Matematyka

— Klasowa —

— Heleny Lewińskiej.
uczennicy kl. VIII mej.

– Algebra –

– H. Lewińskiej

ucz. kl. VIII-mej

15-XI-30. Praca klasowa. №1.

Ile należy użyć towaru po A zł. za kg, ile po B zł. za kg., aby otrzymać p^{kg} mieszaniny, po C zł. za kg.?

Zakł. po A zł. za kg. należy użyć x kg.

Zakładam, że należy użyć y kg towaru po B zł. za kg

$(ax + by = p.c)$ I a zł — x kg.

II. b zł — $(p-x)$ kg.

$ax + (p-x)b = p.c$

wartość Igo gatunku $= ax$

wartość IIgo gatunku $= (p-x)b$

wartość I gatunku + wartość IIgo gatunku $= ax+(p-x)b=pc$

Jeżeli mamy równanie z jedną niewiadomą, wtedy doprowadzamy najpierw do rozwiązania, a później przeprowadzamy dyskusję.

$ax + pb - bx = pc$

$ax - bx = pc - pb$

$x(a-b) = p(c-b)$

$x = \frac{p(c-b)}{a-b}$;

odpowiedź:

$x = \frac{p(c-b)}{a-b}$; należy przedyskutować.

x musi być dodatnie, czyli $x>0$ i $x<p$

Z treści zadania otrzymujemy następujące ograniczenia dla niewiadomej

$0 < \frac{p(c-b)}{a-b} < p$ nierówność podwójną.

mianownik $a-b \neq 0$

1) $a-b > 0$

$0 < p(c-b) < p(a-b)$

$0 < pc - pb < ap - pb$ do obu stron dodajemy po bp

$pb < pc < ap \quad | : p$

$\underline{b < c < a}$

Aiby zadanie jest możliwe do rozwiązania $b < c < a$ jeżeli $a - b > 0$

$x = \frac{p(c-b)}{a-b}$; jeżeli c jest zawarte między b i a.

2) $a-b < 0$ jeżeli cena II go gatunku jest większa od ceny I go gatunku

$0 > p(c-b) > p(a-b)$

$0 > pc - pb > pa - pb$ dodajemy po pb.

$pb > pc > pa \quad | : p$

$b > c > a$

Aiby zadanie było możliwe do rozwiązania cena mieszaniny musi być zawarta między ceną I go gatunku i II go gatunku, jeżeli $a-b \gtrless 0$.

x może być $= 0$, albo $x=p$.

$\frac{p(c-b)}{a-b} = 0$ jeżeli $p(c-b) = 0$

$p(c-b) = \cancel{a-b}$ $\quad p = 0$ albo $c - b = 0$
$c = b$.

wtedy weźmy tylko drugi gatunek.

$p = \frac{p(c-b)}{a-b}$;

$c - \cancel{b} = a - \cancel{b}$, kiedy $c = a$ wtedy musi być

weźmy tylko I szy gatunek –

$c = b = a$

$x = \frac{p \cdot 0}{0}$;

$\frac{5}{0} = +\infty$

$\frac{-5}{0} = -\infty$

$\frac{0}{5} = 0$; $\quad \frac{0}{0} = 1 \quad \frac{0}{0} = 5 \quad \frac{0}{0} = 70$

$\frac{0}{0}$ —— jest liczbą nieoznaczoną, znaczy x może być każdą liczbą.

Lata dwóch osób są 25 i 31 za ile lat stosunek ich wieku = k

I osoba ma lat 25

II ga " " " 31

Przypuszczam, że taki stosunek nastąpi za x lat.

I osoba — $(25+x)$ lat.

II osoba $(31+x)$ lat

$$\frac{25+x}{31+x} = k \quad | \cdot 31+x$$

$$25+x = k(31+x)$$

$$25+x = 31k + kx$$

$$x - kx = 31k - 25$$

$$x(1-k) = 31k - 25$$

$$x = \frac{31k-25}{1-k};$$

x może być <0, albo $x>0$, albo ~~x=~~ $x=0$.

1) aieby zadanie było możliwe do rozwiązania $1-k \neq 0$ k nie może być $=1$.

1) kiedy $x>0$

$$\frac{31k-25}{1-k} > 0$$

$$(31k-25)(1-k) > 0$$

2) kiedy $x<0$

$$\frac{31k-25}{1-k} < 0$$

$(31k-25)(1-k) < 0$ na środę skończyć.

Powtórzyć działania na pierwiastkach.

~~3) x~~

Rozpatrzmy pierwszy wypadek, kiedy $x>0$

$$\frac{31k-25}{1-k} > 0 \qquad (31k-25)(1-k) > 0$$

$$31k - 25 - 31k^2 + 25k > 0$$

$$-31k^2 + 56k - 25 > 0 \quad | \cdot -1$$

$$31k^2 - 56k + 25 < 0$$

$$W = 56^2 - 4 \cdot 31 \cdot 25 = 3136 -$$

$$- 3100 = 36$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 56 \\ \hline 336 \\ 280 \\ \hline 3136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ 25 \\ \hline 155 \\ 62 \\ \hline 775 \\ 4 \\ \hline 3100 \end{array}$$

$$31k^2 - 56k + 25 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{56 \mp \sqrt{36}}{62}; \quad k_1 = \frac{56-6}{62} = \frac{50}{62} = \frac{25}{31}; \quad k_2 = \frac{56+6}{62} = \frac{62}{62} = 1.$$

Kiedy $x>0$ wtedy k może być $= \frac{25}{31}$; ~~lub albo k może =1~~.

