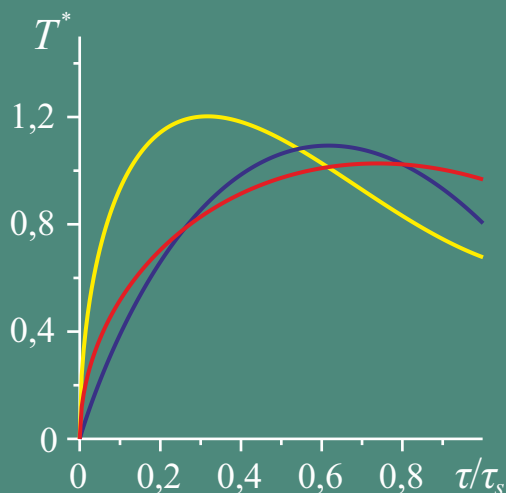
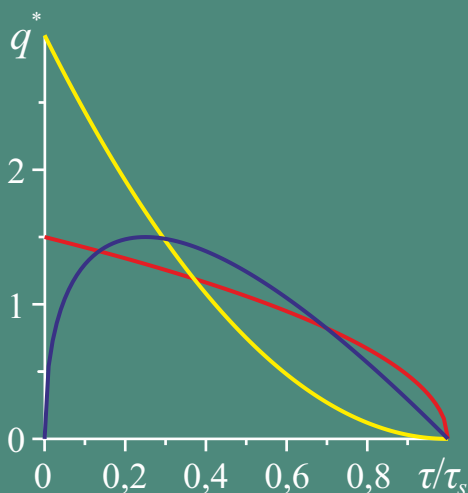


# WPŁYW GĘSTOŚCI MOCY TARCIA NA TRYB TEMPERATUROWY UKŁADÓW HAMULCOWYCH

Katarzyna Topczewska  
Michał Kuciej  
Oleksandr Jewtuszenko



$$T^*(\zeta, \tau) = \int_0^{\tau} q^*(s) \frac{\partial}{\partial \tau} T_0^*(\zeta, \tau - s) ds, \quad \zeta \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s$$

# **WPŁYW GĘSTOŚCI MOCY TARCIA NA TRYB TEMPERATUROWY UKŁADÓW HAMULCOWYCH**

Katarzyna Topczewska  
Michał Kuciej  
Oleksandr Jewtuszenko



Politechnika  
Białostocka

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ  
BIAŁYSTOK 2024

Recenzenci  
prof. dr hab. inż. Ewa Majchrzak  
dr hab. inż. Piotr Ostrowski, prof. PŁ

Korekta językowa:  
Katarzyna Duniewska

Redakcja techniczna, skład:  
Katarzyna Topczewska  
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Okładka:  
Marcin Dominów

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2024

ISBN 978-83-68077-13-1  
ISBN 978-83-68077-14-8 (e-Book)  
DOI: 10.24427/978-83-68077-14-8



Publikacja jest udostępniona na licencji  
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0  
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie  
[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl).  
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Druk: Print Profit sp. z o.o.

---

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej  
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok  
e-mail: [oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl](mailto:oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl)  
[www.pb.edu.pl](http://www.pb.edu.pl)

# SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń.....	7
Wprowadzenie .....	11
1. Analityczne modele nagrzewania tarciovych układów hamulcowych .....	13
1.1. Przegląd dotychczasowych osiągnięć .....	13
1.2. Charakterystyki mocy i pracy tarcia podczas hamowania .....	18
1.3. Nagrzewanie warstwy strumieniem ciepła o dowolnej intensywności (model przybliżony) .....	27
1.3.1. Początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego dla warstwy .....	27
1.3.2. Adaptacja otrzymanego rozwiązania do układu dwóch warstw .....	33
2. Nagrzewanie półprzestrzeni strumieniem ciepła proporcjonalnym do gęstości mocy tarcia .....	39
2.1. Pola temperatury .....	39
2.1.1. Sformułowanie zagadnienia .....	39
2.1.2. Rozwiązanie zagadnienia .....	40
2.1.3. Analiza numeryczna .....	47
2.2. Naprężenia termiczne .....	53
2.2.1. Rozwiązanie zagadnienia .....	53
2.2.2. Analiza numeryczna .....	59
2.3. Wnioski.....	64
3. Zagadnienie cieplne tarcia dla układu dwóch półprzestrzeni (model sprzężony) .....	67
3.1. Pola temperatury .....	67
3.1.1. Sformułowanie zagadnienia.....	67
3.1.2. Rozwiązanie zagadnienia.....	69
3.1.3. Intensywności strumieni ciepła.....	74

3.1.4. Analiza numeryczna .....	76
3.2. Naprężenia termiczne .....	82
3.2.1. Rozwiązanie zagadnienia.....	82
3.2.2. Analiza numeryczna .....	86
3.3. Wnioski.....	91
4. Wpływ zmiany ciśnienia kontaktowego w czasie na temperaturę podczas hamowania .....	93
4.1. Charakterystyka zmian ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania .....	94
4.2. Zagadnienie początkowe ruchu .....	94
4.2.1. Eksponencjalny wzrost ciśnienia .....	95
4.2.2. Liniowe narastanie ciśnienia.....	99
4.2.3. Fluktuacje ciśnienia w czasie hamowania .....	100
4.3. Temperatura powierzchni kontaktu .....	102
4.4. Analiza numeryczna .....	107
4.5. Wnioski.....	113
5. Temperatura maksymalna osiągnięta podczas hamowania .....	115
5.1. Hamowanie jednokrotne.....	115
5.1.1. Model obliczeniowy .....	116
5.1.2. Analiza numeryczna .....	120
5.2. Powtórno-krótkotrwały tryb hamowania.....	126
5.2.1. Schemat hamowania oraz założenia modelowe.....	126
5.2.2. Model obliczeniowy .....	129
5.2.3. Analiza numeryczna .....	134
5.3. Wnioski.....	144
6. Model wyznaczania średniej temperatury powierzchni ciernej z uwzględnieniem ewolucji pola konturowego obszaru kontaktu.....	147
6.1. Zagadnienie początkowe ruchu .....	148
6.2. Zagadnienie cieplne tarcia .....	149
6.3. Analiza numeryczna .....	154
6.4. Wnioski.....	157

7. Modelowanie procesu nagrzewania ciernego hamulca wielotarczowego .....	159
7.1. Zagadnienie cieplne tarcia dla warstwy chłodzonej konwekcyjnie na powierzchniach bocznych .....	159
7.1.1. Sformułowanie zagadnienia.....	159
7.1.2. Rozwiązanie zagadnienia.....	163
7.1.3. Temperatura nagrzewanej powierzchni warstwy.....	168
7.1.4. Weryfikacja rozwiązania .....	170
7.1.5. Hamowanie z jednostajnym opóźnieniem .....	173
7.1.6. Nagrzewanie warstwy izolowanej termicznie .....	176
7.1.7. Analiza numeryczna .....	180
7.2. Temperatura tarczy kompozytowej z uwzględnieniem struktury materiału.....	191
7.2.1. Efektywne wartości współczynników przewodzenia ciepła...	191
7.2.2. Analiza numeryczna .....	197
7.3. Wnioski .....	204
Podsumowanie i wnioski końcowe.....	205
Literatura .....	213
Spis tabel.....	225
Spis rysunków.....	227
Streszczenie .....	235
Abstract.....	237



## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$A_a$	– pole nominalnego obszaru kontaktu	$m^2$ ;
$A_c$	– pole konturowego obszaru kontaktu	$m^2$ ;
$A_r$	– pole rzeczywistego obszaru kontaktu	$m^2$ ;
$a$	– efektywna głębokość przenikania ciepła	$m$ ;
$a^*$	– bezwymiarowa amplituda oscylacji ciśnienia;	
$B(v;x)$	– funkcja beta;	
$Bi$	– liczba Biota;	
$b_0$	– bezwymiarowy parametr chropowatości;	
$c$	– ciepło właściwe	$J K^{-1} kg^{-1}$ ;
$ch(x)$	– cosinus hiperboliczny;	
$cosec(x)$	– cosecans;	
$cosech(x)$	– cosecans hiperboliczny;	
$d$	– grubość warstwy	$m$ ;
$d_r$	– średnica obszaru mikrokontaktów	$m$ ;
$E$	– moduł Younga	$MPa$ ;
$erf(x)$	– funkcja błędu Gaussa;	
$erfc(x)$	– komplementarna funkcja błędu;	
$ierfc(x)$	– całka komplementarnej funkcji błędu;	
$f$	– współczynnik tarcia;	
$F$	– siła tarcia	$N$ ;
$G$	– masa elementu ciernego	$kg$ ;
$H(\cdot)$	– funkcja jednostkowa (funkcja Heaviside'a);	
$HB$	– twardość Brinella	$MPa$ ;
$h$	– współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła	$W K^{-1} m^{-2}$ ;
$h_{max}$	– maksymalna wysokość chropowatości	$m$ ;
$K$	– przewodność cieplna	$W K^{-1} m^{-1}$ ;
$k$	– dyfuzyjność cieplna	$m^2 s^{-1}$ ;
$p$	– ciśnienie kontaktowe	$MPa$ ;
$p_0$	– nominalne ciśnienie kontaktowe	$MPa$ ;
$p^*$	– bezwymiarowe ciśnienie kontaktowe;	



$R$	– jednostkowy opór termiczny	$\text{K W}^{-1}$ ;
$r_e$	– promień zewnętrzny nominalnego obszaru kontaktu	m;
$r_{eq}$	– ekwiwalentny promień tarcia	m;
$r_i$	– promień wewnętrzny nominalnego obszaru kontaktu	m;
$r_m$	– promień średni nominalnego obszaru kontaktu	m;
$r_{av}$	– uśredniony promień zaokrąglenia chropowatości	m;
$\text{sh}(x)$	– sinus hiperboliczny;	
$q$	– intensywność strumienia ciepła	$\text{W m}^{-2}$ ;
$q_0$	– nominalna intensywność strumienia ciepła	$\text{W m}^{-2}$ ;
$q^*$	– bezwymiarowa intensywność strumienia ciepła;	
$T$	– temperatura	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T_a$	– temperatura początkowa	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T_f$	– temperatura błysku	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T_m$	– temperatura średnia	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T_{\max}$	– temperatura maksymalna	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T_0$	– współczynnik skalowania temperatury	$^{\circ}\text{C}$ ;
$T^*$	– bezwymiarowa temperatura;	
$t$	– czas	s;
$t_i$	– czas narastania ciśnienia kontaktowego	s;
$t_{\max}$	– czas osiągnięcia maksymalnej temperatury	s;
$t_s$	– czas hamowania	s;
$t_s^0$	– czas hamowania przy stałym opóźnieniu	s;
$V$	– prędkość poślizgu	$\text{m s}^{-1}$ ;
$V_0$	– początkowa prędkość poślizgu	$\text{m s}^{-1}$ ;
$V^*$	– bezwymiarowa prędkość poślizgu;	
$W_0$	– początkowa energia kinetyczna	J;
$w$	– gęstość pracy tarcia	$\text{J m}^{-2}$ ;
$w_0$	– nominalna gęstość pracy tarcia	$\text{J m}^{-2}$ ;
$w^*$	– bezwymiarowa gęstość pracy tarcia;	
$x, y, z$	– współrzędne przestrzenne;	
$\alpha$	– współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej	$\text{K}^{-1}$ ;
$\Gamma(x)$	– funkcja gamma;	
$\Gamma(\nu; x)$	– niepełna funkcja gamma;	

$\gamma$	– współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła;	
$\varepsilon$	– współczynnik aktywności cieplnej;	
$\varepsilon^*$	– bezwymiarowe odkształcenie poprzeczne;	
$\zeta$	– bezwymiarowa głębokość;	
$\nu$	– współczynnik Poissona;	
$\theta$	– temperatura objętościowa	°C;
$\rho$	– gęstość materiału	kg m <sup>-3</sup> ;
$\sigma$	– poprzeczna normalna składowa naprężeń	MPa;
$\sigma_0$	– współczynnik skalowania naprężeń	MPa;
$\sigma^*$	– bezwymiarowe naprężenia normalne	Pa;
$\tau$	– bezwymiarowy czas (liczba Fouriera);	
$\tau_i$	– bezwymiarowy czas narastania ciśnienia;	
$\tau_{\max}$	– bezwymiarowy czas osiągnięcia $T_{\max}$ ;	
$\tau_s$	– bezwymiarowy czas hamowania;	
$\tau_s^0$	– bezwymiarowy czas hamowania przy stałym opóźnieniu;	
$\omega$	– prędkość kątowna	s <sup>-1</sup> ;
$\Omega$	– częstotliwość oscylacji ciśnienia	Hz;
$\psi$	– współczynnik przewodzenia ciepła poza efektywną strefę nagrzewania tarcowego.	



# WPROWADZENIE

Problematyka naukowa dotycząca tworzenia oraz rozwoju analitycznych modeli stosowanych do określenia stanu temperaturowego w elementach ciernych układów hamulcowych jest intensywnie rozwijana już od kilku dekad. Zaletami takiego podejścia są łatwa aplikacja oraz szybkie uzyskiwanie rezultatów w porównaniu z badaniami doświadczalnymi czy metodami numerycznymi, takimi jak metody elementów skończonych lub brzegowych. Wzory do obliczania temperatury i naprężeń termicznych, otrzymane w wyniku rozwiązania odpowiednich zagadnień początkowo-brzegowych przewodzenia ciepła, w większości przypadków można zaprogramować z wykorzystaniem ogólnodostępnych bibliotek programistycznych. Z tego też względu stosowanie modeli analitycznych do oszacowania temperatury elementów ciernych układu hamulcowego jest efektywne i wymaga mniejszych mocy obliczeniowych niż wymienione wcześniej metody numeryczne.

Zdecydowana większość opracowanych do tej pory analitycznych modeli procesu nagrzewania tarciovego w układach hamulcowych, pomimo tego, że uwzględnia różne warunki początkowe i brzegowe oraz niejednorodność materiałów pary ciernej, została opracowana przy założeniu, że ciśnienie kontaktowe w trakcie procesu jest stałe (hamowanie z jednostajnym opóźnieniem). Zgodnie z takim założeniem gęstość mocy tarcia, a w konsekwencji również intensywność tarciovego strumienia ciepła, zmniejszają się liniowo od maksymalnej wartości na początku do zera w chwili zatrzymania. Nieliczne publikacje zawierają rozwiązania zagadnień cieplnych tarcia dla innych profili czasowych gęstości mocy tarcia. W szczególności dotyczą one przypadków, w których rozpatruje się eksponencjalne zwiększenie ciśnienia kontaktowego podczas hamowania. Jedną z pierwszych propozycji otrzymania przybliżonego rozwiązania zagadnienia przewodzenia ciepła dla jednorodnej warstwy, ogrzewanej na powierzchni strumieniem ciepła o dowolnie zmieniającej się w czasie intensywności, została zaproponowana przez Chichinadze [28]. Rozwiązanie to jest wykorzystywane do tej pory przy opracowywaniu jednowymiarowych układów dynamiki cieplnej tarcia i zużycia podczas hamowania [32, 162]. Model ten stanowi jeden z czynników inspirujących otrzymanie dokładnych rozwiązań początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła z uwzględnieniem różnych postaci funkcji opisujących przebieg czasowy gęstości mocy tarcia. Zaproponowane w niniejszej monografii rozwiązania uzupełniają lukę w literaturze naukowej dotyczącej opracowywania dokładnych modeli analitycznych procesu nagrzewania tarciovego przy zróżnicowanym przebiegu mocy tarcia. Otrzymano w niej dokładne rozwiązania nowych zagadnień cieplnych tarcia z uwzględnieniem różnych profili czasowych gęstości mocy tarcia, niejedno-

rodności materiału tarczy, konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem, fluktuacji ciśnienia kontaktowego czy zmiany powierzchni konturowej tarcia. O aktualności takiego rodzaju rozwiązań świadczy również to, że są one wykorzystywane jako „przybliżenie początkowe” przy opracowywaniu iteracyjnych algorytmów rozwiązywania odpowiednich nieliniowych zagadnień cieplnych tarcia dla elementów wykonanych z materiałów termicznie wrażliwych.

Opracowane rozwiązania początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła i odpowiednich zagadnień brzegowych quasi-statycznej termosprężystości służą do oszacowania rozkładów temperatury i naprężeń termicznych w elementach ciernych (np. nakładka i tarcza). Umożliwiają one wyznaczenie tych wielkości w dowolnej chwili procesu nagrzewania tarciowego, zarówno na powierzchni ciernej, jak i na wybranej głębokości wewnątrz elementu. Stanowią podstawę do oszacowania wartości i chwili osiągnięcia temperatury maksymalnej w układach hamulcowych, a także czasu i miejsca możliwej inicjacji pęknięć termicznych elementów ciernych. Informacje te mogą być wykorzystane na etapie projektowania do wstępnego doboru materiałów pary ciernej, ustalenia optymalnych warunków pracy hamulca i przeprowadzenia obliczeń wytrzymałościowych. Pozwala to na zredukowanie czasochłonnych i kosztownych badań eksperymentalnych. Dodatkowo takie rozwiązania mogą pełnić funkcję „kalibratora” modeli numerycznych, sporządzonych na przykład za pomocą metody elementów skończonych. Daje to podstawy do stwierdzenia, że tematyka monografii związana z opracowaniem dokładnych, analitycznych rozwiązań zagadnień cieplnych tarcia w układach hamulcowych stanowi aktualny problem naukowy.

Monografia kierowana jest w pierwszej kolejności do specjalistów w dziedzinach termomechaniki, tribologii, wymiany ciepła oraz modelowania matematycznego, a także inżynierów zajmujących się na etapie projektowania obliczeniami trybu temperaturowego układów hamulcowych. Zaprezentowane rezultaty w większości przypadków mają postać wzorów, z których korzystanie nie wymaga specjalistycznego przygotowania matematycznego. Do zrozumienia metod ich otrzymywania Autorzy rekomendują natomiast lekturę monografii o zbliżonej tematyce wydanych wcześniej w Oficynie Wydawniczej Politechniki Białostockiej [57, 60–62, 71].

Wydanie niniejszej monografii zostało sfinansowane w ramach projektu nr WZ/WM-IIM/4/2023, realizowanego w Katedrze Mechaniki i Informatyki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej.

