x_1(s)$ i $\overline{x}_1(s)$ wynika, że $p_1 = \overline{p}_1$. Zauważmy, że $\overline{x}_i(s)$ dla $i = 1, \dots, \overline{n}_1$ jest liniową kombinacją $x_1(s), \dots, x_{n_1}(s)$, gdyż w wypadku przeciwnym $x_{n_1+1}(s)$ w (25) mógłby być zastąpiony wektorem wielomianowym stopnia niższego niż p_{n_1+1}. Podobnie $x_i(s)$ dla $i = 1, \dots, n_1$ jest liniową kombinacją $\overline{x}_1(s), \dots, \overline{x}_{n_1}(s)$. Wobec tego $n_1 = \overline{n}_1$ oraz $p_{n_1+1} = \overline{p}_{\overline{n}_1+1}$. W podobny sposób można pokazać, że $p_{n_2+1} = \overline{p}_{\overline{n}_2+1}$.

Definicja 1.17.2. Nieujemne liczby całkowite $p_1, p_2, \dots, p_w$ nazywamy minimalnymi indeksami kolumnowymi (Kroneckera) pęku $[Es - A]$.

Niech $v_1(s)$ będzie niezerowym rozwiązaniem wielomianowym minimalnego stopnia q_1 równania

(17.27) $$[Es - A]^T v = 0$$

Spośród rozwiązań wielomianowych tego równania, liniowo niezależnych nad $\boldsymbol{C}(s)$ od $v_1(s)$, wybieramy rozwiązanie $v_2(s)$ minimalnego stopnia q_2 $(q_2 \geq q_1)$. Kontynuując tę procedurę otrzymamy ciąg rozwiązań wielomianowych równania (27) w postaci

(17.28) $$v_1(s),\ v_2(s), \dots,\ v_s(s)\ (s \leq n)$$

ze stopniami

(17.29) $$q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$$

Analogicznie do (25) i (26) można pokazać, że wszystkie ciągi rozwiązań wielomianowych (28) równania (27) mają te same ciągi minimalnych stopni (29).

Definicja 1.17.3. Nieujemne liczby całkowite $q_1, q_2, \dots, q_s$ nazywamy minimalnymi indeksami wierszowymi (Kroneckera) pęku $[Es - A]$.

Lemat 1.17.2. Pęki ściśle równoważne mają te same minimalne indeksy kolumnowe i wierszowe Kroneckera.

Dowód. Weźmy pęki ściśle równoważne $[E_1 s - A_1]$ i $[E_2 s - A_2]$, tzn. związane zależnością $[E_2 s - A_2] = P[E_1 s - A_1]Q$.

Mnożąc lewostronnie równanie

(17.30) $$[E_1 s - A_1]x = 0$$

przez macierz nieosobliwą P i definiując nowy wektor $z = Q^{-1}x$ (Q jest macierzą nieosobliwą), otrzymamy

(17.31) $$P[E_1 s - A_1]QQ^{-1}x = [E_2 s - A_2]z = 0$$

Tak więc pęki te mają te same minimalne indeksy kolumnowe, gdyż stopień x w (30) jest równy stopniowi z w (31). W podobny sposób możemy wykazać, że pęki te mają te same minimalne indeksy wierszowe.

■

Lemat 1.17.3. Postać kanoniczna Weierstrassa-Kroneckera (23) pęku $[Es - A]$ jest całkowicie określona przez p_0 minimalnych indeksów kolumnowych, równych zeru, i niezerowych minimalnych indeksów kolumnowych $p_1, p_2, ..., p_w, q_0$ minimalnych indeksów wierszowych równych zeru i niezerowych minimalnych indeksów wierszowych $q_1, q_2, ..., q_s$ oraz przez jego skończone i nieskończone dzielniki elementarne.

Dowód. Macierz L_{p_i} $(i = 1,..., w)$ ma tylko jeden minimalny indeks kolumnowy p_i, gdyż równanie $L_{p_i} z = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie wielomianowe stopnia p_i i wiersze macierzy L_{p_i} są liniowo niezależne. Podobnie macierz $L_{q_j}^T$ $(j = 1,..., s)$ ma tylko jeden minimalny indeks zerowy q_j, gdyż równanie $L_{q_j}^T v = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie wielomianowe stopnia q_j i kolumny macierzy $L_{q_j}^T$ są liniowo niezależne. Łatwo sprawdzić, że macierz L_{p_i} (odpowiednio $L_{q_j}^T$) nie ma dzielników elementarnych, gdyż jeden z jej minorów, najwyższego rzędu p_i (odpowiednio q_j), jest równy jedności, a drugi jest równy s^{p_i} (s^{q_j}).
Pierwsze p_0 kolumn macierzy (23) odpowiada rozwiązaniom wielomianowym zerowego stopnia równania (13). Wobec tego pierwsze p_0 minimalnych indeksów kolumnowych $[Es - A]$ jest równych zeru. Dualnie pierwsze q_0 minimalnych indeksów wierszowych $[Es - A]$ jest równa zeru.
Zauważmy, że pęk $[E_0 s - A_0]$ w (22) jest regularny, wobec tego jest całkowicie określony przez swoje skończone i nieskończone dzielniki elementarne. Z postaci blokowo-diagonalnej (23) wynika, że postać kanoniczna pęku $[Es - A]$ jest całkowicie określona przez minimalne indeksy kolumnowe, wierszowe oraz skończone i nieskończone dzielniki elementarne każdego z bloków diagonalnych.

■

Z lematów 2 i 3 oraz z faktu, że dwa pęki singularne mające te same postacie kanoniczne są ściśle równoważne, wynika następujące twierdzenie Kroneckera:

Twierdzenie 1.17.2 (Kroneckera). Dwa pęki singularne $[E_1 s - A_1]$, $[E_2 s - A_2]$ dla $E_k, A_k \in \mathbf{C}^{m \times n}$ $(k = 1, 2)$ są ściśle równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same minimalne indeksy kolumnowe i wierszowe oraz te same skończone i nieskończone dzielniki elementarne.

2. Funkcje i macierze wymierne

2.1. Podstawowe definicje i działania na funkcjach wymiernych

Funkcją wymierną zmiennej s nazywamy iloraz

(1.1) $$w(s) = \frac{l(s)}{m(s)}$$

dwóch wielomianów $l(s)$ i $m(s)$ tej zmiennej s, przy czym $m(s)$ jest wielomianem niezerowym.
Zbiór funkcji wymiernych o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{F}(s)$. Ciałem $\boldsymbol{F}$ może być ciało liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$, liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$, liczb wymiernych $\boldsymbol{W}$ lub ciało funkcji wymiernych innej zmiennej z, itp.
Mówimy, że funkcje wymierne

(1.2) $$w_1(s) = \frac{l_1(s)}{m_1(s)}, \quad w_2(s) = \frac{l_2(s)}{m_2(s)}$$

należą do tej samej klasy równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.3) $$l_1(s) m_2(s) = l_2(s) m_1(s)$$

Niech $l_1(s) = a(s)\bar{l}_1$ oraz $m_1(s) = a(s)\bar{m}_1(s)$, gdzie $a(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem $l_1(s)$ oraz $m_1(s)$. Wtedy

(1.4) $$w_1(s) = \frac{a(s)\bar{l}_1(s)}{a(s)\bar{m}_1(s)} = \frac{\bar{l}_1(s)}{\bar{m}_1(s)}$$

gdzie $\bar{l}_1(s)$ i $\bar{m}_1(s)$ są względnie pierwsze.
Funkcja wymierna (1) reprezentuje więc całą klasę równoważności. Mówimy, że funkcja wymierna (1) jest funkcją w postaci standardowej wtedy i tylko wtedy, gdy wielomiany $l(s)$ i $m(s)$ są względnie pierwsze i wielomian $m(s)$ jest wielomianem monicznym (tzn. współczynnik przy s w najwyższej potędze jest równy 1).

Miejsca zerowe wielomianu licznika $l(s)$ nazywamy zerami skończonymi (krótko zerami), a miejsca zerowe wielomianu mianownika $m(s)$ – biegunami skończonymi (krótko biegunami) funkcji wymiernej (1).

Definicja 2.1.1. Rzędem r funkcji wymiernej (1) nazywamy różnicę stopni mianownika $m(s)$ i licznika $l(s)$.

(1.5) $$r = \mathrm{st}\, m(s) - \mathrm{st}\, l(s)$$

gdzie st oznacza stopień wielomianu.

Niech

(1.6) $l(s) = l_m s^m + l_{m-1} s^{m-1} + \ldots + l_1 s + l_0$, $m(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$

Jeżeli wielomiany (6) są licznikiem i odpowiednio mianownikiem funkcji (1), to rząd tej funkcji jest równy $r = n - m$. Funkcja ta ma m skończonych zer i n skończonych biegunów. Jeżeli $r = n - m < 0$, to funkcja ta ma r-krotny biegun w nieskończoności ($s = \infty$), a jeżeli $r = n - m > 0$, to funkcja ta ma r-krotne zero w nieskończoności ($s = \infty$).

Definicja 2.1.2. Funkcję wymierną (1) nazywamy właściwą (lub przyczynową) wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest nieujemny ($r = \mathrm{st}\, m(s) - \mathrm{st}\, l(s) \geq 0$) oraz ściśle właściwą (lub ściśle przyczynową) wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest dodatni ($r = \mathrm{st}\, m(s) - \mathrm{st}\, l(s) > 0$).

Dzieląc licznik $l(s)$ przez mianownik $m(s)$ możemy funkcję wymierną (1) przedstawić również w postaci

(1.7) $$w(s) = w_r s^{-r} + w_{r+1} s^{-(r+1)} + \ldots$$

przy czym r jest rzędem funkcji (1) określonym zależnością (5), a $w_r, w_{r+1}, \ldots$ są współczynnikami zależnymi od współczynników wielomianów $l(s)$ i $m(s)$.

Na przykład dzieląc wielomian $l(s) = 2s + 1$ przez wielomian $m(s) = s^2 + 2s + 3$ otrzymamy

(1.8) $$w_1(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+3} = 2s^{-1} - 3s^{-2} + 9s^{-4} + \ldots$$

W tym wypadku $m = 1,\ n = 2,\ r = n - m = 1,\ w_1 = 2,\ w_2 = -3,\ w_3 = 0,\ w_4 = 9, \ldots$

Współczynniki w_r, $w_{r+1}, \ldots$ możemy wyznaczyć również w sposób następujący. Z równości

(1.9) $$w(s) = \frac{l_m s^m + l_{m-1} s^{m-1} + \ldots + l_1 s + l_0}{s^n + m_{n-1} s^{n-1} + \ldots + m_1 s + m_0} = w_r s^{-r} + w_{r+1} s^{-(r+1)} + \ldots$$

mamy

(1.10) $$l_m s^m + l_{m-1} s^{m-1} + \ldots + l_1 s + l_0 =$$
$$= (s^n + m_{n-1} s^{n-1} + \ldots + m_1 s + m_0)(w_r s^{-r} + w_{r+1} s^{-(r+1)} + \ldots)$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s, otrzymamy

(1.11) $w_r = l_m,\ w_{r+1} = l_{m-1} - m_{n-1} w_r,\ w_{r+2} = l_{m-2} - m_{n-1} w_{r+1} - m_{n-2} w_r, \ldots$

Korzystając z zależności (11) dla funkcji (8) otrzymamy ten sam wynik, jaki otrzymujemy metodą dzielenia wielomianów.
Z definicji 2 wynika, że funkcja (1) jest właściwa wtedy i tylko wtedy, gdy możemy ją przedstawić w postaci

(1.12) $$w(s) = w_0 + w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + \ldots$$

oraz $w_0 \neq 0$, a funkcją ściśle właściwą wtedy i tylko wtedy, gdy $w_0 = 0$.

Funkcje właściwe i ściśle właściwe nie mają biegunów w nieskończoności.
Funkcje wymierne (2) są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają warunek (3).
Funkcje wymierne w postaci (7) są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współczynniki w_k, $k = r, r+1, \ldots$ są sobie równe.

Sumą dwóch funkcji wymiernych (2) nazywamy funkcję wymierną określoną zależnością

(1.13) $$w_1(s) + w_2(s) = \frac{l_1(s)}{m_1(s)} + \frac{l_2(s)}{m_2(s)} = \frac{l_1(s)m_2(s) + l_2(s)m_1(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

Sumą dwóch funkcji wymiernych o postaci (7) nazywamy funkcję wymierną, której współczynniki w_k, $k = r, r+1, \ldots$ są sumami odpowiednich współczynników tych funkcji wymiernych.

Na przykład sumą funkcji wymiernej (8) oraz

(1.14) $$w_2(s) = \frac{2s^2+1}{s+2} = 2s - 4 + 9s^{-1} - 18s^{-2} + 36s^{-3} - 72s^{-4} + \ldots$$

jest funkcja wymierna

(1.15) $$w_1(s) + w_2(s) = 2s - 4 + 11s^{-1} - 21s^{-2} + 36s^{-3} - 61s^{-4} + \ldots$$

Iloczynem dwóch funkcji wymiernych (2) nazywamy funkcję wymierną określoną zależnością

(1.16) $$w_1(s)w_2(s) = \frac{l_1(s)l_2(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

Iloczynem dwóch funkcji wymiernych właściwych o postaci (12) oraz

$$\overline{w}(s) = \overline{w}_0 + \overline{w}_1 s^{-1} + \overline{w}_2 s^{-2} + \ldots$$

nazywamy funkcję wymierną

(1.17) $$w(s)\overline{w}(s) = w_0\overline{w}_0 + (w_0\overline{w}_1 + w_1\overline{w}_0)s^{-1} + (w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_1 + w_2\overline{w}_0)s^{-2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} w_i \overline{w}_{k-i} s^{-k}$$

Analogicznie definiujemy iloczyn dowolnych dwóch funkcji wymiernych o postaci (7). Na przykład iloczynem funkcji wymiernych (8) i (14) jest funkcja wymierna

$$w_1(s)w_2(s) = (2s^{-1} - 3s^{-2} + 9s^{-4} + \ldots)(2s - 4 + 9s^{-1} - 18s^{-2} + 36s^{-3} + \ldots)$$

$$= 4 - 14s^{-1} + 30s^{-2} + \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że przy tak określonych działaniach dodawania i mnożenia zbiór funkcji wymiernych spełnia warunki definicji ciała, przy czym zerem tego ciała jest funkcja wymierna o postaci $\frac{0}{1}$, a jedynką funkcja wymierna o postaci $\frac{1}{1}$ (0 oznacza wielomian zerowy, tzn. wielomian o zerowych współczynnikach, a 1 oznacza wielomian, którego wszystkie współczynniki, z wyjątkiem stojącego przy s^0 (równego 1), są równe zeru). Natomiast ze zbioru właściwych przyczynowych funkcji wymiernych o współczynnikach wielomianów z ciała $\boldsymbol{F}$ tworzy się pierścień, który oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{F}_p(s)$.

Jedność tego pierścienia tworzą właściwe przyczynowe funkcje rzędu r=0.

Szczególnym przypadkiem właściwych funkcji wymiernych są stabilne funkcje wymierne.

Definicja 2.1.3. Właściwą funkcję wymierną (12) nazywamy funkcją stabilną wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jej współczynników $w_0, w_1, w_2, \ldots$ jest zbieżny do zera.

Właściwa funkcja wymierna (1) jest stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej bieguny mają moduły mniejsze niż 1.
Stabilne funkcje wymierne o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ tworzą pierścień, który oznaczamy przez $\boldsymbol{F}_s(s)$. Jedność tego pierścienia tworzą stabilne funkcje wymierne, które mają zera tyko wewnątrz koła jednostkowego ($|s| < 1$).
Szczególnym przypadkiem właściwych funkcji wymiernych są skończone funkcje przyczynowe.

Definicja 2.1.4. Właściwą funkcję wymierną (12) nazywamy skończoną wtedy i tylko wtedy, gdy $w_k = 0$ dla $k > n$.

Skończona funkcja wymierna ma więc postać wielomianu zmiennej s^{-1}

$$w_n s^{-n} + w_{n-1}s^{-n+1} + \ldots + w_1 s^{-1} + w_0$$

Właściwa funkcja wymierna (1) jest skończona, jeżeli $m(s) = s^p$.
Zbiór skończonych funkcji o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ tworzy pierścień, który oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{F}[s^{-1}]$.
Niech $l(s)$ będzie wielomianem niezerowym. Wtedy funkcję odwrotną $w^{-1}(s)$ funkcji wymiernej (1) nazywamy funkcją w postaci

(1.18) $$w^{-1}(s) = \frac{m(s)}{l(s)}$$

Funkcja odwrotna $w^{-1}(s)$ funkcji (7) ma postać

(1.19) $$w^{-1}(s) = \hat{w}_{-r}s^{-r} + \ldots + \hat{w}_0 + \hat{w}_1 s^{-1} + \ldots + \hat{w}_r s^{-r} + \hat{w}_{r+1}s^{-(r+1)} + \ldots$$

Aby wyznaczyć nieznane współczynniki $\hat{w}_{-r}, \ldots, \hat{w}_0, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_r, \hat{w}_{r+1}, \ldots$ tej funkcji, korzystamy z warunku

(1.20) $$w(s)w^{-1}(s) = 1$$

oraz z reguły (17) mnożenia funkcji wymiernych.
Podstawiając (7) i (19) do (20) otrzymamy

$$\left(\sum_{i=r}^{\infty} w_i s^{-i}\right)\left(\sum_{j=-r}^{\infty} \hat{w}_j s^{-j}\right) = \sum_{i=r}^{\infty}\sum_{j=-r}^{\infty} w_i \hat{w}_j s^{-(i+j)} = 1 \tag{1.21}$$

Z równości współczynników przy tych samych potęgach zmiennej s w (21) mamy

$$\sum_{q=r}^{r+k} w_q \hat{w}_{k-q} = \begin{cases} 1 \text{ dla } k=0 \\ 0 \text{ dla } k=1,2,\ldots \end{cases} \tag{1.22}$$

Rozwiązując układ równań (22), wyznaczamy poszukiwane współczynniki funkcji (19).

Przykład 2.1.1. Dla funkcji wymiernej (8) w postaci

$$w(s) = 2s^{-1} - 3s^{-2} + 9s^{-4} + \ldots$$

wyznaczyć funkcję odwrotną

$$w^{-1}(s) = \hat{w}_{-1}s + \hat{w}_0 + \hat{w}_1 s^{-1} + \hat{w}_2 s^{-2} + \ldots$$

Zależność (21) w tym przypadku ma postać

$$(2s^{-1} - 3s^{-2} + 9s^{-4} + \ldots)(\hat{w}_{-1}s + \hat{w}_0 + \hat{w}_1 s^{-1} + \hat{w}_2 s^{-2} + \ldots) = 1$$

Z równości współczynników przy tych samych potęgach zmiennej s mamy

$$2\hat{w}_{-1} = 1,\ 2\hat{w}_0 - 3\hat{w}_{-1} = 0,\ 2\hat{w}_1 - 3\hat{w}_0 = 0,\ 2\hat{w}_2 - 3\hat{w}_1 + 9\hat{w}_{-1} = 0$$

oraz

$$\hat{w}_{-1} = \frac{1}{2},\ \hat{w}_0 = \frac{3}{2}\hat{w}_{-1} = \frac{3}{4},\ \hat{w}_1 = \frac{3}{2}\hat{w}_0 = \frac{9}{8},\ \hat{w}_2 = \frac{3}{2}\hat{w}_1 - \frac{9}{2}\hat{w}_{-1} = -\frac{9}{16}$$

Poszukiwana funkcja odwrotna ma więc postać

$$w^{-1}(s) = \frac{1}{2}s + \frac{3}{4} + \frac{9}{8}s^{-1} - \frac{9}{16}s^{-2} + \ldots$$

Dana jest dowolna funkcja wymierna w postaci szeregu (7). Znając współczynniki $w_k, k = r, r+1, \ldots$ tego szeregu wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję wymierną w postaci ilorazu dwóch wielomianów (1).
Rozwiązanie tego zadania opiera się na następującym lemacie.

Lemat 2.1.1. Niech

$$w(s) = \frac{l(s)}{m(s)} = \frac{l_{n-1}s^{n-1} + \ldots + l_1 s + l_0}{s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \ldots + m_1 s + m_0} = w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + w_3 s^{-3} + \ldots$$

oraz

$$T_k = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_k \\ w_2 & w_3 & \ldots & w_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_k & w_{k+1} & \ldots & w_{2k-1} \end{bmatrix},\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.23}$$

Jeżeli wielomiany $l(s)$ i $m(s)$ są względnie pierwsze, to

$$\det T_k = \begin{cases} \neq 0 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, n \\ = 0 \text{ dla } k = n+1 \end{cases} \tag{1.24}$$

Dowód. Aby uprościć obliczenia, szczegółowe rozważania przeprowadzimy dla $n = 2$. Rozważania dla $n > 2$ są analogiczne.
Dzieląc wielomian $l_1 s + l_0$ przez wielomian $s^2 + m_1 s + m_0$ otrzymamy

$$\frac{l_1 s + l_0}{s^2 + m_1 s + m_0} = w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + w_3 s^{-3} + \ldots \tag{1.25}$$

gdzie

$$w_1 = l_1 \neq 0,\ w_2 = l_0 - m_1 w_1,\ w_3 = -m_1 w_2 - m_0 w_1, \\ w_4 = -m_1 w_3 - m_0 w_2,\ w_5 = -m_1 w_4 - m_0 w_3, \ldots \tag{1.26}$$

$$\det T_2 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & -m_1 w_2 - m_0 w_1 \end{vmatrix} = -m_0 w_1^2 - l_0 w_2 = -m_0 l_1^2 - l_0^2 + m_1 l_0 l_1 \neq 0$$

gdyż z założenia zero $s^0 = -\dfrac{l_0}{l_1}$ funkcji wymiernej nie jest równe jej biegunowi

$$(-\frac{l_0}{l_1})^2 + m_1(-\frac{l_0}{l_1}) + m_0 = \frac{l_0^2 - m_1 l_0 l_1 + m_0 l_1^2}{l_1^2} \neq 0$$

Wykażemy teraz, że $\det T_3 = 0$. Rzeczywiście, korzystając z (26) oraz wykonując odpowiednie działania elementarne na wierszach, otrzymamy

$$\det T_3 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & w_4 & w_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & -m_0 w_2 - m_1 w_3 & -m_0 w_3 - m_1 w_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ m_0 w_1 + m_1 w_2 + w_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

gdyż $m_0 w_1 + m_1 w_2 + w_3 = 0$.

■

Na początku rozpatrzmy przypadek funkcji ściśle właściwej mającej postać

(1.27) $$w(s) = w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + \ldots$$

Znając współczynniki w_1, w_2,... funkcji (27), badamy rząd macierzy symetrycznej (23) kolejno dla k=1, 2, ... Zgodnie z lematem 1, jeżeli $\det T_k \neq 0$ dla k=1, ..., n oraz $\det T_{n+1} = 0$, to poszukiwany stopień wielomianu mianownika wynosi n, czyli

(1.28) $$m(s) = s^n + m_{n-1} s^{n-1} + \ldots + m_1 s + m_0$$

a licznik $l(s)$ jest wielomianem co najwyżej stopnia n–1

(1.29) $$l(s) = l_{n-1} s^{n-1} + \ldots + l_1 s + l_0$$

gdyż funkcja (27) jest ściśle właściwa.
Dzieląc wielomian (29) przez (28) otrzymamy

(1.30) $$\overline{w}(s) = \overline{w}_1 s^{-1} + \overline{w}_2 s^{-2} + \ldots$$

przy czym

(1.31) $$\overline{w}_1 = l_{n-1},\ \overline{w}_2 = l_{n-2} - l_{n-1} m_{n-1},\ \overline{w}_3 = l_{n-3} - m_{n-1}(l_{n-2} - l_{n-1} m_{n-1}), \ldots$$

Rozwiązując układ $2n$ równań mający postać

(1.32) $$\overline{w}_1 = l_{n-1} = w_1,\ \overline{w}_2 = l_{n-2} - l_{n-1} m_{n-1} - w_2,\ \overline{w}_3 = l_{n-3} - l_{n-1} m_{n-2}$$

$$- m_{n-1}(l_{n-2} - l_{n-1} m_{n-1}) - w_3, \ldots, \overline{w}_{2n} = w_{2n}$$

względem l_k oraz m_k dla k=0, 1, 2, ..., n–1, wyznaczamy poszukiwane wielomiany (28) i (29).

Przykład 2.1.2. Mając daną funkcję wymierną ściśle właściwą w postaci

$$w(s) = 2s^{-1} - 3s^{-2} + 9s^{-4} - 18s^{-5} + \ldots$$

wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję w postaci (1).

W tym wypadku wyznaczniki macierzy (23) kolejno są równe

$$\det T_1 = w_1 = 2,\ \det T_2 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\det T_3 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & w_4 & w_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & -18 \end{vmatrix} = 0$$

Wobec tego n=2 i poszukiwane wielomiany mają postacie

$$m(s) = s^2 + m_1 s + m_0,\ l(s) = l_1 s + l_0$$

Korzystając z (32), otrzymamy równania

$$l_1 = w_1 = 2,\ l_0 - 2m_1 = -3,\ -2m_0 - (l_0 - 2m_1) m_1 = 0,\ -(l_0 - 2m_1) m_0 = 9$$

których rozwiązaniem jest $l_0 = 1$, $l_1 = 2$, $m_0 = 3$, $m_1 = 2$,.
Poszukiwana funkcja ma więc postać

$$w(s) = \frac{l(s)}{m(s)} = \frac{2s+1}{s^2 + 2s + 3}$$

Wynik ten jest zgodny z (8).

Weźmy z kolei pod uwagę niewłaściwą funkcję wymierną w postaci

(1.33) $$w_{-r} s^r + \ldots + w_{-1} s + w_0 + w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + \ldots$$

Funkcję tę rozkładamy na wielomian

(1.34) $$q(s) = w_{-r}s^{r} + \ldots + w_{-1}s + w_0$$

oraz funkcję ściśle właściwą

(1.35) $$\overline{w}(s) = w_1 s^{-1} + w_2 s^{-2} + \ldots$$

Stosując wyżej wymienioną metodę wyznaczamy funkcję w postaci ilorazu dwóch wielomianów, odpowiadającą funkcji ściśle właściwej (35), a następnie dodajemy do niej wielomian (34), czyli

(1.36) $$w(s) = \frac{l(s)}{m(s)} + w_{-r}s^{r} + \ldots + w_{-1}s + w_0 = \frac{\tilde{l}(s)}{m(s)}$$

gdzie $\tilde{l}(s) = m(s)(w_{-r}s^{r} + \ldots + w_{-1}s + w_0)$

Przykład 2.1.3. Mając daną niewłaściwą funkcję wymierną o postaci

$$w(s) = 2s - 4 + 9s^{-1} - 18s^{-2} + 36s^{-3} - 72s^{-4} + \ldots$$

wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

W tym przypadku $q(s)=2s-4$, a $\overline{w}(s) = 9s^{-1} - 18s^{-2} + 36s^{-3} - 72s^{-4}$.
Aby wyznaczyć funkcję w postaci (1) odpowiadającą funkcji ściśle właściwej $\overline{w}(s)$, obliczamy wyznaczniki macierzy (23) kolejno dla k=1, 2, ... Otrzymujemy $\det T_1 = 9$, $\det T_2 = \begin{vmatrix} 9 & -18 \\ -18 & 36 \end{vmatrix} = 0$. Wobec tego n = 1, a poszukiwane wielomiany mają postacie $m(s) = s + m_0$, $l(s) = l_0$.

Korzystając z (32) otrzymamy

$$l_0 = w_1 = 9,\ -m_0 l_0 = w_2 = -18,\ m_0 = 2$$

Poszukiwana funkcja, zgodnie z (36), ma więc postać

$$w(s) = \frac{l(s)}{m(s)} + q(s) = \frac{9}{s+2} + 2s - 4 = \frac{2s^2+1}{s+2}$$

Wynik ten jest zgodny z (14).

2.2. Rozkład funkcji wymiernych na sumę funkcji wymiernych

Dowolną funkcję wymierną (1.1) można rozłożyć jednoznacznie na sumę ściśle właściwej funkcji wymiernej $\dfrac{r(s)}{m(s)}$ i funkcji wielomianowej $q(s)$, czyli

(2.1) $$w(s) = \frac{r(s)}{m(s)} + q(s)$$

przy czym st $r(s)$ < st $m(s)$.
Aby rozłożyć funkcję wymierną (1.1) na sumę (1), dzielimy wielomian $l(s)$ przez $m(s)$ i otrzymamy wtedy

$$l(s) = q(s)m(s) + r(s)$$

przy czym $q(s)$ i $r(s)$ są odpowiednio częścią całkowitą i resztą z dzielenia $l(s)$ przez $m(s)$.
Podstawiając (2) do (1.1), otrzymujemy (1). Jeżeli st $l(s)$ < st $m(s)$, to $q(s)$ jest wielomianem zerowym i $l(s) = r(s)$.
Na przykład funkcję wymierną (1.14) rozłożyć możemy na ściśle właściwą funkcję wymierną $\dfrac{9}{s+2}$ oraz wielomian $2s - 4$, gdyż

$$\frac{2s^2+1}{s+2} = \frac{9}{s+2} + 2s - 4$$

Weźmy pod uwagę ściśle właściwą funkcję wymierną w postaci

(2.3) $$w(s) = \frac{l(s)}{m_1(s)m_2(s)\ldots m_p(s)}$$

przy czym wielomiany $m_1(s), m_2(s), \ldots, m_p(s)$ są parami względnie pierwsze.
Wykażemy, że funkcję wymierną (3) można rozłożyć jednoznacznie na sumę ściśle właściwych funkcji wymiernych $\dfrac{l_k(s)}{m_k(s)}$, $k = 1, \ldots, p$, czyli

(2.4) $$w(s) = \frac{l_1(s)}{m_1(s)} + \frac{l_2(s)}{m_2(s)} + \ldots + \frac{l_p(s)}{m_p(s)}$$

przy czym st $l_k(s)$ < st $m_k(s)$ dla k=1, ..., p

Aby uprościć rozważania, załóżmy że $p = 2$. Wtedy z (3) i (4) otrzymamy

$$(2.5)\qquad \frac{l(s)}{m_1(s)m_2(s)} = \frac{l_1(s)}{m_1(s)} + \frac{l_2(s)}{m_2(s)} = \frac{l_1(s)m_2(s) + l_2(s)m_1(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

Niech

(2.6)

$$l(s) = l_{n-1}s^{n-1} + l_{n-2}s^{n-2} + \ldots + l_1 s + l_0,\ m_1(s) = s^{n_1} + a_{n_1-1}s^{n_1-1} + \ldots + a_1 s + a_0$$
$$m_2(s) = s^{n_2} + b_{n_2-1}s^{n_2-1} + \ldots + b_1 s + b_0,\ l_1(s) = c_{n_1-1}s^{n_1-1} + c_{n_1-2}s^{n_1-2} + \ldots + c_1 s + c_0$$
$$l_2(s) = d_{n_2-1}s^{n_2-1} + d_{n_2-2}s^{n_2-2} + \ldots + d_1 s + d_0,\ n = n_1 + n_2$$

Z równości (5) mamy

$$(2.7)\qquad l(s) = l_1(s)m_2(s) + l_2(s)m_1(s)$$

a po podstawieniu (6) do (7) otrzymamy

(2.8)
$$l_{n-1}s^{n-1} + l_{n-2}s^{n-2} + \ldots + l_1 s + l_0 = (c_{n_1-1}s^{n_1-1} + c_{n_1-2}s^{n_1-2} + \ldots + c_1 s + c_0)$$
$$(s^{n_2} + b_{n_2-1}s^{n_2-1} + \ldots + b_1 s + b_0) + (d_{n_2-1}s^{n_2-1} + d_{n_2-2}s^{n_2-2} + \ldots + d_1 s + d_0)$$
$$(s^{n_1} + a_{n_1-1}s^{n_1-1} + \ldots + a_1 s + a_0)$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s równości (8) otrzymamy układ n równań liniowych w postaci

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &c_{n_1-1} + d_{n_2-1} = l_{n-1} \\ &c_{n_1-2} + c_{n_1-1}b_{n_2-1} + d_{n_2-2} + d_{n_2-1}a_{n_1-1} = l_{n-2} \\ &c_{n_1-3} + c_{n_1-1}b_{n_2-1} + c_{n_1-1}b_{n_2-2} + d_{n_2-3} + d_{n_2-2}a_{n_1-1} + d_{n_2-1}a_{n_1-2} \\ &\text{---} \\ &c_1 b_0 + c_0 b_1 + d_1 a_0 + d_0 a_1 = l_1 \\ &c_0 b_0 + d_0 a_0 = l_0 \end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że jeżeli $m_1(s), m_2(s)$ są parami względnie pierwszymi, to macierz współczynników układu równań (9) jest macierzą nieosobliwą.

Wobec tego układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie względem poszukiwanych współczynników c_k, $k = 0,1,\ldots,n_1 - 1$ wielomianu $l_1(s)$ oraz współczynników d_k, $k = 0,1,\ldots,n_2 - 1$ wielomianu $l_2(s)$ dla danych współczynników a_i, $i = 0,1,\ldots,n_1 - 1$, b_j, $j = 0,1,\ldots,n_2 - 1$ oraz l_k, $k = 0,1,\ldots,n - 1$ wielomianów $m_1(s)$, $m_2(s)$, $l(s)$.

Przykład 2.2.1. Rozłożyć funkcję wymierną

$$(2.10)\quad w(s) = \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{(s^2 + a_1 s + a_2)(s^2 + b_1 s + b_2)}, (l_0, l_1, l_2, l_3, a_1, a_2, b_1, b_2) - \text{dane}$$

na sumę funkcji wymiernych ściśle właściwych. W tym wypadku

$$(2.11)\qquad \frac{l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0}{(s^2 + a_1 s + a_2)(s^2 + b_1 s + b_2)} = \frac{x_1 s + x_2}{s^2 + a_1 s + a_2} + \frac{x_3 s + x_4}{s^2 + b_1 s + b_2}$$

Z zależności (11) mamy

$$(2.12)\quad l_3 s^3 + l_2 s^2 + l_1 s + l_0 = (x_1 s + x_2)(s^2 + b_1 s + b_2) + (x_3 s + x_4)(s^2 + a_1 s + a_2)$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s, otrzymamy

$$(2.13)\quad \begin{aligned} &l_3 = x_1 + x_3,\ l_2 = x_1 b_1 + x_2 + x_3 a_1 + x_4,\ l_1 = x_1 b_2 + x_2 b_1 + x_3 a_2 + x_4 a_1, \\ &l_0 = x_2 b_2 + x_4 a_2 \end{aligned}$$

Równanie (13) możemy napisać w postaci

$$(2.14)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & 1 & a_1 & 1 \\ b_2 & b_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \\ l_2 \\ l_1 \\ l_0 \end{bmatrix}$$

Macierz współczynników

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & 1 & a_1 & 1 \\ b_2 & b_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa, gdy $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ (wielomiany $s^2+a_1s+a_2$, $s^2+b_1s+b_2$ są względnie pierwsze), wtedy

$$\det A=(a_2-b_2)^2+b_2(a_1-b_1)^2-b_1(a_1-b_1)(a_2-b_2)$$

Rozwiązując równanie (14) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ b_1 & 1 & a_1 & 1 \\ b_2 & b_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} l_3 \\ l_2 \\ l_1 \\ l_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\frac{1}{a_2^2-b_1a_1a_2+b_2a_1^2-2b_2a_2+b_1^2a_2-b_1b_2a_1+b_2^2}$$

$$\begin{bmatrix} a_2^2-b_1a_1a_2+b_2a_1^2-b_2a_2 & b_1a_2-b_2a_1 & a_2-b_2 & a_1-b_1 \\ -a_2(b_1a_2-b_2a_1) & a_2(a_2-b_2) & -a_2(a_1-b_1) & -(-a_1^2+a_2+b_1a_1-b_2) \\ -(-b_1^2a_2+b_1b_2a_1+b_2a_2-b_2^2) & -(b_1a_2-b_2a_1) & a_2-b_2 & -(a_1-b_1) \\ b_2(b_1a_2-b_2a_1) & -b_2(a_2-b_2) & b_2(a_1-b_1) & a_2-b_1a_1+b_1^2-b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_3 \\ l_2 \\ l_1 \\ l_0 \end{bmatrix}$$

Poszukiwany rozkład ma więc postać

$$w(s)=\frac{x_1s+x_2}{s^2+a_1s+a_2}+\frac{x_3s+x_4}{s^2+b_1s+b_2}$$

Przykład 2.2.2. Rozłożyć ściśle właściwą funkcję wymierną

(2.15) $$w(s)=\frac{s^2-3s+2}{(s^2+3s+2)(s+3)}$$

na sumę dwóch ściśle właściwych funkcji wymiernych. W tym wypadku

$$l(s)=s^2-3s+2,\ m_1(s)=s^2+3s+2,\ m_2(s)=s+3$$

Zgodnie z zależnościami (5) i (6) poszukiwać będziemy

(2.16) $$l_1(s)=c_1s+c_0,\ l_2(s)=d$$

Zależność (7) w tym wypadku ma postać

(2.17) $$s^2-3s+2=(c_1s+c_0)(s+3)+d(s^2+3s+2)$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s, otrzymamy równania

$$c_1+d=1,\ c_0+3c_1+3d=-3,\ 3c_0+2d=2$$

których rozwiązaniem jest $c_0=-6$, $c_1=-9$, $d=10$.
Poszukiwany rozkład funkcji (15) ma więc postać

$$\frac{s^2-3s+2}{(s^2+3s+2)(s+3)}=-\frac{9s+6}{s^2+3s+2}+\frac{10}{s+3}$$

Weźmy pod uwagę ściśle właściwą funkcję wymierną w postaci

(2.18) $$w(s)=\frac{l(s)}{m(s)}$$

przy czym

(2.19) $$m(s)=(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\dots(s-s_p)^{n_p}$$

$\sum_{i=1}^{p} n_i=n=\text{st}\, m(s)>\text{st}\, l(s)$, $s_1,s_2,\dots,s_p$ są różnymi biegunami funkcji (18) o krotnościach odpowiednio $n_1,n_2,\dots,n_p$.

Funkcja (18) jest szczególnym przypadkiem funkcji (3) dla $m_k(s)=(s-s_k)^{n_k}$, $k=1,\dots,p$.

Ściśle właściwą funkcję wymierną $\dfrac{l_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}}$, $k=1,\dots,p$ możemy dalej rozłożyć i przedstawić jednoznacznie w postaci

(2.20) $$\frac{l_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}}=\sum_{i=1}^{n_k}\frac{l_{ki}}{(s-s_k)^{n_k-i+1}}$$

Korzystając z rozkładu (4) funkcji (18) oraz (20), otrzymamy

(2.21)
$$w(s)=\frac{l(s)}{m(s)}=\sum_{k=1}^{p}\frac{l_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{l_{ki}}{(s-s_k)^{n_k-i+1}}$$

przy czym współczynniki l_{ki} są określone wzorem

(2.22)
$$l_{ki}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}}\frac{l(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}\Big|_{s=s_k}$$

Wzór ten można wyprowadzić następująco.
Mnożąc równanie (21) przez $(s-s_k)^{n_k}$ otrzymamy

(2.23)
$$\frac{l(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}=l_{11}\frac{(s-s_k)^{n_k}}{(s-s_1)^{n_1}}+\dots+l_{m1}\frac{(s-s_k)^{n_k}}{(s-s_1)}+l_{k1}+l_{k2}(s-s_k)+\dots+$$
$$l_{kn_k}(s-s_k)^{n_k-1}+l_{p1}\frac{(s-s_k)^{n_k}}{(s-s_p)^{n_p}}+\dots+l_{pn_p}\frac{(s-s_k)^{n_k}}{(s-s_p)}$$

Z zależności (23) dla $s=s_k$ otrzymujemy kolejno

$$l_{k1}=\frac{l(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}\Big|_{s=s_k},\quad l_{k2}=\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{l(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}\Big)\Big|_{s=s_k},$$

$$l_{k3}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Big(\frac{l(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}\Big)\Big|_{s=s_k},\dots$$

czyli wzór (22).

Przykład 2.2.3. Dokonać rozkładu funkcji wymiernej ściśle właściwej

(2.24)
$$w(s)=\frac{s^2+3s+2}{(s-1)^2(s-2)}$$

na sumę (21). W tym wypadku $l(s)=s^2+3s+2,\ m(s)=(s-1)^2(s-2)$ oraz

$$\frac{s^2+3s+2}{(s-1)^2(s-2)}=\frac{l_{11}}{(s-1)^2}+\frac{l_{12}}{s-1}+\frac{l_{21}}{s-2}$$

Korzystając ze wzoru (22), otrzymamy

$$l_{11}=\frac{l(s)(s-1)^2}{(s-1)^2(s-2)}\Big|_{s=1}=\frac{l(s)}{s-2}\Big|_{s=1}=\frac{s^2+3s+2}{s-2}\Big|_{s=1}=-6$$

$$l_{12}=\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{l(s)}{s-2}\Big)\Big|_{s=1}=\frac{(2s+3)(s-2)-(s^2+3s+2)}{(s-2)^2}\Big|_{s=1}=-11$$

$$l_{21}=\frac{l(s)(s-2)}{(s-1)^2(s-2)}\Big|_{s=2}=\frac{l(s)}{(s-1)^2}\Big|_{s=2}=12$$

Poszukiwany rozkład funkcji (24) ma postać

$$\frac{s^2+3s+2}{(s-1)^2(s-2)}=-\frac{6}{(s-1)^2}-\frac{11}{s-1}+\frac{12}{s-2}$$

Weźmy z kolei pod uwagę niewłaściwą funkcję wymierną o postaci

(2.25)
$$w(s)=\frac{l(s)}{m_1(s)m_2(s)},\quad \mathrm{st}\,l(s)>\mathrm{st}\,m_1(s)+\mathrm{st}\,m_2(s)$$

przy czym $m_1(s)$, $m_2(s)$ są względnie pierwsze.
Wydzielając z funkcji (25) część wielomianową $q(s)$ (zgodnie z rozkładem (1)) otrzymamy

(2.26)
$$w(s)=\frac{\bar{l}(s)}{m_1(s)m_2(s)}+q(s)$$

przy czym $\mathrm{st}\,m_1(s)+\mathrm{st}\,m_2(s)>\mathrm{st}\,\bar{l}(s)$.
Korzystając z rozkładu (5) możemy funkcję (26) napisać w postaci

(2.27)
$$w(s)=\frac{\bar{l}_1(s)}{m_1(s)}+\frac{\bar{l}_2(s)}{m_2(s)}+q(s)$$

przy czym $\mathrm{st}\,m_1(s)>\mathrm{st}\,\bar{l}_1(s),\ \mathrm{st}\,m_2(s)>\mathrm{st}\,\bar{l}_2(s)$.
Niech $p(s)$ będzie dowolnym wielomianem. Funkcję (27) możemy wtedy napisać w postaci

$$(2.28)\qquad w(s)=\left(\frac{\bar{l}_1(s)}{m_1(s)}+p(s)\right)+\left(\frac{\bar{l}_2(s)}{m_2(s)}+q(s)-p(s)\right)=\frac{l_1(s)}{m_1(s)}+\frac{l_2(s)}{m_2(s)}$$

przy czym

$$l_1(s)=\bar{l}_1(s)+m_1(s)p(s),\ l_2(s)=\bar{l}_2(s)+m_2(s)(q(s)-p(s))$$

Rozkład (28) funkcji (25) nie jest więc rozkładem jednoznacznym, gdyż wielomian $p(s)$ jest dowolny.
Jeżeli z funkcji $\frac{l_1(s)}{m_1(s)}$, $\frac{l_2(s)}{m_2(s)}$ wydzielimy części wielomianowe $q_1(s)$ i odpowiednio $q_2(s)$, to otrzymamy

$$(2.29)\qquad w(s)=\frac{\tilde{l}_1(s)}{m_1(s)}+q_1(s)+\frac{\tilde{l}_2(s)}{m_2(s)}+q_2(s)$$

przy czym $\operatorname{st} m_1(s)>\operatorname{st}\tilde{l}_1(s)$, $\operatorname{st} m_2(s)>\operatorname{st}\tilde{l}_2(s)$.
Z porównania (27) i (29) wynika, że jednoznaczność rozkładu zachodzi dla $\bar{l}_1(s)=\tilde{l}_1(s)$, $\bar{l}_2(s)=\tilde{l}_2(s)$ oraz $q(s)=q_1(s)+q_2(s)$.
Przyjmując $p(s)=0$ w (28) możemy funkcję (25) przedstawić jako sumę

$$(2.30)\qquad w(s)=w_1(s)+w_2(s),\ w_1(s)=\frac{\bar{l}_1(s)}{m_1(s)},\ w_2(s)=\frac{\bar{l}_2(s)}{m_2(s)}+q(s)$$

lub

$$(2.31)\qquad w(s)=w_1(s)+w_2(s),\ w_1(s)=\frac{\bar{l}_1(s)}{m_1(s)}+q(s),\ w_2(s)=\frac{\bar{l}_2(s)}{m_2(s)}$$

Rozkład (30) nazywamy rozkładem minimalnym funkcji (25) względem $m_1(s)$, a rozkład (31) – rozkładem minimalnym funkcji (25) względem $m_2(s)$.
Rozważania te można uogólnić na przypadek funkcji wymiernej o postaci (3), korzystając z rozkładu (4).

2.3. Podstawowe definicje i działania na macierzach wymiernych

Macierzą wymierną $W(s)$ o wymiarach $m\times n$ nazywamy macierz o m wierszach i n kolumnach, której elementami są funkcje wymierne $w_{ij}(s)$ zmiennej s o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$, o postaci

$$(3.1)\qquad W(s)=\begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \cdots & w_{1n}(s)\\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \cdots & w_{2n}(s)\\ \hline w_{m1}(s) & w_{m2}(s) & \cdots & w_{mn}(s)\end{bmatrix}$$

Zbiór macierzy wymiernych o wymiarach $m\times n$ zmiennej s i współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{F}^{m\times n}(s)$. Ciałem $\boldsymbol{F}$ może być ciało liczb rzeczywistych, liczb zespolonych $\boldsymbol{C}$, liczb wymiernych $\boldsymbol{W}$ lub ciało funkcji wymiernych innej zmiennej z, itp.
Po sprowadzeniu wszystkich elementów $w_{ij}(s)$ macierzy (1) do wspólnego mianownika $m(s)$ o współczynniku równym 1 przy s w najwyższej potędze, możemy macierz tę przedstawić w postaci

$$(3.2)\qquad W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}$$

przy czym $L(s)\in \boldsymbol{F}^{m\times n}[s]$ jest macierzą wielomianową o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$, a $m(s)$ jest wielomianem.
Niech

$$(3.3)\qquad m(s)=(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\cdots(s-s_p)^{n_p},\ \sum_{i=1}^{p}n_i=\bar{n}.$$

Definicja 2.3.1. Macierz (2) nazywamy nieredukowalną (nieskracalną) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.4)\qquad L(s_k)\neq 0_{mn},\ k=1,...,p$$

gdzie 0_{mn} jest macierzą zerową o wymiarach $m\times n$.

Jeżeli $L(s_k)=0_{mn}$, to wszystkie elementy macierzy $L(s)$ są podzielne przez $(s-s_k)$ i wówczas macierz (2) jest redukowalna przez $(s-s_k)$.

Nieredukowalną macierz w postaci (2) nazywamy macierzą w postaci standardowej.
Pisząc macierz wielomianową $L(s)$ w postaci wielomianu macierzowego

(3.5) $$L(s) = L_q s^q + L_{q-1}s^{q-1} + \dots + L_1 s + L_0$$

możemy macierz (2) napisać w postaci

(3.6) $$W(s) = \frac{L_q s^q + L_{q-1}s^{q-1} + \dots + L_1 s + L_0}{m(s)}$$

Na przykład dla macierzy wymiernej

(3.7) $$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} & s \\ \frac{2}{s+2} & \frac{s+2}{s+1} & 2s \end{bmatrix}$$

najmniejszym wspólnym mianownikiem jej elementów jest wielomian $m(s) = (s+1)(s+2)$, którego miejscami zerowymi są: $s_1 = -1$, $s_2 = -2$.
Macierz wymierna (7) w postaci (2) jest równa

(3.8) $$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s(s+2) & s+1 & s(s+1)(s+2) \\ 2(s+1) & (s+2)^2 & 2s(s+1)(s+2) \end{bmatrix} = \frac{L(s)}{m(s)}$$

Macierz ta jest nieredukowalna, gdyż

$$L(s_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ L(s_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać (8) jest więc postacią standardową macierzy (7).
Macierz $L(s)$ napisana w postaci wielomianu macierzowego jest równa

$$L(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}s^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}s^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Wobec tego macierz (7) w postaci (6) jest równa

(3.9)
$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}s^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}s^2 + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Definicja 2.3.2. Macierz wymierną (2) nazywamy właściwą (lub przyczynową) wtedy i tyko wtedy, gdy st $m(s) \geq$ st $L(s)$ oraz ściśle właściwą (lub ściśle przyczynową) wtedy i tylko wtedy, gdy st $m(s)$ > st $L(s)$.

Macierz (7) nie jest macierzą właściwą, gdyż jak wynika z (9), st $L(s)$=3, a st $m(s)$=2.

Dzieląc każdy element macierzy $L(s)$ przez $m(s)$ możemy macierz wymierną (2) przedstawić w postaci

(3.10) $$W(s) = W_r s^{-r} + W_{r+1}s^{-(r+1)} + \dots$$

przy czym r=st $m(s)$ – st $L(s)$ jest rzędem macierzy, a W_r, $W_{r+1}, \dots$ są macierzami współczynników zależnymi od współczynników wielomianu $m(s)$ i macierzy wielomianowej $L(s)$.

Na przykład biorąc pod uwagę, że

$$\frac{s}{s+1} = 1 - s^{-1} + s^{-2} - s^{-3} + \dots,\quad \frac{1}{s+2} = s^{-1} - 2s^{-2} + 4s^{-3} + \dots,$$

$$\frac{s+2}{s+1} = 1 + s^{-1} - s^{-2} + s^{-3} + \dots$$

możemy macierz (7) napisać w postaci

(3.11)
$$\begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} & s \\ \frac{2}{s+2} & \frac{s+2}{s+1} & 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}s^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}s^{-2} + \dots$$

W tym wypadku $r = -1$.

Sumę (różnicę) i iloczyn macierzy wymiernych definiujemy analogicznie jak sumę (różnicę) i iloczyn dwóch funkcji wymiernych.

Korzystając z (10) łatwo wykazać, że suma, różnica i iloczyn dwóch macierzy ściśle właściwych jest macierzą ściśle właściwą.
Zbiór właściwych (przyczynowych) macierzy wymiernych zmiennej s o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ i wymiarach $m\times n$ oznaczać będziemy $\boldsymbol{F}_p^{m\times n}(s)$. Elementy tych macierzy należą do pierścienia $\boldsymbol{F}_p(s)$. Możemy więc zdefiniować macierz $F_p(s)$–unimodularną jako macierz nieosobliwą, której wyznacznik jest jednością pierścienia $\boldsymbol{F}_p(s)$.

Definicja 2.3.3. $F_p(s)$ działaniami elementarnymi na wierszach i odpowiednio na kolumnach macierzy nazywamy następujące działania:

1. Pomnożenie dowolnego i-tego wiersza (lub kolumny) przez jedność pierścienia $\boldsymbol{F}_p(s)$. Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i\times w(s)]$ $(P[i\times w(s)])$.
2. Dodanie do i-tego wiersza (kolumny) wiersza j-tego (kolumny) pomnożonego przez dowolną właściwą (przyczynową) funkcję wymierną $\overline{w}(s)$. Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i+j\times\overline{w}(s)]$ $(P[i+j\times\overline{w}(s)])$.
3. Zamiana miejscami dowolnych dwóch wierszy i, j (kolumn). Działanie to oznaczać będziemy przez $L[i,j]$ $(P[i,j])$.

Analogicznie jak dla macierzy wielomianowych możemy zdefiniować $F_p(s)$-równoważność właściwych macierzy wymiernych.

Definicja 2.3.4. Dwie właściwe macierze wymierne $W_1(s)$ i $W_2(s)$ o tych samych wymiarach nazywamy $F_p(s)$–równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją macierze $F_p(s)$–unimodularne $L_p(s)$ i $P_p(s)$ takie, że

$$W_1(s)=L_p(s)W_2(s)P_p(s) \tag{3.12}$$

Macierze $L_p(s)$ i $P_p(s)$ są iloczynami macierzy $F_p(s)$ działań elementarnych na wierszach i kolumnach.
Stosując $F_p(s)$–równoważność możemy każdą właściwą macierz wymierną $W(s)\in\boldsymbol{F}_p^{m\times n}(s)$ przekształcić do uogólnionej postaci kanonicznej Smitha

$$W_S(s)=\mathrm{diag}[s^{-d_1},s^{-d_2},\dots,s^{-d_r},0,\dots,0]\in\boldsymbol{F}_p^{m\times n}(s) \tag{3.13}$$

przy czym $d_1\le d_2\le\dots\le d_r$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi jednoznacznie określonymi przez macierz $W(s)$, a r = rząd $W(s)$.

Na przykład właściwą macierz wymierną

$$W(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s+1} & \dfrac{s}{s+2}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s(s+2)}\end{bmatrix}$$

możemy przekształcić przez $F_p(s)$–równoważność do postaci

$$W_S(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s^{-1}\end{bmatrix},\ (d_1=0,\ d_2=1)$$

stosując następujące $F_p(s)$ działania elementarne na wierszach: $L[2+1\times(-\frac{1}{s})]$, $L[1\times\frac{s+1}{s}]$ oraz na kolumnach: $P[2+1\times(-\frac{s+1}{s+2})]$, $P[2\times\frac{s+2}{1-s}]$. Macierze $F_p(s)$ działań elementarnych mają postacie:

$$L_p(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+1}{s} & 0\\ -\dfrac{1}{s} & 1\end{bmatrix},\ P_p(s)=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{s+1}{1-s}\\ 0 & \dfrac{s+2}{1-s}\end{bmatrix}$$

Definicja 2.3.4. Macierzą stabilną nazywamy macierz wymierną, której elementy są stabilnymi funkcjami właściwymi (przyczynowymi).

Zbiór stabilnych macierzy wymiernych o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ i wymiarach $m\times n$ będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{F}_s^{m\times n}(s)$. Zbiór ten stanowi podzbiór zbioru właściwych macierzy wymiernych $\boldsymbol{F}_p^{m\times n}(s)$.
Skończoną macierzą wymierną nazywamy macierz, której elementy są skończonymi funkcjami właściwymi. Zbiór skończonych macierzy wymiernych o współczynnikach z ciała $\boldsymbol{F}$ i wymiarach $m\times n$ będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{F}^{m\times n}[s^{-1}]$.
Weźmy pod uwagę funkcję wymierną

$$w(s)=\frac{l(s)}{m(s)} \tag{3.14}$$

taką, że $l(s)$ i $m(s)$ są elementami względnie pierwszymi jednego z następujących pierścieni $\boldsymbol{F}_p(s)$, $\boldsymbol{F}_s(s)$, $\boldsymbol{F}[s^{-1}]$.
Analogicznie, jak wyżej, można zdefiniować zbiór macierzy wymiernych, których elementami są funkcje wymierne w postaci (14).

2.4. Rozkład macierzy wymiernych na sumę macierzy wymiernych

Dowolną macierz wymierną (3.1) można rozłożyć na sumę ściśle właściwej macierzy wymiernej $\frac{R(s)}{m(s)}$ oraz macierzy wielomianowej $Q(s)$, czyli

(4.1) $$W(s)=\frac{R(s)}{m(s)}+Q(s)$$

przy czym st $m(s)$ > st $R(s)$.
Aby rozłożyć macierz wymierną (3.2) na sumę (1), dzielimy każdy element $l_{ij}(s)$ macierzy $L(s)$ przez $m(s)$

(4.2) $$l_{ij}(s)=q_{ij}(s)m(s)+r_{ij}(s),\ i=1,...,m;\ j=1,...,n$$

przy czym $q_{ij}(s)$ i $r_{ij}(s)$ są odpowiednio częścią całkowitą i resztą z dzielenia.
Podstawiając (2) do (3.2) oraz definiując $Q(s)=[q_{ij}(s)],\ R(s)=[r_{ij}(s)]$ otrzymujemy (1).
Jeżeli st $L(s)$ < st $m(s)$ to $Q(s)$ jest macierzą zerową, a $R(s)=L(s)$.
Weźmy pod uwagę macierz wymierną ściśle właściwą o postaci

(4.3) $$W(s)=\frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)...m_p(s)}$$

przy czym wielomiany $m_1(s),\ m_2(s),\ ...,\ m_p(s)$ są parami względnie pierwsze.
Macierz (3) można rozłożyć jednoznacznie na sumę p ściśle właściwych macierzy wymiernych $\frac{L_k(s)}{m_k(s)}$, $k=1,...,p$, czyli

(4.4) $$W(s)=\frac{L_1(s)}{m_1(s)}+\frac{L_2(s)}{m_2(s)}+...+\frac{L_p(s)}{m_p(s)}$$

przy czym st $m_k(s)>$ st $L_k(s),\ k=1,...,p$.
Aby dokonać rozkładu (4), należy zastosować do każdego elementu $l_{ij}(s)$ macierzy $L(s)$ procedurę przedstawioną w punkcie 2.

Weźmy pod uwagę macierz ściśle właściwą (3.2) dla $m(s)$ o postaci (2.19).
Macierz ta jest szczególnym przypadkiem macierzy (3) dla $m_k(s)=(s-s_k)^{n_k}$, $k=1,...,p$.

Ściśle właściwą macierz wymierną $\frac{L_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}}$, $k=1,...,p$ możemy dalej rozłożyć jednoznacznie w postaci

(4.5) $$\frac{L_k(s)}{(s-s_k)^{n_k}}=\sum_{i=1}^{n_k}\frac{L_{ki}}{(s-s_k)^{n_k-i+1}},k=1,...,p$$

Korzystając z rozkładu (5) dla każdej składowej sumy (4), otrzymamy

(4.6) $$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{L_{ki}}{(s-s_k)^{n_k-i+1}}$$

przy czym macierze współczynników L_{ki} są określone wzorem

(4.7) $$L_{ki}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\partial^{i-1}}{\partial s^{i-1}}\frac{L(s)(s-s_k)^{n_k}}{m(s)}\bigg|_{s=s_k},\ k=1,...,p;\ i=1,...,n_k$$

Wzór ten wynika z zastosowania wzoru (2.22) do każdego elementu macierzy $L(s)$.

Przykład 2.4.1. Dokonać rozkładu macierzy wymiernej mającej postać

(4.8) $$W(s)=\begin{bmatrix}\frac{s}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{2}{s+2} & \frac{4}{s+1}\end{bmatrix}$$

Macierz tę zapisujemy w postaci (3)

(4.9) $$W(s)=\frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

przy czym

$$m_1(s)=(s+1)^2,\ m_2(s)=s+2,\ L(s)=\begin{bmatrix}s(s+2) & (s+1)^2\\ 2(s+1)^2 & 4(s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

Poszukujemy rozkładu macierzy (8) w postaci

(4.10) $$W(s)=\frac{L_{11}}{(s+1)^2}+\frac{L_{12}}{s+1}+\frac{L_{21}}{s+2}$$

Korzystając ze wzoru (7), otrzymamy

(4.11) $$L_{11}=\left.\frac{L(s)}{s+2}\right|_{s=-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$L_{12}=\left.\frac{\partial}{\partial s}\frac{L(s)}{s+2}\right|_{s=-1}=\left.\frac{\dfrac{dL(s)}{ds}(s+2)-L(s)\dfrac{d(s+2)}{ds}}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$
$$L_{21}=\left.\frac{L(s)}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Podstawiając (11) do (10), otrzymamy poszukiwany rozkład macierzy (8)

(4.12) $$W(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}+\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

Weźmy z kolei pod uwagę niewłaściwą macierz wymierną w postaci

(4.13) $$W(s)=\frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

przy czym $\operatorname{st} m_1(s)+\operatorname{st} m_2(s)<\operatorname{st} L(s)$, a wielomiany $m_1(s),\ m_2(s)$ są względnie pierwsze.
Wydzielając z macierzy (13) część wielomianową $Q(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ (zgodnie z rozkładem (1)) otrzymamy

(4.14) $$W(s)=\frac{\overline{L}(s)}{m_1(s)m_2(s)}+Q(s),\quad \operatorname{st}\overline{L}(s)<\operatorname{st} m_1(s)+\operatorname{st} m_2(s)$$

Korzystając z rozkładu (4) możemy macierz (14) napisać w postaci

(4.15) $$W(s)=\frac{\overline{L}_1(s)}{m_1(s)}+\frac{\overline{L}_2(s)}{m_2(s)}+Q(s)$$

przy czym $\operatorname{st} m_1(s)>st\,\overline{L}_1(s)$ i $\operatorname{st} m_2(s)>\operatorname{st}\overline{L}_2(s)$.

Dodając i odejmując od prawej strony (15) dowolną macierz wielomianową $P(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ otrzymamy

(4.16) $$W(s)=\left(\frac{\overline{L}_1(s)}{m_1(s)}+P(s)\right)+\left(\frac{\overline{L}_2(s)}{m_2(s)}+Q(s)-P(s)\right)=\frac{L_1(s)}{m_1(s)}+\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$$

przy czym

$$L_1(s)=\overline{L}_1(s)+m_1(s)P(s);\quad L_2(s)=\overline{L}_2(s)+m_2(s)[Q(s)-P(s)]$$

Rozkład (16) macierzy (13) nie jest więc rozkładem jednoznacznym.
Jeżeli z macierzy niewłaściwych $\dfrac{L_k(s)}{m_k(s)}$, $k=1,\dots,p$ wydzielimy części wielomianowe $Q_1(s)$ i odpowiednio $Q_2(s)$, to otrzymamy

(4.17) $$W(s)=\frac{\tilde{L}_1(s)}{m_1(s)}+Q_1(s)+\frac{\tilde{L}_2(s)}{m_2(s)}+Q_2(s)$$

przy czym $\operatorname{st} m_1(s)>\operatorname{st}\tilde{L}_1(s)$ i $\operatorname{st} m_2(s)>\operatorname{st}\tilde{L}_2(s)$.

Z porównania (17) i (15) wynika, że jednoznaczność rozkładu zachodzi dla

$$\tilde{L}_1(s)=\overline{L}_1(s),\ \tilde{L}_2(s)=\overline{L}_2(s)\ \text{ oraz }\ Q(s)=Q_1(s)+Q_2(s)$$

Przyjmując $P(s)=0$ w (16) możemy macierz (14) przedstawić jako sumę

(4.18) $$W(s)=W_1(s)+W_2(s);\ W_1(s)=\frac{\overline{L}_1(s)}{m_1(s)},\quad W_2(s)=\frac{\overline{L}_2(s)}{m_2(s)}+Q(s)$$

lub

(4.19) $$W(s)=W_1(s)+W_2(s);\ W_1(s)=\frac{\overline{L}_1(s)}{m_1(s)}+Q(s),\ W_2(s)=\frac{\overline{L}_2(s)}{m_2(s)}$$

Rozkład (18) nazywamy rozkładem minimalnym macierzy (13) względem $m_1(s)$, a rozkład (19) – rozkładem minimalnym macierzy (13) względem $m_2(s)$.

Rozważania te można uogólnić na przypadek macierzy wymiernej o postaci (3) korzystając z rozkładu (4).

2.5. Macierz odwrotna macierzy wielomianowej i jej redukowalność

Weźmy pod uwagę odwracalną (niesingularną) macierz wielomianową $A(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}[s]$. Macierz odwrotna tej macierzy jest macierzą wymierną $A^{-1}(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}(s)$.

Niech $U(s), V(s) \in \mathbf{R}^{n \times n}[s]$ będą macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i odpowiednio na kolumnach sprowadzających tę macierz wielomianową do postaci kanonicznej Smitha $A_S(s)$, czyli

(5.1) $$A_S(s) = U(s)A(s)V(s) = \operatorname{diag}\left[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s)\right]$$

gdzie $i_k(s)$, $k = 1, \ldots, n$ są monicznymi wielomianami inwariantnymi, spełniającymi warunek podzielności $i_{k+1}(s) | i_k(s)$ dla k=0, 1, ..., n-1.
Z zależności (1) mamy

(5.2) $$A(s) = U^{-1}(s)A_S(s)V^{-1}(s) = U^{-1}(s)\operatorname{diag}\left[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s)\right]V^{-1}(s)$$

przy czym macierze odwrotne $U^{-1}(s)$, $V^{-1}(s)$ są również macierzami unimodularnymi.
Wobec tego macierz odwrotną macierzy (2) możemy wyznaczyć korzystając z zależności

(5.3)
$$A^{-1}(s) = \left[U^{-1}(s)A_S(s)V^{-1}(s)\right]^{-1} = V(s)A_S^{-1}(s)U(s) =$$

$$V(s)\operatorname{diag}\left[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s)\right]^{-1}U(s) = V(s)\frac{\left[\operatorname{diag}\,(i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s))\right]_{ad}}{i_1(s)i_2(s)\ldots i_n(s)}U(s)$$

przy czym macierz dołączona ma postać

(5.4) $$\left[\operatorname{diag}[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s)]\right]_{ad} =$$

$$= \operatorname{diag}\left[i_2(s)i_3(s)\ldots i_n(s), i_1(s)i_3(s)\ldots i_n(s), \ldots, i_1(s)i_2(s)\ldots i_{n-1}(s)\right]$$

Zauważmy, że w przypadku ogólnym wystąpią skrócenia w macierzy odwrotnej $A^{-1}(s)$, gdyż dla pewnych miejsc zerowych wielomianów inwariantnych macierz dołączona (4) jest równa macierzy zerowej. Jeżeli natomiast

(5.5) $$i_1(s) = i_2(s) = \ldots = i_{n-1}(s) = 1$$

to macierz (4) przyjmie postać

(5.6) $$\left[\operatorname{diag}[i_1(s), i_2(s), \ldots, i_n(s)]\right]_{ad} = \operatorname{diag}\left[i_n(s), i_n(s), \ldots, i_n(s), 1\right]$$

i dla wszystkich miejsc zerowych wielomianu inwariantnego $i_n(s)$ jest macierzą niezerową. W tym wypadku w macierzy odwrotnej $A^{-1}(s)$ nie występują skrócenia. Warunek (5) jest również warunkiem koniecznym niewystępowania skróceń w macierzy $A^{-1}(s)$. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to wielomiany inwariantne $i_1(s), i_2(s), \ldots, i_{n-1}(s)$ mają przynajmniej jedno wspólne miejsce zerowe. Dla tego miejsca zerowego macierz dołączona (4) jest równa zeru i w macierzy $A^{-1}(s)$ następuje skrócenie tego miejsca zerowego. Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.5.1. W macierzy odwrotnej $A^{-1}(s)$ nie występują skrócenia wtedy i tylko wtedy, gdy macierz wielomianowa $A(s)$ jest macierzą prostą, tzn. jest spełniony warunek (5) lub równoważnie, wielomian charakterystyczny pokrywa się z wielomianem minimalnym.
Macierz odwrotna $A^{-1}(s)$ macierzy prostej $A(s)$ ma postać

(5.7) $$A^{-1}(s) = V(s)\operatorname{diag}\left[1, 1, \ldots, 1, i_n^{-1}(s)\right]U(s)$$

Przykład 2.5.1. Obliczyć macierz odwrotną do macierzy wielomianowej

(5.8) $$A(s) = \begin{bmatrix} s+1+(s+1)^2(s+2)^2 & (s+1)^2(s+2) \\ 2(s+1)(s+2)^2 & 2(s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

oraz sprawdzić, czy w macierzy odwrotnej występują skrócenia.
W tym wypadku

$$A(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s+2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wobec tego

$$A_S(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix},\ U^{-1}(s)=\begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ V^{-1}(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s+2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz (8) nie jest macierzą prostą, gdyż $i_1(s)=s+1\neq 1$ i w macierzy odwrotnej $A^{-1}(s)$ wystąpią skrócenia przez $(s+1)$.
Korzystając z (3) i (4) otrzymamy

$$A^{-1}(s)=V(s)\frac{\operatorname{diag}\left[(s+1)(s+2),s+1\right]}{(s+1)^2(s+2)}U(s)=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(s+2) & 1 \end{bmatrix}\operatorname{diag}\left[\frac{1}{s+1},\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right]\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(s+1) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{s+2}{s+1} & \frac{(s+1)(s+2)^2+1}{2(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Przykład 2.5.2. Wykazać, że macierz $[I_n s-A]^{-1}$ jest nieskracalna (nieredukowalna) dla dowolnych współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ macierzy

(5.9)
$$A=\left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right]$$

Biorąc pod uwagę, że dla macierzy (9)

$$\det[I_n s-A]=\left|\begin{array}{cccccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & s+a_{n-1} \end{array}\right|=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0$$

otrzymamy

(5.10)
$$[I_n s-A]^{-1}=\frac{[I_n s-A]_{ad}}{\det[I_n s-A]}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}\left[\begin{array}{ccccc} * & * & \ldots & * & 1 \\ * & * & \ldots & * & * \\ \hline * & * & \ldots & * & * \end{array}\right]$$

Z (10) wynika, że macierz $[I_n s-A]^{-1}$ jest nieskracalna, gdyż element $(1, n)$ macierzy dołączonej jest równy 1.

Przykład 2.5.3. Wykazać, że macierz $[Is-A]^{-1}$ jest nieskracalna wtedy i tylko wtedy, gdy element a macierzy

(5.11)
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest różny od 1.
Obliczając macierz odwrotną $[Is-A]^{-1}$ dla macierzy (11) otrzymamy

(5.12)
$$[Is-A]^{-1}=\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-a \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{(s-1)^2(s-a)}\begin{bmatrix} (s-1)(s-a) & s-a & 0 \\ 0 & (s-1)(s-a) & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

Z (12) wynika, że macierz $[Is-A]^{-1}$ dla macierzy (11) jest nieskracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $a\neq 1$.
Stosując działania elementarne łatwo pokazać, że dla $a = 1$

$$[Is-A]_S=\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}_S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix}$$

a dla $a\neq 1$

$$[Is-A]_S=\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-a \end{bmatrix}_S=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(s-1)^2(s-a)}{(a-1)^2} \end{bmatrix}$$

2.6. Zapis macierzy wymiernych w postaciach ułamkowych i postać kanoniczna McMillana

2.6.1. Postacie ułamkowe macierzy wymiernych

Wykażemy, że dowolną macierz wymierną (3.1) można zapisać w postaci

(6.1a) $$W(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s)$$

(6.1b) $$W(s) = N_p(s)D_p^{-1}(s)$$

przy czym

$$D_l(s) \in \boldsymbol{F}^{m\times m}[s] \text{ i } D_p(s) \in \boldsymbol{F}^{n\times n}[s]$$

są macierzami nieosobliwymi, a $N_l(s) \in \boldsymbol{F}^{m\times n}[s]$, $N_p(s) \in \boldsymbol{F}^{m\times n}[s]$.

Zgodnie z rozważaniami w punkcie 3 dowolną macierz (3.1) możemy przedstawić w postaci standardowej (3.2).

Przyjmując $D_l(s) = I_m m(s)$ oraz $N_l(s) = L(s)$, otrzymujemy z (3.2) macierz $W(s)$ w postaci (1a). Przyjmując natomiast $D_p(s) = I_n m(s)$ oraz $N_p(s) = L(s)$ otrzymujemy macierz $W(s)$ w postaci (1b).

Jeżeli $D_l(s) = I_m m(s)$, to $\operatorname{st}\det D_l(s) = m \operatorname{st} m(s)$, a jeżeli $D_p(s) = I_n m(s)$, to $\operatorname{st}\det D_p(s) = n \operatorname{st} m(s)$.

Zauważmy, że pomnożenie lewostronne macierzy $D_l(s)$ i $N_l(s)$ przez dowolną macierz nieosobliwą $K(s) \in \boldsymbol{F}^{m\times m}[s]$ nie zmienia macierzy (1a), gdyż

$$[K(s)D_l(s)]^{-1}K(s)N_l(s) = D_l^{-1}(s)K^{-1}(s)K(s)N_l(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s) = W(s)$$

Analogicznie pomnożenie prawostronne macierzy $D_p(s)$ i $N_p(s)$ przez dowolną macierz nieosobliwą $K(s) \in \boldsymbol{F}^{n\times n}[s]$ nie zmienia macierzy (1b), gdyż

$$N_p(s)K(s)[D_p(s)K(s)]^{-1} = N_p(s)K(s)K^{-1}(s)D_p^{-1}(s) = N_p(s)D_p^{-1}(s) = W(s).$$

Tak więc dla danej macierzy wymiernej $W(s)$ istnieje wiele par macierzy $(D_l(s), N_l(s))$ i $(D_p(s), N_p(s))$, które dają tę samą macierz $W(s)$. Pary te nie są więc wyznaczane jednoznacznie.

Jeżeli

(6.2) $$W(s) = \frac{L(s)}{m(s)} = D_l^{-1}(s)N_l(s) = N_p(s)D_p^{-1}(s)$$

to

(6.3a) $$\operatorname{st} m(s) - \operatorname{st} L(s) \le \operatorname{st} D_l(s) - \operatorname{st} N_l(s)$$

(6.3b) $$\operatorname{st} m(s) - \operatorname{st} L(s) \le \operatorname{st} D_p(s) - \operatorname{st} N_p(s)$$

Z zależności (2) mamy

$$D_l(s)L(s) = m(s)N_l(s)$$

oraz

(6.4) $$\operatorname{st}[D_l(s)L(s)] = \operatorname{st}[m(s)N_l(s)]$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\operatorname{st}[D_l(s)L(s)] \le \operatorname{st} D_l(s) + \operatorname{st} L(s)$$

oraz

$$\operatorname{st}[m(s)N_l(s)] = \operatorname{st} m(s) + \operatorname{st} N_l(s)$$

z zależności (4) otrzymujemy (3a). Dowód (3b) jest analogiczny.

Jeżeli $\operatorname{st} m(s) > \operatorname{st} L(s)$, to z (3) wynika, że $\operatorname{st} D_l(s) > \operatorname{st} N_l(s)$ oraz $\operatorname{st} D_p(s) > \operatorname{st} N_p(s)$. Jeżeli natomiast $\operatorname{st} m(s) \ge \operatorname{st} L(s)$, to z (3) mamy $\operatorname{st} D_l(s) \ge \operatorname{st} N_l(s)$ oraz $\operatorname{st} D_p(s) \ge st\ N_p(s)$.

Przykład 2.6.1. Macierz wymierną

(6.5)
$$W(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)}\\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)^2}\end{bmatrix}$$

napisać w postaci (1a) i (1b).
Macierz tę zapisujemy w postaci standardowej (3.2)

(6.6)
$$W(s)=\frac{1}{(s+2)^2(s+3)}\begin{bmatrix}(s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2\\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3\end{bmatrix}=\frac{L(s)}{m(s)}$$

Przyjmując

$$D_l(s)=I_2(s+2)^2(s+3),\; N_l(s)=L(s)=\begin{bmatrix}(s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2\\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3\end{bmatrix}$$

otrzymamy

(6.7)
$$W(s)=\begin{bmatrix}(s+2)^2(s+3) & 0\\ 0 & (s+2)^2(s+3)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2\\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3\end{bmatrix}$$

Natomiast przyjmując

$$D_p(s)=I_3(s+2)^2(s+3),\; N_p(s)=L(s)$$

otrzymamy

(6.8)
$$W(s)=\begin{bmatrix}(s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2\\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(s+2)^2(s+3) & 0 & 0\\ 0 & (s+2)^2(s+3) & 0\\ 0 & 0 & (s+2)^2(s+3)\end{bmatrix}^{-1}$$

W tym wypadku

(6.9) $\quad$ st det $D_l(s)=m$ st $m(s)=2\cdot 3=6$ oraz st det $D_p(s)=n$ st $m(s)=3\cdot 3=9$

Z zależności (4) i (5) wynika, że występują skrócenia między elementami macierzy $D_l^{-1}(s)$ i $N_l(s)$ oraz $D_p^{-1}(s)$ i $N_p(s)$.
Pojawia się więc pytanie, przy spełnieniu jakich warunków nie występują skrócenia, czyli są nieredukowalne pary $(D_l(s),N_l(s))$ i $(D_p(s),N_p(s))$ i stopnie wyznaczników macierzy $D_l(s)$ i $D_p(s)$ są minimalne. Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.6.1. Para $(D_l(s),N_l(s))$ jest nieredukowalna i stopień wyznacznika $D_l(s)$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.10a) $\quad$ rząd $[D_l(s),N_l(s)]=m$ dla wszystkich $s\in \boldsymbol{C}$

Para $(D_p(s),N_p(s))$ jest nieredukowalna i stopień wyznacznika $D_p(s)$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.10b) $\quad$ rząd $\begin{bmatrix}D_p(s)\\ N_p(s)\end{bmatrix}=n$ dla wszystkich $s\in \boldsymbol{C}$

Dowód. Jeżeli warunek (10a) jest spełniony to największym wspólnym dzielnikiem macierzy $D_l(s)$ i $N_l(s)$ może być tylko macierz unimodularna $U(s)$, której st det $U(s)=0$. W tym przypadku macierze $D_l(s)$ i $N_l(s)$ są nieredukowalne i stopień det $D_l(s)$ jest minimalny.
Warunek (10a) jest również warunkiem koniecznym. Niech macierz $L_l(s)$, będąca macierzą nieunimodularną, będzie wspólnym lewym dzielnikiem macierzy $D_l(s)$ i $N_l(s)$, czyli $D_l(s)=L_l(s)\overline{D}_l(s)$, $N_l(s)=L_l(s)\overline{N}_l(s)$. Wtedy dla tych wartości zmiennej s dla których det $L_l(s)=0$ warunek (10a) nie jest spełniony oraz

$$W(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)=\left[L_l(s)\overline{D}_l(s)\right]^{-1}L_l(s)\overline{N}_l(s)=\overline{D}_l(s)\overline{N}_l(s)$$

W tym przypadku ($D_l(s)$, $N_l(s)$) jest redukowalna i stopień wyznacznika $D_l(s)$ nie jest minimalny.
Dowód drugiej części twierdzenia dla pary $(D_p(s),N_p(s))$ jest analogiczny (dualny).