2) kiedy $x<0$

$$\frac{31k-25}{1-k} < 0 \qquad (31k-25)(1-k) < 0$$

$$-31k^2 + \cancel{2}56k + 25 < 0 \quad | \cdot -1$$

$31k - 56k + 25 > 0 \qquad w > 0$

1) $x > 0$

$\frac{31k-25}{1-k} > 0 \qquad (31k-25)(1-k) > 0$

$31k - \cancel{3}25 - 31k^2 + 25k > 0$

$-31k^2 + 56k - 25 > 0$

$w = b^2 - 4ac = 56^2 - 4 \cdot 31 \cdot 25 = 3136 - 3100 =$

$= 36; \quad w = 36; \quad w > 0$

Jeżeli $w > 0$ wtedy znak trójmianu jest zmienny. Zależy od tego, z którego obszaru nadamy wartości x-owi.

Przyrównuję lewą stronę nierówności do zera.

$-31k^2 + 56k - 25 = 0 \quad | \cdot -1.$

$31k^2 - 56k + 25 = 0$

$k_{1,2} = \frac{56 \mp \sqrt{36}}{62}; \quad k_1 = \frac{56-6}{62} = \frac{50}{62} = \frac{25}{31}; \quad k_2 = 1.$

Ażeby dana nierówność się sprawdziła należy nadawać wartości dla k międzypierwiastkowe. Ażeby zadanie było możliwe do rozwiązania, gdy $x > 0$ wtedy $\frac{25}{31} < k < 1$.

2) kiedy $x < 0$

$\frac{31k-25}{1-k} < 0 \qquad (31k-25)(1-k) < 0$

$-31k^2 + 56k - 25 < 0$

$w = 36 \quad w > 0$ znak trójmianu zmienny.

Ponieważ trójmian ma być tego samego znaku co współczynnik przy niewiadomej w kwadracie, więc wartości dla k należy nadawać pozapierwiastkowe.

$k_1 = \frac{25}{31}; \quad k_2 = 1$

Ażeby zadanie było możliwe do rozwiązania, gdy $x < 0$ wtedy k musi być albo $< \frac{25}{31}$, albo k musi być < 1.

3) kiedy $x = 0$

$\frac{31k-25}{1-k} = 0$ jeżeli $31k - 25 = 0$

$31k = 25$

$k = \frac{25}{31};$

Ażeby zadanie było możliwe do rozwiązania, kiedy $x = 0$, wtedy $k = \frac{25}{31}$;

19-XI-30 Praca klasowa. № 2.

$\frac{x+a-3b}{x+a} = \frac{x-2b}{x};$

$(x+a-3b)x = (x-2b)(x+a)$

$\cancel{x^2} + \cancel{ax} - 3bx = \cancel{x^2} - 2bx + \cancel{ax} - 2ab$

$-3bx + 2bx - 2ab = 0$

$-bx - 2ab = 0$

Zadanie na sobotę

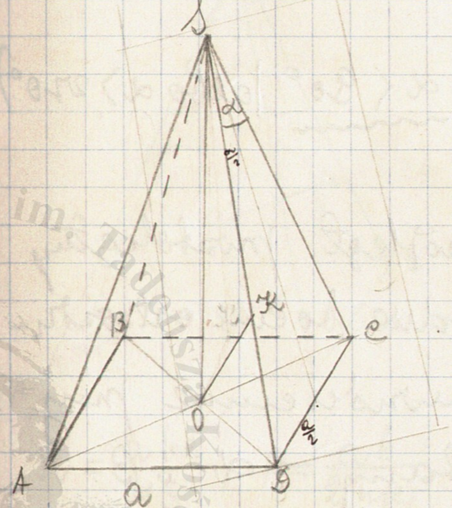
Dany jest ostrosłup trójkątny foremny, którego krawędź boczna $= b$, tworzy z wysokością ostrosłupa kąt $30°$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną, przesuniętą przez bok podstawy pod kątem α do niej (podstawy). Wyznaczyć pole otrzymanego przekroju. Wykonać obliczenia, gdy $b = 37{,}58$ cm. $\alpha = 41° 25'$.