# 1. ANALITYCZNE MODELE NAGRZEWANIA TARCIOWEGO UKŁADÓW HAMULCOWYCH

## 1.1. Przegląd dotychczasowych osiągnięć

Generowana na skutek działania sił tarcia temperatura w obszarze kontaktu węzła ciernego od dawna stanowi obiekt zainteresowania badaczy [24]. To właśnie temperatura jest czynnikiem, który odgrywa największą rolę w ocenie tarcia i zużycia pary cierniej [34, 67]. Potrzeba znajomości rozkładów i poziomu temperatury w elementach roboczych maszyn spowodowana jest częstymi ich awariami związanymi z nieprawidłowym wyborem materiałów ciernych czy też warunków pracy. Na oddziaływanie wysokiej temperatury szczególnie narażone są mocno obciążone węzły cierne, do których można zaliczyć układy hamulcowe. Szybko zorientowano się, że nie tylko pomiar na stanowisku doświadczalnym – który nawet obecnie jest trudny, kosztowny i obciążony pewną niedokładnością – ale również inne metody pozwalają z dobrym przybliżeniem przewidywać poziom i rozkład temperatury w węzle ciernym. Jedną z najbardziej rozwiniętych metod, mającą swoje początki w latach trzydziestych XX wieku [22], polega na opracowywaniu modeli matematycznych nagrzewania tarciowego bazujących na rozwiązaniach początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia. Podczas ich formułowania, w oparciu o odpowiednie założenia upraszczające, rzeczywiste elementy cierne są zastępowane ciałami o kształcie kanonicznym, takimi jak warstwa, półprzestrzeń, pierścień, walec itp. Takie podejście pozwala w sposób analityczny otrzymać rozwiązania jednowymiarowych zagadnień cieplnych tarcia, zarówno stacjonarnych czy quasi-stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. Wspomniane założenia ograniczają stosowanie jednowymiarowych modeli nagrzewania tarciowego tylko do procesów zachodzących w określonych warunkach. Pozwalają one jednak z zadowalającą dokładnością oszacować rozkład temperatury w elementach ciernych hamulców podczas krótkotrwałych procesów tarcia przy wysokim obciążeniu mechanicznym układu. Główne założenia, przyjmowane powszechnie do opracowywania modeli analitycznych nagrzewania tarciowego, to [71]:

- a) Poszczególne elementy cierne rozpatrywane są jako ośrodki ciągłe o przyporządkowanych im właściwościach cieplno-fizycznych, gdzie za pomocą funkcji zależnej od współrzędnych przestrzennych i czasu opisywany jest rozkład temperatury oraz naprężeń termicznych.

- b) Przy dużych wartościach ( $>10$ ) liczby Pecleta można przyjąć, że ciepło wnika do elementów pary cierniej tylko wzdłuż normalnej do powierzchni tarcia [18, 21, 27].
- c) Przy małych wartościach ( $<10$ ) liczby Fouriera wpływ wymiany konwekcyjnej z otaczającym środowiskiem na temperaturę jest pomijalnie mały [7, 9].
- d) Wpływ zużycia powierzchni ciernych na zmianę warunków brzegowych jest nieznaczny.

Obecnie stosowane są dwa sposoby modelowania nagrzewania tarciowego w węźle ciernym, ściśle związane z warunkami brzegowymi na powierzchni kontaktu układu tribologicznego [71]. Pierwszy z nich polega na myślowym rozdzielaniu pary cierniej i sformułowaniu zagadnienia cieplnego tarcia dla pojedynczego elementu, którego powierzchnia robocza nagrzewana jest strumieniem ciepła o znanej intensywności, proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia [76]. W tym celu należy założyć *a priori* współczynnik rozdziału ciepła generowanego na powierzchni tarcia, określający jego ilość wnikającą do poszczególnych elementów węzła ciernego [77, 109]. Wartość tego współczynnika można określić na podstawie wzorów otrzymanych teoretycznie lub empirycznie [33, 51, 94, 104, 125]. Drugi sposób zakłada dokładne wyznaczenie współczynnika rozdzielenia ciepła na podstawie rozkładów intensywności strumienia ciepła wyznaczonych z prawa Fouriera, z wykorzystaniem rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła dla układów typu warstwa-warstwa, warstwa-półprzestrzeń itp. Początkowo-brzegowe zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu takich układów nazywane są sprzężonymi.

Analizując literaturę naukową pod kątem pierwszego sposobu modelowania rozkładów temperatury, można stwierdzić, że jednymi z najwcześniej opracowanych analitycznych modeli stosowanych do oszacowania temperatury na powierzchni kontaktu w elementach układu hamulcowego były rozwiązania zagadnień cieplnych tarcia dla półprzestrzeni [50, 85] oraz warstwy [83] nagrzewanych tarciovym strumieniem ciepła o intensywności zmniejszającej się liniowo – od wartości nominalnej na początku hamowania do zera w chwili zatrzymania (hamowanie z jednostajnym opóźnieniem). W powyższych pracach wykazano również stosowalność tych analitycznych modeli oraz ich dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi. Pierwszy sposób modelowania jest stosowany także do oszacowania rozkładów temperatury na powierzchni roboczej sprzęgła tarczowego [82, 84, 123].

Rozwiązania zagadnień cieplnych tarcia dla półprzestrzeni lub warstwy nagrzewanej na powierzchni roboczej tarciovym strumieniem ciepła o zmniejszającej się liniowo intensywności zastosowano również z powodzeniem jako część układu równań dynamiki cieplnej tarcia i zużycia (DCTZ) [52]. W powyższym układzie równań za pomocą tych rozwiązań szacowana jest średnia temperatura powierzchni ciernych. Metodologia polegająca na rozwiązywaniu układów równań DCTZ stoso-

wana jest z sukcesem na etapie projektowania nowych, wysoko obciążonych węzłów ciernych w celu wyznaczenia maksymalnej temperatury [30, 32, 56, 65].

Bazując na rozwiązaniach zagadnień początkowo-brzegowych przewodzenia ciepła dla warstwy, której dolna powierzchnia jest adiabatyczna, natomiast górna (robocza) nagrzewana jest strumieniem ciepła o stałej, liniowej lub parabolicznej zmianie jego intensywności w czasie, zaproponowano wzory do obliczania temperatury w elementach ciernych różnych rodzajów samochodowych układów hamulcowych [10–18].

Rozwiązania jednowymiarowych początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła dla jednorodnej półprzestrzeni z naniesioną warstwą zastosowano również do oszacowania rozkładów niestacjonarnej temperatury w tarczach hamulcowych z powłoką ochronną (ang. *thermal barrier coating*, TBC), nagrzewanych na powierzchni roboczej tarciovym strumieniem ciepła o stałej lub zmieniającej się liniowo intensywności [49, 158]. Kolejny etap badań stanowiło rozwiązanie odpowiednich zagadnień quasi-statycznej termosprężystości, na podstawie których wyznaczono rozkłady normalnych naprężeń termicznych oraz opracowano metodykę prognozowania inicjacji pęknięć na powierzchni tarczy hamulcowej [43, 47, 134].

Wymienione wyżej prace dotyczące pierwszego ze sposobów modelowania nagrzewania tarciovego w węźle ciernym zakładały jednorodność materiałów. Rozwiązania jednowymiarowych zagadnień przewodzenia ciepła dla jednorodnej półprzestrzeni, na której powierzchni osadzona jest warstwa kompozytowa o strukturze periodycznej, otrzymano w pracach [80, 167]. Warstwa ta jest nagrzewana tarciovym strumieniem ciepła o stałej [167] lub liniowo zmiennej [80] intensywności. Nagrzewanie warstwy kompozytowej o strukturze nieperiodycznej rozpatrzono w artykułach [32, 65]. Porównanie wyników obliczeń wykonanych na podstawie rozwiązań analitycznych z wynikami doświadczalnymi przebiegów temperatury przy różnych parametrach roboczych hamulca wykazało ich bardzo dobrą zgodność.

Jedno z pierwszych sprzężonych zagadnień cieplnych tarcia zostało zaprezentowane w monografii [25], w której znaleziono rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego przewodzenia ciepła dla układu dwóch półprzestrzeni ślizgających się ze stałą prędkością względną. Przyjęto dwa warunki idealnego kontaktu cieplnego tarcia. Pierwszy z nich deklaruje równość temperatury powierzchni ciernych (pominięcie oporu termicznego na powierzchni kontaktu). W drugim zakłada się natomiast, że suma intensywności strumieni ciepła generowanych na powierzchni kontaktu jest równa gęstości mocy tarcia (pominięcie zużycia powierzchni ciernych).

W ostatniej dekadzie opublikowano szereg prac dotyczących sprzężonych wykorzystywanych do modelowania rozkładów temperatury, a także naprężeń termicznych w hamulcach przy warunkach nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia, tzn. z uwzględnieniem kontaktowej przewodności cieplnej powierzchni roboczej. W pracach [91, 105, 106] rozpatrzono zagadnienia dla układu dwóch jednorodnych półprzestrzeni przy stałym i liniowo zmiennym poślizgu. Zakres stosowania



różnych wariantów warunków brzegowych na powierzchni czarnej (Barbera, Podstrigacza i Linga) przeanalizowano w monografii [60] oraz w artykule [159].

Rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła dla jednorodnej warstwy poruszającej się ze stałą prędkością po powierzchni półprzestrzeni zaprezentowano w artykułach [44, 131]. W pracach tych założono idealny tarciový kontakt cieplny pomiędzy ciałami oraz wymianę konwekcyjną na powierzchni swobodnej warstwy. Przypadek hamowania z jednostajnym opóźnieniem dla tego samego układu tribologicznego rozpatrzono w artykule [135]. Kontynuacją tej pracy jest artykuł [137], w którym wyznaczono odpowiednie rozkłady normalnych naprężeń termicznych. Rozwiązania początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła dla hamowania z jednostajnym opóźnieniem, uwzględniające nieidealny tarciový kontakt cieplny na powierzchni kontaktu warstwy z półprzestrzenią oraz wymianę konwekcyjną na powierzchni swobodnej, otrzymano w pracach [83, 89, 136, 148, 138, 157]. Dodatkowo w artykułach [72, 73] przedstawiono rozwiązania zagadnienia cieplnego tarcia dla kompozytowej warstwy o strukturze periodycznej ślizgającej się po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni ze stałą lub zmniejszającą się liniowo prędkością.

Kolejny, intensywnie rozwijany w ostatnich latach schemat nagrzewania tarciového bazuje na układzie trójelementowym, tzn. półprzestrzeni ślizgającej się po powierzchni warstwy osadzonej na półograniczonej podstawie. Poślizg ze stałą prędkością jednorodnej półprzestrzeni po powierzchni warstwy TBC naniesionej na półprzestrzeń, przy idealnym kontakcie cieplnym tarcia, rozpatrzono w pracy [133]. W artykule [130] zaproponowano rozwiązanie zagadnienia cieplnego tarcia dla tego samego układu podczas hamowania z jednostajnym opóźnieniem. Odpowiadające powyższym rozwiązaniom quasi-statyczne normalne naprężenia termiczne zostały przeanalizowane w pracy [132]. Istotną cechą powyższych rozwiązań jest to, że pozwalają one analizować rozkłady temperatury i naprężeń termicznych zarówno w trakcie trwania procesu nagrzewania tarciového, jak i po jego zakończeniu. Kolejne prace związane z omawianym układem tribologicznym dotyczą uwzględnienia w zagadnieniach nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia (warunki Podstrigacza) dla stałej [160] i zmniejszającej się liniowo [161] prędkości poślizgu. Uogólnienie powyższych rozwiązań do przypadku warstwy kompozytowej o strukturze periodycznej przeprowadzono dla poślizgu ze stałą prędkością [139] oraz dla hamowania z jednostajnym opóźnieniem [74].

Przedstawione powyżej analityczne modele nagrzewania tarciového dla dwu- oraz trójelementowych układów tribologicznych uwzględniają względny poślizg elementów ciernych ze stałą lub zmniejszającą się liniowo prędkością, tzn. przy założeniu stałego ciśnienia kontaktowego w czasie trwania procesu. Dla tych układów zaproponowano również rozwiązania biorące pod uwagę eksponencjalną zmianę ciśnienia kontaktowego w czasie [156, 161] oraz jego fluktuacje [42, 70, 155].

Dwuelementowy układ warstwa-warstwa pozwolił zbadać wpływ grubości elementów ciernych oraz wymiany konwekcyjnej z otaczającym środowiskiem na powierzchniach swobodnych na temperaturę [20, 101, 140].

Coraz większe wymagania stawiane nowoczesnym układom ciernym – dotyczące ekstremalnych obciążeń, nowych materiałów i czasu pracy – wymuszają precyzyjniejsze prognozowanie poziomu temperatury jako jednego z głównych czynników wpływających na niezawodność maszyny lub urządzenia. Jeden z problemów, który był i w dalszym ciągu jest rozpatrywany, dotyczy uwzględnienia zmiany właściwości cieplno-fizycznych materiałów pod wpływem temperatury podczas formułowania zagadnień cieplnych tarcia. Zagadnienia uwzględniające te zmiany należą do grupy zagadnień nieliniowych, które w sposób analityczny można rozwiązać jedynie w ograniczonych przypadkach. Zgodnie z pierwszym sposobem modelowania nagrzewania tarcioowego analityczne rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych przewodzenia ciepła dla materiałów z tzw. prostą nieliniowością (tzn. współczynniki przewodnictwa cieplnego oraz ciepła właściwe materiałów zmieniają się wraz z temperaturą w sposób liniowy, przy stałej dyfuzyjności cieplnej) otrzymano w pracach [1, 2, 145]. Rozwiązania odpowiednich sprzężonych zagadnień cieplnych tarcia wyznaczono natomiast w pracach [45, 46, 143, 145]. Uwzględnienie dowolnej zmiany właściwości cieplno-fizycznych materiałów w zależności od temperatury (tzw. istotna nieliniowość termiczna) prowadzi do tego, że rozwiązania danych zagadnień mogą zostać uzyskane tylko metodami analityczno-numerycznymi lub numerycznymi [144, 148]. Szczegółowe informacje dotyczące formułowania takich zagadnień oraz metod ich rozwiązywania zawarto w monografii [61], a tematykę rozwoju zagadnień przewodzenia ciepła, w kontekście historycznym oraz obecnie, poruszono w monografiach [8, 62, 71, 100] oraz artykułach przeglądowych [58, 81, 88, 141].

Reasumując, można stwierdzić, że większość dotychczas opracowanych jednowymiarowych analitycznych modeli nagrzewania tarcioowego zakłada, iż profil czasowy gęstości mocy tarcia jest stały lub zmienia się liniowo w czasie. W niniejszej monografii, w ramach jednolitego podejścia opartego na twierdzeniu Duhamela, otrzymano dokładne rozwiązania zagadnień cieplnych tarcia kompleksowo uwzględniających całą gamę profili czasowych gęstości mocy tarcia podczas pracy układów hamulcowych.

## 1.2. Charakterystyki mocy i pracy tarcia podczas hamowania

Przebieg czasowy gęstości mocy tarcia  $q$  podczas pracy wężła ciernego zależy od zmiany naprężenia stycznego  $\sigma(t) = f(t)p(t)$  oraz prędkości  $V$  w kierunku poślizgu, gdzie  $f$  – współczynnik tarcia, a  $p$  – ciśnienie kontaktowe. Zazwyczaj przyjmuje się stałe naprężenia styczne, a prędkość  $V(t)$  redukuje się liniowo od wartości początkowej  $V_0$  do zera w chwili  $t = t_s$  ukończenia procesu hamowania (przykładowo do chwili zatrzymania pojazdu) [18, 50, 86, 158]. Niezmiennosc naprężenia stycznego przy stałym współczynniku tarcia zwykle uzasadnia się bardzo krótkim okresem narastania ciśnienia kontaktowego  $p$  od zera do wartości nominalnej  $p_0$ . W rzeczywistości profil czasowy gęstości mocy tarcia  $q(t) = \sigma(t)V(t)$  może znacząco różnić się od liniowego [25, 52]. Jak wynika z badań doświadczalnych, przebiegi czasowe  $q(t)$  istotnie różnią się między sobą w zależności od charakteru zmiany w czasie hamowania współczynnika tarcia i ciśnienia kontaktowego [70, 161]. Znajomość wartości oraz charakteru zmiany mocy tarcia jest niezbędna do oceny stanu temperaturowego elementów pary ciernej.

Charakterystyki tarcia i zużycia elementów pary ciernej układu hamulcowego mogą znacząco zmieniać się w zależności od sposobu, w jaki zachodzi pochłanianie przez ten układ energii hamowania. Możliwe są różne przypadki: w niektórych znacząca część energii hamowania jest uwalniana w początkowym okresie procesu, zaś w innych praca hamowania jest rozłożona bardziej równomiernie w czasie. O przebiegach czasowych pracy hamowania decyduje profil czasowy mocy tarcia i to właśnie on jest głównym czynnikiem odpowiedzialnym za rozkłady przestrzenno-czasowe pól temperatury w elementach ciernych, wartości maksymalne temperatury oraz jej gradienty wzdłuż normalnej do powierzchni tarcia [141].

W monografii [28] sklasyfikowano dziesięć funkcji opisujących zmianę w czasie gęstości mocy tarcia podczas jednokrotnego hamowania w postaci:

$$q_i(t) = q_0 q_i^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (1.2.1)$$

gdzie  $q_0$  – nominalna wartość gęstości mocy tarcia, a  $q_i^*(t)$  – bezwymiarowe funkcje czasu  $t$ .

Z uwzględnieniem wzorów (1.2.1) gęstość pracy wykonanej przez parę cierną w procesie hamowania jest równa:

$$w_i(t) = \int_0^t q_i(s) ds = w_0 w_i^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (1.2.2)$$

$$w_i^*(t) = t_s^{-1} \int_0^t q_i^*(s) ds, \quad w_0 = q_0 t_s. \quad (1.2.3)$$

Ze wzorów (1.2.2), (1.2.3) obliczamy całkowitą gęstość pracy tarcia wykonanej podczas pojedynczego procesu hamowania:

$$w_i(t_s) = w_0 w_i^*(t_s), \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (1.2.4)$$

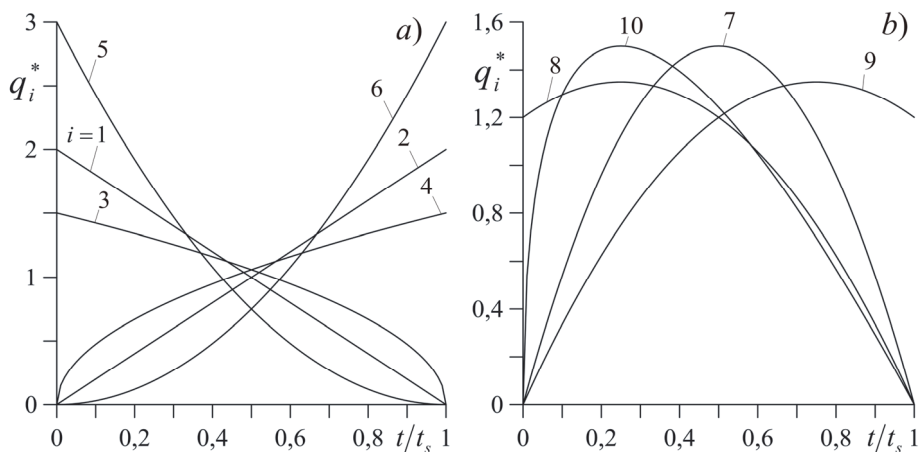
W celu umożliwienia przeprowadzenia analizy porównawczej wpływu profili czasowych (1.2.1) na temperaturę układu hamulcowego zostaną rozpatrzone takie procesy, podczas realizacji których wykonana w tym samym czasie  $t = t_s$  praca hamowania jest jednakowa:

$$w_i(t_s) = w_0, \quad w_i^*(t_s) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (1.2.5)$$

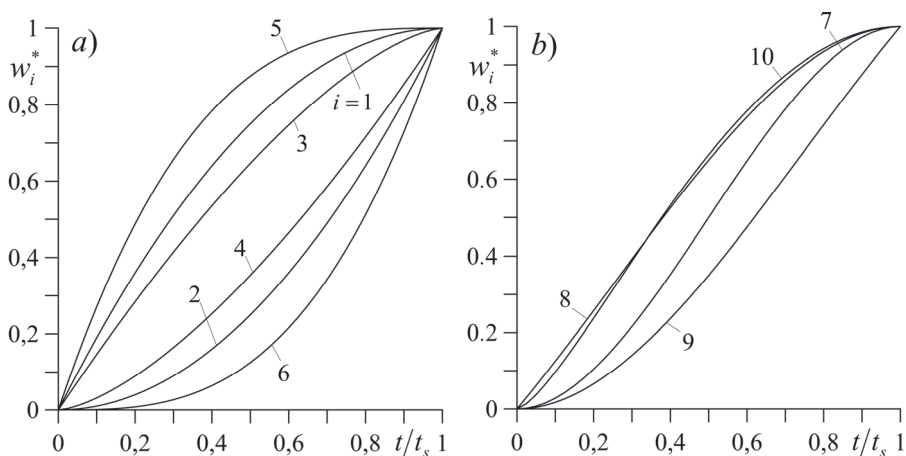
Funkcje  $q_i^*(t)$  (1.2.1) i  $w_i^*(t)$  (1.2.3),  $i = 1, 2, \dots, 10$ , spełniające warunek (1.2.5), zaprezentowano w tabeli 1.1, a ich wykresy przedstawiono odpowiednio na rysunkach 1.1 i 1.2. Tabela 1.1 zawiera również bezwymiarowe wartości maksymalne gęstości mocy tarcia  $q_{i,\max}^*$  oraz czasy ich osiągnięcia  $t_{i,\max}$ .