■

Definicja 2.6.1. Parę nieredukowalną $(D_l(s), N_l(s))$ $(D_p(s), N_p(s))$, dającą (1a) ((1b)) nazywamy lewą (prawą) minimalną postacią ułamkową macierzy wymiernej $W(s)$.
Z dowodu twierdzenia wynika, że minimalne postacie ułamkowe macierzy wymiernej są wyznaczane z dokładnością do macierzy unimodularnych oraz, że dla minimalnych $D_l(s)$ i $D_p(s)$ zachodzi równość

$$\text{st}\det D_l(s) = \text{st}\det D_p(s) \tag{6.11}$$

Aby wyznaczyć parę minimalną $(\overline{D}_l(s), \overline{N}_l(s))$, mając daną nieminimalną (redukowalną) parę $(D_l(s), N_l(s))$ należy wyznaczyć największy wspólny lewy dzielnik $L_l(s)$ tych macierzy. W tym celu stosując działania elementarne na kolumnach macierzy $[D_l(s), N_l(s)]$ dokonujemy redukcji

(6.12)
$$\begin{bmatrix} D_l(s) & N_l(s) \\ I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} L_l(s) & 0 \\ U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}, \; U_1 = U_1(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s], \; U_4 = U_4(s) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$$

(P oznacza działania elementarne na kolumnach)
gdzie $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ jest macierzą unimodularną podzieloną na bloki odpowiednio do wymiarów macierzy $D_l(s)$ i $N_l(s)$.
Z (12) mamy

$$[D_l(s), \; N_l(s)]\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} = [L_l(s), \; 0]$$

oraz

$$[D_l(s), \; N_l(s)]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = L_l(s), \quad [D_l(s), \; N_l(s)]\begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{6.13}$$

Macierz U_4 jest macierzą nieosobliwą. Z drugiego równania z zależności (13) otrzymujemy

$$D_l^{-1}(s)N_l(s) = -U_2U_4^{-1} \tag{6.14}$$

Macierz $\begin{bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{bmatrix}$ ma pełny rząd dla wszystkich $s \in \boldsymbol{C}$, gdyż jest częścią macierzy unimodularnej. Tak więc para (U_4, U_2) jest minimalna (nieredukowalna). Korzystając z zależności (14) możemy wyznaczyć parę minimalną $(\overline{D}_l(s), \overline{N}_l(s))$ dla danej dowolnej pary $(D_l(s), N_l(s))$.
Znając największy wspólny lewy dzielnik $L_l(s)$, możemy wyznaczyć parę minimalną z zależności

$$\overline{D}_l(s) = L_l^{-1}(s)D_l(s), \quad \overline{N}_l(s) = L_l^{-1}(s)N_l(s) \tag{6.15}$$

Analogicznie, aby wyznaczyć parę minimalną $(\overline{D}_p(s), \overline{N}_p(s))$ mając daną nieminimalną (redukowalną) parę $(D_p(s), N_p(s))$ należy wyznaczyć największy wspólny prawy dzielnik $P_p(s)$ tych macierzy. Stosując działania elementarne na wierszach macierzy $\begin{bmatrix} D_p(s) \\ N_p(s) \end{bmatrix}$ dokonujemy redukcji

(6.16)
$$\begin{bmatrix} D_p(s) & I_n & 0 \\ N_p(s) & 0 & I_m \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} P_p(s) & V_1 & V_2 \\ 0 & V_3 & V_4 \end{bmatrix}, \; V_1 = V_1(s) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s], \; V_4 = V_4(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s]$$

gdzie $\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}$ jest macierzą unimodularną podzieloną na bloki odpowiednio do wymiarów macierzy $D_p(s)$ i $N_p(s)$.
Z (16) mamy

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_p(s) \\ N_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_p(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$V_1D_p(s) + V_2N_p(s) = P_p(s), \quad V_3D_p(s) + V_4N_p(s) = 0 \tag{6.17}$$

Macierz $[V_3 \;\; V_4]$ ma pełny rząd dla wszystkich $s \in \boldsymbol{C}$, gdyż jest częścią macierzy unimodularnej, a V_4 jest macierzą osobliwą. Z drugiej zależności (17) otrzymujemy

(6.18) $$N_p(s)D_p^{-1}(s) = -V_4^{-1}V_3$$

Korzystając z (18) możemy wyznaczyć parę minimalną $\left(\overline{D}_p(s), \overline{N}_p(s)\right)$ dla danej dowolnej pary $\left(D_p(s), N_p(s)\right)$.

Znając największy wspólny prawy dzielnik $P_p(s)$ możemy wyznaczyć parę minimalną z zależności

(6.19) $$\overline{D}_p(s) = D_p(s)P_p^{-1}(s), \quad \overline{N}_p(s) = N_p(s)P_p^{-1}(s)$$

Przykład 2.6.2. Korzystając z wyniku przykładu 1 wyznaczyć lewą i prawą minimalną postać ułamkową macierzy (5).

Łatwo sprawdzić, że postacie ułamkowe (7) i (8) tej macierzy nie są postaciami minimalnymi.
Korzystając z redukcji (12), wyznaczymy największy wspólny lewy dzielnik $L_l(s)$ macierzy $D_l(s)$ i $N_l(s)$. W tym celu wykonujemy następujące działania elementarne:

$$P[4+5\times(-s-3)],\ P[3+5\times(-s-2)],\ P\left[5+4\times\frac{1}{2}\right],\ P[1+5\times(-s-2)(s+3)],$$

$$P[2+1\times 2(s+2)],\ P\left[1+4\times(-\frac{s}{4}-\frac{5}{8})\right],\ P[5+4\times(-4)],\ P[4+1\times(6s+40)],$$

$$P[1\times 8], P[2,5]$$

$$\begin{bmatrix} D_l(s) & N_l(s) \\ I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+3) & 0 & (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 \\ 0 & (s+2)^2(s+3) & (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P}$$
$$\begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 8(2s+5) & 2(s+2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4(s+2)(s+3)-(2s+5) & (s+3)(2s+5) & 0 & -(2s+5)[(4(s+2)(s+3)+2s+5]+1 & -(s+2)^2(s+3) \\ (s+3)[4(s+1)(s+2)+2s+5] & -(s+2)[2(s+1)(s+3)+s+4] & -(s+2) & (s+3)[4(s+1)(s+2)(2s+5)-(2s+5)^2-1] & (s+1)(s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

Korzystając z (15) i (14), otrzymamy

$$\overline{D}_l(s) = L_l^{-1}(s)D_l(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+3) & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

(6.20)

$$\overline{N}_l(s) = L_l^{-1}(s)N_l(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & (s+2) \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & (s+3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & s+3 & 1 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \end{bmatrix}$$

(6.21)

$$W(s) = \overline{D}_l^{-1}(s)\overline{N}_l(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}, \det \overline{D}_l(s) = (s+2)^3(s+3)^2$$

(6.22)

$$W(s) = -U_2U_4^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 8(2s+5) & 2(s+2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2s+5)[(4(s+2)(s+3)+2s+5]+1 & -(s+2)^2(s+3) \\ -(s+2) & (s+3)[4(s+1)(s+2)(2s+5)-(2s+5)^2-1] & (s+1)(s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Korzystając z redukcji (16), wyznaczamy największy wspólny prawy dzielnik $P_p(s)$. W tym celu wykonujemy następujące działania elementarne:

$$L[5,-4],\ L[4+5\times(-s-2)],\ L[1+5\times(-s-2)(s+3)],\ L[1,-2],\ L[3+1\times(s+2)],$$

$$L\left[2+4\times(-\frac{1}{2}s-\frac{5}{4}\right],\ L[2\times(-4)],\ L[5+2],\ L[4+2\times(-2s-5)],\ L[1\times(-1)],\ L[3,5]$$

$$\begin{bmatrix} D_p(s) & I_n & 0 \\ N_p(s) & 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+3) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+3) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s+2)^2(s+3) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+2)(s+3) & -1 & 1 & 0 & -(s+2)(s+3) & (s+2)(s+3) \\ 0 & (s+2) & 0 & 0 & -4 & 0 & (2s+5)(s+3) & -(s+2)(2s+5) \\ s+2 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & (2s+5)(s+3)-1 & 1-(s+2)(2s+5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4(2s+5) & 0 & (s+3)[1-(2s+5)^2] & -(s+2)[1-(2s+5)^2] \\ 0 & 0 & 0 & s+2 & -(s+2) & 1 & (s+2)^2(s+3) & -(s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}$$

Korzystając z (19) i (18), otrzymamy

(6.23)

$$\overline{D}_p(s) = D_p(s)P_p^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2(s+3) & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)^2(s+3) & 0 \\ 0 & 0 & (s+2)^2(s+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+2)(s+3) \\ 0 & s+2 & 0 \\ s+2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & (s+2)(s+3) \\ 0 & (s+2)(s+3) & 0 \\ s+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{N}_p(s) = N_p(s)P_p^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (s+2)(s+3) \\ 0 & s+2 & 0 \\ s+2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s+3 & s+2 \\ \dfrac{2}{s+2} & s+2 & \dfrac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

(6.24)

$$W(s) = \overline{N}_p(s)\overline{D}_p^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}, \ \det \overline{D}_p(s) = (s+2)^3(s+3)^2$$

oraz

(6.25)

$$W(s) = V_4^{-1}V_3 = \begin{bmatrix} (s+3)[1-(2s+5)^2] & -(s+2)[1-(2s+5)^2] \\ (s+2)^2(s+3) & -(s+2)^2(s+3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 4(2s+5) & 0 \\ s+2 & -(s+2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

Porównując (22) i (24) oraz (21) i (25) stwierdzamy zgodność wyników oraz że $\operatorname{st}\det \overline{D}_l(s) = \operatorname{st}\det \overline{D}_p(s) = 5$ i jest większy od stopnia wielomianu $m(s)$ równego 3.

2.6.2. Względnie pierwsza faktoryzacja macierzy wymiernych

Weźmy macierz wymierną $G(s) \in C^{m \times l}[s]$ ściśle właściwą, tj. spełniającą warunek $\lim\limits_{s\to\infty} G(s) = 0$.

Zadanie 2.6.1. Dana jest macierz wymierna ściśle właściwa $G(s) \in C^{m\times p}[s]$. Wyznaczyć macierze wielomianowe lewostronnie względnie pierwsze $A_1(s) \in C^{m\times m}[s]$ i $B_1(s) \in C^{m\times p}[s]$, takie, że

(6.26)
$$G(s) = A_1^{-1}(s)B_1(s)$$

Zadanie 2.6.2. Dana jest macierz wymierna ściśle właściwa $G(s) \in C^{m\times p}[s]$. Należy wyznaczyć macierze wielomianowe prawostronnie względnie pierwsze $A_2(s) \in C^{p\times p}[s]$ i $B_2(s) \in C^{m\times p}[s]$, takie, że

(6.27)
$$G(s) = B_2(s)A_2^{-1}(s)$$

Przedstawienie macierzy wymiernej $G(s)$ w postaci (26) lub (27) nazywamy faktoryzacją względnie pierwszą. Poniżej podajemy procedurę takiej faktoryzacji, najpierw do postaci (26).

Procedura 2.6.1.
***Krok* 1.** Znajdujemy najmniejsze wspólne mianowniki $m_i(s)$ $(i=1,2,...,p)$ dla poszczególnych kolumn i zapisujemy macierz $G(s)$ w postaci

(6.28) $$G(s)=B(s)A^{-1}(s)$$

przy czym

(6.29) $$A(s)=\begin{bmatrix} m_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2(s) & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & m_p(s) \end{bmatrix}$$

***Krok* 2.** Stosując odpowiednie działania elementarne na wierszach wykonujemy redukcję

$$\begin{bmatrix} A(s) & I_p & 0 \\ B(s) & 0 & I_m \end{bmatrix} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} P(s) & U_1(s) & U_2(s) \\ 0 & U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix}$$

i wyznaczamy macierze $U_2(s), U_3(s)$.
***Krok* 3.** Poszukiwaną faktoryzację (26) otrzymamy z zależności

(6.30) $$G(s)=-U_4^{-1}(s)U_3(s)$$

Procedurę tą można uzasadnić następująco. Z równości

$$\begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

mamy

$$U_3(s)A(s)+U_4(s)B(s)=0$$

czyli

$$G(s)=B(s)A^{-1}(s)=-U_4^{-1}(s)U_3(s)$$

przy założeniu, że $\det U_4(s)\neq 0$. Wykażemy, że istotnie $\det U_4(s)\neq 0$. Niech

(6.31) $$U^{-1}(s)=\begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}$$

Z zależności

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

wynika, że $A(s)=V_1(s)P(s)$. Nieosobliwość macierzy $A(s)$ implikuje $\det V_1(s)\neq 0$. Z kolei z zależności

(6.32) $$\begin{bmatrix} V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p-V_1^{-1}(s) & V_2(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_1(s) & 0 \\ V_3(s) & V_4(s)-V_3(s)V_1^{-1}(s)V_2(s) \end{bmatrix}$$

wynika, że

(6.33) $$\det[V_4(s)-V_3(s)V_1^{-1}(s)V_3(s)]\neq 0$$

Po pomnożeniu lewostronnie równości (32) przez $U(s)$ i uwzględnieniu (31), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} I_p-V_1^{-1}(s)\,V_2(s) \\ 0 \qquad I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) & 0 \\ V_3(s) & V_4(s)-V_3(s)V_1^{-1}(s)V_3(s) \end{bmatrix}$$

oraz

$$I_m=U_4(s)[V_4(s)-V_3(s)V_1^{-1}(s)V_3(s)]$$

Stąd, po uwzględnieniu (32), otrzymujemy $\det U_4(s)\neq 0$.
Macierze $U_3(s)$ i $U_4(s)$ są lewostronnie względnie pierwsze, gdyż macierz $[U_3(s), U_4(s)]$ jest częścią macierzy unimodularnej $U(s)$.
Procedura wyznaczania faktoryzacji (27) jest następująca.

Procedura 2.6.2.
***Krok* 1.** Znajdujemy najmniejsze wspólne mianowniki $m_i'(s)$ $(i=1,2,...,m)$ dla poszczególnych wierszy i zapisujemy macierz $G(s)$ w postaci

$$G(s) = A'^{-1}(s)B'(s) \tag{6.34}$$

przy czym

$$A'(s) = \begin{bmatrix} m_1'(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2'(s) & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & m_2'(s) \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

***Krok* 2.** Stosując odpowiednio działania elementarne na kolumnach, wykonujemy redukcję

$$\begin{bmatrix} A'(s) & B'(s) \\ I_m & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} L(s) & 0 \\ U_1(s) & U_2(s) \\ U_3(s) & U_4(s) \end{bmatrix}$$

i wyznaczamy macierze $U_4(s)$, $U_2(s)$.

***Krok* 3.** Poszukiwaną faktoryzację (27) wyznaczamy z zależności

$$G(s) = -U_2(s)U_4^{-1}(s) \tag{6.36}$$

Przykład 2.6.3. Korzystając z procedury 1 i 2, wyznaczyć faktoryzację (26) i (27) dla macierzy

$$G(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s} & \dfrac{2}{s+1} \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

Korzystając z procedury 1, wyznaczamy:

***Krok* 1.** Wyznaczamy najmniejsze wspólne mianowniki wszystkich elementów poszczególnych kolumn tej macierzy i zapisujemy ją w postaci

$$G(s) = \begin{bmatrix} -s & s+2 & 2(s+2) \\ s+1 & 2s & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ 0 & s(s+2) & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}^{-1}$$

***Krok* 2.** Wykonując odpowiednie działania elementarne na wierszach macierzy

$$G(s) = \left[\begin{array}{ccc|ccccc} s(s+1) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(s+2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -s & s+2 & 2(s+2) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s+1 & 2s & s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(s+2) & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -s & 1+\frac{1}{2}s \\ 0 & 4 & -(s+1) & \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} & 2(s+1) & \frac{1}{2}s \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -s & 1+s & 2s & -s(s+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3s-2 & -(3s+2) & 9s & 4s(s+1) & s(s+2) \end{bmatrix}$$

oraz

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (s+2) \\ 0 & 4 & -(s+1) \\ 0 & 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix},\ U_1(s) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ U_2(s) = \begin{bmatrix} -s & 1+\frac{1}{2}s \\ 2(s+1) & \frac{1}{2}s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3(s) = \begin{bmatrix} -s & 1+s & 2s \\ 3s-2 & -(3s+2) & 9s \end{bmatrix},\ U_4(s) = \begin{bmatrix} -s(s+1) & 0 \\ 4s(s+1) & s(s+2) \end{bmatrix}$$

***Krok* 3.** Wobec tego

$$G(s) = -U_4^{-1}(s)U_3(s) = \begin{bmatrix} -s(s+1) & 0 \\ 4s(s+1) & s(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s & -(s+1) & -2s \\ 2-3s & 3s+2 & -9s \end{bmatrix}$$

Z kolei korzystając z procedury 2:

***Krok* 1.** Wyznaczamy najmniejsze wspólne mianowniki wszystkich elementów poszczególnych wierszy tej macierzy i zapisujemy ją w postaci

$$G(s) = \begin{bmatrix} s(s+1) & 0 \\ 0 & s(s+2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -s & s+1 & 2s \\ s+2 & 2s & s \end{bmatrix}$$

Krok **2.** Wykonując odpowiednie działania elementarne na kolumnach macierzy

$$G(s)=\left[\begin{array}{ccccc} s(s+1) & 0 & -s & s+1 & 2s \\ 0 & s(s+2) & s+2 & 2s & s \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{9}{4} & \frac{9}{8} & 1 & -4s & -15 \\ 0 & 0 & -4 & 4(s+1) & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 4s & -4(s+1) & -4s \\ 1+\frac{3}{4}s & \frac{3}{8}s & -s & 0 & -s \\ -2-\frac{3}{2}s & -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s & 2s & 0 & 2(4+3s) \end{array}\right]$$

oraz

$$L(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ U_1(s)=\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ U_2(s)=\begin{bmatrix} 1 & -4s & -15 \\ -4 & 4(s+1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_3(s)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1+\frac{3}{4}s & \frac{3}{8}s \\ -2-\frac{3}{2}s & -\frac{1}{2}-\frac{3}{4}s \end{bmatrix},\ U_4(s)=\begin{bmatrix} 4s & -4(s+1) & -4s \\ -s & 0 & -s \\ 2s & 0 & 2(4+3s) \end{bmatrix}$$

Krok **3.** Wobec tego

$$G(s)=-U_2(s)U_4^{-1}(s)=\begin{bmatrix} -1 & 4s & 15 \\ 4 & -4s(s+1) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4s & -4(s+1) & -4s \\ -s & 0 & -s \\ 2s & 0 & 2(4+3s) \end{bmatrix}^{-1}$$

Zadanie 2.6.3. Dana jest macierz wymierna $G(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times p}[s]$ w postaci lewostronnej faktoryzacji (26). Wyznaczyć prawostronnie względnie pierwszą faktoryzację (27) tej macierzy.
Rozwiązanie. Stosując działania elementarne na kolumnach, wykonujemy przekształcenie

(6.38)
$$\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ I_m & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \xrightarrow{P} \begin{bmatrix} L_1(s) & 0 \\ V_1(s) & V_2(s) \\ V_3(s) & V_4(s) \end{bmatrix}$$

Poszukiwane macierze faktoryzacji (27) są określone zależnościami

(6.39) $B_2(s)=V_2(s), A_2(s)=-V_4(s)$ lub $B_2(s)=-V_2(s), A_2(s)=V_4(s)$

Zależności (39) można uzasadnić następująco.
Z przekształcenia (38) mamy

(6.40)
$$[A_1(s),B_1(s)]\begin{bmatrix} V_2(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix}=0$$

czyli $A_1(s)V_2(s)=-B_1(s)V_4(s)$.
Z nieosobliwości macierzy $A_1(s)$ wynika nieosobliwość $V_4(s)$. Zatem

$$A_1^{-1}(s)B_1(s)=-V_2(s)V_4^{-1}(s)$$

Zadanie dualne do zadania 3 można sformułować następująco.

Zadanie 2.6.3'. Dana jest macierz wymierna $G(s)\in \boldsymbol{C}^{m\times p}[s]$ w postaci prawostronnej faktoryzacji (27). Wyznaczyć lewostronnie względnie pierwszą faktoryzację (26) tej macierzy.

Aby rozwiązać to zadanie, korzystamy z kroku 2 procedury 1.
Poszukiwane macierze faktoryzacji (26) są określone zależnościami

(6.41) $A_1(s)=-U_4(s),\ B_1(s)=U_3(s)$ lub $A_1(s)=U_4(s),\ B_1(s)=-U_3(s)$

Dalszy tok postępowania jest analogiczny jak przy rozwiązywaniu zadania 3.

2.6.3. Sprowadzenie macierzy wymiernej do postaci kanonicznej McMillana

Niech będzie dana macierz wymierna w postaci

(6.42) $$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s)...W_{1n}(s) \\ .... \\ W_{m1}(s)...W_{mn}(s) \end{bmatrix} \in C^{m\times n}(s)$$

której rząd jest równy $r \le \min(n,m)$. Sprowadzając wszystkie elementy $W_{ij}(s)$ tej macierzy do najmniejszego wspólnego mianownika $m(s)$, o współczynniku równym jedności przy s w najwyższej potędze, możemy macierz tę przedstawić w postaci

(6.43) $$W(s) = \frac{L(s)}{m(s)}$$

przy czym $L(s) \in C^{m\times n}[s]$. Stosując działania elementarne możemy macierz $L(s)$ przekształcić do postaci kanonicznej Smitha

(6.44) $$L_s(s) = U(s)L(s)V(s) = \left[\begin{array}{cccccc} i_1(s) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_2(s) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & i_r(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

przy czym $U(s) \in C^{m\times m}[s]$, $V(s) \in C^{n\times n}$ są macierzami unimodularnymi, $i_1(s),\ i_2(s),\ ...,\ i_r(s)$ są wielomianami inwariantnymi takimi, że $i_{i+1}(s)$ jest podzielny bez reszty przez $i_i(s)$.

Z zależności (43) i (44), po skróceniu wspólnych czynników występujących jednocześnie w $m(s)$ i $i_k(s),\ k = 1,...,r$, otrzymamy

(6.45) $$W_M(s) = U(s)W(s)V(s) = \frac{L_s(s)}{m(s)} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{l_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{l_2(s)}{\psi_2(s)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \frac{l_r(s)}{\psi_r(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

przy czym

$$\frac{l_k(s)}{\psi_k(s)} = \frac{i_k(s)}{m(s)} \quad (k = 1, 2, ..., r)$$

oraz $l_{i+1}(s)$ dzieli się bez reszty przez $l_i(s)$, a $\psi_{k-1}(s)$ dzieli się bez reszty przez $\psi_k(s)$.

Definicja 2.6.2. Macierz $W_M(s)$ określoną zależnością (45) nazywamy postacią kanoniczną McMillana macierzy $W(s)$.

Stosując metodę nie wprost wykażemy, że $\psi_1(s) = m(s)$ oraz $l_1(s) = i_1(s)$. Załóżmy, że $\psi_1(s) \ne m(s)$. W tym wypadku każdy element macierzy $L(s)$ jest podzielny przez odpowiedni czynnik wielomianu $m(s)$. Wielomian $m(s)$ nie byłby więc najmniejszym wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $W(s)$, którym jest z założenia. Wobec tego $\psi_1(s) = m(s)$, a stąd wynika natychmiast, że $l_1(s) = i_1(s)$.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania postaci kanonicznej McMillana (45) macierzy $W(s)$.

Procedura 2.6.3.

***Krok* 1.** Wyznaczamy najmniejszy wspólny mianownik $m(s)$ (o współczynniku równym jeden przy s w najwyższej potędze) wszystkich elementów macierzy $W(s)$.

***Krok* 2.** Zapisując macierz $W(s)$ w postaci (43) wyznaczamy macierz wielomianową $L(s)$.

***Krok* 3.** Stosując działania elementarne przekształcamy macierz $L(s)$ do postaci kanonicznej Smitha $L_s(s)$.

***Krok* 4.** Skracamy wspólne czynniki występujące w wielomianach $m(s)$ i $i_k(s)$, a następnie wyznaczamy poszukiwaną postać kanoniczną McMillana (45).

Przykład 2.6.4. Wyznaczyć postać kanoniczną McMillana macierzy (5).

Obliczeń dokonujemy zgodnie z procedurą 3.

***Krok* 1.** Najmniejszy wspólny mianownik wszystkich elementów danej macierzy jest równy

$$m(s) = (s+2)^2(s+3)$$

***Kroki* 2. *i* 3.** Po sprowadzeniu do najmniejszego wspólnego mianownika macierz $W(s)$ przyjmie postać

$$W(s) = \frac{L(s)}{m(s)} = \frac{1}{(s+2)^2(s+3)}\begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Stosując działania elementarne przekształcamy macierz

$$L(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2 & (s+2)(s+3) & s+2 \\ (s+2)(s+3) & (s+2)^2 & s+3 \end{bmatrix}$$

do postaci kanonicznej Smitha

$$L_s(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)(s+2{,}5) & 0 \end{bmatrix}$$

***Krok* 4.** Poszukiwana postać kanoniczna McMillana macierzy (5) jest równa

$$W_M(s) = \frac{L_s(s)}{m(s)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)^2(s+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s+2{,}5}{(s+2)(s+3)} & 0 \end{bmatrix}$$

2.7. Synteza regulatorów

2.7.1. Macierze systemowe i ogólne zadanie syntezy regulatora

Weźmy pod uwagę dyskretny układ ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 1) złożony z obiektu o macierzy transmitancji

(7.1)
$$T_0(z) = D_l^{-1}N_l = N_pD_p^{-1}, \quad D_l = D_l(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z], \quad N_l = N_l(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}[z],$$
$$D_p = D_p(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z], \quad N_p = N_p(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}[z]$$

oraz regulatora o macierzy transmitancji

(7.2)
$$T_r(z) = X_l^{-1}Y_l = Y_pX_p^{-1}, \quad X_l = X_l(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z], \quad Y_l = Y_l(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times p}[z],$$
$$X_p = X_p(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z], \quad Y_p = Y_p(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times p}[z]$$

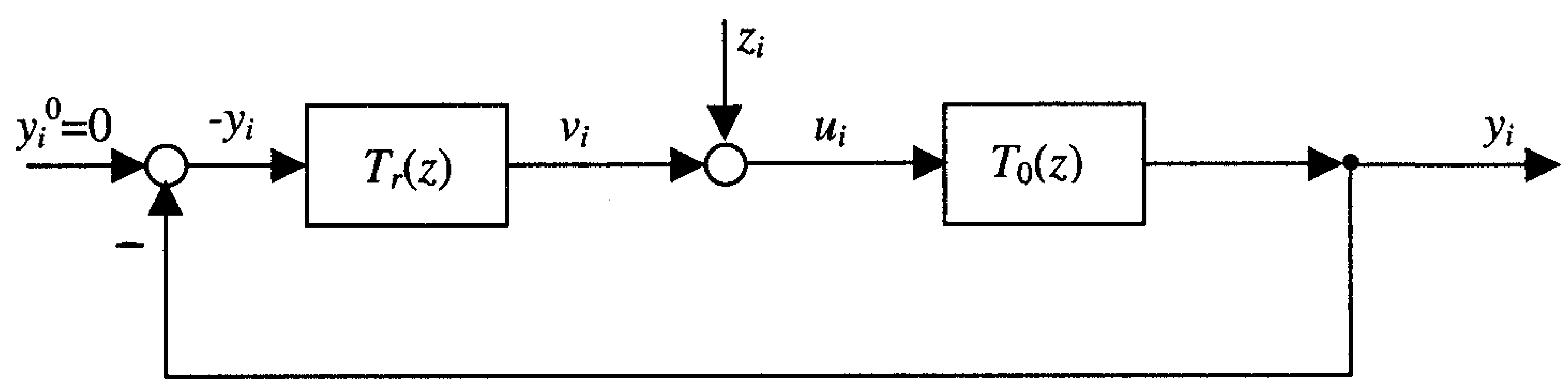
Zakładamy, że macierze

$$T_0(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}(z), \quad T_r(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times p}(z)$$

są właściwe

(7.3)
$$\lim_{z\to\infty} T_0(z) = D_0 \in \boldsymbol{R}^{p\times m}, \quad \lim_{z\to\infty} T_r(z) = D_r \in \boldsymbol{R}^{m\times p}$$

lub ściśle właściwe $D_0 = 0$ i $D_r = 0$



Rys. 2.7.1.

Na podstawie schematu z rysunku 1 możemy napisać równania

$$y_i = T_0(z)u_i = T_0(z)(v_i + z_i), \quad v_i = -T_r(z)y_i, \quad i \in Z_+ = \{0, 1, \ldots\} \tag{7.4}$$

przy czym y_i, u_i, v_i oraz z_i są odpowiednio wektorowymi ciągami odpowiedzi obiektu, sterowań, odpowiedzi regulatora i zakłóceń.
Podstawiając zależności (1) i (2) do (4) otrzymujemy równania

$$D_l y_i - N_l v_i = N_l z_i, \qquad X_l v_i + Y_l y_i = 0, \quad i \in Z_+ \tag{7.5}$$

które zapisujemy w postaci

$$\begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_l \\ 0 \end{bmatrix} z_i \tag{7.6}$$

Definicja 7.1.1. Macierz wielomianową

$$S_l = \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(p+m)\times(p+m)}[z] \tag{7.7a}$$

nazywać będziemy lewą macierzą systemową układu zamkniętego, a macierz wielomianową

$$S_p = \begin{bmatrix} X_p & N_p \\ -Y_p & D_p \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(p+m)\times(p+m)}[z] \tag{7.7b}$$

prawą macierzą systemową układu zamkniętego.

Jeżeli macierze D_l i N_l są lewostronnie względnie pierwsze (macierz $T_0(z) = D_l^{-1}N_l$ jest nieskracalna), to zgodnie z rozważaniami w punkcie 1.15.3 istnieje macierz unimodularna działań elementarnych na kolumnach

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad U_{11} = U_{11}(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z], U_{22} = U_{22}(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z] \tag{7.8}$$

taka, że

$$[D_l \quad -N_l] \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = [I_p \quad 0] \tag{7.9}$$

Mnożąc prawostronnie równość (9) przez macierz unimodularną

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad V_{11} = V_{11}(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z], V_{22} = V_{22}(z) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z] \tag{7.10}$$

otrzymamy

$$[D_l \quad -N_l] = [I_p \quad 0] \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

przy czym

$$D_l = V_{11}, \qquad N_l = -V_{12} \tag{7.12}$$

Z równości (9) mamy

$$D_l U_{12} = N_l U_{22} \qquad \text{oraz} \qquad D_l^{-1} N_l = U_{12} U_{22}^{-1} \tag{7.13}$$

gdyż $\det U_{22} \neq 0$.
Z porównania (1) i (13) wynika, że

$$N_p = U_{12}, \qquad D_p = U_{22} \tag{7.14}$$

Zgodnie z rozważaniami w punkcie 1.15.3, jeżeli macierze D_l i N_l są względnie pierwsze, to istnieją macierze wielomianowe X_p i $-Y_p$ takie, że

$$D_l X_p + N_l Y_p = I_p \tag{7.15}$$

Z równości (9) mamy

$$D_l U_{11} - N_l U_{21} = I_p \tag{7.16}$$

Porównując (15) i (16) otrzymamy

$$X_p = U_{11}, \qquad Y_p = -U_{21} \tag{7.17}$$

Macierze (14) są prawostronnie względnie pierwsze. Istnieją więc macierze wielomianowe X_l i Y_l takie, że

$$Y_l N_p + X_l D_p = I_m \tag{7.18}$$

Z równości

$$(7.19)\qquad \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

wynika, że

$$V_{21}U_{12} + V_{22}U_{22} = I_m$$

a po uwzględnieniu (14) otrzymamy

$$(7.20)\qquad V_{21}N_p + V_{22}D_p = I_m$$

Z porównania (18) i (20) mamy

$$(7.21)\qquad X_l = V_{22}, \qquad Y_l = V_{21}$$

Z zależności (19) i (21) oraz (14) i (17) wynika, że

$$(7.22)\qquad S_l = \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad S_p = \begin{bmatrix} X_p & N_p \\ -Y_p & D_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Z zależności (19) i (22) mamy

$$(7.23)\qquad S_l S_p = S_p S_l = I_{p+m}$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1.1. Jeżeli macierz transmitancji obiektu $T_0(z)$ jest nieskracalna, to istnieje macierz transmitancji regulatora $T_r(z)$ taka, że macierze systemowe (7) układu zamkniętego spełniają równość (23) i są macierzami unimodularnymi.

Ogólny problem syntezy regulatora dla danego obiektu można sformułować następująco. Dana jest macierz transmitancji obiektu $T_0(z)$ należy wyznaczyć macierz transmitancji regulatora $T_r(z)$ tak, aby macierz systemowa (7) układu zamkniętego miała pożądane właściwości dynamiczne, na przykład była macierzą unimodularną lub jej wyznacznik był równy zadanemu wielomianowi.

Aby wyznaczyć macierze systemowe S_p i S_l należy:

1) Stosując działania elementarne na kolumnach i wykonując redukcję

$$(7.24)\qquad \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ I_p & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

wyznaczyć macierz unimodularną

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = S_p$$

2) Wyznaczyć macierz odwrotną macierzy S_p równą S_l (gdyż $S_l = S_p^{-1}$)

2.7.2. Zbiór regulatorów gwarantujących zadany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

Dla układu ze sprzężeniem zwrotnym (rys. 1) dana jest macierz transmitancji obiektu (1.1); należy wyznaczyć macierz transmitancji regulatora (1.2) tak, aby

$$(7.25)\qquad \det S_l = \det \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} = cw(z)$$

przy czym $w(z)$ jest zadanym wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego, a c jest stałą niezależną od z.

Twierdzenie 7.2.1. Niech macierz D_l i N_l będą lewostronnie względnie pierwsze, a X_l^0 i Y_l^0 będą macierzami regulatora tak dobranymi, że macierz systemowa

$$(7.26)\qquad S_l^0 = \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l^0 & X_l^0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą unimodularną. Zbiór macierzy transmitancji regulatora spełniających warunek (25) jest określony zależnościami

$$(7.27)\qquad \begin{aligned} X_l &= PX_l^0 - QN_l \\ Y_l &= PY_l^0 - QD_l \end{aligned}$$

przy czym macierz wielomianowa $P = P(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z]$ spełnia warunek

(7.28) $$\det P = w(z)$$

a $Q = Q(s) \in \boldsymbol{R}^{m\times p}[z]$ jest dowolną macierzą wielomianową.

Dowód. Z zależności (1.23) mamy

(7.29) $$S_p^0 = \left[S_l^0\right]^{-1} = \begin{bmatrix} X_p^0 & N_p \\ -Y_p^0 & D_p \end{bmatrix}$$

Korzystając z (1.15) i (1.13) otrzymamy

(7.30) $$S_l S_p^0 = \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p^0 & N_p \\ -Y_p^0 & D_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ Q & P \end{bmatrix}$$

gdyż

(7.31) $$D_l X_p^0 + N_l Y_p^0 = I_p, \qquad D_l N_p = N_l D_p$$

a

(7.32) $$Q = Y_l X_p^0 - X_l Y_p^0, \qquad P = Y_l N_p + X_l D_p$$

Łatwo wykazać, że $\det P = \det[Y_l N_p + X_l D_p]$ jest wielomianem charakterystycznym układu zamkniętego i jest spełniony warunek (28).
Z równości (30) mamy

$$\det S_l S_p^0 = \det S_l \,\det S_p^0 = \det \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ Q & P \end{bmatrix} = \det P = w(z)$$

czyli

(7.33) $$\det S_l = cw(z)$$

przy czym $c = \dfrac{1}{\det S_p^0}$.

■

Lemat 7.2.1. Para macierzy (32) jest prawostronnie równoważna parze (Y_l, X_l) i jest lewostronnie względnie pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy para (Y_l, X_l) jest lewostronnie względnie pierwsza.

Dowód. Z równości (32) mamy

(7.34) $$[Q \quad P] = [Y_l \quad X_l] \begin{bmatrix} X_p^0 & N_p \\ -Y_p^0 & D_p \end{bmatrix} = [Y_l \quad X_l] S_p^0$$

Para (32) jest więc prawostronnie równoważna parze (Y_l, X_l), gdyż macierz S_p^0 jest unimodularna. Zgodnie z definicją 1.15.7 para (32) jest lewostronnie względnie pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy para (Y_l, X_l) jest lewostronnie względnie pierwsza.

■

Dotychczas zakładaliśmy, że macierze D_l i N_l są lewostronnie względnie pierwsze, czyli że macierz transmitancji obiektu $T_0(z)$ jest nieskracalna.
Załóżmy teraz, że macierz $L = L(z)$ jest największym wspólnym lewym dzielnikiem (NWLD) macierzy D_l i N_l, czyli

(7.35) $$D_l = L\overline{D}_l, \qquad N_l = L\overline{N}_l, \qquad L = L(z) \in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z]$$

Twierdzenie 7.2.2. Niech L będzie NWLD macierzy D_l i N_l, a $\overline{X}_l^0$, $\overline{Y}_l^0$ będą macierzami regulatora tak dobranymi, że macierz systemowa

(7.36) $$\overline{S}_l^0 = \begin{bmatrix} \overline{D}_l & -\overline{N}_l \\ \overline{Y}_l^0 & \overline{X}_l^0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą unimodularną. Zbiór macierzy transmitancji regulatora, spełniających warunek (25) istnieje wtedy i tylko wtedy gdy

(7.37) $$\overline{w}(z) = \frac{w(z)}{\det L}$$

i jest określony zależnościami

(7.38) $$X_l = \overline{P}\,\overline{X}_l^0 - \overline{Q}\,\overline{N}_l, \quad Y_l = \overline{P}\,\overline{Y}_l^0 - \overline{Q}\,\overline{D}_l$$

przy czym

(7.39) $$\det \overline{P} = \overline{w}(z)$$

a $\overline{Q} = \overline{Q}(z) \in R^{m \times p}[z]$ jest dowolną macierzą.

Dowód. Biorąc pod uwagę, że

(7.40) $$\overline{S}_p^0 = \left[\overline{S}_l^0\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{X}_p^0 & \overline{N}_p \\ -\overline{Y}_p^0 & \overline{D}_p \end{bmatrix}$$

możemy napisać

(7.41) $$S_l \overline{S}_p^0 = \begin{bmatrix} D_l & -N_l \\ Y_l & X_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X}_p^0 & \overline{N}_p \\ -\overline{Y}_p^0 & \overline{D}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{bmatrix}$$

gdyż

(7.42) $$\begin{aligned} &D_l \overline{X}_p^0 + N_l \overline{Y}_p^0 = L, \qquad D_l \overline{N}_p - N_l \overline{D}_p = L\left(\overline{D}_l \overline{N}_p - \overline{N}_l \overline{D}_p\right) = 0 \\ &\overline{Q} = Y_l \overline{X}_p^0 - X_l \overline{Y}_p^0, \qquad \overline{P} = Y_l \overline{N}_p + X_l \overline{D}_p \end{aligned}$$

Z równości (41) mamy

(7.43) $$\det S_l \det \overline{S}_p^0 = \det L \det \overline{P}$$

a po uwzględnieniu zależności (37) i (39) otrzymamy

(7.44) $$\det S_l = \frac{\det L \det \overline{P}}{\det \overline{S}_p^0} = \overline{c} w(z)$$

gdzie $\overline{c} = \dfrac{1}{\det \overline{S}_p^0}$.

Zauważmy, że równość (44) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (37).

■

3. Macierze i układy normalne

3.1. Macierz normalna

3.1.1. Definicja macierzy normalnej

Weźmy pod uwagę macierz wymierną w postaci standardowej

(1.1) $$W(s) = \frac{L(s)}{m(s)}$$

przy czym $L(s) \in R^{m \times n}[s]$ jest macierzą wielomianową, a $m(s)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem elementów macierzy $W(s)$, będącym wielomianem monicznym, tzn. o współczynniku równym 1 przy najwyższej potędze zmiennej s. Zakładamy, że liczba wierszy m i kolumn n macierzy (1) jest większa od dwóch lub równa dwa (tzn. $m, n \geq 2$).

Definicja 3.1.1. Macierz wymierną (1) nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $L(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$.

Na przykład macierz wymierna

(1.2) $$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{L(s)}{m(s)}$$

jest macierzą normalną, gdyż wyznacznik macierzy

(1.3) $$L(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

będący minorem stopnia drugiego tej macierzy, dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s) = (s+1)(s+2)$.

Natomiast macierz wymierna

$$W(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=\frac{L(s)}{m(s)} \tag{1.4}$$

nie jest macierzą normalną, gdyż wyznacznik macierzy $L(s)$ nie dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)=(s+1)^2$.

3.1.2. Normalność macierzy $[Is-A]^{-1}$ cyklicznych macierzy A

Macierz odwrotna $[Is-A]^{-1}$ dla dowolnej macierzy $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ jest macierzą wymierną, którą możemy napisać w postaci standardowej

$$[Is-A]^{-1}=\frac{L_A(s)}{m(s)} \tag{1.5}$$

przy czym $L_A(s)\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$, a $m(s)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem.

Macierz wielomianową $[Is-A]$ stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach można sprowadzić do jej postaci kanonicznej Smitha

$$[Is-A]_S=U(s)[Is-A]V(s)=\operatorname{diag}[i_1(s),\ i_2(s),\ \ldots,\ i_r(s),\ 0,\ \ldots,0]\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s] \tag{1.6}$$

przy czym $U(s)$ i $V(s)$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach, $i_1(s),\ i_2(s),\ \ldots,\ i_r(s)$ są monicznymi wielomianami inwariantnymi spełniającymi warunek podzielności $i_{k+1}(s)\,|\,i_k(s)$ (wielomian $i_{k+1}(s)$ jest podzielny bez reszty przez wielomian $i_k(s)$), $k=1,\ \ldots,\ r-1$, a $r=$ rząd $L_A(s)$.
Wielomiany inwariantne są określone zależnością

$$i_k(s)=\frac{D_k(s)}{D_{k-1}(s)};\quad \text{dla } k=1,\ldots,r\ \ (D_0(s)=1) \tag{1.7}$$

gdzie $D_k(s)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k-tego macierzy $[Is-A]$.
Wielomian minimalny $\Psi(s)$ macierzy $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ z jej wielomianem charakterystycznym $\varphi(s)=\det[I_n s-A]$ jest związany zależnością

$$\Psi(s)=\frac{\varphi(s)}{D_{n-1}(s)} \tag{1.8}$$

Z zależności (7) i (8) wynika, że $\Psi(s)=\varphi(s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$D_1(s)=D_2(s)=\ldots=D_{n-1}(s)=1 \tag{1.9}$$

Zgodnie z definicją 1.14.2 macierz $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ spełniającą warunek (9) (lub równoważnie $\Psi(s)=\varphi(s)$) nazywamy macierzą cykliczną.

Twierdzenie 3.1.1. Niech $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ oraz $n\geq 2$. Wtedy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $L_A(s)$ jest podzielny bez reszty przez wielomian $m(s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Psi(s)=\varphi(s)$.

Dowód. ***Dostateczność.*** Jeżeli $\Psi(s)=\varphi(s)$, to z zależności (9) i (7) wynika, że $i_1(s)=i_2(s)=\ldots=i_{n-1}(s)=1$, $i_n(s)=\Psi(s)=m(s)$ oraz

$$[Is-A]_S=\operatorname{diag}[1,1,\ldots 1,m(s)] \tag{1.10}$$

Macierz dołączona macierzy (10) ma więc postać

$$[Is-A]_{S\,ad}=L_A(s)=\operatorname{diag}[m(s),m(s),\ldots,m(s),1] \tag{1.11}$$

Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy (11) dzieli się więc bez reszty przez wielomian $m(s)$. Zgodnie z twierdzeniem Bineta-Cauchy każdy minor stopnia drugiego macierzy $L_A(s)=\left[U^{-1}(s)[Is-A]_S V^{-1}(s)\right]_{ad}=V(s)[Is-A]_{S\,ad}U(s)$ jest sumą iloczynów minorów stopnia drugiego macierzy (11) oraz minorów stopnia drugiego macierzy unimodularnych $U(s)$ i $V(s)$. Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L_A(s)$ dzieli się więc bez reszty przez wielomian $m(s)$.

Konieczność. Z definicji postaci standardowej wynika, że $\frac{L_A(s)}{m(s)}$ jest ułamkiem nieokreślonym, a wielomian $m(s)$ jest wielomianem monicznym. Jeżeli $\Psi(s)\neq\varphi(s)$, to z zależności (8) wynika, że $D_{n-1}(s)\neq 1$ i każdy niezerowy element macierzy dołączonej $[Is-A]_{ad}$ dzieli się bez reszty przez $D_{n-1}(s)$. Rozwijając wyznacznik $\det[Is-A]$ według dowolnego wiersza lub kolumny otrzymamy $\det[Is-A]=D_{n-1}(s)\overline{m}(s)$. Ale w tym wypadku $\frac{L_A(s)}{m(s)}$ nie jest ułamkiem nieokreślonym.

■

Przykład 3.1.1. Wykazać, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $L_A(s)$ macierzy odwrotnej $[Is-A]^{-1}=\frac{L_A(s)}{m(s)}$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)=\det[Is-A]$ dla dowolnych współczynników a_0, a_1, a_2 macierzy Frobeniusa

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

W tym wypadku mamy

$$\det[Is-A]=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ a_0 & a_1 & s+a_2 \end{vmatrix}=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$$

oraz

$$[Is-A]^{-1}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ a_0 & a_1 & s+a_2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{L_A(s)}{m(s)}$$

przy czym $m(s)=\det[Is-A]=s^3+a_2s^2+a_1s+a_0$

$$L_A(s)=\begin{bmatrix} s^2+a_2s+a_1 & s+a_2 & 1 \\ -a_0 & s^2+a_2s & s \\ -a_0s & -a_1s-a_0 & s^2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Minory stopnia drugiego macierzy (13) są równe

(1.14)

$$M_{11}=\begin{vmatrix} s^2+a_2s & s \\ -a_1s-a_0 & s^2 \end{vmatrix}=sm(s),\quad M_{12}=\begin{vmatrix} -a_0 & s \\ -a_0s & s^2 \end{vmatrix}=0,\quad M_{13}=\begin{vmatrix} -a_0 & s^2+a_2s \\ -a_0s & -a_1s-a_0 \end{vmatrix}=a_0m(s)$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} s+a_2 & 1 \\ -a_1s-a_0 & s^2 \end{vmatrix}=m(s),\quad M_{22}=\begin{vmatrix} s^2+a_2s+a_1 & 1 \\ -a_0s & s^2 \end{vmatrix}=sm(s)\quad M_{23}=\begin{vmatrix} s^2+a_2s+a_1 & s+a_2 \\ -a_0s & -a_1s-a_0 \end{vmatrix}=-m(s)$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} s+a_2 & 1 \\ s^2+a_2s & s \end{vmatrix}=0,\quad M_{32}=\begin{vmatrix} s^2+a_2s+a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{vmatrix}=m(s),\quad M_{33}=\begin{vmatrix} s^2+a_2s+a_1 & s+a_2 \\ -a_0 & s^2+a_2s \end{vmatrix}=(s+a_2)m(s)$$

Niezerowe minory (14) dzielą się bez reszty przez wielomian $m(s)$.

Zauważmy, że powyższe rozważania są prawdziwe dla macierzy Frobeniusa dowolnego wymiaru. Ten sam wynik otrzymujemy dlatego, że macierz Frobeniusa jest macierzą cykliczną.

Przykład 3.1.2. Wykażemy, że macierz $[Is-A]^{-1}$ jest macierzą normalną dla

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

gdy $a\neq 1$ i nie jest macierzą normalną dla $a=1$.
W tym celu obliczamy

$$[Is-A]^{-1}=\begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s-a \end{bmatrix}^{-1}=\frac{L_A(s)}{m(s)} \tag{1.16}$$

przy czym $m(s)=\det[Is-A]=(s-1)^2(s-a)$

$$L_A(s)=\begin{bmatrix} (s-1)(s-a) & s-a & 0 \\ 0 & (s-1)(s-a) & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Minory stopnia drugiego macierzy (17) są równe

(1.18)

$$M_{11}=\begin{vmatrix}(s-1)(s-a) & 0\\ 0 & (s-1)^2\end{vmatrix}=(s-1)m(s),\quad M_{12}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & (s-1)^2\end{vmatrix}=0,\quad M_{13}=\begin{vmatrix}0 & (s-1)(s-a)\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}s-a & 0\\ 0 & (s-1)^2\end{vmatrix}=m(s),\quad M_{22}=\begin{vmatrix}(s-1)(s-a) & 0\\ 0 & (s-1)^2\end{vmatrix}=(s-1)m(s),\quad M_{23}=\begin{vmatrix}(s-1)(s-a) & s-a\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}s-a & 0\\ (s-1)(s-a) & 0\end{vmatrix}=0,\quad M_{32}=\begin{vmatrix}(s-1)(s-a) & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,\quad M_{33}=\begin{vmatrix}(s-1)(s-a) & s-a\\ 0 & (s-1)(s-a)\end{vmatrix}=(s-a)m(s)$$

Jeżeli $a\neq 1$, to $\frac{L_A(s)}{m(s)}$ jest ułamkiem nieokreślonym i każdy niezerowy minor (18) dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$. Jeżeli natomiast a=1, to

$$L_A(s)=(s-1)\begin{bmatrix}s-1 & 1 & 0\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & 0 & s-1\end{bmatrix};\quad m(s)=(s-1)^3$$

oraz

$$[Is-A]^{-1}=\frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix}s-1 & 1 & 0\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & 0 & s-1\end{bmatrix}$$

W tym wypadku minor $M_{21}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & s-1\end{vmatrix}=s-1$ nie dzieli się przez wielomian $(s-1)^2$. Macierz (16) dla a = 1 nie jest więc macierzą normalną.

3.1.3. Normalne macierze wymierne

Weźmy pod uwagę macierz wymierną o wymiarach $m\times n$ w postaci standardowej (1).

Niech

$$(1.19)\; W_M(s)=U(s)W(s)V(s)=\begin{bmatrix}\frac{l_1(s)}{\Psi_1(s)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{l_2(s)}{\Psi_2(s)} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{l_m(s)}{\Psi_m(s)} & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{m\times n}(s)$$

będzie postacią kanoniczną McMillana macierzy (1), a

(1.20)
$$w_M(s)=\Psi_1(s)\Psi_2(s)\dots\Psi_m(s)$$

będzie wielomianem McMillana tej macierzy, przy czym $U(s)$ i $V(s)$ są macierzami unimodularnymi (patrz 2.6).

Twierdzenie 3.1.2. Niech macierz wymierna (1) spełnia warunek $\min(m,n)\geq 2$. Wtedy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $L(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian McMillana $w_M(s)$ macierzy (1) jest równy wielomianowi $m(s)$, czyli

(1.21)
$$w_M(s)=m(s)$$

Dowód. ***Dostateczność.*** Jeżeli jest spełniony warunek (21), to $\Psi_2(s)=\Psi_3(s)=\dots=\Psi_m(s)=1$, gdyż $\Psi_1(s)=m(s)$. W tym wypadku macierz (19) ma postać

(1.22)
$$W_M(s)=\frac{L_M(s)}{m(s)}$$

przy czym

$$(1.23)\quad L_M(s)=\begin{bmatrix}l_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & l_2(s)m(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & l_m(s)m(s) & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$$

Z postaci macierzy (23) wynika, że każdy jej niezerowy minor stopnia drugiego jest podzielny bez reszty przez wielomian $m(s)$.

Zgodnie z twierdzeniem Bineta-Cauchy każdy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)=U^{-1}(s)L_M(s)V^{-1}(s)$ jest sumą iloczynów minorów stopnia drugiego macierzy (23) oraz macierzy unimodularnych $U^{-1}(s)$ i $V^{-1}(s)$.
Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $L(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$.
Konieczność. Jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$, to z twierdzenia Bineta-Cauchy wynika, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L_M(s)$ jest również podzielny bez reszty przez $m(s)$. Macierz wielomianowa $L_M(s)$ ma więc postać (23), a z (22) wynika, że $\Psi_2(s)=\Psi_3(s)=...=\Psi_m(s)=1$. Wobec tego z (20) otrzymujemy warunek (21).

∎

Przykład 3.1.3. Dla macierzy wymiernej (2) postać kanoniczna Smitha macierzy wielomianowej (3) jest równa

$$L_S(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix} \tag{1.24}$$

a postać kanoniczna McMillana macierzy wymiernej (2)

$$W_M(s)=\frac{L_S(s)}{m(s)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Wielomian McMillana tej macierzy

$$w_M(s)=(s+1)(s+2) \tag{1.26}$$

spełnia warunek (21). Macierz wymierna (2) jest więc macierzą normalną. Wynik ten jest zgodny z rozważaniami z punktu 1.1.

Postać kanoniczna McMillana macierzy wymiernej (4) jest równa

$$W_M(s)=\frac{L_S(s)}{m(s)}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix} \tag{1.27}$$

a jej wielomian McMillana ma postać

$$w_M(s)=(s+1)^3 \tag{1.28}$$

Wielomian (28) nie spełnia warunku (21), gdyż $m(s)=(s+1)^2 \neq w_M(s)=(s+1)^3$. Macierz wymierna (4) nie jest więc macierzą normalną. Wynik ten jest zgodny z rozważaniami z punktu 1.1.

3.2. Postacie ułamkowe macierzy normalnych

Zgodnie z definicją 1.14.1 macierz wielomianową $A(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$ nazywamy macierzą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona tylko jeden wielomian inwariantny różny od 1. Na przykład postać kanoniczna Smitha $A_S(s)$ prostej macierzy kwadratowej $A(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s]$ pełnego rzędu jest równa

$$A_S(s)=\operatorname{diag}[1, \ \dots \ 1, \ i_m(s)] \tag{2.1}$$

gdzie $i_m(s)$ jest jedynym różnym od 1 wielomianem inwariantnym.

Weźmy pod uwagę macierz wymierną w postaci kanonicznej

$$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}\in \boldsymbol{R}^{m\times n}(s) \tag{2.2}$$

przy czym $L(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}[s]$, a $m(s)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem elementów macierzy $\boldsymbol{W}(s)$.

Twierdzenie 3.2.1. Niech

$$W(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)=N_p(s)D_p^{-1}(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times n}(s), \ \min(m,n)\geq 2 \tag{2.3}$$

Wówczas macierz (3) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $D_l(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s]$ i $D_p(s)\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s]$ są macierzami prostymi.

Dowód. ***Dostateczność.*** Szczegółowe rozważania przeprowadzimy dla $n>m$. Rozważania dla $m\geq n$ są analogiczne.

Niech

$$(2.4)\quad L_S(s)=U(s)L(s)V(s)=\begin{bmatrix} i_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_m(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};\ (n>m)$$

będzie postacią kanoniczną Smitha macierzy $L(s)$, przy czym $U(s)$ i $V(s)$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach. Z definicji macierzy normalnej wynika, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$. Z twierdzenia Bineta-Cauchy wynika, że również każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L_S(s)$ dzieli się bez reszty przez ten sam wielomian. Wobec tego, jeżeli macierz $W(s)$ jest normalna, macierz $L_S(s)$ ma postać

$$(2.5)\quad L_S(s)=\begin{bmatrix} i_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{i}_2(s)m(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{i}_m(s)m(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym ułamek $\frac{i_1(s)}{m(s)}$ jest nieskracalny (w wypadku przeciwnym $m(s)$ nie byłby najmniejszym wspólnym mianownikiem elementów macierzy $W(s)$). W tym wypadku mamy:

$$(2.6)\quad W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=U(s)\begin{bmatrix} \frac{i_1(s)}{m(s)} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{i}_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{i}_m(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}V(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)$$

przy czym

$$D_l(s)=\{\mathrm{diag}\,[m(s),\ 1,\ \dots,\ 1]\}U^{-1}(s)\in \mathbf{R}^{m\times m}[s]$$

(2.7)

$$N_l(s)=\begin{bmatrix} i_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{i}_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{i}_m(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}V(s)\in \mathbf{R}^{m\times n}[s]$$

Zauważmy, że $\mathrm{st}\det D_l(s)=\mathrm{st}\, m(s)$, gdyż $\mathrm{st}\det U^{-1}(s)=0$.

Konieczność. Niech $D_l(s)$ będzie macierzą prostą, czyli

$$(2.8)\quad D_l(s)=\bar{U}(s)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m(s) \end{bmatrix}\bar{V}(s)=\bar{U}(s)\,\mathrm{diag}\,[1,\ 1,\ \dots\ 1,\ m(s)]\bar{V}(s)$$

gdzie $\bar{U}(s)$ i $\bar{V}(s)$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach.
Macierz odwrotna macierzy (8) ma postać

$$(2.9)\quad D_l^{-1}(s)=\frac{\bar{V}^{-1}(s)}{m(s)}\mathrm{diag}\,[m(s),\ m(s),\ \dots\ m(s),\ 1]\bar{U}^{-1}(s)$$

Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy diagonalnej

$$(2.10)\quad \mathrm{diag}\,[m(s),\ m(s),\ \dots\ m(s),\ 1]$$

dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$. Z twierdzenia Bineta-Cauchy wynika więc, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy

$$\bar{V}^{-1}(s)\,\mathrm{diag}\,[m(s),\ m(s),\ \dots\ m(s),\ 1]\bar{U}^{-1}(s)$$

również dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$.
Macierz wymierna $W(s)=D_l^{-1}(s)N_l(s)$ jest więc macierzą normalną. Dowód dla $W(s)=N_p(s)D_p^{-1}(s)$ jest analogiczny.

■

Wniosek 3.2.1. Każdy niezerowy minor stopnia k-tego $(k>2)$ macierzy wielomianowej $L(s)$ normalnej macierzy wymiernej (2) dzieli się bez reszty przez wielomian $m^{k-1}(s)$.
Wniosek ten wynika natychmiast z postaci macierzy (5).

Wniosek 3.2.2. Każda kolumnowa macierz (2) dla $L(s)=[l_1(s),\ l_2(s),\ \dots\ l_m(s)]^T$ w postaci ułamkowej $D_l^{-1}(s)N_l(s)$ ma prostą macierz $D_l(s)$. Każda wierszowa macierz wymierna (2) dla $L(s)=[l_1(s)\ \ l_2(s)\ \ \dots\ \ l_n(s)]$ w postaci ułamkowej $N_p(s)D_p^{-1}(s)$ ma prostą macierz $D_p(s)$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy szczegółowo tylko dla pierwszego przypadku, gdyż w przypadku drugim jest analogiczny.
Stosując działania elementarne na wierszach macierzy $L(s)=[l_1(s) \quad l_2(s) \quad \dots \quad l_m(s)]^T$ przekształcamy ją do postaci

$$U(s)L(s)=[l(s) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \tag{2.11}$$

gdzie $U(s)$ jest macierzą unimodularną działań elementarnych na wierszach.
Biorąc pod uwagę (11) otrzymamy

$$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\frac{U^{-1}(s)}{m(s)}\begin{bmatrix} l(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=D_l^{-1}(s)N_l(s) \tag{2.12}$$

przy czym

$$\begin{gathered} D_l(s)=\{\mathrm{diag}\,[m(s), \quad 1, \quad \dots, \quad 1]\}U(s)\in \boldsymbol{R}^{m\times m}[s] \\ N_l(s)=\begin{bmatrix} l(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^{m\times 1}[s] \end{gathered} \tag{2.13}$$

Macierz $D_l(s)$ jest więc macierzą prostą.

W przypadku drugim macierze $D_p(s)$ i $N_p(s)$ mają postacie

$$\begin{gathered} D_p(s)=V(s)\{\mathrm{diag}\,[m(s), \quad 1, \quad \dots, \quad 1]\}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[s] \\ N_p(s)=[l(s), \quad 1, \quad \dots, \quad 1]\in \boldsymbol{R}^{1\times n}[s] \end{gathered} \tag{2.14}$$

gdzie $V(s)$ jest macierzą unimodularną działań elementarnych na kolumnach.

■

Twierdzenie 3.2.2. Niech najmniejszy wspólny mianownik macierzy wymiernej (2) ma postać

$$m(s)=(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\dots(s-s_p)^{n_p} \tag{2.15}$$

Macierz (2) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej minor stopnia drugiego ma w punkcie $s=s_i$, $i=1,2,\dots,p$ biegun o krotności nie większej niż n_i, $i=1,2,\dots,p$.

Dowód. ***Dostateczność***. Niech W_{kl}^{ij} będzie minorem stopnia drugiego złożonym z wierszy o numerach i, j oraz kolumn o numerach k, l macierzy (2), czyli

$$W_{kl}^{ij}=\begin{vmatrix} \frac{l_{ik}(s)}{m(s)} & \frac{l_{il}(s)}{m(s)} \\ \frac{l_{jk}(s)}{m(s)} & \frac{l_{jl}(s)}{m(s)} \end{vmatrix}=\frac{l_{ik}(s)l_{jl}(s)-l_{il}(s)l_{jk}(s)}{m^2(s)} \tag{2.16}$$

przy czym $l_{ij}(s)$ jest (i, j)-tym elementem macierzy $L(s)$.
Jeżeli macierz (2) jest macierzą normalną, to wielomian $l_{ik}(s)l_{jl}(s)-l_{il}(s)l_{jk}(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$ i otrzymamy

$$W_{kl}^{ij}=\frac{w_{kl}^{ij}(s)}{m(s)} \tag{2.17}$$

Z (17) wynika, że minor W_{kl}^{ij} ma w punkcie $s=s_i$, $i=1,2,\dots,p$ biegun o krotności nie większej niż n_i, $i=1,2,\dots,p$.

Konieczność. Jeżeli natomiast minor W_{kl}^{ij} ma w punkcie $s=s_i$, $i=1,2,\dots,p$ biegun o krotności nie większej niż n_i, $i=1,2,\dots,p$, to z (16) wynika, że wielomian $l_{ik}(s)l_{jl}(s)-l_{il}(s)l_{jk}(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)$ i macierz (2) jest macierzą normalną.

■

Wniosek 3.2.3. Niech $m(s)$ standardowej macierzy wymiernej (2) ma postać (15). Jeżeli macierz (2) jest normalna, to

$$\text{rząd}\, L(s_i)=1 \text{ dla } i=1,2,\dots,p \tag{2.18}$$

Dowód. Jeżeli macierz (2) jest normalna, to z zależności (9) wynika, że zachodzi (18).

■

Wniosek 3.2.4. Niech wielomian (15) ma tylko jednokrotne ($n_i = 1,\ i = 1, 2, ..., p$) miejsca zerowe. Macierz (2) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (18).

Dowód. Dostateczność wynika z wniosku 3. Jeżeli jest spełniony warunek (18), to każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)$ jest podzielny przez wielomian $m(s)$, a więc macierz (2) jest macierzą normalną.

∎

3.3. Suma i iloczyn macierzy normalnych oraz normalna macierz odwrotna

3.3.1. Suma i iloczyn macierzy normalnych

Weźmy pod uwagę dwie macierze normalne w postaci standardowej

$$W_1(s) = \frac{L_1(s)}{m_1(s)} = \left[\frac{l_{ij}^1(s)}{m_1(s)}\right]; \quad W_2(s) = \frac{L_2(s)}{m_2(s)} = \left[\frac{l_{ij}^2(s)}{m_2(s)}\right] \tag{3.1}$$

Niżej zostaną podane warunki, przy spełnieniu których suma i iloczyn macierzy (1) są macierzami normalnymi.

Twierdzenie 3.3.1. Suma macierzy normalnych (1) o tych samych wymiarach jest macierzą normalną, jeżeli wielomiany $m_1(s)$ i $m_2(s)$ są względnie pierwsze (nie zawierają tych samych miejsc zerowych).

Dowód. Suma macierzy (1) jest równa

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{L_1(s)}{m_1(s)} + \frac{L_2(s)}{m_2(s)} = \frac{m_2(s)L_1(s) + m_1(s)L_2(s)}{m_1(s)m_2(s)} \tag{3.2}$$

Jeżeli $m_1(s)$ i $m_2(s)$ nie mają wspólnych miejsc zerowych i macierze (1) są macierzami w postaci standardowej, to prawa strona (2) jest w ułamkiem nieskracalnym.
Minor W_{kl}^{ij} macierzy (2) złożony z jej wierszy o numerach i, j oraz kolumn o numerach k, l ma postać

$$W_{kl}^{ij} = \begin{vmatrix} \dfrac{l_{ik}^1(s)}{m_1(s)} + \dfrac{l_{ik}^2(s)}{m_2(s)} & \dfrac{l_{il}^1(s)}{m_1(s)} + \dfrac{l_{il}^2(s)}{m_2(s)} \\ \dfrac{l_{jk}^1(s)}{m_1(s)} + \dfrac{l_{jk}^2(s)}{m_2(s)} & \dfrac{l_{jl}^1(s)}{m_1(s)} + \dfrac{l_{jl}^2(s)}{m_2(s)} \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Stosując znaną regułę dodawania funkcji wymiernych i obliczania minorów stopnia drugiego, po dokonaniu skróceń otrzymujemy nieskracalną funkcję wymierną o postaci

$$W_{kl}^{ij} = \frac{w_{kl}^{ij}(s)}{m_1(s)m_2(s)} \tag{3.4}$$

przy czym $w_{kl}^{ij}(s)$ jest wielomianem.
Jak wiadomo suma macierzy (1) jest macierzą normalną, jeżeli wielomiany $m_1(s)$ i $m_2(s)$ są względnie pierwsze.

∎

Z twierdzenia 1 wynika natychmiast następujący ważny wniosek.

Wniosek 3.3.1. Jeżeli $W(s) \in \boldsymbol{R}^{m \times n}(s)$ jest macierzą normalną, a $P(s) \in \boldsymbol{R}^{m \times n}[s]$ jest macierzą wielomianową, to macierz

$$W(s) + P(s) \tag{3.5}$$

jest macierzą normalną.

Twierdzenie 3.3.2. Iloczyn macierzy normalnych (1) (spełniających warunek wykonalności ich mnożenia) jest macierzą normalną, jeżeli macierz

$$\frac{L_1(s)L_2(s)}{m_1(s)m_2(s)} \tag{3.6}$$

jest nieskracalna (nieredukowalna).

Dowód. Jeżeli warunek (6) jest spełniony, to

$$W_1(s)W_2(s) = \frac{L_1(s)L_2(s)}{m_1(s)m_2(s)} = \frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)} \tag{3.7}$$

Z twierdzenia Bineta-Cauchy wynika, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)$ jest sumą iloczynów minorów stopnia drugiego macierzy $L_1(s)$ i odpowiednio macierzy $L_2(s)$. Każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $W(s)$ jest więc podzielny przez wielomian $m_1(s)m_2(s)$, a więc macierz (7) jest macierzą normalną.

∎

Przykład 3.3.1. Dane są dwie macierze normalne

$$W_1(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

(3.8)

$$W_2(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

Należy wyznaczyć sumę i iloczyn tych macierzy i sprawdzić, czy otrzymane macierze są normalne.
Suma macierzy (8) jest równa

$$W(s)=W_1(s)+W_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}+\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} (2s+5)(s+2)(s+4) & 0 \\ 0 & (2s+6)(s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

i jest macierzą normalną.
Iloczyn macierzy (8) jest równy

$$W(s)=W_1(s)W_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+4 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} (s+2)(s+4) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

i jest również macierzą normalną. Wynik ten jest zgodny z twierdzeniami 1 i 2, gdyż macierze (8) spełniają założenia tych twierdzeń.

Przykład 3.3.2. Wyznaczyć sumę i iloczyn macierzy normalnych

$$W_1(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

(3.9)

$$W_2(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Suma macierzy (9) jest równa

$$W_1(s)+W_2(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} (2s+3)(s+3) & 0 \\ 0 & (2s+5)(s+1) \end{bmatrix}$$

i nie jest macierzą normalną. Macierze (9) nie spełniają założenia twierdzenia 1, gdyż wielomiany $m_1(s)=(s+1)(s+2)$ i $m_2(s)=(s+2)(s+3)$ nie są względnie pierwsze.
Iloczyn macierzy (9) jest równy

$$W_1(s)W_2(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

i nie jest macierzą normalną. Macierz (9) nie spełnia założenia (6), gdyż macierz

$$\frac{L_1(s)L_2(s)}{m_1(s)m_2(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)^2(s+3)}=\begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

jest skracalna przez $s+2$.

Niżej zostanie rozwiązane następujące zadanie.

Zadanie 3.3.1. Dane są dwie macierze normalne w postaci ułamkowej

(3.10) $$W_1(s) = D_1^{-1}(s)N_1(s), \quad W_2(s) = D_2^{-1}(s)N_2(s)$$

przy czym macierze $D_1(s)$ i $D_2(s)$ są proste i jest spełniony warunek nieskracalności (6). Należy wyznaczyć parę nieredukowalną $(D(s), N(s))$ taką, że

(3.11) $$W_1(s)W_2(s) = D^{-1}(s)N(s)$$

Biorąc pod uwagę (10), otrzymamy

(3.12) $$W_1(s)W_2(s) = D_1^{-1}(s)N_1(s)D_2^{-1}(s)N_2(s)$$

Z założenia (6) wynika, że macierz $N_1(s)D_2^{-1}(s)$ jest nieskracalna. Stosując procedurę podaną w punkcie 2.6, możemy dla pary $N_1(s)$, $D_2(s)$ wyznaczyć parę nieredukowalną $\left(\overline{D}_2(s), \overline{N}_1(s)\right)$ taką, że

(3.13) $$N_1(s)D_2^{-1}(s) = \overline{D}_2^{-1}(s)\overline{N}_1(s)$$

Podstawiając (13) do (12), otrzymujemy

(3.14) $$W_1(s)W_2(s) = D_1^{-1}(s)\overline{D}_2^{-1}(s)\overline{N}_1(s)N_2(s) = D^{-1}(s)N(s)$$

przy czym

(3.15) $$D(s) = \overline{D}_2(s)D_1(s); \quad N(s) = \overline{N}_1(s)N_2(s)$$

Zadanie dualne do zadania 1 można sformułować następująco

Zadanie 3.3.1'. Dane są macierze normalne w postaci ułamkowej

(3.16) $$W_1(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s), \quad W_2(s) = N_2(s)D_2^{-1}(s)$$

przy czym $D_1(s)$ i $D_2(s)$ są proste i jest spełniony warunek nieskracalności (6). Należy wyznaczyć parę nieredukowalną $(D(s), N(s))$ taką, że

(3.17) $$W_1(s)W_2(s) = N(s)D^{-1}(s)$$

Biorąc pod uwagę (16), otrzymujemy

(3.18) $$W_1(s)W_2(s) = N_1(s)D_1^{-1}(s)N_2(s)D_2^{-1}(s)$$

Z warunku nieskracalności (6) wynika, że macierz $D_1^{-1}(s)N_2(s)$ jest nieskracalna. Stosując procedurę podaną w punkcie 2.6 możemy dla pary $(D_1(s), N_2(s))$ wyznaczyć parę nieredukowalną $\left(\overline{N}_2(s), \overline{D}_1(s)\right)$ taką, że

(3.19) $$D_1^{-1}(s)N_2(s) = \overline{N}_2(s)\overline{D}_1^{-1}(s)$$

Podstawiając (19) do (18), otrzymamy

(3.20) $$W_1(s)W_2(s) = N_1(s)\overline{N}_2(s)\overline{D}_1^{-1}(s)D_2^{-1}(s) = N(s)D^{-1}(s)$$

przy czym

(3.21) $$N(s) = N_1(s)\overline{N}_2(s); \quad D(s) = D_2(s)\overline{D}_1(s)$$

3.3.2. Normalna macierz odwrotna

Weźmy pod uwagę macierz wymierną nieosobliwą $W(s) \in \mathbf{R}^{n\times n}(s)$. Niżej zostaną podane warunki, przy spełnieniu których macierz odwrotna $W^{-1}(s)$ jest macierzą normalną.

Niech

(3.22) $$W(s) = D_l^{-1}(s)N_l(s) = N_p(s)D_p^{-1}(s) \in \mathbf{R}^{n\times n}(s); \quad (n \geq 2)$$

Z założenia, że $\det W(s) \neq 0$ wynika nieosobliwość macierzy $N_l(s) \in \mathbf{R}^{n\times n}[s]$ i $N_p(s) \in \mathbf{R}^{n\times n}[s]$. Z (22) mamy

(3.23) $$W^{-1}(s) = N_l^{-1}(s)D_l(s) = D_p(s)N_p^{-1}(s)$$

Z zależności (23) i twierdzenia 2.1 wynika natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.3. Macierz odwrotna (23) jest macierzą normalną wtedy, gdy macierze $N_l(s)$ i $N_p(s)$ są macierzami prostymi.

Niżej podany przykład pokazuje, że macierz odwrotna (23) może być macierzą normalną nawet wtedy, gdy macierz $W(s)$ nie jest macierzą normalną.

Przykład 3.3.3. Macierz

(3.24) $$W(s)=\begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

nie jest macierzą normalną, gdyż $\det\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+2)$ nie dzieli się bez reszty przez $(s+1)^2$.

Macierz odwrotna macierzy (24) ma postać

(3.25) $$W^{-1}(s)=\begin{bmatrix} \frac{(s+1)^2}{s+2} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

i jest macierzą normalną, gdyż $\det\begin{bmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix} = (s+1)^3(s+2)$ dzieli się bez reszty przez $(s+2)$.

Zgodnie z twierdzeniem 2.1 macierz (22) jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $D_l(s)$ i $D_p(s)$ są macierzami prostymi. Macierz odwrotna (23) macierzy normalnej (22) jest więc również macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $N_l(s)$ i $N_p(s)$ są macierzami prostymi. Mamy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3.4. Macierz odwrotna (23) macierzy normalnej (22) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierze $D_l(s)$, $D_p(s)$, $N_l(s)$ i $N_p(s)$ są macierzami prostymi.

Przykład 3.3.4. Macierz

(3.26) $$W(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s(s+1) \end{bmatrix}$$

jest macierzą normalną. Macierz ta w postaci (22) jest równa

$$W(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}$$

przy czym

(3.27) $$D_l(s)=D_p(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix};\ N_l(s)=N_p(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (27) są macierzami prostymi.
Macierz odwrotna $W^{-1}(s)$ macierzy (26) ma postać

$$W^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Jest ona macierzą normalną, gdyż $\det\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = s(s+1)(s+2)$ dzieli się bez reszty przez s.

3.4. Rozkład macierzy normalnych

3.4.1. Rozkład macierzy normalnych na sumę macierzy normalnych

Weźmy pod uwagę macierz normalną w postaci standardowej (1.1), przy czym wielomian $m(s)=m_1(s)m_2(s)$, a wielomiany $m_1(s)$ i $m_2(s)$ są względnie pierwsze

(4.1) $$W(s)=\frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)}$$

Wykażemy, że macierz (1) można rozłożyć na sumę dwóch macierzy normalnych $\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$, $\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$, czyli

$$\frac{L(s)}{m_1(s)m_2(s)} = \frac{L_1(s)}{m_1(s)} + \frac{L_2(s)}{m_2(s)} \tag{4.2}$$

Zauważmy, że macierze $\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$ i $\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$ są nieskracalne, w przeciwnym wypadku macierz (1) dla $L(s) = m_2(s)L_1(s) + m_1(s)L_2(s)$ byłaby również macierzą skracalną.

Macierz $\frac{L(s)}{m_1(s)}$ jest macierzą normalną, gdyż każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $L(s)$ dzieli się bez reszty przez $m_1(s)$. Wobec tego mamy

$$\frac{L(s)}{m_1(s)} = D_1^{-1}(s)N_1(s) \tag{4.3}$$

przy czym $D_1(s)$ jest macierzą prostą, taką, że $\det D_1(s) = m_1(s)$.

Mnożąc lewostronnie (2) przez $D_1(s)$ i uwzględniając (3), otrzymamy

$$\frac{N_1(s)}{m_2(s)} = D_1(s)\frac{L_1(s)}{m_1(s)} + D_1(s)\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$$

oraz

$$\frac{N_1(s)}{m_2(s)} - D_1(s)\frac{L_2(s)}{m_2(s)} = D_1(s)\frac{L_1(s)}{m_1(s)} \tag{4.4}$$

Wykażemy, że macierz $\frac{N_1(s)}{m_1(s)}$ jest macierzą normalną.

Zauważmy, że lewa strona równości (4) jest analityczna w miejscach zerowych wielomianu $m_1(s)$, a prawa strona tej równości jest analityczna w miejscach zerowych wielomianu $m_2(s)$. Wobec tego macierz $\overline{N}_1(s) = D_1(s)\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$ jest macierzą wielomianową oraz

$$\frac{L_1(s)}{m_1(s)} = D_1^{-1}(s)\overline{N}_1(s) \tag{4.5}$$

przy czym macierz $D_1^{-1}(s)\overline{N}_1(s)$ jest nieskracalna, a macierz $D_1(s)$ jest prosta.

Macierz $\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$ jest więc macierzą normalną.

Dowód, że macierz $\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$ jest macierzą normalną jest analogiczny.

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4.1. Jeżeli wielomiany $m_1(s)$ i $m_2(s)$ są względnie pierwsze, to macierz normalną (1) można rozłożyć na sumę dwóch macierzy normalnych $\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$ i $\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$.

Macierze $L_1(s)$ i $L_2(s)$ można wyznaczyć korzystając z metody przedstawionej w punkcie 2.4. Jeżeli macierz (1) jest ściśle właściwa, to rozkład (2) jest rozkładem jednoznacznym.

Przykład 3.4.1. Dokonać rozkładu macierzy normalnej

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+4}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{s+3}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} 2s^2+8s+8 & 0 \\ 0 & s^3+7s^2+15s+9 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

na sumę dwóch macierzy normalnych $\frac{L_1(s)}{m_1(s)}$ i $\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$, przyjmując $m_1(s) = (s+1)(s+2) = s^2+3s+2$ i $m_2(s) = s+3$.

Poszukiwać będziemy macierzy $L_1(s)$ i $L_2(s)$ w postaci

$$L_1(s) = \begin{bmatrix} a_1s+a_0 & 0 \\ 0 & b_1s+b_0 \end{bmatrix}; \quad L_2(s) = \begin{bmatrix} c_1s+c_0 & 0 \\ 0 & d_1s+d_0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Biorąc pod uwagę (6) i (7), otrzymamy

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}2s^2+8s+8 & 0\\ 0 & s^3+7s^2+15s+9\end{bmatrix}=\frac{L_1(s)}{m_1(s)}+\frac{L_2(s)}{m_2(s)}$$

$$(4.8)\quad =\frac{m_2(s)L_1(s)+m_1(s)L_2(s)}{m_1(s)m_2(s)}=\frac{1}{(s^2+3s+2)(s+3)}$$

$$\begin{bmatrix}(s+3)(a_1s+a_0)+(s^2+3s+2)(c_1s+c_0) & 0\\ 0 & (s+3)(b_1s+b_0)+(s^2+3s+2)(d_1s+d_0)\end{bmatrix}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej s równości (8), otrzymamy $c_1=0$, $d_1=1$ oraz

$$(4.9)\quad \begin{aligned}&a_1+c_0+3c_1=2; \quad 3a_1+a_0+2c_1+3c_0=8; \quad 3a_0+2c_0=8\\ &b_1+d_0+3d_1=7; \quad 3b_1+b_0+2d_1+3d_0=15; \quad 3b_0+2d_0=9\end{aligned}$$

Rozwiązując równania (9), otrzymamy $a_1=1$, $a_0=2$, $c_1=1$, $c_0=1$, $b_1=1$, $b_0=1$, $d_0=3$, $d_1=1$.
Poszukiwane macierze $L_1(s)$ i $L_2(s)$ mają więc postać

$$L_1(s)=\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix};\quad L_2(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+3\end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze

$$\frac{L_1(s)}{m_1(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix};$$

$$\frac{L_2(s)}{m_2(s)}=\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s+3\end{bmatrix}$$

są macierzami normalnymi.

3.4.2. Rozkład strukturalny macierzy normalnych

Weźmy pod uwagę macierz wymierną w postaci standardowej

$$(4.10)\quad W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}$$

przy czym $L(s)\in R^{m\times n}[s]$ a $m(s)$ jest monicznym wielomianem.

Twierdzenie 3.4.2. Macierz (10) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(4.11)\quad L(s)=P(s)Q(s)+m(s)G(s)$$

przy czym $P(s)\in R^{m}[s]$, $Q(s)\in R^{1\times n}[s]$, $G(s)\in R^{m\times n}[s]$ oraz

$$(4.12)\quad \mathrm{st}\,P(s)<\mathrm{st}\,m(s);\quad \mathrm{st}\,Q(s)<\mathrm{st}\,m(s)$$

Dowód. ***Dostateczność.*** Jeżeli zachodzi (11), to obliczając minor stopnia drugiego złożony z wierszy o numerach i, j oraz kolumn o numerach k, l macierzy $L(s)$ otrzymamy

$$(4.13)\quad L_{k,l}^{i,j}(s)=\begin{vmatrix}p_i(s)q_k(s)+m(s)g_{ik}(s) & p_i(s)q_l(s)+m(s)g_{il}(s)\\ p_j(s)q_k(s)+m(s)g_{jk}(s) & p_j(s)q_l(s)+m(s)g_{jl}(s)\end{vmatrix}=m(s)l_{kl}^{ij}(s)$$

przy czym $p_i(s)$, $q_k(s)$ i $g_{ik}(s)$ są elementami $P(s)$, $Q(s)$ i $G(s)$, a $l_{kl}^{ij}(s)$ jest wielomianem. Z (13) wynika, że minor $L_{k,l}^{i,j}(s)$ jest podzielny bez reszty przez $m(s)$. Macierz (10) jest więc macierzą normalną.

Konieczność. Jeżeli macierz (10) jest macierzą normalną, to każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy (11) jest podzielny bez reszty przez $m(s)$. Macierz (11) ma w tym wypadku postać

$$(4.14)\quad L(s)=U(s)\begin{bmatrix}i_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & i_2(s)m(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & i_m(s)m(s) & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}V(s)\ \text{dla}\ n>m$$

gdzie $i_1(s), i_2(s), \dots, i_m(s)$ są wielomianami inwariantnymi, a $U(s)$ i $V(s)$ macierzami unimodularnymi.