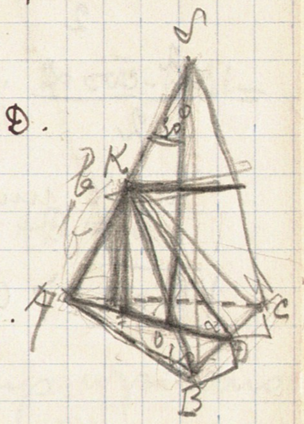
№ 19. Praca klasowa. 14-II-1931

Powtórzyć stosunek pól wielokątów podobnych, foremnych o tej samej ilości boków, obliczanie obwodu i pola koła, co to jest π, radjan, teorję granic, co to jest ciąg, jakie ciągi, granica ciągu - twierdzenia o granicach.

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt ABC równoramienny i prostokątny.

Foremny czworokątny ostrosłup SABCD.





$OK \perp SD$

$OK^2 = DK \cdot KS.$

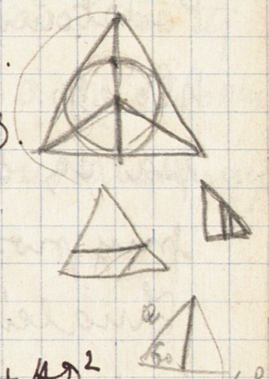
$SD = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$

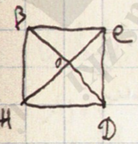
$SK = SD - KD.$

KD z $\Delta\, OKD.$

$OD^2 = DS \cdot KD$

$DK = \dfrac{OD^2}{DS};$





$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2};$

$\dfrac{BD}{2} = \sqrt{AB^2 + AD^2} : 2$

$OD^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{4} = a \cdot \sin 60°$

$= \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2};$

$DK = \dfrac{a^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot a} = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2};$

$KS = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - a\sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{a - 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$OK^2 = OD^2 - KD^2;\ OK^2 = \dfrac{a^2}{2} - a^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a^2 - 2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2} =$

$$\frac{a^2(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2} = \frac{a^2[1-(1-\cos\alpha)]}{2} = \frac{a^2(1-1+\cos\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{a^2\cdot\cos\alpha}{2}; \quad OK = \frac{a}{2}\sqrt{2\cos\alpha}.$$

Jakie musi być α.?

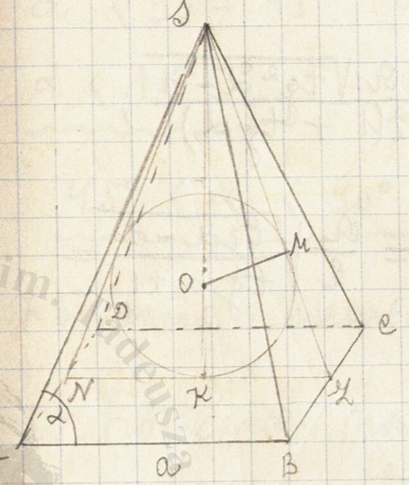
$\sqrt{2\cos\alpha} > 0 \quad 2\cos\alpha > 0 \quad \alpha < 90^\circ$ (albo $\alpha > 270^\circ$)

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego pole = m. Krawędzie boczne ostrosłupa są sobie równe, kąty dwuścienne przy przyprostokątnych podstawy = α i β. Znaleźć objętość tego ostrosłupa. Wykonać obliczenie, gdy $m = 40{,}8\ cm^2$

$\alpha = 42^\circ 18'$

$\beta = 38^\circ 24'$. | na przyszłą sobotę ! |

№ 20. Praca klasowa. 21-II.1931.



$AB = BC = CD = AD = a$.

$\sphericalangle SAB = \alpha$.

W ten ostrosłup wpisano kulę. Obliczyć promień tej kuli. Obliczyć OK, albowiem ΔNSL jest równoramienny.

$r = \frac{S}{p}$;

$R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{ab}{2h(c)}$;

Obliczam SL.

$SL = \frac{a}{2}\cdot tg\,\alpha$.

$p = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\,tg\,\alpha$

$S = \frac{NL\cdot SK}{2} = \frac{a}{2}\cdot SK$.

Z ΔSKL obliczam SK

$$SK = \sqrt{LS^2 - KL^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}tg^2\alpha - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2(tg^2\alpha - 1)}{4}} =$$

$f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2 - l^2$

$w \geq 0$

$w = 4a^2 - 8(a^2 - l^2) \quad | :4$

$a^2 - 2(a^2 - l^2) \geq 0$

$a^2 - 2a^2 + 2l^2 \geq 0$

$2l^2 - a^2 \geq 0$

$2l^2 \geq a^2$

$l^2 \geq \frac{a^2}{2}$;

$f(0) = a^2 - l^2$

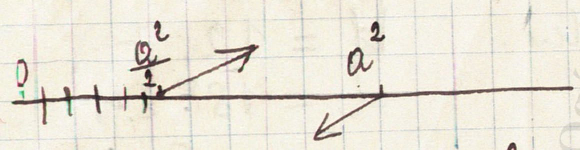
$f(0) = 0$ wtedy $l^2 = a^2$.

$f(0) > 0 \quad l^2 > a^2$

$f(0) < 0 \quad l^2 < a^2$.

$f(a) = 2a^2 - 2a^2 + a^2 - l^2$.

$f(a) = 0$ wtedy $l^2 = a^2$.