Tabela 1.1. Profile czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*$ , ich wartości maksymalne  $q_{i,\max}^*$  i czasy osiągnięcia  $t_{i,\max}$  oraz profile czasowe gęstości pracy hamowania  $w_i^*$

$i$	$q_i^*(t)$	$q_{i,\max}^*$	$t_{i,\max}$	$w_i^*(t)$
1	$2(1 - t/t_s)$	2	0	$(t/t_s)(2 - t/t_s)$
2	$2t/t_s$	2	$t_s$	$(t/t_s)^2$
3	$1,5(1 - t/t_s)^{1/2}$	1,5	0	$1 - (1 - t/t_s)(1 - t/t_s)^{1/2}$
4	$1,5(t/t_s)^{1/2}$	1,5	$t_s$	$(t/t_s)(t/t_s)^{1/2}$
5	$3(1 - t/t_s)^2$	3	0	$3(t/t_s)[1 - t/t_s + (t/t_s)^2/3]$
6	$3(t/t_s)^2$	3	$t_s$	$(t/t_s)^3$
7	$6(t/t_s)(1 - t/t_s)$	1,5	$0,5 t_s$	$(t/t_s)^2(3 - 2t/t_s)$
8	$1,2(1 - t/t_s)(1 + 2t/t_s)$	1,35	$0,25 t_s$	$1,2(t/t_s)[1 + 0,5(t/t_s) - (2/3)(t/t_s)^2]$
9	$3,6(t/t_s)[1 - (2/3)(t/t_s)]$	1,35	$0,75 t_s$	$0,2(t/t_s)^2[9 - 4t/t_s]$
10	$6(t/t_s)^{1/2}[1 - (t/t_s)^{1/2}]$	1,5	$0,25 t_s$	$(t/t_s)^{3/2}[4 - 3(t/t_s)^{1/2}]$



Rysunek 1.1. Zmiany bezwymiarowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*$  w czasie: a)  $i = 1, 2, \dots, 6$ ; b)  $i = 7, 8, 9, 10$



Rysunek 1.2. Zmiany bezwymiarowych gęstości pracy tarcia  $w_i^*$  w czasie: a)  $i = 1, 2, \dots, 6$ ; b)  $i = 7, 8, 9, 10$

Jak wspomniano wyżej, najczęściej analizowanym przypadkiem jest hamowanie z jednostajnym opóźnieniem, tzn. przy liniowym spadku prędkości od wartości nominalnej  $V_0$  na początku procesu  $t = 0$  do zera w chwili zatrzymania  $t = t_s$  [35]:

$$V(t) = V_0 V^*(t), \quad V^*(t) = 1 - t/t_s, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.2.6)$$

Uwzględniając związek gęstości mocy tarcia  $q_i(t)$  (1.2.1) z naprężeniem stycznym  $\sigma_i(t) = \sigma_0 \sigma_i^*(t)$  i prędkością  $V(t)$  w postaci (1.2.6), otrzymujemy:

$$q_0 = \sigma_0 V_0, \quad q_i^*(t) = \sigma_i^*(t) V^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (1.2.7)$$

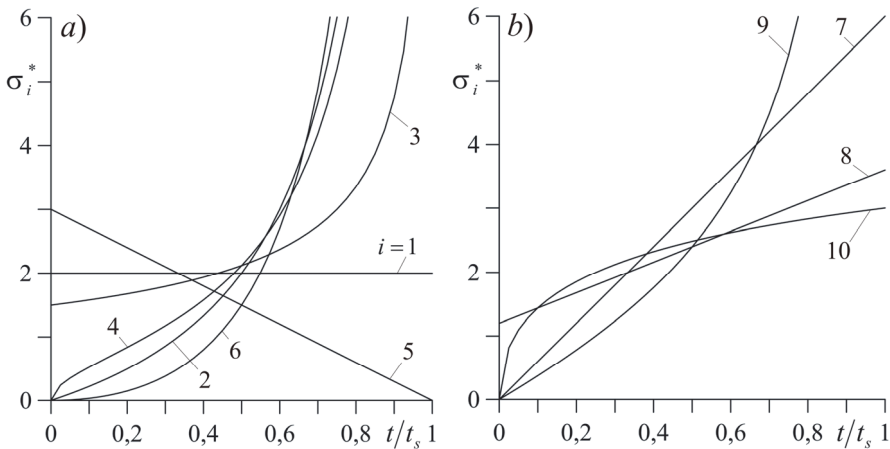
gdzie:

$$\sigma_0 = \frac{w_0}{t_s V_0}. \quad (1.2.8)$$

Ze związku (1.2.7) obliczamy zmianę bezwymiarowych naprężeń stycznych w czasie:

$$\sigma_i^*(t) = \frac{q_i^*(t)}{V^*(t)}, \quad 0 < t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (1.2.9)$$

Wykresy funkcji  $\sigma_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (1.2.9) przedstawiono na rysunku 1.3.



Rysunek 1.3. Zmiany bezwymiarowych naprężeń stycznych  $\sigma_i^*$  w czasie: a)  $i = 1, 2, \dots, 6$ ; b)  $i = 7, 8, 9, 10$

O zmianie naprężeń stycznych w czasie hamowania, czyli pośrednio o sile tarcia i związanego z nią momentu tarcia, decyduje charakterystyka stabilności cieplnej pary ciernej, tj. zależność jej współczynnika tarcia od temperatury. Temperatura zależy natomiast od trybu pracy, właściwości mechanicznych i termicznych materiałów ciernych oraz konstrukcji hamulca. Wpływ wymienionych czynników na współczynnik tarcia i zużycie jest realizowany za pośrednictwem temperatury [83]. Znane z literatury naukowej dane doświadczalne dotyczące zastosowania współczesnych materiałów ciernych o różnych charakterystykach stabilności

cieplnej można warunkowo podzielić na trzy grupy (rys. 1.4). Do pierwszej należą kompozyty o osnowie polimerowej ze stalowym zbrojeniem zapewniające wystarczającą stabilność współczynnika tarcia, tzn. taką, że można przyjąć (krzywa 1):

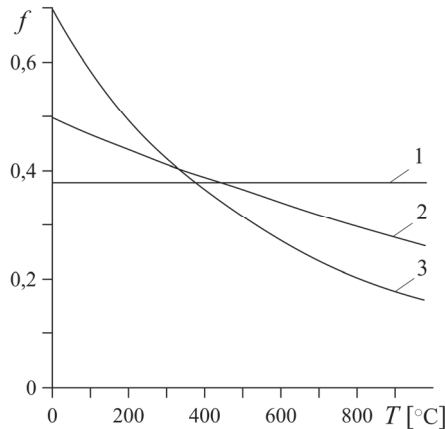
$$f(t) = f_0 = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.2.10)$$

Odporne na ciepło kompozyty cierne typu retinaks powodują nieznaczne liniowe obniżenie współczynnika tarcia wraz ze zwiększeniem temperatury  $T$  (krzywa 2):

$$f(t) = f_0(1 - aT), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad a > 0, \quad aT < 1. \quad (1.2.11)$$

Metalowo-ceramiczne materiały cierne posiadają zbliżoną do wykładniczej zależność współczynnika tarcia od temperatury (krzywa 3):

$$f(t) = f_0 e^{-bT}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad b > 0. \quad (1.2.12)$$



Rysunek 1.4. Zależność współczynnika tarcia  $f$  od temperatury  $T$  w wysoko obciążonym tarczowym układzie hamulcowym dla trzech materiałów nakładki pracujących w parze z żeliwem ChNMKh: 1) kompozytu o osnowie polimerowej z metalowym zbrojeniem; 2) retinaksu FK-16L; 3) metaloceramiki FMK-11 [28]

Poniżej, w oparciu o dane z pracy [28], przedstawiono związną analizę funkcji  $q_i^*(t)$  i  $w_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  zamieszczonych w tabeli 1.1 oraz  $\sigma_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  obliczonych ze wzoru (1.2.9) pod kątem ich związku z charakterystykami stabilności cieplnej zaprezentowanymi na rysunku 1.4:

1.  $i=1$  – maksymalna moc hamowania  $q_{1,\max}^* = 2$  osiągnięta jest w chwili początkowej i zmniejsza się liniowo do zera w chwili zatrzymania  $t = t_s$ , przy stałej wartości naprężenia stycznego (1.2.9):

$$\sigma_1^*(t) = 2, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.2.13)$$

Rozpatrywany przypadek odpowiada krzywej 1 stabilności cieplnej z rysunku 1.4, zapewniającej stałą charakterystykę hamowania;

2.  $\overline{i=2}$  – gęstość mocy tarcia zwiększa się liniowo w czasie od zera przy  $t = 0$  do wartości maksymalnej  $q_{2,\max}^* = 2$  w chwili zatrzymania, a profil czasowy naprężenia stycznego (1.2.9) przyjmuje następującą formę:

$$\sigma_2^*(t) = \frac{2t}{t_s - t}, \quad 0 \leq t < t_s. \quad (1.2.14)$$

W rozpatrywanym przypadku zależność siły tarcia od prędkości jest skomplikowana – przy  $V(0) = V_0$  naprężenie styczne nie występuje, a przy  $V(t_s) = 0$  staje się ono nieograniczone. Fizycznie oznacza to, że w chwili zatrzymania siła styczna staje się równa sile niezbędnej do rozerwania elementów pary cieplnej, podczas gdy na całej powierzchni kontaktu zachodzi zjawisko szczepienia materiałów. Rzeczywista realizacja takiego hamowania do zatrzymania pojazdu jest praktycznie niemożliwa. Jeżeli mamy do czynienia z parami ciernymi o charakterystykach stabilności cieplnej odpowiadającym krzywym 2 lub 3 (rys. 1.4), to nawet przy założeniu, że ciśnienie na powierzchni kontaktu wzrasta od zera do  $p(t_s) \rightarrow \infty$ , właściwie niemożliwe jest otrzymanie nieograniczonego wzrostu siły tarcia bez występowania szczepiania materiałów powierzchni ciernych, skutkującego naruszeniem normalnego trybu pracy hamulca.

3.  $\overline{i=3}$  – gęstość mocy tarcia zmniejsza się parabolicznie od wartości maksymalnej  $q_{3,\max}^* = 1,5$  w chwili początkowej do zera w chwili zatrzymania. W rozpatrywanym przypadku zmiana naprężenia stycznego od czasu hamowania ma następującą postać:

$$\sigma_3^*(t) = \frac{3}{2\sqrt{1-t/t_s}}, \quad 0 \leq t < t_s. \quad (1.2.15)$$

Zależność (1.2.15) może odwzorowywać zmianę naprężeń stycznych w parach ciernych ze stabilnością cieplną odpowiadającą krzywym 1, 2 lub 3 (rys. 1.4). Przy czym w przypadku krzywych 1 i 2 niezbędna jest regulacja ciśnienia w obszarze kontaktu, polegająca na znacznym zwiększeniu ciśnienia przed zatrzymaniem w celu nieograniczonego wzrostu siły tarcia w chwili zatrzymania. Możliwe są również przypadki, w których zależność (1.2.15) może zostać otrzymana przy stałej wartości ciśnienia kontaktowego. Siła tarcia oraz moment hamowania dla pary z wyraźnie spadającą stabilnością cieplną



(krzywa 3, rys. 1.4) łagodnie wzrastają na początku oraz w środku procesu i tylko przed zatrzymaniem wzrost ten staje się gwałtowny.

4.  $\underline{i=4}$  – gęstość mocy tarcia zwiększa się parabolicznie od zera w chwili początkowej do wartości maksymalnej  $q_{4,\max}^* = 1,5$  w chwili zatrzymania. Profil czasowy naprężenia stycznego ma postać:

$$\sigma_4^*(t) = \frac{3t_s}{2(t_s - t)} \sqrt{\frac{t}{t_s}}, \quad 0 \leq t < t_s. \quad (1.2.16)$$

Zwiększenie siły tarcia, zgodnie ze wzorem (1.2.16), przebiega z mniejszą intensywnością niż w przypadku zależności (1.2.14). Jednak utrzymanie takiego profilu czasowego siły tarcia aż do całkowitego zatrzymania pojazdu dla par ciernych posiadających krzywe stabilności cieplnej 1, 2 lub 3 (rys. 1.4) wymaga skomplikowanego przebiegu czasowego ciśnienia kontaktowego. Temu przypadkowi hamowania najbardziej odpowiadają pary cierne z wyraźnie spadającą charakterystyką stabilności cieplnej (krzywa 3, rys. 1.4).

5.  $\underline{i=5}$  – gęstość mocy tarcia zmienia się parabolicznie od wartości maksymalnej  $q_{5,\max}^* = 3$  w chwili początkowej do zera w chwili zatrzymania. W rozważanym przypadku otrzymano:

$$\sigma_5^*(t) = 3 \left( 1 - \frac{t}{t_s} \right), \quad 0 \leq t < t_s, \quad (1.2.17)$$

co oznacza, że siła tarcia redukuje się liniowo od wartości maksymalnej  $\sigma_5^*(0) = 3$  do zera w chwili zatrzymania. Taką zależność można otrzymać, stosując pary cierne z charakterystyką stabilności cieplnej analogiczną do krzywych 1 lub 2 (rys. 1.4). Naprężenia stycznne (1.2.17) mogą wystąpić przy odpowiedniej regulacji ciśnienia kontaktowego z gwałtownym jego zwiększeniem w chwili początkowej procesu hamowania.

6.  $\underline{i=6}$  – gęstość mocy tarcia zwiększa się parabolicznie od zera w chwili początkowej do wartości maksymalnej  $q_{6,\max}^* = 3$  w chwili zatrzymania. Profil czasowy naprężenia stycznego ma postać:

$$\sigma_6^*(t) = 3 \left( \frac{t}{t_s} \right)^2 \frac{t_s}{(t_s - t)}, \quad 0 \leq t < t_s, \quad (1.2.18)$$

a jego przebieg jest zbliżony do profili  $\sigma_2^*(t)$  (1.2.14) i  $\sigma_4^*(t)$  (1.2.16) (rys. 1.3a). Realizacja zmiany z czasem hamowania naprężenia stycznego (siły tarcia) według prawa (1.2.18) jest dosyć trudna. Wymaga ona bowiem

złożonej regulacji ciśnienia kontaktowego z nieograniczonym wzrostem w chwili zatrzymania w przypadku par ciernych charakteryzujących się dowolną z krzywych stabilności cieplnej zaprezentowanych na rysunku 1.4. W tej sytuacji wskazane jest stosowanie par ciernych z wyraźnie zauważalną redukcją charakterystyki stabilności cieplnej (typ krzywej 3 z rys. 1.4), która gwarantuje przy stałym ciśnieniu kontaktowym gwałtowny wzrost siły tarcia przed zakończeniem hamowania.

7.  $i=7$  – gęstość mocy tarcia  $q_7^*(t)$  zwiększa się parabolicznie od zera w chwili początkowej do wartości maksymalnej dokładnie w połowie czasu hamowania, a następnie spada do zera w chwili zatrzymania. W rozpatrywanym przypadku,

$$\sigma_7^*(t) = 6 \frac{t}{t_s}, \quad 0 \leq t < t_s, \quad (1.2.19)$$

mamy do czynienia z liniowym wzrostem naprężenia stycznego od zera przy  $t = 0$  do wartości maksymalnej  $\sigma_7^*(t_s) = 6$  w chwili zatrzymania. Taki profil czasowy siły tarcia można otrzymać przy stosowaniu par ciernych posiadających dowolną z trzech charakterystyk stabilności cieplnej zaprezentowanych na rysunku 1.4. Bardziej prawdopodobna jest jednak realizacja takiego procesu przy stałej lub liniowej zależności współczynnika tarcia od temperatury (krzywe 1 i 2, rys. 1.4). Takie pary cierne przy stopniowym zwiększaniu ciśnienia na powierzchni kontaktu mogą zapewnić liniowo zwiększającą się charakterystykę siły tarcia (momentu tarcia) bez widocznego skoku wartości przed zatrzymaniem.

8.  $i=8$  – gęstość mocy tarcia zmienia się parabolicznie z czasem hamowania, osiągając wartość maksymalną  $q_{8,\max}^* = 1,35$  w chwili  $t = 0,25t_s$  i zmniejszając się do zera w chwili zatrzymania. Wtedy:

$$\sigma_8^*(t) = \frac{6}{5} \left( 1 + 2 \frac{t}{t_s} \right), \quad 0 \leq t < t_s, \quad (1.2.20)$$

co oznacza, że naprężenie styczne zwiększa się liniowo od wartości 1,2 w chwili początkowej do wartości maksymalnej 3,6 przy  $t = t_s$ . Analizowany tryb tarcia może być zrealizowany przy wykorzystaniu par ciernych z charakterystykami stabilności cieplnej zbliżonymi do krzywych 1 i 2 na rysunku 1.4.

9.  $i=9$  – funkcja gęstości mocy tarcia narasta parabolicznie wraz z czasem hamowania od zera przy  $t = 0$  do wartości maksymalnej  $q_{9,\max}^* = 1,35$  w chwili

$t = 0,75t_s$ , a następnie spada aż do zatrzymania. W tym przypadku profil czasowy naprężenia stycznego ma postać:

$$\sigma_9^*(t) = \frac{6}{5} \left( \frac{t}{t_s} \right) \left( 2 + \frac{t_s}{t_s - t} \right), \quad 0 \leq t < t_s. \quad (1.2.21)$$

Sytuacja ta jest analogiczna do wyżej rozpatrzonych trybów hamowania przy  $i = 2, 4, 6$  i tak samo jak w poprzednich przypadkach wymaga złożonej regulacji ciśnienia kontaktowego, która jest trudna do wykonania.

10.  $i=10$  – w konstrukcjach różnych rzeczywistych układów hamulcowych stosujących seryjne pary cierne najczęściej spotykany jest taki tryb tarcia, przy którym obciążenie na powierzchni kontaktu wzrasta natychmiastowo do wartości nominalnej i utrzymuje stałą wartość aż do chwili zatrzymania. W takim przypadku większość profili czasowych gęstości mocy tarcia może być zrealizowana przy zmianie naprężeń stycznych zgodnie ze wzorem:

$$\sigma_{10}^*(t) = \frac{6(\sqrt{t_s t} - t)}{t_s - t}, \quad 0 \leq t < t_s. \quad (1.2.22)$$

Profil czasowy gęstości mocy tarcia, zaprezentowany w pozycji  $i = 10$  (tab. 1.1), może być otrzymany przy stosowaniu par ciernych posiadających dowolną z trzech krzywych stabilności cieplnej z rysunku 1.4. Rosnąca wartość funkcji  $q_{10}^*(t)$  jest skutkiem tego, że nawet przy gwałtownym skoku ciśnienia w układzie hamulcowym obciążenie na powierzchniach ciernych (siła tarcia) zwiększa się stopniowo wraz z czasem hamowania. Przy czym wzrost siły tarcia wyprzedza redukcję prędkości i w chwili  $t = 0,25t_s$  osiągnąca jest maksymalną wartość iloczynu naprężenia stycznego (1.2.22) i prędkości (1.2.6), tzn. maksymalną wartość gęstości mocy tarcia.