Macierz (14) możemy rozłożyć na sumę dwóch macierzy ($L(s)=L_1(s)+m(s)L_2(s)$)

(4.15)
$$L_1(s)=i_1(s)U(s)\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}V(s)=i_1(s)U_1(s)V_1(s)$$
$$L_2(s)=U(s)\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & i_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & i_m(s) & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}V(s)$$

przy czym $U_1(s)$ jest pierwszą kolumną macierzy $U(s)$, a $V_1(s)$ jest pierwszym wierszem macierzy $V(s)$.
Przyjmując

(4.16)
$$P(s)=i_1(s)U_1(s),\quad Q(s)=V_1(s),\quad G(s)=L_2(s)$$

otrzymamy poszukiwany rozkład (11).
Jeżeli nie jest spełniony warunek (12), to dzieląc każdy element $p_i(s)$ $(q_k(s))$ wektora $P(s)$ (odpowiednio $Q(s)$) przez $m(s)$ otrzymamy

(4.17)
$$P(s)=m(s)K_1(s)+\overline{P}(s),\quad Q(s)=m(s)K_2(s)+\overline{Q}(s)$$

przy czym $\operatorname{st}\overline{P}(s)<\operatorname{st}m(s)$, $\operatorname{st}\overline{Q}(s)<\operatorname{st}m(s)$ a $K_1(s)$ i $K_2(s)$ są odpowiednio wielomianowym wektorem kolumnowym i wierszowym.

Podstawiając (17) do (11) otrzymamy

(4.18)
$$L(s)=\overline{P}(s)\overline{Q}(s)+m(s)\overline{G}(s)$$

przy czym

$$\overline{G}(s)=G(s)+m(s)K_1(s)K_2(s)+\overline{P}(s)K_2(s)+K_1(s)\overline{Q}(s)$$

■

Przykład 3.4.2. Wyznaczyć rozkład strukturalny macierzy wymiernej

(4.19)
$$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

Wykonując działania elementarne $L[2+1]$, $P[1+2\times(-1)]$, $L[2+1\times(s+1)]$, $P[2+1\times(-s-1)]$ na macierzy

(4.20)
$$L(s)=\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

otrzymamy jej postać kanoniczną Smitha

$$L_S(s)=U(s)L(s)V(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

oraz macierze unimodularne

$$U(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ s+1 & s+2\end{bmatrix},\quad V(s)=\begin{bmatrix}1 & -(s+1)\\ -1 & s+2\end{bmatrix}$$

Zatem

$$L(s)=U^{-1}(s)L_S(s)V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ -(s+1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & s+1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

W tym wypadku zgodnie z (16), otrzymamy

$$P(s)=i_1(s)U_1(s)=\begin{bmatrix}s+2\\ -(s+1)\end{bmatrix},\ Q(s)=V_1(s)=[s+2\quad s+1]$$

oraz

$$G(s)=U^{-1}(s)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & i_m(s)\end{bmatrix}V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ -(s+1) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & s+1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(s+1)(s+2)\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

gdzie $U_1(s)$ i $V_1(s)$ są odpowiednio pierwszą kolumną macierzy $U^{-1}(s)$ i pierwszym wierszem macierzy $V^{-1}(s)$.

Poszukiwany rozkład macierzy $L(s)$ ma postać

$$\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 \\ -(s+1) \end{bmatrix} [s+2 \quad s+1] + (s+2)(s+1) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykażemy, że aby wyznaczyć rozkład (11) nie jest konieczne wyznaczenie postaci kanonicznej Smitha macierzy $L(s)$.
Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach, możemy macierz wielomianową $L(s)$ sprowadzić do postaci:

(4.21) $$U(s)L(s)V(s) = i(s)\begin{bmatrix} 1 & w(s) \\ k(s) & \overline{L}(s) \end{bmatrix}$$

przy czym $U(s)$ i $V(s)$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych $w(s) \in \boldsymbol{R}^{1\times(n-1)}[s]$, $k(s) \in \boldsymbol{R}^{m-1}[s]$, $\overline{L}(s) \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times(n-1)}[s]$ oraz $i(s) \in \boldsymbol{R}[s]$.
Możliwość ta wynika natychmiast z możliwości sprowadzenia macierzy $L(s)$ do postaci kanonicznej Smitha $L_S(s)$.
Niech

(4.22) $$P(s) = U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix}, \quad Q(s) = [1 \quad w(s)]V^{-1}(s)$$

Z podzielności minorów stopnia drugiego macierzy $L(s)$ przez $m(s)$ wynika, że elementy macierzy $i(s)[\overline{L}(s) - k(s)w(s)]$ są podzielne przez $m(s)$, czyli

(4.23) $$i(s)[\overline{L}(s) - k(s)w(s)] = m(s)\hat{L}(s)$$

przy czym $\hat{L}(s) \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times(n-1)}[s]$.
Definiując

(4.24) $$G(s) = U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{m-1} & \hat{L}(s) \end{bmatrix} V^{-1}(s)$$

z zależności (21)–(24) otrzymujemy

$$L(s) = U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 & w(s) \\ k(s) & \overline{L}(s) \end{bmatrix} V^{-1}(s)$$
$$= U^{-1}(s)\left\{ i(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix}[1 \quad w(s)] + \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{m-1} & m(s)\hat{L}(s) \end{bmatrix} \right\} V^{-1}(s)$$
$$= P(s)Q(s) + m(s)G(s)$$

a więc poszukiwany rozkład (11).

Przykład 3.4.3. Wyznaczyć rozkład (11) macierzy wielomianowej (20).
Stosując działania elementarne $L[1+2]$, $P[1+2\times(-1)]$ na macierzy (20), otrzymujemy

$$U(s)L(s)V(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ -s-1 & s+1 \end{bmatrix}$$

przy czym

$$U(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i(s) = 1$$

W tym wypadku korzystając z (22)-(24), otrzymamy

$$P(s) = U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 \\ -(s+1) \end{bmatrix}$$
$$Q(s) = [1 \quad w(s)]V^{-1}(s) = [1 \quad s+1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [s+2 \quad s+1]$$
$$G(s) = U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{L}(s) \end{bmatrix} V^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= (s+1)(s+2)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poszukiwany rozkład (20) ma więc postać

$$\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 \\ -(s+1) \end{bmatrix} [s+2 \quad s+1] + (s+1)(s+2) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym w przykładzie 2.

Wniosek 3.4.1. Niech $s_1, s_2, ..., s_p$ będą biegunami (niekoniecznie różnymi) macierzy wymiernej (10). Wtedy

$$\text{rząd } L(s_k)=1 \text{ dla } k=1,2,...,p \tag{4.25}$$

Warunek (10) wynika z zależności (11), gdyż rząd $P(s_k)=$ rząd $Q(s_k)=1$

Z wniosku 3.4 oraz wniosku 1 wynika następujące kryterium normalności macierzy (10).

Kryterium 3.4.1. Jeżeli bieguny $s_1, s_2, ..., s_p$ macierzy są jednokrotne (różne) to macierz ta jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (25). Jeżeli bieguny są wielokrotne, to macierz (10) nie jest normalna, gdy

$$\text{rząd } L(s_k)>1 \text{ dla pewnego } k\in\{1, 2, ..., p\} \tag{4.26}$$

Przykład 3.4.3. Macierz wymierna

$$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

$$m(s)=(s+1)(s+2), \quad L(s)=\begin{bmatrix} s+2 & s+1 & 1 \\ s+1 & s+2 & s+1 \end{bmatrix}$$

ma tylko jednokrotne bieguny $s_1=-1$, $s_2=-2$.
Macierz ta nie jest normalna, gdyż

$$\text{rząd } L(s_1)=\text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=2>1$$

Ten sam wynik otrzymamy, badając podzielność minorów stopnia drugiego macierzy $L(s)$ przez wielomian $m(s)$.
Minor

$$\begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ s+2 & s+1 \end{vmatrix}=(s+1)^2-(s+2)=s^2-s-1$$

nie dzieli się bez reszty przez wielomian $m(s)=(s+1)(s+2)$.

Zauważmy, że w wypadku wielokrotnych biegunów warunek (25) nie jest warunkiem dostatecznym normalności macierzy (10).

Na przykład macierz o podwójnym biegunie w punkcie $s_1=-1$, mająca postać

$$W(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

nie jest normalna, ale spełnia warunek (10), gdyż

$$\text{rząd } L(s_1)=\text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=1$$

3.5. Normalizacja macierzy za pomocą sprzężeń zwrotnych

3.5.1. Sprzężenie zwrotne od wektora stanu

Weźmy pod uwagę układ

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{5.1a}$$

$$y=Cx \tag{5.1b}$$

ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu w postaci

$$u=v+Kx \tag{5.2}$$

gdzie $v\in R^m$ jest nowym wymuszeniem, a $K\in \mathbf{R}^{m\times n}$ jest macierzą wzmocnień. Podstawiając (2) do (1a) otrzymamy

$$\dot{x}=(A+BK)x+Bv \tag{5.3}$$

Macierz transmitancji układu zamkniętego ma postać

(5.4) $$T_z(s) = C[I_n s - (A+BK)]^{-1} B$$

Zadanie normalizacji macierzy transmitancji za pomocą sprzężeń zwrotnych od wektora stanu można sformułować następująco.

Zadanie 3.5.1. Dany jest układ (1) z macierzą A niecykliczą i parą (A,C) nieobserwowalną. Należy wyznaczyć macierz K tak, aby macierz transmitancji układu zamkniętego (4) była normalna.

Rozwiązanie tego zadania opiera się na następującym lemacie.

Lemat 3.5.1. Jeżeli macierz A ma postać kanoniczną Frobeniusa

(5.5) $$A = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{-k} \end{array}\right] \in \boldsymbol{R}^{n\times n}; \quad k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

to dla dowolnej macierzy C można tak dobrać k w macierzy (5), że para (A, C) jest obserwowalna.

Dowód. Para (A, C) jest obserwowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} I_n s - A \\ C \end{bmatrix} = n \text{ dla wszystkich } s \in \boldsymbol{C}$$

Korzystając z działań elementarnych na wierszach i kolumnach możemy macierz

$$\left[\begin{array}{cccccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & s+k_n \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ \hdashline c_{p1} & c_{p2} & c_{p3} & \cdots & c_{p,n-1} & c_{pn} \end{array}\right]$$

przekształcić do postaci

(5.6) $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ p_0(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_p(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$p_0(s) = s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1$$
$$p_i(s) = c_{in} s^{n-1} + \dots + c_{i2} s + c_{i1}; \qquad i = 1, 2, \dots, p$$

Wykonując odpowiednio działania elementarne na wierszach macierzy (6) i wybierając odpowiednio $k_1, \dots, k_n$, otrzymamy

(5.7) $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } a \neq 0$$

Macierz (7) dla $a \neq 0$ ma pełny rząd kolumnowy i wobec tego para (A, C) jest obserwowalna.

■

Twierdzenie 3.5.2. Niech macierz A układu (1) będzie niecykliczna i para (A, C) nieobserwowalna. Wtedy istnieje macierz K taka, że macierz transmitancji (4) jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (A, B) jest sterowalna.

Dowód. ***Konieczność.*** Jak wiadomo para $(A + BK, B)$ jest sterowalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (A, B) jest sterowalna. Jeżeli para (A, B) jest niesterowalna, to macierz transmitancji (4) nie jest normalna. Jeżeli więc para (A, B) jest niesterowalna, to nie istnieje macierz K taka, dla której macierz transmitancji (4) jest normalna.

Dostateczność. Jeżeli para (A, B) jest sterowalna, to istnieje macierz nieosobliwa $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$ taka, że

(5.8a)
$$\overline{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \hline A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix},\ \overline{B} = TB = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix},$$

$$A_{ij} \in \boldsymbol{R}^{d_i \times d_j},\ B_i \in \boldsymbol{R}^{d_i \times m}$$

przy czym

(5.8b)
$$A_{ij} = \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{d_i-1} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-a_i} \end{array}\right] & \text{dla} \quad i = j \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \hline -a_{ij} \end{bmatrix} & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

gdzie $a_{ij} = [a_0^{ij}\ a_1^{ij} \ldots a_{d_j-1}^{ij}]$, $b_i = [0 \cdots 0\ 1\ b_{i,i+1} \ldots b_{im}]$, a $d_1, \ldots, d_m$ są indeksami sterowalności spełniającymi warunek

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = n$$

Niech

(5.9)
$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2m} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

oraz

(5.10)
$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ -k \end{bmatrix},\quad K_1 \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times n},\quad k = [k_1\ k_2 \ldots k_n] \in \boldsymbol{R}^{1\times n}$$

Korzystając z (8a) i (9) łatwo sprawdzić, że

(5.11)
$$\widetilde{B} = \overline{B}\hat{B} = \operatorname{diag}[\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_m],\ \widetilde{b}_i = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T \in \boldsymbol{R}^{d_i}$$

gdzie T oznacza transpozycję.

Niech

(5.12)
$$\overline{K} = \hat{B}^{-1}KT^{-1} = \begin{bmatrix} -a_{n_1} + e_{n_1+1} \\ \hline -a_{n_{m-1}} + e_{n_{m-1}+1} \\ -a_{n_m} - k \end{bmatrix}$$

gdzie $n_i = \sum_{k=1}^{i} d_k$, a_{n_i} jest n_i-tym wierszem macierzy $\overline{A}, e_i$ jest i-tym wierszem macierzy jednostkowej I_n a k jest określone zależnością (10).

Korzystając z (9), (11) i (12), łatwo sprawdzić, że

(5.13)
$$\begin{aligned} A_z &= T(A+BK)T^{-1} = \overline{A} + \overline{B}KT^{-1} = \\ &= \overline{A} + \overline{B}\hat{B}\hat{B}^{-1}KT^{-1} = \overline{A} + \widetilde{B}\overline{K} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Macierz (13) jest cykliczna, a k zostanie tak dobrane, aby para (A_z, C) była obserwowalna. Zgodnie z lematem 1, jeżeli macierz A_z ma postać kanoniczną Frobeniusa (13), to można zawsze wybrać elementy $k_1, \ldots, k_n$ tak, że para (A_z, C) jest obserwowalna. Jeżeli macierz A_z jest cykliczna, para (A, B) jest sterowalna i para (A_z, C) jest obserwowalna, to macierz transmitancji (4) jest normalna.

■

W przypadku ogólnym istnieje wiele macierzy wzmocnień K normalizujących macierz transmitancji.
Jeżeli para (A, B) jest sterowalna, to macierz k możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 3.5.1.
Krok 1. Wyznacz macierz nieosobliwą T, przekształcającą parę (A, B) do postaci kanonicznej (8) oraz $\overline{A}, \overline{B}, \hat{B}, \widetilde{B}$.
Krok 2. Korzystając z (12) wyznacz $\overline{K}$ oraz

(5.14)
$$K = \hat{B}\overline{K}T$$

dla nieznanej macierzy wierszowej k.

Krok 3. Wybierz k tak, aby para (A_z, C) była obserwowalna.

Krok 4. Wyznacz poszukiwaną macierz K podstawiając k wyznaczone w kroku 3 do zależności (14).

Przykład 3.5.1. Weźmy pod uwagę układ (1) z macierzami

(5.15)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Łatwo sprawdzić, że macierz A jest niecykliczna, para (A, B) sterowalna, a para (A, C) nieobserwowalna.
Poszukiwać będziemy macierzy

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

takiej, że macierz transmitancji układu zamkniętego (4) jest normalna.
Korzystając z powyższej procedury kolejno otrzymamy.

Krok 1. Macierze (15) mają już postać kanoniczną (8) oraz

(5.16)
$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right], \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \overline{B}\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Korzystając z (12) i (16), wyznaczamy

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} -a_2 + e_3 \\ -a_4 - k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 2-k_4 \end{bmatrix}$$

oraz

(5.17)
$$K = \hat{B}\overline{K}T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 2-k_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2k_1 & 2+2k_2 & 1+2k_3 & 2k_4 - 3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & 2-k_4 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Para $(\overline{A}_z, C)$ dla

$$\overline{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

jest obserwowalna dla $k_1 \neq 0$ i dowolnych k_2, k_3, k_4, gdyż

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ C\overline{A}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} = 4$$

dla $k_1 \neq 0$ i dowolnych k_2, k_3, k_4.

Krok 4. Poszukiwana macierz wzmocnień ma postać (17) dla $k_1 \neq 0$ i dowolnych k_2, k_3, k_4.

3.5.2. Sprzężenia zwrotne od wyjścia

Weźmy pod uwagę układ (1) ze sprzężeniem zwrotnym od wyjścia w postaci

(5.18)
$$u = v + Fy$$

gdzie $F \in \boldsymbol{R}^{m \times p}$ jest macierzą wzmocnień.

Z zależności (1a) i (18) mamy

(5.19) $$\dot{x} = (A + BFC)x + Bv$$

Macierz transmitancji układu zamkniętego ma postać

(5.20) $$T_c(s) = C[I_n s - (A + BFC)]^{-1} B$$

Zadanie normalizacji macierzy transmitancji za pomocą sprzężeń zwrotnych od wyjścia można sformułować następująco. Dany jest układ (1) o niecyklicznej macierzy A, sterowalnej parze (A, B) i obserwowalnej parze (A, C). Należy wyznaczyć macierz F tak, aby macierz transmitancji układu zamkniętego (20) była normalna. Jeżeli para (A, C) jest nieobserwowalna, to para $(A + BFC, C)$ jest również nieobserwowalna i macierz transmitancji układu zamkniętego (20) jest nienormalna dla dowolnej macierzy F. Zadanie normalizacji macierzy transmitancji za pomocą sprzężeń zwrotnych od wyjścia ma więc rozwiązanie tylko wtedy, gdy para (A, C) jest obserwowalna. Jeżeli dodatkowo para (A, B) jest sterowalna to zadanie normalizacji sprowadza się do wyznaczenia macierzy F tak, że macierz układu zamkniętego $\hat{A}_z = A + BFC$ jest cykliczna. Niech $K = FC$. Wtedy korzystając ze sposobu podanego w dowodzie twierdzenia 2 możemy wyznaczyć K, dane zależnością (14) tak, że macierz $\hat{A}_z = A + BK$ jest cykliczna. Z Twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że równanie $K = FC$ ma rozwiązanie dla danych C i K wtedy i tylko wtedy, gdy

(5.21) $$\text{rząd}\, C = \text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5.2 Niech para (A, B) będzie sterowalna, para (A, C) obserwowalna, a macierz A niech będzie macierzą niecykliczną. Wtedy istnieje macierz F taka, że macierz transmitancji (20) jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (21).

Jeżeli warunek (21) jest spełniony, to stosując działania elementarne na kolumnach macierzy $K = FC$ otrzymamy

(5.22) $$[K_1 \;\; 0] = F[C_1 \;\; 0],\ K_1 \in \boldsymbol{R}^{m \times p}, C_1 \in \boldsymbol{R}^{p \times p}$$

oraz $\det C_1 \neq 0$, gdyż zgodnie z założeniem macierz C ma pełny rząd wierszowy.

Z zależności (22) otrzymujemy

(5.23) $$F = K_1 C_1^{-1}$$

Przykład 3.5.2. Weźmy pod uwagę układ (1) z macierzami

(5.24) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że para (A, B) jest sterowalna, para (A, C) obserwowalna, a A jest macierzą niecykliczną.
Poszukujemy macierzy

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

takiej, że macierz transmitancji układu zamkniętego jest macierzą normalną.
W taki sam sposób jak w przykładzie 1 wyznaczamy macierz K i z zależności (17) dla $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = -\frac{1}{2}, k_4 = 2$ otrzymamy

(5.25) $$K = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku warunek (21) jest spełniony, gdyż

$$\text{rząd}\, C = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix}$$

(5.26) $$= \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Stosując działania elementarne na kolumnach macierzy

$$\begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

otrzymamy

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ K_1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

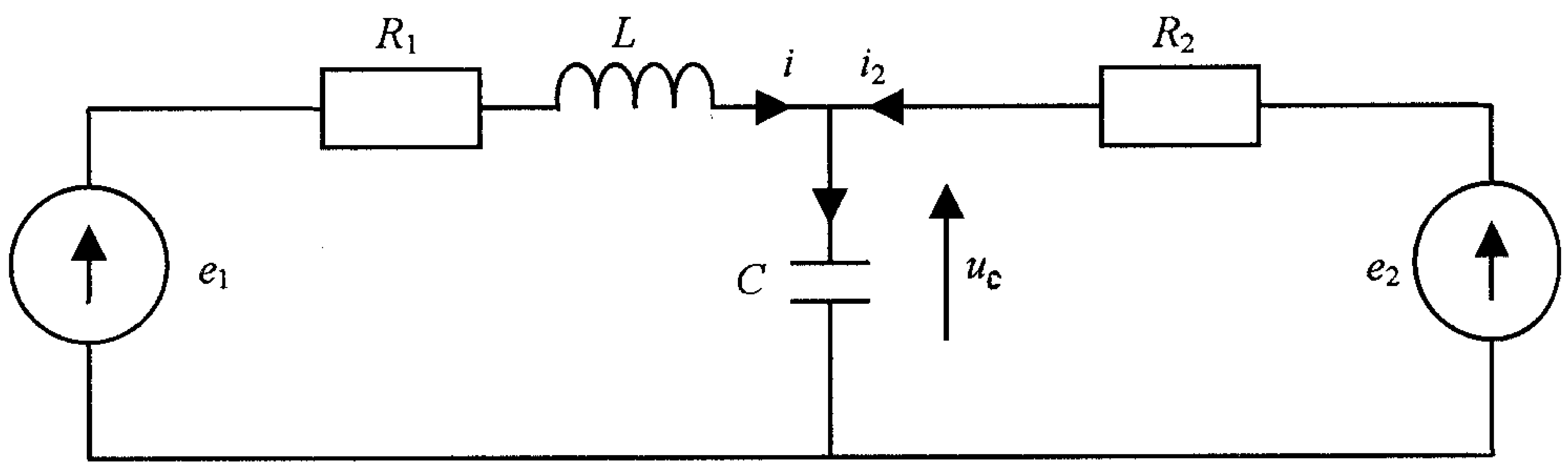
Korzystając z zależności (23) otrzymamy poszukiwaną macierz w postaci

$$F = K_1 C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3.6. Obwody elektryczne jako przykłady układów normalnych

3.6.1. Obwody rzędu drugiego

Weźmy pod uwagę układ elektryczny o schemacie podanym na rysunku 1 o znanej rezystancji R_1, R_2, indukcyjności L, pojemności C i napięciach źródłowych e_1 i e_2. Przyjmując za zmienne stanu prąd i w cewce oraz napięcie u_C na kondensatorze możemy dla tego obwodu napisać równania



Rys. 3.6.1. Obwód drugiego rzędu

$$e_1 = R_1 i + L\frac{di}{dt} + u_C$$

$$e_2 = \left(C\frac{du_C}{dt} - i \right) R_2 + u_C$$

Równania te zapisujemy w postaci równania stanu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Przyjmując

(6.1) $$x = \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy

(6.2a) $$\dot{x} = Ax + Bu$$

Przyjmijmy za odpowiedzi (wielkości wyjściowe) napięcie na cewce $y_1 = L\frac{di}{dt}$ oraz prąd i_2 pobierany ze źródła o napięciu źródłowym e_2, $y_2 = i_2$. Równanie wyjścia ma więc postać

(6.2b) $$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - R_1 i - u_C \\ \frac{e_2 - u_C}{R_2} \end{bmatrix} = Cx + Du$$

przy czym

(6.3) $$C = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Macierz A jest macierzą cykliczną i jej wielomian charakterystyczny

(6.4) $$m(s) = \det\left[Is - A\right] = \begin{vmatrix} s + \frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s + \frac{1}{CR_2} \end{vmatrix} = s^2 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2} \right) s + \frac{R_1 + R_2}{LCR_2}$$

pokrywa się z wielomianem minimalnym.

Macierz odwrotna

(6.5)
$$[Is-A]^{-1}=\frac{1}{LCR_2s^2+(R_1CR_2+L)s+R_1+R_2}\begin{bmatrix} L(sCR_2+1) & -CR_2 \\ LR_2 & sLR_2C+R_1R_2C \end{bmatrix}$$

jest macierzą normalną.
Macierze B i C są macierzami kwadratowymi. Wobec tego para (A,B) jest sterowalna i para (A,C) jest obserwowalna. Macierz transmitancji tego obwodu jest nieskracalna i ma postać

(6.6)
$$T(s)=C[Is-A]^{-1}B+D=\begin{bmatrix} -R_1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s+\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}=$$
$$=\frac{1}{LCR_2s^2+(R_1CR_2+L)s+R_1+R_2}\begin{bmatrix} -(sR_1CR_2+R_1+R_2) & -sL \\ -1 & \frac{-(sL+R_1)}{R_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (6) jest macierzą normalną.
Dokonamy rozkładu strukturalnego macierzy (5). Mnożąc prawostronnie macierz wielomianową

(6.7)
$$L(s)=\begin{bmatrix} sLCR_2+L & -CR_2 \\ LR_2 & sLCR_2+R_1CR_2 \end{bmatrix}$$

przez macierz $V=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, otrzymamy

$$L(s)V=\begin{bmatrix} CR_2 & sCLR_2+L \\ -(sLCR_2+R_1CR_2) & LR_2 \end{bmatrix}$$

Stosując oznaczenia przyjęte w 4.2, otrzymamy w tym przypadku

$$U(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad V(s)=V,\quad i(s)=CR_2,\quad w(s)=sL+\frac{L}{CR_2},$$

$$k(s)=-(sL+R_1),\quad \overline{L}(s)=\frac{L}{C}$$

oraz

$$P(s)=U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} CR_2 \\ -(sLCR_2+R_1CR_2) \end{bmatrix}$$

$$Q(s)=[1 \quad w(s)]V^{-1}(s)=\begin{bmatrix} sL+\frac{L}{CR_2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$G(s)=U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{L}(s) \end{bmatrix}V^{-1}(s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_2CL^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

(6.8)
$$[Is-A]^{-1}=\frac{1}{m(s)}\begin{bmatrix} L(sCR_2+1) & -CR_2 \\ LR_2 & sLR_2C+R_1R_2C \end{bmatrix}=\frac{P(s)Q(s)}{m(s)}+G(s)$$

Zauważmy, że z rozkładu strukturalnego macierzy (5) wynika rozkład strukturalny macierzy transmitancji (6), gdyż

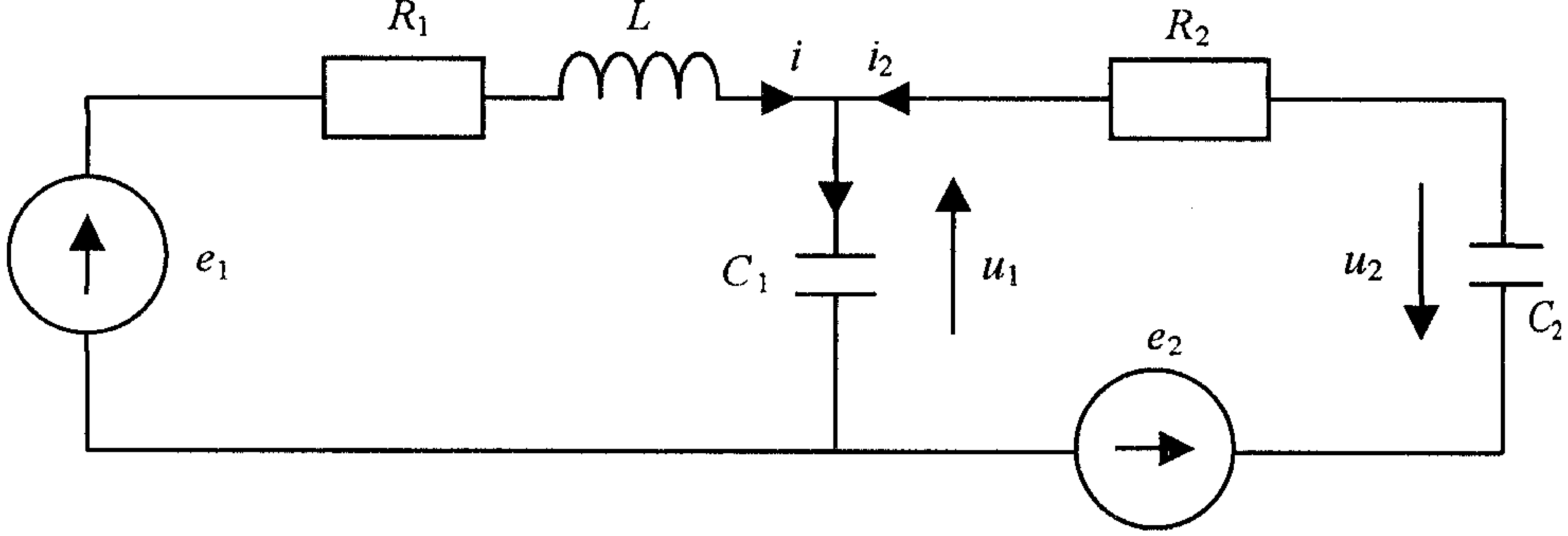
(6.9)
$$T(s)=C[Is-A]^{-1}B+D=\frac{CP(s)Q(s)B}{m(s)}+CG(s)B+D=\frac{\overline{P}(s)\overline{Q}(s)}{m(s)}+\overline{G}(s)$$

przy czym

$$\overline{P}(s)=CP(s),\quad \overline{Q}(s)=Q(s)B,\quad \overline{G}(s)=CG(s)B+D$$

3.6.2. Obwody rzędu trzeciego

Weźmy pod uwagę układ elektryczny o schemacie podanym na rysunku 2 o znanych rezystancjach R_1, R_2, indukcyjności L, pojemnościach C_1, C_2 i napięciach źródłowych e_1 i e_2. Za zmienne stanu przyjmujemy prąd w cewce i oraz napięcia u_1 i u_2 na kondensatorach, a za odpowiedzi napięcie na rezystancji R_1, $y_1 = R_1 i$ oraz napięcie na rezystancji R_2, $y_2 = R_2 i_2$. Korzystając z praw Kirchoffa, możemy dla tego obwodu napisać równania



Rys. 3.6.2. Obwód trzeciego rzędu

$$e_1 = R_1 i + L\frac{di}{dt} + u_1$$

$$e_2 = u_2 + R_2C_2\frac{du_2}{dt} + u_1, \quad C_1\frac{du_1}{dt} = i + C_2\frac{du_2}{dt}$$

które zapisujemy w postaci równania stanu

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Przyjmując

$$\text{(6.10)}\ x = \begin{bmatrix} i \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

(6.11a) $$\dot{x} = Ax + Bu$$

Biorąc pod uwagę, że

$$y_1 = R_1 i$$

$$y_2 = R_2C_2\frac{du_2}{dt} = e_2 - u_1 - u_2$$

otrzymamy równanie wyjścia w postaci

$$\text{(6.11b)}\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 i \\ e_2 - u_1 - u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = Cx + Du$$

przy czym

(6.12) $$C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz A jest macierzą cykliczną, gdyż minor otrzymany po wykreśleniu pierwszego wiersza i trzeciej kolumny macierzy $[Is - A]$ jest równy $-\frac{1}{R_2C_1C_2}$, a więc największy wspólny dzielnik macierzy dołączonej $[Is - A]_{ad}$ jest równy 1. Wielomian charakterystyczny (minimalny) macierzy A ma postać

(6.13)

$$m(s) = \det[Is - A] = \begin{vmatrix} s + \frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & s + \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s + \frac{1}{R_2C_2} \end{vmatrix} = s^3 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right)s^2$$

$$+\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{R_1}{LR_2C_1} + \frac{R_1}{LR_2C_2} + \frac{2}{R_2^2C_1C_2}\right)s + \frac{1}{LR_2C_1C_2} + \frac{2R_1}{LR_2^2C_1C_2}$$

Macierz odwrotna

$$
[Is-A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & s+\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{L(s)}{m(s)} \tag{6.14}
$$

przy czym

(6.15)

$$
L(s)=\begin{bmatrix} s^2+\left(\frac{1}{R_2C_1}+\frac{1}{R_2C_2}\right)s+\frac{2}{R_2^2C_1C_2} & -\frac{1}{L}s-\frac{1}{LR_2C_2} & -\frac{1}{LR_2C_1} \\ \frac{1}{C_1}s+\frac{1}{R_2C_1C_2} & s^2+\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{R_1}{LR_2C_2} & \frac{1}{R_2C_1}s+\frac{R_1}{LR_2C_1} \\ -\frac{1}{R_2C_1C_2} & -\frac{1}{R_2C_2}s-\frac{R_1}{LR_2C_2} & s^2+\left(\frac{1}{R_2C_1}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{R_1}{LR_2C_1}+\frac{1}{LC_1} \end{bmatrix}
$$

jest macierzą normalną, gdyż wszystkie niezerowe minory stopnia drugiego macierzy (15) dzielą się bez reszty przez wielomian (13).

Para (A,B) tego obwodu jest sterowalna, gdyż macierz stworzona z pierwszych trzech kolumn macierzy $[B \quad AB]$ jest nieosobliwa

$$
\det\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & -\frac{R_1}{L^2} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{LC_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{L^2R_2C_1C_2} \tag{6.16}
$$

Jeżeli $R_1 \neq 0$, to para (A,C) jest również obserwowalna, gdyż macierz stworzona z pierwszych trzech wierszy macierzy $\begin{bmatrix} C \\ AC \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa

$$
\det\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -\frac{R_1^2}{L} & -\frac{R_1}{L} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{R_1^2}{L} \tag{6.17}
$$

Macierz transmitancji tego obwodu

(6.18)

$$
T(s)=C[Is-A]^{-1}B+D=\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\frac{R_1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & s+\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\hat{L}(s)}{m(s)}
$$

przy czym

$$
\hat{L}(s)=\begin{bmatrix} \frac{R_1}{L}s^2+\left(\frac{R_1}{LR_2C_1}+\frac{R_1}{LR_2C_2}\right)s+\frac{2R_1}{LR_2^2C_1C_2} & -\frac{R_1}{LR_2C_1}s-\frac{2R_1}{LR_2^2C_1C_2} \\ -\frac{1}{LC_1}s & s^3+\frac{R_1}{L}s^2+\frac{1}{LC_1}s \end{bmatrix} \tag{6.19}
$$

jest macierzą nieskracalną, gdyż $\det \hat{L}(s)$ dzieli się bez reszty przez wielomian (13).

Dokonamy rozkładu strukturalnego macierzy (14). W tym celu macierz (15) piszemy w postaci

(6.20)

$$
L(s)=\frac{-1}{LR_2C_1}
$$

$$
\begin{bmatrix} -LR_2C_1s^2+\left(-L-\frac{LC_1}{C_2}\right)s-\frac{2L}{R_2C_2} & R_2C_1s-\frac{C_1}{C_2} & 1 \\ -LR_2s-\frac{L}{C_2} & -LR_2C_1s^2+\left(-\frac{LC_1}{C_2}-R_1R_2C_1\right)s-\frac{R_1C_1}{C_2} & -Ls-R_1 \\ \frac{L}{C_2} & \frac{LC_1}{C_2}s+\frac{R_1C_1}{C_2} & -LR_2C_1s^2+(-L-R_1R_2C_1)s-R_1-R_2 \end{bmatrix}
$$

a następnie mnożymy ją prawostronnie przez macierz

$$
V=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.21}
$$

Otrzymamy wówczas

(6.22)

$$L(s)V=\frac{-1}{LR_2C_1}\begin{bmatrix} 1 & R_2C_1s+\frac{C_1}{C_2} & -LR_2C_1s^2+\left(-L-\frac{LC_1}{C_2}\right)s-\frac{2L}{R_2C_1} \\ -Ls-R_1 & -LR_2C_1s^2+\left(-\frac{LC_1}{C_2}-R_1R_2C_1\right)s-\frac{R_1C_1}{C_2} & -LR_2s-\frac{L}{C_2} \\ -LR_2C_1s^2+(-L-R_1R_2C_1)s-R_1-R_2 & \frac{LC_1}{C_2}s+\frac{R_1C_1}{C_2} & \frac{L}{C_2} \end{bmatrix}$$

W tym wypadku

$$U(s)=I_3,\quad i(s)=\frac{-1}{LR_2C_1},\quad w(s)=\left[R_2C_1s+\frac{C_1}{C_2}\quad -LR_2C_1s^2+\left(-L-\frac{LC_1}{C_2}\right)s-\frac{2L}{R_2C_2}\right]$$

$$k(s)=\begin{bmatrix} -Ls-R_1 \\ -LR_2C_1s^2+(-L-R_1R_2C_1)s-R_1-R_2 \end{bmatrix},\quad \overline{L}(s)=\begin{bmatrix} -LR_2C_1s^2+\left(-\frac{LC_1}{C_2}-R_1R_2C_1\right)s-\frac{R_1C_1}{C_2} & -LR_2s-\frac{L}{C_2} \\ \frac{LC_1}{C_2}s+\frac{R_1C_1}{C_2} & \frac{L}{C_2} \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności (4.22)–(4.24) oraz (23), otrzymamy

(6.24)

$$P(s)=U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix}=\frac{-1}{LR_2C_1}\begin{bmatrix} 1 \\ -Ls-R_1 \\ -LR_2C_1s^2+(-L-R_1R_2C_1)s-R_1-R_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-1}{LR_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_1}s+\frac{R_1}{LR_2C_1} \\ s^2+\left(\frac{1}{R_2C_2}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{R_1}{LR_2C_1}+\frac{1}{LC_1} \end{bmatrix}$$

$$Q(s)=[1\quad w(s)]V^{-1}=\left[1\quad R_2C_1s+\frac{C_1}{C_2}\quad -LR_2C_1s^2+\left(-L-\frac{LC_1}{C_2}\right)s-\frac{2L}{R_2C_2}\right]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\left[-LR_2C_1s^2+\left(-L-\frac{LC_1}{C_2}\right)s-\frac{2L}{R_2C_2}\quad R_2C_1s+\frac{C_1}{C_2}\quad 1\right]$$

$$G(s)=U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i(s)\left[\overline{L}(s)-k(s)w(s)\right] \end{bmatrix}V^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$x=Ls^3+\left(R_1+\frac{L}{R_2C_1}+\frac{L}{R_2C_2}\right)s^2+\left(\frac{R_1}{R_2C_1}+\frac{R_1}{R_2C_2}+\frac{1}{C_1}+\frac{2L}{R_2^2C_1C_2}\right)s+\frac{1}{C_1C_2R_2}+\frac{2R_1}{R_2^2C_1C_2}$$

$$y=LR_2C_1s^4+\left(2L+\frac{LC_1}{C_2}+R_1R_2C_1\right)s^3+\left(R_2+\frac{R_1C_1}{C_2}+2R_1+\frac{L}{R_2C_1}+\frac{3L}{R_2C_2}\right)s^2+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{3R_1}{R_2C_2}+\frac{1}{C_1}+\frac{R_1}{R_2C_1}+\frac{2L}{C_2C_1R_2^2}\right)s+\frac{R_2+2R_1}{C_1C_1R_2^2}$$

$$z=-R_2C_1s^3+\left(-\frac{R_1R_2C_1}{L}-1-\frac{C_1}{C_2}\right)s^2+\left(-\frac{R_2}{L}-\frac{R_1C_1}{C_2L}-\frac{R_1}{L}-\frac{2}{R_2C_2}\right)s+\left(-\frac{2R_1}{R_2C_2L}-\frac{1}{C_2L}\right)$$

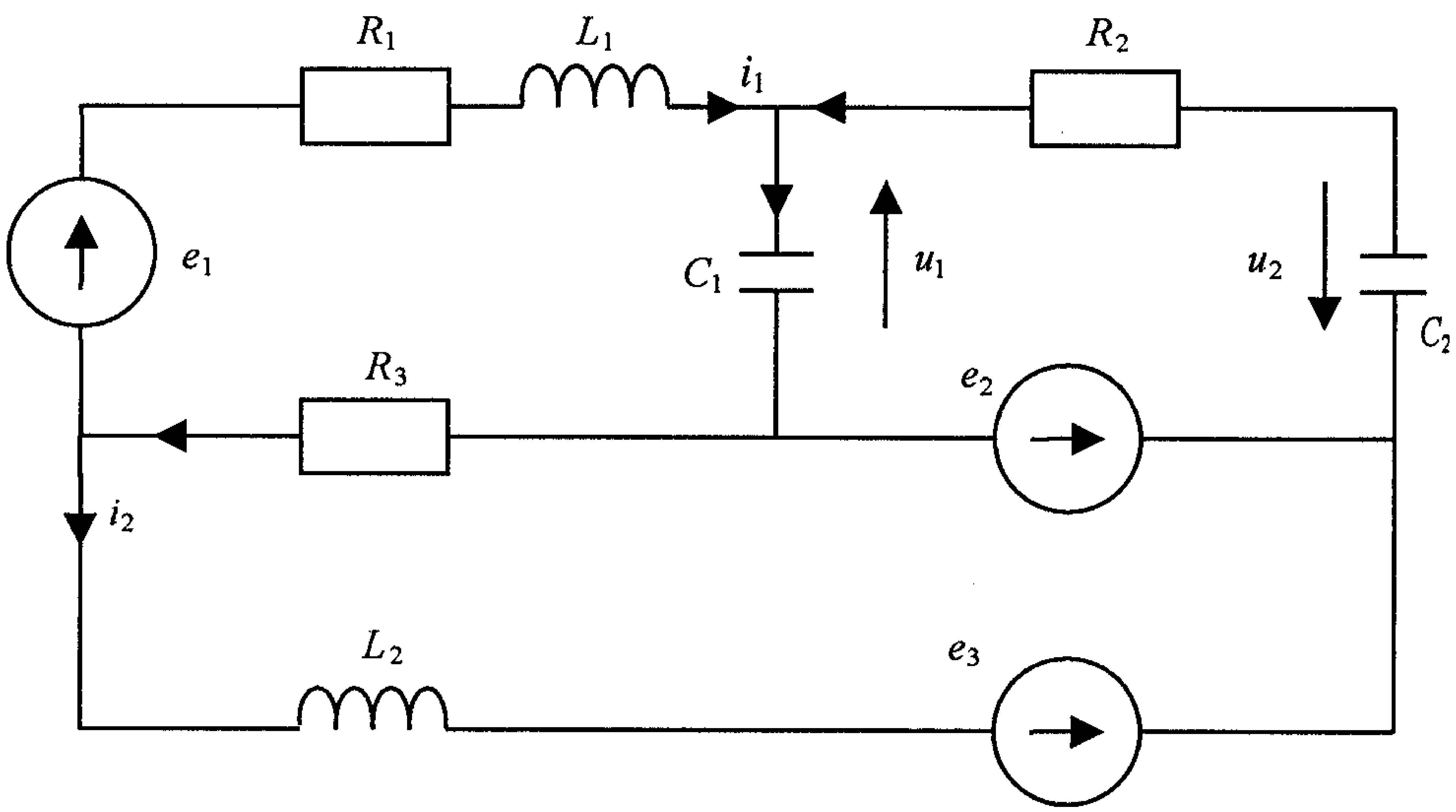
Z rozkładu strukturalnego macierzy (14) wynika rozkład strukturalny macierzy transmitancji (18)

3.6.3. Obwody czwartego rzędu i wnioski ogólne

Weźmy pod uwagę obwód elektryczny o schemacie jak na rysunku 3 o znanych rezystancjach R_1, R_2, R_3, indukcyjnościach L_1, L_2 pojemnościach C_1, C_2 oraz napięciach źródłowych e_1, e_2 i e_3.

Za zmienne stanu przyjmujemy prądy i_1 i i_2 w cewkach oraz napięcia u_1, u_2 na kondensatorach, a za odpowiedzi y_1 i y_2 odpowiednio napięcie na cewce L_1 i prąd w kondensatorze C_2.

Korzystając z praw Kirchoffa, możemy dla tego obwodu napisać równania



Rys. 3.6.3. Obwód trzeciego rzędu

$$e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_1 + R_3(i_1 + i_2)$$

$$e_2 = u_2 + R_2 C_2 \frac{du_2}{dt} + u_1$$

$$e_3 = e_2 + R_3(i_1 + i_2) + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$C_1 \frac{du_1}{dt} = i_1 + C_2 \frac{du_2}{dt}$$

które zapisujemy w postaci równania stanu

(6.25)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_3}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Przyjmując

$$x = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_3}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

(6.26a)
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Biorąc pod uwagę, że

$$y_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = -(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 - u_1 + e_1$$

$$y_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{R_2}u_1 - \frac{1}{R_2}u_2 + \frac{1}{R_2}e_2$$

otrzymamy równanie wyjścia w postaci

(6.26b)

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_1+R_3) & -R_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = Cx + Dy$$

przy czym

(6.27)
$$C = \begin{bmatrix} -(R_1+R_3) & -R_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Aby wykazać, że macierz A jest macierzą cykliczną, poddajemy macierz $[Is - A]$ przekształceniu przez podobieństwo (które nie zmienia wielomianu charakterystycznego) o postaci

$$P[Is-A]P^T = Is - PAP^T \text{ dla } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \left(P^T = P^{-1} = P\right)$$

Otrzymamy wówczas

(6.28)

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_3}{L_1} & -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{L_2} & -\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ -\frac{R_3}{L_1} & -\frac{R_1+R_3}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że minor powstały z macierzy $[Is - PAP^T]$ przez wykreślenie pierwszego wiersza i czwartej kolumny jest równy $\frac{R_3}{L_1R_2C_1C_2}$. Największy wspólny dzielnik elementów macierzy dołączonej $[Is - PAP^T]_{ad}$ jest więc równy 1, a zatem macierz A jest macierzą cykliczną.

Wielomian charakterystyczny (minimalny) macierzy A ma postać

$$(6.29)\qquad m(s) = \det[Is-A] = \begin{vmatrix} s+\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_3}{L_2} & s+\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & s+\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_2} \end{vmatrix} =$$

$$= s^4 + \left(\frac{L_1L_2C_2 + L_1L_2C_1 + R_3R_2C_1C_2L_2 + R_1R_2C_1C_2L_2 + R_3R_2C_1C_2L_1}{R_2L_1L_2C_1C_2}\right)s^3$$

$$+\left(\frac{R_2C_2L_2 + R_3L_2C_2 + R_3L_2C_1 + L_1R_3C_2 + R_1L_2C_1 + R_1L_2C_2 + L_1R_3C_1 + R_1R_2R_3C_1C_2}{R_2L_1L_2C_1C_2}\right)s^2$$

$$+\left(\frac{L_2 + R_1R_3C_2 + R_2R_3C_2 + R_1R_3C_1}{R_2L_1L_2C_1C_2}\right)s + \frac{R_3}{R_2L_1L_2C_1C_2}$$

Macierz odwrotna

$$(6.30)\qquad [Is-A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{R_3}{L_2} & s+\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & s+\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{L(s)}{m(s)}$$

przy czym

(6.31)

$$
L(s)=\begin{bmatrix}
\frac{s^3R_2C_1C_2L_2+s^2(C_1C_2R_2R_3+C_1L_2+C_2L_2)+sR_3(C_1+C_2)}{C_1C_2R_2L_2} & \frac{-s^2R_2R_3C_1C_2-sR_3(C_1+C_2)}{C_1C_2R_2L_1} & \frac{-s^2L_2R_2C_2-s(L_2+R_2R_3C_2)-R_3}{L_1L_2R_2C_2} & \frac{sL_2+R_3}{L_1L_2C_1R_2} \\
\frac{-s^2R_2R_3C_1C_2-sR_3(C_1+C_2)}{C_1C_2R_2L_2} & \frac{s^3L_1R_2C_1C_2+s^2(L_1C_2+L_1C_1+C_1R_1R_2C_2+R_3R_2C_1C_2)+s(R_1C_2+R_1C_1+R_3C_2+R_3C_1+R_2C_2)+1}{C_1C_2R_2L_1} & \frac{sR_2R_3C_2+R_3}{L_1L_2R_2C_2} & \frac{-R_3}{L_1L_2C_1R_2} \\
\frac{s^2L_2R_2C_2+s(L_2+R_2R_3C_2)+R_3}{C_1C_2R_2L_2} & \frac{-sR_2R_3C_2-R_3}{C_1C_2R_2L_1} & \frac{s^3L_1L_2R_2C_2+s^2(R_2R_3L_1C_2+R_1R_2C_2L_2+R_2R_3C_2L_2+L_1L_2)+s(R_1R_2R_3C_2+R_3+R_1L_2+R_3L_2)+R_1R_3}{L_1L_2R_2C_2} & \frac{-s^2L_1L_2-s(L_1R_3+R_1L_2+R_3L_2)-R_1R_3}{L_1L_2C_1R_2} \\
\frac{-sL_2-R_3}{C_1C_2R_2L_2} & \frac{R_3}{C_1C_2R_2L_1} & \frac{-s^2L_1L_2-s(L_1R_3+R_1L_2+R_3L_2)-R_1R_3}{L_1L_2R_2L_2} & \frac{s^3L_1L_2C_1R_2+s^2(L_1L_2+L_1R_2R_3C_1+R_1R_2C_1L_2+R_2R_3C_1L_2)+s(L_1R_3+R_1L_2+R_1R_2R_3C_1+R_3L_2+R_2L_2)+R_1R_3+R_2R_3}{L_1L_2C_1R_2}
\end{bmatrix}
$$

jest macierzą normalną, gdyż wszystkie niezerowe minory stopnia drugiego macierzy (31) dzielą się bez reszty przez wielomian (29).

Para macierzy (A,B) tego obwodu jest sterowalna, gdyż macierz utworzona z pierwszych czterech kolumn macierzy $[B \quad AB]$ jest nieosobliwa

$$
\det\begin{bmatrix}
\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & -\frac{(R_1+R_3)}{L_1^2} \\
0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & -\frac{R_3}{L_1L_2} \\
0 & \frac{1}{R_2C_1} & 0 & \frac{1}{L_1C_1} \\
0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0 & 0
\end{bmatrix}=\frac{1}{L_1^2L_2R_2C_1C_2} \tag{6.32}
$$

Para macierzy (A,C) jest obserwowalna, gdyż macierz $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa

(6.33)

$$
\det\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=
$$

$$
=\det\begin{bmatrix}
-R_1-R_3 & -R_3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\
\frac{L_2C_1R_1^2+2L_2C_1R_1R_3+L_2C_1R_3^2+R_3^2L_1C_1-L_1L_2}{L_1L_2C_1} & \frac{R_1R_3L_2+R_3^2(L_1+L_2)}{L_1L_2} & \frac{R_1R_2C_1+R_2R_3C_1+L_1}{L_1R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\
-\frac{1}{R_2C_1} & 0 & \frac{C_1+C_2}{R_2^2C_1C_2} & \frac{C_1+C_2}{R_2^2C_1C_2}
\end{bmatrix}\neq 0
$$

Macierz transmitancji tego obwodu jest równa

(6.34)

$$
T(s)=C[Is-A]^{-1}B+D=
$$

$$
=\begin{bmatrix} -(R_1+R_3) & -R_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
s+\frac{R_1+R_3}{L_1} & \frac{R_3}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 \\
\frac{R_3}{L_2} & s+\frac{R_3}{L_2} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{C_1} & 0 & s+\frac{1}{R_2C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\
0 & 0 & \frac{1}{R_2C_2} & s+\frac{1}{R_2C_2}
\end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\
0 & \frac{1}{R_2C_1} & 0 \\
0 & \frac{1}{R_2C_2} & 0
\end{bmatrix}+
$$

$$
+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}=\frac{\hat{L}(s)}{m(s)}
$$

przy czym

(6.35)

$$\hat{L}(s)=\left[\begin{array}{c:c:c}
L_1L_2R_2C_1C_2s^4+(L_1L_2C_1+R_3L_1R_2C_1C_2+L_1L_2C_2)s^3+(L_1R_3C_2+L_1R_3C_1)s^2 & (L_1R_2C_1C_2R_3-L_1L_2C_2)s^3+\left(L_1C_1R_3-\frac{L_1L_2}{R_2}+\frac{L_1C_2L_2}{R_2C_1}\right)s^2+\left(\frac{L_1R_3C_2}{R_2C_1}-\frac{L_1R_3}{R_2}\right)s & -L_1R_3R_2C_1C_2s^3-R_3L_1(C_2+C_1)s^2 \\ \hdashline
-C_2L_2s^2-R_3C_2s & \begin{gathered} L_1L_2C_1C_2s^4+\left(L_1R_3C_1C_2+R_1L_2C_1C_2+R_3L_2C_1C_2+\frac{L_1L_2C_1}{R_2}-\frac{L_1L_2C_2}{R_2}\right)s^3+ \\ \left(R_1R_3C_1C_2+L_2C_2+\frac{R_3L_1C_1}{R_2}-\frac{R_1L_2C_2}{R_2}+\frac{R_3L_2C_1}{R_2}-\frac{R_3L_1C_2}{R_2}+\frac{R_1L_2C_1}{R_2}-\frac{R_3L_2C_2}{R_2}\right)s^2+ \\ \left(\frac{R_1R_3C_1}{R_2}-\frac{R_1R_3C_2}{R_2}+\frac{L_2}{R_2}-\frac{L_2C_2}{R_2C_1}\right)s+\frac{R_3}{R_2}-\frac{C_2R_3}{R_2C_1} \end{gathered} & R_3C_2s
\end{array}\right]$$

$$m(s)=s^4(R_2C_1C_2L_1L_2)+s^3(R_1R_2C_1C_2L_2+R_2R_3C_1C_2L_2+R_2R_3C_1C_2L_1+C_1L_1L_2+C_2L_1L_2)+$$

$$+s^2(R_3C_2L_1+R_1C_1L_2+R_1C_2L_2+R_1R_2R_3C_1C_2+R_3C_1L_2+R_3C_2L_2+R_2C_2L_2+R_3C_1L_1)+$$

$$+s(R_1R_3C_1+R_1R_3C_2+R_2R_3C_2+L_2)+R_3$$

jest macierzą nieskracalną i normalną, gdyż wszystkie niezerowe minory stopnia drugiego macierzy (35) dzielą się bez reszty przez wielomian (29).
Analogicznie jak w dwóch poprzednich wypadkach możemy dokonać rozkładu strukturalnego macierzy odwrotnej (30) i macierzy transmitancji (34).
Powyższe rozważania można uogólnić na obwody elektryczne dowolnego rzędu.
Z powyższych rozważań wynikają następujące ważne wnioski, które odnoszą się do obwodów elektrycznych rzędu n-tego, nie mniejszego niż drugi, o co najmniej dwóch wymuszeniach $m\geq 2$ i co najmniej dwóch odpowiedziach $p\geq 2$, czyli $\min(n,m,p)\geq 2$.

Wniosek 3.6.1. Każda macierz A obwodu elektrycznego drugiego rzędu $(n=2)$ jest macierzą cykliczną, a macierz odwrotna $[Is-A]^{-1}$ oraz macierz transmitancji $T(s)=C[Is-A]^{-1}B+D$ są macierzami normalnymi.

Wniosek 3.6.2. Macierze A typowych obwodów elektrycznych złożonych z rezystancji, indukcyjności, pojemności i źródeł napięcia (prądu) są macierzami cyklicznymi, a macierze odwrotne $[Is-A]^{-1}$ są macierzami normalnymi. Dla pewnego szczególnego doboru parametrów R, L, C tych obwodów para (A,B) może być niesterowalna lub/oraz para (A,C) może być nieobserwowalna. W tych wypadkach macierz transmitancji $T(s)=\dfrac{\hat{L}(s)}{m(s)}$ może być skracalna i nie jest wtedy macierzą normalną, tzn. nie wszystkie niezerowe minory stopnia drugiego macierzy wielomianowej $\hat{L}(s)$ dzielą się bez reszty przez wielomian $m(s)$.

Uwaga 3.6.1. Jeżeli para (A,B) nie jest sterowalna, to występują skrócenia w wyrażeniu $\dfrac{[Is-A]_{ad}B}{\det[Is-A]}$. Analogicznie, jeżeli para (A,C) nie jest obserwowalna, to występuje skrócenie w wyrażeniu $\dfrac{C[Is-A]_{ad}}{\det[Is-A]}$.

4. Problem realizacji macierzy normalnych

4.1. Podstawowe pojęcia i sformułowanie zadań

Weźmy pod uwagę ciągły układ liniowy opisany równaniami

(1.1a) $$\dot{x} = Ax + Bu$$

(1.1b) $$y = Cx + Du$$

przy czym $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ i $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$.
Macierz transmitancji operatorowych układu (1) jest określona wzorem

(1.2) $$T(s) = C[Is - A]^{-1} B + D$$

Dla danych macierzy *A*, *B*, *C* i *D* istnieje tylko jedna macierz transmitancji operatorowych (2). Natomiast dla danej macierzy właściwej *T*(*s*) istnieje wiele różnych macierzy *A*, *B*, *C* i *D* spełniających równość (2).

Definicja 4.1.1. Czwórkę macierzy $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ i $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$ spełniających zależność (2) nazywamy realizacją danej macierzy $T(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$. Realizację tę oznaczać będziemy przez $R_{n,m,p}(T)$ lub krócej $R_{n,m,p}$.

Definicja 4.1.2. Realizację $R_{n,m,p}$ nazywamy realizacją minimalną, jeżeli macierz *A* ma najmniejsze wymiary wśród wszystkich realizacji macierzy *T*(*s*). Realizację minimalną oznaczać będziemy $\overline{R}_{n,m,p}$.

Definicja 4.1.3. Realizację minimalną $R_{n,m,p}$ nazywamy cykliczną (lub prostą), jeżeli macierz *A* jest macierzą cykliczną. Realizację cykliczną oznaczać będziemy przez $\hat{R}_{n,m,p}$.

Macierz *D* dla danej macierzy właściwej *T*(*s*) wyznaczamy z zależności

(1.3) $$D = \lim_{s \to \infty} T(s)$$

wynikającej ze wzoru (2), gdyż $\lim_{s \to \infty} [Is - A]^{-1} = 0$
Z zależności (2) i (3) mamy

(1.4) $$T_{sw}(s) = T(s) - D = C[Is - A]^{-1} B$$

Mając macierz właściwą *T*(*s*) i korzystając z zależności (4) możemy wyznaczyć macierz ściśle właściwą $T_{sw}(s)$.

Problem realizacji można sformułować następująco.
Dana jest macierz wymierna właściwa $T(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$; wyznaczyć realizację $R_{n,m,p}$ tej macierzy.

Problem realizacji minimalnej można sformułować następująco. Dana jest macierz wymierna właściwa $T(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$; wyznaczyć realizację minimalną $\overline{R}_{n,m,p}$ tej macierzy.

Problem realizacji cyklicznej formułujemy następująco. Dana jest macierz wymierna właściwa $T(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$; wyznaczyć cykliczną realizację $\hat{R}_{n,m,p}$ tej macierzy.

Gdy mamy daną macierz wymierną ściśle właściwą $T_{sw}(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$, problem realizacji sprowadza się do wyznaczenia tylko trzech macierzy *A*, *B*, *C* spełniających zależność (4).

4.2. Istnienie realizacji minimalnych i cyklicznych

4.2.1. Istnienie realizacji minimalnych

Niżej podane twierdzenie formułuje warunki konieczne i wystarczające istnienia realizacji minimalnej $\overline{R}_{n,m,p}$ danej macierzy wymiernej właściwej $T(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}(s)$.

Twierdzenie 4.2.1. Realizacja (A,B,C,D) macierzy $T(s)$ jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (A,B) jest sterowalna i para (A,C) jest obserwowalna.

Dowód. Metodą przez zaprzeczenie wykażemy, że jeżeli para (A,B) jest sterowalna i para (A,C) jest obserwowalna, to realizacja jest minimalna.
Niech (A,B,C), $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ i $(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$, $\overline{A} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}$ będą dwiema różnymi realizacjami dla $n > \overline{n}$ macierzy $T(s)$. Z zależności (1.4) mamy

(2.1) $$C[Is-A]^{-1}B = \overline{C}\left[Is-\overline{A}\right]^{-1}\overline{B}$$

oraz

(2.2) $$CA^iB = \overline{C}\,\overline{A}^i\overline{B}, \qquad i = 0,1,\ldots$$

Z założenia, że pary (A,B) i $(\overline{A},\overline{B})$ są sterowalne i pary (A,C) i $(\overline{A},\overline{C})$ są obserwowalne wynika, że

(2.3a) $$\text{rząd } S = \text{rząd } H = n$$

(2.3b) $$\text{rząd } \overline{S} = \text{rząd } \overline{H} = \overline{n}$$

gdzie

(2.3c) $$S = [B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B], \quad H = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

(2.3d) $$\overline{S} = [\overline{B} \quad \overline{A}\,\overline{B} \quad \ldots \quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}], \quad \overline{H} = \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{C}\,\overline{A} \\ \vdots \\ \overline{C}\,\overline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Z równości (2) mamy

$$HS = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\left[B \quad AB \quad \ldots \quad A^{n-1}B\right] = \begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \ldots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \ldots & CA^{2(n-1)}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{C}\,\overline{B} & \overline{C}\,\overline{A}\,\overline{B} & \ldots & \overline{C}\,\overline{A}^{n-1}\overline{B} \\ \overline{C}\,\overline{A}\,\overline{B} & \overline{C}\,\overline{A}^2\overline{B} & \ldots & \overline{C}\,\overline{A}^n\overline{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{C}\,\overline{A}^{n-1}\overline{B} & \overline{C}\,\overline{A}^n\overline{B} & \ldots & \overline{C}\,\overline{A}^{2(n-1)}\overline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{C}\,\overline{A} \\ \vdots \\ \overline{C}\,\overline{A}^{n-1} \end{bmatrix}\left[\overline{B} \quad \overline{A}\,\overline{B} \quad \ldots \quad \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right] = \overline{H}\,\overline{S}$$

oraz

(2.4) $$\text{rząd } HS = \text{rząd } \overline{H}\,\overline{S}$$

Z zależności, że rząd $HS = n$ i rząd $\overline{H}\,\overline{S} = \overline{n}$ oraz (4) otrzymujemy sprzeczność, gdyż z założenia $n > \overline{n}$.
Z kolei wykażemy, że jeżeli para (A,B) nie jest sterowalna lub/oraz para (A,C) nie jest obserwowalna, to realizacja (A,B,C) nie jest minimalna.
Jeżeli para (A,B) nie jest sterowalna, to istnieje macierz nieosobliwa P taka, że

(2.5) $$\overline{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = CP^{-1} = [C_1 \quad C_2]$$
$$A_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1\times n_1}, \quad B_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1\times m}, \quad A_3 \in \boldsymbol{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}, \quad C_1 \in \boldsymbol{R}^{p\times n_1}$$

przy czym para (A,B) jest sterowalna, oraz

(2.6) $$C[Is-A]^{-1}B = C_1[Is-A_1]^{-1}B_1$$

Z zależności (6) wynika, że (A_1,B_1,C_1) jest realizacją, której macierz A_1 ma wymiar mniejszy niż wymiar macierzy A. Realizacja (A,B,C) nie jest więc realizacją minimalną, jeżeli para (A,B) nie jest sterowalna. Dowód, że jeżeli para (A,C) nie jest obserwowalna, to realizacja (A,B,C) nie jest minimalna, jest analogiczny.

■

Twierdzenie 4.2.2. Jeżeli trójka macierzy (A,B,C) jest realizacją minimalną $\overline{R}_{n,m,p}$ macierzy wymiernej ściśle właściwej $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$, to trójka macierzy $\left(PAP^{-1}, BP, CP^{-1}\right)$ jest również realizacją minimalną macierzy $T(s)$ dla dowolnej macierzy nieosobliwej $P\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$.

Dowód. Wykażemy, że macierze PAP^{-1}, BP, CP^{-1} spełniają warunek (1.4). Podstawiając te macierze do (1.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} CP^{-1}\left[Is-PAP^{-1}\right]^{-1}PB &= CP^{-1}\left[P[Is-A]^{-1}P^{-1}\right]^{-1}PB = \\ &= CP^{-1}P[Is-A]^{-1}P^{-1}PB = \\ &= C[Is-A]B \end{aligned}$$

gdyż $PP^{-1}=I$.

■

Jeżeli (A,B,C) i $\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C}\right)$ są dwiema realizacjami minimalnymi macierzy $T(s)$, to istnieje jedna macierz nieosobliwa P taka, że

(2.7) $$\overline{A}=PAP^{-1} \qquad \overline{B}=BP \qquad \overline{C}=CP^{-1}$$

Przykład 4.2.1. Dane są dwie realizacje minimalne (A,B,C) i $\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C}\right)$ macierzy $T(s)$. Wyznaczyć macierz nieosobliwą P spełniającą zależność (7).
Z założenia, że (A,B,C) i $\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C}\right)$ są dwiema minimalnymi realizacjami macierzy $T(s)$, wynika, że spełniają one równość (2) oraz

(2.8) $$HS=\overline{H}\,\overline{S}$$

przy czym $n=\overline{n}$, a macierze H, S, $\overline{H}$ i $\overline{S}$ są określone przez (3c) i (3d).
Warunek (3) implikuje, że $\det\left[SS^T\right]=\det\left[\overline{S}\,\overline{S}^T\right]\neq 0$ oraz $\det\left[H^TH\right]=\det\left[\overline{H}^T\overline{H}\right]\neq 0$. Mnożąc prawostronnie (8) przez $\overline{S}^T$ i wyznaczając z tej zależności $\overline{H}$, otrzymamy

(2.9) $$\overline{H}=HS\overline{S}^T\left[\overline{S}\,\overline{S}^T\right]^{-1}=HP$$

gdzie

(2.10) $$P=S\overline{S}^T\left[\overline{S}\,\overline{S}^T\right]^{-1}$$

Mnożąc natomiast lewostronnie (8) przez $\overline{H}^T$ i wyznaczając z tej zależności $\overline{S}$, otrzymamy

(2.11) $$\overline{S}=\left[\overline{H}\,\overline{H}^T\right]^{-1}\overline{H}^THS=P^{-1}S$$

przy czym

(2.12) $$P^{-1}=\left[\overline{H}\,\overline{H}^T\right]^{-1}\overline{H}^TH$$

Z równości pierwszych m kolumn zależności (11) i pierwszych p wierszy zależności (9) mamy

(2.13) $$\overline{B}=P^{-1}B, \quad \overline{C}=CP$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

(2.14) $$HAS=\overline{H}\,\overline{A}\,\overline{S}$$

Mnożąc lewostronnie (14) przez $\overline{H}^T$ i prawostronnie przez $\overline{S}^T$ i wyznaczając z tej zależności $\overline{A}$, otrzymujemy

(2.15) $$\overline{A}=\left(\left[\overline{H}^T\overline{H}\right]^{-1}\overline{H}^TH\right)A\left(S\overline{S}^T\left[\overline{S}\,\overline{S}^T\right]^{-1}\right)=P^{-1}AP$$

Aby wykazać, że P jest jedyną taką macierzą, przypuśćmy, że macierz $\overline{P}$ spełnia również zależność (7). W tym wypadku z równości $HP=H\overline{P}$ otrzymujemy $H\left(P-\overline{P}\right)=0$, co implikuje, że $P=\overline{P}$, gdyż macierz H ma pełny rząd kolumnowy.

4.2.2. Istnienie realizacji cyklicznych

Zostaną podane warunki konieczne i wystarczające istnienia realizacji cyklicznej $\hat{R}_{n,m,p}\in(A,B,C)$ danej wymiernej macierzy właściwej $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$.

Twierdzenie 4.2.3. Jeżeli macierz A jest cykliczna i para (A,B) jest sterowalna, to macierz

(2.16) $$W(s)=\frac{[Is-A]_{ad}B}{\det[Is-A]}$$

jest nieskracalna i normalna.

Jeżeli macierz A jest cykliczna i para (A,B) jest obserwowalna, to macierz

(2.17) $$W(s)=\frac{C[Is-A]_{ad}}{\det[Is-A]}$$

jest nieskracalna i normalna.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 2.5.1 macierz $\frac{[Is-A]_{ad}}{\det[Is-A]}$ jest nieskracalna, jeżeli macierz A jest cykliczna, czyli, gdy macierz $[Is-A]$ jest macierzą prostą, a zgodnie z twierdzeniem 3.1.1 jest również macierzą normalną.
Jeżeli para (A,B) jest sterowalna, to istnieją dwie macierze wielomianowe $M(s)$ i $N(s)$ takie, że:

(2.18) $$[Is-A]M(s)+BN(s)=I$$

Mnożąc lewostronnie równość (18) przez macierz $[Is-A]^{-1}$, otrzymujemy

(2.19) $$M(s)+\frac{[Is-A]_{ad}B}{\det[Is-A]}N(s)=[Is-A]^{-1}$$

Z zależności (19) wynika natychmiast, że macierz (16) jest nieskracalna. Normalność macierzy (16) wynika z normalności macierzy $[Is-A]$ oraz z twierdzenia Bineta-Cauchy.
Dowód dla pary (A,C) obserwowalnej jest analogiczny (dualny)

■

Twierdzenie 4.2.4. Macierz wymierna

(2.20) $$W(s)=\frac{C[Is-A]_{ad}B}{\det[Is-A]}$$

jest nieskracalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A,B,C są realizacją cykliczną $(A,B,C)\in\hat{R}_{n,m,p}$ macierzy $W(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$.

Dowód. ***Konieczność.*** Jeżeli macierze A,B,C nie są realizacją cykliczną, to albo macierz A nie jest cykliczna, albo para (A,B) nie jest sterowalna, albo wreszcie para (A,C) nie jest obserwowalna. Jeżeli A nie jest macierzą cykliczną, to macierz $[Is-A]^{-1}=\frac{[Is-A]_{ad}}{\det[Is-A]}$ jest skracalna. Jeżeli para (A,B) nie jest sterowalna, to

macierz $\frac{[Is-A]_{ad}B}{\det[Is-A]}$ jest skracalna, a jeżeli para (A,C) nie jest obserwowalna, to macierz $\frac{C[Is-A]_{ad}}{\det[Is-A]}$ jest również skracalna.

Dostateczność. Zgodnie z twierdzeniem 3, jeżeli macierz A jest cykliczna i para (A,B) jest sterowalna, to macierz (16) jest nieskracalna, a jeżeli para (A,C) jest obserwowalna, to macierz (17) jest nieskracalna. Jeżeli więc macierze A,B,C są realizacją cykliczną, to macierz (20) jest nieskracalna.

■

Twierdzenie 4.2.5. Dla macierzy wymiernej właściwej $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$ istnieje realizacja cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $T(s)$ jest normalna.

Dowód. ***Konieczność.*** Jeżeli istnieje realizacja cykliczna (A,B,C,D) macierzy $T(s)$, to macierz $[Is-A]^{-1}$ jest normalna i zgodnie z twierdzeniem Bineta-Cauchy jest normalna macierz $[Is-A]^{-1}B$. Normalność macierzy $C[Is-A]^{-1}$ wynika natomiast z twierdzenia 3.

Dostateczność. Jeżeli macierz $T(s)=\frac{L(s)}{m(s)}$ jest normalna, to korzystając z zależności (3) wyznaczyć możemy macierz D oraz macierz ściśle właściwą (4), a następnie wyznaczyć macierz cykliczną A o wymiarach $n\times n$, $n=\operatorname{st} m(s)$ oraz parę sterowalną (A,B) i obserwowalną (A,C).

■

4.3. Wyznaczenie realizacji cyklicznych

4.3.1. Wyznaczenie realizacji z macierzą A w postaci kanonicznej Frobeniusa

Zadanie wyznaczenia realizacji cyklicznej (A_F,B,C,D) z macierzą A_F w postaci kanonicznej Frobeniusa danej macierzy wymiernej $T(s)$ można sformułować następująco.
Dana jest macierz wymierna właściwa $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$. Należy wyznaczyć realizację minimalną $(A_F,B,C,D)\in\hat{R}_{n,m,p}$ z macierzą A_F w postaci kanonicznej Frobeniusa

$$
A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.1}
$$

Mając daną macierz $T(s)$ i korzystając z (1.3), możemy wyznaczyć macierz D, a następnie macierz wymierną ściśle właściwą

$$
T_{sw}(s) = T(s) - D = C[Is - A_F]^{-1} B = \frac{L(s)}{m(s)} \tag{3.2}
$$

Zadanie nasze sprowadza się więc do wyznaczenia realizacji minimalnej $(A_F, B, C) \in \hat{R}_{n,m,p}$ macierzy ściśle właściwej $T_{sw}(s) \in \boldsymbol{R}^{p \times m}(s)$.
Wielomian charakterystyczny $m(s)$ macierzy (1) równy wielomianowi minimalnemu $\Psi(s)$ ma postać

$$
m(s) = \Psi(s) = \det[Is - A] = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \tag{3.3}
$$

Łatwo pokazać, że macierz dołączona $[Is - A_F]_{ad}$ dla macierzy (1) ma postać

(3.4)
$$
[Is - A_F]_{ad} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix}_{ad} = \begin{bmatrix} w(s) & 1 \\ M(s) & k(s) \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}[s]
$$

przy czym

$$
\begin{aligned}
& w(s) = [m_{n-1}(s) \;\; m_{n-2}(s) \;\; \dots \;\; m_1(s)]; \quad k(s) = [s \;\; s^2 \;\; \dots \;\; s^{n-1}]^T \\
& m_{n-1}(s) = s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1 \\
& m_{n-2}(s) = s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_3 s + a_2 \\
& \text{-----------------------------------} \\
& m_1(s) = s + a_{n-1}
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

a $M(s) \in \boldsymbol{R}^{(n-1)\times(n-1)}[s]$ jest macierzą wielomianową zależną od współczynników $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Aby dokonać rozkładu strukturalnego macierzy $[Is - A_F]^{-1}$, sprowadzamy macierz (4) do postaci (3.4.14). W tym celu macierz (4) mnożymy lewostronnie przez

$$
U(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ -k(s) & I_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.6a}
$$

i prawostronnie przez macierz unimodularną

$$
V(s) = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 1 & -w(s) \end{bmatrix} \tag{3.6b}
$$

Otrzymujemy wówczas

$$
U(s)[Is - A_F]_{ad} V(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & M(s) - k(s)w(s) \end{bmatrix} \tag{3.7}
$$

Macierz $[Is - A_F]^{-1}$ jest macierzą normalną. Każdy niezerowy minor stopnia drugiego dzieli się bez reszty przez $m(s)$. Wobec tego każdy element macierzy $\overline{M}(s) = M(s) - k(s)w(s)$ dzieli się bez reszty przez $m(s)$. Mamy więc

$$
\overline{M}(s) = m(s)\hat{M}(s) \tag{3.8}
$$

przy czym $\hat{M}(s) \in \boldsymbol{R}^{(n-1)\times(n-1)}[s]$
Biorąc pod uwagę, że

$$
U^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ k(s) & I_{n-1} \end{bmatrix}; \quad V^{-1}(s) = \begin{bmatrix} w(s) & 1 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{bmatrix} \tag{3.9}
$$

oraz (8) z (7) otrzymamy

$$
[Is - A_F]_{ad} = U^{-1}(s) \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & m(s)\hat{M}(s) \end{bmatrix} V^{-1}(s) = P_F(s)Q_F(s) + m(s)G_F(s) \tag{3.10}
$$

przy czym

$$P_F(s)=U^{-1}(s)\begin{bmatrix}1\\0_{n-1,1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k(s)\end{bmatrix}$$

(3.11)
$$Q_F(s)=\begin{bmatrix}1 & 0_{1,n-1}\end{bmatrix}V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}w(s) & 1\end{bmatrix}$$

$$G_F(s)=U^{-1}(s)\begin{bmatrix}0 & 0_{1,n-1}\\0_{n-1,1} & \hat{M}(s)\end{bmatrix}V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}0_{1,n-1} & 0\\\hat{M}(s) & 0_{n-1,1}\end{bmatrix}$$

Z zależności (2) i (10) mamy

(3.12)
$$L(s)=C[Is-A_F]_{ad}B=CP_F(s)Q_F(s)B+m(s)CG_F(s)B=P(s)Q(s)+m(s)G(s)$$

przy czym

$$P(s)=CP_F(s)=C\begin{bmatrix}1\\k(s)\end{bmatrix}$$

(3.13)
$$Q(s)=Q_F(s)B=\begin{bmatrix}w(s) & 1\end{bmatrix}B$$

$$G(s)=CG_F(s)B$$

Niech C_i będzie i-tą kolumną macierzy C, a B_i będzie i-tym wierszem macierzy B, $i=1,2,\dots,n$.
Biorąc pod uwagę (13) i (5) otrzymujemy

(3.14)
$$P(s)=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & \dots & C_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\s\\\vdots\\s^{n-1}\end{bmatrix}=C_1+C_2s+\dots C_ns^{n-1}=P_1+P_2s+P_3s^2+\dots+P_ns^n$$

$$Q(s)=\begin{bmatrix}m_{n-1}(s) & m_{n-2}(s) & \dots & m_1(s) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{bmatrix}=$$

$$=B_1m_{n-1}(s)+B_2m_{n-2}(s)+\dots+B_{n-1}m_1(s)+B_n=B_1s^{n-1}+(a_{n-1}B_1+B_2)s^{n-2}+$$
$$+(a_{n-2}B_1+a_{n-1}B_2+B_3)s^{n-3}+\dots+(a_1B_1+a_2B_2+\dots+B_n)=$$
$$=Q_1+Q_2s+Q_3s^2+\dots+Q_ns^{n-1}$$

gdzie

(3.15a)
$$P_i=C_i \text{ dla } i=1,2,\dots,n$$

(3.15b)
$$Q_n=B_1;\quad Q_{n-1}=a_{n-1}B_1+B_2;\quad Q_{n-2}=a_{n-2}B_1+a_{n-1}B_2+B_3;\dots$$
$$Q_1=a_1B_1+a_2B_2+\dots+a_{n-1}B_{n-1}+B_n$$

Znając Q_n, Q_{n-1}, ..., Q_1 z zależności (15b) możemy rekurencyjnie wyznaczyć wiersze B_i, $i=1,2,\dots,n$ macierzy B

(3.17)
$$B_1=Q_n;\quad B_2=Q_{n-1}-a_{n-1}B_1;\quad B_3=Q_{n-2}-a_{n-2}B_1-a_{n-1}B_2;\dots$$
$$B_n=Q_1-a_1B_1-a_2B_2-\dots-a_{n-1}B_{n-1}$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania poszukiwanej realizacji cyklicznej (A_F,B,C,D) dla danej macierzy transmitancji $T(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times n}(s)$.

Procedura 4.3.1.
Krok 1. Korzystając z zależności (1.3), wyznaczyć macierz $D\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$ oraz macierz ściśle właściwą (2).

Krok 2. Znając współczynniki a_0, a_1, ..., a_{n-1} wielomianu $m(s)$, wyznaczyć macierz A_F określoną zależnością (1).

Krok 3. Dokonując rozkładu macierzy wielomianowej $L(s)$, wyznaczamy macierze $P(s)$ i $Q(s)$.

Krok 4. Korzystając z zależności (15a) i (17), wyznaczamy macierze C i B.

Przykład 4.3.1. Korzystając z procedury 1 wyznaczyć realizację cykliczną macierzy wymiernej

(3.18)
$$T(s)=\frac{1}{s^3+s^2+2s+1}\begin{bmatrix}-s^3-s+1 & s^3+s^2+2s+2\\s^3+s^2+2s & 2s^3+2s^2+5s+2\end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (18) jest normalna. Istnieje więc dla niej realizacja cykliczna. Korzystając z procedury 1, wyznaczamy kolejno

Krok 1. Korzystając z zależności (1.3) i (2), otrzymujemy

(3.19)
$$D = \lim_{s\to\infty} T(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

(3.20)
$$T_{sw}(s) = T(s) - D = \frac{1}{s^3+s^2+2s+1}\begin{bmatrix} s^2+s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

Krok 2. W tym wypadku $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1$ oraz

(3.21)
$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Aby dokonać rozkładu strukturalnego macierzy

$$L(s) = \begin{bmatrix} s^2+s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

wystarczy zmienić miejscami jej kolumny, czyli pomnożyć ją prawostronnie przez macierz $V(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz wyznaczyć $P(s)$ i $Q(s)$

$$L(s)V(s) = \begin{bmatrix} s^2+s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s^2+s+2 \\ s & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & s^2+s+2 \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -s^3-s^2-2s-1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$P(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}; \quad Q(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2+s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+s+2 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Biorąc pod uwagę, że

$$P(s) = P_1 + P_2 s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}s$$

oraz

$$Q(s) = Q_1 + Q_2 s + Q_3 s^2 = [2 \ \ 1] + [1 \ \ 0]s + [1 \ \ 0]s^2$$

z zależności (15a) i (17) otrzymamy

$$C_1 = P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_2 = P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = Q_3 = [1 \ \ 0]; \quad B_2 = Q_2 - a_2 B_1 = [1 \ \ 0] - 1[1 \ \ 0] = [0 \ \ 0]$$

$$B_3 = Q_1 - a_1 B_1 - a_2 B_2 = [2 \ \ 1] - 2[1 \ \ 0] = [0 \ \ 1]$$

Wobec tego poszukiwane macierze B i C mają postacie

(3.22)
$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ \ C_2 \ \ C_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że para (A_F, B) (określona przez (21) i (22)) jest sterowalna, a para (A_F, C) jest obserwowalna. Otrzymana realizacja jest więc cykliczna.