1) gdy $l^2 = \frac{a^2}{2}$; $w = 0$ $\quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{a}{2}$;

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Otrzymujemy dwa kwadraty jednakowej wielkości, będzie to prostokąt wsumie, którego podstawa $= a$, a wysokość $\frac{a}{2}$;

2) gdy $\frac{a^2}{2} < l^2 < a^2$ $\quad w > 0$ są dwa pierwiastki różne.

$f(0) > 0$ 0 leży poza pierwiastkami.

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2}$; $\quad \frac{a}{2} > 0$ więc 0 leży z lewej strony pierwiastków.

$f(a) > 0$ a leży poza pierwiastkami z prawej strony.

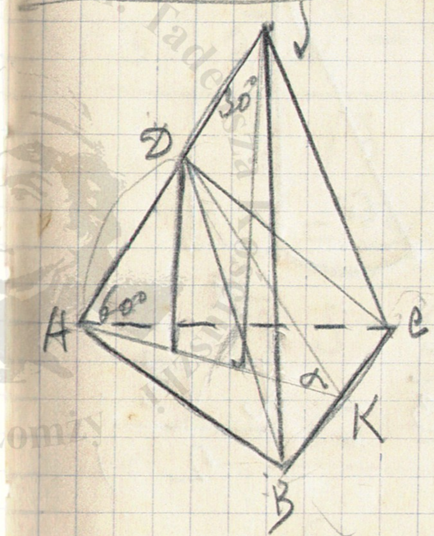
$0 < x_1 < x_2 < a$ obydwa pierwiastki są rozwiązaniem zadania.

3) gdy $l^2 = a^2$ $\quad w > 0$ dwa pierwiastki różne.

$f(0) = 0 \quad f(a) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = a$.

Odcinków x niema - jest jeden kwadrat o boku $= a$.



$120° - \alpha = \angle D$

$\frac{36}{4}$

~~$\sin(120 - \alpha)$~~

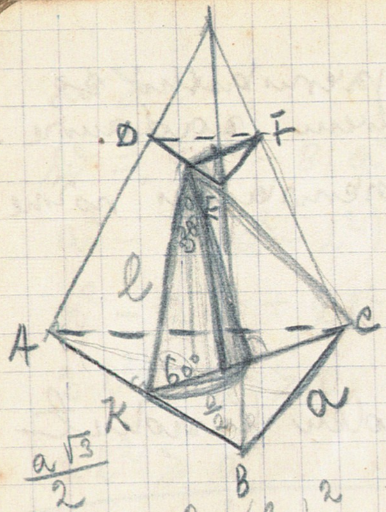
$\frac{\frac{36}{4}}{\sin(120° - \alpha)} = \frac{x}{\sin 60}$

$x = \frac{\frac{36}{4} \cdot \sin 60°}{\sin(120° - \alpha)}$

$x = \frac{36\sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot \sin(120° - \alpha)}$

$x = \frac{36\sqrt{3}}{8 \sin(120° - \alpha)}$

Sa. b.

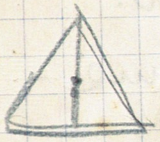


$\frac{a\sqrt{3}\cdot a}{2\cdot 2}$

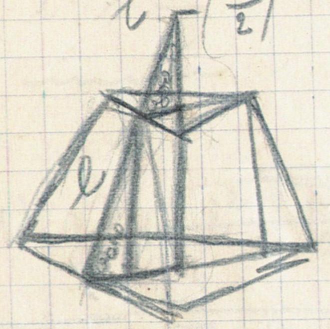
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$S = \frac{(3a+3x)l}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$\frac{x}{\sqrt{3}}$



$l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$

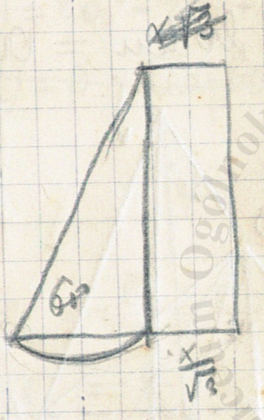


$r = \frac{1}{2}d$

$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{d}{2}$

$d\sqrt{3} = 2a$

$d = \frac{2a}{\sqrt{3}}$



$R\sqrt{3} = a$

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{r}{1}$

$$h = d\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} = a$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{(a-x)2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{3(a+x)\cdot(a-x)2}{\sqrt{3}\cdot 2} + \frac{\sqrt{3}(a^2+x^2)}{4}$$

$$= \frac{4\cdot 3(a^2-x^2) + 3(a^2+x^2)}{4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3(4a^2-4x^2+a^2+x^2)}{4\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3(5a^2-3x^2)}{4\sqrt{3}} = S$$

$$4\sqrt{3}S = 3(5a^2-3x^2)$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{3}S - 5a^2 = -3x^2$$

$$x^2 = \frac{5a^2 - \frac{4}{3}\sqrt{3}S}{3} = \frac{10a^2 - 4\sqrt{3}S}{6}$$

$$x = \sqrt{\frac{5a^2 - 2\sqrt{3}S}{3}}$$

Powierzchnia boczna foremnego graniastosłupa ~~foremnego~~ trójkątnego = S, znaleźć powierzchnię całkowitą, jeżeli wiadomo, że przekątna przechodząca przez bok podstawowy i przeciwległy wierzchołek graniastosłupa tworzy z przekątną podstawy kąt α.