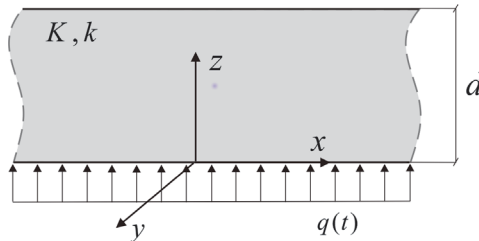
Reasumując, należy stwierdzić, że charakterystyki zmian mocy, pracy i siły tarcia w procesie hamowania są niezbędne do doboru prawidłowego trybu pracy układów hamulcowych z wybraną parą cierną oraz do obliczeń temperatury w tych układach. Przyjmuje się, że racjonalne procesy hamowania do zatrzymania całkowitego pojazdu to takie, które posiadają profile czasowe gęstości mocy tarcia dążące do zera w chwili zatrzymania [27]. Z przeprowadzonej powyżej analizy wynika, że do tej grupy procesów hamowania należą profile: pierwszy, trzeci, siódmy, ósmy i dziesiąty. Takie procesy mogą być zrealizowane automatycznie przy wykorzystaniu pary cierniej z krzywą stabilności cieplnej, oznaczoną jako 2 na rysunku 1.4 (w przypadku  $i = 1$ ), lub krzywej 3 (przy  $i = 3$ ) oraz z nieznaczną regulacją ciśnienia na powierzchni kontaktu przy stosowaniu par ciernych z krzywymi stabilności cieplnej 1 i 2 przy  $i = 7$ . Przypadki  $i = 8$  i  $i = 10$  mogą wystąpić przy stosowaniu par ciernych z dowolną charakterystyką stabilności cieplnej z rysunku 1.4.

### 1.3. Nagrzewanie warstwy strumieniem ciepła o dowolnej intensywności (model przybliżony)

W podrozdziale 1.2 zaprezentowano zbiór funkcji gęstości mocy tarcia (tab. 1.1), które opisują różne tryby pracy wysoko obciążonego węzła ciernego. Większość tych funkcji ma dosyć skomplikowaną postać (rys. 1.1). Znalezienie uniwersalnego wzoru do obliczenia rozkładu temperatury w elemencie nagrzewanym strumieniem ciepła o dowolnej intensywności  $q(t)$  było głównym celem badań zamieszczonych w monografii [28]. Otrzymane rozwiązanie jest obecnie używane jako jeden z podstawowych elementów układu równań dynamiki cieplnej tarcia i zużycia (DCTZ) do szacowania pola temperatury w elementach ciernych podczas hamowania [32]. Poniżej przedstawiono algorytm otrzymania takiego rozwiązania zaproponowany w monografii [28]. Przeprowadzono także jego adaptację do układu dwuelementowego.

#### 1.3.1. Początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego dla warstwy

Niech jednorodna warstwa o grubości  $d$  ( $0 \leq z \leq d$ ) nagrzewana jest na powierzchni  $z = 0$  strumieniem ciepła o intensywności  $q(t)$  dowolnie zmieniającej się w czasie  $0 \leq t \leq t_s$  (rys. 1.5). Na przeciwległej powierzchni warstwy  $z = d$  przyjęto warunek adiabatyczny. W chwili początkowej  $t = 0$  temperatura warstwy  $T(z,0) = 0$ ,  $0 \leq z \leq d$  jest stała.



Rysunek 1.5. Schemat nagrzewania warstwy

Rozkład niustalonego pola temperatury  $T(z,t)$  w warstwie otrzymano z rozwiązania następującego zagadnienia początkowo-brzegowego przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(z,t)}{\partial t}, \quad 0 < z < d, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (1.3.1)$$

$$K \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q(t), \quad 0 < t \leq t_s, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (1.3.3)$$

$$T(z,0) = 0, \quad 0 \leq z \leq d, \quad (1.3.4)$$

gdzie  $K, k$  oznaczają odpowiednio współczynniki przewodnictwa cieplnego i dyfuzji cieplnej. Zagadnienie (1.3.1)–(1.3.4) należy do klasy zagadnień z liniowym równaniem różniczkowym w pochodnych cząstkowych typu parabolicznego (1.3.1) z warunkami brzegowymi drugiego rodzaju, niejednorodnym (1.3.2) i jednorodnym (1.3.3), oraz jednorodnym warunkiem początkowym (1.3.4). Dokładne analityczne rozwiązania takich zagadnień zostały otrzymane dla trzech postaci funkcji  $q(t)$ , a mianowicie  $q(t) = q_0 = \text{const}$ ,  $q(t) = q_0 \sqrt{t/t_s}$  i  $q(t) = q_0 t/t_s$ , gdzie  $t_s$  jest czasem trwania procesu (np. czasem hamowania) [18]. W celu otrzymania uniwersalnego rozwiązania tego zagadnienia Chichinadze przyjął dla dowolnej postaci funkcji  $q(t)$  dodatkowe założenie upraszczające, mówiące o tym, że zmiana temperatury warstwy w czasie, w dowolnym punkcie na osi  $z$  jest wprost proporcjonalna do gęstości mocy tarcia:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{k}{Kd} q(t), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.5)$$

Uwzględniając założenie (1.3.5) w równaniu przewodnictwa ciepła (1.3.1), zapisano:

$$\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = \frac{q(t)}{Kd}, \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.6)$$

Całkując równanie (1.3.6) względem zmiennej  $z$ , otrzymano:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = \frac{z}{Kd} q(t) + C_1(t), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (1.3.7)$$

gdzie  $C_1(t)$  jest nieznaną funkcją czasu  $t$ .

Z warunku brzegowego (1.3.2) wyznaczono:

$$C_1(t) = -\frac{q(t)}{K}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.8)$$

Podstawiając  $C_1(t)$  (1.3.8) do prawej strony równania (1.3.7), otrzymano:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{K} \left( \frac{z}{d} - 1 \right) q(t), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.9)$$

Należy zaznaczyć, że ze wzoru (1.3.9) wynika również spełnienie warunku brzegowego (1.3.3). Kolejne całkowanie równania (1.3.9) względem  $z$  daje:

$$T(z,t) = \frac{d}{K} F(z) q(t) + C_2(t), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (1.3.10)$$

gdzie:

$$F(z) = \frac{z}{d} \left( \frac{z}{2d} - 1 \right), \quad 0 \leq z \leq d. \quad (1.3.11)$$

Zakładając, że akumulowane w warstwie ciepło równe jest gęstości pracy tarcia w dowolnym momencie, zapisano równanie bilansu ciepła:

$$\frac{K}{k} \int_0^d T(z,t) dz = \int_0^t q(s) ds \equiv w(t), \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.12)$$

Podstawiając temperaturę  $T(z,t)$  (1.3.10) i (1.3.11) pod znak całki w lewej stronie równania (1.3.12) i wykonując całkowanie, otrzymano:

$$C_2(t) = \frac{d}{3K} q(t) + \frac{k}{Kd} w(t), \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.13)$$

Z uwzględnieniem wzoru (1.3.13) temperaturę warstwy  $T(z,t)$  (1.3.10) zapisano w postaci:

$$T(z,t) = \frac{d}{K} \left[ \frac{1}{3} + F(z) \right] q(t) + \frac{k}{Kd} w(t), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (1.3.14)$$

gdzie funkcję  $F(z)$  oblicza się ze wzoru (1.3.11).

W chwili początkowej  $t = 0$  z rozwiązania (1.3.14) wyznaczono:

$$T(z,0) = \frac{d}{K} \left[ \frac{1}{3} + F(z) \right] q(0), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (1.3.15)$$

gdzie uwzględniono, że  $w(0) = 0$ . Jeżeli  $q(0) \neq 0$ , to ze wzoru (1.3.15) wnioskujemy o niespełnieniu przez rozwiązanie (1.3.14) warunku początkowego (1.3.4). W celu korekty rozwiązania (1.3.14) dodatkowo rozpatrzono następujące zagadnienie przewodzenia ciepła z jednorodnymi warunkami brzegowymi i niejednorodnym warunkiem początkowym:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial \tilde{T}(z,t)}{\partial t}, \quad 0 < z < d, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.16)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.17)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}(z,t)}{\partial z} \right|_{z=d} = 0, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.18)$$

$$\tilde{T}(z,0) = T(z,0), \quad 0 \leq z \leq d, \quad (1.3.19)$$

gdzie temperatura  $T(z,0)$  ma postać (1.3.15).

Rozwiązanie zagadnienia (1.3.16)–(1.3.19) w monografii [28] Chichinadze otrzymał metodą rozdzielania zmiennych. Poniżej skorzystano natomiast z ogólnej postaci rozwiązania tego zagadnienia, zaprezentowanego z kolei w monografii [93]:

$$\tilde{T}(z,t) = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta_n^2 kt) \cos(\beta_n z) \int_0^d T(z,0) \cos(\beta_n z) dz, \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.20)$$

gdzie liczby własne,

$$\beta_n = \frac{\pi n}{d}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.21)$$

są dodatnimi pierwiastkami równania charakterystycznego  $\sin(d\beta_n) = 0$ . Szereg występujący we wzorze (1.3.20) jest jednostajnie zbieżny.

Podstawiając do prawej strony rozwiązania (1.3.20) temperaturę początkową  $T(z,0)$  (1.3.15), otrzymano:

$$\tilde{T}(z,t) = \frac{2}{K} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} I_n \exp(-\beta_n^2 kt) \cos(\beta_n z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.22)$$

gdzie:

$$I_n = \int_0^d F(z) \cos(\beta_n z) dz, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.23)$$

Uwzględniając postać funkcji  $F(z)$  (1.3.11), ze wzoru (1.3.23) wyznaczono:

$$I_n = 0,5I_{n,2} - I_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.3.24)$$

gdzie:

$$I_{n,i} = \int_0^d \left(\frac{z}{d}\right)^i \cos(\beta_n z) dz, \quad i = 1, 2. \quad (1.3.25)$$

Całkując przez części, obliczono wartości całek we wzorze (1.3.25):

$$I_{n,1} = \frac{1}{d\beta_n^2} [(-1)^n - 1], \quad I_{n,2} = \frac{2}{d\beta_n^2} (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.26)$$

Podstawiając całki  $I_{n,i}$ ,  $i = 1, 2$  (1.3.26) do prawej strony wzoru (1.3.24), otrzymano:

$$I_n = \frac{1}{d\beta_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.27)$$

Biorąc pod uwagę współczynniki  $I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (1.3.27) w rozwiązaniu (1.3.22), wyznaczono:

$$\tilde{T}(z, t) = \frac{2}{Kd} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta_n^2 kt)}{\beta_n^2} \cos(\beta_n z), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 < t < t_s, \quad (1.3.28)$$

gdzie liczby własne  $\beta_n$  określone są wzorem (1.3.21).

Różnica rozwiązań (1.3.14) i (1.3.28) ma postać:

$$T(z, t) = \frac{d}{K} \left\{ \left[ \frac{1}{3} + F(z) \right] q(t) + \frac{k}{d^2} w(t) - \frac{2}{d^2} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta_n^2 kt)}{\beta_n^2} \cos(\beta_n z) \right\}, \quad (1.3.29)$$

$$0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s,$$

gdzie funkcja  $F(z)$  jest zdefiniowana wzorem (1.3.11).

Na ogrzewanej powierzchni  $z = 0$  ze wzoru (1.3.29) otrzymano:



$$T(0,t) = \frac{d}{K} \left[ \frac{1}{3} q(t) + \frac{k}{d^2} w(t) - \frac{2}{d^2} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta_n^2 kt)}{\beta_n^2} \right], \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (1.3.30)$$

Następnie sprawdzono, czy funkcja (1.3.29) spełnia warunki brzegowe (1.3.2) i (1.3.3) oraz warunek początkowy (1.3.4). Różniczkowanie rozwiązania (1.3.29) względem zmiennej przestrzennej  $z$  daje:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{K} \left( \frac{z}{d} - 1 \right) q(t) + \frac{2}{Kd} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta_n^2 kt)}{\beta_n} \sin(\beta_n z), \quad (1.3.31)$$

$$0 \leq z \leq d, 0 \leq t \leq t_s,$$

skąd wnioskujemy o spełnieniu warunków brzegowych (1.3.2) i (1.3.3).

W chwili początkowej  $t = 0$  z rozwiązania (1.3.29) otrzymano:

$$T(z,0) = \frac{d}{K} \left\{ \left[ \frac{1}{3} + F(z) \right] q(0) - \frac{2}{d^2} q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n z)}{\beta_n^2} \right\}, \quad 0 \leq z \leq d. \quad (1.3.32)$$

Z uwzględnieniem sumy [98],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^2} = \frac{1}{12} (2\pi^2 + 3z^2 - 6\pi z), \quad (1.3.33)$$

szereg w prawej stronie wzoru (1.3.32) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{2}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\beta_n z)}{\beta_n^2} &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(n \frac{\pi z}{d}\right) = \frac{1}{6\pi^2} \left[ 2\pi^2 + 3\left(\frac{\pi z}{d}\right)^2 - 6\pi \left(\frac{\pi z}{d}\right) \right] = \\ &= \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{d}\right)^2 - \left(\frac{z}{d}\right) \right] = \left[ \frac{1}{3} + F(z) \right], \quad 0 \leq z \leq d. \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

Biorąc pod uwagę sumę (1.3.34) we wzorze (1.3.32), otrzymano potwierdzenie spełnienia warunku początkowego (1.3.4).

Jeżeli rozpatrywany jest proces nagrzewania tarcowego jednego z elementów ciernych układu hamulcowego (przykładowo nakładki lub tarczy), to związek pomiędzy wartościami nominalnymi gęstości pracy hamowania  $w_0$  i mocy tarcia  $q_0$  ma postać  $w_0 = q_0 t_s$  (1.2.3).

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne i parametry,

$$\zeta = \frac{z}{d}, \quad \tau = \frac{kt}{d^2}, \quad \tau_s = \frac{kt_s}{d^2}, \quad T_0 = \frac{q_0 d}{K}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad q^* = \frac{q}{q_0}, \quad w^* = \frac{w}{w_0}, \quad (1.3.35)$$

rozwiązania (1.3.29) i (1.3.30) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$T^*(\zeta, \tau) = \left[ \frac{1}{3} + F(\zeta) \right] q^*(\tau) + \tau_s w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\pi n)^2 \tau]}{(\pi n)^2} \cos(\pi n \zeta), \quad (1.3.36)$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \tau \leq \tau_s,$$

$$T^*(0, \tau) = \frac{1}{3} q^*(\tau) + \tau_s w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(\pi n)^2 \tau]}{(\pi n)^2}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (1.3.37)$$

Otrzymane wzory (1.3.36) i (1.3.37) różnią się od odpowiadających im rozwiązań znalezionych w monografii [28] jedynie współczynnikiem  $q^*(0)$  przed znakiem sumy. We wspomnianej publikacji prawdopodobnie pomyłkowo zamieszczono w tym miejscu bezwymiarową gęstość mocy tarcia  $q^*(\tau)$ .

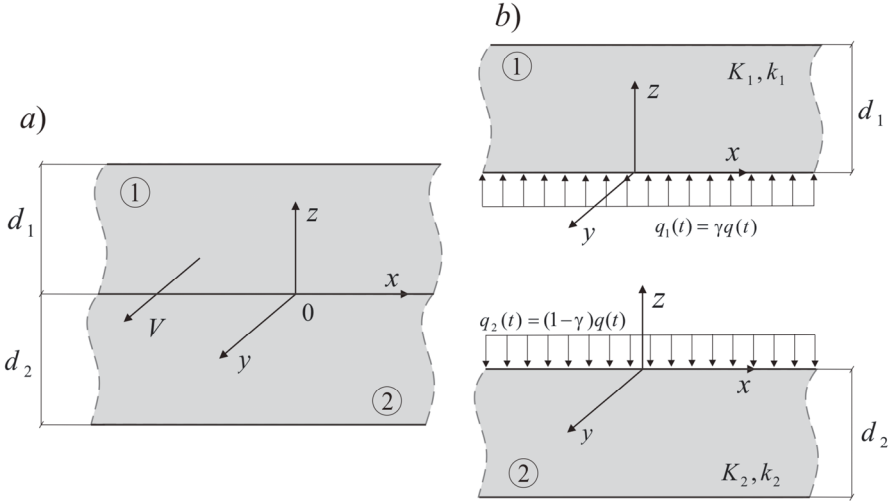
Przybliżone rozwiązania (1.3.29) lub zapisane w postaci bezwymiarowej (1.3.36) stanowią podstawę do wyznaczenia temperatury średniej powierzchni ciernych w układach hamulcowych za pomocą rozwiązań układu równań dynamiki cieplnej tarcia i zużycia [27]. Jak pokazano w podrozdziale 1.2, w zależności od właściwości materiałów oraz ich zmian w procesie hamowania, jak również charakteru wzrostu ciśnienia, profile czasowe gęstości mocy  $q$  i pracy  $w$  tarcia mogą być różne. Związek pomiędzy  $q$  a  $w$  ma postać (1.3.12) lub, z uwzględnieniem oznaczeń (1.3.35), postać bezwymiarową:

$$w^*(\tau) = \int_0^{\tau} q^*(s) ds, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (1.3.38)$$

### 1.3.2. Adaptacja otrzymanego rozwiązania do układu dwóch warstw

Zgodnie z drugim sposobem modelowania nagrzewania tarciowego do oszacowania temperatury elementów pary cierniej należy rozpatrzeć sprzężone zagadnienie przewodzenia ciepła dla układu dwóch jednorodnych warstw (rys. 1.6a). Rozwiązanie takiego zagadnienia otrzymano, korzystając z rozwiązania zagadnienia zamieszczonego w podrozdziale 1.3.1. W tym celu dwuelementowy układ cierny został myślowo rozdzielony na dwie osobne warstwy z zadaniem odpowiednim obciążeniem cieplnym na ich powierzchniach roboczych. Schemat tego podejścia przedstawiony został na rysunku 1.6b.

Do określenia intensywności strumieni ciepła oddziałujących na powierzchnie cierne nagrzewanych ciał niezbędne jest wprowadzenie współczynnika rozdzielenia strumienia ciepła  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Jeżeli strumień ciepła o intensywności  $q_1(t) = \gamma q(t)$  wnika do pierwszego ciała, to na drugi element tarciowy oddziałuje strumień  $q_2(t) = (1 - \gamma)q(t)$  (rys. 1.6b). Wtedy suma intensywności tarciowych strumieni ciepła wnikających do poszczególnych elementów ciernych równa jest gęstości mocy tarcia  $q(t)$ .