4.3.2. Wyznaczanie realizacji cyklicznej z macierzą A w postaci kanonicznej Jordana

Zadanie wyznaczenia realizacji cyklicznej $(A_J, B, C, D) \in \hat{R}_{n,m,p}$ z macierzą A_J w postaci kanonicznej Jordana danej normalnej macierzy wymiernej $T(s)$ można sformułować następująco.

Dana jest normalna macierz wymierna właściwa $T(s) \in \mathbf{R}^{p\times m}(s)$. Należy wyznaczyć realizację minimalną $(A_J, B, C, D) \in \overline{R}_{n,m,p}$ z macierzą A_J w postaci kanonicznej Jordana

(3.23a)
$$A_J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{bmatrix} = \operatorname{diag}[J_1 \ \ J_2 \ \ \dots \ \ J_p]$$

gdzie

(3.23b)

$$J_i = \begin{bmatrix} s_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_i \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m_i \times m_i} \text{ lub } J_i' = \begin{bmatrix} s_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & s_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_i \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m_i \times m_i}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, p$, a $s_1, s_2, \dots, s_p$ są różnymi biegunami o krotnościach $m_1, m_2, \dots, m_p$, $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$ macierzy $T(s)$.

Mając daną macierz $T(s)$ i korzystając z (1.3), wyznaczamy macierz D, a następnie macierz wymierną ściśle właściwą (1.4).

Zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia realizacji minimalnej $(A_J, B, C) \in \overline{R}_{n,m,p}$ macierzy ściśle właściwej $T_{sw}(s) \in \boldsymbol{R}^{p \times m}(s)$.

Na początku rozpatrzmy przypadek jednokrotnych biegunów $(m_1 = m_2 = \dots = m_p = 1)$ macierzy $T_{sw}(s) = \dfrac{L(s)}{m(s)}$, przy czym

(3.24) $\quad m(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_n); \quad s_i \neq s_j, \quad \text{dla } i \neq j, \ i, j = 1, \dots, n$

oraz $s_1, s_2, \dots s_n$ są liczbami rzeczywistymi.

W tym wypadku macierz $T_{sw}(s)$ można przedstawić w postaci

(3.25) $$T_{sw}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{s - s_i}$$

przy czym

(3.26) $$T_i = \lim_{s \to s_i} (s - s_i) T_{sw}(s) = \frac{L(s_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (s_i - s_j)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Z zależności (26) i (3.4.11) wynika, że

(3.27) $$\text{rząd}\, T_i = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Macierz T_i rozkładamy na iloczyn dwóch macierzy B_i i C_i rzędu pierwszego

(3.28) $$T_i = C_i B_i, \quad \text{rząd}\, C_i = \text{rząd}\, B_i = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Wykażemy, że macierze

(3.29) $$A_J = \text{diag}\,[s_1 \ \ s_2 \ \ \dots \ \ s_n], \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ \ C_1 \ \ \dots \ \ C_n]$$

są realizacją minimalną macierzy $T_{sw}(s)$.

W tym celu obliczamy

$$C[Is - A_J]^{-1} B = [C_1 \ \ C_1 \ \ \dots \ \ C_n]\,\text{diag}\left[\frac{1}{s - s_1} \ \ \frac{1}{s - s_2} \ \ \dots \ \ \frac{1}{s - s_n}\right] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i B_i}{s - s_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i}{s - s_i} = T_{sw}(s)$$

Macierze (29) są więc realizacją macierzy $T_{sw}(s)$.

Łatwo sprawdzić, że

$$\text{rząd}\,[Is - A_J \ B] = \text{rząd} \begin{bmatrix} s - s_1 & 0 & \dots & 0 & B_1 \\ 0 & s - s_2 & \dots & 0 & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & s - s_n & B_n \end{bmatrix} = n$$

dla wszystkich $s \in C$, gdyż rząd $B_i = 1$ dla $i = 1, \dots, n$.

Analogicznie

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} Is - A_J \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd} \begin{bmatrix} s\text{-}s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s\text{-}s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s\text{-}s_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} = n$$

dla wszystkich $s \in C$, gdyż rząd $C_i = 1$ dla $i = 1, \dots, n$.

Tak więc para (A_J,B) jest sterowalna, a para (A_J,C) jest obserwowalna. Wobec tego realizacja (29) jest minimalna.

Poszukiwaną realizację cykliczną (29) możemy wyznaczyć, korzystając z następującej procedury.

Procedura 4.3.2.
Krok 1. Korzystając ze wzoru (26) wyznaczamy macierze T_i dla $i=1,\dots,n$.

Krok 2. Macierze T_i rozkładamy na iloczyn (28) macierzy B_i oraz C_i, $i=1,\dots,n$.

Krok 3. Wyznaczamy poszukiwaną realizację cykliczną (29).

Przykład 4.3.2. Wyznaczyć realizację cykliczną (A_J,B,C) normalnej macierzy wymiernej ściśle właściwej o postaci

(3.30)
$$T_{sw}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & s+2\\ 1 & s+2\end{bmatrix}$$

W tym Wypadku $m(s)=(s+1)(s+2)$ i macierz (30) ma bieguny rzeczywiste $s_1=-1$ i $s_2=-2$. Korzystając z procedury 2, otrzymamy kolejno

Krok 1. Korzystając ze wzoru (26) otrzymamy

(3.31)
$$T_1=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)T_{sw}(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{s+2} & 1\end{bmatrix}_{s=-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$T_2=\lim_{s\to s_2}(s-s_2)T_{sw}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{s+1} & \frac{s+2}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+2}{s+1}\end{bmatrix}_{s=-2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Krok 2. Macierze (31) rozkładamy na iloczyny (28)

$$T_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=C_1B_1,\quad C_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$T_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}=C_2B_2,\quad C_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Krok 3. Poszukiwana realizacja cykliczna macierzy (30) ma więc postać

(3.32)
$$A_J=\begin{bmatrix}s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Jeżeli macierz $T_{sw}(s)$ ma bieguny zespolone parami sprzężone, to korzystając z procedury 2 otrzymamy realizację cykliczną (29) o elementach zespolonych. Aby otrzymać realizację o elementach rzeczywistych, poddajemy realizację o elementach zespolonych (29) dodatkowemu przekształceniu przez podobieństwo.
Niech równanie $m(s)=0$ ma r różnych pierwiastków rzeczywistych $s_1, s_2, \dots, s_r$ oraz q różnych par pierwiastków zespolonych parami sprzężonych $a_1+jb_1, a_1-jb_1, \dots, a_q+jb_q, a_q-jb_q$, $r+q=n$.
Niech realizacja zespolona (29) ma postać

(3.33)

$$A_J=\operatorname{diag}[s_1\quad s_2\quad \dots\quad s_r\quad a_1+jb_1\quad a_1-jb_1\quad \dots\quad a_q+jb_q\quad a_q-jb_q]$$

$$B=\begin{bmatrix}B_1\\ \vdots\\ B_r\\ c_1+jd_1\\ c_1-jd_1\\ \vdots\\ c_q+jd_q\\ c_q-jd_q\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & \dots & C_r & g_1+jh_1 & g_1-jh_1 & \dots & g_q+jh_q & g_q-jh_q\end{bmatrix}$$

W tym wypadku macierz przekształcenia P przez podobieństwo ma postać

(3.34) $$P = \operatorname{diag}\begin{bmatrix}1 & \dots & 1 & D_1 & \dots & D_1\end{bmatrix} \in C^{n\times n} \qquad D_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & j \\ 1 & -j\end{bmatrix}$$

Korzystając z (33) i (34), otrzymamy

$$\overline{A}_J = P^{-1}A_J P = \operatorname{diag}[s_1 \quad \dots \quad s_r \quad A_1 \quad \dots \quad A_q]$$

(3.35)
$$\overline{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \\ 2c_1 \\ 2d_1 \\ \vdots \\ 2c_q \\ 2d_q \end{bmatrix}, \quad \overline{C} = CP = \begin{bmatrix}C_1 & \dots & C_r & g_1 & -h_1 & \dots & g_q & -h_q\end{bmatrix}$$

gdyż

$$A_k = D_1^{-1}\begin{bmatrix} a_k + jb_k & 0 \\ 0 & a_k - jb_k \end{bmatrix} D_1 = \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$$

(3.36)
$$D_1^{-1}\begin{bmatrix} c_k + jd_k \\ c_k - jd_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_k \\ 2d_k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_k + jh_k & g_k - jh_k \end{bmatrix} D_1 = \begin{bmatrix} g_k & -h_k \end{bmatrix}$$

Realizacja (35) jest więc realizacją o elementach rzeczywistych.

Przykład 4.3.3. Wyznaczyć rzeczywistą realizację cykliczną (A_J, B, C) macierzy normalnej o postaci

(3.37) $$T_{sw}(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ -s^2 & 4s+2 \end{bmatrix}$$

Macierz (37) ma jeden biegun rzeczywisty $s_1 = -1$ oraz parę biegunów zespolonych sprzężonych $s_2 = -1 + j$, $s_3 = -1 - j$, gdyż

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = (s+1)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$

Korzystając z procedury 2 otrzymamy kolejno.

Krok 1. Korzystając ze wzoru (26) otrzymamy kolejno

(3.38)
$$T_1 = \lim_{s\to s_1}(s - s_1)T_{sw}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ -s^2 & 4s+2 \end{bmatrix}_{s=-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \lim_{s\to s_2}(s - s_2)T_{sw}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1+j)}\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ -s^2 & 4s+2 \end{bmatrix}_{s=-1+j} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 - j\frac{1}{2} \\ -j & 1 - j2 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \lim_{s\to s_3}(s - s_3)T_{sw}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1-j)}\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ -s^2 & 4s+2 \end{bmatrix}_{s=-1-j} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 + j\frac{1}{2} \\ j & 1 + j2 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Rozkładając macierze (38) na iloczyny (28) otrzymamy

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = C_1 B_1, \qquad C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 - j\frac{1}{2} \\ -j & 1 - j2 \end{bmatrix} = C_2 B_2, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2j \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 - j\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 + j\frac{1}{2} \\ j & 1 + j2 \end{bmatrix} = C_3 B_3, \qquad C_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2j \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 + j\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Krok 3. Poszukiwana realizacja cykliczna (29) o elementach zespolonych ma więc postać

(3.39)
$$A_J = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 - j\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 + j\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2j & -2j \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć realizację o elementach rzeczywistych, poddajemy realizację (39) przekształceniu w postaci (34)

$$P = \operatorname{diag}\begin{bmatrix}1 & D_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Korzystając z (35), otrzymamy wówczas

$$\overline{A}_J = P^{-1}A_J P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1-j\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1+j\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C} = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2j & -2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & j\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -j\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Niech w przypadku ogólnym

$$m(s) = (s-s_1)^{m_1}(s-s_2)^{m_2}\ldots(s-s_p)^{m_p}; \qquad \sum_{i=1}^{p} m_i = n$$

przy czym $s_1, s_2, \ldots, s_p$ są biegunami rzeczywistymi lub zespolonymi parami sprzężonymi.
W tym wypadku macierz $T_{sw}(s)$ możemy przedstawić w postaci

(3.40) $$T_{sw}(s) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{T_{ij}}{(s-s_i)^{m_i-j+1}}$$

gdzie

(3.41) $$T_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-s_i)^{m_i}T_{sw}(s)\right]_{s=s_i}$$

Niech i – temu biegunowi s_i o krotności m_i odpowiada tylko jedna klatka J_i mająca postać (23b), a macierze B i C mają postacie

(3.42a) $$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_p \end{bmatrix}$$

gdzie

(3.42b) $$B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{im_i} \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} C_{i1} & C_{i2} & \ldots & C_{im_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

Biorąc pod uwagę, że

(3.43) $$[Is - J_i]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-s_i} & \frac{1}{(s-s_i)^2} & \cdots & \frac{1}{(s-s_i)^{m_i}} \\ 0 & \frac{1}{s-s_i} & \cdots & \frac{1}{(s-s_i)^{m_i-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s-s_i} \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

możemy napisać

(3.44)
$$C_i[Is - J_i]^{-1}B_i = \frac{1}{s-s_i}\sum_{k=1}^{m_i}C_{ik}B_{ik} + \frac{1}{(s-s_i)^2}\sum_{k=1}^{m_i-1}C_{ik}B_{ik+1} + \ldots + \frac{1}{(s-s_i)^{m_i}}C_{i1}B_{im_i}$$

Z porównania zależności (40) i (44) mamy

(3.45) $$T_{ij} = \sum_{k=1}^{j}C_{ik}B_{i,m_i-j+k} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, m_i$$

Z zależności (45) dla $j=1$ otrzymamy

(3.46) $$T_{i1}=C_{i1}B_{im_i}$$

Mając macierz T_{i1} rozkładamy ją na macierz kolumnową C_{i1} oraz macierz wierszową B_{im_i}. Z kolei z zależności (45) dla $j=2$ otrzymujemy

(3.47) $$T_{i2}=C_{i1}B_{i,m_i-1}+C_{i2}B_{i,m_i}$$

Znając T_{i2} oraz C_{i1}, B_{i,m_i} przyjmujemy za wektor C_{i2} tą kolumnę macierzy T_{i2}, która odpowiada pierwszemu niezerowemu elementowi macierzy B_{i,m_i} pomnożoną przez odwrotność tego elementu. Następnie wyznaczamy

(3.48) $$T_{i2}^{(1)}=T_{i2}-C_{i2}B_{i,m_i}=C_{i1}B_{i,m_i-1}$$

oraz B_{i,m_i-1} dla znanego wektora C_{i1}.
Z zależności (45) dla $j=3$ mamy

(3.49) $$T_{i3}=C_{i1}B_{i,m_i-2}+C_{i2}B_{i,m_i-1}+C_{i3}B_{i,m_i}$$

Znając T_{i3} oraz C_{i2}, B_{i,m_i-1} możemy wyznaczyć

(3.50) $$\overline{T}_{i3}=T_{i3}-C_{i2}B_{i,m_i-1}=C_{i1}B_{i,m_i-2}+C_{i3}B_{i,m_i}$$

a następnie, analogicznie jak wyżej C_{i2}, możemy wybrać C_{i3} oraz wyznaczyć B_{i,m_i-2}. Kontynuując tę procedurę możemy wyznaczyć $C_{i1},C_{i2},\ldots,C_{i,m_i}$ oraz $B_{i1},B_{i2},\ldots,B_{i,m_i}$.
Jeżeli jest dany rozkład strukturalny macierzy $L(s)$ w postaci

(3.51) $$L(s)=P(s)Q(s)+m(s)G(s)$$

to

(3.52) $$(s-s_i)^{m_i}T_{sw}(s)=\frac{L(s)}{m_i(s)}=P(s)Q_i(s)+(s-s_i)^{m_i}G(s),\qquad i=1,\ldots,p$$

gdzie

(3.53) $$m_i(s)=\frac{m(s)}{(s-s_i)^{m_i}};\quad Q_i(s)=\frac{Q(s)}{m_i(s)}$$

Biorąc pod uwagę (53) możemy wzór (41) napisać w postaci

(3.54) $$T_{ij}=\frac{1}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[P(s)Q_i(s)\right]_{|s=s_i},\ \text{dla}\ i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,m_i$$

gdyż

$$\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-s_i)^{m_i}G(s)\right]_{|s=s_i}=0;\ \text{dla}\ j=1,\ldots,m_i\ \text{oraz}\ i=1,\ldots,p$$

Ze wzoru (54) wynika, że macierze T_{ij} zależą tylko od macierzy $P(s)$ i $Q(s)$, a nie zależą od macierzy $G(s)$.
Znając macierze $P(s)$ i $Q(s)$ i korzystając ze wzoru (54) możemy wyznaczyć macierze T_{ij} dla $i=1,\ldots,p$ i $j=1,\ldots,m_i$.
Łatwo sprawdzić, że dla macierzy (A_J,B,C), określonych przez (23) i (42), para (A_J,B) jest sterowalna, a para (A_J,C) jest obserwowalna. Macierze te więc są realizacją cykliczną. Jeżeli bieguny $s_1,s_2,\ldots,s_p$ są zespolone, to aby otrzymać realizację cykliczną o elementach rzeczywistych, należy otrzymaną realizację zespoloną poddać przekształceniu przez podobieństwo (34).
Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania realizacji cyklicznej (A_J,B,C) dla danej normalnej macierzy ściśle właściwej $T_{sw}(s)$ o biegunach wielokrotnych.

Procedura 4.3.3.
Krok 1. Wyznaczamy bieguny $s_1,s_2,\ldots,s_p$ oraz ich krotności $m_1,m_2,\ldots,m_p$ macierzy $T_{sw}(s)$.
Krok 2. Korzystając ze wzoru (41) lub (54), wyznaczamy macierze T_{ij} dla $i=1,\ldots,p$ oraz $j=1,\ldots,m_i$
Krok 3. Stosując podaną wyżej procedurę wyznaczamy kolumny $C_{i1},C_{i2},\ldots,C_{i,m_i}$ macierzy C_i oraz wiersze $B_{i1},B_{i2},\ldots,B_{i,m_i}$ macierzy B_i dla $i=1,\ldots,p$.
Krok 4. Korzystając z (23) i (42), wyznaczamy poszukiwaną realizację (A_J,B,C).

Przykład 4.3.3. Wyznaczyć realizację cykliczną (A_J,B,C) dla macierzy normalnej mającej postać

(3.55) $$T_{sw}(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2}\begin{bmatrix}(s+1)^2 & -(s+1)^2\\ (s+1)(s+2) & (s+2)\end{bmatrix}$$

Korzystając z procedury 3 obliczamy kolejno.

Krok 1. Macierz (55) ma dwa podwójne bieguny rzeczywiste: $s_1 = -1$, $m_1 = 2$, $s_2 = -2$, $m_2 = 2$.

Krok 2. Korzystając ze wzoru (41), otrzymujemy

$$T_{11} = (s+1)^2 T_{sw}(s)_{|s=s_1} = \frac{1}{(s+2)^2}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & -(s+1)^2 \\ (s+1)(s+2) & (s+2) \end{bmatrix}_{|s=-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{12} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^2 T_{sw}(s)\right]_{|s=s_1} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & -(s+1)^2 \\ (s+1)(s+2) & (s+2) \end{bmatrix}\right\}_{|s=-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = (s+2)^2 T_{sw}(s)_{|s=s_2} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & -(s+1)^2 \\ (s+1)(s+2) & (s+2) \end{bmatrix}_{|s=-2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{22} = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2 T_{sw}(s)\right]_{|s=s_2} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} (s+1)^2 & -(s+1)^2 \\ (s+1)(s+2) & (s+2) \end{bmatrix}\right\}_{|s=-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z (46) i (47), otrzymamy

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C_{11}B_{12}, \qquad C_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad B_{12} = [0 \quad 1]$$

$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = C_{11}B_{11} + C_{12}B_{12}$. Wybieramy $C_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Zatem

$C_{11}B_{11} = T_{12} - C_{12}B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B_{11} = [1 \quad 0]$.

$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C_{21}B_{22}$, $C_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_{22} = [1 \quad -1]$

$T_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = C_{21}B_{21} + C_{22}B_{22}$. Wybieramy $C_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Zatem

$C_{21}B_{21} = T_{22} - C_{22}B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}[1 \quad -1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_{21} = [0 \quad 0]$.

Krok 4. Korzystając z (23) i (42), otrzymamy poszukiwaną realizację w postaci

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [C_{11} \quad C_{12} \quad C_{21} \quad C_{22}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pojawia się pytanie: czy stosując przekształcenie przez podobieństwo można z realizacji niecyklicznej otrzymać realizację cykliczną – i odwrotnie. Odpowiedzią na to pytanie jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.1. Realizacja $(PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D) \in \boldsymbol{R}_{n,m,p}$ dla dowolnej macierzy nieosobliwej P jest realizacją cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy realizacja $(A, B, C, D) \in \boldsymbol{R}_{n,m,p}$ jest cykliczna.

Dowód. Z twierdzenia 2.2 wynika, że realizacja $(PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D)$ jest realizacją minimalną wtedy i tylko wtedy, gdy realizacja (A,B,C) jest realizacją minimalną. Wykażemy, że przekształcenie przez podobieństwo nie zmienia wielomianów inwariantnych macierzy A. Niech U i V będą macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach macierzy $[Is - A]$, sprowadzającymi tę macierz do postaci kanonicznej Smitha, czyli

$$[Is - A]_S = U(s)[Is - A]V(s) \tag{3.56}$$

Niech $\overline{U}(s) = U(s)P^{-1}$ oraz $\overline{V}(s) = PV(s)$. Macierze $\overline{U}(s)$ i $\overline{V}(s)$ są również macierzami unimodualrnymi dla dowolnej macierzy nieosobliwej P, gdyż $\det \overline{U}(s) = \det U(s) \det P^{-1}$ oraz $\det \overline{V}(s) = \det P \det V(s)$, a $\det P$ i $\det P^{-1}$ są liczbami niezależnymi od zmiennej s. Wykażemy, że macierze $\overline{U}(s)$ i $\overline{V}(s)$ sprowadzają macierz $[Is - PAP^{-1}]$ do postaci kanonicznej Smitha $[Is - A]_S$. Korzystając z definicji macierzy $\overline{U}(s)$ i $\overline{V}(s)$ oraz (56) otrzymamy

$$\overline{U}(s)[Is - PAP^{-1}]\overline{V}(s) = U(s)P^{-1}P[Is - A]P^{-1}PV(s) = U(s)[Is - A]V(s) = [Is - A]_S$$

Macierze $[Is - PAP^{-1}]$, $[Is - A]$ mają więc te same wielomiany inwariantne. Wobec tego realizacja $(PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D)$ jest realizacją cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy realizacja (A,B,C,D) jest cykliczna.

■

4.4. Strukturalna stabilność i wyznaczanie normalnej transmitancji

4.4.1. Sterowalność strukturalna macierzy cyklicznych

Macierzą cykliczną nazywamy macierz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, której wielomian minimalny $\Psi(s)$ pokrywa się z jej wielomianem charakterystycznym, $\Psi(s) = \det[Is - A]$.

Definicja 4.4.1. Macierz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ nazywamy strukturalnie stabilną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba dodatnia ε_0 taka, że dla dowolnej macierzy $B \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ oraz liczby ε spełniającej warunek $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ wszystkie macierze $A + B\varepsilon$ są macierzami cyklicznymi (prostymi).

Twierdzenie 4.4.1. Macierz cykliczna $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ jest macierzą strukturalnie stabilną.

Dowód tego twierdzenia jest podany w pracy [168] i jest oparty na następujących dwóch faktach:

1. Jeżeli macierz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwa, to wszystkie macierze $A + B$ są również nieosobliwe dla macierzy , której norma $\|B\|$ spełnia warunek

(4.1) $$\|B\| < \alpha$$

   dla α będącego pewną liczbą dodatnią.
2. Jeżeli macierz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ ma rząd $A = r$, to rząd $[A + B] \geq r$ dla macierzy $B \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ spełniającej warunek (1).

Macierze niecykliczne nie są strukturalnie stabilne, ale dla macierzy niecyklicznej $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ można zawsze dobrać macierz $B \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ oraz liczbę małą ε ($|\varepsilon| > 0$) takie, że suma $A + B\varepsilon$ jest macierzą cykliczną.
Tylko dla pewnego szczególnego doboru macierzy B oraz ε suma $A + B\varepsilon$ jest macierzą niecykliczną. Jak wiadomo, macierz w postaci kanonicznej Frobeniusa

(4.2) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

jest macierzą cykliczną dla dowolnych wartości współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.
Na przykład macierz

(4.3) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest macierzą cykliczną dla wszystkich wartości współczynnika $a \neq 1$, a macierzą niecykliczną tylko dla $a = 1$.

Jeżeli $\Delta A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ traktować jako odchylenie (niedokładność) od nominalnej macierzy $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ i przyjąć $\varepsilon B = \Delta A$, to zgodnie z twierdzeniem 1 macierz $A + \Delta A$ jest również cykliczna, gdy macierz A jest cykliczna.

4.4.2. Strukturalna stabilność realizacji cyklicznej

Realizacją cykliczną $(A,B,C,D) \in \hat{\boldsymbol{R}}_{n,m,p}$ nazywamy realizację minimalną z cykliczną macierzą A.

Twierdzenie 4.4.2. Niech $(A_1,B_1,C_1,D_1) \in R_{n,m,p}$ będzie realizacją cykliczną, a $(A_2,B_2,C_2,D_2) \in R_{n,m,p}$ inną dowolną realizacją o tych samych wymiarach. Wtedy istnieje liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka, że wszystkie realizacje $(A_1 + \varepsilon A_2, B_1 + \varepsilon B_2, C_1 + \varepsilon C_2, D_1 + \varepsilon D_2) \in R_{n,m,p}$ dla $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ są realizacjami cyklicznymi.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1, jeżeli macierz A_1 jest cykliczna, to wszystkie macierze $A_1 + \varepsilon A_2$ są cykliczne dla $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Jeżeli para (A_1, B_1) jest sterowalna, to para $(A_1 + \varepsilon A_2, B_1 + \varepsilon B_2)$ jest również sterowalna dla wszystkich $|\varepsilon| < \varepsilon_1$. Analogicznie, jeżeli para (A_1, C_1) jest obserwowalna, to para $(A_1 + \varepsilon A_2, C_1 + \varepsilon C_2)$

jest również obserwowalna dla wszystkich $|\varepsilon| < \varepsilon_2$. Realizacja $(A_1 + \varepsilon A_2, B_1 + \varepsilon B_2, C_1 + \varepsilon C_2)$ jest więc realizacją minimalną dla $|\varepsilon| < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_0$, a po uwzględnieniu cykliczności macierzy $(A_1 + \varepsilon A_2)$ - realizacją cykliczną.

∎

Przykład 4.4.1. Dana jest realizacja cykliczna $(A_1, B_1, C_1) \in R_{3,3,1}$ w postaci

(4.4) $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]$$

gdzie a_{10}, a_{11}, a_{12} są dowolnymi parametrami.
Dla jakich wartości parametrów a_{20}, a_{21}, a_{22}, b i c macierzy

(4.5) $$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C_2 = [0 \ \ c \ \ 0]$$

realizacja $(A_1 + A_2, B_1 + B_2, C_1 + C_2) \in R_{3,3,1}$ jest realizacją cykliczną?

Oznaczmy

$$A = A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = B_1 + B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+b \end{bmatrix}, \quad C = C_1 + C_2 = [1 \ \ c \ \ 0]$$

gdzie

(4.6) $$a_k = a_{1k} + a_{2k} \quad \text{dla } k = 0,1,2$$

Macierz A jest macierzą cykliczną dla wszystkich wartości parametrów a_{20}, a_{21} i a_{22}. Para (A,B) jest sterowalna dla tych wartości parametrów a_{20}, a_2, a_{22} i b, dla których $\det[B, AB, A^2B] \neq 0$, czyli

(4.7) $$\det[B, AB, A^2B] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4(1+b) \\ 0 & 2(1+b) & 2a_2(1+b) \\ (1+b) & a_2(1+b) & (2a_1 + a_2^2)(1+b) \end{vmatrix} = 8(1+b)^3 \neq 0 \ \text{dla } b \neq -1$$

Para (A,C) jest obserwowalna dla tych wartości parametrów a_{20}, a_{21}, a_{22} i c, dla których $\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \neq 0$, czyli

(4.8) $$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 2 & 2c \\ 2ca_0 & 2ca_1 & 4 + 2ca_2 \end{vmatrix} = 4[2 + a_2c + a_0c^3 - a_1c^2] \neq 0 \ \text{dla } a_1c^2 \neq 2 + a_2c + a_0c^3$$

a po uwzględnieniu (6) otrzymamy

(4.9) $$a_{20}c^3 - a_{21}c^2 + a_{22}c \neq a_{11}c^2 - a_{10}c^3 - a_{12}c - 2$$

Tak więc realizacja (A,B,C) jest realizacją cykliczną dla parametrów a_{20}, a_{21}, a_{22}, b i c macierzy (5), spełniających warunek (9) oraz $b \neq -1$.

4.4.3. Wpływ współczynników transmitancji operatorowej na opis układu

Weźmy pod uwagę macierz transmitancji

(4.10) $$T(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1+a \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$, gdyż warunek

$$\begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1+a \end{vmatrix} = (s+1+a)(s+2)$$

dzieli się bez reszty przez $(s+1)(s+2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$.
Dla $a=0$ istnieje realizacja cykliczna $(A,B,C)\in \hat{R}_{2,2,2}$ macierzy (10) w postaci

(4.11)
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

którą można wyznaczyć, korzystając na przykład z procedury 3.2.
Dla $a\neq 0$, stosując procedurę 3.2, otrzymamy

$$T_1=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)T(s)=\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1+a\end{bmatrix}_{|s=-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}=C_1B_1,\quad C_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$$
$$T_2=\lim_{s\to s_2}(s-s_2)T(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1+a\end{bmatrix}_{|s=-2}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1-a\end{bmatrix}=C_2B_2,\quad C_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0 & 1-a\end{bmatrix}$$

Poszukiwana realizacja minimalna ma więc postać

(4.12)
$$A=\begin{bmatrix}I_2s_1 & 0\\ 0 & s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a\\ 0 & 1-a\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Realizacji cyklicznej (11) odpowiada układ opisany równaniami stanu mającymi postać

(4.13)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1+u_1\\ \dot{x}_2&=-2x_2+u_2\\ y_1&=x_1\\ y_2&=x_2\end{aligned}$$

a realizacji minimalnej (12) układ opisany równaniami stanu mającymi postać

(4.14)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-x_1+u_1\\ \dot{x}_2&=-x_2+au_2\\ \dot{x}_3&=-2x_3+(1-a)u_2\\ y_1&=x_1\\ y_2&=x_2+x_3\end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $a=0$ z układu (14) nie otrzymujemy układu (13), a para (A,B) układu (14) staje się niesterowalna.
Powyższe rozważania można uogólnić na układy liniowe dowolnego rzędu.

4.4.4. Wyznaczanie transmitancji normalnej na podstawie jej przybliżenia

Weźmy pod uwagę macierz transmitancji operatorowych

(4.15)
$$T_p(s)=\frac{\overline{L}(s)}{\overline{m}(s)}\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$$

której współczynniki różnią się od współczynników normalnej macierzy transmitancji

(4.16)
$$T(s)=\frac{L(s)}{m(s)}\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$$

Zadanie wyznaczenia transmitancji normalnej na podstawie jej przybliżenia można sformułować następująco.
Dana jest macierz transmitancji operatorowych (15), należy wyznaczyć normalną macierz transmitancji operatorowych (16), która jest dobrym przybliżeniem macierzy (15).
Niżej zostanie przedstawiona metoda rozwiązania tego zadania, oparta na rozkładzie strukturalnym macierzy (15) [168].
Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach, przekształcamy macierz wielomianową $\overline{L}(s)\in \boldsymbol{R}^{p\times m}[s]$ do postaci

(4.17)
$$U(s)\overline{L}(s)V(s)=i(s)\begin{bmatrix}1 & w(s)\\ k(s) & M(s)\end{bmatrix}$$

gdzie $U(s)$ i $V(s)$ są macierzami wielomianowymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach, $i(s)$ jest wielomianem, a

(4.18)
$$w(s)\in \boldsymbol{R}^{1\times(m-1)}[s],\quad k(s)\in \boldsymbol{R}^{p-1}[s],\quad M(s)\in \boldsymbol{R}^{(p-1)\times(m-1)}[s]$$

Następnie mnożąc lewostronnie macierz

(4.19)
$$L_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & w(s) \\ k(s) & M(s) \end{bmatrix}$$

przez macierz unimodularną $U_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,p-1} \\ -k(s) & I_{p-1} \end{bmatrix}$ oraz prawostronnie przez macierz unimodularną $V_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & -w(s) \\ 0_{m-1,1} & I_{m-1} \end{bmatrix}$ otrzymamy

(4.20)
$$U_1(s)L_1(s)V_1(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1,1} & M(s)-k(s)w(s) \end{bmatrix}$$

W metodzie tej przyjmujemy

(4.21)
$$M(s)-k(s)w(s)=m(s)M_1(s)+R(s)$$

przy czym $M_1(s)\in \boldsymbol{R}^{(p-1)\times(m-1)}[s]$, $R(s)\in \boldsymbol{R}^{(p-1)\times(m-1)}[s]$, $\operatorname{st} R(s)<\operatorname{st} m(s)$.
W dalszych rozważaniach pomijamy macierz wielomianową $R(s)$.
Z zależności (17) i (20) mamy

(4.22)
$$\overline{L}(s)=U^{-1}(s)i(s)L_1(s)V^{-1}(s)=U^{-1}(s)i(s)U_1^{-1}(s)\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1,1} & M(s)-k(s)w(s) \end{bmatrix}V_1^{-1}(s)V^{-1}(s)$$
$$=U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,p-1} \\ k(s) & I_{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1,1} & M(s)-k(s)w(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & w(s) \\ 0_{m-1,1} & I_{m-1} \end{bmatrix}V^{-1}(s)$$

Korzystając z (21) i (22) oraz pomijając $R(s)$ otrzymamy

(4.23)
$$L(s)=U^{-1}(s)i(s)\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,p-1} \\ k(s) & I_{p-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1,1} & m(s)M_1(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & w(s) \\ 0_{m-1,1} & I_{m-1} \end{bmatrix}V^{-1}(s)$$

oraz

(4.24)
$$T(s)=\frac{L(s)}{m(s)}=\frac{P(s)Q(s)}{m(s)}+G(s)$$

przy czym

$$P(s)=i(s)U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 1 \\ k(s) \end{bmatrix},\quad Q(s)=\begin{bmatrix} 1 & w(s) \end{bmatrix}V^{-1}(s),$$

(4.25)

$$G(s)=i(s)U^{-1}(s)\begin{bmatrix} 0 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1,1} & M_1(s) \end{bmatrix}V^{-1}(s)$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura rozwiązywania naszego zadania.

Procedura 4.4.1.
Krok 1. Stosując działania elementarne przekształcamy macierz $\overline{L}(s)$ do postaci (17) oraz wyznaczamy wielomian $i(s)$ i macierze unimodularne $U(s)$ i $V(s)$.
Krok 2. Wybieramy $M_1(s)$ i $R(s)$.
Krok 3. Korzystając ze wzorów (25), wyznaczamy macierze $P(s)$, $Q(s)$ i $G(s)$.
Krok 4. Korzystając z (24), wyznaczamy poszukiwaną normalną macierz transmitancji $T(s)$.

Przykład 4.4.2. Wyznaczyć normalną macierz transmitancji operatorowych dla macierzy (10), zakładając że parametr a jest mały (bliski zeru).

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno.

Krok 1. W tym wypadku $\overline{m}(s)=m(s)=(s+1)(s+2)$ oraz

(4.26)
$$\overline{L}(s)=\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1+a \end{bmatrix}$$

Stosując działania elementarne $L[1+2]$ i $P[1+2\times(-1)]$, otrzymamy

$$U(s)\overline{L}(s)V(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1+a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-a & s+1+a \\ -(s+1+a) & s+1+a \end{bmatrix}=$$

$$=(1-a)\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{s+1+a}{1-a} \\ \dfrac{-(s+1+a)}{1-a} & \dfrac{s+1+a}{1-a} \end{bmatrix}$$

Wobec tego $i(s)=(1-a)$, $U(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $V(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $U^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

$V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ oraz $w(s)=\dfrac{s+1+a}{1-a}$, $k(s)=-\dfrac{s+1+a}{1-a}$, $M(s)=\dfrac{s+1+a}{1-a}$.

Krok 2. W tym wypadku

$$M(s)-k(s)w(s)=\frac{s+1+a}{1-a}+\frac{(s+1+a)^2}{(1-a)^2}=\frac{(s+1)(s+2)+a(s+2)}{(1-a)^2}=m(s)M_1(s)+R(s)$$

Przyjmujemy więc $M_1(s)=\dfrac{1}{(1-a)^2}$ oraz $R(s)=a\dfrac{s+2}{(1-a)^2}$.

Krok 3. Korzystając ze wzorów (25) otrzymujemy

$$P(s)=i(s)U^{-1}(s)\begin{bmatrix}1\\ k(s)\end{bmatrix}=(1-a)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{s+1+a}{1-a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2\\ -(s+1+a)\end{bmatrix}$$

$$Q(s)=\begin{bmatrix}1 & w(s)\end{bmatrix}V^{-1}(s)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{s+1+a}{1-a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{1-a} & \dfrac{s+1+a}{1-a}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=i(s)U^{-1}(s)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & M_1(s)\end{bmatrix}V^{-1}(s)=(1-a)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{(1-a)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{1-a}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Krok 4. Poszukiwana normalna macierz transmitancji ma więc postać

$$(4.27)\quad T(s)=\frac{P(s)Q(s)}{m(s)}+G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{1-a} & \dfrac{a}{1-a}\\ \dfrac{a}{1-a} & \dfrac{s(1-2a)+1-2a-a^2}{1-a}\end{bmatrix}$$

Zauważmy, że dla $a=0$ z (27) otrzymujemy normalną transmitancję mającą postać

$$T(s)=\frac{P(s)Q(s)}{m(s)}+G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

którą otrzymujemy również z (10) dla $a=0$.

5. Normalne układy singularne i cykliczne

5.1. Singularne układy dyskretne i pary cykliczne

Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

$$(1.1a)\qquad Ex_{i+1}=Ax_i+Bu_i \quad i\in Z_+=\{0,1,\dots\}$$

$$(1.1b)\qquad y_i=Cx_i+Du_i$$

przy czym $x_i\in \mathbf{R}^n$, $u_i\in \mathbf{R}^m$, $y_i\in \mathbf{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej i, a $E,A\in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B\in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C\in \mathbf{R}^{p\times n}$, $D\in \mathbf{R}^{p\times m}$.
Układ (1) nazywamy singularnym, jeżeli $\det E=0$ i standardowym, jeżeli $\det E\neq 0$.
Zakładamy, że $\det E=0$ oraz

$$(1.2)\qquad \det[Ez-A]\neq 0 \text{ dla pewnych } z\in \mathbf{C} \text{ (ciało liczb zespolonych)}$$

Układ (1) spełniający warunek (2) nazywamy układem regularnym. Macierz transmitancji układu (1) jest określona wzorem

$$(1.3)\qquad T(z)=C[Ez-A]^{-1}B+D$$

Macierz tę możemy przedstawić w postaci standardowej

$$(1.4)\qquad T(z)=\frac{P(z)}{d(z)}$$

przy czym $P(z)\in \mathbf{R}^{p\times m}[z]$ ($\mathbf{R}^{p\times m}[z]$ jest zbiorem macierzy wielomianowych o wymiarach $p\times m$), $d(z)$ jest minimalnym monicznym (o współczynniku 1 przy najwyższej potędze zmiennej z) wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $T(z)$.

Korzystając z działań elementarnych na wierszach i kolumnach, możemy macierz wielomianową $P(z)\in \mathbf{R}^{p\times m}[z]$ sprowadzić do postaci kanonicznej Smitha

(1.5) $$P_S(z)=\mathrm{diag}[i_1(z),\ i_2(z),\dots,i_r(z),\ 0,\dots,0]\in \mathbf{R}^{p\times m}[z]$$

gdzie $i_1(z),\dots,i_r(z)$ są monicznymi wielomianami inwariantnymi, spełniającymi warunek podzielności $i_k(z)\,|\,i_{k+1}(z),\ k=1,\dots,r-1$ (wielomian $i_k(z)$ dzieli bez reszty wielomian $i_{k+1}(z),\ k=1,\dots,r-1$) a $r=\text{rząd}\,P(z)$.

Wielomiany inwariantne są określone zależnością

(1.6) $$i_k(z)=\frac{D_k(z)}{D_{k-1}(z)}\quad (D_0(z)=1),\ k=1,\dots,r$$

gdzie $D_k(z)$ jest największym wspólnym dzielnikiem wszystkich minorów stopnia k – tego macierzy $P(s)$.
Wielomian charakterystyczny $\varphi(z)=\det[Ez-A]$ pary (E,A) oraz wielomian minimalny $\Psi(s)$ są związane zależnością

(1.7) $$\Psi(z)=\frac{\varphi(z)}{D_{n-1}(z)}$$

Definicja 5.1.1. Parę (E,A) nazywamy cykliczną wtedy i tylko wtedy, gdy $\Psi(z)=\varphi(z)$.

Z zależności (6) wynika, że para (E,A) jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.8)
$$D_{n-1}(z)=1 \text{ lub równoważnie } i_1(z)=i_2(z)=\dots=i_{r-1}(z)=1,\ i_r(z)=\Psi(z)=d(z)$$

Twierdzenie 5.1.1. Para macierzy (E,A) jest cykliczna, jeżeli macierze $E=[e_{ij}]\in \mathbf{R}^{n\times n}$ oraz $A=[a_{ij}]\in \mathbf{R}^{n\times n}$ spełniają jeden z niżej podanych warunków

(1.9a) $$e_{ij}=0 \quad \text{dla} \quad j>i \quad \text{oraz} \quad a_{ij}\begin{cases}=0 & \text{dla} \quad j>i+1\\ \neq 0 & \text{dla} \quad j=i+1\end{cases} \quad i,j=1,\dots,n$$

lub

(1.9b) $$e_{ij}=0 \quad \text{dla} \quad i>j \quad \text{oraz} \quad a_{ij}\begin{cases}=0 & \text{dla} \quad i>j+1\\ \neq 0 & \text{dla} \quad i=j+1\end{cases} \quad i,j=1,\dots,n$$

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (9a), to minor M_{n1} (otrzymany przez wykreślenie n – tego wiersza i pierwszej kolumny) macierzy $[Ez-A]$ jest równy $M_{n1}=a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}\neq 0$. Wobec tego $D_{n-1}(z)=1$ i z zależności (7) mamy $\varphi(z)=\Psi(z)$.
Dowód warunku (9b) jest analogiczny (dualny).

■

Z twierdzenia 1 wynika natychmiast, że para (E,A) jest cykliczna, jeżeli

(1.10) $$E=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A=\left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{a}\end{array}\right] \quad \text{(postać kanoniczna Frobeniusa)}$$

5.1.1. Normalna macierz odwrotna pary cyklicznej

Dla dowolnej pary (E,A) spełniającej warunek (2) macierz odwrotną $[Ez-A]^{-1}$ możemy napisać w postaci

(1.11) $$[Ez-A]^{-1}=\frac{\overline{P}(z)}{\overline{d}(z)}$$

gdzie $\overline{P}(z)=P_{E,A}(z)\in \mathbf{R}^{n\times n}[z]$ a $\overline{d}(z)$ jest minimalnym monicznym mianownikiem.
W tym wypadku $\text{rząd}\,[Ez-A]=\text{rząd}\,\overline{P}(z)=n$.

Definicja 5.1.2. Macierz (11) nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy wielomianowej $\overline{P}(z)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $\overline{d}(z)$.

Twierdzenie 1.5.2. Niech $E,A\in \mathbf{R}^{n\times n}$, $n\geq 2$ oraz niech będzie spełnione założenie (2). Macierz (11) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy para (E,A) jest cykliczna.

Dowód. ***Dostateczność***. Jeżeli para (E,A) jest cykliczna i są spełnione warunki (8), to postać kanoniczna Smitha macierzy $[Ez-A]$ jest równa

$$[Ez-A]_S = U(z)[Ez-A]V(z) = \operatorname{diag}[1,\ldots,1,\overline{d}(z)] \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[z] \tag{1.12}$$

gdzie $U(z)\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[z]$ i $V(z)\in \boldsymbol{R}^{n\times n}[z]$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach.
Macierz dołączona macierzy (12) ma postać

$$[Ez-A]_{ad\,S} = \operatorname{diag}[\overline{d}(z),\ldots,\overline{d}(z),1] \in \boldsymbol{R}^{p\times m}[z] \tag{1.13}$$

Wobec tego każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy (13) dzieli się bez reszty przez wielomian $\overline{d}(z)$.
Biorąc pod uwagę, że

$$\overline{P}(z) = [Ez-A]_{ad} = cV(z)\left([Ez-A]_{ad\,S}\right)U(z) \quad (c = \det U(z)V(z)) \tag{1.14}$$

i korzystając z twierdzenia Bineta-Cauchy'ego, stwierdzamy, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy (14) dzieli się bez reszty przez $\overline{d}(z)$. Macierz (11) jest więc macierzą normalną.

Konieczność. Niech

$$[Ez-A]_S = \operatorname{diag}[p_1(z), p_1(z)p_2(z),\ldots, p_1(z)p_2(z)\cdots p_n(z)] \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[z] \tag{1.15}$$

przy czym niektóre z wielomianów $p_1(z), p_2(z),\cdots, p_n(z)$ mogą być równe 1.
Pokażemy, że jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $\overline{P}(z)$ dzieli się bez reszty przez $\overline{d}(s)$, to $p_1(z)=p_2(z)=\cdots=p_{n-1}(z)=1$ i jest spełniony warunek (8).
Zauważmy, że macierz odwrotna macierzy (15) ma postać

$$[Ez-A]_S^{-1} = \frac{\hat{P}(z)}{\hat{d}(z)} \tag{1.16}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \hat{P}(z) &= diag\,[p_2(z)p_3(z)\ldots p_n(z), p_3(z)p_4(z)\cdots p_n(z),\ldots, p_n(z),1] \\ \hat{d}(z) &= p_1(z)p_2(z)\ldots p_n(z) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Z zależności (16)-(17) wynika, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $\hat{P}(z)$ dzieli się bez reszty przez $\hat{d}(z)$ tylko wtedy, gdy $p_1(z)=p_2(z)=\cdots=p_{n-1}(z)=1$.
Zauważmy dalej, że niezerowy minor stopnia drugiego macierzy unimodularnych $U(z)$ i $V(z)$ nie dzieli się przez $\hat{d}(z)$. Z zależności $[Ez-A]^{-1} = V(z)[Ez-A]_S^{-1}U(z)$, (11) oraz twierdzenia Bineta-Cauchy'ego wynika, że jeżeli każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $\overline{P}(z)$ dzieli się bez reszty przez $\overline{d}(z)$, to są spełnione warunki (8) i para (E,A) jest cykliczna.

■

Przykład 5.1.1. Para macierzy

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

jest cykliczna, gdyż

$$\varphi(z) = \det[Ez-A] = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2z+1$$

oraz

$$[Ez-A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z+1 \end{bmatrix}$$

Wobec tego $\Psi(z)=\varphi(z)$.
Macierz odwrotna (11) ma w tym wypadku postać

$$[Ez-A]^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\overline{P}(z)}{\overline{d}(z)} \tag{1.19}$$

gdzie

$$\overline{P}(z)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & z\\ -z & -2z-1 & z^2\end{bmatrix},\quad \overline{d}(z)=2z+1$$

Niezerowe minory stopnia drugiego macierzy $\overline{P}(z)$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & z\end{vmatrix}=2z+1,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -z & -2z-1\end{vmatrix}=-2(2z+1),\quad M_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -z & z^2\end{vmatrix}=z(2z+1),$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2z-1 & z^2\end{vmatrix}=2z+1,\quad M_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -z & -2z-1\end{vmatrix}=2z+1,\quad M_{11}=\begin{vmatrix}0 & z\\ -2z-1 & z^2\end{vmatrix}=z(2z+1)$$

dzielą się bez reszty przez wielomian $\overline{d}(z)=2z+1$. Macierz odwrotna (19) jest więc macierzą normalną.

Przykład 5.1.2. Para macierzy

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{1.20}$$

nie jest cykliczna, gdyż

$$\varphi(z)=\det[Ez-A]=\begin{vmatrix}z & 0 & 0\\ 0 & z & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=z^2,\quad [Ez-A]_S=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & z & 0\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}$$

oraz

$$D_{n-1}(z)=z,\ \Psi(z)=\frac{\varphi(z)}{D_n(z)}=z$$

Wobec tego $\Psi(z)\neq\varphi(z)$.
Macierz odwrotna (11) w tym wypadku ma postać

$$[Ez-A]^{-1}=\begin{bmatrix}z & 0 & 0\\ 0 & z & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{z}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}=\frac{\overline{P}(z)}{\overline{d}(z)} \tag{1.21}$$

gdzie $\overline{P}(z)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & z\end{bmatrix}$, $\overline{d}(z)=z$.

W tym wypadku minor $M_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ macierzy $\overline{P}(z)$ nie dzieli się przez $\overline{d}(z)=z$.

Macierz (21) nie jest więc macierzą normalną.

5.1.2. Normalna macierz transmitancji

Macierz transmitancji (3) układu (1) możemy zawsze zapisać w postaci standardowej (4). Jeżeli $m>p$ oraz $\text{rząd}\, C=p$, $\text{rząd}\, B=m$, wtedy $r=\text{rząd}\, P=p$ i postać kanoniczna Smitha macierzy $P(z)$ jest równa

$$P_S(z)=U(z)P(z)V(z)=\left[\begin{array}{ccccccc}i_1(z) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & i_2(z) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & \cdots & i_p(z) & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]\in \boldsymbol{R}^{p\times m}[z] \tag{1.22}$$

gdzie $U(z)\in \boldsymbol{R}^{p\times p}[z]$ i $V(z)\in \boldsymbol{R}^{m\times m}[z]$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach.

Z zależności (22) i (4) mamy następującą postać kanoniczną McMillana macierzy $T(z)$

$$T_M(z)=\frac{P_S(z)}{d(z)}=\frac{U(z)P(z)V(z)}{d(z)}=\left[\begin{array}{ccccccc}\frac{n_1(z)}{q_1(z)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{n_2(z)}{q_2(z)} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & 0 & \cdots & \frac{n_p(z)}{q_p(z)} & 0 & \cdots & 0\end{array}\right]\in \boldsymbol{R}^{p\times m}(z) \tag{1.23}$$

gdzie $\frac{i_k(z)}{d(z)}=\frac{n_k(z)}{q_k(z)}$ dla $k=1,\dots,p$ $\left(n_1(z)=i_1(z),\ q_1(z)=d(z)\right)$, $n_k(z)$ i $q_k(z)$ są względnie pierwszymi takimi, że $n_k(z)|n_{k+1}(z)$ oraz $q_{k+1}(z)|q_k(z)$, $k=1,\dots,p-1$, a $\boldsymbol{R}^{p\times m}(z)$ jest zbiorem macierzy wymiernych o wymiarach $p\times m$.

Wielomian

$$q(z) = q_1(z)q_2(z)...q_p(z) \tag{1.24}$$

nazywamy wielomianem McMillana macierzy $T(z)$.

Z zależności (22)–(24) wynika, że st $q(z) \geq$ st $d(z)$ oraz

(1.25) $q(z) = d(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_k(z) = 1$ dla $k = 2, ..., p$
i $q_1(z) = d(z)$

Twierdzenie 5.1.3. Niech $T(z)$ ma postać (4) oraz $\min(m, p) \geq 2$. Macierz $T(z)$ jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy $q(z) = d(z)$.

Dowód ***Dostateczność.*** Jeżeli $q(z) = d(z)$ to zgodnie z (25) $q_k(z) = 1$ dla $k = 2, ..., p$, a zależność (23) przyjmuje postać

$$T_M(z) = \frac{P_S(z)}{d(z)} \tag{1.26}$$

oraz

$$T(z) = U^{-1}(z)T_M(z)V^{-1}(z) = \frac{P(z)}{d(z)}$$

gdzie

$$P(z) = U^{-1}(z)P_S(z)V^{-1}(z) \tag{1.27a}$$

i

(1.27b)

$$P_S(z) = \begin{bmatrix} i_1(z) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_1(z)t_2(z)d(z) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & i_1(z)t_p(z)d(z) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{p \times m}[z]$$

$U^{-1}(z)$ i $V^{-1}(z)$ są macierzami unimodularnymi, a niektóre wielomiany $t_k(z)$, $k = 2, ..., p$ mogą być równe 1.
Z zależności (27) wynika, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $P_S(z)$ dzieli się bez reszty przez $d(z)$. Korzystając z twierdzenia Bineta-

Cauchy'ego do (27a) stwierdzamy, że każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $P(z)$ dzieli się bez reszty przez $d(z)$. Macierz $T(z)$ jest więc macierzą normalną.

Konieczność. Jeżeli macierz $T(z)$ jest normalna, to każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $P(z)$ (ale również i macierzy $P_S(z)$) dzieli się bez reszty przez $d(z)$. Implikuje to, że macierz $P_S(z)$ ma postać (27b), a z zależności (26) wynika, że $q_k(z) = 1$ dla $k = 2, ..., p$. W tym wypadku z zależności (25) mamy $q(z) = d(z)$.

■

Przykład 5.1.3. Weźmy pod uwagę macierz transmitancji

$$T(z) = \frac{1}{2z+1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -z & 2z+1 & z^2 - z \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

W tym wypadku $d(z) = 2z + 1$

$$P(z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -z & 2z+1 & z^2 - z \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

Postać kanoniczna Smitha macierzy (29) jest równa

$$P_S(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2z+1 & 0 \end{bmatrix}$$

a postać kanoniczna McMillana macierzy (28)

$$T_M(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2z+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wobec tego $q(z) = d(z) = 2z + 1$.
Niezerowe minory stopnia drugiego macierzy (29)

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -z & 2z+1 \end{vmatrix} = 2(2z+1), M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -z & z^2 - z \end{vmatrix} = 2z^2 + z, M_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2z+1 & z^2 - z \end{vmatrix} = -3(2z+1)$$

dzielą się bez reszty przez $d(z)$. Macierz (28) jest macierzą normalną.

Przykład 5.1.4. Zapisując macierz transmitancji

(1.30)
$$T(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{z+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{(z+1)^2}\\ 0 & \frac{1}{z+1}\end{bmatrix}$$

w postaci standardowej (4), otrzymamy $d=(z+1)^2$ oraz

(1.31)
$$P(z)=\begin{bmatrix}z+1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & z+1\end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna Smitha macierzy (31) jest równa

$$P_S(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

a postać kanoniczna McMillana macierzy (30)

$$T_M(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{(z+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{z+1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Wobec tego $q(z)=(z+1)^3\neq d(z)=(z+1)^2$.

Minor $M_3=\begin{vmatrix}z+1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ macierzy (31) nie dzieli się przez $d(z)$.

Macierz (30) nie jest więc macierzą normalną.

5.2. Osiągalność i cykliczność

5.2.1. Osiągalność układów singularnych

Weźmy pod uwagę układ singularny, opisany równaniami (1.1). Jeżeli jest spełniona zależność (1.2), to

(2.1)
$$[Ez-A]^{-1}=\sum_{i=-\mu}^{\infty}\Phi_i z^{-(i+1)}$$

przy czym $\mu=\text{rząd}\,E-\text{st}\det[Ez-A]+1$ jest indeksem nilpotentności, a Φ_i są macierzami fundamentalnymi spełniającymi zależność

(2.2)
$$E\Phi_i-A\Phi_{i-1}=\Phi_iE-\Phi_{i-1}A=\begin{cases}I & \text{dla} \quad i=0\\ 0 & \text{dla} \quad i\neq 0\end{cases}$$

oraz $\Phi_i=0$ dla $i<-\mu$.

Rozwiązanie x_i równania (1.1a) z warunkiem początkowym x_0 ma postać

(2.3)
$$x_i=\Phi_iEx_0+\sum_{j=0}^{i+\mu-1}\Phi_{i-j-1}Bu_j \qquad i\in Z_+$$

Podstawiając (3) do prawej strony równania (1.1a), po uwzględnieniu (2) otrzymamy

$$Ax_i+Bu_i=A\Phi_iEx_0+\sum_{j=0}^{i+\mu-1}A\Phi_{i-j-1}Bu_j+Bu_i=E\left[\Phi_{i+1}Ex_0+\sum_{j=0}^{i+\mu}\Phi_{i-j}Bu_j\right]=Ex_{i+1}$$

Wyrażenie (3) spełnia równanie (1.1a), a więc jest jego rozwiązaniem.

Definicja 5.2.1. Układ (1.1) nazywamy układem osiągalnym w k krokach, jeżeli dla każdego $x_f\in R^n$ istnieje ciąg sterowań $u_i\in \boldsymbol{R}^m$, $i=0,1,\dots,\ k+\mu-1$, który przeprowadza stan tego układu z $x_0=0$ do x_f.

Układ (1.1) nazywamy układem osiągalnym, jeżeli istnieje takie k, że układ ten jest osiągalny w k krokach.

Twierdzenie 5.2.1. Układ (1.1) jest osiągalny w $n-\mu$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

(2.4)
$$\text{rząd}\,[\Phi_{-\mu}B,\dots,\Phi_{-1}B,\Phi_0B,\dots,\Phi_{n-\mu-1}B]=n$$

Dowód. Z zależności (3) dla $x_0 = 0$, $i = n-\mu$, $x_{n-\mu} = x_f$ mamy

(2.5) $$x_f = \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{n-\mu-j-1} B_{nj} = [\Phi_{-\mu}B, \dots, \Phi_{-1}B, \Phi_0 B, \dots, \Phi_{n-\mu-1}B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-\mu} \\ u_{n-\mu-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Z równości (5) wynika, że istnieje ciąg sterowań $u_0, \dots, u_{n-1}$ dla każdego x_f wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (4).

■

Twierdzenie 5.2.2. Układ (1.1) o jednym wejściu ($m = 1$) jest osiągalny w $n-\mu$ krokach tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny $\varphi(z) = \det[Ez - A]$ pary (E, A) jest równy wielomianowi minimalnemu $\Psi(z)$ tej pary (E, A), czyli $\varphi(z) = \Psi(z)$.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1 układ (1.1) dla $m = 1$ jest osiągalny w $n-\mu$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

(2.6) $$\text{rząd}\,[\Phi_{-\mu}b, \dots, \Phi_{-1}b, \Phi_0 b, \dots, \Phi_{n-\mu-1}b] = n$$

Z zależności (1.7) oraz równości $(\det[Ez-A])[Ez-A]^{-1} = [Ez-A]_{ad}$ mamy

(2.7) $$\Psi(z)[Ez-A]^{-1} = \frac{[Ez-A]_{ad}}{D_{n-1}(z)} = H_q z^q + \dots + H_1 z + H_0$$

Niech

(2.8) $$\Psi(z) = z^{n_1} + a_{n_1-1} z^{n_1-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Podstawiając (8) i (1) do (7) otrzymamy

(2.9)
$$(z^{n_1} + a_{n_1-1} z^{n_1-1} - \dots - a_1 z + a_0)(\Phi_{-\mu} z^{\mu-1} + \dots + \Phi_{-2} z + \Phi_{-1} + \Phi_0 z^{-1} + \Phi_1 z^{-2} + \dots)$$
$$= H_q z^q + \dots + H_1 z + H_0$$

Porównując współczynniki przy z^{-1} z równości (9) otrzymamy

(2.10) $$\Phi_{n_1} = a_{n_1-1}\Phi_{n_1-1} + \dots + a_1 \Phi_1 + a_0 \Phi_0$$

Jeżeli $\Psi(z) \neq \varphi(z)$, to $\text{st}\,\varphi(z) > n_1$ i z zależności (10) oraz $\mu = \text{rząd}\,E - \text{st}\,\varphi + 1$ wynika, że warunek (6) nie jest spełniony, gdyż kolumna $\Phi_{n-\mu-1}b$ jest liniowo zależna od $\Phi_0 b, \Phi_1 b, \dots$.

■

Przykład 5.2.1. Weźmy pod uwagę układ o jednym wejściu, którego macierze E i A mają postać (1.20), a $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

W przykładzie 1.2. wykazaliśmy, że $\varphi(z) = z^2$, $\Psi(z) = z$ oraz

(2.11) $$[Ez-A]^{-1} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \Phi_{-1} + \Phi_0 z^{-1}$$

gdzie

$$\Phi_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku równość (10) przyjmuje postać $\Phi_k = 0$ dla $k = 1, 2, \dots$.
Korzystając z (6) otrzymamy

(2.12) $$\text{rząd}\,[\Phi_{-1}b, \Phi_0 b, \Phi_1 b] = \text{rząd} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

Układ ten nie jest więc osiągalny. Ten sam wynik otrzymamy z twierdzenia 2.

5.2.2. Cykliczność układów ze sprzężeniami zwrotnymi

Weźmy pod uwagę układ (1.1) ze sprzężeniem zwrotnym od wektora stanu mającym postać

(2.13) $$u_i = v_i + Kx_i$$

gdzie $v_i \in \mathbf{R}^m$ jest nowym wektorem wymuszenia, a $K \in \mathbf{R}^{m\times n}$ macierzą sprzężeń zwrotnych.
Podstawiając (13) do (1.1a) otrzymamy

(2.14) $$Ex_{i+1} = A_z x_i + Bv_i$$

gdzie

(2.15) $$A_z = A + BK$$

Na początku rozważmy układ o jednym wejściu ($m=1$), którego macierze *E, A, b* mają następującą postać kanoniczną

(2.16) $$E = \left[\begin{array}{c:c} I_{n-1} & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right] \in \mathbf{R}^{n\times n},\ A = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{a} \end{array}\right] \in \mathbf{R}^{n\times n},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$a = [-a_0 - a_1 \ldots - a_{r-1} - 1\ 0 \ldots 0] \in \mathbf{R}^{1\times n}$$

Twierdzenie 5.2.3. Niech macierze *E, A, b* mają postać (16). Para układu zamkniętego (E,A_z), $A_z = A + bk$ jest cykliczna wtedy i tylko wtedy, gdy para (E,A) jest cykliczna.

Dowód. ***Konieczność***. Jeżeli macierze *E, A, b* mają postacie (16), to układ jest osiągalny dla dowolnej macierzy *k* i zgodnie z twierdzeniem 2 osiągalność układu zamkniętego implikuje cykliczność pary (E,A_z).

Dostateczność. Jeżeli macierze *E, A, b* mają postacie (16), to

(2.17) $$\Psi(z) = \varphi(z) = \det[Ez - A] = z^r + a_{r-1}z^{r-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Korzystając z (16) oraz $k = [k_1\ k_2 \ldots k_n]$, otrzymamy

(2.18) $$A_z = A + bk = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{a} \end{array}\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} k = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-1} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\bar{a}} \end{array}\right]$$

gdzie

$$\bar{a} = a + k = [k_1 - a_0,\ k_2 - a_1, \ldots,\ k_r - a_{r-1},\ k_{r+1} - 1,\ k_{r+2}, \ldots, k_n]$$

Para (E,A_z) jest cykliczna, gdyż $\Psi_z(z) = \det[Ez - A_z]$.

■

Z twierdzenia 3 wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 5.2.1. Jeżeli macierze *E, A, b* mają postać kanoniczną (16), to cykliczność pary (E,A) jest niezmiennicza względem sprzężenia zwrotnego od wektora stanu.

Jeżeli układ (1.1) nie jest osiągalny i para (E,A) nie jest cykliczna, to na podanym niżej przykładzie pokażemy, że można dobrać macierz *k* tak, że para (E,A_z) jest cykliczna.

Przykład 5.2.2. Niech macierze *E, A* układu (1.1) mają postacie (1.20), a $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Korzystając z (11) otrzymamy

$$\text{rząd}\,[\Phi_{-1}b, \Phi_0 b, \Phi_1 b] = \text{rząd}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 < n = 3$$

Układ ten nie jest więc osiągalny.

Dla $k=[0,\ 1,\ 0]$ mamy

$$A_z = A + bk = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0\ 1\ 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\varphi(z) = \det[Ez - A_z] = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = z^2 - z$$

Łatwo sprawdzić, że $\Psi(z) = \varphi(z)$. Para (E, A_z) jest więc cykliczna, mimo że para (E, A) nie jest cykliczna.

Weźmy pod uwagę układ (1.1) o $m-$wejściach ($m > 1$), którego macierze E, A, B mają następujące postacie kanoniczne

(2.19)

$$E = \mathrm{diag}\,[E_1, \ldots, E_m], \quad E_i = \left[\begin{array}{c:c} I_{q_i} & 0 \\ \hdashline 0 & \end{array}\right] \in \boldsymbol{R}^{(q_i+1)\times(q_i+1)}, \quad n = m + \sum_{i=1}^{m} q_i$$

$$A = \mathrm{diag}\,[A_1, \ldots, A_m], \quad A_i = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{q_i} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{a_i} \end{array}\right] \in \boldsymbol{R}^{(q_i+1)\times(q_i+1)}, \quad a_i = [-a_0^i, \ldots, -a_{r_i-1}^i,\ -1,\ 0, \ldots, 0]$$

$$B = \mathrm{diag}\,[B_1, \ldots, B_m], \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{q_i+1}$$

Twierdzenie 5.2.4. Niech macierze E, A, B mają postacie (19) i niech para (E,A) nie będzie cykliczna. Wtedy istnieje macierz sprzężeń zwrotnych K taka, że para (E, A_z), $A_z = A + BK$ jest cykliczna.

Dowód. Jeżeli macierze E, A, B mają postacie (19), to układ jest osiągalny. Para (E,A) nie jest cykliczna, jeżeli przynajmniej dwie pary $(E_1, A_1), \ldots, (E_m, A_m)$ mają przynajmniej jedną wspólną wartość własną. Macierz sprzężeń zwrotnych $K = \mathrm{diag}\,[K_1, \ldots, K_m]$ dobieramy tak, aby wszystkie pary (E_i, A_{zi}), $A_{zi} = A_i + B_i K_i$, $i = 1, \ldots, m$ miały różne wartości własne.

Niech

(2.20) $$\varphi_{zi}(z) = z^{q_i+1} + d_{q_i}^i z^{q_i} + \cdots + d_1^i z + d_0^i, \quad i = 1, \ldots, m$$

będzie pożądanym wielomianem charakterystycznym pary (E_i, A_{zi}), czyli

(2.21) $$\det\,[E_i z - A_{zi}] = \varphi_{zi}(z)$$

Dobierając macierze o postaci

(2.22) $$K_i = [a_0^i - d_0^i, \cdots, a_{r_i-1}^i - d_{r_i-1}^i,\ 1 - d_{r_i}^i, -d_{r_i+1}^i, \ldots, -d_{q_i}^i], \quad i = 1, \ldots, m$$

i korzystając z (19) otrzymamy

(2.23) $$A_{zi} = A_i + B_i K_i = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{q_i} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{d_i} \end{array}\right], \quad i = 1, \ldots, m$$

gdzie

(2.24) $$d_i = [-d_0^i, -d_1^i, \ldots, -d_{q_i}^i]$$

Macierz (23) spełnia warunek (21) i para (E, A_z) jest parą cykliczną.

■

Przykład 5.2.3. Weźmy pod uwagę układ (1.1) z macierzami

(2.25) $$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze (25) mają postacie kanoniczne (19), a para (E,A) nie jest cykliczna, gdyż wielomiany charakterystyczne par

$$\det\,[E_1 z - A_1] = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2z + 1, \quad \det\,[E_2 z - A_2] = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4z + 2$$

(2.26) $E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -4\end{bmatrix}$

mają wspólną wartość własną, równą $z=-0{,}5$.
Niech pożądane wielomiany charakterystyczne par (E_1,A_{z1}) i (E_2,A_{z2}) będą równe $\varphi_{z1}(z)=z+1$ i $\varphi_{z2}(z)=z+2$. Korzystając z (22), (23) i (25) oraz dobierając odpwiednio elementy wektora (24) otrzymamy

$$K_1=[a_0^1-d_0^1, a_1^1-d_1^1]=[0\ ,\ 1],\quad K_2=[a_0^2-d_0^2, a_1^2-d_1^2]=[0\ ,\ 3]$$

oraz

$$A_{z1}=A_1+B_1K_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\quad A_{z2}=A_2+B_2K_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

Zatem

$$K=\operatorname{diag}[K_1\quad K_2]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

oraz

$$A_z=A+BK=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że $\varphi(z)=\Psi(z)=(z+1)(z+2)$. Para (E,A_z) jest więc cykliczna.

Weźmy pod uwagę nieosiągalny układ (1.1), który spełnia następujące warunki

(2.27) $$\text{rząd}\,[R,B]=\text{rząd}\,R$$

(2.28) $$\text{rząd}\,[R,AR]=\text{rząd}\,R$$

(2.29) $$\text{rząd}\,[R,ER]=\text{rząd}\,R$$

przy czym R jest macierzą osiągalności określoną zależnością

(2.30) $$\boldsymbol{R}=[\Phi_{-\mu}B,\dots,\Phi_{-1}B,\Phi_0B,\dots,\Phi_{n-\mu-1}B]$$

Korzystając z metody przedstawionej w [145] możemy wyznaczyć macierz nieosobliwą $T\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ taką, że

(2.31) $$\tilde{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{bmatrix},\quad \tilde{E}=TET^{-1}=\begin{bmatrix}E_1 & E_2\\ 0 & E_3\end{bmatrix},$$
$$\tilde{B}=TB=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix},\quad A_1,E_1\in\boldsymbol{R}^{r\times r}, B_1\in\boldsymbol{R}^{r\times m},\ A_3,E_3\in\boldsymbol{R}^{(n-r)\times(n-r)}$$

przy czym podukład (E_1,A_1,B_1) jest osiągalny.

Twierdzenie 5.2.5. Niech układ (1.1) nie będzie osiągalny i para (E,A) nie będzie cykliczna. Istnieje macierz sprzężenia zwrotnego K taka, że para (E,A_z), $A_z=A+BK$ jest cykliczna, wtedy i tylko wtedy, gdy para (E_3,A_3) (rozkładu (31)) jest cykliczna.

Dowód. ***Dostateczność.*** Jeżeli para (E_3,A_3) jest cykliczna a para (E,A) nie jest cykliczna, to wielomiany minimalne $\Psi_1(z)$ i $\Psi_3(z)$ par (E_1,A_1) i (E_3,A_3) mają przynajmniej jeden wspólny czynnik różny od stałej. Z założenia podukład (E_1,A_1,B_1) jest osiągalny. Można więc dobrać macierz K_1 tak, aby para $(E_1,A_1+B_1K_1)$ miała wielomian minimalny niemający wspólnego czynnika z wielomianem $\Psi_3(z)$. W tym wypadku para (E,A_z) jest więc cykliczna.

Konieczność. Wynika natychmiast z faktu, że para (E,A_z) jest cykliczna tylko wtedy, gdy para (E_3,A_3) jest cykliczna.

■

5.3. Wyznaczanie równoważnych układów standardowych dla singularnych układów liniowych

5.3.1. Układy dyskretne i podstawowe twierdzenia

Weźmy pod uwagę układ singularny (1.1), spełniający założenia (1.2). Niżej zostanie przedstawiona metoda wyznaczania równoważnych układów standardowych ($E = I$) dla singularnych układów oparta na działaniach elementarnych.
W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z następujących dwóch rodzajów (typów) działań elementarnych na wierszach macierzy:

1. Typowych działań elementarnych polegających na [11]:
   a) Pomnożeniu *i*-tego wiersza przez liczbę niezerową *a*; działanie to oznaczać będziemy przez $L(i \times a)$.
   b) Dodaniu do *i*-tego wiersza *j*-tego, pomnożonego przez liczbę niezerową *b*; działanie to oznaczać będziemy przez $L(i + j \times b)$.
   c) Zamianie miejscami *i*-tego i *j*-tego wiersza; działanie to oznaczać będziemy przez $L(i, j)$.
2. Pomnożeniu każdego z ostatnich *k* wierszy macierzy przez zmienną *z*; działanie to oznaczać będziemy przez $L_k(z)$.

Zauważmy, że działania elementarne pierwszego rodzaju są równoważne pomnożeniu lewostronnemu macierzy przez macierz nieosobliwą $\overline{L}$, a działanie elementarne drugiego rodzaju – przez macierz o postaci $[I_{n-k}, I_k z]$, którą otrzymujemy z macierzy jednostkowej stopnia *n* przez pomnożenie ostatnich *k* jej wierszy przez zmienną *z*. Korzystając z tych działań elementarnych udowodnimy następujące twierdzenie, na którym opiera się proponowana metoda wyznaczania równoważnych układów standardowych dla danych układów singularnych.

Twierdzenie 5.3.1. Istnieje nieosobliwa macierz wielomianowa

(3.1) $$L(z) = L_0 + L_1 z + \cdots + L_\mu z^\mu$$

o wyznaczniku $\det L(z) = lz^q$ taka, że

(3.2) $$L(z)[Ez - A] = [Iz - \overline{A}]$$

wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (1.2), przy czym $\overline{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ a μ jest indeksem nilpotentności pary (E,A), liczby *l* i *q* zostaną określone w dowodzie.

Dowód. Macierz $[Iz - \overline{A}]$ jest nieosobliwa dla każdej macierzy $\overline{A}$. Z zależności (2) wynika natychmiast, że musi być spełniony warunek (1.2). Aby wykazać dostateczność warunku (2), stosując działania elementarne pierwszego rodzaju, przekształcamy macierz *E* do postaci $\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, przy czym E_1 ma pełny rząd wierszowy równy r_1, czyli

(3.3) $$\overline{L}_1 E = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{L}_1 A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hat{A}_1 \end{bmatrix}, \quad E_1 \in \boldsymbol{R}^{r_1 \times n},\ A_1 \in \boldsymbol{R}^{r_1 \times n}$$

a $\overline{L}_1$ jest macierzą działań elementarnych na wierszach macierzy *E*.
Mnożąc lewostronnie równanie (1.1a) dla $B = 0$ przez macierz $\overline{L}_1$ i uwzględniając (3), otrzymamy

(3.4a) $$E_1 x_{i+1} = A_1 x_i$$

(3.4b) $$0 = \hat{A}_1 x_i$$

Zwiększając o 1 wskaźnik *i* w równaniu (4b) otrzymamy

(3.5) $$0 = \hat{A}_1 x_{i+1}$$

Równania (4a) i (5) możemy napisać w postaci jednego równania

(3.6) $$\begin{bmatrix} E_1 \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} x_i$$

Zauważmy, że zwiększenie o 1 wskaźnika *i* w równaniu (4b) jest równoważne pomnożeniu lewostronnemu równania

(3.7) $$\begin{bmatrix} E_1 z \\ 0 \end{bmatrix} X(z) = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hat{A}_1 \end{bmatrix} X(z)$$

przez macierz $\mathrm{diag}[I_{r_1}, I_{n-r_1} z]$, przy czym $X(z)$ jest transformatą *z* wektora x_i. Przejście od równania (1.1a), dla $B = 0$, do równania (6) jest więc równoważne lewostronnemu pomnożeniu równania (1.1a), dla $B = 0$, przez macierz $(\mathrm{diag}[I_{r_1}, I_{n-r_1} z])\overline{L}_1$. Opisane wyżej postępowanie jest istotą jednego kroku algorytmu przesuwania, który realizuje się na parze (E,A).

Jeżeli macierz $\begin{bmatrix} E_1 \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, to mnożąc lewostronnie równanie (6) przez macierz odwrotną $\begin{bmatrix} E_1 \\ \hat{A}_1 \end{bmatrix}^{-1}$, otrzymamy równanie

(3.8) $$x_{i+1} = \overline{A} x_i$$

gdzie $\overline{A} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jeżeli natomiast macierz $\begin{bmatrix} E_1 \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix}$ jest osobliwa, to powtarzamy wyżej opisaną procedurę dla równania (6), wyznaczając macierz działań elementarnych $\overline{L}_2$ tak, aby

(3.9) $$\overline{L}_2 \begin{bmatrix} E_1 \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{L}_2 \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ \hat{A}_2 \end{bmatrix}, \quad E_2, A_2 \in \boldsymbol{R}^{r_2 \times n}$$

macierz E_2 miała pełny rząd wierszowy, równy $r_2 \geq r_1$.

Po μ krokach otrzymamy macierz nieosobliwą $\begin{bmatrix} E_\mu \\ -\hat{A}_\mu \end{bmatrix}$, gdyż z założenia jest spełniony warunek regularności (1.2), a działania elementarne na wierszach macierzy $[Ez - A]$ nie zmieniają jej rzędu. Zauważmy, że poszukiwana macierz $L(z)$ będzie miała postać

(3.10) $$L(z) = \overline{L}_{\mu+1} \prod_{i=1}^{\mu} \left(\operatorname{diag}\left[I_{r_i}, I_{n-r_i} z\right]\right) \overline{L}_i$$

przy czym $\overline{L}_{\mu+1} = \begin{bmatrix} E_\mu \\ -\hat{A}_\mu \end{bmatrix}^{-1}$.

Macierz (10) po wykonaniu mnożeń i uporządkowaniu względem kolejnych potęg zmiennej z przyjmie postać (1).

Obliczając wyznacznik macierzy (10) otrzymamy

$$\det L(z) = \det\left[\overline{L}_{\mu+1} \prod_{i=1}^{\mu} \left(\operatorname{diag}\left[I_{r_i}, I_{n-r_i} z\right]\right) \overline{L}_i\right] = \prod_{i=1}^{\mu+1} \det \overline{L}_i \prod_{i=1}^{\mu} \det \operatorname{diag}\left[I_{r_i}, I_{n-r_i} z\right] = l z^q$$

gdyż $\det \operatorname{diag}\left[I_{r_i}, I_{n-r_i} z\right] = z^{n-r_i}$, przy czym $l = \prod_{i=1}^{\mu+1} \det \overline{L}_i$, a $q \leq \prod_{i=1}^{\mu} (n - r_i)$.

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

■

Definicja 5.3.1. Macierz $[Iz - \overline{A}]$ nazywamy postacią standardową pęku regularnego (E,A).

5.3.2. Wyznaczanie macierzy fundamentalnych

Z zależności (2) mamy $[Ez - A]^{-1} L^{-1}(z) = [Iz - \overline{A}]^{-1}$ oraz

(3.11) $$[Ez - A]^{-1} = [Iz - \overline{A}]^{-1} L(z)$$

Podstawiając

(3.12) $$[Iz - \overline{A}]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{A}^i z^{-(i+1)}$$

oraz (2.1) i (1) do (11) otrzymamy

(3.13) $$\begin{aligned} &\Phi_{-\mu} z^{\mu-1} + \cdots + \Phi_{-2} z + \Phi_{-1} + \Phi_0 z^{-1} + \Phi_1 z^{-2} + \cdots = \\ &= \left(I z^{-1} + \overline{A} z^{-2} + \cdots\right)\left(L_0 + L_1 z + \cdots + L_\mu z^\mu\right) \end{aligned}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy

(3.14) $$\begin{aligned} &\Phi_{-\mu} = L_\mu,\ \Phi_{1-\mu} = L_{1-\mu} + \overline{A} L_\mu, \cdots, \Phi_{-1} = L_1 + \overline{A} L_2 + \cdots + \overline{A}^{\mu-1} L_\mu \\ &\Phi_0 = L_0 + \overline{A} L_1 + \cdots + \overline{A}^\mu L_\mu,\ \Phi_1 = \overline{A} L_0 + \overline{A}^2 L_1 + \cdots + \overline{A}^{\mu+1} L_\mu, \cdots \end{aligned}$$

Znając macierze $L_0, L_1, \cdots, L_\mu$ oraz $\overline{A}$ możemy wyznaczyć kolejno $\Phi_{-\mu}, \Phi_{1-\mu}, \cdots,$ $\Phi_{-1}, \Phi_0, \Phi_1, \cdots$ korzystając z zależności (14).

Macierze L_i, $i = 0, 1, \ldots, \mu$ oraz $\overline{A}$ wyznaczamy korzystając z procedury podanej w dowodzie twierdzenia 1. Procedurę wyznaczania tych macierzy oraz macierzy fundamentalnych Φ_j, $j = -\mu, 1-\mu, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ zilustrujemy na podanym niżej przykładzie.

Przykład 5.3.1. Niech

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (15) spełniają warunek (1.2), gdyż

$$\det[Ez - A] = \begin{vmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - z$$

Zauważmy, że w tym wypadku macierz E ma już postać $\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zatem $r_1 = 2$, $\overline{L}_1 = I_3$. Korzystając z algorytmu przesuwania, wyznaczamy kolejno

$$[E, A] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1(z)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\overline{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1(z)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\overline{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wobec tego $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz

$$L(z) = \overline{L}_3 L_1(z) \overline{L}_2 L_1(z) \overline{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -z & -z^2 \end{bmatrix} = L_0 + L_1 z + L_2 z^2$$

przy czym

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że jest spełniona w tym wypadku zależność (2).
Korzystając z zależności (14), otrzymamy

$$\Phi_{-2} = L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{-1} = L_1 + \overline{A} L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_0 = L_0 + \overline{A} L_1 + \overline{A}^2 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \overline{A} L_0 + \overline{A}^2 L_1 + \overline{A}^3 L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znając macierze fundamentalne Φ_i dla $i=-\mu, 1-\mu, \dots$ oraz x_0 i u_i dla $i \in Z_+$ możemy wyznaczyć rozwiązanie równania (1a), korzystając ze wzoru (2.3).