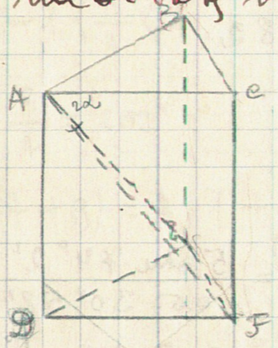
$S = 22{,}5\,m^2$

$\alpha = 28^\circ 17' 36''$

odp. $36{,}432\,m^2$.   na sobotę.

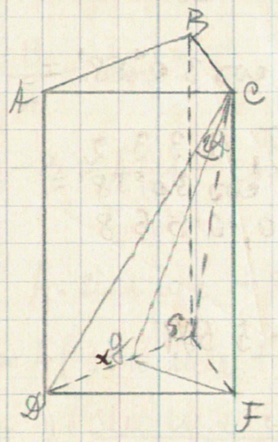
na prawdę środę powtórzyć z algebry i równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

na sobotę z geom: równość figur.



$AD = H$. pole przekroju = ?

$H = 4$. Praca klasowa. 20. II. 30



$CF = H$.

$\sphericalangle DCE = 2\alpha$

$S_{\triangle DCE} = ?$

$S_{\triangle DCE} = \frac{DE \cdot Cg}{2}$;

$S_{\triangle DCE} = \frac{x \cdot Cg}{2}$;

Z $\triangle CgF$ obliczam Cg.

$Cg^2 = gF^2 + H^2$

$\frac{Cg}{\frac{x}{2}} = tg\,\alpha$ $Cg = \frac{x \cdot tg\,\alpha}{2}$;

$S = \frac{x^2\,\cancel{tg\,\alpha}}{4\,\cancel{tg\,\alpha}}$;

$\triangle Dcg$ $CF = H$.

$x = \sqrt{Dc^2 - H^2}$; Dc obliczam z $\triangle Dcg$.

$\frac{x}{Dc} = \sin\alpha$ $Dc = \frac{x}{2}$; $\frac{Dg}{cg} = tg\,\alpha$ $cg = \frac{Dg}{tg\,\alpha}$;

$cg = \frac{x}{2 \cdot tg\,\alpha}$; $\frac{\frac{x}{2}}{Dc} = \sin\alpha$ $Dc = \frac{x}{2 \cdot \sin\alpha}$;

$S = \frac{x^2}{4\,tg\,\alpha}$; $x = \sqrt{\frac{x^2}{4\sin^2\alpha} - H^2}\ \Big|^2$

$x^2 = \frac{x^2}{4\sin^2\alpha} - H^2 \ \big|\cdot 4\sin^2\alpha$

$4x^2\sin^2\alpha = x^2 - 4H^2\sin^2\alpha$

$4x^2\sin^2\alpha - x^2 + 4H^2\sin^2\alpha = 0$.

$x^2 = 4H^2\sin^2\alpha + 4x^2\sin^2\alpha$

$x^2 = 4\sin^2\alpha(\cancel{+}x^2 + H^2)$

$4x^2\sin^2\alpha - x^2 = -4H^2\sin^2\alpha \ \big|\cdot -1$.

$\cancel{x^2}($ $x^2 - 4x^2\sin^2\alpha = 4H^2\sin^2\alpha$

$x^2(1 - 4\sin^2\alpha) = 4H^2\sin^2\alpha$.

$x^2 = \frac{4H^2\sin^2\alpha}{1 - 4\sin^2\alpha}$;

R^2.

$$\int = \frac{4H^2\sin^2\alpha}{(1-4H^2\sin^2\alpha)\,4\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\cancel{4}\,H^2\,\sin^{\cancel{2}}\alpha\cdot\cos\alpha}{(1-4\sin^2\alpha)\,4\,\cancel{\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{H^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-4\sin^2\alpha};$$

$$1-4\sin^2\alpha = 4\left(\tfrac{1}{4}-\sin^2\alpha\right) = 4(\sin^2 30-\sin^2\alpha) =$$

$$= 4(\sin 30^\circ-\sin\alpha)(\sin 30^\circ+\sin\alpha) =$$

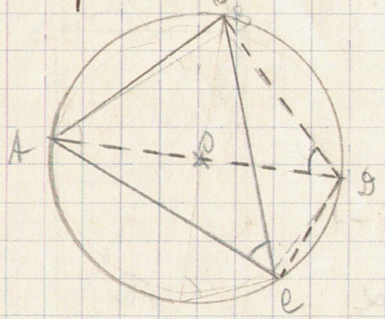
$$= 4\cdot\underline{2\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}}\cdot\underline{\underline{\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}}}\cdot\underline{2\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}}\cdot\underline{\underline{\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}}} =$$

$$= 4\cdot\sin(30^\circ-\alpha)\cdot\sin(30^\circ+\alpha)$$

$$\int_1 = \frac{H^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)};\qquad \alpha < 30^\circ.$$

Twierdzenie sinusów.