Rysunek 1.6. Schematy modeli obliczeniowych: a) sprzężony, b) oddzielne nagrzewanie elementów

Rozkłady temperatury w poszczególnych elementach pary cierniej  $l = 1, 2$  wyznaczono z rozwiązania (1.3.29), uwzględniając intensywność strumieni ciepła  $q_1(t)$  oraz  $q_2(t)$ :

$$T_1(z, t) = \frac{\gamma}{K_1} \left\{ \left[ \frac{d_1}{3} - z \left( 1 - \frac{z}{2d_1} \right) \right] q(t) + \frac{k_1}{d_1} w(t) - 2d_1 q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-k_1(n\pi)^2 d_1^{-2} t]}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{d_1} z\right) \right\}, 0 \leq z \leq d_1, t > 0, \quad (1.3.39)$$

$$T_2(z, t) = \frac{(1-\gamma)}{K_2} \left\{ \left[ \frac{d_2}{3} + z \left( 1 + \frac{z}{2d_2} \right) \right] q(t) + \frac{k_2}{d_2} w(t) - 2d_2 q(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-k_2(n\pi)^2 d_2^{-2} t]}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{d_2} z\right) \right\}, -d_2 \leq z \leq 0, t > 0. \quad (1.3.40)$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne i parametry,

$$\zeta = \frac{z}{d_1}, \quad \tau = \frac{k_1 t}{d_1^2}, \quad K^* = \frac{K_2}{K_1}, \quad k^* = \frac{k_2}{k_1}, \quad d^* = \frac{d_2}{d_1},$$

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad T_0 = \frac{q_0 d_1}{K_1}, \quad w_0 = \frac{q_0 d_1^2}{k_1}, \quad (1.3.41)$$

do rozwiązań (1.3.39) i (1.3.40), pola temperatury każdej warstwy zapisano w postaci:

$$T_1(\zeta, \tau) = \gamma T_0 T_1^*(\zeta, \tau) =$$

$$= \gamma T_0 \left\{ \left[ \frac{1}{3} - \zeta \left( 1 - \frac{\zeta}{2} \right) \right] q^*(\tau) + w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \tau]}{(n\pi)^2} \cos(n\pi\zeta) \right\}, \quad (1.3.42)$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, \tau > 0,$$

$$T_2(\zeta, \tau) = (1 - \gamma) T_0 T_2^*(\zeta, \tau) = (1 - \gamma) T_0 \frac{d^*}{K^*} \left\{ \left[ \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{d^*} \left( 1 + \frac{\zeta}{2d^*} \right) \right] q^*(\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{k^*}{d^{*2}} w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-k^* (n\pi)^2 d^{*-2} \tau]}{(n\pi)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{d^*} \zeta\right) \right\}, \quad -d^* \leq \zeta \leq 0, \tau > 0. \quad (1.3.43)$$

Ze wzorów (1.3.42) i (1.3.43) przy  $\zeta = 0$  wyznaczono ewolucje temperatury na powierzchniach ciernych:

$$T_1(0, \tau) = \gamma T_0 T_1^*(0, \tau), \quad \tau > 0,$$

$$T_1^*(0, \tau) = \frac{1}{3} q^*(\tau) + w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(n\pi)^2 \tau]}{(n\pi)^2}, \quad (1.3.44)$$

$$T_2(0, \tau) = (1 - \gamma) T_0 T_2^*(0, \tau), \quad \tau > 0,$$

$$T_2^*(0, \tau) = \frac{d^*}{K^*} \left\{ \frac{1}{3} q^*(\tau) + \frac{k^*}{d^{*2}} w^*(\tau) - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-k^* (n\pi)^2 d^{*-2} \tau]}{(n\pi)^2} \right\}. \quad (1.3.45)$$

Współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła  $\gamma$ , występujący w powyższych rozwiązaniach, został wyznaczony przy założeniu, że średnia temperatura powierzchni roboczych elementów ciernych osiągnięta w czasie hamowania jest jednakowa:

$$\gamma \bar{T}_1^* = (1 - \gamma) \bar{T}_2^*, \quad (1.3.46)$$

gdzie:

$$\bar{T}_l^* = \int_0^{\tau_s} T_l^*(0, s) ds, \quad l = 1, 2. \quad (1.3.47)$$

Należy zaznaczyć, że założenie (1.3.46) zastępuje warunek brzegowy równości wartości temperatury elementów na powierzchniach roboczych w zagadnieniu sprzężonym.

Z warunku (1.3.46) otrzymujemy:

$$\gamma = \left( 1 + \frac{\bar{T}_1^*}{\bar{T}_2^*} \right)^{-1}. \quad (1.3.48)$$

Podstawiając rozwiązania (1.3.44) i (1.3.45) do wzoru (1.3.47) oraz uwzględniając warunek (1.2.5), otrzymano średnie bezwymiarowe wartości temperatury powierzchni roboczych:

$$\bar{T}_1^* = \frac{1}{3} + \bar{W}^* - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-4} [1 - \exp(-n^2 \pi^2 \tau_s)], \quad (1.3.49)$$

$$\bar{T}_2^* = \frac{d^*}{K^*} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{k^*}{d^{*2}} \bar{W}^* - 2q^*(0) \frac{d^{*2}}{k^*} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-4} [1 - \exp(-k^* n^2 \pi^2 d^{*-2} \tau_s)] \right\}, \quad (1.3.50)$$

gdzie:

$$\bar{W}^* = \int_0^{\tau_s} w^*(s) ds. \quad (1.3.51)$$

Uwzględniając zależności (1.3.49)–(1.3.51) we wzorze (1.3.48), wyznaczono współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła  $\gamma$ .

Jeżeli grubości warstw  $d_l$ ,  $l = 1, 2$  równe są efektywnym głębokościom przenikania ciepła  $a_l = \sqrt{3k_l t_s}$ ,  $l = 1, 2$  [28], to ze wzorów (1.3.41) otrzymano:

$$d^* = \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{k^*}. \quad (1.3.52)$$

Podstawiając względną grubość warstw  $d^*$  (1.3.52) do zależności (1.3.50), wyznaczono:

$$\bar{T}_2^* = \frac{\sqrt{k^*}}{K^*} \left\{ \frac{1}{3} + \bar{W}^* - 2q^*(0) \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-4} [1 - \exp(-n^2 \pi^2 \tau_s)] \right\}. \quad (1.3.53)$$

Porównując rozwiązania (1.3.49) i (1.3.53), otrzymano związek:

$$\bar{T}_2^* = \varepsilon^{-1} \bar{T}_1^*, \quad (1.3.54)$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}} = \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \quad (1.3.55)$$

jest współczynnikiem aktywności cieplnej materiałów warstw [78].

Podstawiając wzory (1.3.54) i (1.3.55) do zależności (1.3.48), otrzymano:

$$\gamma = \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{\sqrt{K_1 \rho_1 c_1}}{\sqrt{K_1 \rho_1 c_1} + \sqrt{K_2 \rho_2 c_2}}. \quad (1.3.56)$$

Powyższa zależność (1.3.56) została zaproponowana przez Charrona w pracy [26] i jest obecnie najczęściej stosowana do obliczeń współczynnika rozdzielania strumienia ciepła w układach ciernych [53, 104]. Warto zauważyć, że w przypadku takich samych materiałów pary cieńszej ze wzoru (1.3.56) wynika, że  $\gamma = 0,5$ , tzn. że ciepło jest rozdzielane jednakowo pomiędzy te elementy.



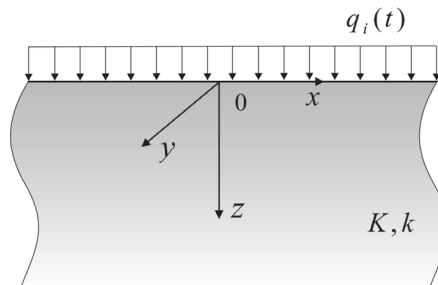
## 2. NAGRZEWANIE PÓŁPRZESTRZENI STRUMIENIEM CIEPŁA PROPORCJONALNYM DO GĘSTOŚCI MOCY TARCIA

W niniejszym rozdziale zostaną sformułowane oraz otrzymane dokładne rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła dla półprzestrzeni nagrzewanej kolejno strumieniami ciepła, których przebiegi czasowe intensywności są proporcjonalne do profili czasowych gęstości mocy tarcia omówionych w podrozdziale 1.2. Następnie, w oparciu o uzyskane nieustalone pola temperatury, zostaną wyznaczone odpowiednie rozkłady normalnych quasi-statycznych naprężeń termicznych.

### 2.1. Pola temperatury

#### 2.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Niech od chwili początkowej  $t = 0$  do zakończenia hamowania  $t = t_s$  jednorodna półprzestrzeń  $z \geq 0$  (rys. 2.1) będzie nagrzewana na powierzchni swobodnej  $z = 0$  tarciovym strumieniem ciepła o intensywności równej gęstości mocy tarcia  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (tab. 1.1). Temperatura początkowa ciała jest równa  $T_a$ .



Rysunek 2.1. Schemat zagadnienia

Niestacjonarne rozkłady temperatury  $T_i(z, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  dla dziesięciu profili gęstości mocy tarcia zostaną znalezione z rozwiązania następującego zagadnienia początkowo-brzegowego przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t}, \quad z > 0, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (2.1.1)$$



$$K \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_i(t), \quad 0 < t \leq t_s, \quad (2.1.2)$$

$$T_i(z,t) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (2.1.3)$$

$$T_i(z,0) = T_a, \quad z \geq 0, \quad (2.1.4)$$

gdzie postaci funkcji  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  występujących w warunku brzegowym (2.1.2) zaprezentowano w tabeli 1.1.

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne i parametry:

$$\zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{kt}{a^2}, \quad \tau_s = \frac{kt_s}{a^2}, \quad T_i^* = \frac{T_i - T_a}{T_0}, \quad T_0 = \frac{q_0 a}{K}, \quad (2.1.5)$$

gdzie  $a = \sqrt{3kt_s}$  – efektywna głębokość przenikania ciepła [28], zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła (2.1.1)–(2.1.4) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\partial^2 T_i^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_i^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial T_i^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = -q_i^*(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (2.1.7)$$

$$T_i^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (2.1.8)$$

$$T_i^*(\zeta, 0) = 0, \quad \zeta \geq 0. \quad (2.1.9)$$

## 2.1.2. Rozwiązanie zagadnienia

Z wykorzystaniem twierdzenia Duhamela rozwiązania zagadnienia (2.1.6)–(2.1.9) poszukiwano w postaci [78]:

$$T_i^*(\zeta, \tau) = \int_0^\tau q_i^*(s) \frac{\partial}{\partial \tau} T_0^*(\zeta, \tau - s) ds, \quad \zeta \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (2.1.10)$$

gdzie  $T_0^*(\zeta, \tau)$  jest znanym rozwiązaniem tego zagadnienia przy stałej w czasie intensywności strumienia ciepła  $q_0^*(\tau) = 1$  [25]:

$$T_0^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau), \quad \zeta \geq 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (2.1.11)$$

$$Z(\zeta, \tau) = \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}, \quad (2.1.12)$$

a  $\text{ierfc}(x) = \exp(-x^2)/\sqrt{\pi} - x \text{erfc}(x)$ ,  $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ ,  $\text{erf}(x)$  – funkcją błędu Gaussa. Uwzględniając pochodną [3]

$$\frac{d}{dx} \text{ierfc}(x) = -\text{erfc}(x), \quad (2.1.13)$$

znaleziono:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ 2\sqrt{\tau-s} \text{ierfc}Z(\zeta, \tau-s) \right] = \frac{\exp[-Z^2(\zeta, \tau-s)]}{\sqrt{\pi(\tau-s)}}. \quad (2.1.14)$$

Biorąc pod uwagę zależność (2.1.14) oraz postacie funkcji  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (tab. 1.1), z uwzględnieniem rozkładu funkcji  $q_3^*(\tau)$  w szereg potęgowy (z ograniczeniem się do czterech pierwszych członów)

$$q_3^*(\tau) \approx \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{t}{t_s}} \cong \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right)^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right)^3 \right], \quad (2.1.15)$$

ze wzoru (2.1.10) bezwymiarowe temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $\zeta \geq 0$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  zapisano w postaci:

$$T_1^*(\zeta, \tau) = 2[T_0^*(\zeta, \tau) - I^{(1)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.16)$$

$$T_2^*(\zeta, \tau) = 2I^{(1)}(\zeta, \tau), \quad (2.1.17)$$

$$T_3^*(\zeta, \tau) = \frac{3}{2} \left[ T_0^*(\zeta, \tau) - \frac{1}{2} I^{(1)}(\zeta, \tau) - \frac{1}{8} I^{(2)}(\zeta, \tau) - \frac{1}{16} I^{(3)}(\zeta, \tau) \right], \quad (2.1.18)$$

$$T_4^*(\zeta, \tau) = \frac{3}{2} I^{(0.5)}(\zeta, \tau), \quad (2.1.19)$$

$$T_5^*(\zeta, \tau) = 3[T_0^*(\zeta, \tau) - 2I^{(1)}(\zeta, \tau) + I^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.20)$$

$$T_6^*(\zeta, \tau) = 3I^{(2)}(\zeta, \tau), \quad (2.1.21)$$

$$T_7^*(\zeta, \tau) = 6[I^{(1)}(\zeta, \tau) - I^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.22)$$

$$T_8^*(\zeta, \tau) = \frac{6}{5} [T_0^*(\zeta, \tau) + I^{(1)}(\zeta, \tau) - 2I^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.23)$$

$$T_9^*(\zeta, \tau) = \frac{18}{5} \left[ I^{(1)}(\zeta, \tau) - \frac{2}{3} I^{(2)}(\zeta, \tau) \right], \quad (2.1.24)$$

$$T_{10}^*(\zeta, \tau) = 6 [I^{(0,5)}(\zeta, \tau) - I^{(1)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.25)$$

gdzie:

$$I^{(n)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \left( \frac{s}{\tau_s} \right)^n \exp[-Z^2(\zeta, \tau-s)] ds, \quad n = 0,5; 1; 2; 3. \quad (2.1.26)$$

Za pomocą podstawienia  $x = 1/\sqrt{\tau-s}$  całki (2.1.26) sprowadzono do postaci:

$$I^{(0,5)}(\zeta, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_s \pi}} J(\zeta, \tau), \quad (2.1.27)$$

$$I^{(1)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{\tau_s \sqrt{\pi}} [\tau J^{(2)}(\zeta, \tau) - J^{(4)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.28)$$

$$I^{(2)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{\tau_s^2 \sqrt{\pi}} [\tau^2 J^{(2)}(\zeta, \tau) - 2\tau J^{(4)}(\zeta, \tau) + J^{(6)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.29)$$

$$I^{(3)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{\tau_s^3 \sqrt{\pi}} [\tau^3 J^{(2)}(\zeta, \tau) - 3\tau^2 J^{(4)}(\zeta, \tau) + 3\tau J^{(6)}(\zeta, \tau) - J^{(8)}(\zeta, \tau)], \quad (2.1.30)$$

gdzie:

$$J(\zeta, \tau) = \int_{\tau^{-1}}^{\infty} x^{-2} \sqrt{x - \tau^{-1}} \exp[-(0,5\zeta)^2 x] dx, \quad (2.1.31)$$

$$J^{(n)}(\zeta, \tau) = \int_{1/\sqrt{\tau}}^{\infty} x^{-n} \exp[-(0,5\zeta x)^2] dx, \quad n = 2, 4, 6, 8. \quad (2.1.32)$$

Całkując przez części, ze wzoru (2.1.31) otrzymano:

$$J(\zeta, \tau) = \frac{1}{2} J^{(0)}(\zeta, \tau) - \frac{\zeta^2}{4} J^{(1)}(\zeta, \tau), \quad (2.1.33)$$

gdzie:

$$J^{(n)}(\zeta, \tau) = \int_{\tau^{-1}}^{\infty} x^{-1} (x - \tau^{-1})^{n-1/2} \exp[-(0,5\zeta)^2 x] dx, \quad n = 0, 1. \quad (2.1.34)$$

Na podstawie wzoru [98]:

$$\int_u^{\infty} x^{-1} (x-u)^{\nu} \exp(-\mu x) dx = u^{\nu} \Gamma(\nu+1) \Gamma(-\nu, u\mu), u > 0, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > 0 \quad (2.1.35)$$

obliczono całki (2.1.34):

$$J^{(n)}(\zeta, \tau) = \tau^{1/2-n} \Gamma(0,5+n) \Gamma[0,5-n; Z^2(\zeta, \tau)], n=0,1. \quad (2.1.36)$$

Uwzględniając wartości funkcji gamma [3],

$$\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1,5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (2.1.37)$$

oraz niepełnej funkcji gamma:

$$\begin{aligned} \Gamma[0,5; Z^2(\zeta, \tau)] &= \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau), \\ \Gamma[-0,5; Z^2(\zeta, \tau)] &= 2\sqrt{\pi} Z^{-1}(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau), \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

ze wzoru (2.1.36) wyznaczono:

$$J^{(0)}(\zeta, \tau) = \pi \sqrt{\tau} \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau), \quad J^{(1)}(\zeta, \tau) = \frac{2\pi}{\zeta} \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau). \quad (2.1.39)$$

Podstawiając funkcje  $J^{(n)}(\zeta, \tau)$ ,  $k=0,1$  (2.1.39) do prawej strony równości (2.1.33), otrzymano:

$$J(\zeta, \tau) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\tau} [\operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) - 2Z(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau)]. \quad (2.1.40)$$

Uwzględniając postać funkcji  $J(\zeta, \tau)$  (2.1.40) we wzorze (2.1.27), znaleziono:

$$I^{(0,5)}(\zeta, \tau) = \frac{\sqrt{\pi \tau_s} \tau^*}{2} [\operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) - 2Z(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau)], \quad (2.1.41)$$

gdzie:

$$\tau^* = \frac{\tau}{\tau_s}. \quad (2.1.42)$$

Za pomocą wzoru rekurencyjnego [98]

$$J^{(n)}(\zeta, \tau) = \frac{\sqrt{\tau^{n-1}}}{(n-1)} \exp[-Z^2(\zeta, \tau)] - \frac{\zeta^2}{2(n-1)} J^{(n-2)}(\zeta, \tau) \quad (2.1.43)$$

oraz zależności:

$$J^{(2)}(\zeta, \tau) = \sqrt{\pi\tau} \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) \quad (2.1.44)$$

wyznaczono całki (2.1.32) przy  $n = 4, 6, 8$ :

$$J^{(4)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{3} \tau \sqrt{\pi\tau} \{ [1 - 2Z^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) + Z(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.45)$$

$$J^{(6)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{15} \tau^2 \sqrt{\pi\tau} \{ [3 - 2Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) + \\ + Z(\zeta, \tau) [3 - 2Z^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.46)$$

$$J^{(8)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{105} \tau^3 \sqrt{\pi\tau} \{ [15 - 6Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau) - 8Z^6(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) + \\ + Z(\zeta, \tau) [15 - 6Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}. \quad (2.1.47)$$

Podstawiając funkcje  $J^{(n)}(\zeta, \tau)$  (2.1.44)–(2.1.47) do wzorów (2.1.28)–(2.1.30), otrzymano:

$$I^{(1)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.48)$$

$$I^{(2)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{15} \sqrt{\tau} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) - \\ - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.49)$$

$$I^{(3)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{105} \sqrt{\tau} \tau^{*3} \{ [48 + 174Z^2(\zeta, \tau) + 80Z^4(\zeta, \tau) + 8Z^6(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) - \\ - Z(\zeta, \tau) [57 + 36Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) \}. \quad (2.1.50)$$