5.3.3. Równoważny układ standardowy

Weźmy pod uwagę równanie (1.1a), które w postaci operatorowej możemy napisać następująco

(3.16) $$[Ez - A]X(z) = BU(z) + Ex_0 z$$

przy czym $X(z)$ i $U(z)$ są transformatami Z wektorów odpowiednio x_i oraz u_i. Mnożąc lewostronnie równanie (16) przez macierz (1) i uwzględniając (2), otrzymamy

(3.17) $$[Iz - \overline{A}]X(z) = \sum_{j=0}^{\mu}\left(B_j z^j U(z) + L_j E x_0 z^{j+1}\right)$$

przy czym

(3.18) $$B_j = L_j B \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, \dots, \mu$$

Korzystając z odwrotnego przekształcenia Z dla (17), otrzymamy

(3.19) $$x_{i+1} = \overline{A}x_i + B_0 u_i + B_1 u_{i+1} + \dots + B_\mu u_{i+\mu}$$

Mnożąc równanie (1.1a) przez macierz nieosobliwą działań elementarnych na wierszach $\overline{L}_1$ i biorąc pod uwagę (3), otrzymamy

(3.20a) $$E_1 x_{i+1} = A_1 x_i + B_1 u_i$$

(3.20b) $$0 = \tilde{A}_1 x_i + \tilde{B}_1 u_i$$

przy czym

$$\overline{L}_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_1 \end{bmatrix}, \quad B_1 \in R^{r_1 \times m}$$

Zbiór wektorów x_0 spełniających równanie (20b) dla $i=0$ nazywamy zbiorem dopuszczalnych warunków początkowych i oznaczać będziemy przez X_0.

Twierdzenie 5.3.2. Niech będzie spełniony warunek (1.2). Wtedy równanie (1.1a) oraz równanie (19) mają dla $x_0 \in X_0$ to samo rozwiązanie

(3.21) $$x_i = \overline{A}^i x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \overline{A}^{i-j-1}\left(B_0 u_j + B_1 u_{j+1} + \dots + B_\mu u_{j+\mu}\right)$$

Dowód. Podstawiając (21) do (19) otrzymamy

$$\overline{A}x_i + B_0 u_i + B_1 u_{i+1} + \dots + B_\mu u_{i+\mu} = \overline{A}\left[\overline{A}^i x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \overline{A}^{i-j-1}\left(B_0 u_j + B_1 u_{j+1} + \dots + B_\mu u_{j+\mu}\right)\right] +$$
$$+ B_0 u_i + B_1 u_{i+1} + \dots + B_\mu u_{i+\mu} = \overline{A}^{i+1} x_0 + \sum_{j=0}^{i} \overline{A}^{i-j}\left(B_0 u_j + B_1 u_{j+1} + \dots + B_\mu u_{j+\mu}\right) = x_{i+1}$$

Wyrażenie (21) jest więc rozwiązaniem równania (19).
Podstawiając (1) do (2) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z, otrzymamy

(3.22)
$$L_0 A = \overline{A}, \quad L_0 E - L_1 A = I, \quad L_1 E = L_2 A, \quad L_2 E = L_3 A, \dots, L_{\mu-1} E = L_\mu A, \quad L_\mu E = 0$$

Podstawiając (21) do (1.1a) i korzystając z (22) oraz ograniczeń na zbiór X_0, otrzymamy

$$Ax_i + Bu_i = A\left[\overline{A}^i x_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \overline{A}^{i-j-1}\left(B_0 u_j + B_1 u_{j+1} + \dots + B_\mu u_{j+\mu}\right)\right] + Bu_i =$$
$$= E\left[\overline{A}^{i+1} x_0 + \sum_{j=0}^{i} \overline{A}^{i-j}\left(B_0 u_j + B_1 u_{j+1} + \dots + B_\mu u_{j+\mu}\right)\right] = Ex_{i+1}$$

Wyrażenie (21) jest więc również rozwiązaniem równania (1.1a) dla $x_0 \in X_0$.

■

Twierdzenie to pozwala przenieść na regularne układy singularne wszystkie wyniki znane dla układów standardowych, które opierają się na rozwiązaniu równania stanu, np. kryteria osiągalności, sterowalności, obserwowalności, itp.

Przykład 5.3.2. Dane jest równanie (1.1a), którego macierze E i A mają postać (15), a

(3.23)
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aby wyznaczyć równoważne mu równanie (19) korzystając z wyników przykładu 1 oraz (18), obliczamy

$$B_0 = L_0 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = L_1 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = L_2 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Poszukiwane równanie (19) ma więc postać

(3.24)
$$x_{i+1} = \overline{A} x_i + B_0 u_i + B_1 u_{i+1} + B_2 u_{i+2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u_{i+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_{i+2}$$

Zbiór dopuszczalnych warunków początkowych X_0 jest w tym wypadku określony zależnością $x_0^2 + u_0 = 0$, przy czym x_0^2 jest wartością drugiej składowej wektora $x_i^T = [x_i^1, x_i^2, x_i^3]$ (górny wskaźnik T oznacza transpozycję wektora) w punkcie początkowym $i = 0$.

Zgodnie ze wzorem (21) rozwiązanie równania (24) dla $x_0 \in X_0$ ma postać

(3.25)
$$x_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} x_0^1 + u_0 \\ x_0^3 + 2u_0 \\ -2u_1 - u_2 \end{bmatrix} & \text{dla} \quad i = 1 \\ \begin{bmatrix} x_0^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i-1} \begin{bmatrix} u_0 \\ 2u_0 \\ -2u_1 - u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{i-2} \begin{bmatrix} u_1 \\ 2u_1 \\ -2u_2 - u_3 \end{bmatrix} + \cdots \\ + \begin{bmatrix} u_{i-1} \\ 2u_{i-1} \\ -2u_i - u_{i+1} \end{bmatrix} & \text{dla } i > 1 \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie (25) spełnia również dla $x_0 \in X_0$ równanie (1.1a) z macierzami (15) i (23). Rozwiązanie (25) można również wyznaczyć, korzystając ze wzoru (23) i macierzy Φ_i $i = -2, -1, 0, 1, \ldots$ obliczonych w przykładzie 1.

5.3.4. Układy ciągłe

Niech dany będzie liniowy układ ciągły opisany równaniami

(3.26a)
$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

(3.26b)
$$y = Cx + Du$$

w których $x = x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u = u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ jest wektorem wymuszeń (sterowań), $y = y(t) \in \boldsymbol{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $E, A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p \times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{p \times m}$.

Układ (26) nazywamy standardowym, jeżeli $E = I$, a singularnym, gdy $\det E = 0$. Jeżeli

(3.27)
$$\det[Es - A] \neq 0 \text{ dla pewnych } s \in \boldsymbol{C}$$

to układ (26) nazywamy układem regularnym.

Niech

$$L(s) = L_0 + L_1 s + \cdots + L_\mu s^\mu \tag{3.28}$$

będzie macierzą wielomianową taką, że

$$L(s)[Es - A] = [Is - \overline{A}] \tag{3.29}$$

przy czym $\overline{A} \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, a μ jest indeksem nilpotentności pary (E,A). Macierz (28) wyznaczamy w ten sam sposób jak dla układu dyskretnego (1), stosując procedurę działań elementarnych podaną w dowodzie twierdzenia 1.
Mnożąc lewostronnie równanie (26a) w postaci operatorowej

$$[Es - A]X(s) = BU(s) + Ex_0$$

przez macierz (28) i uwzględniając (29), otrzymamy

$$[Is - \overline{A}]X(s) = \sum_{j=0}^{\mu}\left(B_j s^j U(s) + L_j E x_0 s^j\right) \tag{3.30}$$

przy czym $X(s)$ i $U(s)$ są transformatami Laplace'a wektorów $x(t)$ i $u(t)$, a B_j $(j = 0, 1, ..., \mu)$ jest określone zależnością (18).
Stosując odwrotnie przekształcenie Laplace'a dla (30), otrzymamy

$$\dot{x} = \overline{A}x + \sum_{j=0}^{\mu}\left(B_j u^{(j)} + B_j \sum_{k=1}^{j} u^{(k-1)}\delta^{(j-k)} + L_j E x_0 \delta^{(j)}\right) - x_0\delta \tag{3.31}$$

przy czym $u^{(j)} = \dfrac{d^j u}{dt^j}$, $\delta^{(j)}$ oznacza j-tą pochodną dystrybucyjną funkcji (impulsowej) Diraca δ. Gdy

$$\sum_{j=0}^{\mu} B_j \sum_{k=1}^{j} u^{(k-1)}\delta^{(j-k)} + L_j E x_0 \delta^{(j)} - x_0\delta = 0$$

to równanie (31) upraszcza się do postaci

$$\dot{x} = \overline{A}x + \sum_{j=0}^{\mu} B_j u^{(j)} \tag{3.32}$$

Twierdzenie 5.3.3. Niech będzie spełniony warunek (27). Wtedy równanie (26a) oraz równanie (31) dla $x_0 \in X_0$ mają to samo rozwiązanie

$$x(t) = e^{\overline{A}t}x_0 + \sum_{j=0}^{\mu}\int_0^t \left[e^{\overline{A}(t-\tau)} B_j \left(u^{(j)}(\tau) + \sum_{k=1}^{j} u^{(k-1)}(\tau)\delta^{(j-k)}(\tau) \right) + L_j E x_0 \delta^{(j)}(\tau) \right] d\tau \tag{3.33}$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić w sposób analogiczny do tego jaki przeprowadzamy dla twierdzenia 2.
Rozwiązanie równania (32) ma postać

$$x(t) = e^{\overline{A}t}x_0 + \sum_{j=0}^{\mu}\int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)} B_j u^{(j)}(\tau)\delta(\tau)d\tau \tag{3.34}$$

Korzystając z zależności (14), możemy wyznaczyć macierze fundamentalne Φ_i dla $i = -\mu,\ 1-\mu, ...$ znając macierze $L_i, i = 0, 1, ..., \mu$ oraz macierz A.

Przykład 5.3.3. Niech dane będzie równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} \tag{3.35}$$

którego macierze E i A są osobliwe, ale pęk $Es - A$ jest regularny, gdyż

$$\det[Es - A] = \begin{vmatrix} -1 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \end{vmatrix} = s^2$$

Niech warunki początkowe dla $t = 0$ mają postać

$$x_{10} = -1,\ x_{20} = -1,\ x_{30} = 2 \tag{3.36}$$

oraz

$$[E,A]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\overline{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{L_1(s)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\overline{L}_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{array}\right]$$

W tym wypadku

$$L(s)=\overline{L}_2L_1(s)\overline{L}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\s&1&-s\end{bmatrix}=L_0+L_1s$$

przy czym

$$L_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad L_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix},\quad \mu=1$$

Z zależności $\overline{L}_1[E\dot{x}=Ax+Bu]=\begin{bmatrix}E_1\\0\end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix}A_1\\\hat{A}_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_1\\\hat{B}_1\end{bmatrix}u$ mamy $\hat{A}_1x+\hat{B}_1u=$ $=[-1\ 0\ 1]x\ +[-3]u=0$, z której dla $t=0$ otrzymujemy $x_{30}-x_{10}-3=0$.
Zależność ta określa zbiór dopuszczalnych warunków początkowych X_0.
Zauważmy, że warunki początkowe (36) należą do zbioru X_0.
Korzystając z (18), wyznaczamy

$$B_0=L_0B=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad B_1=L_1B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$$

Poszukiwane równoważne równanie (31) ma więc postać

$$\dot{x}=\overline{A}x+B_0u+B_1\dot{u}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}e^{-t}$$

a jego rozwiązanie dla dopuszczalnych warunków początkowych (36) przyjmie postać

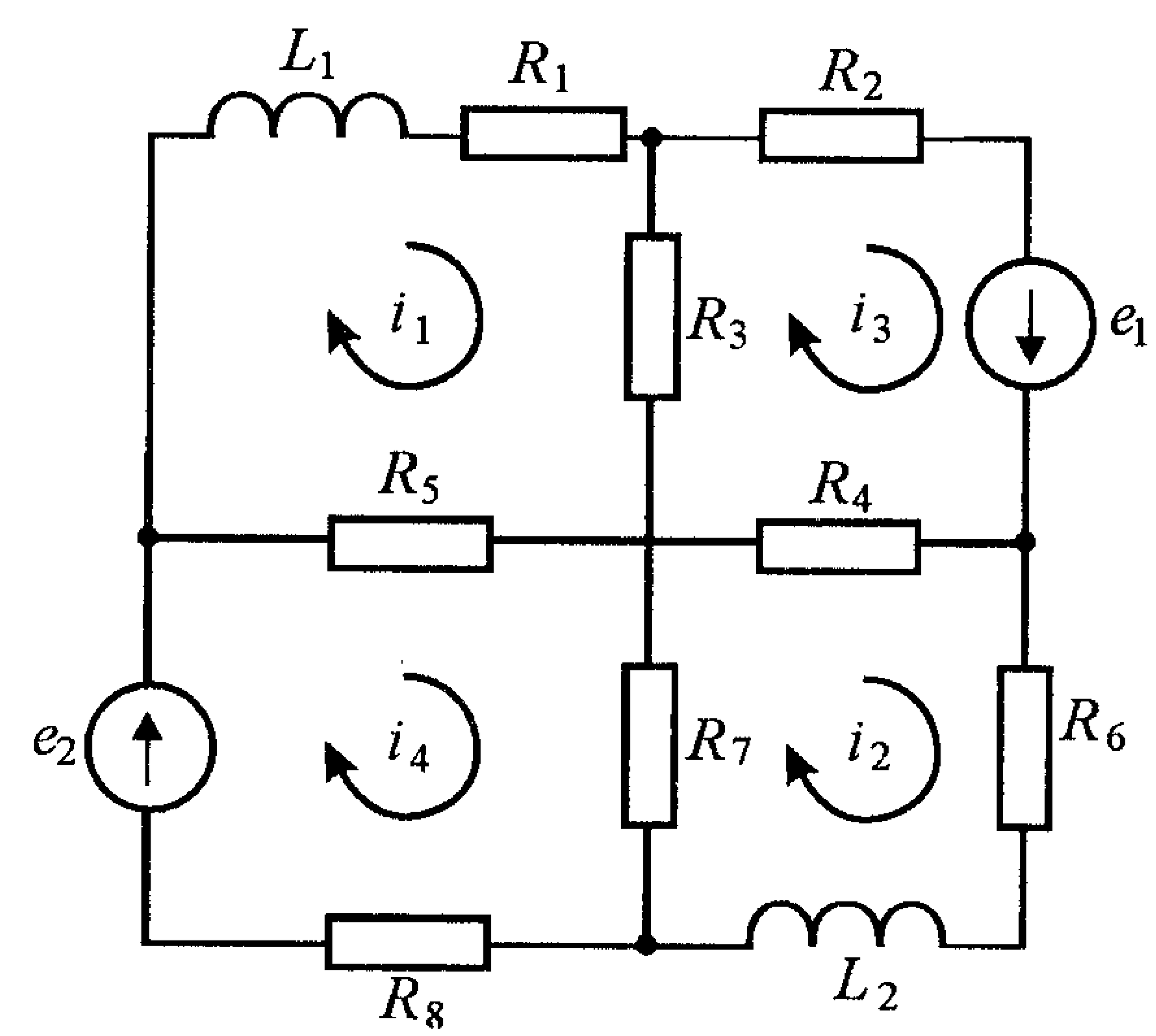
$$x(t)=e^{\overline{A}t}x_0+\int_0^t e^{\overline{A}(t-\tau)}\left(B_0u(\tau)+B_1\dot{u}(\tau)\right)d\tau=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}e^{-t}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie to spełnia również równanie (35).

5.4. Obwody elektryczne jako przykłady układów singularnych

5.4.1. Obwody typu RL

Wykażemy, że obwody elektryczne złożone z rezystancji i indukcyjności (typu R,L) lub rezystancji i pojemności (typu R,C) oraz idealnych źródeł napięcia są przykładami singularnych układów ciągłych.



Rys. 5:4.1. Schemat obwodu typu RL

Niech dla obwodu przedstawionego na rysunku 1 dane będą: rezystancja R_k dla $k=1,\dots,8$, indukcyjność cewek L_1, L_2 oraz napięcie źródłowe e_1 i e_2. Oznaczmy przez i_1, i_2, i_3, i_4 prądy oczkowe. Korzystając z metody oczkowej możemy napisać równania

$$
\begin{aligned}
&L_1 \frac{di_1}{dt} = -(R_1 + R_3 + R_5)i_1 + R_3 i_3 + R_5 i_4 \\
&L_2 \frac{di_2}{dt} = -(R_4 + R_6 + R_7)i_2 + R_4 i_3 + R_7 i_4 \\
&0 = R_3 i_1 + R_4 i_2 - (R_2 + R_3 + R_4)i_3 + e_1 \\
&0 = R_5 i_1 + R_7 i_2 - (R_5 + R_7 + R_8)i_4 + e_2
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Przyjmując za zmienne stanu prądy oczkowe $x_1 = i_1$, $x_2 = i_2$, $x_3 = i_3$, $x_4 = i_4$ możemy równania (1) zapisać w postaci

$$
E\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.2}
$$

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
x = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}, \quad
A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & -R_{44} \end{bmatrix},
$$

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{11} = R_1 + R_3 + R_5, \quad R_{13} = R_{31} = R_3, \quad R_{14} = R_1 = R_{41} = R_5 \\
&R_{22} = R_4 + R_6 + R_7, \quad R_{23} = R_{32} = R_4, \quad R_{24} = R_{42} = R_7 \\
&R_{33} = R_2 + R_3 + R_4, \quad R_{44} = R_5 + R_7 + R_8
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że wszystkie elementy macierzy A, leżące poza główną przekątną są nieujemne. Macierz jest więc macierzą Metzlera.
Niech wielkościami wyjściowymi rozpatrywanego obwodu będą: napięcia na cewce o indukcyjności L_1, $y_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}$ oraz napięcie na oporniku o rezystancji R_6, $y_2 = R_6 i_2$. Równanie wyjścia w tym wypadku ma więc postać

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 i_3 + R_5 i_4 - R_4 i_1 \\ R_6 i_2 \end{bmatrix} = Cx + Du \tag{4.4}
$$

przy czym

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 i_3 + R_5 i_4 - R_4 i_1 \\ R_6 i_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -R_4 & 0 & R_3 & R_5 \\ 0 & R_6 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Obwód ten jest więc przykładem singularnego układu ciągłego.
W przypadku ogólnym weźmy pod uwagę obwód n oczkowy o danych rezystancjach i indukcyjnościach $L_1, L_2, \dots, L_r$ oraz m napięć źródłowych $e_1, e_2, \dots, e_n$. Niech $i_1, i_2, \dots, i_n$ będą prądami oczkowymi tego obwodu. Korzystając z metody oczkowej analogicznie do obwodu z rysunku 1, otrzymamy równanie (2), przy czym

$$
\begin{aligned}
&x = [i_1 \ \ i_2 \ \ \dots \ \ i_n]^T, \quad u = [e_1 \ \ e_2 \ \ \dots \ \ e_m]^T \\
&E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}_+^{n \times m}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}_+^{n \times m}, \quad B \in \mathbf{R}_+^{n \times m}
\end{aligned}
$$

I_r – macierz jednostkowa stopnia r.

$$
A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & \frac{R_{12}}{L_1} & \cdots & \frac{R_{1r}}{L_1} \\ \frac{R_{21}}{L_2} & -\frac{R_{22}}{L_2} & \cdots & \frac{R_{2r}}{L_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_{r1}}{L_r} & \frac{R_{r2}}{L_r} & \cdots & -\frac{R_{rr}}{L_r} \end{bmatrix}, \quad
A_2 = \begin{bmatrix} \frac{R_{1,r+1}}{L_1} & \cdots & \frac{R_{1n}}{L_1} \\ \frac{R_{2,r+1}}{L_2} & \cdots & \frac{R_{2n}}{L_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_{3,r+1}}{L_r} & \cdots & \frac{R_m}{L_r} \end{bmatrix} \tag{4.5}
$$

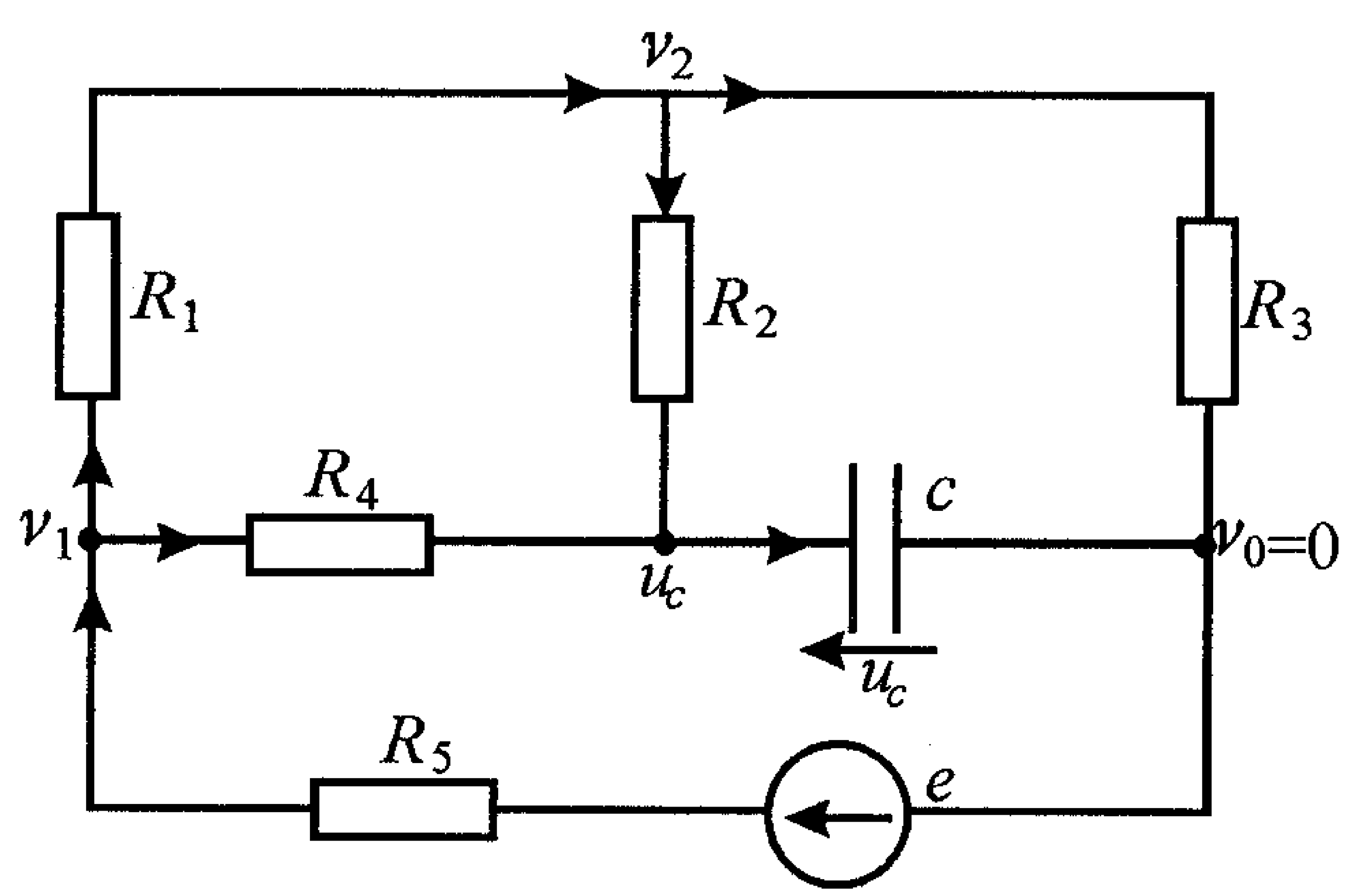
$$
A_3 = \begin{bmatrix} R_{r+1,1} & \cdots & R_{r+1,1r} \\ R_{r+2,1} & \cdots & R_{r+2,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r+1,n} & \cdots & R_{nr} \end{bmatrix}, \quad
A_4 = \begin{bmatrix} -R_{r+1,r+1} & R_{r+1,r+2} & \cdots & R_{r+1,n} \\ R_{r+2,r+1} & -R_{r+2,r+2} & \cdots & R_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n,r+1} & R_{n,r+2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
R_{ij} = R_{ji} \begin{cases} > 0 & \text{dla } i = j \\ \geq 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1, \dots, n
$$

5.4.2. Obwody typu RC

Weźmy pod uwagę obwód o schemacie przedstawionym na rysunku 2 o danych rezystancjach R_k dla $k = 1, \dots, 5$, pojemności kondensatora C i napięciu źródłowym e.
Korzystając z pierwszego prawa Kirchoffa dla tego obwodu możemy napisać równania

$$
(4.6) \qquad
\begin{aligned}
C\frac{du_c}{dt} &= -G_4(v_1 - u_C) + G_2(v_1 - u_C)\\
G_5\frac{di_2}{dt} &= (e - v_1) = G_1(v_1 - v_2) + G_4(v_1 - u_C)\\
G_1(v_1 - v_2) &= G_2(v_2 - u_C) + G_3 v_2
\end{aligned}
$$



Rys. 5.4.2. Schemat obwodu typu RC

przy czym v_1 i v_2 są potencjałem węzłów, u_C napięciem na kondensatorze i $G_k = \dfrac{1}{R_k}$ dla $k = 1, \dots, 5$.
Przyjmując za zmienne stanu $x_1 = u_C$, $x_2 = v_1$, $x_3 = v_2$, możemy równania (6) napisać w postaci (2), przy czym

$$
(4.7)\; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad x = \begin{bmatrix} u_C\\ v_1\\ v_2 \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} -\dfrac{G_{11}}{C} & \dfrac{G_{12}}{C} & \dfrac{G_{13}}{C}\\ G_{21} & -G_{22} & G_{23}\\ G_{31} & G_{32} & -G_{33} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0\\ G_5\\ 0 \end{bmatrix},\quad u = e
$$

Niech wielkościami wyjściowymi tego obwodu będą prąd i_3 w oporniku o rezystancji R_3, $y_1 = i_3$ oraz napięcie na kondensatorze u_C. Równanie wyjścia w tym wypadku ma również postać (4), przy czym $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G_3\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a D jest macierzą zerową.

Zauważmy, że również w tym wypadku macierz A jest macierzą Metzlera, a $\det E = 0$. Obwód ten jest więc przykładem singularnego układu ciągłego.

W przypadku ogólnym rozważania dla obwodu typu RC są dualne do podanych wyżej rozwiązań dla obwodu typu RL.

Twierdzenie 5.4.1. Macierz odwrotna R_n^{-1} macierzy rezystancji

$$
(4.8a) \qquad R_n = \begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1n}\\ -R_{21} & R_{22} & \dots & -R_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -R_{n1} & -R_{n2} & \dots & -R_{nn} \end{bmatrix}
$$

w metodzie oczkowej jest macierz o elementach nieujemnych , przy czym

$$
(4.8b) \qquad R_{ij} = R_{ji} \begin{cases} > 0 & \text{dla} \quad i = j\\ \geq 0 & \text{dla} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{oraz} \quad R_{ij} \geq \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} R_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n
$$

Dowód. Przeprowadzimy metodą indukcji względem n. Dla $n = 1$ teza jest prawdziwa, gdyż $R_1 = R_{11} > 0$ oraz $R_1^{-1} = R_{11}^{-1} > 0$. Zakładając prawdziwość tezy dla k, wykażemy jej prawdziwość dla $k+1$.
Niech

$$
(4.9) \qquad R_{k+1} = \begin{bmatrix} R_k & u_k\\ v_k & R_{k+1,k+1} \end{bmatrix}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
v_k &= [-R_{k+1,1} \quad -R_{k+1,2} \quad \dots \quad -R_{k+1,k}]\\
u_k &= [-R_{1,k+1} \quad -R_{2,k+1} \quad \dots \quad -R_{k,k+1}]
\end{aligned}
$$

Macierz odwrotna R_{k+1}^{-1} macierzy ma postać

$$R_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} R_k^{-1} + \dfrac{R_k^{-1} u_k v_k R_k^{-1}}{\overline{R}_k} & -\dfrac{R_k^{-1} u_k}{\overline{R}_k} \\ -\dfrac{v_k R_k^{-1}}{\overline{R}_k} & \dfrac{1}{\overline{R}_k} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\overline{R}_k = R_{k+1,k+1} - v_k R_k^{-1} u_k$$

Z założenia $R_k^{-1} \in \mathbf{R}_+^{k \times k}$. Wobec tego $R_{k+1}^{-1} \in \mathbf{R}_+^{(k+1)\times(k+1)}$, gdy $\overline{R}_k > 0$. Wiadomo, że R_{k+1} jest dodatnio określona i $\det R_{k+1} > 0$. Z (9) mamy

$$\det R_{k+1} = \det \begin{bmatrix} R_k & u_k \\ v_k & R_{k+1,k+1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} R_k & u_k \\ v_k & R_{k+1,k+1} - v_k R_k^{-1} u_k \end{bmatrix}$$

$$= \det R_k \det\left(R_{k+1,k+1} - v_k R_k^{-1} u_k\right) = \overline{R}_k \det R_k$$

Z ostatniej zależności wynika, że $\det R_{k+1} > 0$ i $\det R_k > 0$ implikuje $\overline{R}_k > 0$.

■

Twierdzenie 5.4.2. Macierz $-A$ określona zależnościami (5) ma macierz odwrotną $(-A)^{-1}$ o nieujemnych elementach $(-A)^{-1} \in \mathbf{R}_+^{n \times n}$

Dowód. Zauważmy, że macierz $-A$ możemy zapisać w postaci

(4.10) $$-A = LR_n$$

przy czym

(4.11) $$L = \operatorname{diag}\left[L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n \quad 1 \quad \dots \quad 1\right] \in \mathbf{R}_+^{n \times n}$$

Biorąc pod uwagę, że $(-A)^{-1} = R_n^{-1} L^{-1}$, stwierdzamy, że $(-A)^{-1}$ jest iloczynem dwóch macierzy o elementach nieujemnych, gdyż

$$L^{-1} = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{L_1} \quad \frac{1}{L_2} \quad \dots \quad \frac{1}{L_r} \quad 1 \quad \dots \quad 1\right] \in \mathbf{R}_+^{n \times n}$$

Tak więc $(-A)^{-1} \in \mathbf{R}_+^{n \times n}$.

■

Obwody elektryczne złożone z rezystancji, indukcyjności, pojemności i źródeł napięcia są przykładem singularnych układów ciągłych tylko przy specjalnie dobranych wartościach tych rezystancji, indukcyjności i pojemności.

5.5. Dekompozycja Kalmana układów liniowych

5.5.1. Podstawowe twierdzenia i procedura dekompozycji układu

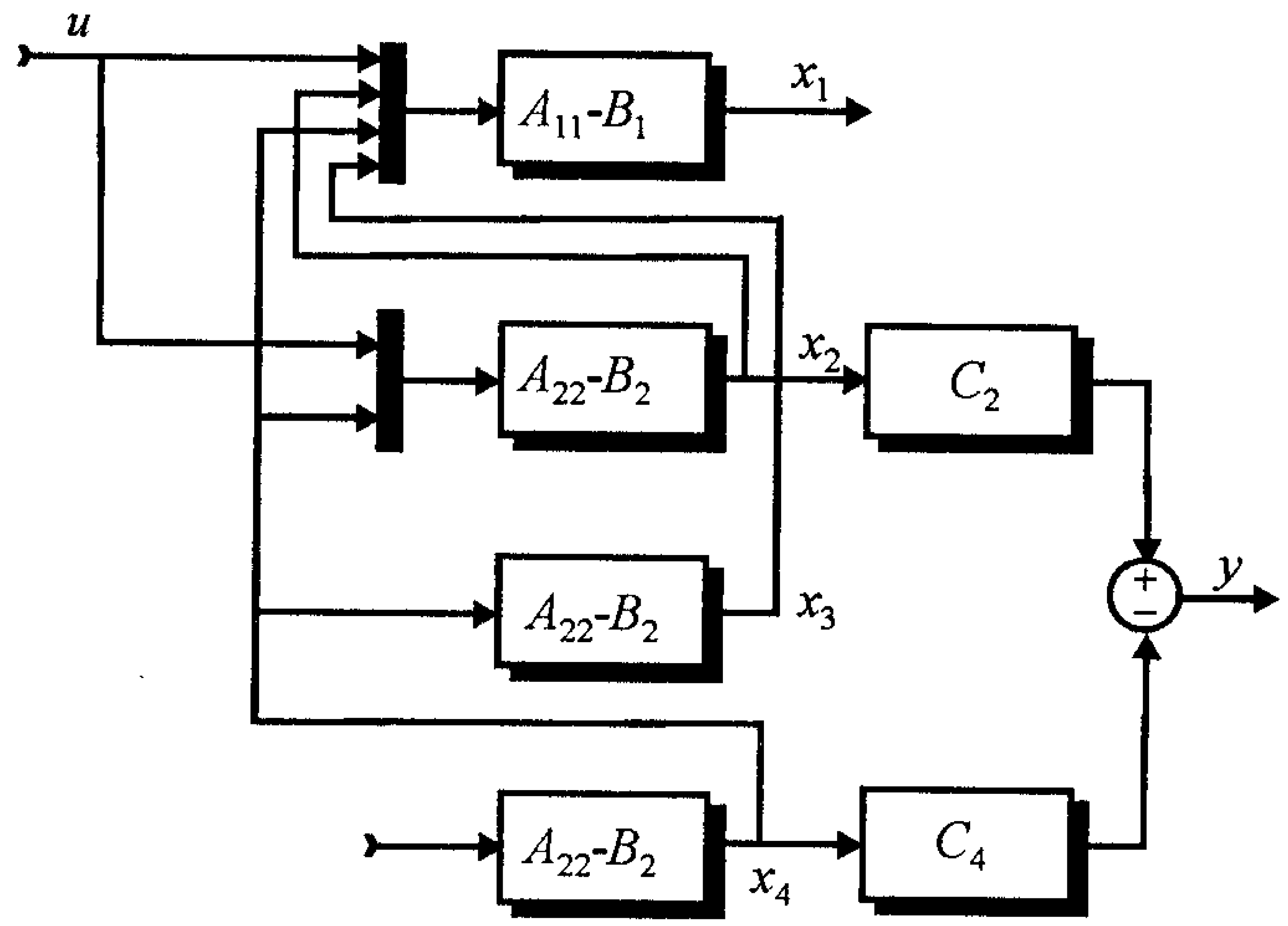
Weźmy pod uwagę układ liniowy ciągły lub dyskretny o nieosiągalnej parze (A,B) i nieobserwowalnej parze (A,C). Układ ten możemy dekomponować na następujące cztery rozłączne części

1) Osiągalną i nieobserwowalną
2) Osiągalną i obserwowalną
3) Nieosiągalną i nieobserwowalną
4) Nieosiągalną i obserwowalną

Twierdzenie 5.5.1. Dla układu liniowego nieosiągalnego i nieobserwowalnego istnieje macierz nieosobliwa P taka, że

(5.1)
$$\overline{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

przy czym $(A_{11}, B_1, 0)$ przedstawia część osiągalną i nieobserwowalną, (A_{22}, B_2, C_2) – część osiągalną i obserwowalną, $(A_{33}, 0, 0)$ – część nieosiągalna i nieobserwowalną, $(A_{44}, 0, C_4)$ – część nieosiągalną i obserwowalną.



Rys 5.5.1. Dekompozycja Kalmana układu

Dowód tego twierdzenia wynika z możliwości dekompozycji układu niesterowalnego na część sterowalną i niesterowalną oraz układu nieobserwowalnego na części obserwowalną i nieobserwowalną. Niżej zostanie podany inny dowód, oparty na geometrycznym podejściu, z którego wynika natychmiast praktyczna procedura dekompozycji układu.

Procedura 5.5.1.

Krok 1. Obliczamy macierz osiągalności i obserwowalności

(5.2)
$$R=[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Krok 2. Wyznaczamy podprzestrzenie liniowe

- Osiągalności
  $X_S = \operatorname{Im} R$

- Nieosiągalności
  $X_{\bar{S}} = \operatorname{Ker}(R^T)$

(5.3)

- Obserwowalności
  $X_O = \operatorname{Im}(O^T)$

- Nieobserwowalności
  $X_{\bar{O}} = \operatorname{Ker}(O)$

Krok 3. Wyznaczamy podprzestrzenie (jako przekroje i sumy podprzestrzeni (3))

(5.4)
$$\begin{aligned} X_1 &= X_S \cap X_{\bar{O}} \\ X_2 &= X_S \cap (X_{\bar{S}} + X_O) \\ X_3 &= X_{\bar{O}} \cap (X_{\bar{S}} + X_O) \\ X_4 &= X_{\bar{S}} \cap X_O \end{aligned}$$

Krok 4. Z wektorów bazowych podprzestrzeni (4) tworzymy macierz P^{-1}.

Krok 5. Korzystając z zależności (1), wyznaczamy macierze $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

Przykład 5.5.1. Dokonać dekompozycji układu liniowego o macierzach

(5.5)
$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=[1 \quad -2 \quad 0 \quad -1], \quad D=[0 \quad 0]$$

Korzystając z procedury 1, wyznaczamy kolejno:

Krok 1. Macierz osiągalności R i obserwowalności O

$$R=[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Wyznaczamy kolejno

- Podprzestrzeń osiągalności

$$X_S = \operatorname{Im} R = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Podprzestrzeń obserwowalności

$$X_O = \operatorname{Im} O^T = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Podprzestrzeń nieosiągalności

$$X_{\bar{S}} = \operatorname{Ker} R^T = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Podprzestrzeń nieobserwowalności

$$X_{\bar{O}} = \operatorname{Ker} O = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (4), otrzymamy

$$X_1 = X_S \cap X_{\bar{O}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = X_S \cap \left(X_{\bar{S}} + X_O\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = X_{\bar{O}} \cap \left(X_{\bar{S}} + X_O\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = X_{\bar{S}} \cap X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Korzystając z wektorów bazowych podprzestrzeni wyznaczamy

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Krok 5. Korzystając z zależności (1) wyznaczamy poszukiwane macierze w postaci kanonicznej

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.5.2. Wnioski i twierdzenie wynikające z dekompozycji układu

Z rysunku 1 wynikają natychmiast następujące ważne wnioski

1. Wymuszenie u oddziałuje bezpośrednio tylko na dwie części układu, na część osiągalną i nieobserwowalną oraz część osiągalną i obserwowalną. Jeżeli więc pozostałe dwie części układu w chwili początkowej mają zerowe warunki początkowe ($x_3(0) = 0$, $x_4(0) = 0$), to ich zmienne stanu są równe zeru dla wszystkich chwil $t > 0$.
2. Wejście układu jest połączone z wyjściem tylko poprzez część osiągalną i obserwowalną.
3. Na wyjście układu wpływa pośrednio również dynamika części nieosiągalnej i nieobserwowalnej.
4. Na wyjście układu wpływa również dynamika części nieosiągalnej i obserwowalnej.
5. Na dynamikę części osiągalnej i nieobserwowalnej mają wpływ dynamiki pozostałych trzech części układu, ale dynamika tej pierwszej części nie wpływa na dynamikę pozostałych trzech części układu.
6. Znając wymuszenie u i odpowiedź y układu nie jesteśmy w stanie wyznaczyć warunków początkowych części osiągalnej i nieobserwowalnej oraz części nieosiągalnej i nieobserwowalnej, gdyż odpowiedź y nie zależy bezpośrednio od dynamiki tych części układu.

7. Z trójkątnej postaci macierzy $\overline{A}$ wynika, że wielomian charakterystyczny tej macierzy (ale również i macierzy A) jest iloczynem wielomianów charakterystycznych macierzy A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, tzn.

$$\det[I_n\lambda - A] = \det[I_n\lambda - P^{-1}\overline{A}P] = \det\{P^{-1}[I_n\lambda - \overline{A}]P\} = \det[I_n\lambda - \overline{A}] =$$
$$= \det[I_{n1}\lambda - A_{11}]\det[I_{n2}\lambda - A_{22}]\det[I_{n3}\lambda - A_{33}]\det[I_{n4}\lambda - A_{44}]$$

Uwaga 5.5.1. Dla układu ciągłego $\lambda = s$, a dla układu dyskretnego $\lambda = z$.

Twierdzenie 5.5.2. Macierz transmitancji układu liniowego o macierzach *A, B, C* i *D* jest równa macierzy transmitancji tylko części osiągalnej i obserwowalnej tego układu, tzn.

(5.6) $$T(\lambda) = C[I_n\lambda - A]^{-1}B + D = C_2[I_{n2}\lambda - A_{22}]^{-1}B_2 + D$$

Dowód. Korzystając z (1) możemy napisać

$$T(\lambda) = C[I_n\lambda - A]^{-1}B + D = \overline{C}P[I_n\lambda - A]^{-1}P^{-1}\overline{B} + D =$$
$$= \overline{C}P[P^{-1}(I_n\lambda - A)P]^{-1}P^{-1}\overline{B} + D = \overline{C}[I_n\lambda - A]^{-1}\overline{B} + D =$$
$$= [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4]\begin{bmatrix} I_{n1}\lambda - A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & I_{n2}\lambda - A_{22} & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & I_{n3}\lambda - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & I_{n4}\lambda - A_{44} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$
$$= [0 \quad C_2 \quad 0 \quad C_4]\begin{bmatrix} [I_{n1}\lambda - A_{11}]^{-1} & * & * & * \\ 0 & [I_{n2}\lambda - A_{22}]^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & [I_{n3}\lambda - A_{33}]^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & [I_{n4}\lambda - A_{44}]^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D$$
$$= C_2[I_{n2}\lambda - A_{22}]^{-1}B_2 + D$$

przy czym * oznacza macierze nieistotne w tych rozważaniach

■

Twierdzenie 5.5.3. Stosując sprzężenie zwrotne od stanu

(5.7) $$u = K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3 + K_4x_4$$

można zmienić dowolne wartości własne tylko macierzy A_{11} i A_{22}, a stosując sprzężenie zwrotne od wyjścia

(5.8) $$u = Fy$$

można zmieniać dowolnie wartości własne tylko macierzy A_{22}.

Dowód. Podstawiając (7) do równania $\dot{\overline{x}} = P\dot{x} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u$, otrzymamy

(5.9) $$\dot{\overline{x}} = \overline{A}_z\overline{x}$$

przy czym

(5.10) $$\overline{A}_z = \overline{A} + \overline{B}[K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4] =$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 & A_{13} + B_1K_3 & A_{14} + B_1K_4 \\ B_2K_1 & A_{22} + B_2K_2 & B_2K_3 & A_{24} + B_2K_4 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

Z postaci macierzy (10) wynika, że poprzez odpowiedni dobór macierzy K_1 i K_2 można zmienić wartości własne jedynie macierzy A_{11} i A_{22}. Podstawiając z kolei $y = \overline{C}\overline{x} = C_2x_2 + C_4x_4$ do (8), a wynik do równania $\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u$, otrzymamy $\dot{\overline{x}} = \hat{A}_z\overline{x}$, przy czym

(5.11) $$\hat{A}_z = \overline{A} + \overline{B}F\overline{C} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} + B_1FC_2 & A_{13} & A_{14} + B_1FC_4 \\ 0 & A_{22} + B_2FC_2 & 0 & A_{24} + B_2FC_4 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

Z postaci macierzy (11) wynika, że poprzez odpowiedni dobór macierzy F można zmienić wartości własne jedynie macierzy A_{22} części osiągalnej i obserwowalnej.

■

Jak wiadomo, układ liniowy jest stabilny zewnętrznie (OWOW), jeżeli składowa wymuszona odpowiedzi jest ograniczona dla każdego ograniczonego wymuszenia.

Twierdzenie 5.5.4. Układ liniowy jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jego część osiągalna i obserwowalna jest stabilna asymptotycznie.

Dowód. Dowód przeprowadzimy tylko dla układu ciągłego, gdyż dla układu dyskretnego jest analogiczny. Składowa wymuszona odpowiedzi y na wymuszenie u jest określona wzorem

(5.12)
$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Ze wzoru tego wynika, że składowa ta będzie ograniczona na każde ograniczone wymuszenie wtedy i tylko wtedy, gdy $h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau$ jest ograniczona dla każdego t, gdyż

$$|y(t)|\leq\left|\int_0^t g(\tau)d\tau\right||u(t)|=|h(t)||u(t)|$$

Charakterystyka skokowa $h(t)$ jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka impulsowa $g(t)$ zanika do 0 dla $t\to\infty$. Zachodzi to wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie bieguny macierzy transmitancji operatorowej części osiągalnej i obserwowalnej leżą w lewej półpłaszczyźnie. Bieguny tej macierzy transmitancji pokrywają się z wartościami własnymi macierzy A_{22}, gdyż nie ma uproszczeń zer i biegunów (ta część układu jest osiągalna i obserwowalna).

■

Twierdzenie 5.5.5. Układ liniowy jest stabilizowany (wykrywalny) wtedy i tylko wtedy, gdy część nieosiągalna i nieobserwowalna oraz część nieosiągalna i obserwowalna (część osiągalna i nieobserwowalna oraz część nieosiągalna i nieobserwowalna) są stabilne asymptotycznie.

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że za pomocą sprzężenia zwrotnego od stanu możemy zmienić wartości własne tylko części osiągalnej i nieobserowalnej oraz części osiągalnej i obserwowalnej. Obie te części są osiągalne, można więc poprzez dobór macierzy sprzężeń zwrotnych przesunąć dowolne wartości własne macierzy A_{11} i A_{22}. Tak więc układ jest stabilizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy pozostałe dwie części układu są stabilne asymptotycznie. Dowód drugiej części twierdzenia jest dualny.

■

5.6. Dekompozycja układów singularnych

5.6.1. Dekompozycja Weierstrassa-Kroneckera

Pokażemy, że dekompozycję Kalmana układów standardowych można uogólnić na układy singularne.
Weźmy pod uwagę singularny układ ciągły o postaci

(6.1a)
$$E\dot{x}=Ax+Bu$$

(61b)
$$y=Cx$$

przy czym $x\in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u\in \boldsymbol{R}^m$ i $y\in \boldsymbol{R}^p$ są odpowiednio wektorami wymuszeń i odpowiedzi, a $E,A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $C\in \boldsymbol{R}^{p\times m}$. Zakładamy, że $\det E=0$ oraz pęk (E,A) jest regularny, tzn.

(6.2)
$$\det[Es-A]\neq 0 \text{ dla pewnych } s\in \boldsymbol{C}$$

Jak wiadomo, istnieją macierze nieosobliwe $P,Q\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ takie, że układ (1) można rozłożyć na następujące dwa podukłady:

- podukład standardowy (wolny)

(6.3a)
$$\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u$$

(6.3b)
$$y_1=C_1y_1$$

- podukład ściśle singularny (szybki)

(6.4a)
$$N\dot{x}_2=x_2+B_2u$$

(6.4b)
$$y_2=C_2y_2$$

przy czym

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}x, \quad x_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1}, x_2 \in \boldsymbol{R}^{n_2}, \quad PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

(6.5) $$N \in \boldsymbol{R}^{n_2 \times n_2}, PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad A_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1 \times n_1}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1 \times m}, B_2 \in \boldsymbol{R}^{n_2 \times m}, \quad CQ = [C_1 \quad C_2], \quad C_1 \in \boldsymbol{R}^{p \times n_1}, C_2 \in \boldsymbol{R}^{p \times n_2}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$n_1 = \mathrm{st}\det[Es - A]$, $n_2 = n - n_1$, N jest macierzą nilpotentną z indeksem nilpotentności μ, tzn. $N^{\mu-1} \neq 0$ i $N^{\mu} = 0$.

5.6.2. Podstawowe twierdzenia

Weźmy pod uwagę układ singularny (1) spełniający warunek regularności (2). Układ ten rozkładamy na dwa podukłady: standardowy (3) i ściśle singularny (4). Zgodnie z twierdzeniem 5.1. podukład standardowy (3) możemy dekomponować na cztery rozłączne części

(6.6) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_1 = [0 \quad C_{12} \quad 0 \quad C_{14}] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{bmatrix}$$

przy czym

(6.7)

$$P_1 A_1 P_1^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad P_1 B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 P_1^{-1} = [0 \quad C_{12} \quad 0 \quad C_{14}]$$

$x_{1i} \in \boldsymbol{R}^{n_{1i}}$, $i = 1,2,3,4$, $\sum_{i=1}^{4} n_{1i} = n_1$, P_1 jest macierzą nieosobliwą ($\det P_1 \neq 0$) przekształcenia. Traktując macierze N, B_2, C_2 jako macierze układu regularnego ($\det[I_{n_2}s - N] \neq 0$), rozkładamy układ również zgodnie z twierdzeniem 5.1 na cztery rozłączne części

(6.8)

$$P_2 N P_2^{-1} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix}, \quad P_2 B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 P_2^{-1} = [0 \quad C_{22} \quad 0 \quad C_{24}]$$

$N_{ij} \in \boldsymbol{R}^{n_{2i} \times n_{2j}}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, $B_{2i} \in \boldsymbol{R}^{n_{2i} \times m}$, $i = 1, 2$, $C_{2j} \in \boldsymbol{R}^{p \times n_{2j}}$, $j = 2, 4$, $\sum_{i=1}^{4} n_{2i} = n_2$, P_2 jest macierzą nieosobliwą ($\det P_2 \neq 0$) przekształcenia, N_{ii} ($i = 1,2,3,4$) są macierzami nilpotentnymi. Korzystając z (8) możemy równania podukładu ściśle singularnego (4) napisać w postaci

(6.9)

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ 0 & N_{22} & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & N_{33} & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \\ \dot{x}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y_2 = [0 \quad C_{22} \quad 0 \quad C_{24}] \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix}$$

Definiując $\overline{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n_{1i} \times n_{2i}}$ oraz

(6.10)

$$\overline{E}_{ii} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N_{ii} \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_{ii} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_{1i} \\ B_{2i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

$$\overline{E}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{ii} \end{bmatrix}, \quad \overline{A}_{ii} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4 \, (i \neq j), \quad \overline{C}_j = [C_{1j} \quad C_{2j}], \; j = 2, 4$$

możemy łącznie równania (6) i (9) napisać w postaci

$$
\begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} & \overline{E}_{13} & \overline{E}_{14} \\ 0 & \overline{E}_{22} & 0 & \overline{E}_{24} \\ 0 & 0 & \overline{E}_{33} & \overline{E}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{E}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\overline{x}}_1 \\ \dot{\overline{x}}_2 \\ \dot{\overline{x}}_3 \\ \dot{\overline{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \overline{A}_{13} & \overline{A}_{14} \\ 0 & \overline{A}_{22} & 0 & \overline{A}_{24} \\ 0 & 0 & \overline{A}_{33} & \overline{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

(6.11)

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & \overline{C}_2 & 0 & \overline{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{bmatrix}
$$

Twierdzenie 5.6.1. Dla układu liniowego singularnego niesterowalnego i nieobserwowalnego (1) istnieją macierze nieosobliwe równoważności silnej, które przekształcają układ ten do postaci (11) przy czym

- podukład singularny $\left(\overline{E}_{11}, \overline{A}_{11}, \overline{B}_1, 0\right)$ jest sterowalny i nieobserwowalny
- podukład singularny $\left(\overline{E}_{22}, \overline{A}_{22}, \overline{B}_2, \overline{C}_2\right)$ jest sterowalny i obserwowalny
- podukład singularny $\left(\overline{E}_{33}, \overline{A}_{33}, 0, 0\right)$ jest niesterowalny i nieobserwowalny
- podukład singularny $\left(\overline{E}_{44}, \overline{A}_{44}, 0, \overline{C}_4\right)$ jest niesterowalny i obserwowalny

Dowód. Macierze równoważności silnej, które przekształcają układ (1) do postaci (11) są iloczynami macierzy równoważności silnej P, Q dekompozycji Weierstrassa-Kroneckera, które dekomponują ten układ na podukłady (3) i (4), macierzy podobieństwa $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$, która przekształca podukłady te do postaci odpowiednio (6) i (9) oraz macierzy zamiany zmiennych definiujących podwektory $\overline{x}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Korzystając z warunków sterowalności dla podukładu $\left(\overline{E}_{11}, \overline{A}_{11}, \overline{B}_1, 0\right)$ otrzymamy

$$
\text{rząd}\left[\overline{E}_{11}s - \overline{A}_{11}, \overline{B}_1\right] = \text{rząd}\begin{bmatrix} Is - A_{11} & 0 & B_{11} \\ 0 & N_{11}s - I & B_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21}
$$

gdyż rząd $[Is - A_{11}, B_{11}] = n_1$, a macierz N_{11} jest nilpotentna i macierz $[N_{11}s - I]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \boldsymbol{C}$. Pierwszy warunek jest więc spełniony. Sprawdzamy z kolei drugi warunek, który jest również spełniony, gdyż

$$
\text{rząd}\left[Is - N_{11}, B_{21}\right]_{s=0} = \text{rząd}\left[N_{11} \quad B_{21}\right] = n_{21}
$$

oraz

$$
\text{rząd}\left[E_{11}, B_1\right] = \begin{bmatrix} I & 0 & B_{11} \\ 0 & N_{11} & B_{21} \end{bmatrix} = n_{11} + n_{21}
$$

Podukład $\left(\overline{E}_{11}, \overline{A}_{11}, \overline{B}_1, 0\right)$ jest więc sterowalny. Nieobserwowalność tego podukładu wynika z faktu, że jego macierz $C = 0$. Wykażemy, że podukład $\left(\overline{E}_{22}, \overline{A}_{22}, \overline{B}_2, \overline{C}_2\right)$ jest sterowalny i obserwowalny. Korzystając z warunku sterowalności otrzymamy

$$
\text{rząd}\left[\overline{E}_{22}s - \overline{A}_{22}, \overline{B}_2\right] = \text{rząd}\begin{bmatrix} Is - A_{22} & 0 & B_{12} \\ 0 & N_{22}s - I & B_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}
$$

gdyż rząd $[Is - A_{22}, B_{22}] = n_{12}$ a macierz N_{22} jest nilpotentna i macierz $[N_{22}s - I]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \boldsymbol{C}$. Podobnie

$$
\text{rząd}\left[\overline{E}_{22}, \overline{B}_2\right] = \begin{bmatrix} I & 0 & B_{12} \\ 0 & N_{22} & B_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}
$$

gdyż

$$
\text{rząd}\left[Is - N_{22}, B_{22}\right]_{s=0} = \text{rząd}\left[N_{22} \quad B_{22}\right] = n_{22}
$$

Warunki te są więc spełnione i podukład ten jest sterowalny. Aby wykazać, że podukład ten jest również obserwowalny korzystamy z warunków obserwowalności dla (10). Otrzymamy wówczas

$$
\text{rząd}\begin{bmatrix} \overline{E}_{22}s - \overline{A}_{22} \\ \overline{C}_2 \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} Is - A_{22} & 0 \\ 0 & N_{22}s - I \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} = n_{12} + n_{22}
$$

gdyż

$$
\text{rząd}\begin{bmatrix} Is - \overline{A}_{22} \\ \overline{C}_{12} \end{bmatrix} = n_{12}
$$

a macierz N_{22} jest nilpotentna i macierz $[N_{22}s - I]$ jest nieosobliwa dla wszystkich skończonych $s \in \boldsymbol{C}$. Podobnie

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}\overline{E}_{22}\\ \overline{C}_2\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & N_{22}\\ C_{12} & C_{22}\end{bmatrix}=n_{12}+n_{22}$$

gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}Is-N_{22}\\ C_{22}\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}N_{22}\\ C_{22}\end{bmatrix}=n_{22}$$

Warunki te są więc spełnione i podukład ten jest również obserwowalny. Niesterowalność i nieobserwowalność podukładu $\left(\overline{E}_{33}, \overline{A}_{33}, 0, 0\right)$ wynika z faktu, że macierze B i C tego podukładu są zerowe. Obserwowalność podukładu $\left(\overline{E}_{44}, \overline{A}_{44}, 0, \overline{C}_4\right)$ dowodzi się analogicznie.

■

Definiując

$$\hat{x}_1=\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix},\quad \hat{x}_2=\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_4\end{bmatrix}$$

oraz

$$\hat{E}_{11}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{11} & \overline{E}_{12}\\ 0 & \overline{E}_{22}\end{bmatrix},\quad \hat{E}_{12}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{13} & \overline{E}_{13}\\ 0 & \overline{E}_{24}\end{bmatrix},\quad \hat{E}_{22}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{33} & \overline{E}_{34}\\ 0 & \overline{E}_{44}\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}_{11}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ 0 & \overline{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \hat{A}_{12}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{13} & \overline{A}_{14}\\ 0 & \overline{A}_{24}\end{bmatrix},\quad \hat{A}_{22}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{33} & \overline{A}_{34}\\ 0 & \overline{A}_{44}\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_1=\begin{bmatrix}\overline{B}_1\\ \overline{B}_2\end{bmatrix},\quad \hat{C}_1=\begin{bmatrix}0 & \overline{C}_2\end{bmatrix},\quad \hat{C}_2=\begin{bmatrix}0 & \overline{C}_4\end{bmatrix}$$

możemy równanie (11) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix}\hat{E}_{11} & \hat{E}_{12}\\ 0 & \hat{E}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ 0\end{bmatrix}u$$

(6.12)

$$y=\begin{bmatrix}\hat{C}_1 & \hat{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

W sposób analogiczny do tego, jaki zastosowano w dowodzie twierdzenia 1 można wykazać, że podukład $\left(\hat{E}_{11}, \hat{E}_{11}, \hat{B}_1\right)$ jest sterowalny. Z tego powodu układ singularny (12) nazywamy układem w postaci kanonicznej sterowalnej. Definiując natomiast

$$\tilde{x}_1=\begin{bmatrix}\overline{x}_4\\ \overline{x}_2\end{bmatrix},\quad \tilde{x}_2=\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\ \overline{x}_1\end{bmatrix}$$

możemy równanie (11) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix}\tilde{E}_{11} & 0\\ \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}_1\\ \dot{\tilde{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{11} & 0\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2\end{bmatrix}u$$

(6.13)

$$y=\begin{bmatrix}\tilde{C}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{bmatrix}$$

gdzie

$$\tilde{E}_{11}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{44} & 0\\ \overline{E}_{24} & \overline{E}_{22}\end{bmatrix},\quad \tilde{E}_{21}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{34} & 0\\ \overline{E}_{14} & \overline{E}_{12}\end{bmatrix},\quad \tilde{E}_{22}=\begin{bmatrix}\overline{E}_{33} & 0\\ \overline{E}_{13} & \overline{E}_{11}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}_{11}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{44} & 0\\ \overline{A}_{24} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_{21}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{34} & 0\\ \overline{A}_{14} & \overline{A}_{12}\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_{22}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{33} & 0\\ \overline{A}_{13} & \overline{A}_{11}\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_1=\begin{bmatrix}0\\ \overline{B}_2\end{bmatrix},\quad \tilde{C}_1=\begin{bmatrix}\overline{C}_2 & \overline{C}_4\end{bmatrix},\quad \tilde{C}_2=\begin{bmatrix}0 & \overline{C}_4\end{bmatrix}$$

Analogicznie do tego jak wyżej można wykazać, że podukład $\left(\tilde{E}_{11}, \tilde{E}_{11}, \tilde{B}_1\right)$ jest obserwowalny. Z tego powodu układ ten nazywamy układem o postaci kanonicznej obserwowalnej.

5.7. Rozkład strukturalny macierzy transmitancji układu singularnego

5.7.1. Nieskracalne macierze transmitancji

Pokażemy, że rozkład strukturalny macierzy transmitancji układu standardowego można uogólnić na przypadek układów singularnych.

Weźmy pod uwagę układ dyskretny opisany równaniami

(7.1a) $$Ex_{i+1}=Ax_i+Bu_i,\quad i\in Z_+=\{0,1,\ldots\}$$

(7.1b) $$y_i = Cx_i + Du_i$$

gdzie $x_i \in \boldsymbol{R}$, $u_i \in \boldsymbol{R}^m$ i $y_i \in \boldsymbol{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi w chwili dyskretnej i, a $E, A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p \times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{p \times m}$.
Zakładamy, że $\det E = 0$ oraz

(7.2) $$\det[Ez - A] \neq 0 \text{ dla pewnych } z \in \boldsymbol{C}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ jest ciałem liczb zespolonych.
Macierz transmitancji układu (1) jest określona wzorem

(7.3) $$T(z) = C[Ez - A]^{-1} B + D$$

Macierz tę można napisać w postaci

(7.4) $$T(z) = \frac{P(z)}{d(z)}$$

gdzie $P(z) \in \boldsymbol{R}^{p \times m}[z]$ ($\boldsymbol{R}^{p \times m}[z]$ jest zbiorem macierzy wielomianowych o wymiarach $p \times m$), a $d(z)$ jest najmniejszym wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $T(z)$.
Macierz transmitancji ma postać standardową wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą nieskracalną (tzn. dla wszystkich miejsc zerowych wielomianu $d(z)$ macierz $P(z)$ nie jest macierzą zerową) i $d(z)$ jest wielomianem monicznym (tzn. o współczynniku równym 1 przy najwyższej potędze zmiennej z).
Zgodnie z definicją 3.1.1 macierz standardową (4) nazywamy normalną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niezerowy minor stopnia drugiego macierzy $P(z)$ dzieli się bez reszty przez wielomian $d(z)$.

Twierdzenie 5.7.1. Macierz

(7.5) $$\frac{C[Ez - A]_{ad} B}{\det[Ez - A]}$$

jest nieskracalna wtedy i tylko wtedy, gdy są jednocześnie spełnione następujące trzy warunki:
1) Para (E, A) jest cykliczna;
2) rząd $[Ez - A, B] = n$ dla wszystkich skończonych $z \in \boldsymbol{C}$

3) rząd $\begin{bmatrix} Ez - A \\ C \end{bmatrix} = n$ dla wszystkich skończonych $z \in \boldsymbol{C}$

Dowód. Jak wiadomo macierz $\dfrac{[Ez - A]_{ad}}{\det[Ez - A]}$ jest normalna i nieskracalna wtedy i tylko wtedy, gdy para (E, A) jest cykliczna. Macierze $Ez - A$ i B są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (2). Względna pierwszość macierzy $Ez - A$ i B jest równoważna istnieniu macierzy wielomianowych $M(z)$ i $N(z)$ takich, że [152]

(7.6) $$[Ez - A]M(z) + BN(z) = I_n$$

Mnożąc lewostronnie równość (6) przez macierz $[Ez - A]^{-1}$ otrzymamy

(7.7) $$M(z) + \frac{[Ez - A]_{ad} B}{\det[Ez - A]} N(z) = [Ez - A]^{-1}$$

Z równości (7) wynika natychmiast, że macierz $\dfrac{[Ez - A]_{ad} B}{\det[Ez - A]}$ jest nieskracalna.
Dowód, że macierz $\dfrac{C[Ez - A]_{ad} B}{\det[Ez - A]}$ jest nieskracalna jest analogiczny (dualny).

■

5.7.2. Podstawowe twierdzenie i procedura rozkładu

Twierdzenie 5.7.1. Macierz (4) jest macierzą normalną wtedy i tylko wtedy, gdy

(7.8) $$T(z) = \frac{Q(z)R(z)}{d(z)} + G(z)$$

przy czym

$$Q(z) \in \boldsymbol{R}^p[z], \quad R(z) \in \boldsymbol{R}^{1 \times m}[z], \quad G(z) \in \boldsymbol{R}^{p \times m}[z]$$

oraz

(7.9) $$\operatorname{st} Q(z) < \operatorname{st} d(z), \quad \operatorname{st} R(z) < \operatorname{st} d(z)$$

Dowód. Jeżeli $P(z)=Q(z)R(z)+d(z)G(z)$, to obliczając minor stopnia drugiego złożony z wierszy o numerach i,j oraz kolumn o numerach k,l macierzy $P(z)$ otrzymamy

$$(7.10)\qquad P_{k,l}^{i,j}(z)=\begin{vmatrix} q_i(z)r_k(z)+d(z)g_{ik}(z) & q_i(z)r_l(z)+d(z)g_{il}(z) \\ q_j(z)r_k(z)+d(z)g_{jk}(z) & g_j(z)r_l(z)+d(z)g_{jl}(z) \end{vmatrix} = d(z)p_{kl}^{ij}(z)$$

gdzie $q_i(z)$, $r_k(z)$ i $g_{ik}(z)$ są elementami odpowiednio macierzy $Q(z)$, $R(z)$ i $G(z)$, a $p_{kl}^{ij}(z)$ jest wielomianem.

Z zależności (10) wynika, że minor $P_{k,l}^{i,j}(z)$ jest podzielny bez reszty przez $d(z)$. Macierz (8) jest więc macierzą normalną.

Wykażemy z kolei, że jeżeli macierz $T(z)$ jest normalna, to można ją przedstawić w postaci (8).

Stosując działania elementarne na wierszach i kolumnach możemy macierz $P(z)$ sprowadzić do postaci

$$(7.11)\qquad U(z)P(z)V(z)=i(z)\begin{bmatrix} 1 & w(z) \\ k(z) & \overline{P}(z) \end{bmatrix}$$

przy czym $U(z)$ i $V(z)$ są macierzami unimodularnymi działań elementarnych, a $i(z)\in \boldsymbol{R}[z]$ oraz

$$w(z)\in \boldsymbol{R}^{1\times(m-1)}[z],\ k(z)\in \boldsymbol{R}^{p-1}[z],$$
$$\overline{P}(z)\in \boldsymbol{R}^{(p-1)\times(m-1)}[z]$$

Niech

$$(7.12)\qquad Q(z)=U^{-1}(z)i(z)\begin{bmatrix} 1 \\ k(z) \end{bmatrix},\quad R(z)=\begin{bmatrix} 1 & w(z) \end{bmatrix}V^{-1}(z)$$

Z podzielności niezerowych minorów stopnia drugiego macierzy $P(z)$ przez $d(z)$ oraz (11) wynika, że elementy macierzy $i(z)\left[\overline{P}(z)-k(z)w(z)\right]$ są podzielne bez reszty przez $d(z)$, czyli

$$(7.13)\qquad i(z)\left[\overline{P}(z)-k(z)w(z)\right]=d(z)\hat{P}(z)$$

gdzie $\hat{P}(z)\in \boldsymbol{R}^{(p-1)\times(m-1)}[z]$.

Definiując

$$(7.14)\qquad G(z)=U^{-1}(z)\begin{bmatrix} 0 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1} & \hat{P}(z) \end{bmatrix}V^{-1}(z)$$

z zależności (11)–(14) otrzymamy

$$P(z)=U^{-1}(z)i(z)\begin{bmatrix} 1 & w(z) \\ k(z) & \overline{P}(z) \end{bmatrix}V^{-1}(z)=U^{-1}(z)\left\{i(z)\begin{bmatrix} 1 \\ k(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & w(z) \end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix} 0 & 0_{1,m-1} \\ 0_{p-1} & d(z)\hat{P}(z) \end{bmatrix}\right\}V^{-1}(z)=Q(z)R(z)+d(z)G(z)$$

a więc poszukiwany rozkład (8).

Jeżeli warunki (9) nie są spełnione, to dzieląc każdy element $q_i(z)$ $(r_k(z))$ wektora $P(z)$ (odpowiednio $R(z)$) przez $d(z)$ otrzymamy

$$(7.15)\qquad \begin{aligned} Q(z) &= d(z)K_1(z)+\overline{Q}(z), \\ R(z) &= d(z)K_2(z)+\overline{R}(z) \end{aligned}$$

przy czym

$$\operatorname{st}\overline{Q}(z)<\operatorname{st}d(z),\quad \operatorname{st}\overline{R}(z)<\operatorname{st}d(z)$$

a $K_1(z)$ i $K_2(z)$ są odpowiednio wielomianowym wektorem kolumnowym i wierszowym.

Podstawiając (15) do (8) otrzymamy

$$(7.16)\qquad T(z)=\frac{\overline{Q}(z)\overline{R}(z)}{d(z)}+\overline{G}(z)$$

przy czym

$$(7.17)\qquad \overline{G}(z)=G(z)+d(z)K_1(z)K_2(z)+\overline{Q}(z)K_2(z)+K_1(z)+\overline{R}(z)$$

Z dowodu twierdzenia 2 wynika następująca procedura wyznaczania rozkładu strukturalnego (8) dla danej macierzy transmitancji $T(z)$.

Procedura 5.7.1

Krok 1. Mając daną macierz $T(z)$ sprowadzamy ją do postaci standardowej (4).

Krok 2. Stosując działania elementarne, sprowadzamy macierz wielomianową $P(z)$ do postaci (8) oraz wyznaczamy macierze unimodularne tych działań elementarnych $U(z)$ i $V(z)$ oraz $i(z)$, $k(z)$, $w(z)$ i $\overline{P}(z)$.

Krok 3. Korzystając z zależności (12)-(14), wyznaczamy $Q(z)$, $R(z)$, $\hat{P}(z)$ oraz $G(z)$.

Krok 4. Korzystając ze wzoru (8), wyznaczamy poszukiwany rozkład strukturalny.

Przykład 5.7.1. Dany jest singularny układ dyskretny (1) z macierzami

(7.18)
$$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad D=0$$

Para (E,A) jest cykliczna, gdyż wielomian charakterystyczny tej pary

(7.19)
$$\det[Ez-A]=\begin{vmatrix}z&-1&0\\0&z&-1\\2&1&0\end{vmatrix}=z+2$$

pokrywa się z jej wielomianem minimalnym $(D_{n-1}(z)=1)$.
Aby otrzymać postać kanoniczną Smitha macierzy $[Ez-A]$, mnożymy lewostronnie tę macierz przez macierz unimodularną $U(z)=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ i prawostronne przez macierz unimodularną $V(s)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&z\\z&1&z^2\end{bmatrix}$. Otrzymamy wówczas

$$[Ez-A]_S=U(z)[Ez-A]V(s)=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z&-1&0\\0&z&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&z\\z&1&z^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&z+2\end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna $[Ez-A]^{-1}$ ma postać

(7.20)
$$[Ez-A]^{-1}=\frac{[Ez-A]_{ad}}{\det[Ez-A]}=\frac{1}{z+2}\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&0&z\\-2z&-z-2&z^2\end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz ta jest normalna i nieskracalna.

Korzystając ze wzoru (3), otrzymamy

(7.21)
$$T(z)=C[Ez-A]^{-1}B+D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z&-1&0\\0&z&-1\\2&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{z+2}\begin{bmatrix}1&1\\-2&z\end{bmatrix}$$

Macierz ta jest macierzą normalną.

Aby wyznaczyć rozkład strukturalny macierzy (21), korzystamy z procedury 1.

Krok 1. Macierz (21) ma już postać standardową, przy czym $d(z)=z+2$, a

(7.22)
$$P(z)=\begin{bmatrix}1&1\\-2&z\end{bmatrix}$$

Krok 2. Macierz wielomianowa ma już pożądaną postać (11), przy czym

$$U(z)=V(z)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad i(z)=1,\quad k(z)=-2,\quad w(z)=1,\quad \overline{P}(z)=z$$

Krok 3. Korzystając z zależności (12), (13) i (14), otrzymamy

$$Q(z)=U^{-1}(z)i(z)\begin{bmatrix}1\\k(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\quad R(z)=[1\ \ w(z)]V^{-1}(z)=[1\ \ 1],$$
$$i(z)\left[\overline{P}(z)-k(z)w(z)\right]=d(z)\hat{P}(z)=z+2$$

czyli $\hat{P}(z)=1$ oraz

$$Q(z)=U^{-1}(z)i(z)\begin{bmatrix}1\\k(z)\end{bmatrix},\quad R(z)=[1\ \ w(z)]V^{-1}(z)$$

Krok 4. Poszukiwany rozkład strukturalny macierzy (21) ma więc postać

$$T(z)=\frac{Q(z)R(z)}{d(z)}+G(z)=\frac{1}{z+2}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}[1\ \ 1]+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

6. Macierzowe równania wielomianowe, wymierne i algebraiczne

6.1. Unilateralne równania wielomianowe z dwiema niewiadomymi

6.1.1. Wyznaczanie rozwiązań szczególnych równań wielomianowych

Niech dane będzie równanie

(1.1) $$AX + BY = C$$

przy czym $A = A(s) \in \mathbf{C}^{l \times p}[s]$, $B = B(s) \in \mathbf{C}^{l \times q}[s]$, $C = C(s) \in \mathbf{C}^{l \times m}[s]$, $X = X(s) \in \mathbf{C}^{p \times m}[s]$ i $Y = Y(s) \in \mathbf{C}^{q \times m}[s]$

Mając dane macierze A, B i C, należy wyznaczyć macierze X i Y spełniające równanie (1).

Zadaniem dualnym względem powyższego będziemy nazywać następujące zadanie:

Mając dane macierze wielomianowe

$$A = A(s) \in \mathbf{C}^{p \times m}[s], \quad B = B(s) \in \mathbf{C}^{q \times m}[s], \quad C = C(s) \in \mathbf{C}^{l \times m}[s]$$

wyznaczyć macierze wielomianowe $X = X(s) \in \mathbf{C}^{l \times p}[s]$, $Y = Y(s) \in \mathbf{C}^{l \times q}[s]$, spełniające równanie

(1.2) $$XA + YB = C$$

Wykonując transpozycję, możemy równanie (2) sprowadzić do postaci (1).

Twierdzenie 6.1.1. Równanie (1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z niżej podanych warunków:

1) macierze $[A, B, C]$ i $[A, B, 0]$ są prawostronnie równoważne,
2) największy wspólny lewy dzielnik (NWLD) macierzy A i B jest lewym dzielnikiem macierzy C.

Dowód. Niech X_0, Y_0 będzie rozwiązaniem równania (1), czyli $AX_0 + BY_0 = C$. Wtedy

$$[A, B, C] = [A, B, AX_0 + BY_0] = [A, B, 0]\begin{bmatrix} I & 0 & X_0 \\ 0 & I & Y_0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Zgodnie z definicją 1.7.1 macierze $[A, B, C]$ i $[A, B, 0]$ są prawostronnie równoważne, gdyż macierz

(1.3) $$\begin{bmatrix} I & 0 & X_0 \\ 0 & I & Y_0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

jest macierzą unimodularną.

Odwrotnie, jeżeli macierze $[A, B, C]$ i $[A, B, 0]$ są prawostronnie równoważne, to istnieje macierz unimodularna $P = P(s)$ taka, że

(1.4) $$[A, B, C] = [A, B, 0]P$$

przy czym macierz P ma postać

(1.5) $$\begin{bmatrix} I & 0 & R_1 \\ 0 & I & R_2 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Z (4) mamy $AR_1 + BR_2 = C$. Para R_1, R_2 jest więc rozwiązaniem równania (1).

Wykażemy teraz, że jeżeli równanie (1) ma rozwiązanie X_0, Y_0, to NWLD macierzy A i B jest lewym dzielnikiem macierzy C. Niech L będzie NWLD macierzy A i B, czyli

(1.6) $$A = LA_1, \quad B = LB_1$$

gdzie A_1, B_1 są macierzami wielomianowymi. Po podstawieniu zależności (6) do równania

(1.7) $$AX_0 + BY_0 = C$$

otrzymamy

$$L(A_1X_0 + B_1Y_0) = C \tag{1.8}$$

Macierz L jest więc lewym dzielnikiem macierzy C.
Z kolei wykażemy, że jeżeli macierz L jest lewym dzielnikiem macierzy C, to równanie (1) ma rozwiązanie. Z założenia mamy $C = LC_1$, przy czym C_1 jest macierzą wielomianową. Natomiast z założenia, że macierz L jest NWLD macierzy A i B, wynika istnienie macierzy wielomianowych U_{11} i U_{21} takich, że

$$AU_{11} + BU_{21} = L \tag{1.9}$$

Mnożąc prawostronnie równanie (9) przez C_1, po uwzględnieniu $LC_1 = C$ otrzymamy

$$AU_{11}C_1 + BU_{21}C_1 = LC_1 = C$$

Macierze

$$X_0 = U_{11}C_1, \quad Y_0 = U_{21}C_1 \tag{1.10}$$

są więc rozwiązaniem równania (1).

Twierdzenie 6.1.2. Równanie (2) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z niżej podanych warunków:

1) macierze $\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} A \\ B \\ 0 \end{bmatrix}$ są lewostronnie równoważne,

2) największy wspólny prawy dzielnik (NWPD) macierzy A i B jest prawym dzielnikiem macierzy C.

Dowód tego twierdzenia jest dualny względem dowodu twierdzenia 1.

Z dowodu twierdzenia 1 wynika następująca procedura wyznaczania rozwiązania szczególnego X_0, Y_0 równania (1).

Procedura 6.1.1.
Krok 1. Stosując algorytm 1.15.1, wyznaczamy NWLD macierzy A i B, tj. macierz L oraz macierze wielomianowe U_{11}, U_{21}.
Krok 2. Wyznaczamy macierz C_1 spełniającą zależność $LC_1 = C$.

Krok 3. Z zależności $X_0 = U_{11}C_1$, $Y_0 = U_{21}C_1$ obliczamy poszukiwane rozwiązanie szczególne X_0 i Y_0 równania (1)
Procedura wyznaczania rozwiązania równania (2) jest analogiczna (dualna).

Przykład 6.1.1. Korzystając z procedury 1 należy wyznaczyć rozwiązanie równania

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & -s \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -s^2 & s \\ 1-s & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 0 & s^2+s+1 \\ 1-s & s \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & -s \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -s^2 & s \\ 1-s & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & s^2+s+1 \\ 1-s & s \end{bmatrix}$$

spełniają warunki twierdzenia 1. Zgodnie z procedurą 1 wykonujemy kolejno

Krok 1. Aby wyznaczyć NWLD macierzy A i B, wykonujemy działania elementarne

$$P[3+4\times s],\ P[2+1\times(-s)],\ P[4+1\times(-s)],\ P[2+3\times s],\ P[4+3\times(-1)],\ P[2,3]$$

na kolumnach macierzy

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & s & -s^2 & s \\ 0 & -s & 1-s & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

które sprowadzają ją do postaci

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -s & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & s & -1 \\ 0 & s & s^2 & 1-s \end{array}\right]$$

Mamy więc

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ U_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ U_{21}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

Krok 2. W tym wypadku

$$C_1=C=\begin{bmatrix}0 & s^2+s+1\\ 1-s & s\end{bmatrix}$$

Krok 3. Szukane rozwiązanie szczególne równania (11) ma więc postać

$$X_0=U_{11}C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & s^2+s+1\\ 1-s & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & s^2+s+1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$Y_0=U_{21}C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & s^2+s+1\\ 1-s & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-s & s\\ s(1-s) & s^2\end{bmatrix}$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika, że rozwiązanie równania (1) można również wyznaczyć przekształcając za pomocą działań elementarnych na kolumnach macierz blokową

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c:c:c}A & B & C\\ \hdashline I_p & 0 & 0\\ \hdashline 0 & I_q & 0\end{array}\end{bmatrix}\tag{1.12}$$

do postaci

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c:c:c}A & B & 0\\ \hdashline I_p & 0 & -X\\ \hdashline 0 & I_q & -Y\end{array}\end{bmatrix}\tag{1.13}$$

Rzeczywiście, mnożąc lewostronnie pierwszą kolumnę (blok) macierzy (12) przez macierz $-X$, a drugą przez macierz $-Y$ i dodając do trzeciej kolumny tej macierzy, otrzymamy

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c:c:c}A & B & C-AX-BY\\ \hdashline I_p & 0 & -X\\ \hdashline 0 & I_q & -Y\end{array}\end{bmatrix}\tag{1.14}$$

a po uwzględnieniu (1) – macierz (13).

Zauważmy, że równanie (1) ma wiele różnych rozwiązań X i Y, gdyż przekształcenie macierzy (12) do postaci (13) możemy osiągnąć wykonując różne ciągi działań elementarnych na kolumnach tej macierzy.