Stosunek boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą, równą średnicy koła, opisanego na tym trójkącie.



Δ ABD jest prostokątny.

$\frac{AB}{AD} = \sin D$ $\sphericalangle D = \sphericalangle C$

$AB = AD\cdot\sin D$

$AB = 2R\cdot\sin D = 2R\cdot\sin C.$

Δ ADC jest prostokątny.

$\frac{AC}{AD} = \sin\sphericalangle ADC$ $AC = AD\cdot\sin\sphericalangle ADC$

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC.$

$AC = AD\cdot\sin\sphericalangle ABC = 2R\cdot\sin\sphericalangle ABC.$

$AB = 2R\cdot\sin C$

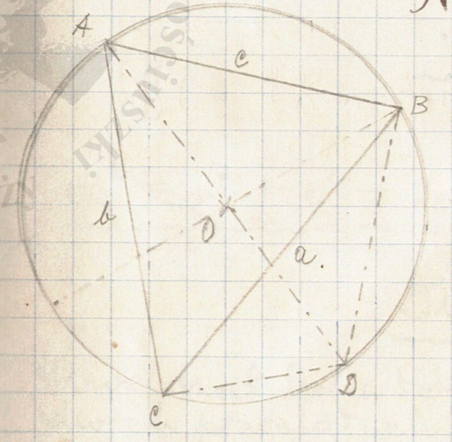
$AC = 2R\cdot\sin B$

$BC = 2R\cdot\sin A.$

R^2

Przer. 49. 50.   Z geom. rozdz. II. do parag. 13 na środę.

№ 5. Praca klasowa. 24-IX-30.



Δ ABD $\sphericalangle D = \sphericalangle C.$

$\frac{AB}{AD} = \sin D$ $\frac{1}{3}BW$

$AB = AD\cdot\sin D$

$\underline{AB = 2R\cdot\sin C.}$ $c = 2R\cdot\sin C.$

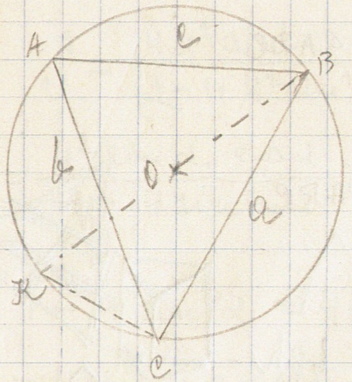
$\frac{AC}{AD} = \sin\sphericalangle ADC$ $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$

$AC = AD\cdot\sin\sphericalangle ADC$

$AC = 2R\cdot\sin B$

$\underline{AC = 2R\cdot\sin B.}$

$b = 2R\cdot\sin B.$



ΔBCK. jest prostokątny.

$$\frac{BC}{BK} = \sin K$$

$BC = BK \cdot \sin K$. $\quad \sphericalangle K = \sphericalangle A$.

$BC = 2R \cdot \sin \sphericalangle A$.

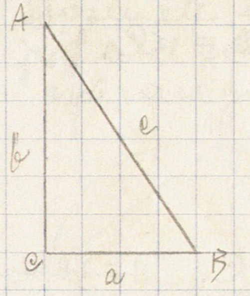
$a = 2R \cdot \sin \sphericalangle A$.

$a = 2R \cdot \sin \sphericalangle A \qquad 2R = \frac{a}{\sin \sphericalangle A}$;

$b = 2R \cdot \sin \sphericalangle B \qquad 2R = \frac{b}{\sin \sphericalangle B}$;

$c = 2R \cdot \sin \sphericalangle C \qquad 2R = \frac{c}{\sin \sphericalangle C}$;

$$\underline{\frac{a}{\sin \sphericalangle A} = \frac{b}{\sin \sphericalangle B} = \frac{c}{\sin \sphericalangle C} = 2R.}$$



$$\frac{a}{\sin \sphericalangle A} = \frac{c}{\sin \sphericalangle C};$$

$$\frac{a}{\sin \sphericalangle A} = \frac{c}{1}$$

$$\frac{a}{\sin \sphericalangle A} = c$$

$$\underline{a = c \cdot \sin \sphericalangle A.}$$

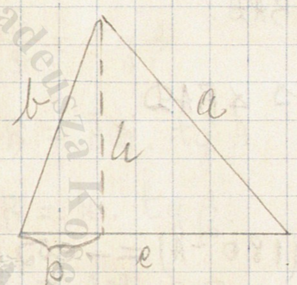
$\frac{a}{\sin(90^\circ - B)} = c. \quad \frac{a}{\cos \sphericalangle B} = c \qquad \underline{a = c \cdot \cos \sphericalangle B.}$

Przyprostokątna równa się przeciwprostokątnej przez sinus kąta przeciwległego, lub przeciwprostokątnej przez cosinus kąta przyległego.