Uwzględniając funkcje  $I^{(n)}(\zeta, \tau)$ ,  $n = 0, 5; 1; 2; 3$  (2.1.41), (2.1.48)–(2.1.50) we wzorach (2.1.16)–(2.1.25), wyznaczono niestacjonarne pola temperatury w postaci:

$$T_i(z, t) = T_0 T_i^*(\zeta, \tau) + T_a, \quad z \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (2.1.51)$$

gdzie:

$$T_1^*(\zeta, \tau) = \frac{4}{3} \sqrt{\tau} \tau^* \{ [3\tau^{*-1} - 2 - 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) + Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.52)$$

$$T_2^*(\zeta, \tau) = \frac{4}{3} \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \quad (2.1.53)$$

$$\begin{aligned} T_3^*(\zeta, \tau) = & -\frac{1}{2} \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \} - \\ & -\frac{1}{40} \sqrt{\tau} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z \} - \\ & -\frac{1}{560} \sqrt{\tau} \tau^{*3} \{ [48 + 174Z^2(\zeta, \tau) + 80Z^4(\zeta, \tau) + 8Z^6(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - \\ & 3\sqrt{\tau} \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) [57 + 36Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

$$T_4^*(\zeta, \tau) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi \tau_s} \tau^* [ \text{erfc} Z(\zeta, \tau) - 2Z(\zeta, \tau) \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) ], \quad (2.1.55)$$

$$\begin{aligned} T_5^*(\zeta, \tau) = & 2\sqrt{\tau} \{ 3 \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - 4\tau^* [1 + Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) + \\ & + \frac{1}{5} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) + \\ & + 2\tau^* Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \} - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

$$\begin{aligned} T_6^*(\zeta, \tau) = & \frac{2}{5} \sqrt{\tau} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - \\ & - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

$$\begin{aligned} T_7^*(\zeta, \tau) = & 4\sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \} - \\ & -\frac{1}{5} \tau^* \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - \\ & - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

$$\begin{aligned} T_8^*(\zeta, \tau) = & \frac{4}{5} \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z^2(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \} - \\ & -\frac{2}{5} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)] \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) + \\ & + 3 \text{ierfc} Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau) [7 + 2Z^2(\zeta, \tau)] \text{erfc} Z(\zeta, \tau) \}, \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

$$\begin{aligned}
T_9^*(\zeta, \tau) = & \frac{4}{5} \sqrt{\tau} \tau^* \{3\{2[1 + Z^2(\zeta, \tau)]\text{ierfc}Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau)\text{erfc}Z(\zeta, \tau)\} - \\
& - \frac{2}{5} \tau^* \{[8 + 18Z^2(\zeta, \tau) + 4Z^4(\zeta, \tau)]\text{ierfc}Z(\zeta, \tau) - \\
& - Z(\zeta, \tau)[7 + 2Z^2(\zeta, \tau)]\text{erfc}Z(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{2.1.60}$$

$$\begin{aligned}
T_{10}^*(\zeta, \tau) = & 3\tau^* \sqrt{\pi\tau_s} [\text{erfc}Z(\zeta, \tau) - 2Z(\zeta, \tau)\text{ierfc}Z(\zeta, \tau)] - \\
& - 4\tau^* \sqrt{\tau} \{2[1 + Z^2(\zeta, \tau)]\text{ierfc}Z(\zeta, \tau) - Z(\zeta, \tau)\text{erfc}Z(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{2.1.61}$$

a funkcje  $Z(\zeta, \tau)$  oraz parametr  $\tau^*$  określono odpowiednio wzorami (2.1.12) i (2.1.42).

Przebiegi bezwymiarowych temperatur  $T_i^*(0, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  w czasie hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$  na nagrzewanej powierzchni półprzestrzeni  $\zeta = 0$  znaleziono z rozwiązań (2.1.52)–(2.1.61) w następujących postaciach:

$$T_1^*(0, \tau) = 4\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(1 - \frac{2}{3}\tau^*\right), \tag{2.1.62}$$

$$T_2^*(0, \tau) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \tau^*, \tag{2.1.63}$$

$$T_3^*(0, \tau) = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(3 - \tau^* - \frac{1}{5}\tau^{*2} - \frac{3}{35}\tau^{*3}\right), \tag{2.1.64}$$

$$T_4^*(0, \tau) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\tau_s}} \tau, \tag{2.1.65}$$

$$T_5^*(0, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(3 - 4\tau^* + \frac{8}{5}\tau^{*2}\right), \tag{2.1.66}$$

$$T_6^*(0, \tau) = \frac{16}{5}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \tau^{*2}, \tag{2.1.67}$$

$$T_7^*(0, \tau) = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \tau^* (10 - 8\tau^*), \tag{2.1.68}$$

$$T_8^*(0, \tau) = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(3 + 2\tau^* - \frac{16}{5}\tau^{*2}\right), \tag{2.1.69}$$

$$T_9^*(0, \tau) = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \tau^* \left( 6 - \frac{16}{5} \tau^* \right), \quad (2.1.70)$$

$$T_{10}^*(0, \tau) = \tau^* \left( 3\sqrt{\pi\tau_s} - 8\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \right). \quad (2.1.71)$$

### 2.1.3. Analiza numeryczna

Na podstawie dokładnych rozwiązań (2.1.51)–(2.1.61) znaleziono przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowej temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  w nagrzewanym elemencie ciernym. Uzyskane wyniki porównano z odpowiednimi rezultatami otrzymanymi przy wykorzystaniu rozwiązania Chichinadze (1.3.36). Maksymalne wartości temperatury  $T_{i,\max}^*$  oraz czas jej osiągnięcia  $\tau_{i,\max}$  wyznaczone dla dziesięciu rozpatrywanych trybów hamowania  $i = 1, 2, \dots, 10$  na podstawie rozwiązań dokładnych (2.1.62)–(2.1.71) oraz rozwiązania przybliżonego (1.3.36) zaprezentowano w tabeli 2.1.

Dalsze obliczenia wykonano przy ustalonej wartości bezwymiarowego czasu hamowania (liczby Fouriera)  $\tau_s = 1$  (2.1.5). Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  na nagrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  w czasie hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$  przedstawiono na rysunku 2.2. Porównując ewolucje temperatury uzyskane na podstawie rozwiązań dokładnych (linie ciągłe) i rozwiązania przybliżonego (linie przerywane), można zauważyć, że jakościowo odpowiednie krzywe temperaturowe są blisko siebie. Natomiast w aspekcie ilościowym większość przybliżonych wyników zawyża wartości temperatury. Rozbieżność pomiędzy temperaturami dokładnymi a przybliżonymi zwiększa się wraz z upływem czasu  $\tau$  i jest największa w chwili zatrzymania  $\tau = \tau_s$ . Wartości maksymalne bezwymiarowej temperatury powierzchniowej  $T_{i,\max}^*$  uzyskane na podstawie rozwiązania przybliżonego są zawyżone średnio o 8,6% w stosunku do wartości dokładnych (tab. 2.1). Jedyne wyjątek stanowi przypadek  $i = 5$ , gdzie maksymalna wartość temperatury znalezionej z rozwiązania przybliżonego jest niższa o 5% od wartości  $T_{i,\max}^*$  wyznaczonej z rozwiązania dokładnego. Największa różnica pomiędzy wartościami maksymalnymi  $T_{i,\max}^*$  występuje dla  $i = 9$  i wynosi 11%.

W przypadkach  $i = 1, 3, 5, 7, 8, 10$  wartości bezwymiarowego czasu osiągnięcia maksymalnej temperatury  $\tau_{i,\max}$  z rozwiązania przybliżonego są zawyżone w stosunku do wyników obliczonych na podstawie rozwiązań dokładnych średnio o 16,5%. Natomiast w przypadkach  $i = 2, 4, 6, 9$ , w których temperatura powierzchniowa monotonicznie narasta w trakcie procesu hamowania (rys. 2.2), ich wartości są zbieżne i wynoszą  $\tau_{i,\max} = \tau_s = 1$ .



Tabela 2.1. Maksymalne wartości bezwymiarowej temperatury  $T_{i,\max}^*$  osiągniętej w chwilach  $\tau_{i,\max}$  na nagrzewanej powierzchni, wyznaczone na podstawie rozwiązań dokładnych (2.1.62)–(2.1.71) oraz rozwiązania przybliżonego (1.3.36)

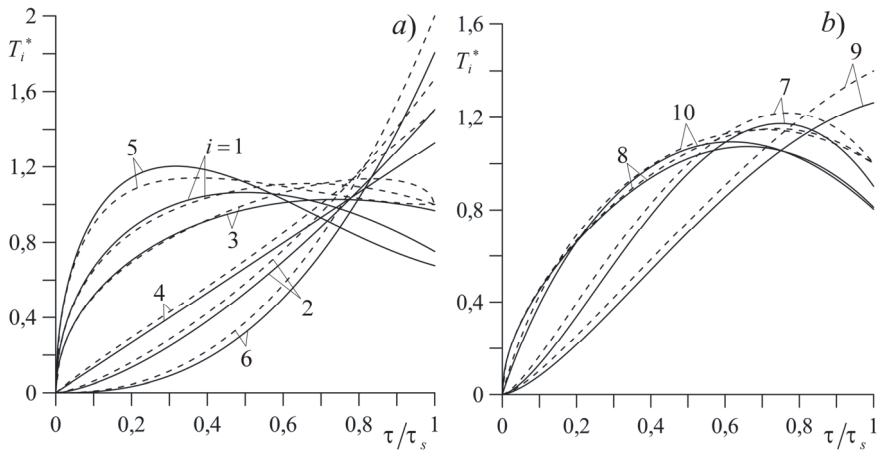
$i$	Rozwiązania dokładne (2.1.62)–(2.1.71)		Rozwiązanie przybliżone (1.3.36)	
	$T_{i,\max}^*$	$\tau_{i,\max}$	$T_{i,\max}^*$	$\tau_{i,\max}$
1	1,06	$0,5 \tau_s$	1,11	0,7
2	1,5	$\tau_s$	1,66	1
3	1,03	$0,74 \tau_s$	1,14	0,83
4	1,33	$\tau_s$	1,5	1
5	1,2	$[(3 - \sqrt{3}) / 4] \tau_s \cong 0,317 \tau_s$	1,14	0,37
6	1,81	$\tau_s$	2	1
7	1,17	$0,75 \tau_s$	1,22	0,77
8	1,07	$(3\tau_s^2 / 16)[1 + \sqrt{1 + (16 / 3\tau_s)}]$	1,15	0,74
9	1,26	$\tau_s$	1,4	1
10	1,09	$(\pi / 4)^2 \tau_s \cong 0,62 \tau_s$	1,15	0,71

Zaprezentowane w tabeli 1.1 profile czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  można podzielić na trzy charakterystyczne grupy. Pierwsza z nich zawiera przebiegi  $i = 1, 3, 5$ , które cechują się skokowym wzrostem do maksymalnej wartości w chwili rozpoczęcia procesu  $t = 0$ , a następnie monotonicznie maleją do zera w chwili zakończenia hamowania (rys. 1.1a). Wykres funkcji  $q_1^*(t)$  zmienia się linioowo od wartości  $q_{1,\max}^*(t) = 2$ , a odpowiadająca jej bezwymiarowa temperatura osiąga wartość maksymalną  $T_{1,\max}^* = 1,06$  dokładnie w połowie czasu hamowania  $\tau = 0,5\tau_s$  (rys. 1.1a, tab. 1.1), co jest charakterystyczne dla hamowania z jednostajnym opóźnieniem [50, 113]. Przebiegi czasowe funkcji  $q_i^*(t)$  przy  $i = 3, 5$  mają kształt paraboliczny (parabola wklęsła przy  $i = 3$  oraz wypukła przy  $i = 5$ ) i monotonicznie maleją w procesie hamowania od wartości maksymalnych  $q_{3,\max}^* = 1,5$ ,  $q_{5,\max}^* = 3$  (tab. 1.1). Odpowiadające im największe wartości temperatury  $T_{3,\max}^* = 1,03$ ,  $T_{5,\max}^* = 1,2$  osiągnęte są w chwilach  $\tau_{3,\max} = 0,74\tau_s$  i  $\tau_{5,\max} = 0,32\tau_s$  (tab. 2.1).

Druga grupa zawiera gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i = 2, 4, 6$ . Przebiegi te charakteryzują się monotonicznym wzrostem od zera w chwili rozpoczęcia procesu hamowania  $t = 0$  do wartości maksymalnych  $q_{2,\max}^* = 2$ ,  $q_{4,\max}^* = 1,5$  i  $q_{6,\max}^* = 3$  w chwili zatrzymania  $t = t_s$  (tab. 1.1). Podobny charakter przebiegu mają ewolucje odpowiadającej im bezwymiarowej temperatury  $T_i^*$ ,  $i = 2, 4, 6$  na nagrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  (rys. 2.2a). Wartości maksymalne bezwymiarowej temperatury są

najwyższe spośród wszystkich analizowanych rozwiązań i wynoszą  $T_{2,\max}^* = 1,5$ ,  $T_{4,\max}^* = 1,33$  oraz  $T_{6,\max}^* = 1,81$  (tab. 2.1).

Trzecia grupa składa się z czterech profili czasowych gęstości mocy tarcia, przy  $i = 7,8,9,10$ , zaprezentowanych na rysunku 1.1b. Funkcje te posiadają lokalne maksimum w czasie trwania hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ . Wartości maksymalne gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i = 7,8,9,10$  są osiągnięte w chwilach  $t_{7,\max} = 0,5t_s$ ,  $t_{8,\max} = 0,25t_s$ ,  $t_{9,\max} = 0,75t_s$  oraz  $t_{10,\max} = 0,25t_s$  (tab. 1.1). Odpowiadające im bezwymiarowe temperatury  $T_i^*(0, \tau)$  również rosną wraz z rozpoczęciem procesu hamowania aż do osiągnięcia wartości maksymalnych (tab. 2.1). Następnie dla  $i = 7,8,10$  powierzchnia robocza zaczyna się ochładzać. Tylko w przypadku  $i = 9$  temperatura narasta aż do chwili zatrzymania (rys. 2.2b).

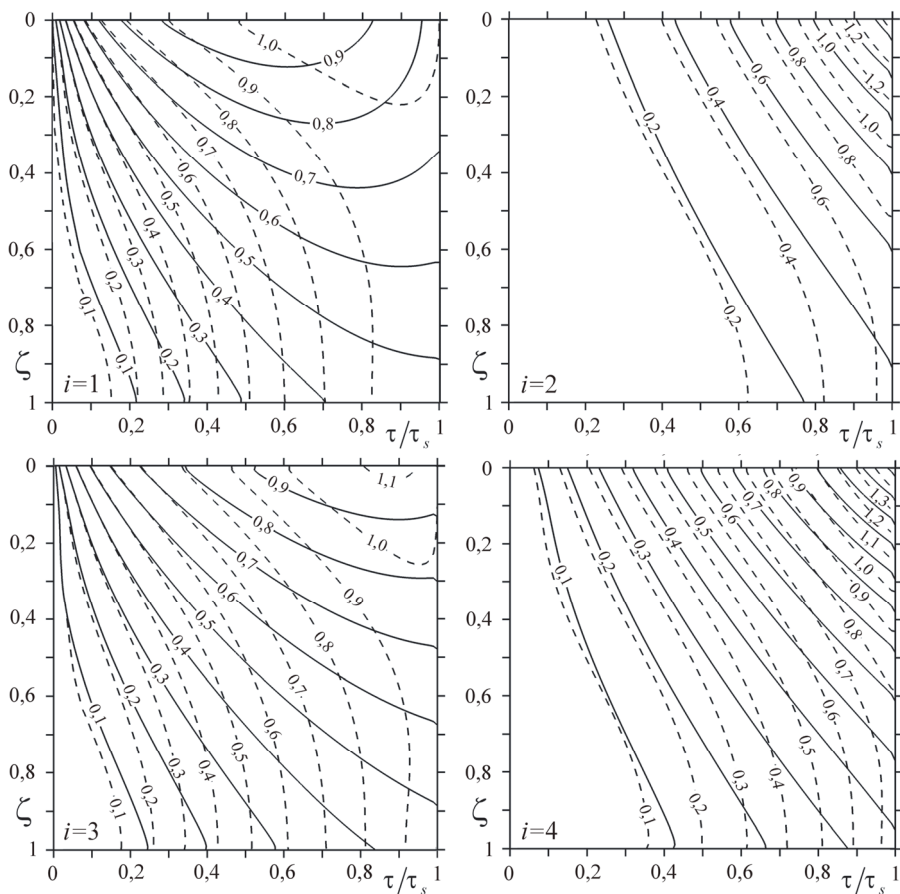


Rysunek 2.2. Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T_i^*(0, \tau)$  na nagrzewanej powierzchni: a)  $i = 1, 2, \dots, 6$ ; b)  $i = 7, 8, 9, 10$ , przy czym linie ciągłe – rozwiązania dokładne; linie przerywane – rozwiązanie przybliżone (1.3.36)

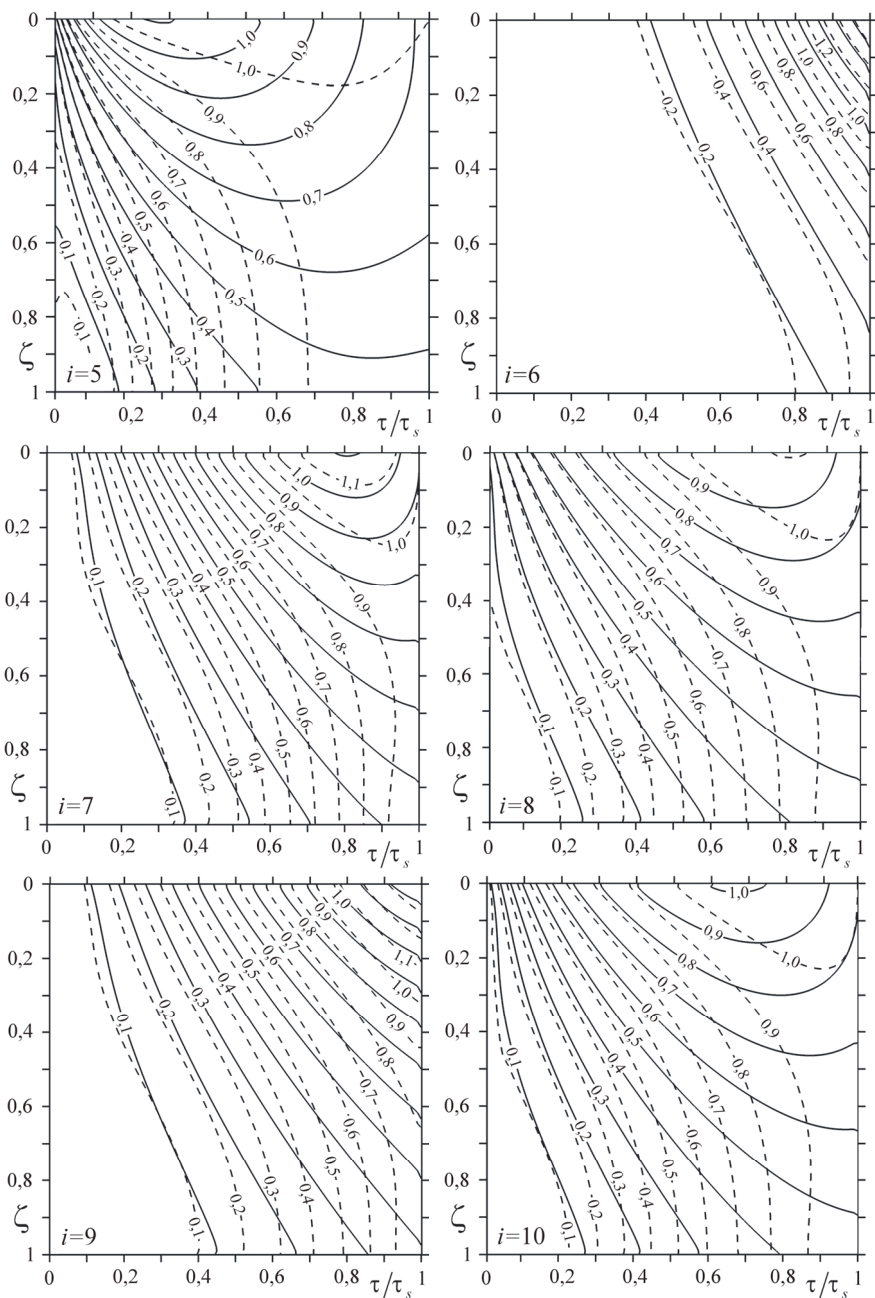
Rozkłady przestrzenno-czasowe bezwymiarowej temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  w warstwie  $0 \leq \zeta \leq 1$ , przy  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ , pokazano na rysunkach 2.3 i 2.4. Wyniki otrzymane na podstawie rozwiązań dokładnych (2.1.52)–(2.1.61) zostały przedstawione za pomocą linii ciągłych. Rozkład izoterm wewnątrz półprzestrzeni odzwierciedla ewolucję bezwymiarowej temperatury na nagrzewanej powierzchni. W przypadkach, w których temperatura na nagrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  wzrasta monotonicznie w procesie hamowania  $i = 2, 4, 6, 9$  (tab. 2.1), izotermy mają kształt liniowy. Analizując rozkłady bezwymiarowej temperatury w przypadkach  $i = 1, 3, 5, 7, 8, 10$ , można zauważyć, że im wcześniej osiągnięta jest temperatura maksymalna, tym intensywniejszy jest proces chłodzenia elementu, a przebieg

izoterm jest bardziej nieliniowy. Największa koncentracja izolinii bezwymiarowej temperatury występuje w pobliżu nagrzewanej powierzchni, gdzie osiągnięta jest najwyższa wartość temperatury. Przy czym im szybciej jest ona osiągnięta, tym wcześniej przegrzewa się cały analizowany obszar elementu  $0 \leq \zeta \leq 1$ .