Przykład 6.1.2. Weźmy pod uwagę równanie (11). Wykażemy, że równanie to ma również inne rozwiązanie różne od otrzymanego w przykładzie 1.
Wykonując działania elementarne: $P[5+1\times(-s^2)]$, $P[6+1\times(-s-1)]$, $P[5+3\times(-1)]$, $P[6+4\times(-s)]$ przekształcamy macierz

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{c:c:c}A & B & C\\ \hdashline I_p & 0 & 0\\ \hdashline 0 & I_q & 0\end{array}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{array}{cc:cc:cc}1 & s & -s^2 & s & 0 & s^2+s+1\\ 0 & -s & 1-s & 1 & 1-s & s\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\end{bmatrix}\tag{1.15}$$

do postaci

$$\begin{bmatrix}\begin{array}{cc:cc:cc}1 & s & -s^2 & s & 0 & 0\\ 0 & -s & 1-s & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & -s^2 & -(s+1)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -s\end{array}\end{bmatrix}\tag{1.16}$$

Z porównania (16) i (13) wynikają macierze

$$X_1=\begin{bmatrix}s^2 & s+1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ Y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}$$

które są rozwiązaniem równania (11).
Aby otrzymać rozwiązanie

$$X_2=\begin{bmatrix}0 & s^2+s+1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ Y_2=\begin{bmatrix}1-s & s\\ s(1-s) & s^2\end{bmatrix}$$

pokrywające się z otrzymanym w przykładzie 1 należy macierz (16) przekształcić do postaci

$$
(1.17)\qquad \left[\begin{array}{cc|cc|cc}
1 & s & -s^2 & s & 0 & 0 \\
0 & -s & 1-s & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s^2-s-1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & s-1 & -s \\
0 & 0 & 0 & 1 & s^2-s & -s^2
\end{array}\right]
$$

■

Analogicznie można wyznaczyć rozwiązanie równania (2), przekształcając za pomocą działań elementarnych na wierszach macierz

$$
(1.18a)\qquad \left[\begin{array}{c|c|c}
A & I_p & 0 \\
\hline
B & 0 & I_q \\
\hline
C & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

do postaci

$$
(1.18b)\qquad \left[\begin{array}{c|c|c}
A & I_p & 0 \\
\hline
B & 0 & I_q \\
\hline
0 & -X & -Y
\end{array}\right]
$$

6.1.2. Wyznaczanie rozwiązań ogólnych równań wielomianowych

Będziemy poszukiwać rozwiązań ogólnych równań (1) i (2) znając ich rozwiązania szczególne X_0, Y_0.

Twierdzenie 6.1.3. Jeżeli macierze X_0, Y_0 są rozwiązaniem szczególnym równania (1), to rozwiązanie ogólne tego równania ma postać

$$(1.19)\qquad X = X_0 - B_1 T,\; Y = Y_0 + A_1 T$$

gdzie $B_1 = B_1(s) \in \boldsymbol{C}^{p\times(p+q-n)}[s]$, $A_1 = A_1(s) \in \boldsymbol{C}^{q\times(p+q-n)}[s]$ są prawostronnie względnie pierwszymi macierzami wielomianowymi, spełniającymi warunek

$$(1.20)\qquad AB_1 = BA_1$$

$T \in \boldsymbol{C}^{(p+q-n)\times m}[s]$ jest dowolną macierzą wielomianową, a rząd $[A\ B]$.

Dowód. Z założenia mamy równanie (7). Odejmując stronami równanie (7) od równania (1), otrzymamy

$$(1.21)\qquad A(X - X_0) + B(Y - Y_0) = [A\ B]\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix} = 0$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania (1), należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania

$$(1.22)\qquad [A\ B]Z = 0$$

przy czym $Z \in \boldsymbol{C}^{(p+q)\times m}[s]$.
Biorąc pod uwagę nierówność Sylvestera

$$0 \le \text{rząd}\,[A\ B]Z \ge \text{rząd}\,[A\ B] + \text{rząd}\,Z - (p+q)$$

oraz rząd $[A\ B] = n$ i (22), otrzymamy

$$\text{rząd}\,Z \le p + q - n$$

Niech

$$(1.23)\qquad Z = Z_1 T = \begin{bmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} T$$

gdzie $Z_1 \in \boldsymbol{C}^{(p+q)\times(p+q-n)}[s]$ jest macierzą wielomianową pełnego rzędu, równego $p+q-n$.
Podstawiając (23) do (22) otrzymamy

$$(1.24)\qquad [A\ B]\begin{bmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} T = 0$$

Zależność (24) dla dowolnej macierzy T jest równoważna zależności (20).

Z zależności (21) - (23) mamy więc

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} T$$

czyli poszukiwane rozwiązanie ogólne (19).

■

Twierdzenie 6.1.4. Jeżeli macierze X_0, Y_0 są rozwiązaniem szczególnym równania (1.2), to rozwiązanie ogólne tego równania ma postać

(1.25) $$X = X_0 - TB_2,\ Y = Y_0 + TA_2$$

gdzie $B_2 = B_2(s) \in \mathbf{C}^{(p+q-n)\times p}[s]$, $A_2 = A_2(s) \in \mathbf{C}^{(p+q-n)\times q}[s]$ są lewostronnie względnie pierwszymi macierzami wielomianowymi spełniającymi warunek

(1.26) $$B_2 A = A_2 B$$

$T \in \mathbf{C}^{l\times(p+q-n)}[s]$ jest dowolną macierzą wielomianową, a $n = \text{rząd}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny (dualny) do dowodu twierdzenia. 3.
Z rozważań podanych w punkcie 1.15.2 wynika, że

(1.27) $$A_1 = U_{22},\quad B_1 = -U_{12}$$

gdyż $AU_{12} = -BU_{22}$. Po podstawieniu zależności (10) i (27) do (19) otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci

(1.28) $$X = U_{11}C_1 + U_{12}T,\quad Y = U_{21}C_1 + U_{22}T$$

Z tych zależności wynika następująca procedura wyznaczania rozwiązania ogólnego równania (1).

Procedura 6.1.2.
Krok 1. Stosując algorytm 1.15.1, wyznaczamy NWLD macierzy A i B oraz macierz unimodularną

(1.29) $$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

Krok 2. Metodą podaną w punkcie 1.15.2 wyznaczamy macierz C_1, spełniającą zależność

(1.30) $$C = LC_1$$

Krok 3. Z zależności (28) wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie ogólne.

Przykład 6.1.3. Korzystając z wyników przykładu 1, wyznaczymy rozwiązanie ogólne równania (1.11).
Znając L, U_{11}, U_{21}, C_1 (wyznaczone w przykładzie 1) i

$$U_{12} = \begin{bmatrix} -s & -s \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad U_{22} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ s^2 & 1-s \end{bmatrix}$$

oraz korzystając z zależności (28), otrzymamy

$$X = U_{11}C_1 + U_{12}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s^2+s+1 \\ 1-s & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s & -s \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -s(t_{11}+t_{21}) & s^2 + s(1-t_{12}-t_{22})+1 \\ t_{11} & t_{12} \end{bmatrix}$$

$$Y = U_{21}C_1 + U_{22}T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & s^2+s+1 \\ 1-s & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -1 \\ s^2 & 1-s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -s(t_{11}-1)-t_{21}+1 & s^2 + s(t_{12}+1) - t_{22} \\ s^2(t_{11}-1)+s(1-t_{21})+t_{21} & s^2(t_{12}+1) - st_{22} + t_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie t_{11}, t_{12}, t_{21} i t_{22} są dowolnymi wielomianami zmiennej s.

6.1.3. Wyznaczanie rozwiązań minimalnego stopnia wielomianowych równań macierzowych

Załóżmy, że macierz wielomianowa B_1 jest macierzą regularną (macierz współczynników przy najwyższej potędze zmiennej s jest nieosobliwa) lub nieosobliwą. W tym wypadku, jeżeli $\operatorname{st} X_0 \geq \operatorname{st} B_1$, to stosując algorytm 1.15.1 możemy wyznaczyć macierze wielomianowe U_1 i V_1 takie, że

(1.31) $$X_0 = B_1 U_1 + V_1, \quad \operatorname{st} V_1 < \operatorname{st} B_1$$

Po podstawieniu tej zależności do pierwszego wzoru (19) otrzymamy

$$X = V_1 + B_1(U_1 - T)$$

Przyjmując $T = U_1$, otrzymamy rozwiązanie równania (1) w postaci

(1.32) $$X = V_1, Y = Y_0 + A_1 U_1$$

Mamy więc następującą procedurę wyznaczania rozwiązania minimalnego stopnia względem X równania (1).

Procedura 6.1.3.
Krok 1. Stosując algorytm 1.15.1, wyznaczamy NWLD macierzy A i B (tzn. macierz L) oraz macierz unimodularną w postaci (29).
Krok 2. Stosując algorytm podany w punkcie 1.15.1, wyznaczamy macierz C_1 spełniającą zależność (30).
Krok 3. Obliczmy $X_0 = U_{11} C_1$.
Krok 4. Jeżeli macierz B_1 jest regularna lub nieosobliwa, to stosując algorytm 1.15.1 wyznaczamy macierze U_1 i V_1 spełniające zależność (31).
Krok 5. Z zależności (32) obliczamy poszukiwane rozwiązanie.

Przykład 6.1.4. Wyznaczyć rozwiązanie minimalnego stopnia względem X równania (11).
Korzystamy z wyników otrzymanych w przykładzie 1.
W tym wypadku macierz

$$B_1 = -U_{12} = \begin{bmatrix} s & s \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą nieosobliwą, gdyż $\det B_1 = s$, ale nie jest macierzą regularną. Aby wyznaczyć macierze U_1 i V_1 spełniające zależność (31), skorzystamy więc z algorytmu 1.15.1. Zgodnie z tym algorytmem wyznaczamy macierz

$$B_{1ad} X_0 = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s^2+s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s^2+s+1 \end{bmatrix}$$

a następnie każdy jej element dzielimy przez $\det B_1 = s$:

$$B_{1ad} X_0 = U_1 \det B_1 + R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wobec tego

$$V_1 = \frac{1}{\det B_1} B_1 R = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} s & s \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z (32) poszukiwane rozwiązanie ma więc postać

(1.33)
$$X = V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = Y_0 + A_1 U_1 = \begin{bmatrix} 1-s & s \\ s(1-s) & s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & -1 \\ s^2 & 1-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-s & -1 \\ s(1-s) & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że rozwiązanie minimalnego stopnia względem X równania (1) możemy również wyznaczyć dokonując przekształcenia do postaci (13) oraz wykonując takie działania na kolumnach pierwszej z tych macierzy, które dają minimalny stopień X.

Przykład 6.1.5. Aby wyznaczyć rozwiązanie (33) minimalnego stopnia względem X równania (11), wykonujemy na macierzy (15) następujące działania elementarne: $L[6+1\times(-1)]$, $L[5+3\times(-1)]$, $L[6+3\times 1]$, $L[5+4\times(s^2-s)]$, $L[6+4\times(-1)]$, które przekształcają ją do postaci

(1.34)
$$\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & s & -s^2 & s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1-s & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s^2-s & -1 \end{array}\right]$$

Z porównania macierzy (34) i (13) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie (33). Jeżeli A_1 jest macierzą regularną lub nieosobliwą, to istnieją macierze wielomianowe U_2 i V_2 takie, że

$$Y_0 = A_1 U_2 + V_2, \quad \mathrm{st}\, V_2 < \mathrm{st}\, A_1$$

Podstawiając tę zależność do drugiego wzoru (19), otrzymamy

$$Y = A_1(U_2 + T) + V_2$$

Przyjmując $T = -U_2$, otrzymamy rozwiązanie minimalnego stopnia względem Y mające postać

(1.35) $$X = X_0 + B_1 U_2, \quad Y = V_2$$

Procedura wyznaczania rozwiązania (35) minimalnego stopnia względem Y równania (1) jest analogiczna do procedury 3.

W celu wyznaczenia rozwiązanie minimalnego stopnia względem $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ korzystamy z dowolności macierzy T, występującej w rozwiązaniu (19). Macierz tę dobieramy tak, aby stopień macierzy $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ był minimalny.

Zapisując równania (19) w postaci

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{bmatrix} T$$

i stosując działania elementarne na kolumnach, możemy tak dobrać elementy macierzy T, aby stopnie X i Y były minimalne. Z równania (1) zapisanego w postaci

$$[A, B]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = C$$

wynika, że minimalny stopień macierzy $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ nie może być niższy niż różnica stopni macierzy C i macierzy $[A, B]$.

6.2. Bilateralne równania wielomianowe z dwiema niewiadomymi

6.2.1. Istnienie rozwiązań

Niech dane będzie równanie

(2.1) $$AX + YB = C$$

przy czym $A = A(s) \in C^{l\times p}[s]$, $B = B(s) \in C^{q\times m}[s]$, $C = C(s) \in C^{l\times m}[s]$, $X = X(s) \in C^{p\times m}[s]$ i $Y = Y(s) \in C^{l\times q}[s]$.
Mając dane A, B i C, należy wyznaczyć macierze wielomianowe X i Y, spełniające równanie (1).

Twierdzenie 6.2.1. Równanie (1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierze

(2.2) $$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

są równoważne.

Dowód. Wykażemy, że jeżeli równanie (1) ma rozwiązanie X_0, Y_0, to macierze (2) są równoważne. Podstawiając $C = AX_0 + Y_0 B$ do drugiej z macierzy (2) otrzymamy

(2.3) $$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AX_0 + Y_0 B \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Macierze (2) są równoważne, gdyż macierze

(2.4) $$\begin{bmatrix} I_l & Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_p & X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

są macierzami unimodularnymi.

Wykażemy z kolei, że jeżeli macierze (2) są równoważne, to równanie (1) ma rozwiązanie.
Niech

$$
(2.5)\qquad \begin{aligned} A_S &= U_{1A} A U_{2A} = \operatorname{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0] \\ B_S &= U_{1B} B U_{2B} = \operatorname{diag}[b_1, b_2, \ldots, b_s, 0, \ldots, 0] \end{aligned}
$$

będą postaciami kanonicznymi Smitha macierzy A i B, gdzie a_1, a_2, ..., a_r; $b_1, b_2, \ldots, b_s$ są wielomianami inwariantnymi macierzy A i B, zaś U_{1A}, U_{2A}, U_{1B}, U_{2B} są macierzami unimodularnymi działań elementarnych na wierszach i kolumnach. Mnożąc lewostronnie równanie (1) przez U_{1A} i prawostronnie przez U_{2B} otrzymamy

$$
U_{1A} A U_{2A} U_{2A}^{-1} X U_{2B} + U_{1A} Y U_{1B}^{-1} U_{1B} B U_{2B} = U_{1A} C U_{2B}
$$

a po uwzględnieniu zależności (5)

$$
(2.6)\qquad A_S \overline{X} + \overline{Y} B_S = \overline{C}
$$

przy czym

$$
(2.7)\qquad \overline{X} = U_{2A}^{-1} X U_{2B} = \begin{bmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} & \cdots & \overline{x}_{1m} \\ \overline{x}_{21} & \overline{x}_{22} & \cdots & \overline{x}_{2m} \\ \hdashline \overline{x}_{p1} & \overline{x}_{p2} & \cdots & \overline{x}_{pm} \end{bmatrix}
$$

$$
(2.8)\qquad \overline{Y} = U_{1A} Y U_{2B}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{y}_{11} & \overline{y}_{12} & \cdots & \overline{y}_{1q} \\ \overline{y}_{21} & \overline{y}_{22} & \cdots & \overline{y}_{2q} \\ \hdashline \overline{y}_{l1} & \overline{y}_{l2} & \cdots & \overline{y}_{lq} \end{bmatrix}
$$

$$
(2.9)\qquad \overline{C} = U_{1A} C U_{2B} = \begin{bmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \cdots & \overline{c}_{1m} \\ \overline{c}_{21} & \overline{c}_{22} & \cdots & \overline{c}_{2m} \\ \hdashline \overline{c}_{l1} & \overline{c}_{l2} & \cdots & \overline{c}_{lm} \end{bmatrix}
$$

Biorąc pod uwagę (5)-(9) możemy równanie (6) napisać w postaci

$$
(2.10)\qquad \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} & \cdots & \overline{x}_{1m} \\ \overline{x}_{21} & \overline{x}_{22} & \cdots & \overline{x}_{2m} \\ \hdashline \overline{x}_{p1} & \overline{x}_{p2} & \cdots & \overline{x}_{pm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{y}_{11} & \overline{y}_{12} & \cdots & \overline{y}_{1q} \\ \overline{y}_{21} & \overline{y}_{22} & \cdots & \overline{y}_{2q} \\ \hdashline \overline{y}_{l1} & \overline{y}_{l2} & \cdots & \overline{y}_{lq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & b_s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c}_{11} & \overline{c}_{12} & \cdots & \overline{c}_{1m} \\ \overline{c}_{21} & \overline{c}_{22} & \cdots & \overline{c}_{2m} \\ \hdashline \overline{c}_{l1} & \overline{c}_{l2} & \cdots & \overline{c}_{lm} \end{bmatrix}
$$

Wykonując wskazane mnożenie i porównując odpowiednie elementy otrzymamy

$$
(2.11)\qquad \begin{aligned} & a_i \overline{x}_{ij} + b_j \overline{y}_{ij} = \overline{c}_{ij} && \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, r; \; j = 1, 2, \ldots, s \\ & a_i \overline{x}_{ij} = \overline{c}_{ij} && \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, r; \; j = s+1, s+2, \ldots, m \\ & b_j \overline{y}_{ij} = \overline{c}_{ij} && \text{dla} \quad i = r+1, r+2, \ldots, l; \; j = 1, 2, \ldots, s \\ & \overline{c}_{ij} = 0 && \text{dla} \quad i = r+1, r+2, \ldots, l; \; j = s+1, s+2, \ldots, m \end{aligned}
$$

Równanie (1) ma więc rozwiązanie, jeżeli mają rozwiązania równania (11).
Łatwo wykazać, że te równania mają rozwiązania, jeżeli macierze (2) są równoważne. Zauważmy, że macierze

$$
(2.12)\qquad \begin{bmatrix} U_{1A} & 0 \\ 0 & U_{1B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2A} & 0 \\ 0 & U_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S & 0 \\ 0 & B_S \end{bmatrix}
$$

$$
(2.13)\qquad \begin{bmatrix} U_{1A} & 0 \\ 0 & U_{1B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{2A} & 0 \\ 0 & U_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_S & \overline{C} \\ 0 & B_S \end{bmatrix}
$$

są równoważne tylko wtedy, gdy istnieją $\overline{x}_{ij}$, $\overline{y}_{ij}$ spełniające równania (11), gdyż w tym wypadku wykonując działania elementarne na wierszach i kolumnach można macierz (1) przekształcić do postaci (12).
Wykazaliśmy więc, że równanie (1) ma rozwiązanie, jeżeli macierze (2) są równoważne.

■

6.2.2. Wyznaczanie rozwiązań

Na początku zostanie przedstawiona metoda wyznaczania rozwiązania szczególnego X_0, Y_0 równania (1) oparta na działaniach elementarnych.

Mnożąc lewostronnie równość (3) przez macierz $\begin{bmatrix} I_l & -Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$ i prawostronnie przez macierz $\begin{bmatrix} I_p & -X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} I_l & -Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

gdyż

$$\begin{bmatrix} I_l & -Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_l & Y_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_p & -X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & X_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

Z równości (14) wynika, że rozwiązanie szczególne X_0, Y_0 równania (1) możemy wyznaczyć dodając taką kombinację wierszy macierzy B oraz taką kombinację kolumn macierzy A do macierzy C, aby otrzymać zerową macierz C w drugiej z macierzy (2). Można to osiągnąć na wiele różnych sposobów. Równanie (1) ma więc wiele różnych rozwiązań szczególnych. Zilustrujemy to na następującym prostym przykładzie.

Przykład 6.2.1. Wyznaczyć dwa różne rozwiązania szczególne równania (1) dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & s & s^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & 2s^2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & C \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & s & 0 \\ 0 & s & s^2 & -s^2 & 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}$$

są równoważne. Równanie (1) dla macierzy (15) ma więc rozwiązanie. Rozwiązaniami szczególnymi równania (1) dla macierzy (15), wyznaczonymi w wyżej podany sposób, są:

$$X_0 = \begin{bmatrix} -s^2+s & 2s^2 \\ -s & 2s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.16a}$$

oraz

$$X_0 = \begin{bmatrix} -s^2-1 & 3s^2+s \\ -s-1 & 3s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \tag{2.16b}$$

gdyż zgodnie z zależnością (14) są spełnione równości

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & s & 0 \\ 0 & s & s^2 & -s^2 & 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s^2-s & -2s^2 \\ 0 & 1 & 0 & s & -2s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & s & 0 \\ 0 & s & s^2 & -s^2 & 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & s & 0 \\ 0 & s & s^2 & -s^2 & 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s^2+1 & -3s^2-s \\ 0 & 1 & 0 & s+1 & -3s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & s & 0 \\ 0 & s & s^2 & -s^2 & 2s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s \end{bmatrix}$$

Z dowodu twierdzenia 1 wynika następująca procedura wyznaczania rozwiązania ogólnego X, Y równania (1).

Procedura 6.2.1.

Krok 1. Stosując algorytm podany w punkcie 1.7.1 wyznaczamy postacie kanoniczne Smitha macierzy A i B oraz macierze unimodularne U_{1A}, U_{2A}, U_{1B} i U_{2B}.

Krok 2. Z zależności (9) wyznaczamy macierz $\overline{C}$.

Krok 3. Piszemy równania (11) i wyznaczamy ich rozwiązanie.

Krok 4. Wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie

$$X = U_{2A}\overline{X}U_{2B}^{-1}, \; Y = U_{1A}^{-1}\overline{Y}U_{1B} \tag{2.17}$$

Przykład 6.2.2. Korzystając z procedury 1 należy wyznaczyć rozwiązanie równania (1) dla macierzy (15).
Korzystając z procedury 1 wyznaczamy kolejno

Krok 1.

$$A_S = U_{1A} A U_{2A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 \\ 0 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s & -s^2 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_S = U_{1B} B U_{2B} = [1][1-s] \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0]$$

oraz macierze unimodularne

$$U_{1A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{2A} = \begin{bmatrix} 1 & s & -s^2 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{1B} = [1], U_{2B} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Z zależności (9) otrzymamy

$$\overline{C} = U_{1A} C U_{2B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ -s^2 & 2s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s^2 \\ -s^2 & 2s^2 - s^3 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Równanie (6) w tym wypadku ma zatem postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} \\ \overline{x}_{21} & \overline{x}_{22} \\ \overline{x}_{31} & \overline{x}_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{y}_{11} \\ \overline{y}_{21} \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} s & s^2 \\ -s^2 & 2s^2 - s^3 \end{bmatrix}$$

co daje

$$\overline{x}_{11} + \overline{y}_{11} = s, \quad \overline{x}_{12} = s^2$$
$$s\overline{x}_{21} + \overline{y}_{21} = -s^2, \quad s\overline{x}_{22} = 2s^2 - s^3$$

Rozwiązując te równania dla $\overline{y}_{11} = y_1$, $\overline{y}_{21} = sy_2$, otrzymamy

$$\overline{x}_{11} = s - \overline{y}_1, \ \overline{x}_{12} = s^2, \ \overline{x}_{21} = -s - y_2, \ \overline{x}_{22} = 2s - s^2$$

Krok 4. Zatem

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x}_{11} & \overline{x}_{12} \\ \overline{x}_{21} & \overline{x}_{22} \\ \overline{x}_{31} & \overline{x}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - y_1 & s^2 \\ -s - y_2 & 2s - s^2 \\ \overline{x}_{31} & \overline{x}_{32} \end{bmatrix}, \quad \overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{y}_{11} \\ \overline{y}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

gdzie $y_1, y_2, \overline{x}_{31}$ i $\overline{x}_{32}$ są dowolnymi wielomianami zmiennej s. Wobec tego zgodnie z (17) poszukiwane rozwiązanie ma postać

(2.18)

$$X = U_{2A} \overline{X} U_{2B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s & -s^2 \\ 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - y_1 & s^2 \\ -s - y_2 & 2s - s^2 \\ \overline{x}_{31} & \overline{x}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} -s^2(1+\overline{x}_{31}) + s(1-y_2) - y_1 & s^3\overline{x}_{31} + s^2(2 - \overline{x}_{32} + y_2) + sy_1 \\ -s(1+\overline{x}_{31}) - y_2 & s^2\overline{x}_{31} + s(2 - \overline{x}_{32}) + y_2 \\ \overline{x}_{31} & -s\overline{x}_{31} + \overline{x}_{32} \end{bmatrix}$$

$$Y = U_{1A}^{-1} \overline{Y} U_{1B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ sy_{21} \end{bmatrix} [1] = \begin{bmatrix} y_1 \\ sy_2 \end{bmatrix}$$

Podstawiając w (18) $y_1 = y_2 = \overline{x}_{31} = \overline{x}_{32} = 0$ otrzymamy rozwiązanie szczególne (16a), a podstawiając $y_1 = y_2 = 1$ oraz $\overline{x}_{31} = \overline{x}_{32} = 0$, rozwiązanie szczególne (16b).

6.3. Rozwiązania wymierne macierzowych równań wielomianowych

6.3.1. Wyznaczanie rozwiązań wymiernych

Rozpatrzmy wielomianowe równanie macierzowe mające postać (1.1). Rozwiązaniem wymiernym równania (1.1) nazywać będziemy parę macierzy wymiernych

$$X = X(s) \in \boldsymbol{C}^{p \times m}(s), \ Y = Y(s) \in \boldsymbol{C}^{q \times m}(s)$$

spełniających to równanie.

Twierdzenie 6.3.1. Jeżeli

(3.1) $$\text{rząd}\,[A, B] = l$$

to wymierne rozwiązanie równania (1.1) ma postać

(3.2)
$$X = A^T \left[AA^T + BB^T\right]^{-1} C - B_1 T$$
$$Y = B^T \left[AA^T + BB^T\right]^{-1} C + A_1 T$$

przy czym macierze A_1 i B_1 spełniają warunek

(3.3) $$AB_1 = BA_1$$

a T jest dowolną macierzą wymierną lub wielomianową.

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (1), to macierz

$$[A, B]\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} = AA^T + BB^T$$

jest nieosobliwa. Po podstawieniu zależności (2) do równania (1.1) oraz uwzględnieniu warunku (3) otrzymamy

$$AX + BY = [AA^T + BB^T][AA^T + BB^T]^{-1}C + [BA_1 - AB_1]T = C$$

dla dowolnej macierzy T.

■

Zauważmy, że dobierając odpowiednio macierz T w zależnościach (2) możemy w pewnych przypadkach otrzymać rozwiązanie wielomianowe równania (1.1). Łatwo wykazać, że jeżeli NWLD macierzy A i B jest LD macierzy C, to istnieje macierz T taka, że macierze X i Y określone macierzami (2) są macierzami wielomianowymi.

6.3.2. Istnienie rozwiązań wymiernych macierzowych równości wielomianowych

Niech dane będzie macierzowe równanie wielomianowe mające postać

(3.4) $$XA = B$$

przy czym $A = A(s) \in C^{m \times k}[s]$, $B = B(s) \in C^{p \times k}[s]$ są dane, a $X = X(s) \in C^{p \times m}(s)$ jest macierzą poszukiwaną.
Poszukujemy rozwiązania X będącego macierzą wymierną właściwą, a więc spełniającą warunek

(3.5) $$\lim_{s \to \infty} X(s) = K$$

gdzie $K \in C^{p \times m}$ jest macierzą niezerową.

Niech rząd $A = k \leq m$. Stosując działania elementarne na kolumnach przekształcamy macierz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ tak, aby macierz A' w macierzy $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$ była kolumnowo zredukowana, tzn. macierz współczynników przy najwyższych stopniach kolumnowych tej macierzy miała pełny rząd kolumnowy.

Twierdzenie 6.3.2. Równanie (4) ma rozwiązanie wymierne właściwe X wtedy i tylko wtedy, gdy

(3.6) $$\mathrm{st}_{ki}\, A' \geq \mathrm{st}_{ki}\, B', \quad i = 1, \ldots, k$$

gdzie $\mathrm{st}_{ki} A'$ oznacza stopień i-tej kolumny macierzy A'.

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (6), to możemy w macierzy A' wybrać k wierszy tak, aby macierz współczynników przy najwyższych stopniach kolumnowych tego minora M była nieosobliwa. Bez straty ogólności rozważań możemy przyjąć

(3.7) $$M = [I_k \; 0]A'$$

Minor ten ma te same stopnie kolumnowe co macierz A' i jest kolumnowo zredukowany.
Łatwo sprawdzić, że macierz

(3.8) $$X = B'M^{-1}[I_k \; 0]$$

jest rozwiązaniem wymiernym właściwym równania $XA' = B'$, a więc również równania (4), gdyż działania elementarne na kolumnach macierzy $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ nie zmieniają rozwiązania równania (4).
Niech A_i (B_i) będzie i-tą kolumną macierzy A (B). Z równania (4) mamy

(3.9) $$XA_i = B_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

Jeżeli X jest rozwiązaniem wymiernym właściwym, to jest spełniony warunek (6).

■

Wykonując transpozycję możemy równanie wielomianowe

(3.10) $$\overline{A}\overline{X} = \overline{B}$$

sprowadzić do postaci (4), przy czym $X = \overline{X}^T$, $A = \overline{A}^T$ i $B = \overline{B}^T$.

6.3.3. Wyznaczanie rozwiązań wymiernych macierzowych równań wielomianowych

Z dowodu twierdzenia 2 wynika następująca procedura wyznaczania rozwiązania wymiernego właściwego X macierzowego równania wielomianowego (4), spełniającego warunek (6).

Procedura 6.3.1.
Krok 1. Stosując działania elementarne na kolumnach przekształcamy macierz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ tak, aby macierz współczynników przy najwyższych stopniach kolumnowych minora $M = [I_k \quad 0]A'$, złożonego z k pierwszych wierszy macierzy A', w macierzy $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$ była nieosobliwa.
Krok 2. Korzystając ze wzoru (8), wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie.

Przykład 6.3.1. Wyznaczyć rozwiązanie wymierne właściwe $\overline{X}$ równania (10) dla

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} s & 2s & s+1 \\ 1 & s^2 & 3s \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} s \\ s+2 \end{bmatrix}$$

Po transpozycji tych macierzy otrzymamy

$$A = \overline{A}^T = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2s & s^2 \\ s+1 & 3s \end{bmatrix}, \quad B = \overline{B}^T = [s \quad s+2]$$

Macierz A jest macierzą kolumnowo zredukowaną, gdyż macierz współczynników przy najwyższych stopniach kolumnowych ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i jest macierzą pełnego rzędu kolumnowego.
Wobec tego $A = A'$ i $B = B'$. Łatwo sprawdzić, że spełniony jest w tym wypadku warunek (6) i równanie ma rozwiązanie wymierne właściwe. Korzystając z procedury 1 wyznaczamy kolejno

Krok 1. W tym wypadku

$$M = [I_2 \quad 0]A = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2s & s^2 \end{bmatrix}$$

Krok 2. Ze wzoru (8) otrzymamy

$$X = BM^{-1}[I_2 \quad 0] = [s \quad s+2]\begin{bmatrix} s & 1 \\ 2s & s^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^3 - 2s}[s^3 - 2s^2 - 4s \quad s^2 + s \quad 0]$$

Poszukiwane rozwiązanie ma więc postać

$$\overline{X} = X^T = \frac{1}{s^3 - 2s}\begin{bmatrix} s^3 - 2s^2 - 4s \\ s^2 + s \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.4. Macierzowe równania wielomianowe

6.4.1. Istnienie rozwiązań

Dane są równania

(4.1) $$A_m X_1^m + A_{m-1} X_1^{m-1} + \cdots + A_1 X_1 + A_0 = 0$$

(4.2) $$X_2^m A_m + X_2^{m-1} A_{m-1} + \cdots + X_2 A_1 + A_0 = 0$$

przy czym $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$, X_1 i X_2 są macierzami kwadratowymi stopnia n. Mając macierze $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$, należy wyznaczyć macierze X_1 i X_2 spełniające równanie (1) i (2).

Twierdzenie 6.4.1. Każde rozwiązanie X_1 równania macierzowego (1) spełnia równanie skalarne

(4.3) $$w(X_1) = 0$$

a każde rozwiązanie X_2 równania macierzowego (2) spełnia równanie skalarne

(4.4) $$w(X_2) = 0$$

przy czym

(4.5) $$w(\lambda) = \det[A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0]$$

Dowód. Korzystając z macierzy wielomianowej

(4.6) $$W(\lambda) = A_m\lambda^m + A_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0$$

możemy równania (1) i (2) napisać w postaci

(4.7) $$W_p(X_1) = 0, \; W_l(X_2) = 0$$

przy czym $W_p(X), W_l(X)$ są odpowiednio prawostronną i lewostronną wartością $W(\lambda)$ po podstawieniu X na miejsce λ. Zgodnie z uogólnionym twierdzeniem Bezouta, macierz wielomianowa (6) prawostronnie dzieli się bez reszty przez $\lambda I_n - X_1$, a lewostronnie przez $\lambda I_n - X_2$, jeżeli X_1 i X_2 są rozwiązaniami równań (1) i (2), czyli

(4.8) $$W(\lambda) = Q_1(\lambda)[\lambda I_n - X_1] = [\lambda I_n - X_2]Q_2(\lambda)$$

przy czym $Q_1(\lambda)$ i $Q_2(\lambda)$ są macierzami wielomianowymi. Wobec tego

(4.9) $$w(\lambda) = \det W(\lambda) = \det Q_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) = \varphi_2(\lambda)\det Q_2(\lambda)$$

przy czym

$$\varphi_1(\lambda) = \det[\lambda I_n - X_1], \; \varphi_2(\lambda) = \det[\lambda I_n - X_2]$$

Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy

(4.10) $$\varphi_1(X_1) = 0, \; \varphi_2(X_2) = 0$$

Z zależności (10) i (9) otrzymujemy równania (3) i (4).

■

6.4.2. Wyznaczanie rozwiązań

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ będą pierwiastkami równania $w(\lambda) = 0$ o krotnościach odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_r$, czyli

(4.11) $$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$$

Z zależności (3) i (4) wynika, że wielomian ten jest wielomianem zerującym macierzy X_1 i X_2, a więc dzieli się on bez reszty przez wielomian minimalny macierzy X_1 (odpowiednio - macierzy X_2).
Wobec tego wielomian minimalny macierzy X_1 (X_2) ma postać

(4.12) $$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

przy czym $m_i \le p_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$, a dzielniki elementarne tej macierzy mają postacie

(4.13) $$(\lambda - \lambda_{i_1})^{q_{i_1}}, (\lambda - \lambda_{i_2})^{q_{i_2}}, \ldots, (\lambda - \lambda_{i_s})^{q_{i_s}}$$

przy czym $i_j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $q_{i_j} \le m_{ij}$ dla $j = 1, 2, \ldots, s$ oraz $\sum_{j=1}^{s} q_{i_j} = n$.
Zgodnie z rozważaniami z punktu 1.10, macierz X_1 ma postać

(4.14) $$X_1 = T_1 X_{1J} T_1^{-1}$$

przy czym T_1 jest macierzą nieosobliwą przekształcenia przez podobieństwo, a X_{1J} macierzą kanoniczną Jordana, zbudowaną z klatek (1.11.10) odpowiadających dzielnikom elementarnym (13). Podstawiając zależność (14) do (1) i uwzględniając równość

$$X_1^i = T_1 X_{1J}^i T_1^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

otrzymamy

$$A_m T_1 X_{1J}^m T_1^{-1} + A_{m-1} T_1 X_{1J}^{m-1} T_1^{-1} + \cdots + A_1 T_1 X_{1J} T_1^{-1} + A_0 = 0$$

a po pomnożeniu prawostronnie przez T_1

(4.15) $$A_m T_1 X_{1J}^m + A_m T_1 X_{1J}^{m-1} + \cdots + A_1 T_1 X_{1J} + A_0 T_1 = 0$$

Podstawiając

(4.16) $$X_2 = T_2^{-1} X_{2J} T_2$$

do (2) i biorąc pod uwagę, że

$$X_2^i = T_2^{-1} X_{2J}^i T_2, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

otrzymamy

$$T_2^{-1}X_{2J}^m T_2 A_m + T_2^{-1}X_{2J}^{m-1}T_2 A_{m-1} + \ldots + T_2^{-1}X_{2J}T_2 A_1 + A_0 = 0$$

a po pomnożeniu lewostronnie przez T_2

(4.17) $$X_{2J}^m T_2 A_m + X_{2J}^{m-1}T_2 A_{m-1} + \ldots + X_{2J}T_2 A_1 + T_2 A_0 = 0$$

Znając (13) możemy wyznaczyć X_{1J} (X_{2J}).

Zgodnie z zależnością (14) ((16)) wyznaczanie poszukiwanej macierzy X_1 (X_2) sprowadza się więc do znalezienia macierzy T_1 (T_2), którą wyznaczamy rozwiązując równanie (15) ((17)).
Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania rozwiązania X_1 (X_2) równania (1) ((2)):

Procedura 6.4.1.
Krok 1. Korzystając z zależności (5), wyznaczamy wielomian $w(\lambda)$.
Krok 2. Rozwiązując równanie $w(\lambda)=0$, wyznaczamy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ oraz ich krotności $p_1, p_2, \ldots, p_r$.
Krok 3. Wybieramy dzielniki elementarne macierzy X_1 (X_2) oraz wyznaczamy macierz kanoniczną Jordana X_{1J} (X_{2J}).
Krok 4. Rozwiązując równanie (15) ((17)), wyznaczamy macierz T_1 (T_2).
Krok 5. Korzystając z zależności (14) ((16)), wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie X_1 (X_2).

Przykład 6.4.1. Korzystając z procedury 1 wyznaczyć rozwiązanie X równania

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

W tym wypadku

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z procedurą 1 obliczamy kolejno

Krok 1.

$$w(\lambda) = \det\left[A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\right] = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & -\lambda^2 + \lambda + 7 \\ -\lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3)$$

Krok 2. Łatwo sprawdzić, że pierwiastkami równania

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 3) = 0$$

są:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(1 + j\sqrt{11}\right), \lambda_4 = \frac{1}{2}\left(1 - j\sqrt{11}\right).$$

Krok 3. Za dzielniki elementarne macierzy X przyjmujemy $(\lambda - 1)$ oraz $(\lambda + 2)$. Wobec tego

$$X_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Krok 4. W tym wypadku równanie (15) ma postać

$$A_2TX_J^2 + A_1TX_J + A_0T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Po wykonaniu mnożenia i dodaniu odpowiednich elementów oraz przyrównaniu do zera poszczególnych elementów otrzymanej macierzy otrzymamy

$$7t_{21} = 0, \quad 3t_{12} + t_{22} = 0, \quad t_{21} = 0, \quad t_{22} + 3t_{12} = 0$$

Przyjmując $t_{11} = 1,\ t_{12} = -1$, z równań tych otrzymamy

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Ze wzoru (14) otrzymamy poszukiwane rozwiązanie w postaci

$$X = TX_JT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

6.5. Iloczyn Kroneckera oraz jego zastosowanie

6.5.1. Iloczyn Kroneckera macierzy i jego właściwości

Definicja 6.5.1. Iloczynem Kroneckera $A \otimes B$ macierzy $A=[a_{ij}]\in C^{m\times n}$ i macierzy $B=[b_{ij}]\in C^{p\times q}$ nazywamy macierz blokową mającą postać

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \hdashline a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in C^{mp\times nq} \tag{5.1}$$

Na przykład, iloczynem Kroneckera $A \otimes B$ macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

jest macierz

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & -1 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -1 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że na ogół $A\otimes B \neq B\otimes A$.
Bezpośrednio z definicji 1 wynikają następujące właściwości iloczynu Kroneckera macierzy:

1) $(\lambda A)\otimes B = A\otimes(\lambda B)=\lambda(A\otimes B)$
2) $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$
3) $A\otimes(B+C)=A\otimes B + A\otimes C$
4) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$
5) $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$

gdzie λ jest skalarem, a A, B, C są macierzami.

Twierdzenie 6.5.1. Jeżeli $A=[a_{ij}]\in C^{m\times m}$, $C=[c_{ij}]\in C^{m\times m}$, a $B=[b_{ij}]\in C^{n\times n}$, $D=[d_{ij}]\in C^{n\times n}$, to jest spełniona równość

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD \tag{5.2}$$

Dowód. Zauważmy, że element e_{kv} macierzy $E=A\otimes B$ jest równy $e_{kv}=a_{ru}b_{st}$, przy czym

$$k=(r-1)n+s,\ v=(u-1)n+t,\quad r,u=1,2,...,m;\ s,t=1,2,...,n$$

Analogicznie, element f_{vl} macierzy $F=C\otimes D$ jest równy $f_{vl}=c_{ui}d_{tj}$, przy czym $l=(i-1)n+j$, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$. Wobec tego element g_{kl} macierzy $G=(A\otimes B)(C\otimes D)$ jest równy

$$g_{kl}=\sum_{v=1}^{mn} e_{kv}f_{vl}=\sum_{v=1}^{mn} a_{ru}b_{st}c_{ui}d_{tj}$$

Ponieważ $v=(u-1)n+t$, więc

$$g_{kl}=\sum_{u=1}^{m} a_{ru}c_{ui}=\sum_{t=1}^{n} b_{st}d_{tj} \tag{5.3}$$

Zauważmy teraz, że $\sum_{u=1}^{m} a_{ru}c_{ui}$ jest elementem (r,i), tj. elementem położonym w r-tym wierszu i w i-tej kolumnie macierzy AC, a $\sum_{t=1}^{n} b_{st}d_{tj}$ jest elementem (s,j) macierzy BD. Wobec tego wyrażenie (3) jest elementem (k, l) macierzy $AC\otimes BD$.

■

Twierdzenie 6.5.2. Niech $A\in C^{m\times m}$, $B\in C^{n\times n}$. Wtedy:

$$A\otimes B=(A\otimes I_n)(I_m\otimes B) \tag{5.4}$$

$$\det[A\otimes B]=(\det A)^n(\det B)^m \tag{5.5}$$

Jeżeli macierze A i B są nieosobliwe, to

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1} \tag{5.6}$$

Dowód. Zależność (4) otrzymujemy z (2) dla $C = I_m$ i $B = I_n$. Z zależności (4) mamy

$$\det[A \otimes B] = \det[A \otimes I_n]\det[I_m \otimes B]$$

a po uwzględnieniu równości

$$\det[A \otimes I_n] = \det\begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix} = (\det A)^n$$

otrzymujemy (5).
Z równości (2) dla $C = A^{-1}$ i $D = B^{-1}$ otrzymujemy

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

Po pomnożeniu lewostronnie tej równości przez $(A \otimes B)^{-1}$ otrzymamy (6). ■

6.5.2. Zastosowania iloczynu Kroneckera macierzy do zapisu macierzowych równań

Weźmy pod uwagę równanie

$$AXB = C \tag{5.7}$$

przy czym $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{C}^{q \times p}$, $C \in \mathbf{C}^{m \times p}$ są dane, a $X \in \mathbf{C}^{n \times q}$ jest niewiadomą.

Twierdzenie 6.5.3. Równanie (7) jest równoważne równaniu

$$[A \otimes B^T]x = c \tag{5.8}$$

przy czym

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \quad c = [c_1, c_2, \ldots, c_m]^T$$

a x_i oraz c_i są odpowiednio i-tymi wierszami macierzy X i C.

Dowód. Z równania (7) dla elementu c_{ij} macierzy C mamy

$$c_{ij} = a_i X b_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k b_j, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, p \tag{5.9}$$

przy czym a_i jest i-tym wierszem macierzy A, b_j jest j-tą kolumną macierzy B, a a_{ij} jest (i, j) elementem macierzy A. Z definicji 1 iloczynu Kroneckera macierzy A i B^T oraz zależności (8) mamy

$$c_{ij} = a_i \otimes b_j^T x = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k b_j, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, p \tag{5.10}$$

Z porównania (9) i (10) wynika równoważność równań (7) i (8). ■

Przyjmując kolejno w równaniu (7) $B = I_q$ $(p = q)$ oraz $A = I_n$ $(m = n)$, otrzymujemy z twierdzenia 3 następujące dwa ważne wnioski.

Wniosek 6.5.1. Równanie

$$AX = C, \quad A \in \mathbf{C}^{m \times n}, \quad C \in \mathbf{C}^{m \times q} \tag{5.11}$$

jest równoważne równaniu

$$(A \otimes I_q)x = c \tag{5.12}$$

Wniosek 6.5.2. Równanie

$$XB = C, \quad B \in \mathbf{C}^{q \times p}, \quad C \in \mathbf{C}^{n \times q} \tag{5.13}$$

jest równoważne równaniu

$$(I_n \otimes B^T)x = c \tag{5.14}$$

Na przykład, układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

korzystając z (12), można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{32} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & a_{32} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{31} \\ b_{32} \end{bmatrix}$$

Dane jest równanie macierzowe

(5.15) $$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \ldots + A_kXB_k = C$$

przy czym A_j, B_j, $j = 1, \ldots, k$, C i X są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia n.
Z wierszy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ macierzy X oraz z wierszy $c_1, c_2, \ldots, c_n$ macierzy C tworzymy n^2 wymiarowe wektory

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \quad c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$$

Zapisując A_jXB_j, $j = 1, \ldots, k$ w postaci równoważnej $[A_j \otimes B_j^T]x$ dla $j = 1, \ldots, k$, możemy równanie (15) napisać w postaci

(5.16) $$Dx = c$$

przy czym

(5.17) $$D = A_1 \otimes B_1^T + A_2 \otimes B_2^T + \ldots + A_k \otimes B_k^T$$

Rozważmy z kolei równanie macierzowe

(5.18) $$AX - XB = C$$

przy czym $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbf{C}^{m\times m}$, $C \in \mathbf{C}^{n\times m}$ są dane, a $X \in \mathbf{C}^{n\times m}$ jest niewiadoma.
Niech

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T, \quad c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$$

przy czym x_i oraz c_i są i-tymi wierszami odpowiednio macierzy X i C. Korzystając ze wzorów (12) i (14), możemy macierzy AX przyporządkować wektor $(A \otimes I_m)x$, a macierzy XB – odpowiednio – wektor $(I_n \otimes B^T)x$. Równanie (18) możemy więc napisać w postaci

(5.19) $$(A \otimes I_m - I_n \otimes B^T)x = c$$

6.5.3. Wartości własne wielomianów macierzowych

Niech dany będzie wielomian stopnia p dwóch zmiennych niezależnych x i y o współczynnikach zespolonych c_{ij}, mający postać

(5.20) $$w(x, y) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij} x^i y^j$$

a A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia m i odpowiednio n o elementach rzeczywistych lub zespolonych.
Weźmy pod uwagę macierz kwadratową stopnia mn, określoną zależnością

(5.21) $$w(A, B) = \sum_{i,j=0}^{p} c_{ij} A^i \otimes B^j$$

przy czym $A^i \otimes B^j$ jest iloczynem Kroneckera macierzy A^i i B^j (p. def. 6.5.1).

Twierdzenie 6.5.4. Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ są wartościami własnymi macierzy A, a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ są wartościami własnymi macierzy B, to $w(\lambda_i, \mu_j)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ są wartościami własnymi macierzy $w(A, B)$ określonej zależnością (21).

Dowód. Niech A_J i B_J będą postaciami kanonicznymi Jordana macierzy A i B, a T_A i T_B będą nieosobliwymi macierzami przekształcającymi macierze A i B do postaci A_J i B_J, czyli

(5.22) $$A_J = T_A A T_A^{-1}, \quad B_J = T_B B T_B^{-1}$$

Na głównej przekątnej macierzy A_J występują wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, a na głównej przekątnej macierzy B_J odpowiednio wartości własne $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.
Z definicji iloczynu Kroneckera macierzy wynika, że na głównej przekątnej macierzy $A_J \otimes B_J$ występują wartości własne $\lambda_i \mu_j$ dla $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.
Wobec tego na głównej przekątnej macierzy $w(A_J, B_J)$ występują wartości własne $w(\lambda_i, \mu_j)$ dla $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Wykażemy, że macierze $w(A_J, B_J)$ i $w(A,B)$ są podobne, a więc mają te same wartości własne.
Biorąc pod uwagę zależności (22) oraz

$$A_1 A_2 A_3 \otimes B_1 B_2 B_3 = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(A_3 \otimes B_3)$$

możemy napisać

$$A_J \otimes B_J = T_A A T_A^{-1} \otimes T_B B T_B^{-1} = (T_A \otimes T_B)(A \otimes B)(T_A^{-1} \otimes T_B^{-1})$$

Po uwzględnieniu równości $T_A^{-1} \otimes T_B^{-1} = (T_A \otimes T_B)^{-1}$ otrzymamy

$$A_J \otimes B_J = (T_A \otimes T_B)(A \otimes B)(T_A \otimes T_B)^{-1}$$

Macierze $A_J \otimes B_J$ i $A \otimes B$ są więc podobne. Wobec tego

$$w(A_J, B_J) = (T_A \otimes T_B) w(A, B)(T_A \otimes T_B)^{-1}$$

Macierze $w(A_J, B_J)$ i $w(A, B)$ jako macierze podobne mają te same wartości własne.

■

Z twierdzenia 4 dla $w(x, y) = x + y$ oraz $w(x, y) = xy$ wynikają następujące wnioski.

Wniosek 6.5.3. Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ są wartościami własnymi macierzy A, a $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ są wartościami własnymi macierzy B^T, to $\lambda_i + \mu_j$ dla $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ są wartościami własnymi macierzy

(5.23) $$A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$$

Wniosek 6.5.4. Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ są wartościami własnymi macierzy A, a $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ są wartościami własnymi macierzy B, to $\lambda_i \mu_j$ dla $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ są wartościami własnymi macierzy $A \otimes B$.

6.6. Równanie Sylvestera i jego uogólnienie

6.6.1. Istnienie rozwiązania

Dane jest równanie Sylvestera o postaci

(6.1) $$AX - XB = C$$

gdzie A,B są macierzami kwadratowymi stopnia m i n, a C i X macierzami prostokątnymi o wymiarach $m \times n$. Mając dane macierze A,B i C należy wyznaczyć macierz X spełniającą równanie (1).
Z wierszy $x_1, x_2, ..., x_m$ macierzy X oraz z wierszy $c_1, c_2, ..., c_m$ macierzy C utwórzmy mn-wymiarowe wektory

(6.2) $$x = [x_1, x_2, ..., x_m]^T \quad c = [c_1, c_2, ..., c_m]^T$$

Korzystając z (5.19) możemy równanie (1) napisać w postaci

(6.3) $$Dx = c$$

przy czym

(6.4) $$D = A \otimes I_n - I_m \otimes B^T$$

jest macierzą kwadratową stopnia mn.

Twierdzenie 6.6.1. Równanie (1) ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A i B nie mają takich samych wartości własnych.

Dowód. Równanie (3) ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz D jest nieosobliwa. Macierz D jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wartości własne są niezerowe. Zgodnie z wnioskiem 5.3, wartościami własnymi macierzy (3) są liczby $\lambda_i - \mu_j$ dla $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Macierz D ma więc niezerowe wartości własne wtedy i tylko wtedy, gdy macierze A i B nie mają wspólnych wartości własnych. W tym przypadku D jest macierzą nieosobliwą i równanie (3) (w więc i (1)) ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$x = D^{-1}c \tag{6.5}$$

Zauważmy, że równanie Lyapunova

$$A^T P + PA = -Q \tag{6.6}$$

jest szczególnym przypadkiem równania Sylvestera (1) dla $X = P$, $A = A^T$, $B = -A$ i $C = -Q$.
W przypadku szczególnym dla $C = 0$ równanie (1) przyjmuje postać

$$AX - XB = 0 \tag{6.7}$$

Jeżeli macierze A i B nie mają takich samych wartości własnych, to macierz D jest nieosobliwa i równanie $Dx = 0$ ma tylko zerowe rozwiązanie $x = 0$. Mamy więc następujący wniosek.

Wniosek 6.6.1. Jeżeli macierze A i B nie mają takich samych wartości własnych, to równanie (7) ma tylko zerowe rozwiązanie $X = 0$. Równanie (7) ma niezerowe rozwiązanie, jeżeli macierze A i B mają przynajmniej jedną wspólną wartość własną.

Twierdzenie 6.6.2. Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A i $-B$ mają ujemne części rzeczywiste, to jedyne rozwiązanie równania (1) ma postać

$$X = -\int_0^\infty e^{At} C e^{-Bt} dt \tag{6.8}$$

Dowód. Podstawiając (8) do (1) otrzymamy

$$AX - XB = -\int_0^\infty \left(Ae^{At}Ce^{-Bt} - e^{At}Ce^{-Bt}B\right)dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{At}Ce^{-Bt}\right]dt = -\left.e^{At}Ce^{-Bt}\right|_0^\infty = C$$

gdyż macierze A i $-B$ są stabilne asymptotycznie i zachodzi

$$\lim_{i\to\infty} e^{At}Ce^{-Bt} = 0$$

W tym wypadku macierze A i B nie mają wspólnych wartości własnych i zgodnie z twierdzeniem 1 równanie (1) ma więc dokładnie jedno rozwiązanie.

■

6.6.2. Metody wyznaczania rozwiązania równania Sylvestera

6.6.2.1. Metoda iloczynu Kroneckera

W przypadku, gdy macierze A i B nie mają wspólnych wartości własnych, rozwiązanie równania (1) możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury

Procedura 6.6.1.

Krok 1. Z wierszy macierzy X i C tworzymy wektory x i c mające postać (2).

Krok 2. Korzystając z zależności (4), wyznaczamy macierz D.

Krok 3. Korzystając ze wzoru (5), wyznaczamy wektor x, a następnie poszukiwaną macierz X.

Przykład 6.6.1. Wyznaczyć rozwiązanie X równania (1) dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Korzystając z procedury 1 otrzymamy

Krok 1. Korzystając z (2), wyznaczamy wektor

$$c^T = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1]$$

Krok 2. Zgodnie z zależnością (4) macierz D ma postać

$$D = A \otimes I_n - I_m \otimes B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \otimes I_3 + I_2 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Wobec tego ze wzoru (5) otrzymamy

$$
\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{288} \begin{bmatrix} -119 \\ -34 \\ -59 \\ -9 \\ -126 \\ 27 \end{bmatrix}
$$

Poszukiwane rozwiązanie ma więc postać

$$
X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{288} \begin{bmatrix} -119 & -34 & -59 \\ -9 & -126 & 27 \end{bmatrix}
$$

6.6.2.2. Metoda całkowania

Jeżeli macierze A i $-B$ mają wszystkie wartości własne o ujemnych częściach rzeczywistych, to rozwiązanie równania (1) możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 6.6.2.
Krok 1. Wyznaczamy wielomiany minimalne $\psi_A(\lambda), \psi_B(\lambda)$ macierzy A i $-B$.

Krok 2. Wyznaczamy e^{At} i e^{-Bt}.

Krok 3. Z wzoru (8) wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie X.

Przykład 6.6.2. Korzystając z procedury 2 wyznaczyć rozwiązanie X równania (1) dla macierzy (9).
Łatwo zauważyć, że macierze A i $-B$ mają wszystkie wartości własne o ujemnych częściach rzeczywistych. Korzystając z procedury 2, otrzymamy kolejno.

Krok 1. W tym wypadku wielomiany charakterystyczne macierzy A i $-B$ pokrywają się z ich wielomianami minimalnymi i są równe

$$
\psi_A(\lambda) = \varphi_A(\lambda) = \det[\lambda I_m - A] = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+3)
$$

$$
\psi_B(\lambda) = \varphi_B(\lambda) = \det[\lambda I_n + B] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3
$$

Krok 2. Macierz A ma jednokrotne wartości własne $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3$, a macierz $-B$ jedną potrójną wartość własną: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 - 1$. Korzystając ze wzoru Sylvestera, otrzymamy

$$
e^{At} = Z_1 e^{\lambda_1 t} + Z_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A - \lambda_2 I_m)e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(A - \lambda_1 I_m)e^{\lambda_2 t} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}
$$

oraz

$$
e^{-Bt} = Z_{11} e^{\mu_1 t} + Z_{12} t e^{\mu_1 t} + Z_{13} t^2 e^{\mu_1 t} = I_3 e^{\mu_1 t} + (-B + I_3) t e^{\mu_1 t} + \frac{1}{2}(-B + I_3)^2 t^2 e^{\mu_1 t} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} t e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} t^2 e^{-t} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 & t + t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 & 1 + t - t^2 & t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t + \frac{1}{2}t^2 & -3t + t^2 & 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{-t}
$$

Krok 3. Ze wzoru (8) mamy

$$
X = -\int_0^\infty e^{At} C e^{-Bt} dt = -\int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 & t + t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 & 1 + t - t^2 & t - \frac{1}{2}t^2 \\ -t + \frac{1}{2}t^2 & -3t + t^2 & 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{-t} dt =
$$

$$
= -\int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{-3t}(1+t) + e^{-4t}(-t + t^2) & e^{-3t}(1+2t) + e^{-4t}(-1 - 4t + 2t^2) & e^{-3t} t + e^{-4t}(t^2 - 3t + 1) \\ e^{-4t}(t - t^2) & e^{-4t}(1 + 4t - 2t^2) & e^{-4t}(-1 + 3t + t^2) \end{bmatrix} dt
$$

$$
= \frac{1}{288} \begin{bmatrix} -119 & -34 & -59 \\ -9 & 126 & 27 \end{bmatrix}
$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym w przykładzie 1.

■

6.6.2.3. Metoda wielomianu minimalnego

Ta metoda rozwiązania równania (1) opiera się na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 6.6.3. Niech $\Psi_A(s)=s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\ldots+a_1s+a_0$ będzie wielomianem minimalnym macierzy $A\in \boldsymbol{R}^{m\times m}$, a $\Psi_B(s)=s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_1s+b_0$ wielomianem minimalnym macierzy $B\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$. Niech wielomiany te będą względnie pierwsze (nie mają wspólnych miejsc zerowych). Rozwiązanie równania (1) ma postać

(6.10) $$X=[\Psi_B(s)]^{-1}[C_n+b_{n-1}C_{n-1}+\ldots+b_1C_1]$$

lub

(6.11) $$X=-[C_m+a_{m-1}C_{m-1}+\ldots+a_1C_1][\Psi_A(s)]^{-1}$$

gdzie

(6.12) $$C_k=\sum_{i=1}^{k}A^{i-1}CB^{k-i},\quad C_0=0,\ k=1,2,\ldots$$

Dowód. Korzystając z (1) oraz (12), możemy napisać

(6.13) $$\begin{aligned} C_0&=A^0X-XB^0=0\\ C_1&=AX-XB=C\\ C_2&=A^2X-XB^2=AC+CB\\ C_3&=A^3X-XB^3=A^2C+ACB+CB^2\\ &\cdots\\ C_k&=A^kX-XB^k=\sum_{i=1}^{k}A^{i-1}CB^{k-i}\end{aligned}$$

Uwzględniając, że $C_k=A^kX-XB^k$, $k=1,2,\ldots$, wyrażenie $b_1C_1+b_2C_2+\ldots+b_{n-1}C_{n-1}+C_n$ napiszemy w postaci

(6.14) $$\Psi_B(A)X-X\Psi_B(B)=b_1C_1+b_2C_2+\ldots+b_{n-1}C_{n-1}+C_n$$

a po uwzględnieniu, że $\Psi_B(B)=0$ i pomnożeniu lewostronnie przez $[\Psi_B(A)]^{-1}$ - poszukiwaną zależność (10).
Analogicznie, $a_1C_1+a_2C_2+\ldots+a_{m-1}C_{m-1}+C_m$ napiszemy w postaci

(6.15) $$\Psi_A(A)X-X\Psi_A(B)=a_1C_1+a_2C_2+\ldots+a_{m-1}C_{m-1}+C_m$$

a po uwzględnieniu, że $\Psi_A(A)=0$ i pomnożeniu prawostronnie (15) przez $[\Psi_A(B)]^{-1}$ – poszukiwaną zależność (11).

■

Jeżeli równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie X, to rozwiązanie to można wyznaczyć korzystając z następującej procedury wynikającej z twierdzenia 3.

Procedura 6.6.3.
Krok 1. Wyznaczyć wielomian minimalny (charakterystyczny) $\Psi_A(s)$ ($\Psi_B(s)$) macierzy A (B).
Krok 2. Korzystając z zależności (12), wyznaczyć macierze $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (C_n)
Krok 3. Ze wzoru (11) (lub (10)) wyznaczyć poszukiwane rozwiązanie X.

Przykład 6.6.3. Wyznaczyć rozwiązanie X równania (1) dla macierzy (9), korzystając z procedury 3.

W tym wypadku otrzymamy kolejno.

Krok 1. Wielomian minimalny macierzy A pokrywa się z wielomianem charakterystycznym i jest równy

$$\Psi_A(s)=\det[Is-A]=\begin{vmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+3\end{vmatrix}=s^2+5s+6$$

a wielomian $\Psi_A(B)$ ma postać

$$\Psi_A(B)=B^2+5B+6I=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&3&3\end{bmatrix}^2+5\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-5&1\\-1&3&-8\\8&23&27\end{bmatrix}$$

Krok 2. Korzystając z zależności (12), otrzymamy

$$C_1=C=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad C_2=AC+CB=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3&0\\-1&-6&-1\end{bmatrix}$$

Krok 3. Ze wzoru (11) mamy

$$X=-[C_2+5C_1][\Psi_A(B)]^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -5 & 1\\ -1 & 3 & -8\\ 8 & 23 & 27\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{288}\begin{bmatrix}-119 & -34 & -59\\ -9 & -126 & 27\end{bmatrix}$$

Wynik ten jest zgodny z wynikiem otrzymanym w przykładzie 1 i 2.

6.6.2.4. Metoda równania pomocniczego

Ta metoda rozwiązywania równania (1) opiera się na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 6.6.4. Niech macierze A i B mają różne wartości własne. Rozwiązanie X równania (1) ma postać

(6.16) $$X=M_A(\Gamma\otimes I_q)N_B$$

przy czym macierz $\Gamma\in R^{m\times n}$ jest rozwiązaniem równania

(6.17) $$K_A^T\Gamma-\Gamma K_B=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

$$M_A=[C_A \quad AC_A \quad \dots \quad A^{m-1}C_A] \quad N_B=\begin{bmatrix}C_B\\ C_BB\\ \vdots\\ C_BB^{n-1}\end{bmatrix},$$

$$K_A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1}\end{bmatrix},\quad K_B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1}\end{bmatrix}$$

$$C=C_AC_B,\quad C_A\in R^{r\times q},\ C_B\in R^{q\times n},\ \text{rząd}\ C_A=\text{rząd}\ C_B=q$$

a a_i, $i=0,1,\dots,m-1$, b_j, $j=0,1,\dots,n-1$ są współczynnikami wielomianu minimalnego $\Psi_A(s)$ i $\Psi_B(s)$ macierzy A i B.

Dowód. Korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona dla macierzy A, łatwo sprawdzić, że

(6.18a)
$$AM_A=\left[AC_A \quad A^2C_A \quad \dots \quad A^{m-1}C_A \quad -\sum_{i=1}^{m-1}a_iA^iC_A\right]=$$

$$=[C_A \quad AC_A \quad \dots \quad A^{m-1}C_A]\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -a_0I_q\\ I_q & 0 & \dots & 0 & -a_1I_q\\ 0 & I_q & \dots & 0 & -a_2I_q\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & I_q & -a_{m-1}I_q\end{bmatrix}=M_A[K_A^T\otimes I_q]$$

Analogicznie

(6.18b)
$$N_BB=\begin{bmatrix}C_BB\\ C_BB^2\\ \\ C_BB^{n-1}\\ -C_B\sum_{i=0}^{n-1}b_iB^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_q & 0 & \dots & 0\\ I_q & 0 & I_q & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_q\\ -b_0I_q & -b_1I_q & -b_2I_q & \dots & -a_{n-1}I_q\end{bmatrix}=[K_B\otimes I_q]N_B$$

Korzystając z (16) i (18) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
AX - XB &= AM_A(\Gamma \otimes I_q)N_B - M_A(\Gamma \otimes I_q)N_B B = \\
&= M_A[K_A^T \otimes I_q](\Gamma \otimes I_q)N_B - M_A(\Gamma \otimes I_q)[K_B \otimes I_q]N_B = \\
&= M_A\{[K_A^T \otimes I_q][\Gamma \otimes I_q] - [\Gamma \otimes I_q][K_B \otimes I_q]\}N_B = \\
&= M_A\{(K_A^T \Gamma) \otimes I_q - (\Gamma K_B) \otimes I_q\}N_B = \\
&= M_A\{(K_A^T \Gamma - \Gamma K_B) \otimes I_q\}N_B
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

Zauważmy, że

$$
C = C_A C_B = M_A\left\{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\right) \otimes I_q\right\}N_B \tag{6.20}
$$

Z porównania (20) i (19) otrzymamy

$$
(K_A^T \Gamma - \Gamma K_B) \otimes I_q = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\right) \otimes I_q
$$

czyli równanie (17). ∎

Rozwiązanie równaia (1) zostało więc sprowadzone do rozwiązania równania (17) względem Γ przy znanych macierzach K_A i K_B.

Jeżeli równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie, to rozwiązanie to możemy wyznaczyć korzystając z następującej procedury wynikającej z twierdzenia 4.

Procedura 6.6.4.
Krok 1. Wyznaczamy wielomiany minimalne

$$
\begin{aligned}
\Psi_A(s) &= s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\
\Psi_B(s) &= s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

macierzy A i B.

Krok 2. Znając współczynniki a_i, $i = 0,1,\dots,m-1$ i b_j, $j = 0,1,\dots,n-1$ wielomianów (21) wyznaczamy równanie (17).
Krok 3. Rozwiązując równanie (17) wyznaczamy macierz Γ.
Krok 4. Macierz C rozkładamy na iloczyn macierzy C_A i C_B, takich, że rząd C_A = rząd C_B = rząd C.
Krok 5. Korzystając ze wzoru (16) wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie X.

Przykład 6.6.4. Korzystając z procedury 4 wyznaczyć rozwiązanie X równania (1) dla macierzy (9).
W tym przypadku kolejno otrzymamy.

Krok 1. Wielomiany minimalne macierzy (9) pokrywają się z wielomianami charakterystycznymi i są równe

$$
\Psi_A(s) = \det[Is - A] = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6
$$

$$
\Psi_B(s) = \det[Is - B] = \begin{vmatrix} s & 1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ -1 & -3 & s-3 \end{vmatrix} = s^3 - 3s^2 + 3s - 1
$$

Krok 2. Równanie (17) w tym wypadku ma więc postać

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}^T \Gamma - \Gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Równanie to jest równoważne układowi równań (p. 6.6.2.1)

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & -6 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & +3 & 0 & -6 & 0 \\
0 & -1 & -3 & 0 & 0 & -6 \\
1 & 0 & 0 & -5 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -5 & +3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -8
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.22}
$$

Krok 3. Rozwiązanie równania (22) ma postać

$$\Gamma = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-227}{288} & \frac{53}{144} & \frac{-23}{288} \\ \frac{-265}{1728} & \frac{79}{864} & \frac{-37}{1728} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

Krok 4. Macierz C rozkładamy na iloczyn macierzy

$$C_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Krok 5. Korzystając z wzoru (16) oraz (23) i (24), otrzymamy

$$X = [C_A \quad AC_A][\Gamma \otimes I_2]\begin{bmatrix} C_B \\ C_B B \\ C_B B^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{288}\begin{bmatrix} -119 & -34 & -59 \\ -9 & -126 & 27 \end{bmatrix}$$

Wynik ten jest zgody z wynikami otrzymanymi w poprzednich trzech przykładach.

6.6.3. Uogólnienie równania Sylvestera

Weźmy pod uwagę równanie mające postać

$$XA - FXE = HC \tag{6.25}$$

przy czym $A, E \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbf{R}^{r\times r}$, $H \in \mathbf{R}^{r\times p}$ i $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$.
Wykażemy, że wyznaczenie rozwiązania $X \in R^{r\times n}$ równania (25) sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego równania Sylvestera.
Równanie (25) nazywamy uogólnionym równaniem Sylvestera.

Twierdzenie 6.6.5. Niech

$$\det[Es - A] \neq 0 \quad \text{dla pewnych } s \in \mathbf{C} \tag{6.26}$$

oraz widma pary (E, A) i macierzy F będą rozłączne. Równanie (25) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy ma rozwiązanie $X \in \mathbf{R}^{r\times n}$ równanie Sylvestera o postaci

$$\overline{A}X - X\overline{B} = \overline{C} \tag{6.27}$$

przy czym

$$\overline{A} = [I_r s_1 - F]^{-1} \in \mathbf{R}^{r\times r}, \quad \overline{B} = E[Es_1 - A]^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$
$$\overline{C} = -[Es_1 - F]^{-1} HC[Es_1 - A]^{-1} \in \mathbf{R}^{r\times n}$$

Dowód. Jeżeli jest spełniony warunek (26), to istnieje liczba $s_1 \in \mathbf{C}$ taka, że macierz $[Es_1 - A]$ jest nieosobliwa. Dodając i odejmując od lewej strony równania (25) macierz XEs_1, otrzymamy

$$X[Es_1 - A] - [I_r s_1 - F]XE = -HC \tag{6.28}$$

Mnożąc lewostronnie równanie (28) przez macierz $[I_r s_1 - F]^{-1}$ oraz prawostronnie przez macierz $[Es_1 - A]^{-1}$, otrzymamy równanie (27).

■

Zauważmy, że wartości własne $\overline{A}$ są odwrotnościami wartości własnych macierzy F, a

$$\det[I_n s - \overline{B}] = \det[I_n s - E(Es_1 - A)^{-1}]$$

6.7. Algebraiczne równania macierzowe z dwiema niewiadomymi

6.7.1. Istnienie rozwiązania

Weźmy pod uwagę równanie macierzowe

$$XA + BY + XCY = D \tag{7.1}$$

przy czym macierze $A \in \mathbf{R}^{n\times q}$, $B \in \mathbf{R}^{p\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$ i $D \in \mathbf{R}^{p\times q}$ są dane.
Należy wyznaczyć macierze $X \in \mathbf{R}^{p\times n}$ i $Y \in \mathbf{R}^{m\times q}$ spełniające to równanie. W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z uogólnionej macierzy pseudo-

odwrotnej Moore'a-Penrose'a, którą krótko będziemy nazywać macierzą pseudo-odwrotną.

Macierz pseudoodwrotną macierzy $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ nazywamy macierzą $A^+ \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ spełniającą warunki

(7.2a) $$AA^+ = A$$

(7.2b) $$AA^+ A = A^+$$

(7.2c) $$\left(AA^+\right)^T = AA^+$$

(7.2d) $$\left(A^+ A\right)^T = A^+ A$$

Dla dowolnej macierzy $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ istnieje tylko jedna macierz pseudoodwrotna $A^+ \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$. Macierz tę można wyznaczyć, korzystając z rozkładu macierzy A według wartości szczególnych SVD [152]. Jeżeli macierz $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ jest nieosobliwa, to $A^+ = A^{-1}$ (zwykła macierz odwrotna).

Twierdzenie 6.7.1. Równanie (1) ma rozwiązanie wtedy, gdy

(7.3) $$\text{rząd}\left[D + BC^+ A\right] \leq \max(n, m)$$

gdzie C^+ jest macierzą pseudoodwrotną macierzy C.

Dowód. Przyjmując

(7.4a) $$Z_a = A + CY$$

możemy równanie (1) napisać w postaci

(7.5a) $$XZ_a + BY = D$$

Rozwiązując równanie (4a) względem Y, otrzymamy

(7.6a) $$Y = C^+\left(Z_a - A\right)$$

a po podstawieniu (6a) do (5a)

(7.7a) $$\left(X + BC^+\right)Z_a = D + BC^+ A$$

Macierz $D + BC^+ A \in \boldsymbol{R}^{p \times q}$ można przedstawić w postaci iloczynu dwóch macierzy $H \in \boldsymbol{R}^{p \times n}$ i $F \in \boldsymbol{R}^{n \times q}$

(7.8) $$D + BC^+ A = HF$$

wtedy, gdy jest spełniony warunek (3).

Z zależności (7a) i (8) otrzymamy wtedy $X + BC^+ = H$ oraz $Z_a = F$. Znając H i F możemy wyznaczyć poszukiwane macierze z zależności

(7.9a) $$X = H - BC^+, \quad Y = C^+\left(F - A\right)$$

Przyjmując natomiast

(7.4b) $$Z_b = B + XC$$

możemy równanie (1) napisać w postaci

(7.5b) $$XA + Z_b Y = D$$

Rozwiązując równwnie (4b) względem X otrzymamy

(7.6b) $$X = \left(Z_b - B\right)C^+$$

a po podstawieniu (6b) do (5b)

(7.7b) $$Z_b\left(C^+ A + Y\right) = D + BC^+ A$$

Macierz $D + BC^+ A$ możemy przedstawić w postaci iloczynu (8) gdy jest spełniony warunek (3). Z zależności (7b) i (8) otrzymamy wtedy $Z_b = H$ oraz $C^+ A + Y = F$. Znając H i F możemy wyznaczyć

(7.9b) $$X = \left(H - B\right)C^+, \quad Y = F - C^+ A$$

Uwaga 7.7.1. Z niejednoznaczności rozkładu (8) wynika, że równanie (1) ma wiele różnych rozwiązań X, Y.

6.7.2. Wyznaczanie rozwiązań

Jeżeli jest spełniony warunek (3), to rozwiązanie X, Y równania (1) można wyznaczyć, korzystając z następującej procedury, która wynika z dowodu twierdzenia 1.

Procedura 6.7.1.

Krok 1. Wyznaczamy macierz pseudoodwrotną C^+ dla macierzy C oraz macierz $D+BC^+A$.

Krok 2. Rozkładamy macierz $D+BC^+A \in \boldsymbol{R}^{p\times q}$ na iloczyn macierzy $H \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$ i $F \in \boldsymbol{R}^{n\times q}$.

Krok 3. Korzystając z zależności (9a), wyznaczamy poszukiwane rozwiązanie X, Y.

Przykład 6.7.1. Korzystając z procedury 1, wyznaczyć rozwiązanie X, Y równania (1) dla macierzy

$$A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-10\\10\end{bmatrix} \tag{7.10}$$

W tym wypadku $m=p=n=2$, $q=1$, a macierz C jest nieosobliwa.
Wobec tego

$$C^+=C^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix},\quad D+BC^+A=\begin{bmatrix}-10\\10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Warunek (3) jest spełniony, gdyż $\operatorname{rząd}\left[D+BC^+A\right]=\operatorname{rząd}\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix}=1<n=2$.

Rozpatrywane równanie (1) ma więc rozwiązanie.
Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno.

Krok 1. Macierz $D+BC^+A$ ma postać (11).
Krok 2. Macierz (11) można rozłożyć na iloczyn dwóch różnych macierzy.
Rozpatrzmy dwa przypadki tego rozkładu

$$D+BC^+A=\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix}=H_1F_1 \quad \text{dla} \quad H_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\quad F_1=\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix} \tag{7.12a}$$

$$D+BC^+A=\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix}=H_2F_2 \quad \text{dla} \quad H_2=\begin{bmatrix}0 & 5\\-1 & -1\end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix}-7\\-1\end{bmatrix} \tag{7.12b}$$

Krok 3. Korzystając z zależności (9a) otrzymamy
Dla przypadku (12a)

$$\begin{aligned} X&=H_1-BC^+=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 2\end{bmatrix}\\ Y&=C^+(F_1-A)=\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-5\\8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}24\\18\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.13a}$$

dla przypadku (12b)

$$\begin{aligned} X&=H_2-BC^+=\begin{bmatrix}0 & 5\\-1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\\ Y&=C^+(F_2-A)=\begin{bmatrix}-1 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-7\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.13b}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (13a) i (13b) spełniają równanie (1) dla macierzy (10).

6.8. Równania Lyapunova

6.8.1. Rozwiązanie równania Lyapunova

Definicja 6.8.1. Równania macierzowe

$$XA+A^TX=-Q \tag{8.1a}$$

$$AX+XA^T=-Q \tag{8.1b}$$

nazywamy równaniami Lyapunova, jeżeli macierze $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ i $Q\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ (dodatnio określone lub półdodatnio określone) są dane, a $X\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ (dodatnio określona) jest macierzą poszukiwaną.

Twierdzenie 6.8.1. Niech macierz A będzie stabilna asymptotycznie, a macierz Q będzie macierzą symetryczną dodatnio (lub półdodatnio) określoną. Wtedy równanie (1a) ma dokładnie jedno rozwiązanie w postaci

(8.2a)
$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

będące macierzą dodatnio (półdodatnio) określoną, a równanie (1b) ma dokładnie jedno rozwiązanie mające postać

(8.2b)
$$X = \int_0^\infty e^{At} Q e^{A^T t} dt$$

będące macierzą dodatnio (półdodatnio) określoną.

Dowód. Podstawiając (2a) do (1a) otrzymamy

$$XA + A^T X = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt A + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt =$$
$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} Q e^{At}\right) dt = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty = -Q$$

gdyż z założenia macierz A jest stabilna asymptotycznie i $e^{At} \to 0$ dla $t \to \infty$.
Wykażemy, że jeżeli macierz Q jest dodatnio (półdodatnio) określona, to macierz (2a) jest macierzą dodatnio (półdodatnio) określoną, czyli forma kwadratowa na niej zbudowana jest dodatnio (półdodatnio) określona, tj. $z^T X z > 0$ ($z^T X z \geq 0$) dla każdego $z \neq 0$.
Korzystając z (2a), możemy napisać

(8.3)
$$z^T X z = \int_0^\infty z^T e^{A^T t} Q e^{At} z dt$$

Macierze $e^{A^T t}$ i e^{At} są nieosobliwe dla każdego $t \geq 0$. Wobec tego, jeżeli macierz Q jest dodatnio określona (półokreślona), to z (3) wynika, że $z^T X z > 0$ dla każdego $z \neq 0$ ($z^T X z \geq 0$ dla każdego z).
Aby wykazać, że równanie (1a) ma dokładnie jedno rozwiązanie przypuśćmy, że ma ono dwa różne rozwiązania X_1 i X_2, czyli

(8.4)
$$X_1 A + A^T X_1 = -Q \quad \text{i} \quad X_2 A + A^T X_2 = -Q$$

Odejmując od siebie równania (4), otrzymamy

(8.5)
$$(X_1 - X_2)A + A^T(X_1 - X_2) = 0$$

Mnożąc lewostronnie równanie (5) przez $e^{A^T t}$ i prawostronnie przez e^{At}, otrzymamy

$$e^{A^T t}\left[(X_1 - X_2)A + A^T(X_1 - X_2)\right]e^{At} = 0$$

oraz

(8.6)
$$\frac{d}{dt}\left[e^{A^T t}(X_1 - X_2)e^{At}\right] = 0$$

Z zależności (6) wynika, że macierz $e^{A^T t}(X_1 - X_2)e^{At}$ jest macierzą stałą dla wszystkich t. Wyznaczając wartość tej macierzy dla $t = 0$ oraz uwzględniając (6) otrzymamy $X_1 - X_2 = 0$, gdyż $e^{At}\big|_{t=0} = I$. Ten sam wynik otrzymamy dla $t = \infty$, gdyż $e^{At} \to 0$ dla $t \to \infty$.
Dowód dla równania (1b) jest analogiczny.

■

6.8.2. Równania Lyapunova z półokreśloną dodatnio macierzą

W wielu przypadkach macierz Q w równaniach Lyapunova ma postać $Q = CC^T$ lub $Q = BB^T$, czyli jest macierzą półokreśloną dodatnio.

Twierdzenie 6.8.2. Jeżeli $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ jest macierzą stabilną asymptotycznie, to równanie Lyapunova

(8.7)
$$XA + A^T X = -C^T C$$

ma dokładnie jedno dodatnio określone symetryczne rozwiązanie w postaci

(8.8)
$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

wtedy i tylko wtedy, gdy para (A, C) jest obserwowalna.

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1 rozwiązanie równania (7) ma postać (8). Stosując metodę przez zaprzeczenie, przypuśćmy, że rozwiązanie to nie jest dodatnio określone. Wtedy istnieje wektor z taki, że $Xz = 0$. W tym wypadku z (8) mamy

(8.9)
$$z^T Xz = \int_0^\infty \left\| Ce^{At} z \right\|^2 dt$$

czyli $Ce^{At} z = 0$.
Różniczkując tę zależność i obliczając wartości tej pochodnej dla $t = 0$, otrzymamy $CA^k z = 0$ dla $k = 0, 1, ..., n-1$, czyli

(8.10)
$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} z = 0$$

Z założenia para (A, C) jest obserwowalna. Z równania (10) mamy więc $z = 0$, co przeczy przypuszczeniu, że macierz (8) nie jest dodatnio określona. Rozwiązanie (8) jest więc macierzą dodatnio określoną.
Stosując również metodę przez zaprzeczenie, wykażemy z kolei, że stabilność asymptotyczna macierzy A i dodatnia określoność macierzy (8) implikuje obserwowalność pary (A, C).