$\frac{a}{\sin \sphericalangle A} = \frac{b}{\sin \sphericalangle B} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\sin \sphericalangle A}{\cos \sphericalangle A}$;

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B}; \qquad \underline{a = b \cdot tg \sphericalangle A.}$

$\frac{a}{b} = \frac{\cos \sphericalangle B}{\sin \sphericalangle B}; \qquad \frac{a}{b} = ctg \sphericalangle B \qquad \underline{a = b \cdot ctg \sphericalangle B.}$



$a^2 = h^2 + (c-p)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$

$\cancel{p^2 =}\ h^2 = b^2 - p^2$

$a^2 = b^2 - \cancel{p^2} + c^2 - 2cp + \cancel{p^2}$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2cp.}$$

Twierdzenie Carnot'a.

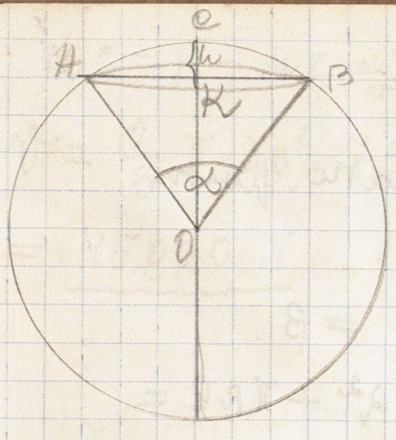
Kwadrat boku trójkąta = sumie kwadratów dwóch pozostałych boków mniej podwojony iloczyn tych boków przez cosinus kąta między niemi zawartego.

№ 21. Praca klasowa. 22-IV-1931

Łuk kołowego wycinka $= \alpha = 80°25'$. Różnica pomiędzy promieniem koła a połową cięciwy, odpowiadającej temu łukowi $= d = 2{,}25$. Obliczyć objętość wycinka kulistego, który się utworzy, jeżeli dany wycinek kołowy będzie się obracać wzdłuż osi, przechodzącej przez wysokość danego wycinka kulistego.

W prostopadłościanie przekątna $m = 12{,}15$ cm. jest nachylona do podstawy prostopadłościanu pod kątem α, a do jednej ze ścian bocznych pod kątem β. Wyznaczyć obj. prostop. $\alpha = 62°\,12'$; $\beta = 24°\,5'$.

Wyznaczyć całk. powierzchnię wycinka kulistego.



$S_{\text{stożka}}\ ABO = \pi R l =$

$= \pi KB \cdot R.$

$S_{\text{czaszy}} = 2\pi R h =$

$= 2\pi R \cdot h.$

$\pi R\, KB + 2\pi R h = \pi R(KB + 2h)$

$KB = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$; $\quad h = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

$S_c = \pi R\left(R\sin\frac{\alpha}{2} + 4R\sin^2\frac{\alpha}{4}\right) =$

$= \pi R \cdot R\left(\sin\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)$

$h = R - OK. \quad OK = R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

$h = R - R\cos\frac{\alpha}{2} = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

$S_c = \pi R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} + 4\sin^2\frac{\alpha}{4}\right) =$

$= \pi R^2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4} + 4\sin^2\frac{\alpha}{4}\right) =$

$= \pi R^2\, 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4} + 2\sin\frac{\alpha}{4}\right) =$

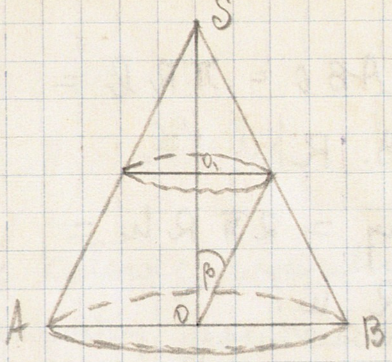
$= \pi R^2\, 2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\left(1 + 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right) =$

$= \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\operatorname{tg}\alpha/4\right)$;

$2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \operatorname{tg}^2\varphi.$

$S_c = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\varphi\right)$;

$S_c = \pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sec^2\varphi.$



3/4 wysokości.

obliczyć całk. powierz.

$OB = R$.

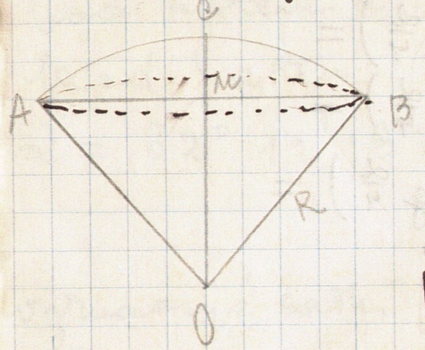
$\sphericalangle 0,0 = \beta$.

$S_c = \pi R^2 + \pi R l =$

$= \pi R(R+l)$; $l = SB$. Skończyć!!

№ 22. Praca klasowa. 29-IV 1931 r.

Znaleźć objętość wycinka kulistego.



$MB = 60$ cm.

$OB = R = 75$ cm.

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$.

$h = MC$.