Izolinie na rysunkach 2.3 i 2.4, oznaczone krzywą przerywaną, odpowiadają wartościom bezwymiarowej temperatury obliczonym z rozwiązania przybliżonego (1.3.36), z uwzględnieniem postaci funkcji z tabeli 1.1. Są one najbardziej zbliżone do izoterm wyznaczonych z rozwiązań dokładnych w pobliżu nagrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$ . Jednak wraz z oddalaniem się od niej w głąb materiału, różnice pomiędzy wynikami przybliżonymi i dokładnymi znacząco się zwiększają. Porównując poszczególne procesy  $i = 1, 2, \dots, 10$ , można zauważyć, że im później osiągnięta jest wartość maksymalna temperatury  $T_{i,\max}$ , tym bardziej zbliżone są do siebie izoterm obliczone za pomocą rozwiązań dokładnego i przybliżonego. Najmniejszą różnicę pomiędzy rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym można zaobserwować w przypadkach  $i = 2, 4, 6, 9$ , dla których  $\tau_{i,\max} = \tau_s$  (rys. 2.3 i 2.4).



Rysunek 2.3. Izolinie bezwymiarowej temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i=1,2,3,4$  przy różnych profilach czasowych gęstości mocy tarcia; linie ciągłe – rozwiązania dokładne, linie przerywane – rozwiązanie przybliżone



Rysunek 2.4. Izolinie bezwymiarowej temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i=5,6,\dots,10$  przy różnych profilach czasowych gęstości mocy tarcia; linie ciągłe – rozwiązania dokładne, linie przerywane – rozwiązanie przybliżone

## 2.2. Naprężenia termiczne

Niejednorodność rozkładu temperatury powoduje pojawienie się odkształceń oraz naprężeń termicznych, które po przekroczeniu granicy wytrzymałości materiału mogą inicjować pęknięcia powierzchniowe elementu ciernego. Badania doświadczalne wykazały, że największy wpływ na rozdzielanie materiału ma poprzeczna składowa naprężenia normalnego działająca prostopadle do kierunku poślizgu. Zgodnie z teorią zginania temperaturowego płyt Timoshenki w przyjętym układzie współrzędnych kartezjańskich  $Oxyz$  (rys. 2.1) składowe poprzeczna oraz podłużna tensora naprężeń są równe  $\sigma_{i,x}(z,t) = \sigma_{i,y}(z,t) \equiv \sigma_i(z,t)$ , a  $\sigma_{i,z}(z,t) = 0$  [112].

### 2.2.1. Rozwiązanie zagadnienia

Rozkłady quasi-statycznych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_i(z,t)$ , inicjowanych niejednorodnymi rozkładami temperatury  $T_i(z,t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (2.1.51)–(2.1.61), obliczymy na podstawie modelu temperaturowego zginania grubej warstwy ze swobodnymi brzegami [112]:

$$\sigma_i(z,t) = \sigma_0 \sigma_i^*(\zeta, \tau), \quad \sigma_0 = \frac{\alpha E T_0}{1 - \nu}, \quad 0 \leq z \leq a, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_i^*(\zeta, \tau) = \varepsilon_i^*(\zeta, \tau) - T_i^*(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (2.2.2)$$

gdzie  $\varepsilon_i^*(\zeta, \tau)$  są to rozkłady bezwymiarowych poprzecznych odkształceń termicznych, obliczane ze wzorów:

$$\varepsilon_i^*(\zeta, \tau) = (4 - 6\zeta)N_i(\tau) + 6(2\zeta - 1)M_i(\tau), \quad (2.2.3)$$

$$N_i(\tau) = \int_0^1 T_i^*(\zeta, \tau) d\zeta, \quad M_i(\tau) = \int_0^1 \zeta T_i^*(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (2.2.4)$$

Po podstawieniu bezwymiarowych temperatur  $T_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (2.1.52)–(2.1.61) do wzorów (2.2.4) otrzymano:

$$N_i(\tau) = \frac{8}{3} \tau \tau^* \left[ \left( \frac{3}{\tau^*} - 2 \right) H^{(0)}(\tau) - 2H^{(2)}(\tau) + K^{(1)}(\tau) \right], \quad (2.2.5)$$

$$M_i(\tau) = \frac{16}{3} \tau \sqrt{\tau} \tau^* \left[ \left( \frac{3}{\tau^*} - 2 \right) H^{(1)}(\tau) - 2H^{(3)}(\tau) + K^{(2)}(\tau) \right], \quad (2.2.6)$$

$$N_2(\tau) = \frac{8}{3} \tau \tau^* \{2[H^{(0)}(\tau) + H^{(2)}(\tau)] - K^{(1)}(\tau)\}, \quad (2.2.7)$$

$$M_2(\tau) = \frac{16}{3} \tau \sqrt{\tau} \tau^* \{2[H^{(1)}(\tau) + H^{(3)}(\tau)] - K^{(2)}(\tau)\}, \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} N_3(\tau) = & 6\tau H^{(0)}(\tau) - \tau \tau^* \{2[H^{(0)}(\tau) + H^{(2)}(\tau)] - K^{(1)}(\tau)\} - \\ & - \frac{\tau \tau^{*2}}{20} [8H^{(0)}(\tau) + 18H^{(2)}(\tau) + 4H^{(4)}(\tau) - 7K^{(1)}(\tau) - 2K^{(3)}(\tau)] - \\ & - \frac{\tau \tau^{*3}}{280} [48H^{(0)}(\tau) + 174H^{(2)}(\tau) + 80H^{(4)}(\tau) + 8H^{(6)}(\tau) - \\ & - 57K^{(1)}(\tau) - 36K^{(3)}(\tau) - 4K^{(5)}(\tau)], \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} M_3(\tau) = & 12\tau \sqrt{\tau} H^{(1)}(\tau) - 2\tau \sqrt{\tau} \tau^* \{2[H^{(1)}(\tau) + H^{(3)}(\tau)] - K^{(2)}(\tau)\} - \\ & - \frac{\tau \tau^{*2}}{10} [8H^{(1)}(\tau) + 18H^{(3)}(\tau) + 4H^{(5)}(\tau) - 7K^{(2)}(\tau) - 2K^{(4)}(\tau)] - \\ & - \frac{\tau \tau^{*3}}{140} [48H^{(1)}(\tau) + 174H^{(3)}(\tau) + 80H^{(5)}(\tau) + 8H^{(7)}(\tau) - \\ & - 57K^{(2)}(\tau) - 36K^{(4)}(\tau) - 4K^{(6)}(\tau)], \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$N_4(\tau) = \frac{3}{2} \sqrt{\pi \tau \tau_s} \tau^* [K^{(0)}(\tau) - 2H^{(1)}(\tau)], \quad (2.2.11)$$

$$M_4(\tau) = 3\tau \sqrt{\pi \tau_s} \tau^* [K^{(1)}(\tau) - 2H^{(2)}(\tau)], \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} N_5(\tau) = & 4\tau \{3H^{(0)}(\tau) - 2\tau^* [2H^{(0)}(\tau) + 2H^{(2)}(\tau) - K^{(1)}(\tau)] + \\ & + \frac{\tau^{*2}}{5} [8H^{(0)}(\tau) + 18H^{(2)}(\tau) + 4H^{(4)}(\tau) - 7K^{(1)}(\tau) - 2K^{(3)}(\tau)]\}, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

$$\begin{aligned} M_5(\tau) = & 8\tau \sqrt{\tau} \{3H^{(1)}(\tau) - 2\tau^* [2H^{(1)}(\tau) + 2H^{(3)}(\tau) - K^{(2)}(\tau)] + \\ & + \frac{\tau^{*2}}{5} [8H^{(1)}(\tau) + 18H^{(3)}(\tau) + 4H^{(5)}(\tau) - 7K^{(2)}(\tau) - 2K^{(4)}(\tau)]\}, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$N_6(\tau) = \frac{4}{5} \tau \tau^{*2} [8H^{(0)}(\tau) + 18H^{(2)}(\tau) + 4H^{(4)}(\tau) - 7K^{(1)}(\tau) - 2K^{(3)}(\tau)], \quad (2.2.15)$$

$$M_6(\tau) = \frac{8}{5} \tau \sqrt{\tau} \tau^{*2} [8H^{(1)}(\tau) + 18H^{(3)}(\tau) + 4H^{(5)}(\tau) - 7K^{(2)}(\tau) - 2K^{(4)}(\tau)], \quad (2.2.16)$$

$$N_7(\tau) = 8\tau\tau^* \{2H^{(0)}(\tau) + 2H^{(2)}(\tau) - K^{(1)}(\tau) - \frac{\tau^*}{5}[8H^{(0)}(\tau) + 18H^{(2)}(\tau) + 4H^{(4)}(\tau) - 7K^{(1)}(\tau) - 2K^{(3)}(\tau)]\}, \quad (2.2.17)$$

$$M_7(\tau) = 16\tau\sqrt{\tau}\tau^* \{2H^{(1)}(\tau) + 2H^{(3)}(\tau) - K^{(2)}(\tau) - \frac{\tau^*}{5}[8H^{(1)}(\tau) + 18H^{(3)}(\tau) + 4H^{(5)}(\tau) - 7K^{(2)}(\tau) - 2K^{(4)}(\tau)]\}, \quad (2.2.18)$$

$$N_8(\tau) = \frac{8}{5}\tau \left[ \left( 3 + 2\tau^* - \frac{16}{5}\tau^{*2} \right) H^{(0)}(\tau) + \tau^* \left( 2 - \frac{36}{5}\tau^* \right) H^{(2)}(\tau) - \frac{8}{5}\tau^{*2} H^{(4)}(\tau) + \tau^* \left( \frac{14}{5}\tau^* - 1 \right) K^{(1)}(\tau) + \frac{4}{5}\tau^{*2} K^{(3)}(\tau) \right], \quad (2.2.19)$$

$$M_8(\tau) = \frac{16}{5}\tau\sqrt{\tau} \left[ \left( 3 + 2\tau^* - \frac{16}{5}\tau^{*2} \right) H^{(1)}(\tau) + \tau^* \left( 2 - \frac{36}{5}\tau^* \right) H^{(3)}(\tau) - \frac{8}{5}\tau^{*2} H^{(5)}(\tau) + \tau^* \left( \frac{14}{5}\tau^* - 1 \right) K^{(2)}(\tau) + \frac{4}{5}\tau^{*2} K^{(4)}(\tau) \right], \quad (2.2.20)$$

$$N_9(\tau) = \frac{8}{5}\tau\sqrt{\tau}\tau^* \left[ \left( 6 - \frac{16}{5}\tau^* \right) H^{(0)}(\tau) + 6 \left( 1 - \frac{6}{5}\tau^* \right) H^{(2)}(\tau) - \frac{8}{5}\tau^* H^{(4)}(\tau) + \left( \frac{14}{5}\tau^* - 3 \right) K^{(1)}(\tau) + \frac{28}{5}\tau^* K^{(3)}(\tau) \right], \quad (2.2.21)$$

$$M_9(\tau) = \frac{16}{5}\tau^2\tau^* \left[ \left( 6 - \frac{16}{5}\tau^* \right) H^{(1)}(\tau) + 6 \left( 1 - \frac{6}{5}\tau^* \right) H^{(3)}(\tau) - \frac{8}{5}\tau^* H^{(5)}(\tau) + \left( \frac{14}{5}\tau^* - 3 \right) K^{(2)}(\tau) + \frac{28}{5}\tau^* K^{(4)}(\tau) \right], \quad (2.2.22)$$

$$N_{10}(\tau) = 2\sqrt{\tau}\tau^* \left\{ 3\sqrt{\pi\tau_s} [H^{(0)}(\tau) - 2H^{(1)}(\tau)] - 8\sqrt{\tau} \left[ H^{(0)}(\tau) + H^{(2)}(\tau) - \frac{1}{2}K^{(1)}(\tau) \right] \right\}, \quad (2.2.23)$$

$$M_{10}(\tau) = 4\tau\tau^* \left\{ 3\sqrt{\pi\tau_s} [H^{(1)}(\tau) - 2H^{(2)}(\tau)] - 8\sqrt{\tau} \left[ H^{(1)}(\tau) + H^{(3)}(\tau) - \frac{1}{2}K^{(2)}(\tau) \right] \right\}, \quad (2.2.24)$$



gdzie:

$$H^{(n)}(\tau) = X(\tau) \int_0^{X(\tau)} Z^n(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z(\zeta, \tau) d\zeta = \frac{L^{(n)}(\tau)}{\sqrt{\pi}} - K^{(n+1)}(\tau), \quad (2.2.25)$$

$$n = 0, 1, \dots, 6,$$

$$L^{(n)}(\tau) = X(\tau) \int_0^{X(\tau)} Z^n(\zeta, \tau) \exp[-Z^2(\zeta, \tau)] d\zeta, \quad (2.2.26)$$

$$K^{(n)}(\tau) = X(\tau) \int_0^{X(\tau)} Z^n(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z(\zeta, \tau) d\zeta, \quad (2.2.27)$$

$$X(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}, \quad (2.2.28)$$

a uogólniona zmienna  $Z(\zeta, \tau)$  ma postać (2.1.12).

Korzystając ze wzorów rekurencyjnych [99], możemy obliczyć:

$$L^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2} \{ (n-1)L^{(n-2)}(\tau) - X^{n-1}(\tau) \exp[-X^2(\tau)] \}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.2.29)$$

$$K^{(n)}(\tau) = \frac{1}{n+1} \times \left\{ \frac{1}{2} n(n-1) J^{(n-2)}(\tau) + \left( X^2(\tau) - \frac{n}{2} \right) X^{n-1}(\tau) \operatorname{erfc} X(\tau) - \frac{X^n(\tau) \exp[-X^2(\tau)]}{\sqrt{\pi}} \right\}, \quad (2.2.30)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

Jednocześnie uwzględniając to, że:

$$L^{(0)}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \operatorname{erfc} X(\tau)], \quad L^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} \{ 1 - \exp[-X^2(\tau)] \}, \quad (2.2.31)$$

$$K^{(0)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \operatorname{ierfc} X(\tau), \quad K^{(1)}(\tau) = \frac{1}{4} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{1}{2} X(\tau) \operatorname{ierfc} X(\tau), \quad (2.2.32)$$

całki (2.2.26) wyznaczono w następujących postaciach:

$$L^{(2)}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{1}{2} X(\tau) \exp[-X^2(\tau)], \quad (2.2.33)$$

$$L^{(3)}(\tau) = \frac{1}{2} - \frac{\exp[-X^2(\tau)]}{2} [1 + X^2(\tau)], \quad (2.2.34)$$

$$L^{(4)}(\tau) = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{X(\tau)}{2} \exp[-X^2(\tau)] \left[ X^2(\tau) + \frac{3}{2} \right], \quad (2.2.35)$$

$$L^{(5)}(\tau) = 1 - \exp[-X^2(\tau)] \left[ 1 + X^2(\tau) + \frac{X^4(\tau)}{2} \right], \quad (2.2.36)$$

$$L^{(6)}(\tau) = \frac{15}{16}\sqrt{\pi} \operatorname{erf} X(\tau) - X(\tau) \exp[-X^2(\tau)] \left[ \frac{1}{2} X^4(\tau) + \frac{5}{4} X^2(\tau) + \frac{15}{8} \right], \quad (2.2.37)$$

$$L^{(7)}(\tau) = 3 - \left[ \frac{1}{2} X^6(\tau) + \frac{3}{2} X^4(\tau) + 3X^2(\tau) + 3 \right] \exp[-X^2(\tau)], \quad (2.2.38)$$

$$K^{(2)}(\tau) = \frac{X^3(\tau)}{3} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \exp[-X^2(\tau)] [X^2(\tau) + 1] \right\}, \quad (2.2.39)$$

$$K^{(3)}(\tau) = \frac{X^4(\tau)}{4} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{3}{16} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{X(\tau)}{8\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] [2X^2(\tau) + 3], \quad (2.2.40)$$

$$K^{(4)}(\tau) = \frac{X^5(\tau)}{5} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{2}{5\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \exp[-X^2(\tau)] \left[ \frac{1}{2} X^4(\tau) + X^2(\tau) + 1 \right] \right\}, \quad (2.2.41)$$

$$K^{(5)}(\tau) = \frac{X^6(\tau)}{6} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{5}{8} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{X(\tau)}{3\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] \left[ \frac{4}{5} X^4(\tau) + 2X^2(\tau) + 3 \right] \right\}, \quad (2.2.42)$$

$$K^{(6)}(\tau) = \frac{X^7(\tau)}{7} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{6}{7\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \exp[-X^2(\tau)] \left[ \frac{X^6(\tau)}{6} + \frac{X^4(\tau)}{2} + X^2(\tau) + 1 \right] \right\}, \quad (2.2.43)$$

$$K^{(7)}(\tau) = \frac{X^8(\tau)}{8} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{105}{64} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{X(\tau)}{3\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] \left[ \frac{8}{35} X^6(\tau) + \frac{4}{5} X^4(\tau) + 2X^2(\tau) + 3 \right] \right\}, \quad (2.2.44)$$

$$K^{(8)}(\tau) = \frac{X^9(\tau)}{9} \operatorname{erfc} X(\tau) + \frac{1}{9\sqrt{\pi}} \{24 - [X^8(\tau) + 4X^6(\tau) + 12X^4(\tau) + 24X^2(\tau) + 24] \exp[-X^2(\tau)]\}. \quad (2.2.45)$$

Z uwzględnieniem wzorów (2.2.33)–(2.2.45) w prawej stronie równości (2.2.25) otrzymano:

$$H^{(0)}(\tau) = \frac{1}{4} \operatorname{erf} X(\tau) + \frac{X(\tau)}{2\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] - \frac{X^2(\tau)}{2} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.46)$$

$$H^{(1)}(\tau) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} + \frac{\exp[-X^2(\tau)]}{6\sqrt{\pi}} [2X^2(\tau) - 1] - \frac{X^3(\tau)}{3} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.47)$$

$$H^{(2)}(\tau) = \frac{1}{16} \operatorname{erf} X(\tau) + \frac{X(\tau)}{8\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] [2X^2(\tau) - 1] - \frac{X^4(\tau)}{4} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.48)$$

$$H^{(3)}(\tau) = \frac{1}{10\sqrt{\pi}} + \frac{\exp[-X^2(\tau)]}{10\sqrt{\pi}} [2X^4(\tau) - X^2(\tau) - 1] - \frac{X^5(\tau)}{5} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.49)$$

$$H^{(4)}(\tau) = \frac{1}{16} \operatorname{erf} X(\tau) + \frac{X(\tau)}{24\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] [4X^4(\tau) - 2X^2(\tau) - 3] - \frac{X^6(\tau)}{6} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.50)$$

$$H^{(5)}(\tau) = \frac{1}{7\sqrt{\pi}} \exp[-X^2(\tau)] \left[ X^6(\tau) - \frac{1}{2} X^4(\tau) - X^2(\tau) - 1 \right] + \frac{1}{7\sqrt{\pi}} - \frac{X^7(\tau)}{7} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.51)$$

$$H^{(6)}(\tau) = \frac{X(\tau) \exp[-X^2(\tau)]}{8\sqrt{\pi}} \left[ X^6(\tau) - \frac{1}{2} X^4(\tau) - \frac{5}{4} X^2(\tau) - \frac{15}{8} \right] + \frac{15}{128} \operatorname{erf} X(\tau) - \frac{X^8(\tau)}{8} \operatorname{erfc} X(\tau), \quad (2.2.52)$$

$$H^{(7)}(\tau) = \frac{\exp[-X^2(\tau)]}{9\sqrt{\pi}} \left[ X^8(\tau) - \frac{X^6(\tau)}{2} - \frac{3X^4(\tau)}{2} - 3X^2(\tau) - 3 \right] + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} - \frac{X^9(\tau)}{9} \operatorname{erfc} X(\tau). \quad (2.2.53)$$

Podstawiając funkcje  $K^{(n)}(\tau)$ ,  $H^{(n)}(\tau)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 7$  (2.2.32), (2.2.39)–(2.2.53) do wzorów (2.2.5)–(2.2.24), znaleziono funkcje  $N_i(\tau)$  i  $M_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (2.2.4), a następnie bezwymiarowe naprężenia  $\sigma_i^*(\zeta, \tau)$  (2.2.2), (2.2.3).