Przypuśćmy, że para (A, C) nie jest obserwowalna, czyli rząd $\begin{bmatrix} Is - A \\ C \end{bmatrix} < n$ dla wszystkich $s \in \mathbf{C}$. W tym wypadku istnieje wektor własny x macierzy A ($Ax = sx$) taki, że $Cx = 0$, a z równania (7) otrzymamy

$$x^* XAx + x^* A^T Xx = -x^* C^T Cx = -\left\| Cx \right\|^2$$

(x^* sprzężony wektor transponowany)

czyli

(8.11)
$$(s + \bar{s}) x^* Xx = -\left\| Cx \right\|^2 = 0 \text{ gdyż } Cx = 0$$

gdzie $\bar{s}$ jest liczbą sprzężoną do s.

Z założenia macierz A jest stabilna asymptotycznie, zatem $s + \bar{s} < 0$. Z zależności (11) mamy więc $x^* Xx = 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż z założenia macierz X jest dodatnio określona.

■

Twierdzenie 6.8.3. Jeżeli para (A, C) jest obserwowalna, to macierz A jest stabilna asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna macierz symetryczna dodatnio określona X spełniająca równość (7).

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 2, jeżeli macierz A jest stabilna asymptotycznie i para (A, C) jest obserwowalna, to równanie (7) ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnio określone mające postać (8). Wykażemy, że jeżeli para (A, C) jest obserwowalna oraz macierz X jest dodatnio określona, to macierz A jest stabilna asymptotycznie. Niech x będzie wektorem własnym macierzy A przyporządkowanym wartości własnej s. W ten sam sposób jak w dowodzie twierdzenia 2 możemy wykazać, że

(8.12)
$$(s + \bar{s}) x^* Xx = -\left\| Cx \right\|^2$$

Z założenia para (A, C) jest obserwowalna, zatem $Cx \neq 0$ oraz $x^* Xx > 0$, gdyż macierz X jest dodatnio określona. Z równości (12) mamy więc $s + \bar{s} < 0$, co oznacza stabilność asymptotyczną macierzy A.

■

Podsumowując nasze dotychchczasowe rozważania, otrzymujemy następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie 6.8.4. Niech macierz X będzie rozwiązaniem równania (7). Wtedy
1. Jeżeli macierz X jest dodatnio określona oraz para (A, C) jest obserwowalna, to macierz A jest stabilna asymptotycznie.
2. Jeżeli macierz A jest stabilna asymptotycznie oraz para (A, C) jest obserwowalna, to macierz X jest dodatnio określona.
3. Jeżeli macierz A jest stabilna asymptotycznie oraz macierz X jest dodatnio określona, to para (A, C) jest obserwowalna.

Weźmy z kolei pod uwagę równanie Lyapunova o postaci

(8.13)
$$AX + XA^T = -BB^T$$

Biorąc pod uwagę, że sterowalność pary (A, B) jest pojęciem dualnym względem pojęcia obserwowalności pary (A, C), możemy natychmiast analogicznie udowodnić prawdziwość następujących twierdzeń.

Twierdzenie 6.8.5. Jeżeli A jest macierzą stabilną asymptotycznie, to równanie (13) ma dokładnie jedno dodatnio określone symetryczne rozwiązanie X wtedy i tylko wtedy, gdy para (A, B) jest sterowalna.

Twierdzenie 6.8.6. Niech para (A,B) będzie sterowalna. Wtedy macierz A jest stabilna asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedno symetryczne dodatnio określone rozwiązanie równania (13).

Twierdzenie 6.8.7. Niech macierz X będzie rozwiązaniem równania (13). Wtedy:
1. Jeżeli macierz X jest dodatnio określona oraz para (A,B) jest sterowalna, to macierz A jest stabilna asymptotycznie.
2. Jeżeli macierz A jest stabilna asymptotycznie oraz para (A,B) jest sterowalna, to macierz X jest dodatnio określona.
3. Jeżeli macierz A jest stabilna asymptotycznie oraz macierz X jest dodatnio określona, to para (A,B) jest sterowalna.

7. Realizacja i obserwatory doskonałe układów singularnych

7.1. Wyznaczanie realizacji minimalnych singularnych układów liniowych

7.1.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę singularny układ ciągły

(1.1a) $$E\dot{x} = Ax + B_0u + B_1\dot{u}$$

(1.1b) $$y = Cx + Du$$

gdzie $x \in \boldsymbol{R}^n$, $u \in \boldsymbol{R}^m$ i $y \in \boldsymbol{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszeń i odpowiedzi $E, A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B_0, B_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{p\times m}$.
Zakładamy, że $\det E = 0$ oraz, że para (E,A) jest regularna, tzn.

(1.2) $$\det[Es - A] \neq 0 \text{ dla pewnych } s \in \boldsymbol{C}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ jest ciałem liczb zespolonych.
Macierz transmitancji układu (1) jest dana wzorem

(1.3) $$T(s) = C[Es - A]^{-1}(B_0 + sB_1) + D$$

Macierz transmitancji (3) nazywamy macierzą właściwą (ściśle właściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.4) $$\lim_{s\to\infty} T(s) = K \in \boldsymbol{R}^{p\times m} \text{ oraz } K \neq 0 \quad (K = 0)$$

W przeciwnym wypadku macierz tę nazywamy niewłaściwą.
Równania (1) możemy napisać w postaci

(1.5a) $$\overline{E}\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u$$

(1.5b) $$y = \overline{C}\overline{x} + \overline{D}u$$

gdzie

$$\overline{E} = \begin{bmatrix} E & -B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}, \quad \overline{x} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}},$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}, \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ -I_m \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times m}, \quad \overline{n} = n + m$$

(1.5c) $$\overline{C} = [C \quad 0] \in \boldsymbol{R}^{p\times\overline{n}}, \quad \overline{D} = D$$

Równania (1) można również napisać w postaci

(1.6a) $$\overline{E}\dot{\overline{x}} = \tilde{A}\overline{x} + \tilde{B}u$$

(1.6b) $$y = \tilde{C}\overline{x}$$

gdzie

(1.6c) $$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_m \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{\overline{n}\times m}, \quad \tilde{C} = [C \quad D] \in \boldsymbol{R}^{p\times\overline{n}}$$

Definicja 7.1.1. Macierze E, A, B_0, B_1, C i D nazywamy realizacją macierzy wymiernej $T(s) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$ (zbiór macierzy $p \times m$ wymiernych zmiennej s), jeżeli macierze te spełniają równość (3). Realizację (E, A, B_0, B_1, C, D) nazywamy minimalną wtedy i tylko wtedy, gdy macierze E i A mają minimalne wymiary wśród wszystkich realizacji macierzy $T(s)$.

Realizacja $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ lub $(\overline{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy układ (5) lub odpowiednio układ (6) jest całkowicie sterowalny i całkowicie obserwowalny.
Układ (5) jest całkowicie sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.7)
$$\text{rząd}[\overline{E}, \overline{B}] = \overline{n} \quad \text{oraz} \quad \text{rząd}[\overline{E}s - \overline{A}, \overline{B}] = \overline{n} \quad \text{dla wszystkich skończonych } s \in \boldsymbol{C}$$

gdzie $\overline{n}$ jest wymiarem wektora stanu $\overline{x}$.

Układ (5) jest całkowicie obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.8)
$$\text{rząd}\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{C} \end{bmatrix} = \overline{n} \quad \text{oraz} \quad \text{rząd}\begin{bmatrix} \overline{E}s - \overline{A} \\ \overline{C} \end{bmatrix} = \overline{n} \quad \text{dla wszystkich skończonych } s \in \boldsymbol{C}$$

Problem realizacji możemy sformułować następująco. Dana jest wymierna macierz niewłaściwa $T(s) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$, należy wyznaczyć realizację (E, A, B_0, B_1, C, D) oraz realizację minimalną $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ lub $(\overline{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$. Rozwiązanie tego problemu przedstawioną niżej metodą podano po raz pierwszy w pracy [67].

7.1.2. Rozwiązanie zadania

Dowolną macierz wymierną $T(s) \in \boldsymbol{R}^{p\times m}(s)$ możemy napisać w postaci

(1.9) $$T(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

gdzie $P(s)$ jest macierzą wielomianową o wymiarze $p \times m$, a

(1.10) $$d(s) = d_q s^q + d_{q-1}s^{q-1} + \cdots + d_1 s + d_0$$

jest najmniejszym wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $T(s)$.
Niech N = st $P(s)$ będzie stopniem macierzy wielomianowej $P(s)$ oraz $N>q$.
Proponowana metoda opiera się na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 7.1.1. Niech $s = \omega^{-1} + \lambda$, a $d(\lambda) \neq 0$ oraz $N > q$. Macierz wymierna

(1.11) $$\overline{T}(\omega) = T(s)_{|s=\omega^{-1}+\lambda} = \frac{\overline{P}(\omega)}{\overline{d}(\omega)}$$

zmiennej ω jest macierzą właściwą, tzn. st $\overline{d}(\omega) = N \geq$ st $\overline{P}(\omega)$.

Dowód. Podstawiając $s = \omega^{-1} + \lambda$ do $T(s)$, otrzymamy macierz niewłaściwą zmiennej ω^{-1}

$$(1.12) \qquad T(\omega^{-1}+\lambda)=\frac{P(\omega^{-1}+\lambda)}{d(\omega^{-1}+\lambda)}$$

gdyż stopień macierzy $P(\omega^{-1}+\lambda)$ względem ω^{-1} wynosi N, a stopień $d(\omega^{-1}+\lambda)$ wynosi q. Mnożąc licznik i mianownik (12) przez ω^N, otrzymamy (11), przy czym st $d(\omega)=N \geq$ st $\overline{P}(\omega)$, gdyż z założenia $d(\lambda)\neq 0$.

■

Zauważmy, że twierdzenie 1 pozwala zadanie wyznaczania realizacji (E, A, B_0, B_1, C, D) macierzy $T(s)$ sprowadzić do zadania wyznaczania realizacji $(A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega)$ macierzy właściwej $\overline{T}(\omega)$.
Realizację $(A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega)$ macierzy $\overline{T}(\omega)$ możemy wyznaczyć korzystając z jednej ze znanych metod.
Niech

$$(1.13) \qquad E=A_\varpi,\ A=I_n+\lambda A_\varpi,\ B_0=\lambda B_\varpi,\ B_1=-B_\varpi,\ C=C_\varpi,\ D=D_\varpi$$

Podstawiając (13) oraz $s=\omega^{-1}+\lambda$ do (3) otrzymamy

$$\begin{aligned}T(s)&=C[Es-A]^{-1}(B_0+sB_1)+D=\\&=C_\omega[A_\omega(\omega^{-1}+\lambda)-(I_n+\lambda A_\omega)]^{-1}(\lambda B_\omega-B_\omega s)+D_\omega=\\&=C_\omega[A_\omega\omega^{-1}-I_n]^{-1}(\lambda-s)B_\omega+D_\omega=C_\omega[I_n\omega-A\omega]^{-1}B_\omega+D_\omega\end{aligned}$$

gdyż $\omega^{-1}=s-\lambda$.

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1.2. Jeżeli $(A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega)$ jest realizacją macierzy $\overline{T}(\omega)$ określonej zależnością (11), to macierze E, A, B_0, B_1, C, D zdefiniowane zależnością (13) są realizacją macierzy $T(s)$.

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania realizacji E, A, B_0, B_1, C, D macierzy $T(s)$ oraz realizacji minimalnych $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$, $(\overline{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Procedura 7.1.1.
Krok 1. Macierz $T(s)$ piszemy w postaci (9) i wybieramy skalar λ tak, aby $d(\lambda)\neq 0$.
Krok 2. Podstawiając $s=\omega^{-1}+\lambda$ do $T(s)$ oraz mnożąc licznik i mianownik (12) przez ω^N, wyznaczamy $\overline{T}(\omega)$.

Krok 3. Korzystając z jednej ze znanych metod [145], wyznaczamy realizację $(A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega)$ macierzy $\overline{T}(\omega)$.
Krok 4. Korzystając z (13), wyznaczamy poszukiwaną realizację (E, A, B_0, B_1, C, D) macierzy $T(s)$ oraz realizację minimalną $(\overline{E}, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ lub $(\overline{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

Uwaga 7.1.1. Dla dwóch różnych wartości λ otrzymamy w przypadku ogólnym dwie różne realizacje $(A_\omega, B_\omega, C_\omega, D_\omega)$ oraz odpowiednie różne realizacje (E, A, B_0, B_1, C, D).

Uwaga 7.1.2. Jeżeli $d(0)\neq 0$, to wygodnie jest przyjąć $\lambda=0$. W tym wypadku z zależności (13) otrzymamy

$$(1.13') \qquad E=A_\varpi,\ A=I_n,\ B_0=0,\ B_1=-B_\omega,\ C=C_\omega,\ D=D_\omega$$

Korzystając z powyższej procedury, wyznaczymy realizację (E, A, B_0, B_1, C, D) transmitancji o postaci

$$(1.14) \qquad T(s)=\frac{a_N s^N+\cdots+a_1 s+a_0}{s^q+b_{q-1}s^{q-1}+\cdots+b_1 s+b_0} \quad \text{dla } N>q$$

Krok 1. W tym przypadku

$$(1.15) \qquad P(s)=a_N s^N+\cdots+a_1 s+a_0,\quad d(s)=s^q+b_{q-1}s^{q-1}+\cdots+b_1 s+b_0$$

Wybieramy λ tak, że $d(\lambda)\neq 0$.

Krok 2. Podstawiając $s=\omega^{-1}+\lambda$ do (14), otrzymamy

$$(1.16) \qquad T(\omega^{-1}+\lambda)=\frac{a_N(\omega^{-1}+\lambda)^N+\cdots+a_1(\omega^{-1}+\lambda)+a_0}{(\omega^{-1}+\lambda)^q+b_{q-1}(\omega^{-1}+\lambda)^{q-1}+\cdots+b_1(\omega^{-1}+\lambda)+b_0}$$

a po pomnożeniu licznika i mianownika (16) przez ω^N dostaniemy

$$(1.17) \qquad \overline{T}(\omega)=\frac{a_0\omega^N+\cdots+a_N}{b_0\omega^N+\cdots+\omega^{N-q}}=\frac{a_0}{b_0}+\frac{\overline{a}_{N-1}\omega^{N-1}+\cdots+\overline{a}_1\omega+\overline{a}_0}{\omega^N+\overline{b}_0\omega^{N-1}+\cdots+\overline{b}_{q-1}\omega^{N-q}}$$

Krok 3. Realizacja sterowalna transmitancji (17) ma postać

$$A_\omega = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -\bar{b}_0 \end{array}\right] \in \boldsymbol{R}^{N\times N}, \tag{1.18}$$

$$B_\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^N,\ C_\omega = [\bar{a}_0\ \bar{a}_1 ... \bar{a}_{N-1}],\ D_\omega = \left[\frac{a_0}{b_0}\right]$$

Zauważmy, że jeżeli $N > q$, to $\det A_\omega = 0$ i macierz E jest osobliwa.

Krok 4. Korzystając z (13) i (18), otrzymamy poszukiwaną realizację (E, A, B_0, B_1, C, D) transmitancji (14).

Przykład. 7.1.1 Wyznaczyć należy dwie realizacje (E, A, B_0, B_1, C, D) transmitancji mającej postać

$$T(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s + 1} \tag{1.19}$$

Korzystając z powyższej procedury, wybieramy dwie różne wartości λ. Otrzymamy wówczas

Krok 1. W tym wypadku

$$P(s) = s^2 + 2s + 3 \quad \text{oraz} \quad d(s) = s + 1$$

Wybieramy $\lambda = 0$ oraz $\lambda = 1$, gdyż $d(0) = 1$ i $d(1) = 2$.

Krok 2. Podstawiając $s = \omega^{-1}$ i $s = \omega^{-1} + 1$ do (19), otrzymamy

$$T(\omega^{-1}) = \frac{\omega^{-2} + 2\omega^{-1} + 3}{\omega^{-1} + 1} \tag{1.20a}$$

oraz odpowiednio

$$T(\omega^{-1} + 1) = \frac{\omega^{-2} + 4\omega^{-1} + 6}{\omega^{-1} + 2} \tag{1.20b}$$

Mnożąc licznik i mianownik (20) przez ω^2, otrzymamy

$$\overline{T}_1(\omega) = \frac{3\omega^2 + 2\omega + 1}{\omega^2 + \omega} = 3 + \frac{-\omega + 1}{\omega^2 + \omega} \tag{1.21a}$$

oraz odpowiednio

$$\overline{T}_2(\omega) = \frac{6\omega^2 + 4\omega + 1}{2\omega^2 + \omega} = 3 + \frac{\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}}{\omega^2 + \frac{1}{2}\omega} \tag{1.21b}$$

Krok 3. Realizacje $\overline{T}_1(\omega)$ i $\overline{T}_2(\omega)$ mają postacie

$$A_\omega^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_\omega^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_\omega^1 = [1, -1],\ D_\omega^1 = [3] \tag{1.22a}$$

i odpowiednio

$$A_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_\omega^2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ D_\omega^2 = [3] \tag{1.22b}$$

Krok 4. Korzystając z (13) i (22), otrzymamy poszukiwane realizacje transmitancji (19) o postaciach

(1.23a)

$$E_1 = A_\omega^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_1^1 = -B_\omega^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ C_1 = C_\omega^1$$

$$= [1, -1],\ D_1 = D_\omega^1 = [3]$$

i odpowiednio

(1.23b)

$$E_2 = A_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ A_2 = I_n + \lambda A_\omega^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B_0^2 = \lambda B_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^2 = -B_\omega^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ C_2 = C_\omega^2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ D_2 = D_\omega^2 = [3]$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (23) są realizacjami transmitancji (19).

Twierdzenie 7.1.3. Układ singularny (5) jest całkowicie sterowalny i całkowicie obserwowalny, jeżeli para (A_ω, B_ω) jest sterowalna i para (A_ω, C_ω) jest obserwowalna.

Dowód. Aby wykazać całkowitą sterowalność układu (5), należy pokazać, że są spełnione dla tego układu warunki (7).
Dowód przeprowadzimy szczegółowo dla układu o jednym wejściu (m=1) i jednym wyjściu (p=1). Bez straty ogólności zakładamy, że macierze A_ω, B_ω i C_ω mają postać (18).
Korzystając z (5c), (13) i (7) otrzymamy

$$\operatorname{rząd}\left[\overline{E},\overline{B}\right]=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{cc|c} E & -B_1 & B_0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{array}\right]=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{cc|c} A_\omega & -B_\omega & \lambda B_\omega \\ 0 & 0 & -I_m \end{array}\right]=$$

$$=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -\overline{b}_0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]=N=\overline{n}$$

Pierwszy z warunków (7) jest więc spełniony. Drugi z warunków (7) jest również spełniony, gdyż

$$\operatorname{rząd}\left[\overline{E}s-\overline{A},\overline{B}\right]=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{cc|c} Es-A & -B_1 s & B_0 \\ 0 & -I_m & -I_m \end{array}\right]=$$

$$=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{cc|c} A_\omega s-(I_n+\lambda A_\omega) & B_\omega s & \lambda B_\omega \\ 0 & -I_m & -I_m \end{array}\right]=$$

$$=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & s-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s-\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & s-\lambda & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & s-\lambda & \cdots & \overline{b}_0(s-\lambda)-1 & s & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]=N=\overline{n}$$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbf{C}$.
Analogicznie, aby wykazać całkowitą obserwowalność układu (5), należy pokazać, że są spełnione dla tego układu warunki (8). Korzystając z (5c), (13) i (8), otrzymamy

$$\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{C} \end{bmatrix}=\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} E & -B_1 \\ 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}=\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} A_\omega & B_\omega \\ 0 & 0 \\ C_\omega & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -\overline{b}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \overline{a}_0 & \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \cdots & \overline{a}_{N-1} & 0 \end{array}\right]=N=\overline{n}$$

Pierwszy warunek z (8) jest więc spełniony. Drugi warunek z (8) jest również spełniony, gdyż

$$\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} \overline{E}s-\overline{A} \\ \overline{C} \end{bmatrix}=\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} Es-A & -B_1 s \\ 0 & -I_m \\ C & 0 \end{bmatrix}=\operatorname{rząd}\begin{bmatrix} A_\omega s-(I_n+\lambda A_\omega) & B_\omega s \\ 0 & -I_m \\ C_\omega & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\operatorname{rząd}\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & s-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & s-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(s-\lambda) & \cdots & -\overline{b}_0(s-\lambda)-1 & s \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \overline{a}_0 & \overline{a}_1 & \cdots & \cdots & \overline{a}_{N-1} & 0 \end{array}\right]=N=\overline{n}$$

■

Uwaga 7.1.3. W analogiczny sposób można wykazać, że układ (6) jest całkowicie sterowalny i całkowicie obserwowalny, jeżeli para (A_ω, B_ω) jest sterowalna i para (A_ω, C_ω) jest obserwowalna.

Z powyższych rozważań wynika następujący ważny wniosek, że macierze (13) są realizacją minimalną macierzy (9).

Zamieniając zmienną s na zmienną z, możemy tę metodę również stosować do wyznaczania realizacji minimalnej singularnego układu dyskretnego. Rozważania można też uogólnić na przypadek singularnych układów dwuwymiarowych.

7.2. Obserwatory doskonałe układów jednowymiarowych

Weźmy pod uwagę singularny układ ciągły

(2.1a) $$E\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0$$

(2.1b) $$y = Cx$$

gdzie $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $x = x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbf{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbf{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a $E, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$.
W dalszych rozważaniach zakładać będziemy, że $\det E = 0$, rząd $B = m$, rząd $C = p$ oraz $\det[Es - A] \neq 0$ dla pewnych $s \in \mathbf{C}$ (ciało liczb zespolonych).
Weźmy też pod uwagę singularny układ ciągły opisany równaniem

(2.2) $$E\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(C\hat{x} - y), \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

gdzie $\hat{x} = \hat{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ jest wektorem stanu, a u, y i E, A, B, C są takie same jak dla (1) oraz $K \in \mathbf{R}^{n\times p}$.

Definicja 7.2.1. Układ (2) nazywamy doskonałym obserwatorem pełnego rzędu układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{x}(t) = x(t)$ dla $t > 0$ oraz dowolnych warunków początkowych x_0 i $\hat{x}_0$.

Twierdzenie 7.2.1. Dla układu (1) istnieje obserwator doskonały (2), jeżeli układ (1) jest całkowicie obserwowalny, tzn.

(2.3a) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} Es - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

dla wszystkich skończonych $s \in \mathbf{C}$ oraz

(2.3b) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$$

Dowód. Niech $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $t \geq 0$. Z (1) i (2) mamy

(2.4) $$E\dot{e} = E\dot{x} - E\dot{\hat{x}} = (A + KC)e$$

Jeżeli są spełnione założenia (3), to istnieje macierz K taka, że

(2.5) $$\det[Es - (A + KC)] = \alpha \neq 0$$

dla wszystkich $s \in \mathbf{C}$, gdzie α jest skalarem niezależnym od s.
Jeżeli jest spełniony warunek (5), to z rozwinięcia

$$[Es - (A + KC)]^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \Phi_i s^{-(i+1)}$$

wynika, że $\Phi_0 = 0$ i zgodnie z zależnością (5.3.34) rozwiązanie równania (4) jest równe

$$e(t) = e^{\Phi_0(A+KC)t}\Phi_0 E x_0 = 0 \qquad \text{dla} \quad t > 0$$

czyli $\hat{x}(t) = x(t)$ dla $t > 0$.

■

Inny dowód tego twierdzenia jest podany w pracach [110, 111].

Jeżeli warunki (3) są spełnione, to obserwator (2) możemy wyznaczyć z następującej procedury.

Procedura 7.2.1.
Krok 1. Wybieramy macierz K tak, aby był spełniony warunek (5).
Krok 2. Korzystając z (2), wyznaczamy poszukiwany obserwator.

Przykład 7.2.1. Wyznaczyć obserwator (2) dla układu (1) z macierzami

(2.6) $$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \;\; 0 \;\; -1]$$

W tym wypadku dla $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$. Warunki (3) są spełnione, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} Es - A \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -1 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

dla wszystkich skończonych $s \in C$, oraz

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Istnieje więc obserwator doskonały (2) dla tego układu.

Krok 1. Korzystając z (5) dla $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$, otrzymamy

$$\det[Es - (A + KC)] = \begin{vmatrix} s - k_1 & -1 & k_1 \\ -k_2 - 1 & s - 2 & k_2 \\ -k_3 & 0 & k_3 - 1 \end{vmatrix}$$
$$= (k_3 - 1)s^2 - (2k_3 - k_1 - 2)s - 2k_1 + k_2 - k_3 + 1$$

Warunek (5) jest spełniony dla $k_1 = 0$, $k_3 = 1$ oraz $k_2 \neq 0$ (k_2 dowolny). Dla $k_2 = 1$ macierz $K = [0 \quad 1 \quad 1]^T$.

Krok 2. Poszukiwany obserwator ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}y$$

7.2.1. Obserwatory zredukowanego rzędu

Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad C_1 \neq 0$$

gdzie $C_1 \in \mathbf{R}^{p \times p}$, $C_2 \in \mathbf{R}^{p \times (n-p)}$.

W tym wypadku macierz

(2.7)
$$Q = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa oraz

(2.8)
$$\overline{C} = CQ = [I_p \quad 0]$$

Definiując nowy wektor stanu

$$\overline{x} = Q^{-1}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbf{R}^p, \quad x_2 \in \mathbf{R}^{n-p}$$

z zależności (1) i (8) otrzymamy

(2.9a)
$$\overline{E}\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + Bu$$

(2.9b)
$$y = \overline{C}\overline{x}$$

przy czym

(2.9c)
$$\overline{E} = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} \\ \overline{E}_{21} & \overline{E}_{22} \end{bmatrix} = EQ, \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix} = AQ$$
$$\overline{E}_{11}, \overline{A}_{11} \in \mathbf{R}^{p \times p}, \quad \overline{E}_{22}, \overline{A}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-p)\times(n-p)}$$

Z zależności (9) wynika, że dla danej odpowiedzi y wektor x_1 jest znany. Obserwator zredukowanego rzędu powinien więc odtwarzać tylko wektor x_2.
Weźmy pod uwagę singularny układ ciągły opisany równaniami

(2.10a)
$$\hat{E}_2\dot{\hat{x}}_2 = \hat{A}\hat{x}_2 + \hat{B}u + \hat{D}_0 y + \hat{D}_1\dot{y}, \qquad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20}$$

(2.10b)
$$w = \hat{F}\hat{x}_2 + \hat{G}u + \hat{H}_0 y + \hat{H}_1\dot{y}$$

gdzie $\hat{x}_2 = \hat{x}_2(t) \in \mathbf{R}^{n-p}$, u i y są takie same jak dla (1), $w = w(t) \in \mathbf{R}^{n-p}$, $\hat{E}_2$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}_0$, $\hat{D}_1$, $\hat{F}$, $\hat{G}$, $\hat{H}_0$, $\hat{H}_1$ są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach oraz $\det \hat{E}_2 = 0$.

Definicja 7.2.2. Układ (10) nazywamy doskonałym obserwatorem zredukowanego rzędu układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy $w(t)=x_2(t)$ dla $t>0$ oraz dowolnych warunków początkowych x_0 i $\hat{x}_{20}$.

Jeżeli

(2.11)
$$\text{rząd}\begin{bmatrix}\overline{E}_{12}\\ \overline{E}_{22}\end{bmatrix}=\text{rząd}\, E\begin{bmatrix}-C_1^{-1}C_2\\ I_{n-p}\end{bmatrix}<n-p$$

to istnieje macierz nieosobliwa działań elementarnych na wierszach $P\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ taka, że

(2.12)
$$P\begin{bmatrix}\overline{E}_{12}\\ \overline{E}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ E_2\end{bmatrix}$$

gdzie $E_2\in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ jest macierzą osobliwą. Mnożąc lewostronnie równanie (9) przez macierz P i korzystając z (12), otrzymamy

(2.13a)
$$E_{11}\dot{x}_1=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u$$

(2.13b)
$$E_{21}\dot{x}_1+E_2\dot{x}_2=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u$$

przy czym

(2.13c)
$$\begin{bmatrix}E_{11}\\ E_{21}\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\overline{E}_{11}\\ \overline{E}_{21}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=PB,\quad \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=P\overline{A}$$
$$A_{11}\in \boldsymbol{R}^{p\times p},\quad B_1\in \boldsymbol{R}^{p\times m},\quad A_{22}\in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)},\quad B_2\in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times m}$$

Podstawiając $x_1=y$ w (13a) i (13b) otrzymamy

(2.14a)
$$E_2\dot{x}_2=A_{22}x_2+\overline{u}$$

(2.14b)
$$\overline{y}=A_{12}x_2$$

przy czym $\overline{u}=B_2u+A_{21}y-E_{21}\dot{y}$ jest wektorem wymuszenia, a $\overline{y}=E_{11}\dot{y}-A_{11}y-B_1u$ nową odpowiedzią. Zgodnie z twierdzeniem 1 istnieje obserwator doskonały dla układu (14), jeżeli

(2.15)
$$\det\left[E_2s-A_{22}\right]\neq 0$$

dla pewnego $s\in \boldsymbol{C}$

(2.16a)
$$\text{rząd}\begin{bmatrix}E_2s-A_{22}\\ A_{12}\end{bmatrix}=n-p$$

dla wszystkich skończonych $s\in \boldsymbol{C}$ oraz

(2.16b)
$$\text{rząd}\begin{bmatrix}E_2\\ A_{12}\end{bmatrix}=n.$$

Wykażemy, że warunek (16a) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (3a)
Korzystając z (9c) i (13c), możemy napisać

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}Es-A\\ C\end{bmatrix}=\text{rząd}\left\{\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & I_{n-p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Es-A\\ C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & I_{n-p}\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\text{rząd}\begin{bmatrix}E_{11}s-A_{11} & -A_{12}\\ E_{21}s-A_{21} & E_2s-A_{22}\\ I_p & 0\end{bmatrix}=p+\text{rząd}\begin{bmatrix}E_2s-A_{22}\\ A_{12}\end{bmatrix}$$

Tak więc warunek (16a) jest równoważny warunkowi (3a).

Twierdzenie 7.2.2. Dla układu (1) istnieje obserwator doskonały zredukowanego rzędu (10), jeżeli są spełnione warunki (11), (15), (3a) i (16b).

Dowód. Wykazaliśmy wyżej, że warunki (16a) i (3a) są równoważne. Jeżeli warunki (16) i (15) są spełnione, to istnieje macierz $K\in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times p}$ taka, że

(2.17)
$$\det\left[E_2s-A_{22}-KA_{12}\right]=\alpha\neq 0$$

dla wszystkich $s\in \boldsymbol{C}$.
W tym wypadku istnieje obserwator doskonały zredukowanego rzędu w postaci

(2.18)
$$E_2\dot{\hat{x}}_2=A_{22}\hat{x}_2+\overline{u}+K\left(A_{12}\hat{x}_2-\overline{y}\right)$$

taki, że

$$(2.19)\qquad \hat{x}_2(t) = x_2(t), \qquad t > 0$$

Jeżeli $\det E_2 \neq 0$, to nie istnieje macierz K spełniająca warunek (17).

■

Jeżeli warunki (11), (15), (3a) i (16b) są spełnione, to obserwator doskonały zredukowanego rzędu (10) układu (1) można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 7.2.2.
Krok 1. Znając $C = [C_1 \quad C_2]$, wyznaczamy macierz Q (określoną zależnością (7)) oraz macierze $\overline{E}$, $\overline{A}$.
Krok 2. Wyznaczamy macierz P spełniającą zależność (12) oraz macierze $E_2, A_{22}, A_{12}, A_{21}, A_{11}$.
Krok 3. Wyznaczamy macierz K, spełniającą warunek (17).
Krok 4. Korzystając z równości

$$(2.20)\qquad E_2\dot{\hat{x}}_2 = A_{22}\hat{x}_2 + \overline{u} + K(A_{12}\hat{x}_2 - \overline{y})$$

wyznaczamy poszukiwany obserwator doskonały zredukowanego rzędu.
Estymata $\hat{x}(t)$ wektora stanu $x(t)$ dana jest zależnością

$$(2.21)\qquad \hat{x}(t) = Q\begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^{-1}y(t) - C_1^{-1}C_2\hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

Przykład 7.2.2. Wyznaczyć obserwator doskonały zredukowanego rzędu (20) dla układu (1) z macierzami

$$(2.22)\qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad -1]$$

W tym wypadku dla $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$, $C_1 = [1]$, $C_2 = [0 \quad -1]$ istnieje obserwator doskonały zredukowanego rzędu, gdyż

$$\text{rząd}\left(E\begin{bmatrix} -C_1^{-1}C_2 \\ I_{n-p} \end{bmatrix}\right) = \text{rząd}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{rząd}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

oraz

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} Es - A \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} s & -1 & 1-s \\ -1 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

dla wszystkich skończonych $s \in \boldsymbol{C}$.

Krok 1. Korzystając z (7) i (22) otrzymamy

$$Q = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{E} = EQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = AQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Krok 2. W tym wypadku $P = I_3$ spełnia zależność (12) oraz

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = P\overline{A} = \overline{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB = B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]$$

Warunki (15) i (16b) są spełnione, gdyż

$$\det[E_2 s - A_{22}] = \begin{vmatrix} s-2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - s$$

oraz

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} E_2 \\ A_{12} \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

Krok 3. Korzystając z (17) dla $K = [k_1 \quad k_2]^T$, otrzymamy

$$\det[E_2 s - (A_{22} + KA_{12})] = \begin{vmatrix} s-2-k_1 & k_1 - 1 \\ -k_2 & k_2 - 1 \end{vmatrix} = (k_2 - 1)s - (k_2 - 1)(k_1 + 2) + k_2(k_1 - 1)$$

Warunek (17) jest spełniony dla $k_2 = 1$, $k_1 \neq 1$.

Dla $k_1 = 2$ mamy $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\det[E_2 s - (A_{22} + KA_{12})] = 1$.

Krok 4. Poszukiwany obserwator zredukowanego rzędu ma postać

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\dot{\hat{x}}_2=\begin{bmatrix}4 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\hat{x}_2+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}y-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}(\dot{y}-[1 \quad 0]\dot{u})$$

a estymata $\hat{x}(t)$ dana jest zależnością

$$\hat{x}(t)=\begin{bmatrix}C_1^{-1}y(t)-C_1^{-1}C_2\hat{x}_2(t)\\ \hat{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t)\\ \hat{x}_2(t)\end{bmatrix}$$

Uwaga 7.2.1. Jeżeli

(2.23) $$\text{rząd}\begin{bmatrix}\overline{E}_{12}\\ \overline{E}_{22}\end{bmatrix}=n-p$$

to istnieje standardowy obserwator zredukowanego rzędu dla układu singualrnego (1). Procedura wyznaczania takiego obserwatora jest podana w pracy [141].

7.2.2. Obserwatory doskonałe układów standardowych

Weźmy pod uwagę standardowy układ ciągły

(2.24a) $$\dot{x}=Ax+Bu, \quad x(0)=x_0$$

(2.24b) $$y=Cx$$

ze sprzężeniem zwrotnym w postaci

(2.25) $$u=v-F\dot{y}=v-FC\dot{x}$$

gdzie $F\in \boldsymbol{R}^{m\times p}$, a $v\in \boldsymbol{R}^m$ jest nowym wymuszeniem.

Podstawiając (25) do (24a), otrzymamy

(2.26a) $$E\dot{x}=Ax+Bv, \quad x(0)=x_0$$

(2.26b) $$y=Cx$$

gdzie

(2.27) $$E=I_n+BFC$$

Macierz F zostanie tak dobrana, aby macierz (27) była singularna. Następnie dla układu singularnego (26) skonstruujemy obserwator doskonały pełnego rzędu, zgodnie z rozważaniem w punkcie 2.
Wykażemy, że dla układu standardowego (24)

(2.28) $$\text{rząd}\begin{bmatrix}I_ns-A\\C\end{bmatrix}=n \quad \text{dla wszystkich } s\in \boldsymbol{C}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla układu singularnego (26)

(2.29) $$\text{rząd}\begin{bmatrix}Es-A\\C\end{bmatrix}=n \quad \text{dla wszystkich skończonych } s\in \boldsymbol{C}$$

Korzystając z (27), otrzymamy

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}Es-A\\C\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}I_n-A+BFCs\\C\end{bmatrix}=\text{rząd}\left(\begin{bmatrix}I_n & BFs\\0 & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_ns-A\\C\end{bmatrix}\right)$$
$$=\text{rząd}\begin{bmatrix}I_ns-A\\C\end{bmatrix}$$

dla wszystkich $s\in \boldsymbol{C}$.
Wykażemy również, że dla układu singularnego (26)

(2.30) $$\text{rząd}\begin{bmatrix}E\\C\end{bmatrix}=n \quad \text{dla dowolnej macierzy } F$$

Korzystając z (27), możemy napisać

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}E\\C\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}I_n+BFC\\C\end{bmatrix}=\text{rząd}\left(\begin{bmatrix}I_n & BF\\0 & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n\\C\end{bmatrix}\right)=\text{rząd}\begin{bmatrix}I_n\\C\end{bmatrix}=n$$

Jak wiadomo, jeżeli jest spełniony warunek (28), to istnieje macierz nieosobliwa $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ taka, że

(2.31a)

$$\overline{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \dots & \overline{A}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A}_{p1} & \dots & \overline{A}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \overline{B} = P^{-1}B, \quad \overline{C} = CP = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{bmatrix}$$

przy czym

$$\overline{A}_{ii} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline I_{d_i-1} & a_i \end{array}\right] \in \boldsymbol{R}^{d_i\times d_i}, \quad \overline{A}_{ij} = \left[0 \;\vdots\; a_{ij}\right] \in \boldsymbol{R}^{d_i\times d_j}, \quad (i \neq j,\ i, j = 1, \ldots)$$

(2.31b)

$$C_i = \left[0 \;\vdots\; c_i\right] \in \boldsymbol{R}^{p\times d_i}, \quad c_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & c_{1,i+1} & \dots & c_{1p} \end{bmatrix}^T, \quad n = \sum_{i=1}^{p} d_i$$

Niech

$$\hat{C} = \operatorname{diag}\left[\hat{c}_1, \ \ldots, \ \hat{c}_p\right], \quad \hat{c}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{1\times d_i}$$

Łatwo sprawdzić, że

(2.32)
$$\overline{C} = \tilde{C}\hat{C}$$

gdzie

(2.33)
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że

(2.34)
$$\overline{CB} = CPP^{-1}B = CB$$

oraz

(2.35)
$$\overline{E} = \left(I_n + \overline{B}\overline{F}\overline{C}\right) = P^{-1}\left(I_n + BFC\right)P = P^{-1}EP$$

Korzystając z (35) i (32), otrzymamy

(2.36)
$$\overline{E} = I_n + \overline{B}\overline{F}\hat{C}$$

przy czym

(2.37)
$$\overline{F} = F\tilde{C}$$

Twierdzenie 7.2.2. Niech będzie spełniony warunek (28), a macierze $\overline{A}$, $\overline{C}$ niech mają postać (31). Istnieje macierz F taka, że

(2.38)
$$\overline{E} = \left[\begin{array}{c:c:c} I_{t_1} & \overline{e}_1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \overline{e}_2 & I_{t_2} \end{array}\right], \quad t_1 + t_2 = n - 1, \quad \overline{e}_1 \in \boldsymbol{R}^{t_1}, \quad \overline{e}_2 \in \boldsymbol{R}^{t_2}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

(2.39)
$$CB \neq 0$$

Dowód. ***Konieczność.***

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ -FC & I_m \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n + BFC & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \det\left[I_n + BFC\right]$$

ale również

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ -FC & I_m \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m + FCB \end{bmatrix} = \det\left[I_m + FCB\right]$$

Wobec tego

$$\det E = \det\left[I_n + BFC\right] = \det\left[I_m + FCB\right]$$

Jeżeli $CB = 0$, to $\det E = 1$ dla dowolnej macierzy F.

Dostateczność. Jeżeli $CB = \overline{CB} \neq 0$ wtedy również $\hat{C}\overline{B} \neq 0$ gdyż $\det\tilde{C} \neq 0$. Wobec tego dla przynajmniej jednego k mamy $\hat{c}_k\overline{b}_k = \overline{b}_{kk} \neq 0$, gdzie $\overline{b}_k$ jest k-tym wierszem macierz $\overline{B}$ a $\hat{c}_k$ jest k-tą kolumną macierzy $\hat{C} = \left[\hat{c}_{ij}\right]$. Wybierając elementy macierzy $\overline{F}$ następująco

(2.40)
$$\bar{f}_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\bar{b}_{kk}}, & \text{dla} \quad i=j=k \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

otrzymamy

$$\overline{E} = I_n + \overline{B}\overline{F}\hat{C} = I_n + \bar{f}_{kk}\bar{b}_k\hat{c}_k = \begin{bmatrix} I_{t_1} & \bar{e}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{e}_2 & I_{t_2} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\bar{e}_1 = -\frac{1}{\bar{b}_{kk}}\begin{bmatrix}\bar{b}_{k1} & \bar{b}_{k2} & \dots & \bar{b}_{k,k-1}\end{bmatrix}^T, \quad \bar{e}_2 = -\frac{1}{\bar{b}_{kk}}\begin{bmatrix}\bar{b}_{k,k+1} & \bar{b}_{k,k+2} & \dots & \bar{b}_{kn}\end{bmatrix}^T$$

■

Twierdzenie 7.2.3. Istnieje macierz sprzężeń zwrotnych K spełniająca zależność

(2.41)
$$\det\left[Es - (A + KC)\right] = \alpha \neq 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (28) i (39).

Dowód. ***Dostateczność.*** Jeżeli są spełnione warunki (28) i (39), to korzystając z (41), (31), (32) i (35) otrzymamy

(2.42)
$$\begin{aligned}\det\left[Es - (A + KC)\right] &= \det\left[P^{-1}(Es - (A + KC))P\right] = \det\left[\overline{E}s - \left(\overline{A} + P^{-1}K\overline{C}\right)\right] \\ &= \det\left[\overline{E}s - \left(\overline{A} + \overline{K}\hat{C}\right)\right]\end{aligned}$$

gdzie

(2.43)
$$\overline{K} = P^{-1}K\tilde{C}$$

Bez utraty ogólności dla uproszczenia rozważań zakładamy

(2.44)
$$\overline{E} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \bar{e} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e} = \begin{bmatrix}\bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \dots & \bar{e}_{n-1}\end{bmatrix}^T$$

Niech

(2.45)
$$\overline{K} = \left[-\overline{A}_{n_1} + e_{n_1+1} \quad -\overline{A}_{n_2} + e_{n_2+1} \quad \dots \quad -\overline{A}_{n_{p-1}} + e_{n_{p-1}+1} \quad -\overline{A}_{n_p} - k\right], \quad \left(n_i = \sum_{j=1}^{i} d_j\right)$$

gdzie $\overline{A}_i$ jest i-tą kolumną macierzy $\overline{A}$, e_i jest i-tą kolumną macierzy jednostkowej I_n, a $k = \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^n$. Korzystając z (31) i (45), łatwo sprawdzić, że

(2.46)
$$\overline{A} + \overline{K}\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \\ I_{n-1} & -k \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę (42), (44) i (46), otrzymamy

(2.47)
$$\begin{aligned}\det\left[Es - (A + KC)\right] &= \det\left[\overline{E}s - \left(\overline{A} + \overline{K}\hat{C}\right)\right] = \begin{vmatrix} s & 0 & \dots & 0 & \bar{e}_1 s + k_1 \\ -1 & s & \dots & 0 & \bar{e}_2 s + k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s & \bar{e}_{n-1}s + k_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & k_n \end{vmatrix} \\ &= \bar{e}_1 s + k_1 + (\bar{e}_2 s + k_2)s + \dots + (\bar{e}_{n-1}s + k_{n-1})s^{n-2} + k_n s^{n-1} \\ &= k_1 + (\bar{e}_1 + k_2)s + \dots + (\bar{e}_{n-2} + k_{n-1})s^{n-2} + (\bar{e}_{n-1} + k_n)s^{n-1}\end{aligned}$$

Porównując prawe strony zależności (41) i (47), otrzymamy

(2.48)
$$k = \begin{bmatrix}\alpha & -\bar{e}_1 & \dots & -\bar{e}_{n-1}\end{bmatrix}^T$$

Konieczność dowodzi się analogicznie do dowodzenia dla układów standardowych.

■

Twierdzenie 7.2.4. Dla układu standardowego (24) istnieje obserwator doskonały pełnego rzędu o postaci

(2.49)
$$E\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + K(C\bar{x} - y)$$

jeżeli są spełnione warunki (28) i (39).

Dowód. Jeżeli założenie (39) jest spełnione, to macierz F można wybrać tak, aby układ zamknięty (26) był singularny. Zgodnie z twierdzeniem 3, jeżeli warunki (28) i (39) są spełnione, to istnieje macierz K spełniająca równanie (41) i istnieje obserwator doskonały (49).

■

Jeżeli warunki (28) i (39) są spełnione, to obserwator doskonały (49) można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 7.2.3.
Krok 1. Wyznaczamy macierz P, spełniającą zależność (31)
Krok 2. Korzystając z (40), wyznaczamy macierz $\overline{F}$ a następnie

$$F = \overline{F}\tilde{C}^{-1} \tag{2.50}$$

oraz

$$E = I_n + BFC$$

Krok 3. Korzystając z (48) i (43), wyznaczamy $\overline{K}$ oraz

$$K = P\overline{K}\tilde{C}^{-1} \tag{2.51}$$

Krok 4. Wyznaczamy poszukiwany obserwator w postaci

$$E\dot{\overline{x}} = (A + KC)\overline{x} + Bu - Ky \tag{2.52}$$

Przykład 7.2.3. Dla układu standardowego (24) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

wyznaczyć obserwator doskonały (52) dla $\alpha = 1$.
Łatwo sprawdzić, że układ ten spełnia warunki (28) i (39), gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} I_4 s - A \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & -2 \\ -1 & s-2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & -3 & -1 & s-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \quad \text{dla wszystkich } s \in \boldsymbol{C}$$

oraz

$$CB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z procedury 3, otrzymamy kolejno.

Krok 1. Macierze (53) mają już pożądaną postać (31) $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, $\overline{C} = C$ oraz $P = I_4$.

Krok 2. Korzystając z (53) i (40), otrzymamy

$$\overline{F} = [0 \quad -1], \quad F = \overline{F}\tilde{C}^{-1} = [0 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad -1]$$

oraz

$$E = I_4 + BFC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając z (48) i (45) oraz biorąc pod uwagę, że $\overline{e}_1 = -1$, $\overline{e}_2 = 0$, $\overline{e}_3 = 1$ oraz $\overline{A}_2 = [1 \quad 2 \quad 1 \quad 3]^T$, $\overline{A}_4 = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T$, otrzymamy

$$k = [\alpha \quad -\overline{e}_1 \quad \overline{e}_2 \quad -\overline{e}_3]^T = [1 \quad 1 \quad 0 \quad -1]^T$$

$$\overline{K} = [-\overline{A}_2 + \overline{e}_3 \quad -\overline{A}_4 - k] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = P\overline{K}\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 4. Poszukiwany obserwator ma więc postać

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}2&-3\\-2&0\\0&0\\-3&0\end{bmatrix}y$$

7.3. Obserwatory funkcjonalne

Weźmy pod uwagę singularny układ ciągły (2.1). Poszukiwać będziemy układu opisanego równaniami

(3.1a) $$E\dot{z}=Fz+Gu+Hy,\quad z_0=z(0)$$

(3.1b) $$w=Lz$$

który odtwarza zadaną funkcję liniową wektora stanu Kx, przy czym macierz $K\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ jest znana, $z\in \boldsymbol{R}^{n}$ jest wektorem stanu, $w\in \boldsymbol{R}^{m}$ jest wektorem odpowiedzi, a u, y i E są takie same jak dla układu (2.1) oraz $F\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $G\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $H\in \boldsymbol{R}^{n\times p}$, $L\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$.

Definicja 7.3.1. Układ (1) nazywamy funkcjonalnym obserwatorem doskonałym pełnego rzędu układu (2.1) wtedy i tylko wtedy, gdy

(3.2) $$w(t)=Kx(t)\quad \text{dla}\quad t>0$$

oraz dla dowolnych warunków początkowych x_0 i z_0.

Niech

(3.3) $$e=x-z$$

Korzystając z (3), (2.1) i (1), otrzymamy

(3.4) $$E\dot{e}=E\dot{x}-E\dot{z}=(A+HC)x-Fz+(B-G)u$$

Jeżeli wybierzemy

(3.5) $$F=A+HC,\qquad B=G$$

to równanie (4) przyjmuje postać

(3.6) $$E\dot{e}=Fe$$

Z (1b) dla $L=K$, (2) oraz (3) mamy

(3.7) $$Kx-w=Ke$$

Z definicji 1 oraz (7) wynika, że układ (1) jest funkcjonalnym obserwatorem doskonałym układu (2.1) wtedy i tylko wtedy, gdy $e(t)=0$ dla $t>0$. Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz H taka, że

(3.8) $$\det\left[Es-(A+HC)\right]=\alpha$$

gdzie α jest niezerowym skalarem niezależnym od s.

Twierdzenie 7.3.1. Niech będzie spełniony warunek (2.3). Obserwator doskonały pełnego rzędu układu (2.1) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

(3.9) $$\text{rząd}\,\tilde{A}=\text{rząd}\left[\tilde{A}\quad \tilde{a}\right]$$

gdzie

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}a_{10}&a_{20}&\dots&a_{n0}\\a_{11}&a_{21}&\dots&a_{n1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1r}&a_{2r}&\dots&a_{nr}\end{bmatrix},\quad \tilde{a}=\begin{bmatrix}a_0-\alpha\\a_1\\\vdots\\a_r\end{bmatrix}$$

(3.10) $$p(s)=\det\left[Es-A\right]=a_rs^r+a_{r-1}s^{r-1}+\ldots+a_1s+a_0,\qquad (r\le \text{rząd}\,E<n)$$

a

(3.11) $$\begin{aligned}p_k(s)&=\det\left|h_1(s)\ \dots\ h_{k-1}(s)\ \ c^T\ \ h_{k+1}(s)\ \dots\ h_n(s)\right|\\&=a_{kr}s^r+\ldots+a_{k1}s+a_{k0},\quad k=1,\dots,n\end{aligned}$$

$$\left[h_1(s)\ \dots\ h_n(s)\right]=\left[E^Ts-A^T\right]$$

jest wyznacznikiem macierzy E^Ts-A^T, w której k-tę kolumnę zastąpiono kolumną c^T.

Dowód. Korzystając z twierdzenia Bineta-Cauchy łatwo wykazać, że

(3.12) $$\det\left[Es-(A+HC)\right]=p(s)+h_1p_1(s)+\ldots+k_np_n(s)$$

gdzie $H^T=[h_1 \;\; \ldots \;\; h_n]$.
Z zależności (8) i (12) mamy

(3.13) $$h_1p_1(s)+h_2p_2(s)\ldots+k_np_n(s)=\alpha-p(s)$$

Z porównania współczynników przy tych samych potęgach zmiennej s z równości (13) otrzymujemy równanie

(3.14) $$\tilde{A}H=\tilde{a}$$

Z twierdzenia Kroneckera-Cappelego wynika, że równanie (14) ma rozwiązanie H wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (9).

■

Jeżeli warunki twierdzenia 1 są spełnione, to obserwator doskonały (1) można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 7.3.1.
Krok 1. Korzystając z (11), wyznaczamy wielomiany $p_1(s)\ \ldots\ p_n(s)$ i sprawdzamy, czy jest spełniony warunek (9). Jeżeli tak, to przechodzimy do kroku 2, jeżeli nie, to zadanie nie ma rozwiązania.
Krok 2. Dla zadanej wartości skalara α wyznaczamy macierz H spełniającą równanie (14). Macierz H możemy wyznaczyć również wybierając element tej macierzy tak, aby

(3.15) $$d_i=d_i(H)=0 \quad \text{dla} \quad i=1,\ldots,q$$

oraz $d_0=d_0(H)=\alpha$, gdzie

$$\det\left[E^Ts-\left(A^T+C^TH^T\right)\right]=\det\left[Es-(A+HC)\right]=d_qs^q+\ldots+d_1s+d_0$$

Krok 3. Korzystając z (5) wyznaczamy F, G oraz $L=K$.

Przykład 7.3.1. Wyznaczyć funkcjonalny obserwator doskonały (1) dla układu (2.1) z macierzami

(3.16) $$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix},\quad C=[1\ \ 0\ \ 0]$$

odtwarzający funkcję liniową Kx dla

(3.17) $$K=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&2\end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \alpha=2$$

W tym wypadku warunek (2.3) jest spełniony, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix}Es-A\\C\end{bmatrix}=\text{rząd}\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

dla wszystkich skończonych $s\in \mathbf{C}$.

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno.

Krok 1. Z (11) i (10) mamy

$$\left[E^Ts-A^T\right]=\left[h_1(s)\ \ h_2(s)\ \ h_3(s)\right]=\begin{bmatrix}s&0&1\\-1&s&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

$$p_1(s)=\det\left[c^T\ \ h_2(s)\ \ h_3(s)\right]=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&s&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=0 \quad (c=C)$$

$$p_2(s)=\det\left[h_1(s)\ \ c^T\ \ h_3(s)\right]=\begin{vmatrix}s&1&1\\-1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

$$p_3(s)=\det\left[h_1(s)\ \ h_2(s)\ \ c^T\right]=\begin{vmatrix}s&0&1\\-1&s&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=1$$

$$p(s)=\det\left[Es-A\right]=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=1$$

oraz

$$(3.18)\qquad \tilde{A}=\begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \tilde{a}=\begin{bmatrix}a_0-\alpha\\ a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Z (18) wynika, że warunek (9) jest spełniony.

Krok 2. Równanie (14) dla $H^T=[h_1\ \ h_2\ \ h_3]$ ma postać

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

a jego rozwiązaniem jest $H^T=[h_1\ \ h_2\ \ -1]$ gdzie h_1 i h_2 są dowolne. Ten sam wynik otrzymamy korzystając z drugiego sposobu opartego na zależności (15), gdyż

$$\det\left[Es-(A+HC)\right]=\begin{vmatrix}s-h_1 & -1 & 0\\ -h_2 & s & -1\\ 1-h_3 & 0 & 0\end{vmatrix}=1-h_3=\alpha=2$$

Krok 3. Korzystając z (5) i (17), otrzymamy

$$F=A+HC=\begin{bmatrix}h_1&1&0\\h_2&0&1\\-2&0&0\end{bmatrix},\quad G=B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix},\quad L=K=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&2\end{bmatrix}$$

Poszukiwany funkcjonalny obserwator doskonały ma postać

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{z}=\begin{bmatrix}h_1&1&0\\h_2&0&1\\-2&0&0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&-1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\-1\end{bmatrix}y$$

$$w=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&2\end{bmatrix}z$$

Powyższe rozważania można uogólnić na przypadek funkcjonalnych obserwatorów doskonałych zredukowanego rzędu [66, 101, 109].

7.4. Obserwatory doskonałe układów dwuwymiarowych

Niech Z_+ będzie zbiorem liczb całkowitych nieujemnych.
Weźmy pod uwagę układ dwuwymiarowy (2D), opisany singularnym modelem typu Fornasiniego-Marchesiniego

$$(4.1a)\qquad Ex_{i+1,j+1}=A_1x_{i+1,j}+A_2x_{i,j+1}+B_1u_{i+1,j}+B_2u_{i,j+1}$$

$$(4.1b)\qquad y_{ij}=Cx_{ij}$$

przy czym $x_{ij}\in \boldsymbol{R}^n$, $u_{ij}\in \boldsymbol{R}^m$ i $y_{ij}\in \boldsymbol{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a

$$E,A_k\in \boldsymbol{R}^{n\times n},\ B_k\in \boldsymbol{R}^{n\times m},\ k=1,2,\ C\in \boldsymbol{R}^{p\times n}$$

Zakładamy, że $\det E=0$ oraz

$$(4.2)\qquad \det\left[Ez-A_k\right]\neq 0 \text{ dla pewnych } z\in \boldsymbol{C} \text{ i } k=1 \text{ lub/oraz } k=2$$

Warunki brzegowe dla (1) dane są w postaci

$$(4.3)\qquad x_{i0} \text{ dla } i\in Z_+ \text{ oraz } x_{0j} \text{ dla } j\in Z_+$$

Zakładamy, że warunki brzegowe mogą się zmieniać skokowo dla $i=0$ oraz $j=0$.
Weźmy pod uwagę układ singularny 2D opisany równaniami

$$(4.3a)\qquad \overline{E}\overline{x}_{i+1,j+1}=\overline{A}_1\overline{x}_{i+1,j}+\overline{A}_2\overline{x}_{i,j+1}+\overline{B}_1u_{i+1,j}+\overline{B}_2u_{i,j+1}+\overline{D}y_{i+1,j}+\overline{F}y_{i,j+1}$$

$$(4.3b)\qquad w_{ij}=\overline{C}\overline{x}_{ij}+\overline{G}u_{ij}+\overline{H}y_{ij}$$

z warunkami brzegowymi

$$(4.4)\qquad \overline{x}_{i0} \text{ dla } i\in Z_+ \text{ oraz } \overline{x}_{0j} \text{ dla } j\in Z_+$$

gdzie $\overline{x}_{ij}\in \boldsymbol{R}^n$, $w_{ij}\in \boldsymbol{R}^n$, $\overline{E},\overline{A}_k,\overline{C}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $\overline{B}_k,\overline{G}\in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $k=1,2$, $\overline{D},\overline{F},\overline{H}\in \boldsymbol{R}^{n\times p}$.

Definicja 7.4.1. Układ (3) nazywamy obserwatorem doskonałym układu (1) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$w_{ij} = x_{ij} \text{ dla } i, j \in Z_+$$

oraz dla dowolnych warunków brzegowych (3) i (4).

Rozważmy przypadek szczególny układu (3) w postaci

(4.5a)
$$E\overline{x}_{i+1,j+1} = A_1\overline{x}_{i+1,j} + A_2\overline{x}_{i,j+1} + B_1u_{i+1,j} + B_2u_{i,j+1} + K_1\left(\overline{C}\overline{x}_{i+1,j} - y_{i+1,j}\right) + K_2\left(\overline{C}\overline{x}_{i,j+1} - y_{i,j+1}\right)$$

(4.5b)
$$w_{ij} = \overline{x}_{ij}, \quad i, j \in Z_+$$

gdzie $K_1, K_2 \in \boldsymbol{R}^{n \times p}$.

Twierdzenie 7.4.1. Układ (5) jest obserwatorem doskonałym układu (1), jeżeli

(4.6)
$$\text{rząd } C = \text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ A_k \end{bmatrix} \text{ dla } k = 1 \text{ lub/oraz } k = 2$$

(4.7)
$$\text{rząd}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n \text{ i rząd}\begin{bmatrix} Ez - A_k \\ C \end{bmatrix} = n \text{ dla wszystkich skończonych } z \in C$$

i $k = 2$ lub/oraz $k = 1$

Dowód. Niech

(4.8)
$$e_{ij} = x_{ij} - \overline{x}_{ij}, \quad i, j \in Z_+$$

Korzystając z (8), (1a) i (5a), otrzymamy

(4.9)
$$Ee_{i+1,j+1} = Ex_{i+1,j+1} - E\overline{x}_{i+1,j+1} = (A_1 + K_1C)e_{i+1,j} + (A_2 + K_2C)e_{i,j+1}$$

Jeżeli warunek (6) dla $k = 1$ jest spełniony, to macierz K_1 można wybrać tak, że $A_1 = -K_1C$ i z zależności (9) otrzymamy

(4.10)
$$Ee_{i+1,j+1} = (A_2 + K_2C)e_{i,j+1}$$

Jeżeli warunek (7) jest spełniony dla $k = 2$, to istnieje macierz K_2 taka, że

(4.11)
$$\det\left[Ez - (A_2 + K_2C)\right] = \alpha \neq 0 \text{ dla pewnych } z \in \boldsymbol{C}$$

i zgodnie z rozważaniami z punktu 7.1 $e_{ij} = 0$ oraz $w_{ij} = \overline{x}_{ij}$ dla $i, j \in Z_+$. Dowód dla $k = 2$ jest analogiczny.

■

Jeżeli warunki (6) i (7) są spełnione, to obserwator doskonały (5) dla układu (1) można wyznaczyć korzystając z następującej procedury.

Procedura 7.4.1.

Krok 1. Wyznaczamy macierz K_1 tak, że $A_1 = -K_1C$

Krok 2. Mając dane macierze E, A_2 i C oraz α wyznaczamy macierz K_2 tak, aby

(4.12)
$$\det\left[Ez - (A_2 + K_2C)\right] = \alpha \neq 0$$

W tym celu możemy stosować metodę działań elementarnych, podaną w pracy [111].

Krok 3. Korzystając z (5), wyznaczamy poszukiwany obserwator.

Uwaga 7.4.1. W powyższych rozważaniach można zamienić miejscami rolę macierzy A_1 i A_2 oraz odpowiednio K_1 i K_2.

Przykład 7.4.1. Wyznaczyć obserwator doskonały (5) dla układu (1) o macierzach

(4.13)
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Układ ten spełnia warunki (6) i (7), gdyż

$$\text{rząd } C = \text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ A_2 \end{bmatrix}, \text{ rząd}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = 4 \text{ i rząd}\begin{bmatrix} Ez - A_1 \\ C \end{bmatrix} = 4$$

dla wszystkich skończonych $z \in \boldsymbol{C}$

Istnieje więc dla tego układu obserwator doskonały (5).

Uwzględniając uwagę 1 i korzystając z procedury 1, otrzymamy

Krok 1. W tym wypadku $K_2 = [-1 \ \ 1 \ \ -2 \ \ -3]^T$, gdyż $A_2 = -K_2 C$

Krok 2. Korzystając z (12), łatwo sprawdzić, że dla $K_1 = [0 \ \ 1 \ \ -1 \ \ 0]^T$ i $\alpha = 1$ otrzymamy

$$\det[Ez - (A_1 + K_1 C)] = \begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z-2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Krok 3. Poszukiwany obserwator doskonały ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_{i+1,j+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_{i+1,j} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_{i+1,j} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{i,j+1}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y_{i+1,j} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} y_{i,j+1}$$

Powyższe rozważania łatwo daje się przenieść na układy 2D, opisane modelem Roessera w postaci

(7.14)
$$E \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix} u_{ij}$$
$$y_{ij} = [C_1 \ \ C_2] \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix}, \quad i, j \in Z_+$$

gdzie $x_{i,j}^h \in \boldsymbol{R}^{n_1}$, $x_{i,j}^v \in \boldsymbol{R}^{n_2}$ są odpowiednio wektorami: horyzontalnym i wertykalnym stanu, a $u_{i,j} \in \boldsymbol{R}^m$ i $y_{i,j} \in \boldsymbol{R}^p$ są wektorami wymuszeń i odpowiedzi, a E, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \end{bmatrix}$, $[C_1 \ \ C_2]$ są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

Jeżeli $E = \mathrm{diag}[E_1, \ \ E_2]$, ($E_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1 \times n_1}$, $E_2 \in \boldsymbol{R}^{n_2 \times n_2}$), to model (14) można napisać w postaci (1), gdzie

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ \ C_2]$$

Rozważania te można też uogólnić na przypadek singularnego (2D) modelu ogólnego.

7.5. Obserwatory doskonałe zredukowanego rzędu układów o nieznanych zakłóceniach

7.5.1. Sformułowanie zagadnienia

Weźmy pod uwagę układ liniowy ciągły opisany równaniami

(5.1a)
$$\dot{x} = Ax + Bu + Dv$$

(5.1b)
$$y = Cx$$

gdzie $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u \in \boldsymbol{R}^q$ jest wektorem wymuszeń, $v \in \boldsymbol{R}^m$ jest wektorem nieznanych zakłóceń, $y \in \boldsymbol{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n \times q}$, $D \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p \times n}$.

Zakładamy, że rząd $C = p < n$ oraz rząd $D = m$.

Poszukiwać będziemy obserwatora doskonałego r-tego rzędu mającego postać

(5.2)
$$E_1 \dot{z} = Fz + Gu + Hy$$
$$\hat{x} = Pz + Qy$$

który odtwarza dokładnie dla $t > 0$ wektor stanu x przy niezerowym zakłóceniu v, gdzie $z \in \boldsymbol{R}^r$ jest wektorem stanu obserwatora, $\hat{x}$ jest estymatą wektora x, $E_1, F \in \boldsymbol{R}^{r \times r}$, $\det E_1 = 0$, $G \in \boldsymbol{R}^{r \times q}$, $H \in \boldsymbol{R}^{r \times p}$, $P \in \boldsymbol{R}^{n \times r}$ i $Q \in \boldsymbol{R}^{n \times p}$.

Niech $e \in \boldsymbol{R}^r$ będzie błędem (uchybem) obserwatora zdefiniowanym zależnością

$$e = z - Tx \tag{5.3}$$

gdzie $T \in \boldsymbol{R}^{r \times n}$.
Różniczkując zależność (3) względem czasu t i korzystając z (1) i (2), otrzymamy

$$\begin{aligned} E_1\dot{e} &= E_1\dot{z} - E_1T\dot{x} = Fz + Gu + HCx - E_1TAx - E_1TBu - E_1TDv \\ &= Fe + (FT - E_1TA + HC)x + (G - E_1TB)u - E_1TDv \end{aligned}$$

Jeżeli

$$E_1TB = G \tag{5.4}$$

$$FT - E_1TA + HC = 0 \tag{5.5}$$

$$E_1TD = 0 \tag{5.6}$$

wtedy

$$E_1\dot{e} = Fe \tag{5.7}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \hat{x} - x &= Pz + QCx - x = Pz + QCx + PTx - PTx - x = \\ &= Pe + (QC + PT - I_n)x = Pe \end{aligned}$$

jeżeli

$$PT + QC = \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = I_n \tag{5.8}$$

Zgodnie z rozważaniami w punkcie 7.1, jeżeli

$$\det(E_1s - F) = \alpha \neq 0 \tag{5.9}$$

gdzie α nie zależy od s, to $e = 0$ dla $t > 0$.
Problem obserwatora doskonałego zredukowanego rzędu o nieznanych zakłóceniach można sformułować następująco. Dane są macierze A, B, C, D, należy wyznaczyć E_1, F, G, H, T, P, Q tak, aby były spełnione zależności (4), (5), (6), (8) i (9).

7.5.2. Rozwiązanie zagadnienia

Zależność (5) można napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} F & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = E_1TA$$

Jeżeli rząd $F = r$, to z nierówności Sylvestera mamy $r + n - (r + p) \leq$ rząd E_1TA, a po uwzględnieniu, że det $E_1 = 0$ otrzymamy $r > n - p$.
Z faktu, że rząd $E_1TD = 0$ wynika, że rząd $E_1T + m - n \leq 0$ a rząd $E_1T < n - m$. Wobec tego rząd $E_1 \leq n - m$. Mamy więc $p \geq m$.

Lemat 7.5.1. Istnieje para macierzy nieosobliwych (L, R) przekształcających macierze układu do postaci

$$\begin{aligned} LAR &= \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \\ CR &= \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \\ LD &= \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.10}$$

$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_{m+p-n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{p \times m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $C = p$ oraz rząd $D = m$ $(p \leq m)$, gdzie $A_1 \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, $A_2 \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times p}$, $A_3 \in \boldsymbol{R}^{p\times(n-p)}$, $A_4 \in \boldsymbol{R}^{p \times p}$, $D_1 = [I_{n-p} \quad 0] \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times m}$.

Dowód. Jak wiadomo, jeżeli rząd $C = p$, to istnieje macierz nieosobliwa R_1 taka, że $CR_1 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$, gdzie $C_2 \in \boldsymbol{R}^{p \times p}$ i rząd $C_2 = p$. Istnieje więc macierz nieosobliwa R taka, że

$$CR = CR_1R_2 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ -C_2^{-1}C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$$

Analogicznie korzystając z macierzy

$$L_2 = \begin{bmatrix} \hat{D}_1^{-1} & 0 \\ -\hat{D}_1^{-1}\hat{D}_2 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

i stosując odpowiedni podział na bloki D_1 i D_2 macierzy D otrzymamy (10).

■

Zauważmy, że w przekształceniach macierzy układu (1) do postaci (10) ulega przekształceniu również wektor stanu zgodnie z zależnością $\hat{x} = R^{-1}x$. Z warunku $p < n$ wynika, że rząd macierzy D_2 jest pełny.
Niech $r = 2n - m - p$. Macierze E_1 i F wybieramy w postaci

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-p} \\ \alpha I_{n-m} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Łatwo sprawdzić, że macierze (11) spełniają warunek (9).
Niech

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}$$

gdzie $T_1 \in \boldsymbol{R}^{(n-m)\times(n-p)}$, $T_2 \in \boldsymbol{R}^{(n-m)\times p}$, $T_3 \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times(n-p)}$, $T_4 \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times p}$ oraz

$$X = FT - E_1 T\widetilde{A} \tag{5.12}$$

Zauważmy, że równanie $HC = -X$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy dla danych macierzy C i X

$$\text{rząd}\, C = \text{rząd}\begin{bmatrix} X \\ C \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Z (13) wynika, że warunek ten może być spełniony tylko wtedy, gdy elementy pierwszych $n - p$ kolumn macierzy X są równe zeru.
Niech $T = [t_{ij}]$, $i = 1, ..., r$, $j = 1, ..., n$ oraz $A = [a_{ij}]$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$.

Korzystając z (10) i (11) otrzymamy

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & I_{n-p} \\ \alpha I_{n-p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r,1} & \dots & t_{r,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_{11} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-p,1} & \dots & t_{n-p,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} t_{n-m+1,1} & \dots & t_{n-m+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{2n-n-p,1} & \dots & t_{2n-m-p,n} \\ \alpha t_{11} & \dots & \alpha t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha t_{n-m,1} & \dots & \alpha t_{n-m,n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-p,1} & \dots & c_{n-p,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.14}$$

gdzie $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} a_{k,j}$. Warunek (13) oraz $\alpha \neq 0$ implikuje $t_{i,j} = 0$ dla $i = 1, ..., n - m$ oraz $j = 1, ..., n - p$ czyli $T_1 = 0$ a to z kolei rząd $D_2 < m$.
Z równania (8) wynika, że

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = n \tag{5.15}$$

Jeżeli $T_1 = 0$, to rząd $T_3 = n - p$.
Niech

$$\overline{T}_2 = \begin{bmatrix} t_{1,n-p+1} & \dots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-p,n-p+1} & \dots & t_{n-p,n} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{(n-p)\times p}$$

Równości $t_{n-m+i,j} = c_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} t_{i,l} a_{l,j} = \sum_{l=n-p+1}^{n} t_{i,l} a_{l,j}$ dla $i, j = 1, ..., n - p$ są równoważne

$$T_3 = \overline{T}_2 A_3 \tag{5.16}$$

Warunek (15) dla $T_1 = 0$ implikuje rząd $T_3 = n - p$. Jeżeli $p < n - p$, to warunek ten nie może być spełniony. W wypadku przeciwnym, gdy $p \geq n - p$, macierz $\overline{T}_2$ ma pełny rząd równy $n - p$ oraz rząd $A_3 = n - p$. To wyjaśnia przyjęte przez nas założenie, że $r = 2n - m - p$. Gwarantuje ono nam, że rząd $T_3 = n - p$.
Niech X_1 będzie macierzą zbudowaną z kolumn o numerach $n - p + 1, \ldots, 2n - m - p$ macierzy X. Biorąc pod uwagę, że $HC = H[0 \quad I_m] = X = [0 \quad X_1]$, otrzymamy

(5.17) $$H = X_1$$

Z (8) mamy

(5.18) $$R = [P \quad Q]\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} R = [P \quad Q]\begin{bmatrix} TR \\ \overline{C} \end{bmatrix}$$

Macierz R jest nieosobliwa. Wobec tego

$$[P \quad Q] = R\begin{bmatrix} TR \\ \overline{C} \end{bmatrix}^+$$

gdzie + oznacza uogólnioną odwrotność Moore-Penrosa.
Z powyższych rozważań wynika następująca procedura.

Procedura 7.5.1.
Krok 1. Wyznaczamy macierze nieosobliwe L i R przekształcające macierze układu (1) do postaci (10).
Krok 2. Wybieramy macierze E_1 i F o postaci (11)
Krok 3. Wybieramy $T_1 = 0$ oraz T_2 rzędu $n - m$.
Krok 4. Korzystając z wyznaczonych w kroku 3 $t_{i,j}$ oraz (16), wyznaczamy $t_{i,j}$, $i = n - m + 1, \ldots, 2n - m - p$, $j = 1, \ldots, n - p$.
Krok 5. Przyjmując dowolne wartości na $t_{i,j}$ ($i = n - m + 1, \ldots, 2n - m - p$, $j = n - p + 1, \ldots, n$) oraz korzystając z (4) i (17), wyznaczamy macierze G i H.
Krok 6. Korzystając z zależności (18), wyznaczamy macierze P i Q.

Z zależności (10) mamy

(5.19) $$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Is - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LRs - A_1 & -A_2 & D_1 \\ -A_3 & Is - A_4 & D_2 \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

Załóżmy na początku, że rząd $D = m$. Korzystając z macierzy D_1 i działań elementarnych możemy wyeliminować elementy zależne od s z macierzy $LRs - A_1$ oraz z macierzy $Is - A_4$, korzystając z I_p. Zatem

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} Is - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \text{ dla wszystkich } s \in \mathbf{C}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy rząd $A_3 = n - p$. Z zależności (19) wynika również że warunek $p \geq n - p$ jest spełniony, jeżeli $p \geq m$, gdyż $p + m \geq n$.
Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.5.1. Korzystając z procedury 1, można wyznaczyć poszukiwany obserwator doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy
1) $p \geq m$
2) $\text{rząd}\begin{bmatrix} Is - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m$ dla wszystkich $s \in \mathbf{C}$

Przykład 7.5.1. Wyznaczyć obserwator doskonały (2) dla układu (1) o macierzach.

(5.20)
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Korzystając z procedury 1 otrzymamy kolejno.

Krok 1. Macierze (20) mają już pożądane postacie (10).
Krok 2. W tym wypadku $m = 2$, $p = 3$ i wybieramy

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 3. W tym przykładzie

$$[T_1 \quad T_2] = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Krok 4. Korzystając z zależności (16), otrzymamy

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Biorąc pod uwagę (20) i (12), otrzymamy

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Krok 5. Korzystając z (17) i (22), otrzymamy

$$H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

a z zależności (4)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 6. Z (18) i (21) mamy

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Poszukiwany obserwator doskonały ma więc postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix} y$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} y$$

7.6. Obserwatory doskonałe zredukowanego rzędu układów dwuwymiarowych z nieznanymi zakłóceniami

7.6.1. Sformułowanie zadania

Weźmy pod uwagę układ dwuwymiarowy opisany równaniami

(6.1a) $$Ex_{i+1,j} = A_0x_{ij} + A_1x_{i,j+1} + Bu_{ij} + Dv_{ij}$$

(6.1b) $$y_{ij} = Cx_{ij}, \qquad i,j \in Z_+$$

gdzie $x_{ij} \in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u_{ij} \in \boldsymbol{R}^m$ jest wektorem wymuszeń, $v_{ij} \in \boldsymbol{R}^q$ jest wektorem nieznanych zakłóceń, $y_{ij} \in \boldsymbol{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $E, A_0, A_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $D \in \boldsymbol{R}^{n\times q}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$.
Zakładamy, że $\det E = 0$ oraz

(6.2) $$\text{rząd}\, C = p$$

Warunki brzegowe dla (1a) mają postać

(6.3) $$x_{0j} \quad \text{dla } j \in Z_+$$

Weźmy pod uwagę układ singularny dwuwymiarowy, opisany równaniami

(6.4a) $$E_1z_{i+1,j} = F_0z_{ij} + F_1z_{i,j+1} + Gu_{ij} + H_0y_{ij} + H_1y_{i,j+1}$$

(6.4b) $$\hat{x}_{ij} = Pz_{ij} + Qy_{ij}$$

z warunkami brzegowymi

(6.4c) $$z_{0j} \quad \text{dla } j \in Z_+$$

gdzie $\hat{x}_{ij} \in \boldsymbol{R}^n$ jest estymatą wektora x_{ij} a $z_{ij} \in \boldsymbol{R}^r$, $E_1, F_0, F_1 \in \boldsymbol{R}^{r\times r}$, $G \in \boldsymbol{R}^{r\times m}$, $H_0, H_1 \in \boldsymbol{R}^{r\times p}$, $\det E_1 = 0$.

Definicja 7.6.1. Układ singularny (4) nazywamy obserwatorem doskonałym zredukowanego rzędu układu (1) z nieznanymi zakłóceniami, jeżeli

(6.5) $$\hat{x}_{ij} = x_{ij}, \quad \text{dla } i,j \in Z_+$$

oraz dowolnych warunków brzegowych (3) i (4c).

Niech

(6.6) $$e_{ij} = z_{ij} - TEx_{ij}$$

będzie błędem obserwatora, przy czym $T \in R^{r\times n}$. Korzystając z (6), (4) i (1), otrzymamy

(6.7)
$$\begin{aligned}
E_1e_{i+1,j} &= E_1z_{i+1,j} - E_1TEx_{i+1,j} = F_0\left(e_{ij} + TEx_{ij}\right) + F_1\left(e_{i,j+1} + TEx_{i,j+1}\right) \\
&+ Gu_{ij} + H_0Cx_{ij} + H_1Cx_{i,j+1} - E_1TA_0x_{ij} + E_1TA_1x_{i,j+1} - E_1TBu_{ij} - E_1TDv_{ij} \\
&= F_0e_{ij} + F_1e_{i,j+1} + \left(F_0TE + H_0C - E_1TA_0\right)x_{ij} + \left(F_1TE + H_1C - E_1TA_1\right)x_{i,j+1} \\
&+ \left(G - E_1TB\right)u_{ij} - E_1TDv_{ij}
\end{aligned}$$

Jeżeli

(6.8a) $$\begin{aligned} F_0TE + H_0C - E_1TA_0 &= 0 \\ F_1TE + H_1C - E_1TA_1 &= 0 \end{aligned}$$

(6.8b) $$G = E_1TB$$

(6.8c) $$E_1TD = 0$$

to

(6.9) $$E_1e_{i+1,j} = F_0e_{ij} + F_1e_{i,j+1}$$

Z zależności (4b), (6) i (1b) mamy

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{ij} - x_{ij} &= P(e_{ij} + TEx_{ij}) + QCx_{ij} - x_{ij} \\
&= Pe_{ij} + (PTE + QC - I_n)x_{ij}
\end{aligned}
$$

oraz

(6.10) $$\hat{x}_{ij} - x_{ij} = Pe_{ij}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.11) $$PTE + QC = [P \quad Q]\begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = I_n$$

Zauważmy, że można znaleźć parę macierzy P, Q spełniających równość (11) wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.12) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = n$$

Z równości

$$\begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}$$

wynika, że warunek (12) implikuje

(6.13) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$$

W dalszych rozważaniach zakładać będziemy, że warunek (13) jest spełniony.

Zagadnienie wyznaczania obserwatora doskonałego można sformułować następująco.
Dane są macierze E, A_0, A_1, B, D, C. Należy wyznaczyć macierze obserwatora (4) E_1, F_0, F_1, G, H_0, H_1, P, Q tak aby były spełnione warunki (8) i (11).

7.6.2. Rozwiązanie zadania

Lemat 7.6.1. Niech będą spełnione warunki (2) i (13) oraz $p + \text{rząd}\, E = n$. Wtedy istnieją macierze nieosobliwe $U, V \in R^{n\times n}$ takie, że

(6.14)
$$
\begin{aligned}
&\overline{E} = UEV = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r' = \text{rząd}\, E \\
&\overline{C} = CV = [0 \quad I_p] \\
&\overline{A}_k = UA_kV = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, \quad k = 0,1 \\
&A_{11}^k \in \boldsymbol{R}^{r'\times r'}, \quad A_{22}^k \in \boldsymbol{R}^{(n-r')\times(n-r')} \\
&UB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 \in \boldsymbol{R}^{r'\times m}, \quad B_2 \in \boldsymbol{R}^{(n-r')\times m} \\
&UD = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad D_1 \in \boldsymbol{R}^{r'\times q}, \quad D_2 \in \boldsymbol{R}^{(n-r')\times q}
\end{aligned}
$$

Dowód. Jak wiadomo, istnieją macierze nieosobliwe $U, V_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ takie, że

(6.15) $$UEV_1 = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech $CV_1 = [C_1 \quad C_2]$, $C_1 \in \boldsymbol{R}^{p\times(n-p)}$, $C_2 \in \boldsymbol{R}^{p\times p}$. Założenia (2) i (13) implikują $\det C_2 \neq 0$. Wobec tego macierz

(6.16) $$V_2 = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ -C_2C_1 & C_2^{-1} \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa i

(6.17) $$CV = [C_1 \quad C_2], \quad V_2 = [0 \quad I_p], \quad UEV = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \overline{E}$$

gdzie $V = V_1V_2$.