$MC = R - MO$.

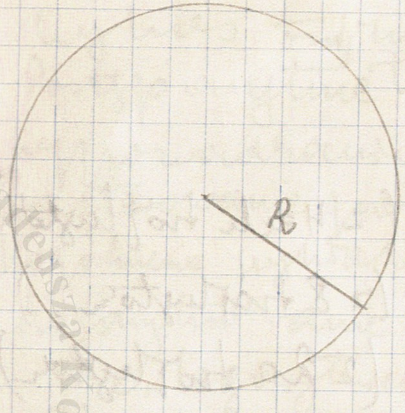
$MO = \sqrt{75^2 - 60^2} = \sqrt{(75-60)(75+60)} =$

$= \sqrt{15 \cdot 135} = \sqrt{2025} = 45$.

$MC = R - MO = 75 - 45 = 30$.

$V = \frac{2}{3}\pi\, 30^2 \cdot 75 = \frac{2 \cdot 30^2 \cdot \cancel{75}^{25}\pi}{\cancel{3}} = 50 \cdot 30^2 \cdot \pi =$

$= \underline{45000\,\pi}$.



$S = 4\pi R^2$,

$V_{kuli} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$S = 4\pi R^2. = 4\pi \cdot 16R^2$

$V = \frac{4}{3}\pi (4R)^3 = \frac{4\pi \cdot 64R^3}{3}$;

$\sin\alpha + \sin\beta$. $\quad \cancel{\alpha + \beta = m + n}$.

$\alpha = m + n \quad \beta = m - n$.

$\sin m + \sin n$

$\sin(m+n) + \sin(m-n) = \sin m \cos n + \cancel{\cos m \sin n} +$
$+ \sin m \cos n - \cancel{\cos m \sin n} = \sin m \cos n + \sin m \cos n$

$= 2 \sin m \cos n$.

$$\begin{array}{r} m + n = \alpha \\ + \quad m - n = \beta \\ \hline 2m = \alpha + \beta \\ m = \frac{\alpha+\beta}{2}; \end{array}$$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin$

Twierdzenie sinusów:
Stosunek boku do sinusa kąta przeciwległego jest wielkością stałą i równa się średnicy koła opisanego na tym trójkącie -

Bryły geom. foremne bryły.

Graniastosłup - określenie, odmiany, przekroje, powierzchnia, (pole), objętość

Ostrosłup - określenie - odmiany, przekroje powierzchnia objętość.

Ostrosłup ścięty, określenie, odmiany, przekroje, powierzchnia objętość.

Kula - i części jej - określenie, odmiany, powierzchnia, przekroje, objętość.

Funkcje trygonometryczne - własności funkcji trygonometrycznych (okresowość, ograniczoność), wzory redukcyjne - funkcje sumy i różnicy kątów i sumy, lub różnice funkcji, wzory podwójne, doprowadzenie do postaci logarytm.

Kąt pomocniczy - twierdzenie sinusów, tangensów. Twierdz. Carnot'a. Klasyczne wypadki rozw. trójkątów. Równania trygonometryczne - czyli goniometryczne - stosowanie wzorów -

$\sin 360^\circ n + (180^\circ - \alpha)$

$\cos 360^\circ n \mp \alpha$; $\cos 360^\circ n \mp (180^\circ + \alpha)$

$\mathrm{tg}\, 180^\circ n + \alpha$.

$\cos\alpha + \cos 2\alpha = 0{,}12$.

$\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}12$.

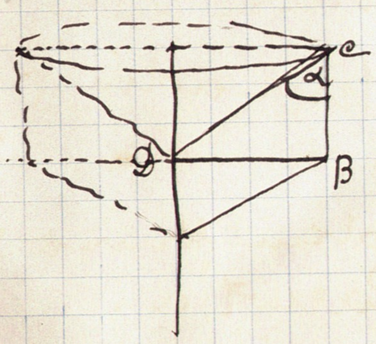
$\cos\alpha + \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 0{,}12$.

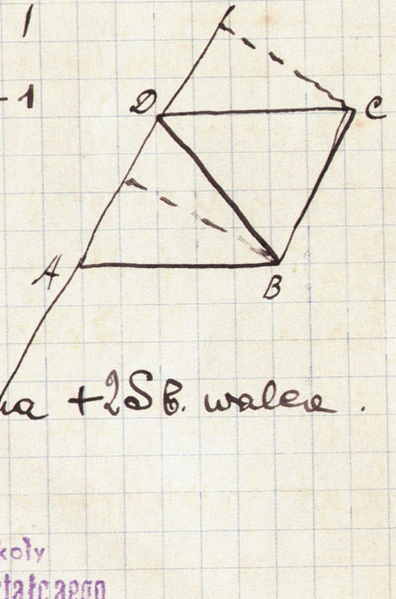
$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1{,}12 = 0$.

$\cos\alpha_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 8{,}96}}{4}$;

$\cos\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{9{,}96}}{4} = -1$

$\cos\alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{9{,}96}}{4}$;





Sb. stożka + 2Sb. walca.