■

W dalszych rozważaniach zakładamy, że macierze E i C mają już postać (14).

Lemat 7.6.2. Jeżeli

(6.18) $$\det\left[E_1 z_1 - F_0 - F_1 z_2\right] = \alpha$$

gdzie α jest niezerowym skalarem niezależnym od z_1 i z_2, to rozwiązanie równania (9) spełnia warunek

(6.19) $$e_{ij} = 0, \quad \text{dla} \quad i, j > 0$$

Dowód. Niech $e(z_1, z_2)$ będzie dwuwymiarową transformatą Z e_{ij}, zdefiniowaną zależnością

(6.20) $$e(z_1, z_2) = Z\left[e_{ij}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} e_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$Z\left[e_{i+1,j}\right] = z_1\left[e(z_1, z_2) - e(0, z_2)\right]$$
$$Z\left[e_{i,j+1}\right] = z_2\left[e(z_1, z_2) - e(z_1, 0)\right]$$

gdzie

$$e(0, z_2) = \sum_{j=0}^{\infty} e_{0j} z_2^{-j}$$

$$e(z_1, 0) = \sum_{i=0}^{\infty} e_{i0} z_1^{-i}$$

z równania (9) otrzymamy

(6.21) $$e(z_1, z_2) = \left[E_1 z_1 - F_0 - F_1 z_2\right]^{-1}\left[E_1 z_1 e(0, z_2) - F_1 z_2 e(z_1, 0)\right]$$

Jeżeli warunek (18) jest spełniony, to

(6.22) $$\left[E_1 z_1 - F_0 - F_1 z_2\right]^{-1} = \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} T_{-k,-l} z_1^k z_2^l$$

gdzie

$$T_{-1,-1} = -F_0^{-1}, \quad T_{-1,-2} = F_0^{-1} F_1 T_{-1,-1}, \quad T_{-2,-1} = F_0^{-1} E_1 T_{-1,-1}, \ldots$$

a para (n_1, n_2) jest indeksem nilpotentności.
Zauważmy, że (18) implikuje $\det F_0 \neq 0$.
Podstawiając (22) do (21) otrzymamy

(6.23) $$e(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} T_{-k,-l} z_1^k z_2^l \left[E_1 z_1 e(0, z_2) - F_1 z_2 e(z_1, 0)\right]$$

Z (23) i (20) wynika, ze $e_{ij} = 0$ dla $i, j > 0$.

■

Jeżeli $r = r' + 1$ oraz

(6.24)
$$E_1 = \begin{bmatrix} I_{r'} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{r \times r}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{r'} \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{r \times r}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} F_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{r \times r}, \quad F_1' \in \boldsymbol{R}^{r' \times r'}$$

to warunek (18) jest spełniony, gdyż

$$\det\begin{bmatrix} I_{r'} z_1 - F_1' z_2 & -I_{r'} \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \alpha$$

Podstawowe znaczenie w rozwiązywaniu zadania ma wybór macierzy T.
Równania (8a) możemy napisać w postaci

(6.25) $$\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} E_1 T A_0 - F_0 T E \\ E_1 T A_1 - F_1 T E \end{bmatrix}$$

Dla $C = [0 \quad I_p]$ równanie (25) ma rozwiązanie $H = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.26) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} W \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\, C$$

gdzie

$$W = \begin{bmatrix} E_1 T A_0 - F_0 T E \\ E_1 T A_1 - F_1 T E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix}$$
$$W_1 \in \boldsymbol{R}^{2r \times r'}, \quad W_2 \in \boldsymbol{R}^{2r \times p}$$

Lemat 7.6.3. Niech macierze E_1, F_0 i F_1 mają postacie (24). Rozpatrywane zadanie obserwatora doskonałego ma rozwiązanie, jeżeli macierz T zostanie wybrana tak, że

(6.27a) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \end{bmatrix} = r'$$

(6.27b) $$D = \operatorname{Ker}[T_1 \quad T_2]$$

(6.27c) $$T_{11} = 0, \quad T'_{12} = T_1A_1^0 + T_2A_3^0, \quad F_1'T_1 = T_1A_1^1 + T_2A_3^1$$

przy czym

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \quad T_2 \in \boldsymbol{R}^{r'\times p}, \quad T_3 \in \boldsymbol{R}^{1\times r'}, \quad T_4 \in \boldsymbol{R}^{1\times p}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{bmatrix}, \quad T_{11} \in \boldsymbol{R}^{1\times r'}, \quad T_{12} \in \boldsymbol{R}^{(r'-1)\times r'}$$

$$T'_{12} = [0 \quad I_{r'}]\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} A_1^k & A_2^k \\ A_3^k & A_4^k \end{bmatrix}, \quad A_1^k \in \boldsymbol{R}^{r'\times r'}, \quad A_2^k \in \boldsymbol{R}^{r'\times p}, \quad A_3^k \in \boldsymbol{R}^{p\times r'}, \quad A_4^k \in \boldsymbol{R}^{p\times p}, \quad k = 0,1$$

Dowód. Jeżeli warunek (27a) jest spełniony, to zachodzi (12), gdyż $TE = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix}$

oraz

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} TE \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ T_3 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = n$$

Korzystając z $E_1T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ łatwo wykazać, że (27b) implikuje warunek (8c).

Warunek (26) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $W_1 = 0$. Biorąc pod uwagę, że

$$W = [W_1 \quad W_2] = \begin{bmatrix} E_1TA_0 - F_0TE \\ E_1TA_1 - F_1TE \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} T_1A_1^0 + T_2A_3^0 - T'_{12} & T_1A_2^0 + T_2A_4^0 \\ -\alpha T_1 & 0 \\ \hline T_1A_1^1 + T_2A_3^1 - F_1'T_1 & T_1A_2^1 + T_2A_4^1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

otrzymamy

(6.28) $$\mathrm{W}_1 = \begin{bmatrix} T_1A_1^0 + T_2A_3^0 - T'_{12} \\ -\alpha T_1 \\ T_1A_1^1 + T_2A_3^1 - F_1'T_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Jeżeli są spełnione warunki (27c), to zachodzi (28).
Jeżeli zachodzi (28), to z (25) mamy $H = W_2$, a z zależności (8b) możemy wyznaczyć macierz G. Jeżeli warunek (27a) jest spełniony, to z (11) możemy wyznaczyć macierze P,Q. W przypadku ogólnym równanie (11) ma wiele rozwiązań.

■

Z (27) wynika, że $r \geq r' + q$.

Lemat 7.6.4. Niech macierze E_1, F_0, F_1 mają postacie (24). Istnieje macierz $T \in \boldsymbol{R}^{r\times n}$ spełniająca warunki (27) wtedy i tylko wtedy, gdy

(6.29a) $$p \geq q$$

oraz

(6.29b) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} E_1z_1 - A_0 - A_1z_2 & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q \text{ dla wszystkich } (z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ jest ciałem liczb zespolonych.

Dowód. Zauważmy, że istnieje macierz T taka, że

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} E_1T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = r' + p \tag{6.30}$$

korzystając z nierówności Sylvestera oraz (29), (30), (24) i (8c), otrzymamy

(6.31)

$$\text{rząd}\left\{\begin{bmatrix} E_1T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1z_1 - A_0 - A_1z_2 & D \\ C & 0 \end{bmatrix}\right\} = \text{rząd}\begin{bmatrix} E_1TEz_1 - E_1TA_0 - E_1TA_1z_2 & E_1TD \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{rząd}\left[\begin{array}{c:c} T_1z_1 - T_1A_1^0 - T_2A_3^0 - (T_1A_1^1 + T_2A_3^1z_2) & -T_1A_2^0 - T_2A_4^0 - (T_1A_2^1 + T_2A_4^1)z_2 \\ 0 & I_p \end{array}\right] \geq r' + q$$

gdzie $E_1TD = 0$.
Warunek (31) jest równoważny warunkowi

$$\text{rząd}\,[T_1z_1 - T_1A_1^0 - T_2A_3^0 - (T_1A_1^1 + T_2A_3^1)z_2] \geq r' + q - p \tag{6.32}$$

który może być spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (29).

■

Twierdzenie 7.6.1. Niech $r \geq r' + q$ i $r' + p = n$ oraz będzie spełniony warunek (13). Rozpatrywane zadanie syntezy obserwatora doskonałego ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (29).

Dowód. Warunek (13) implikuje (27a). Istnieje macierz T taka, że

$$T'_{12} = [0 \quad I_{r'}]\begin{bmatrix} T_1 \\ T_3 \end{bmatrix} = [T_1 \quad T_2]\begin{bmatrix} A_1^0 \\ A_3^0 \end{bmatrix}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\,[T_1 \quad T_2] = \text{rząd}\begin{bmatrix} A_1^0 \\ A_3^0 \end{bmatrix} = r' \tag{6.33}$$

Odpowiedni wybór macierzy F_1' umożliwia zawsze spełnienie warunku $F_1'T_1 = T_1A_1^1 + T_2A_3^1$.
Z (32) wynika, że warunek (33) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (29).

■

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania obserwatora (4).

Procedura 7.6.1.
Krok 1. Wyznaczamy macierze U, V przekształcające macierze E, C, A_k, B, D, $k = 0,1$ do postaci (14).
Krok 2. Wybieramy macierze E_1, F_0, F mające postać (24).
Krok 3. Wybieramy macierz T dla $r \geq r' + q$, spełniającą warunek (27).
Krok 4. Wyznaczamy

$$H = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1A_2^0 + T_2A_4^0 \\ 0 \\ T_1A_2^1 + T_2A_4^1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Krok 5. Korzystając z (8b) i (11), wyznaczamy G, P i Q.

Przykład 7.6.1. Wyznaczyć obserwator doskonały dla układu (1) o macierzach

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

(6.35)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku $n = 3$, $r' = 1$, $m = q = 1$, $p = 2$, $r = 2$. Warunki (29) są spełnione, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} E_1z_1 - A_0 - A_1z_2 & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - 1 & 2 - z_2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 - 2z_2 & 0 \\ 1 - 2z_2 & -1 - z_2 & -2 + z_2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

dla wszystkich $(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$.

Niech

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{bmatrix}$$

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno.

Krok 1. Macierze (33) mają już pożądane postacie.
Krok 2. Wybieramy

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad F_0=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix},\quad F_1=\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 3. Warunki (27) są spełnione, jeżeli

$$t_{11}=0,\ t_{13}=0,\ t_{21}=2t_{12}\neq 0$$

a elementy t_{12}, t_{22}, t_{23} są dowolne.

Krok 4. Korzystając z (34), otrzymamy

$$H=\begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_1A_2^0+T_2A_4^0 \\ 0 \\ \hdashline T_1A_2^1+T_2A_4^1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3t_{12} \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2t_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Krok 5. Korzystając z (8b) i (11), otrzymamy

$$G=E_1TB=\begin{bmatrix} 0 & t_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2t_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$P=\begin{bmatrix} p_{12} & \dfrac{1}{2t_{12}} \\ p_{21} & 0 \\ p_{31} & 0 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poszukiwany obserwator ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}z_{i+1,j}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}z_{ij}+\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}z_{i,j+1}+\begin{bmatrix} 2t_{12} \\ 0 \end{bmatrix}u_{ij}+\begin{bmatrix} 0 & 3t_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}y_{ij}+\begin{bmatrix} 0 & 2t_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}y_{i,j+1}$$

$$\hat{x}_{ij}=\begin{bmatrix} p_{12} & \dfrac{1}{2t_{12}} \\ p_{21} & 0 \\ p_{31} & 0 \end{bmatrix}z_{ij}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}y_{ij}$$

gdzie α, f, p_{12}, p_{21}, p_{31} są dowolne.

Dodatek

Wybrane zagadnienia sterowalności i obserwowalności układów liniowych

1. Osiągalność

Weźmy pod uwagę liniowy układ dyskretny opisany równaniami

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \quad \text{(D.1a)}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i \quad \text{(D.1b)}$$

$$i = 0, 1, \ldots$$

przy czym $x_i \in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u_i \in \boldsymbol{R}^m$ jest wektorem wymuszenia, $y_i \in \boldsymbol{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n\times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p\times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{p\times m}$.

Definicja D.1. Układ (D.1) (lub parę (A,B)) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego wektora $x_f \in \boldsymbol{R}^n$ istnieje liczba całkowita $q > 0$ i ciąg wymuszeń $\{u_i,\ i = 0, 1, \ldots, q-1\}$ taki, że dla $x_0 = 0,\ x_q = x_f$.

Twierdzenie D.1. Układ (D.1) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z niżej podanych warunków

1. rząd $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$ (D.2)
2. rząd $[I_n z - A, B] = n$ dla wszystkich skończonych $z \in \boldsymbol{C}$ (D.3)
3. macierze $[I_n z - A]$ i B są lewostronnie względnie pierwsze (D.4)

Dowód. Korzystając z rozwiązania

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-k-1} Bu_k$$

równania (D.1a) dla $i = n,\ x_0 = 0$ oraz uwzględniając, że $x_n = x_f$ otrzymamy

$$x_f = \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Bu_k = \left[B, A, B, \ldots, A^{n-1}B\right] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \quad \text{(D.5)}$$

Z (D.5) wynika, że dla każdego x_f istnieje ciąg $\{u_i,\ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (D.2).
Niech $v \in \boldsymbol{R}^n$ będzie wektorem takim, że $v^T B = 0$ oraz $v^T A = z v^T$ dla pewnej zmiennej zespolonej z. W tym przypadku mamy

$$v^T AB = z v^T B = 0,\ v^T A^2 B = z v^T AB = 0, \ldots, v^T A^{n-1} B = 0,$$

czyli

$$v^T \left[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\right] = 0$$

Warunek (D.2) implikuje więc $v = 0$. Wobec tego z zależności $v^T \left[I_n z - A, B\right] = 0$ wynika warunek (D.3)

Z (D.3) wynika, że istnieje macierz unimodularna $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{n+m\times(n+m)}[z]$ taka, że

$$[Iz - A, B]U = [I_n\ 0]$$

oraz

$$[Iz - A]U_1 + BU_3 = I_n \quad \text{(D.6)}$$

Macierze $[Iz - A]$ i B są więc lewostronnie względnie pierwsze.
Niech

$$\begin{aligned} u_{1i} &= u_{1i}^0 + u_{1i}^1 z + u_{1i}^2 z^2 + \cdots + u_{1i}^{n-2} z^{n-2} \\ u_{3i} &= u_{3i}^0 + u_{3i}^1 z + u_{3i}^2 z^2 + \cdots + u_{3i}^{n-1} z^{n-1} \end{aligned} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{(D.7)}$$

będą i-tymi kolumnami odpowiednio macierzy wielomianowych $U_1 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}[z]$ i $U_3 \in \boldsymbol{R}^{m\times n}[z]$. Podstawiając (D.7) do (D.6) i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z otrzymamy

$$\begin{aligned} &Bu_{3i}^0 - Au_{1i}^0 = e_i \\ &Bu_{3i}^1 + u_{1i}^0 - Au_{1i}^1 = 0 \\ &\text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ &Bu_{3i}^{n-2} + u_{1i}^{n-3} - Au_{1i}^{n-2} = 0 \\ &Bu_{3i}^{n-1} + u_{1i}^{n-2} = 0 \end{aligned} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{(D.8)}$$

przy czym e_i jest i-tą kolumną macierzy I_n.

Mnożąc lewostronnie równania (D.8) kolejno przez $A^0, A^1, A^2, ..., A^{n-1}$ i dodając je stronami otrzymamy

$$Bu_{3i}^0 + ABu_{3i}^1 + \cdots + A^{n-1}Bu_{3i}^{n-1} = e_i \quad (i=1,...,n)$$

oraz

(D.9) $$\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right]\begin{bmatrix} u_{3i}^0 \\ u_{3i}^1 \\ \vdots \\ u_{3i}^{n-1} \end{bmatrix} = e_i \quad (i=1,...,n)$$

(D.9) implikuje warunek (D.2). Warunki (D.2), (D.3) i (D.4) są więc równoważne.

■

Jeżeli układ (D.1) nie jest osiągalny, to zbiór stanów osiągalnych z punktu $x_0 = 0$ jest określony obrazem macierzy $\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right]$.

Przykład D.1. Wykazać, że para

(D.10) $$A = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{array}\right], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jest osiągalna dla dowolnych wartości współczynników $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.
Korzystając z (D.3) otrzymamy

(D.11) $$\text{rząd}\left[I_n z - A, B\right] = \text{rząd}\left[\begin{array}{cccccc} z & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ -a_0 & -a & -a_2 & \cdots & z - a_{n-1} & 1 \end{array}\right] = n$$

dla wszystkich skończonych $z \in \boldsymbol{C}$

gdyż ostatnich n kolumn macierzy (D.11) jest liniowo niezależnych dla dowolnych wartości współczynników $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$.

Weźmy z kolei pod uwagę liniowy układ ciągły opisany równaniami

(D.12a) $$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$$

(D.12b) $$y = Cx + Du$$

przy czym $x = x(t) \in \boldsymbol{R}^n$ jest wektorem stanu, $u = u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ jest wektorem wymuszenia, $y = y(t) \in \boldsymbol{R}^p$ jest wektorem odpowiedzi, a $A \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$, $B \in \boldsymbol{R}^{n \times m}$, $C \in \boldsymbol{R}^{p \times n}$, $D \in \boldsymbol{R}^{p \times m}$.

Definicja D.2. Układ (D.12) (lub parę (A,B)) nazywamy osiągalną, jeżeli dla każdego wektora $x_f \in \boldsymbol{R}^n$ istnieje chwila $t > 0$ oraz sterowanie $u(t)$ na przedziale $[0, t_f]$ takie, że dla $x_0 = 0$, $x(t_f) = x_f$.

Twierdzenie D.2. Układ (D.12) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z niżej podanych warunków:
1. rząd $[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n$ (D.13)
2. rząd $[I_n s - A, B] = n$ dla wszystkich skończonych $s \in \boldsymbol{C}$ (D.14)
3. macierze $\left[I_n s - A\right]$ i B są lewostronnie względnie pierwsze (D.15)

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia D.1.

■

2. Sterowalność

Definicja D.3. Układ (D.1) (lub parę (A,B)) nazywamy sterowalną, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego $x_0 \neq 0$ istnieje liczba całkowita $q > 0$ i ciąg wymuszeń $\{u_i, i = 0, 1, ..., q-1\}$ taki, że $x_q = 0$.

Twierdzenie D.3. Układ (D.1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z niżej podanych warunków:
1. $\text{Im}A^n \in \text{Im}\,[B, AB, ..., A^{n-1}B]$ (D.16)
2. rząd $[I - dA, B] = n$ dla wszystkich skończonych $d \in \boldsymbol{C}$ (D.17)
3. macierze $[I - dA]$ i B są lewostronnie względnie pierwsze (D.18)

Dowód. Korzystając z rozwiązania równania (D.1) dla $i=n, x_n=0$ otrzymamy

(D.19) $$A^n x_0 = -\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B u_k = -[B, AB, ..., A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Z (D.19) wynika, że istnieje ciąg wymuszeń $\{u_i,\ i=0,1,...,n-1\}$ dla dowolnego x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (D.16).
Niech $v \in \boldsymbol{R}^n$ będzie wektorem takim, że $v^T B = 0$ oraz $v^T A = z v^T$ dla pewnej zmiennej zespolonej z. W ten sam sposób jak w dowodzie twierdzenia D.1 otrzymujemy $v^T [B, AB, ..., A^{n-1}B] = 0$. Warunek (D.16) implikuje

$$0 = v^T A^n = \lambda^n v^T \text{, a więc } \lambda = 0 \text{ lub } v = 0$$

Macierz $[I_n z - A, B]$ ma więc pełny rząd wierszowy równy n dla wszystkich skończonych $z \neq 0$, co jest równoważne warunkowi (D.17).
W sposób analogiczny jak w dowodzie twierdzenia D.1 można wykazać, że warunek (D.17) implikuje (D.18), a z kolei warunek (D.18) implikuje warunek (D.16).

■

Uwaga D.1. Każdy z warunków (D.13), (D.14) i (D.15) dla układu (D.1) o osobliwej macierzy A jest tylko warunkiem dostatecznym, ale nie koniecznym sterowalności tego układu. Jeżeli $\det A \neq 0$, to warunki te są również warunkami koniecznymi sterowalności układu (D.1). Dla układu (D.1) o nieosobliwej macierzy A warunki sterowalności są równoważne warunkom osiągalności.

Przykład D.2. Para macierzy

(D.20) $$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nie jest osiągalna, gdyż

$$\text{rząd}\,[Iz - A, B] = \text{rząd} \begin{bmatrix} z & -a & 1 \\ 0 & z & 0 \end{bmatrix} = 1 \text{ dla } z = 0$$

Korzystając z (D.17) otrzymamy natomiast

$$\text{rząd}\,[I - dA, B] = \text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & -da & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \text{ dla dowolnego } a \text{ i } d.$$

Para (D.20) jest więc sterowalna dla dowolnego a.
Zauważmy, że w tym przypadku stan $x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nie jest osiągalny ze stanu $x_0 = 0$, gdyż x_0 nie należy do $\mathrm{Im}[B, AB] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Natomiast stan $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ może być sprowadzony do zera za pomocą zerowego ciągu sterującego $u_0 = u_1 = 0$, gdyż $A^2 = 0$ dla dowolnego a.

Definicja D.4. Układ (D.12) (lub parę (A,B)) nazywamy sterowalną, jeżeli dla dowolnego stanu początkowego x_0 istnieje chwila $t_f > 0$ oraz sterowanie $u = u(t)$ na przedziale $[0, t_f]$ takie, że $x(t_f) = 0$.

Twierdzenie D.4. Układ (D.12) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków (D.16), (D.17) i (D.18) twierdzenia D.3.

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia D.3.

■

Korzystając z rozwiązania równania (D.12a) dla $x(0) = x_0,\ x(t_f) = 0$ otrzymamy

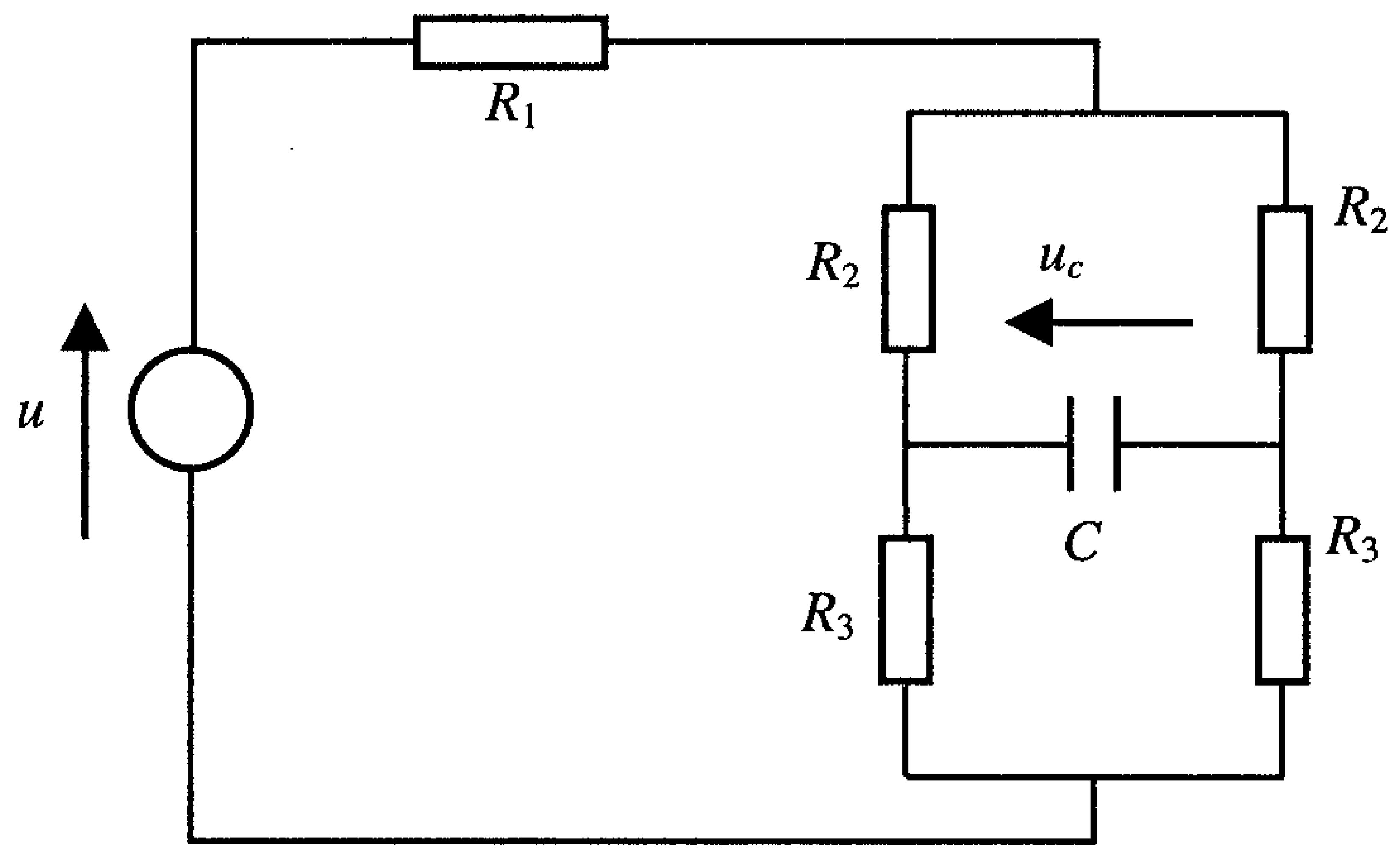
$$x_f = e^{At_f} x_0 + \int_0^{t_f} e^{A(t_f - \tau)} B u(\tau) d\tau = 0$$

oraz

$$x_0 = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

gdyż e^{At} jest macierzą nieosobliwą dla dowolnej macierzy A. Sterowalność układu ciągłego jest więc równoważna jego osiągalności dla dowolnej macierzy A.

Przykład D.3. Za zmienną stanu x obwodu przedstawionego na rys. D.1 przyjmujemy napięcie na kondensatorze u_c, a za wymuszenie napięcie źródłowe u. Zauważmy, że dla dowolnej wartości napięcia źródłowego u napięcie na kondensatorze u_c jest równe zeru. Zmieniając u nie możemy więc osiągnąć zadanej niezerowej wartości napięcia $u_c = x_f \neq 0$. Obwód ten jest więc przykładem układu niesterowalnego.



Rys. D.1.

3. Obserwowalność

Weźmy pod uwagę na początku układ dyskretny (D.1).

Definicja D.5. Układ (D.1) (lub parę (A,C)) nazywamy obserwowalną, jeżeli istnieje liczba całkowita $q > 0$ taka, że dla danych ciągów sterowania $\{u_i, i = 0,1,\ldots,q-1\}$ i odpowiedzi $\{y_i, i = 0,1,\ldots,q-1\}$ można wyznaczyć stan początkowy x_0 tego układu.

Twierdzenie D.5. Układ (D.1) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z niżej podanych warunków:

1. rząd $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$ (D.21)

2. rząd $\begin{bmatrix} I_n z - A \\ C \end{bmatrix} = n$ dla wszystkich skończonych $z \in \mathbb{C}$ (D.22)

3. macierze $[I_n z - A]$ i C są prawostronnie względnie pierwsze (D.23)

Dowód. Podstawiając rozwiązanie równania (D.1a) do (D.1b) otrzymamy

(D.24) $$y_i' = y_i - Du_i - \sum_{k=0}^{i-1} CA^{i-k-1}Bu_k = CA^i x_0$$

Korzystając z (D.24) dla $i = 0,1,\ldots,n-1$ otrzymamy

(D.25) $$\begin{bmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

Dla danych ciągów $\{u_i, i = 0,1,\ldots,n-1\}, \{y_i, i = 0,1,\ldots,n-1\}$ znany jest ciąg $\{y_i', i = 0,1,\ldots,n-1\}$. Z (D.25) możemy wyznaczyć x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (D.21).
Równoważność pozostałych warunków można wykazać analogicznie (w sposób dualny) jak w twierdzeniu D.1.

■

Przykład D.4. Wykazać, że para

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, \; C = [C_1 \quad 0]$$

nie jest obserwowalna dla dowolnych podmacierzy $A_1 \in \mathbf{R}^{r \times r}$, $A_2 \in \mathbf{R}^{(n-r)\times r}$, $A_3 \in \mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $C_1 \in \mathbf{R}^{p \times r}$.
Łatwo sprawdzić, że

(D.26) $$A^k = \begin{bmatrix} A_1^k & 0 \\ * & A_3^k \end{bmatrix}$$

przy czym * oznacza podmacierz nieistotną w dalszych rozważaniach.
Korzystając z (D.21) i (D.26) otrzymamy

(D.27) $$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_1A_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1A_1^{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Z (D.27) wynika, że warunek (D.21) nie jest spełniony dla dowolnych A_1, A_2, A_3 i C_1.

Definicja D.6. Układ (D.12) (lub parę (A,C)) nazywamy obserwowalnym, jeżeli istnieje chwila $t>0$ taka, że dla danych $u(t)$ i $y(t)$ dla $0 \le t \le t_f$ można wyznaczyć stan początkowy x_0 tego układu.

Twierdzenie D.6. Układ (D.12) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków (D.21), (D.22), (D.23) twierdzenia D.5.

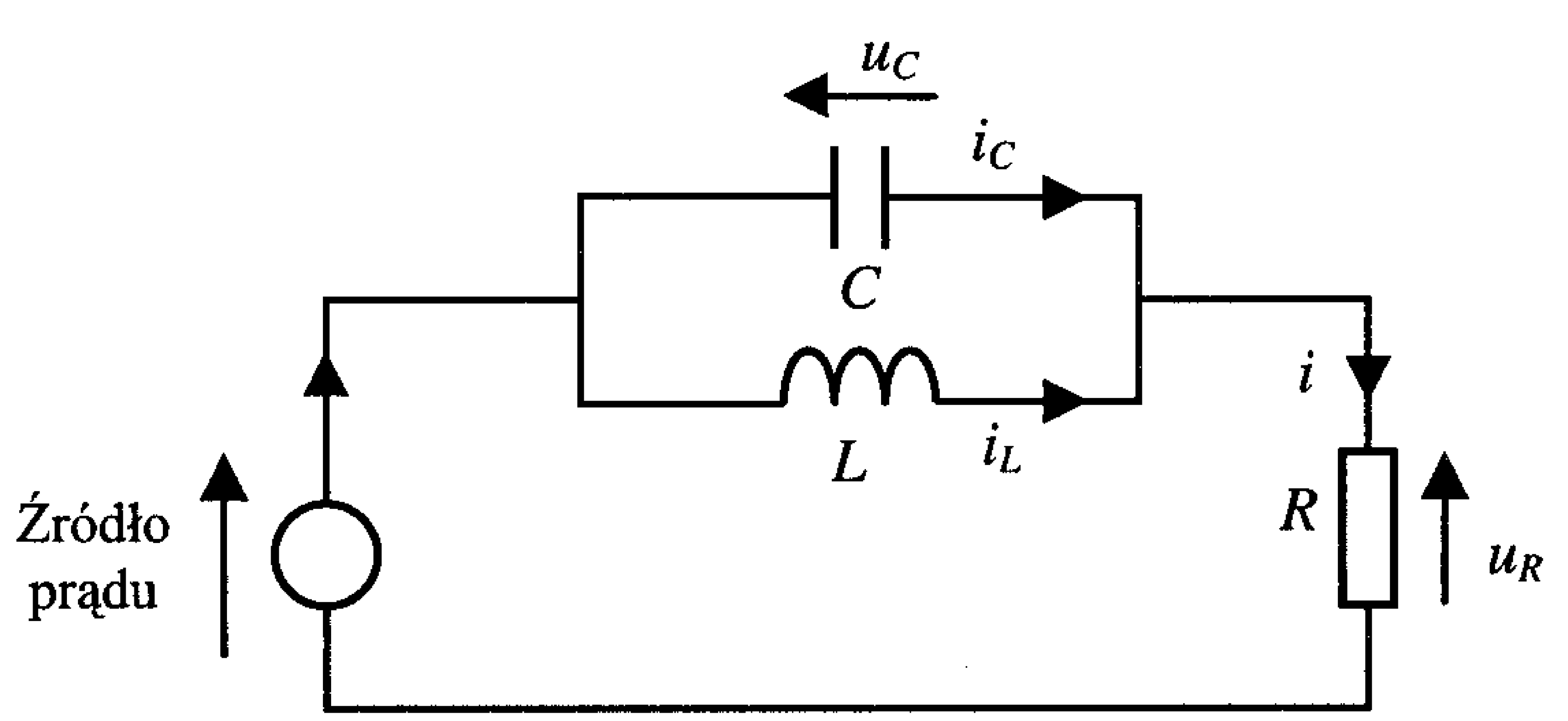
Dowód tego twierdzenia jest analogiczny jak twierdzenia D.5.

■

Przykład D.5. Za zmienne stanu w obwodzie przedstawionym na rys. D.2 przyjmujemy napięcie na kondensatorze u_c oraz prąd w cewce i_L, za wymuszenie u prąd źródłowy i, a za odpowiedź y napięcie u_R na rezystancji R równe $u_R = Ri$. Obwód ten jest opisany równaniami

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i$$

$$y = [0 \quad 0]\begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + Ri$$



Rys. D.2.

Obwód ten nie jest obserwowalny, gdyż macierz $C = [0 \quad 0]$ i wobec tego $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 0$. Zauważmy, że znając prąd źródłowy i oraz napięcie u_R nie możemy wyznaczyć stanu początkowego $\begin{bmatrix} u_c(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix}$ tego obwodu.

Łatwo sprawdzić, że jeżeli za odpowiedź y przyjąć napięcie na kondensatorze, to obwód ten jest obserwowalny.

4. Odtwarzalność

Weźmy pod uwagę na początku układ dyskretny (D.1).

Definicja D.7. Układ (D.1) (lub parę (A,C)) nazywamy odtwarzalnym, jeżeli istnieje liczba całkowita $q>0$ taka, że dla danych ciągów: sterowania $\{u_i,\ i=0,1,\dots,q-1\}$ i odpowiedzi $\{y_i,\ i=0,1,\dots,q-1\}$ można wyznaczyć wektor stanu x_q tego układu.

Twierdzenie D.7. Układ (D.1) jest odtwarzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z niżej podanych warunków:

$$1)\ \ \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \subset \mathrm{Ker}\, A^n \qquad \text{(D.28)}$$

$$2)\ \ \text{rząd}\begin{bmatrix} I_n - dA \\ C \end{bmatrix} = n \quad \text{dla wszystkich skończonych } d \in \mathbb{C} \qquad \text{(D.29)}$$

3) macierz $[I_n - dA]$ i C są prawostronnie względnie pierwsze (D.30)

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny (dualny) do dowodu twierdzenia D.5.

■

Przykład D.6. Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = [11] \qquad \text{(D.31)}$$

nie jest obserwowalna, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

Nie można wyznaczyć wektora $x_0 = [x_0^1,\ x_0^2]^T$ znając y_0 i y_1 dla $u_0 = u_1 = 0$, gdyż $y_0 = Cx_0 = x_0^1 + x_0^2$, $y_1 = 3(x_0^1 + x_0^2)$, a więc znamy tylko sumę $x_0^1 + x_0^2$.

Para (D.31) jest odtwarzalna, gdyż

$$\text{rząd}\begin{bmatrix} I_n - dA \\ C \end{bmatrix} = \text{rząd}\begin{bmatrix} 1-d & -d \\ -2d & 1-2d \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{dla wszystkich skończonych } d \in \mathbf{C}$$

Z równania

$$x_2 = A^2 x_0 = \begin{bmatrix} 3y_0 \\ 2y_1 \end{bmatrix}$$

możemy wyznaczyć x_2 znając y_0 i y_1.

Uwaga D.2. Każdy z warunków (D.21), (D.22), (D.23) dla układu (D.1) o osobliwej macierzy A jest tylko warunkiem dostatecznym, ale niekoniecznym odtwarzalności tego układu. Jeżeli $\det A \neq 0$ to warunki te są również warunkami koniecznymi odtwarzalności układu (D.1). Dla układu (D.1) o nieosobliwej macierzy A warunki obserwowalności są równoważne warunkom odtwarzalności.

Definicja D.8. Układ (D.12) (lub parę (A,C)) nazywamy odtwarzalnym, jeżeli istnieje chwila $t_f > 0$ taka, że na podstawie danych $u(t)$ i $y(t)$ dla $0 \le t \le t_f$ można wyznaczyć wektor stanu $x_f = x(t_f)$ tego układu.

Twierdzenie D.8. Układ (D.12) jest odtwarzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z warunków (D.21), (D.22), (D.23) twierdzenia D.5.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny jak twierdzenia D.5.

■

Odtwarzalność układu ciągłego (D.12) jest równoważna jego obserwowalności.

5. Układ dualny

Definicja D.9. Układ

$$\text{(D.32)} \qquad \begin{aligned} x_{i+1} &= A^T x_i + C^T u_i \\ y_i &= B^T x_i \end{aligned}$$

nazywamy dualnym względem układu

$$\text{(D.33)} \qquad \begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i \\ y_i &= Cx_i \end{aligned}$$

Z porównania twierdzeń D.1 i D.5 wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie D.9. Układ (D.33) jest osiągalny (obserwowalny) wtedy i tylko wtedy, gdy względem niego układ dualny (D.32) jest obserwowalny (osiągalny).

Analogiczne twierdzenie jest również prawdziwe dla układu ciągłego (D.12).

6. Stabilizowalność i wykrywalność

Weźmy pod uwagę układ dyskretny (D.1). Niech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą wartościami własnymi macierzy A tego układu.

Definicja D.10. Wartość własną z_i układu (D.1) nazywamy sterowalną, jeżeli

$$\text{(D.34)} \qquad \text{rząd}[I_n z_i - A, B] = n \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Układ (D.1) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są sterowalne.

Definicja D.11. Układ (D.1) nazywamy stabilizowalnym, jeżeli są sterowalne wszystkie niestabilne wartości własne $|z_i| \ge 1$ układu.

Twierdzenie D.10. Układ (D.1) jest stabilizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{(D.35)} \qquad \text{rząd}\,[I_n z - A, B] = n \quad \text{dla wszystkich} \quad |z| \ge 1$$

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia D.1.

■

Definicja D.12. Wartość własną z_i nazywamy obserwowalną, jeżeli

(D.36) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} I_n z_i - A \\ C \end{bmatrix} = n \qquad (i = 1,...,n)$$

Układ (D.1) jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wartości własne $z_1, z_2, ..., z_n$ są obserwowalne.

Definicja D.13. Układ (D.1) nazywamy wykrywalnym, jeżeli są obserwowalne wszystkie niestabilne wartości własne $(|z_i| \geq 1)$ tego układu.

Twierdzenie D.11. Układ (D.1) jest wykrywalny wtedy i tylko wtedy, gdy

(D.37) $$\text{rząd}\begin{bmatrix} I_n z - A \\ C \end{bmatrix} = n \text{ dla wszystkich } |z| \geq 1$$

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia D.5.

■

Zauważmy, że osiągalność (obserwowalność) implikuje zawsze stabilizowalność (wykrywalność) układu (D.1).

Powyższe rozważania łatwo można przenieść na układy ciągłe (D.12).

Literatura

[1] **AFRIAT S. N.**: *The quadratic form positive defined on a linear manifold.* Proc. Cambridge Phil. Soc. 1951, vol. 47, s. 1-6.

[2] **ALIZADEH F.**: *Combinatorial optimization with semidefinite matrices,* In Proc. of second annual Integer Programming and Combinatorial Optimization Conference, Carnegie–Mellon University, 1992.

[3] **ANDERSON B.**: *A system theory criterion for positive real matrices,* SIAM J. Control, 5, 19967, s. 171-182.

[4] **ANTSAKLIS P. J., GAO Z.**: *Polynomial and rational matrix interpolation: theory and control applications.* Int. J. Control, 1993, vol. 58, No 2, s. 349-404.

[5] **ANTSAKLIS P. J., WOLOVICH W. A.**: *The canonical diophantine equations with applications,* SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 22, No 5, 1984, s. 77-787.

[6] **ARNOLD W. F., LAUB A. J.**: *Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations,* Proc. IEEE, vol. 72, No 12, 1984, s. 1746-1754.

[7] **AYRES F.**: *Theory and problems of matrices.* Schaum, New York 1962.

BACHMANN W., HAACKE R.: *Matrizenrechnung für Ingenieure,* Springer–Varlag Berlin 1982.

[8] **BALAKRISHNAN V., HUANG Y., PACKARD A., DOYLE J.**: *Linear matrix inequalities in analysis with multipliers,* In Proc. American Control Conf.,1994. Invited session on Recent Advances in the Control of Uncertain Systems.

[9] **BANASYUK A, KOCIĘCKI M.**, *Observability with unknown input and dual properties for singular systems,* J.C.Baltzer AG, Scientific Publishing Co, IMACS, 1991, pp. 125-129.

[10] **BARNETT S.**: *Matrices in control theory.* Van Nostrand Reinhold Company, London 1960.

[11] **BARNETT S.**: *Polynomials and linear control systems,* Dekker, New York, 1983

[12] **BELLMAN R.**: *Introduction to matrix analysis.* McGraw–Hill, New York 1960.

[13] **BELLMAN R., FAN K.**: *On systems of linear inequalities in Hermitian matrix variables,* In V. L. Klee, editor, Convexity, vol. 7 of Proc. of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, 1963, s. 1-11.

[14] **BENALLOU A., MELLICHAMP D. A. and SEBORG D. E.**: *On the number of solutions of multivariable polynomial systems,* IEEE Trans. Autom. Contr. AC-28, No 2, 1983, s. 224-227.

[15] **BENVENUTI L. and FARINA L.**, *A tutorial on the positive realization problem,* IEEE Trans. Autom. Control, 2003.

[16] **BERMAN A., NEUMANN M., STERN R.**: *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems,* Wiley–Interscience, 1989.

[17] **BERMAN A., PLEMMONS R. J.**: *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1979.

[18] **BODEWIG E.**: *Matrix calculus.* North–Holland, Amsterdam 1965.

[19] **BORNE P., TZAFESTAS S.**: *Multidimensional polynomial matrix equations,* Applied Modelling and Simalation of Technologiocal Systems, Proc. of the 1st IMACS, Lille–France, 3-6 June 1986, s. 647-653.

[20] **BOSÁK M., GREGOR J.**: *On generalized difference equations,* Aplikace Matematiky, vol. 32, No 3, 1987, s. 224-239.

[21] **BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E. and BALAKRISHAN V.**: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* In Proc. Annual Allerton Conf. on Communication, Control and Computing, Allerton House, Monticello, Illinois, October 1993.

[22] **BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E. and BALAKRISHAN V.**: *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* SIAM , Philadelphia 1994, s. 193

[23] **BRIERLEY S., LEE E.B.**: *Solution of the equation* $A(z)X(z)+X(z)B(z)=C(z)$ *and its application to the stability of generalized linear systems,* Int. J. Control, vol. 40, No 6, 1984, s. 1065-1075.

[24] **BRUNOWSKY P.**: *A classification of linear controllable systems.* Kybernetika cislo 3. 1970, vol. 6, s. 173-187.

[25] **BUSŁOWICZ M.**, *Explicit solution of discrete-delay equations,* Foundations of Control Engineering, vol. 7, No. 2, 1982, pp. 67-71.

[26] **BUSŁOWICZ M.**, Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami, Warszawa–Białystok, 2000.

[27] **BUSŁOWICZ M. and KACZOREK T**, *Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay,* 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 6-9, 2004, Kasadasi, Izmir, Turkey (in press).

[28] **CAMPBELL S. L., MEYER C. D. Jun. and ROSE N. J.**: *Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients,* SIAM J. App. Meth. 1976, vol. 31, No 3, pp. 411-425.

[29] **CAMPBELL S. L., NICHOLS N. K. and TERRELL W. J.**, *Duality, observability and controllablity for linear time-varying descriptor systems,* Circuits Systems Signal Process, vol. 10, No 4, 1991, pp. 455-470.

[30] **CAMPBELL S. L.**, *Singular systems of differential equations,* Pitman Advanced Publishing Program, pp. 138-143.

[31] **CHANG F. R., CHEN H. C.**: *The generalized Cayley-Hamilton theorem for standard pencils.* Systems and Control Letters 18, 1992, s. 179-182.

[32] **CHOLEWICKI T.**: *Macierzowa analiza obwodów liniowych.* PWN, Warszawa 1958.

[33] **ÇIFTÇIBASI T., YŰKSEL Ő.**: *On the Cayley-Hamilton theorem for two-dimensional systems.* IEEE Trans. Autom. Contr. AC-27, 1982, s. 193-194.

[34] **COBB D**, *Controllability, observability and duality in singular systems,* IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-29, No 12, 1984, pp. 1076-1082.

[35] **COXON P. G.**, *Positive input reachability and controllability of positive systems,* Linear Algebra and its Applications 94, 1987, pp. 35-53.

[36] **DAI L.**, *Singular Control Systems,* Lectures Note in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, 1989.

[37] **DATA B. N.**, Numerical methods for linear control systems: desing and analysis, Elsevier Academic Press, 2004.

[38] **DIETRICH G., STAHL H.**: *Grudzüge der matricenrechnung.* VEB, Leipzig 1974.

[39] **DORF R.C.**: *Modern control systems.* Reading, Mass, Addison-Wesley 1967.

[40] **DUAN G. R.**: *Solution to matrix equation* $AV+BW=EVF$ *and eigenstructure assignment for descriptor systems,* Automatica, vol. 28, No 3, 1992, pp. 639-643.

[41] **DZIELIŃSKI A.**, *Approximate Model Application to Geometric Nonlinear Control.* 7th IEEE International Conference Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2001, Miedzyzdroje (Poland), August 28-31,2001.

[42] **DZIELIŃSKI A.**, *MATLAB Package for N-D Sampling based Modelling of Nonlinear Systems.* W: *Multidimensional Signals, Circuits and Systems.* Eds. K. Gałkowski and J. Wood, Taylor and Francis, London, 2001, pp. 29-44.

[43] **DZIELIŃSKI A.**, *New Models for Geometric Non-linear Control.* 13th International Conference on Process Control, PC'01, Štrbské Pleso (Slovakia), June 11-14, 2001.

[44] **DZIELIŃSLI A.**, *Optimal neurons number method for nonlinear systems modelling.* Proceedings of IEEE International Conference on Computational Cybernetics, ICCC'03, Siofok (Hungary), August 29-31, 2003 (współautor: W. Graniszewski).

[45] **EL BOUTHOURI A., PRITCHARD A.**: *A Riccati equation approach to maximizing the stability radius of a linear system under structured stochastic Lipschitzian perturbations,* Syst. Control Letter, January 1994.

[46] **FARINA L. and RINALDI S.**, Positive Linear Systems; Theory and Applications, J. Wiley, New York 2000.

[47] **EMRE E., SILVERMAN L. M.**: *The equation* $XR+XY=\Phi$ *; A characterization of solution,* SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 19, No 1, 1981, s. 33-38.

[48] **EMRE E.**: *The polynomial equation* $QQc+RPc=\Phi$ *with application to dynamic feedback.* SIAM J. Control and Optimization. November 1980, vol. 18, No 6, s. 611-620.

[49] **FADDIEJEWA W. N.**: *Metody numeryczne algerbry liniowej.* PWN, Warszawa 1955.

[50] **FANG Ch.-H.**: *A simple approach to solving the diophantine equation,* IEEE Trans. Autom. Contr. vol. 37, No 1, 1992, s. 152-155.

[51] **FANTI M. P., MAIONE B, TURCHIANO B.**, *Controllability of multi-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, 1990, vol. 51, No 6, pp. 1295-1308.

[52] **FANTI M. P., MAIONE B, TURCHIANO B.**, *Controllability of linear single-input positive discrete-time systems,* Int. J. Control, 1989, vol. 50, No 6, pp. 2523--2542.

[53] **FEINSTEIN J., BAR-NESS Y.**: *The solution of the matrix polynomial equation* $A(s)X(s)+B(s)Y(s)=C(s)$, IEEE Transaction on Automatic Control, vol. AC-29, No 1, 1984, s. 75-77.

[54] **FIEDLER M., PTAK V.**: *Diagonally dominant matrices,* Czechoslovak Mathematical Journal, 92, 1967, s. 420-433.

[55] **FIEDLER M., PTAK V.**: *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors,* Czechoslovak Mathematical Journal, 87, 1962, s. 382-400.

[56] **FIEDLER M., PTAK V.**: *Some generalizations of positive definiteness and monotonicity,* Numerische Mathematik, 9, 1966, s. 163-172.

[57] **FRANKLIN J.N.**: *Matrix theory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1968.

[58] **GANTMAXER F. R., Kliein M. G.**: *Oscilliacionnyje matricy jadra i malye kolebanija mechaniczeskich system.* Gostizgatielstwo, Moskwa 1950.

[59] **GANTMAXER F. R.**: *Teoria matric.* Nauka, Moskwa 1967.

[60] **GILLE J. Ch., CLIQUE M.**: *Rachunek macierzowy i wprowadzenie do analizy funkcjonalnej.* Skrypt Politechniki Śląskiej, Gliwice 1977.

[61] **GOLUB G., VAN LOAN C.**: *Matrix Computations,* John Hopkins Univ. Press, Baltimore, second edition, 1989.

[62] **GRONE R., JOHNSON C. R., SÁ E. M., WOLKOWICZ H.**: *Positive definite completions of partial Hermitian matrices,* Linear Algebra and Appl., 58, 1984, s. 109-124.

[63] **HU H.**: *An algorithm for rescaling a matrix positive definite,* Linear Algebra and its Applications, 96, 1987, s. 131-147.

[64] **JOHNSON C. D.**: *A unified canonical form for controllable and uncontrollable linear dynamical system.* Int. J. Control 1971, vol. 12, No 3, s. 497-517.

[65] **KACZOREK T.**, *A new design method of minimal order functional observers for linear discrete-time systems*, 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR, 2002, 2-5 Sept. 2002, Szczecin, pp. 375-380.

[66] **KACZOREK T.**, *A novel approach to design of minimal order functional observers for singular linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 51, No 2, 2003, pp. 181-188.

[67] **KACZOREK T.**, *A novel method for computation of realization in singular systems*, XXVI IC-SPETO, International Conference of Fundamentals of Electronics and Circuit Theory, Niedzica 28-31.05.2003, pp. 189-192.

[68] **KACZOREK. T.**, A new method for computation and realizations in singular systems, Pol. Acad. Techn. Sci., No. 2003.

[69] **KACZOREK T.**: *Algebraic operations on two-dimensional polynomials.* Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Techn.,vol. 30, No 1-2, 1982, pp. 73-83.

[70] **KACZOREK T.**: *Algorithms for finding 2-D polynomial matrices A,B satisfying the condition AB = BA.* Bull. Pol. Acad. Sci., Ser. Sci. Techn.,vol. 30, No 9-10, 1982, pp. 509-516.

[71] **KACZOREK T.**: *Algorithm for solving 2-D polynomial matrix equations.* Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. sci. techn., vol. 31, No 1-2, 1983, pp. 51-57.

[72] **KACZOREK T.**: *An extension of the Cayley-Hamilton theorem for non-square block matrices and computation of the left and right inverses of matrices*, Bull. Pol.Acad.Techn.Sci., vol. 43, No 1, 1995, pp. 39-46.

[73] **KACZOREK T.**: *An extension of the Cayley-Hamilton theorem for singular 2-D linear systems with non-square matrices*, Bull. Pol.Acad.Techn.Sci., vol. 43, No 1, 1995, pp. 47-56 (co-author: A. Stajniak).

[74] **KACZOREK T.**: *Badanie ekstremalnych wartości mocy czynnej w liniowych obwodach rozgałęzionych.* Archiwum Elektrotechniki, 1962, t. XI, z.1, s. 25-36.

[75] **KACZOREK T.**, *Canonical forms of singular 1D and 2D linear systems*, The Second Intern. Workshop on Multidimensional (nD) Systems (NDS-2000), June 27-30, 2000 Czocha Castle, Poland, pp. 189-196

[76] **KACZOREK T.**, *Cechy i właściwości singularnych układów liniowych*, Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXII 09'96 , pp. 225-230.

[77] **KACZOREK T.**, *Computation of fundamental matrices and reachability of positive singular discrete linear systems,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 46, 1998 (in press).

[78] **KACZOREK T.**: *Computation of the Drazin inverse of a singular matrix making use of neural networks* (coauthor: A. Cichoki and A. Stajniak). Bull.Pol.Acad. Techn. Sci., vol. 40, Nr 4, 1992, pp. 387-394.

[79] **KACZOREK T.**, *Podzielność minorów macierzy transmitancji w obwodach elektrycznych*, Przegląd Elektrotechniczny, 12, 2001.

[80] **KACZOREK T.**:*Decomposition of time-varying implicit linear systems into dynamical and static parts.* Bull.Pol.Acad. Techn.Sci. vol.40,No 2, 1992, pp. 117-123.

[81] **KACZOREK T.**: *Determination of solutions to singular 2-D continuous-discrete linear systems with singular matrix pencils,* Bull.Pol.Acad.Sc.Techn.Sc., vol. 43, No 2, 1995, s. 203-225.

[82] **KACZOREK T.**, *Dynamics assignment problem of linear systems*, Konferencja Naukowo-Techniczna „Automatyzacja – Nowości i Perspektywy" AUTOMATION 2001, 28-30.03.2001, Warszawa, pp. 53-58.

[83] **KACZOREK T.**, Dynamics assignment problem of linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 49, No 3, 2001, pp. 461-466.

[84] **KACZOREK T.**, *Electrical circuits as examples of positive singular continuous-time systems* , SPETO'98, Ustroń 20-22.05.98, pp. 37-43.

[85] **KACZOREK T.**, *Elementary operations approach to dynamics assignment of singular linear systems*, Intern. Workshop on Polynomial Methods in Signal, Systems and Control, August 28, 2001 Wysokie Tatry.

[86] **KACZOREK T.**, *Elimination of finite eigenvalues of strongly singular systems by feedbacks in linear systems*, Intern. Conf. on "Mathematical Modelling as Means of Power Consumption", Lwów, 18-23.06.2001, No 421, pp. 73-77.

[87] **KACZOREK T.**, *Elimination of finite eigenvalues of the matrices by feedbacks linear systems*, 10th Intern. Conf. "Systems, Modelling Control", Zakopane 21-25.05.2001, pp. 345-350.

[88] **KACZOREK T.**, *Elimination of finite eigenvalues of strongly singular the 2D Roesser model by state-feedbacks*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sc., 2001, vol. 11, No 2, pp. 369-376.

[89] **KACZOREK T.**: *Existence and uniqueness of solutions and Cayley-Hamilton theorem for general singular model of 2-D systems.* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.,vol. 37, No 5-6, 1989, pp. 275-278.

[90] **KACZOREK T.**: *Extension of the method of continuants for n-order linear difference equations with variable coefficients.* Bull. Acad. Pol. Sci. Ser.,sci. techn.,vol. 33, No 7-8, 1985, pp. 395-400.

[91] **KACZOREK T.**: *Extension on Sylvester's theorem to two-dimensional systems.* Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. techn.,vol. 30, No 1-2, 1982, pp. 109-114.

[92] **KACZOREK T.**: *Extensions of the Cayley-Hamilton theorem for 2-D continuous-discrete linear systems,* Appl. Math. and Com. Sci., vol. 4 No 4, 1994, pp. 507-515.

[93] **KACZOREK T.**: *Floquet-Lyapunov transformation for singular 2-D linear systems,* Bull. Pol. Acad. Sc. Techn. Sc., vol. 40, No 4, 1992, s. 355-360.

[94] **KACZOREK T.**, *Full-order perfect observer for continuous-time linear systems*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, Nr 1, 2001, pp. 3-6.

[95] **KACZOREK T.**, *Functional observer for continuous-time linear systems*, Pomiary, Automatyka, Kontrola PAK 9'2003, pp. 4-9 (współautor: M. Sławiński) (cz. I).

[96] **KACZOREK T.**: *Generalization of the Cayley-Hamilton theorem for nonsquare matrices*, Prace XVII SPET0-1995, s. 77-83.

[97] **KACZOREK T.**, *Infinite eigenvalue assignment by output-feedbacks for singular systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. No 2003.

[98] **KACZOREK T.**, *Influence of the state-feedback on cyclicity of linear systems*, Materiały Konferencji Naukowo-Technicznej "Automation 2002", 20-22 marca 2002, Warsawa, s. 81-93.

[99] **KACZOREK T.**, *Linear Control Systems*, vol. 1 and 2, Research Studies Press, J. Wiley, New York 1992-1993.

[100] **KACZOREK T.**: *Methods for computation of solutions to regular discrete-time linear systems,* Appl. Math. and Comp. Science, vol. 5, no 4, 1995, s. 635-656.

[101] **KACZOREK T.**, *Minimal order perfect functional observers for singular linear systems*, Machine Intelligence & Robotic Control, vol. 4, No 2, 2002, pp. 71-74.

[102] **KACZOREK T.**, *Minimal order deadbeat functional observers for singular 2D linear systems*, Control & Cybernetics, vol. 32, No 2, 2003, pp. 301-311

[103] **KACZOREK T.**, *Minimal order perfect functional observers for singular linear systems*, IV International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering", Zakopane, Sept. 2-5, 2002, pp. 52-55.

[104] **KACZOREK T.**, *Minimalny rząd obserwatorów funkcjonalnych liniowych układów ciągłych*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, No 9, 2002, s. 5-8.

[105] **KACZOREK T.**: *Neural-type structured networks for solving algebraic Riccati, equations* (coauthor: A.Cichocki), Archives of Control Sciences, vol. 1, No 3-4, 1992, pp. 153-165.

[106] **KACZOREK T.**: *New algorithms of solving 2-D polynomial equations*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Techn. sci., vol.30, No 5-6, 1982, pp. 263-269.

[107] **KACZOREK T.**, *Obserwatory doskonałe liniowych układów jedno i dwuwymiarowych*, XIV Krajowa Konferencja Automatyki, Zielona Góra, 24-27 czerwca 2002, pp. 3-12.

[108] **KACZOREK T.**, *On the solution of linear inhomogeneous matrix difference equations of order n with variable coefficients*. Zastosowanie, Matematyki (Applicationes Mathematicae), vol. 19, No 2, 1987, pp. 285-287.

[109] **KACZOREK T.**, *Perfect functional observers of singular continuous-time linear systems*, Machine Intelligence & Robotic Control, vol. 4, No 1, 2002, pp. 77-82.

[110] **KACZOREK T.**, *Perfect observers for singular continuous-time linear systems*, Intern. Scientific Conf. "Energy Savings Electrical Engineering", 80th Annversary of the Faculty of Electrical Engineering at the Warsaw University of Technology, Warsaw, 14-15 May 2001, pp. 247-251.

[111] **KACZOREK T.**, *Perfect observers for singular 2D Fornasini-Marchesini models*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, No 10, 2001, pp. 1671-1675.

[112] **KACZOREK T.**, *Perfect observers of standard linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 50, No 3, 2002, pp. 237-245.

[113] **KACZOREK T.**, *Perfect observers for standard linear systems*, 8th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR, 2002, 2-5 Sept. 2002, Szczecin, pp. 399-404 (co-author: M. Sławiński).

[114] **KACZOREK T.**, *Perfect observers for singular 2D linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 49, No 1, 2001, pp. 141-147.

[115] **KACZOREK T.**, P*erfect reduced-order unknown-input observer for descriptor systems*,7th World Muliconference on Systems, Cybernetics and Informatics, July 27-30,2003, Orlando, Florida, USA.

[116] **KACZOREK T.**, P*erfect reduced-order unknown-input observer for 2D linear systems*, V Intern. Workshop Computational Problems of Electrical Engineering, Jazleevets, Ukraina, 26-29.08.2003, pp. 64-69.

[117] **KACZOREK T.**, *Podzielność minorów stopnia drugiego macierzy licznika transmitancji prze jej mianownik*, Przegląd Elektrotechniczny, 12, 2001, s. 297-302.

[118] **KACZOREK T.**: *Polynomial and rational matrix interpolations for 2-D systems.* Bull. Acad.Pol.Sc. 1994, vol. 42, No2, s.45-51.

[119] **KACZOREK T.**, *Polynomial approach to pole shifting to infinity in singular systems by feedbacks*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 50, No 2 , 2002, pp. 134-144.

[120] **KACZOREK T.**: *Polynomial matrix equations in two indeterminates*. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. sci. techn. vol. 30, No 1-2, 1982, pp. 95-100.

[121] **KACZOREK T.**, *Positive 1D and 2D Systems*, Springer-Verlag, London 2002.

[122] **KACZOREK T.**, *Positive 2D linear systems*, Proc. of 13th Intern. Conf. Systems Science, 15-18 Sept. 1998, Wrocław, vol. 1, pp. 50-67.

[123] **KACZOREK T.**, *Positive descriptor discrete-time linear systems*, International Journal: Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems, No 1(7) , 1998, pp. 38-54.

[124] **KACZOREK T.**, *Positive singular discrete linear systems,* Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 45, No 4, 1997, pp. 619-631.

[125] **KACZOREK T.**: *Proper rational solution to 2-D two-sided polynomial matrix equation.* IEEE Trans.on Autom. Contr., vol. AC-32, No 9, 1987, pp. 826-828.

[126] **KACZOREK T.**: *Rational and polynomial solutions to 2-D polynomial matrix equations*. Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.,vol. 39, No 1, 1991, pp. 105-109.

[127] **KACZOREK T.**: *Real solutions to two-sided polynomial matrix equations*. Bull. Pol. Acad. Techn. Sci.,vol. 35, No 11-12, 1987, pp. 673-677.

[128] **KACZOREK T.**, *Reachability and controlability of non-negative 2-D Roesser type models*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 44, No 1, 1998, pp. 408-410.

[129] **KACZOREK T.**, Realisation problem for singular 2D linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 6, No.3 , 1998, pp. 317-330.

[130] **KACZOREK T.**, Realisation problem for weakly positive linear systems, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 48, No 4, 2000, pp. 595-606.

[131] **KACZOREK T.**, Reduced-order unknown-input perfect observer for descriptor, 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), Międzyzdroje, 25-28.08.2003, pp. 375-380 (co-author: S. Krzemiński).

[132] **KACZOREK T.**: *Reduction of singular 2-D periodic systems to constant 2-D linear systems by the use of state feedback and Floquet-Lyapunov transformation.* Bull. Pol. Acad. Techn.Sci., vol. 41, No 2, 1993, (coauthor W. Dąbrowski), pp. 133-138.

[133] **KACZOREK T.**, *Relationship between infinite eigenvalue assignment for singular systems and solvability of polynomial matrix equations*, 11th Mediterranean Conference on Control and Automation MED'03, June 18-20, 2003, Rhodes, Greece.

[134] **KACZOREK T.**, *Singular Compartmental Systems and Electrical Circuits,* Elektronoje Modelirowanie, , Vol. 26, 2004.

[135] **KACZOREK T.**, *Shifting to infinity of the eigenvalues in singular linear systems*, Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXIX 6/2003, pp. 439-443.

[136] **KACZOREK T.**, *Słabo dodatnie układy w elektrotechnice*, Przegląd Elektrotechniczny RLXXIV, 11'98, pp.277-281.

[137] **KACZOREK T.**, *Słabo dodatnie singularne układy dyskretne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Automatyka z. 123, 1998, pp. 233-248.

[138] **KACZOREK T.**: *Solving of 2-D polynomial matrix equations. Functional-Differential Systems and Related Topics*, Proc. of III Intern. Conference, Błażejewko, May 22-29 1983, pp. 127-132.

[139] **KACZOREK T.**: *Solving of algebraic matrix equations by use of neural networks* (coauthor: A. Cichocki), Bull. Acad. Techn. Sci. vol. 40, No 1, 1992. pp. 61-68 oraz Proc. of Workshop on Massively Parallel Computing, Leysin 9-11 March, 1992, Session IV, 1-8.

[140] **KACZOREK T.**: *Solving of real matrix equations $AX - YB = C$ making use of neural networks* (coauthor: A. Cichocki), Bull.Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 40, No 3, 1992, pp. 273-279.

[141] **KACZOREK T.**, *Some Recent Developments in Perfect Observers*, Triennial International Conference on Applied Automatic Syst. Orhid, Macedonia, Sept. 18-20, 2003, pp. 3-24.

[142] **KACZOREK T.**, *Some recent developments in positive systems,* Proc. 7th Conference of Dynamical Systems Theory and Applications, pp. 25-35, Łódź 2003.

[143] **KACZOREK T.**: *Special canonical form of matrices A,B,C of multivariable linear systems.* Foundations of Control Engineering, 1979, vol. 4, No 1, s. 27-34.

[144] **KACZOREK T.**: *Straight line reachability of Roesser model*, IEEE Trans. on Autom. Contr., vol. AC-32, No 7, 1987, pp. 637-639.

[145] **KACZOREK T.**: *Teoria Sterowania i Systemów*, PWN, Warszawa 1997.

[146] **KACZOREK T.**, T*he relationship between the infinite eigenvalue assignment for singular systems and the solvability of polynomial matrix equations*, Int. J. Appl. Math. and Comp. Sci., vol. 13, No 2, 2003, pp. 161-167.

[147] **KACZOREK T.**: *Transformation of matrices A,B,C of multivariable linear time-invariant systems to special canonical form.* Bull.Acad.Pol.Sc. 1978, vol. 26, No 7.

[148] **KACZOREK T.**: *Transformation of time-varying implicit linear systems to their Weierstrass canonical form.* Bull. Pol. Acad. Techn.Sci. vol.40, No 2, 1992, pp. 109-116.

[149] **KACZOREK T.**: *Two-Dimensional Linear Systems,* Springer-Verlag Berlin-Tokyo 1985.

[150] **KACZOREK T.**: *Two-sided polynomial matrix equations*. Bull. Acad. Pol. Techn. Sci.,vol. 35, No 11-12, 1987, pp. 667-671.

[151] **KACZOREK T.**, *Weakly positive continuous-time linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 46, No. 2, 1998, pp. 233-245.

[152] **KACZOREK T.**, *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT Warszawa 1998.

[153] **KACZOREK T.**. *Zero-degree solutions to AX + BY = C and invariant factors assignment problem.* Bull. Acad.Pol. Sci. Ser.sci.techn.,vol.34, No 9-10, 1986, pp. 553-558.

[154] **KACZOREK T.**: *Zero-degree solutions to the bilateral polynomial matrix equations*. Bull. Acad. Pol. Sci.,Ser. sci. techn., vol. 34, No 9-10, 1986, pp. 547-552.

[155] **KACZOREK T., TRACZYK T.**: *Partial derivative of the Vandermonde determinant and their application to the synthesis of linear control systems.* Zastosowania Matematyki, 1973, t. XIII, z. 3, s. 329-337.

[156] **KACZOREK. T.**, *Singular compartmental linear systems*, Bull. of Pol. Acad. Science, Vol. 51, No 4, 2003.

[157] **KAILATH T.**, *Linear Systems*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1980.

[158] **KARCANIAS N.**, Reg*ular state-space realizations of singular system control problems*. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1987, pp. 1144-1146.

[159] **KIEŁBASIŃSKI A., SCHWETLICK H.**: *Numeryczna Algebra Liniowa.* WNT, Warszawa 1992.

[160] **KLAMKA J.**, *Controllability of Dynamical Systems,* Kluwer Academic Publ,. Dordecht, 1991.

[161] **KLAMKA J.**: *Function of 2-D matrix.* Foundations of Control Engineering, vol. 9, 1984.

[162] **KLAMKA J.**, Sterowalność układów dynamicznych, Warszawa-Wrocław, WNT 1990.

[163] **KOWALCZYK B.**: *Macierze i ich zastosowania.* WNT, Warszawa 1976.

[164] **KUČERA V.**: *A contribution to matrix equations.* Trans. Autom. Control. 1972, vol. AC-17, s. 344-347.

[165] **KUČERA V.**: *Constant solutions of polynomial equations,* Int. J. Control, vol. 53, No 2, 1991, s. 495-502.

[166] **KUČERA V.**: *Discrete linear control: The polynomial equation approach.* Academia, Prague 1979.

[167] **KUREK J. E.**: *Genericness of solution to N-dimensional polynomial matrix equation $XA = I$*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 37, No 8, 1990, s. 1041-1043.

[168] **LAMPE B., ROSENWASSER E.**, *Algebraische Methoden zur Theorie der Mehrgrößen – Abtastsysteme*, Universität Rostock, 2000.

[169] **LAMPE B., ROSENWASSER E.**, *Algebraic properties of irreducible transfer matrices*, Avtomatika i Telemekhanika, N 7, 2000, pp. 31-43 (in Russian) (English translation: Automation and Remote Control, vol. 61, N 7, Pt. I, 2000, pp. 1091-1102.

[170] **LANG S.**: *Algebra.* PWN Warszawa 1984.

[171] **LANG S.**: *Algebra.* Reading, Mass, Addison–Wesley 1971.

[172] **LANGENHOP C. E.**, *The Laurent Expansion for a nearly singular matrix*, Linear Algebra and its Applications 4, 1971, pp. 329-340.

[173] **LANKASTER P.**: *Theory of matrices.* Academic Press, New York 1969.

[174] **LAUB A. J.**: *A Schur method for solving algebraic Riccati equations,* IEEE Trans. Aut. Control, AC-24(6). 1979, s. 913-921.

[175] **LEVIN J.**: *On the matrix Riccati equation.* Trans. Autom. Control. 1967, vol. AC-12, s. 746-749.

[176] **LEWIS F. L.**: *A survey of linear singular systems*, Circuits Systems Signal Process, vol. 5, no 1, 1986, s. 3-36.

[177] **LEWIS F. L.**, *Descriptor systems: Decomposition into forward and backward subsystems*, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-29, 1984, pp. 167-170.

[178] **LEWIS F. L., MERTZIOS B. G.**, *Fundamental matrix of discrete singular systems,* Circuits, Syst., Signal Processing, vol. 8, no 3. 1989, pp. 341-355.

[179] **LEWIS F. L.**, *Fundamental, reachability and observability matrices for discrete descriptor systems*, IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-30, 1985, pp. 502-505.

[180] **LEWIS F. L.**, *Further remarks on the Cayley-Hamilton theorem and Leverrier's method for the matrix pencil (sE-A)*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, No. 9, 1986, pp. 869-870.

[181] **LEWIS F. L.**, *Techniques in 2-D implicit systems,* Control and Dynamic Systems, vol. 69, pp. 89-131.

[182] **LUENBERGER D. G.**: *Canonical forms for linear multivariable systems.* Trans. Autom. Control. June 1967, vol. AC-12, s. 290-293.

[183] **LUENBERGER D. G.**, *Dynamic equations in descriptor form*, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, No 3, 1977, pp. 312-321.

[184] **LUENBERGER D. G.**, *Time-invariant descriptor systems,* Automatica, vol. 14, 1978, pp. 473-480.

[185] **MacDUFFEE C.C.**: *The theory of matrices.* Chelsea, New York 1946.

[186] **MacLANE S., BIRKHOFF G.**: *Algebra.* MacMillan, New York 1967.

[187] **MARCUS H., MINC H.**: *A survey of matrix theory and matrix inequalities.* Allyn and Bacon, Boston 1964.

[188] **MINC H.**: *Nonnegative Matrices,* New York, J. Wiley 1988.

[189] **MIN-YEN WU**: *A new concept of eigen-values and eigen-vectors and its applications.* Trans. Autom. Control. 1980, vol. AC-25, No 4, s. 824-826.

[190] **MISRA P., VAN DOOREN P., VARGA A.**: *Computation of structural invariants of generalized state-space systems,* Automatica, vol. 30, no 12, 1994, s. 1921-1936.

[191] **MITKOWSKI W.**, Stabilizacja systemów dynamicznych, AGH, Kraków 1996.

[192] **MOSTOWSKI A., STARK M.**: *Elementy Algebry Wyższej.* PWN Warszawa 1958.

[193] **MUFTI I.H.**: *On the reduction of a system to canonical (phase-variable) form.* Trans. Autom. Control. April 1965, vol. AC-10, s. 206-207.

[194] **MURTHY D. N. P.**, *Controllability of a linear positive dynamic system,* Int. J. Systems Sci., 1986, vol. 17, No 1, pp. 49-54.

[195] **NEWMAN M.**: *Integral matrices.* Academic Press, New York 1972.

[196] **ORTEGA J. M.**: *Matrix Theory,* Plenum Press, New York and London, 1976.

[197] **OHTA Y., MADEA H. and KODAMA S.**, *Reachability, observability and realizability of continuous-time positive systems,* SIAM J. Control and Optimization, vol. 22, No 2, 1984, pp. 171-180.

[198] **PACE I. S., BARNETT S.**: *Efficient algorithms for linear system calculation. Smith form and common divisior of polynomial matrices.* Int. J. System Sc. 1974, vol. 5, No 6, s. 403-411.

[199] **PENROSE R.**: *A generalized inverse for matrices.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1955, vol. 51, s. 406-413.

[200] **PERNELLA R.**: *Le calcul matriciel.* Eyrolles Ed. Paris 1969.

[201] **PETERSEN I. R., HOLLOT C. V.**: *A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems,* Automatica, vol. 22, No 4, 1986, s. 397-411.

[202] **POPOV V. M.**: *Invariant description of linear time-invariant controllable systems.* SIAM J. Control. 1972, vol. 10, No 2, s. 252-264.

[203] **PORTER V. A.**: *On the matrix Riccati equation.* Trans. Autom. Control. 1967, vol. AC-12, s. 746-749.

[204] **PRONGLE R. M., RAYNER A. A.**: *Generalized inverse matrices.* Griffin, London 1971.

[205] **REID W. T.**: *A matrix differential equation of Riccati type.* Amer. J. Math. 1946, vol. 68, s. 237-246.

[206] **ROTH W. E.**: *The equations $AX\text{-}BY=C$ and $AX\text{-}XB=C$ in matrices.* Proc. Am. Math. Soc.1952, vol. 3, s. 392-396.

[207] **SILVERMAN L. M.**: *Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form.* Trans. Autom. Control. 1966, vol. AC-11, April, s. 300-303.

[208] **SINHA N. K., ROZSA P.**: *Some canonical form for linear multivariable systems.* Int. J. Control. 1976, vol. 23, No 6, s. 865-883.

[209] **SMART N. M., BARNETT S.**: *The Algebra of Matrices in N-Dimensional Systems.* IMA Jour. of Math. Contr. and Inform. 6, 1989, s. 121-133.

[210] **SMART N. M., BARNETT S.**: *The Cayley-Hamilton Theorem in Two- and N-Dimensional Systems.* IMA Jour. of Math. Contr. and Inform. 2, 1985, s. 217-223.

[211] **SOLAK M. K.**: *Differential represenatations of multivariable linear systems with disturbances and polynomial matrix equations* $PX+RY=W$ *and* $PX+YN=V$, IEEE Trans. on Automatic Contr., vol. AC-30, No 7, 1985, s. 687-690.

[212] **SOMMER R.**: *Entwurf nichlinear, zeitwarianter Systems durch Polynom.* Regelungstechnik 27, 1979, H. 12, s. 393-399.

[213] **ŠEBEK M.**: *2-D polynomial equations,* Kybernetika, vol. 19, No 3, 1983, s. 212-224.

[214] **ŠEBEK M.**: *Characteristic polynomial assignment for delay-difeerential systems via 2-D polynomial equations,* Kybernetika, vol. 23, No 5, 1987, s. 345-359.

[215] **ŠEBEK M., KUČERA V.**: *Matrix equations arising in regulator problems,* Kybernetika, vol. 17, No 2, 1981, s. 128-139.

[216] **ŠEBEK M.**: *n-D polynomial matrix equations,* IEEE Trans. Automat. Contr. vol. 33, No 5, 1988, s. 499-502.

[217] **ŠEBEK M.**: *Two-sided equations and skew primeness for n-D polynomial matrices,* System & Control Letters 12, 1989, s. 331-337.

[218] **THEODORU N. J.**: *M-dimensional Cayley-Hamilton theorem.* IEEE Trans. Automat. Contr. AC-34, No 5, 1989, s. 563-565.

[219] **TRZASKA Z., MARSZAŁEK W.**: *Inversion of matrix pencils for generalized systems,* Journal of the Frankllin Institute, Pergamon Press Ltd., 1992, s. 479-490.

[220] **TUROWICZ A., MITKOWSKI W.**: *Teoria macierzy,* Wydawnictwa AGH Kraków 1995.

[221] **TWARDY M., KACZOREK T.**, *Observer-based fault detection in dynamical systems – part I,* Pomiary, Automatyka, Kontrola, No 5, 2004.

[222] **TWARDY M., KACZOREK T.** *Observer-based fault detection in dynamical systems – part II,* Pomiary, Automatyka, Kontrola, No 6, 2004.

[223] **VAN DOOREN P.**: *The computation of Kronecker's canonical form of a singular pencil,* Linear Algebra and Its Applications, 1979, vol. 27, s. 103-140.

[224] **VARDULAKIS A. I. G.**: *Proper rational matrix diophantine equations and the exact model matching problem,* IEEE Trans.Autom. Contr. AC-29, No 5, 1984, s. 475-477.

[225] **VAUGHAM D. R.**: *A negative exponential solution for the matrix Riccati equation.* Trans. Autom. Control. 1969, vol. AC-14, s. 72-79.

[226] **VIDYASAGAR M.**: *On matrix measures and convex Liapunov functions,* J. Math Anl. and Appl., vol. 62, 1978, s. 90-103.

[227] **WARMUS W.**: *Wektory i macierze.* PWN Warszawa 1981.

[228] **WARWICK K.**: *Using the Cayley-Hamilton theorem with N-partitioned matrices.* IEEE Trans. Automat. Contr. AC-28, 1983, s. 1127-1128.

[229] **WILLEMS J. L.**: *On the existence of a nonpositive solution to the Riccati equation,* IEEE Trans. Aut. Control, AC-19 (5), October 1974.

[230] **WOLOVICH W. A.**: *Linear multivariable systems.* Springer–Verlag, New York 1974.

[231] **WOLOVICH W. A.**: *Skew prime polynomial matrices,* IEEE Trans. Autom. Contr. AC-23, No 5, 1978, pp. 880-887.

[232] **WOLOVICH W. A., ANTSAKLIS P.J.**: *The cannonical diophantine equations with applications,* SIAM J. Control and Optimization, vol. 22, No 5, 1984, s. 777-787.

[233] **XIE G., LONG WANG L**, Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays, in L. Benvenuti, A. De Santis and L. Farina (eds): Positive Systems, LNCIS 294, Springer–Verlag, Berlin 2003, pp. 377-384.

[234] **YAKUBOVICH V. A.**: *Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory,* Soviet Math. Dokl., vol. 5, 1964, s. 652-656.

[235] **YAKUBOVICH V. A.**: *The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory,* Soviet Math. Dokl., vol. 3, 1962, s. 620-623. (In Russian, 1961).

[236] **YIP E. L. and SINOVEC E. F.**, *Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems,* IEEE Trans. Automat.Contr., vol. AC-26, 1981, pp. 702-707.

[237] **YOKOYAMA R., KINNEN E.**: *Phase-variable canonical forms for linear, multi-input, multi-output systems.* Int. J. Control. 1973, vol. 17, No 6, s. 1297-1312.

[238] **ZIĘTAK K.**: *The l_p solution of the nonlinear matrix equation* $XY = A$, BIT 23, 1983, s. 248-257.

[239] **ZURMÜHL.**: *Matrizen. Eine darstellung für Ingenieure.* Springer–Verlag, Berlin 1958.

[240] **ŻAK S. H.**: *On the polynomial matrix equation* $AX + YB = C$, IEEE Trans. Autom. Contr. AC-30, No 12, 1985, s. 1240-1242.