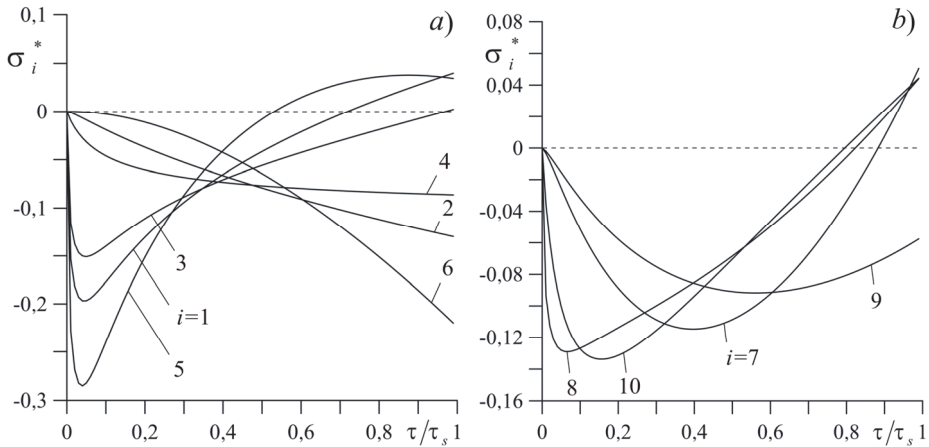
## 2.2.2. Analiza numeryczna

Na podstawie znalezionych rozwiązań przeprowadzono analizę numeryczną wpływu profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$  (tab. 1.1) na bezwymiarowe normalne naprężenia termiczne  $\sigma_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (2.2.2)–(2.2.3). Wartości maksymalne  $\sigma_{i,\max}^*$  (rozciągające) i minimalne  $\sigma_{i,\min}^*$  (ściskające) tych naprężeń, a także bezwymiarowe czasy ich osiągnięcia  $\tau_{i,\max}$  i  $\tau_{i,\min}$ , zamieszczono w tabeli 2.2. Zaprezentowano w niej również bezwymiarowe czasy  $\tau_{i,0}$ , w których następuje zmiana znaku naprężeń.

Tabela 2.2. Bezwymiarowe maksymalna  $\sigma_{i,\max}^*$  i minimalna  $\sigma_{i,\min}^*$  wartości normalnych naprężeń termicznych na powierzchni cieńszej, osiągnięte odpowiednio w czasie  $\tau_{i,\max}$  i  $\tau_{i,\min}$ , a także czas  $\tau_{i,0}$  zmiany znaku tych naprężeń

$i$	$\sigma_{i,\min}^*(0, \tau_{i,\min}^*)$	$\tau_{i,\min}$	$\tau_{i,0}$	$\sigma_{i,\max}^*(0, \tau_{i,\max}^*)$	$\tau_{i,\max}$
1	-0,197	$0,04\tau_s$	$0,72\tau_s$	0,040	$\tau_s$
2	-0,130	$\tau_s$	–	–	–
3	-0,151	$0,05\tau_s$	$0,97\tau_s$	0,002	$\tau_s$
4	-0,086	$\tau_s$	–	–	–
5	-0,285	$0,04\tau_s$	$0,53\tau_s$	0,038	$0,88\tau_s$
6	-0,220	$\tau_s$	–	–	–
7	-0,115	$0,4\tau_s$	$0,89\tau_s$	0,051	$\tau_s$
8	-0,130	$0,07\tau_s$	$0,82\tau_s$	0,044	$\tau_s$
9	-0,092	$0,56\tau_s$	–	-0,058	$\tau_s$
10	-0,134	$0,16\tau_s$	$0,83\tau_s$	0,044	$\tau_s$

Dalsze obliczenia wykonano przy takiej samej wartości  $\tau_s = 1$  jak w podrozdziale 2.1. Zmianę bezwymiarowych naprężeń termicznych  $\sigma_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  na nagrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  w czasie hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$  przy dziesięciu rozpatrywanych profilach czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$  (tab. 1.1) przedstawiono na rysunku 2.5.



Rysunek 2.5. Ewolucje bezwymiarowych naprężeń normalnych  $\sigma_i^*(0, \tau)$  na powierzchni ciernej elementu przy różnych przebiegach czasowych gęstości mocy tarcia: a)  $i=1, 2, \dots, 6$ ; b)  $i=7, 8, 9, 10$

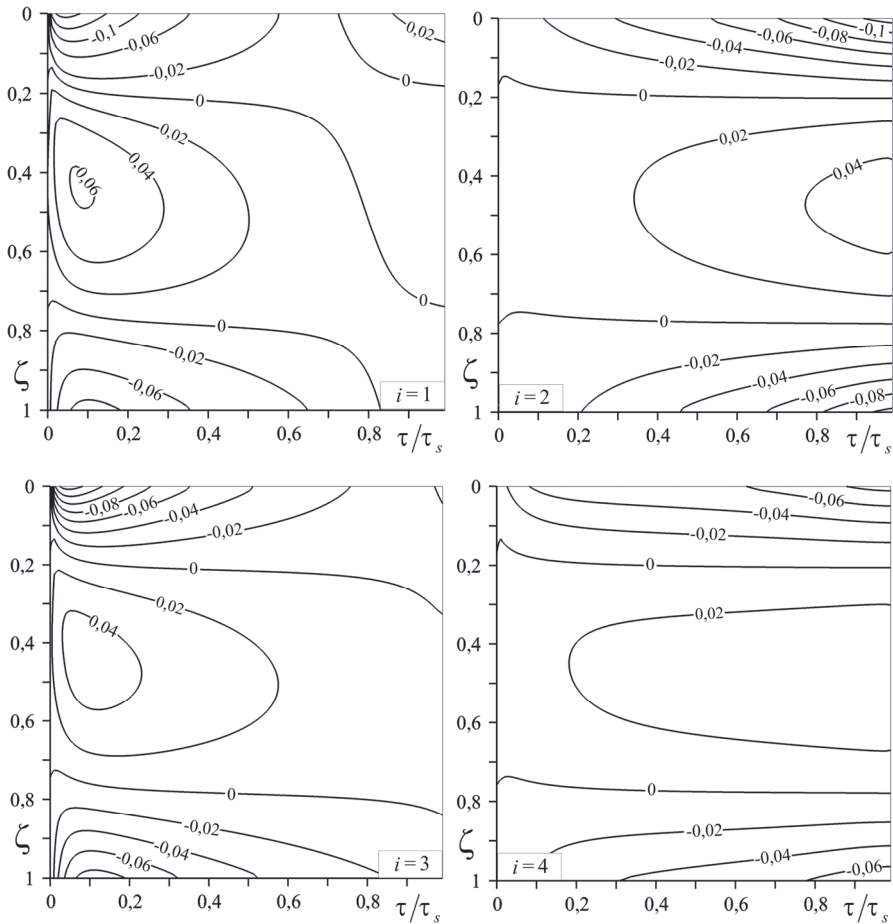
Jak zauważono w poprzednim podrozdziale, profile czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, 10$  (tab. 1.1) można sklasyfikować w trzech grupach. Do pierwszej należą funkcje  $q_i^*(t)$ ,  $i=1, 3, 5$ , które wyróżniają się skokowym wzrostem do wartości maksymalnej w chwili rozpoczęcia hamowania, a następnie monotonicznie maleją aż do zera w chwili zatrzymania. Odpowiadające im naprężenia na ogrzewanej powierzchni po rozpoczęciu hamowania są ściskające, a ich wartości bezwzględne gwałtownie wzrastają, ostatecznie osiągając maksimum (rys. 2.5a). Następnie, wraz z upływem czasu, naprężenia ściskające zanikają do chwili  $\tau_{i,0}$ , po czym pojawiają się naprężenia rozciągające (tab. 2.2). Pozostałe krzywe  $i=2, 4, 6$  na rysunku 2.5a należą do grupy drugiej, w której funkcje zmiany gęstości mocy tarcia w czasie  $q_i^*(t)$ ,  $i=2, 4, 6$  monotonicznie rosną od zera w chwili rozpoczęcia procesu hamowania do maksimum w chwili zatrzymania. W podobny sposób przebiegają odpowiadające im krzywe temperaturowe  $T_i^*$ ,  $i=2, 4, 6$  na powierzchni ciernej (rys. 2.2a), a ich wartości maksymalne  $T_{i,max}^*$  są najwyższe spośród dziesięciu rozpatrywanych przypadków  $i=1, 2, \dots, 10$  (tab. 2.1). Zależność taka nie występuje natomiast w przypadku wartości ekstremalnych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,min}^*(0, \tau_{i,min}^*)$ ,  $i=2, 4, 6$  (tab. 2.2), które są osiągane również w chwili zakończenia procesu  $\tau_s$ , po monotonicznym wzroście w czasie hamowania (rys. 2.5a). Przez cały czas trwania procesów hamowania w przypadkach  $i=2, 4, 6$  poprzeczne naprężenia na powierzchni roboczej elementu pozostają ściskające.

Ostatnia grupa składa się z czterech profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i = 7,8,9,10$ , które posiadają maksimum lokalne w czasie trwania hamowania. Taki przebieg funkcji determinuje ewolucje odpowiadających im naprężeń (rys. 2.4b). W początkowym etapie procesu hamowania są one ściskające, po czym maleją, osiągając minimum lokalne (tab. 2.2), a następnie narastają do zatrzymania. W przypadkach  $\sigma_i^*$ ,  $i = 7,8,10$  naprężenia zmieniają się ze ściskających na rozciągające, które to osiągają maksimum w chwili zatrzymania (tab. 2.2). W przypadku  $i = 9$ , gdzie moc tarcia osiąga najwyższą wartość w końcowym etapie hamowania, rozciągające naprężenia termiczne na powierzchni roboczej elementu ciernego nie występują w trakcie całego procesu hamowania (rys. 2.5b).

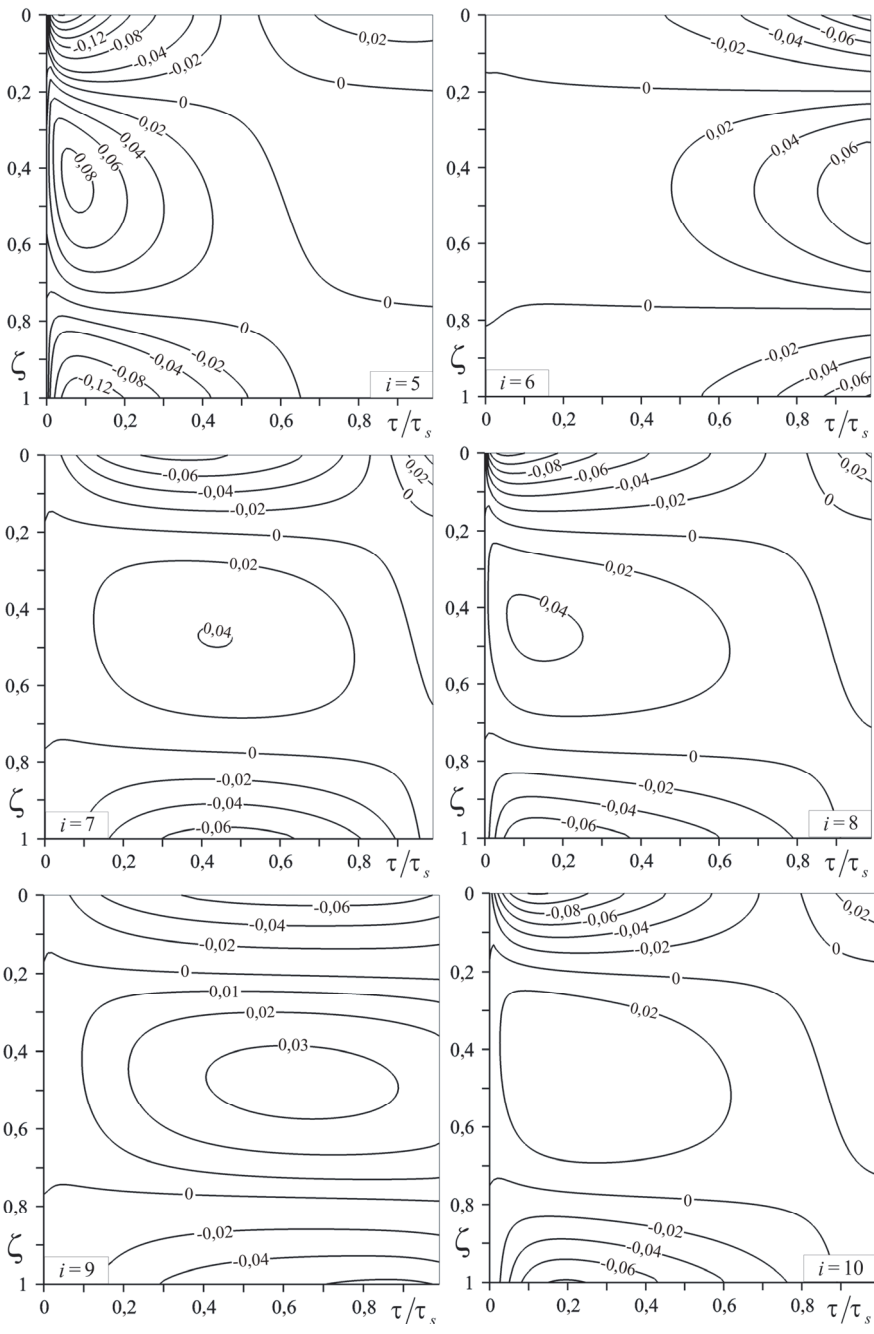
Izolinie bezwymiarowych quasi-statycznych naprężeń termicznych  $\sigma_i^*$ ,  $i = 1,2,\dots,10$  przy dziesięciu różnych profilach czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(t)$ ,  $i = 1,2,\dots,10$  (tab. 1.1) zaprezentowano na rysunkach 2.6 i 2.7. Rozkłady te można podzielić na dwie charakterystyczne grupy. Pierwszą stanowią rezultaty otrzymane przy  $q_i^*(t)$ ,  $i = 1,3,5,7,8,10$ , w których moc tarcia osiąga wartość maksymalną

w pierwszej połowie trwania procesu (rys. 1.1). Skutkuje to spadkiem temperatury powierzchni cieńszej jeszcze przed zatrzymaniem (rys. 2.2). Stan naprężeń odpowiadający tym przypadkom (rys. 2.6 i 2.7) charakteryzuje się natomiast tym, że wraz z początkiem hamowania, przy gwałtownym wzroście temperatury, w strefie  $0 \leq \zeta \leq 0,2$  pod nagrzewaną powierzchnią powstają naprężenia ściskające ( $\sigma_i^* < 0$ ). Wraz z upływem czasu bezwzględne wartości naprężeń w tej strefie maleją, osiągając w pewnej chwili wartość zerową, po czym naprężenia zmieniają znak, stając się rozciągającymi. Czas przejścia naprężeń ze ściskających w rozciągające  $\tau_{i,0}$  (tab. 2.2) jest ściśle zależny od czasu osiągnięcia maksymalnej wartości temperatury  $\tau_{i,\max}$  (tab. 2.1). Im szybciej osiągnana jest temperatura maksymalna  $T_{i,\max}^*$ , tym wcześniej następuje to przejście, a powierzchniowe naprężenia rozciągające  $\sigma_{i,\max}^*$  w chwili zatrzymania są większe (tab. 2.2). Druga strefa  $0,75 \leq \zeta \leq 1$  naprężeń ściskających występuje w pobliżu efektywnej głębokości przenikania ciepła  $\zeta = 1$ . Ewolucja naprężeń w tej strefie jest zbliżona do poprzedniej – wraz z początkiem hamowania generowane są naprężenia ściskające, zmieniające znak pod koniec hamowania. Pomiędzy strefami naprężeń ściskających znajduje się obszar naprężeń rozciągających  $0,2 \leq \zeta \leq 0,75$ , które gwałtownie zwiększają się na początku hamowania, osiągając wartości maksymalne na wczesnym etapie procesu. Następnie naprężenia te maleją, zanikając w pobliżu chwili zatrzymania. Wartości i ewolucje naprężeń są współzależne we wszystkich wyżej wspomnianych strefach. Im większe są wartości powierzchniowych naprężeń ściskających, tym wyższe wartości osiągają naprężenia rozciągające. Czas pojawienia się największych na-

prężen rozciągających wewnątrz elementu jest niemal równy czasowi pojawienia się maksymalnych wartości naprężeń ściskających na nagrzewanej powierzchni.



Rysunek 2.6. Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_i^*$  przy różnych profilach gęstości mocy tarcia  $i = 1, 2, 3, 4$



Rysunek 2.7. Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_i^*$  przy  $i=5,6,\dots,10$



Izolinie naprężeń  $\sigma_i^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 2, 4, 6, 9$  odzwierciedlają monotoniczny wzrost temperatury  $T_i^*(\zeta, \tau)$  podczas hamowania przy odpowiednich profilach czasowych gęstości mocy tarcia (rys. 2.3 i 2.4). W rozpatrywanej grupie strefy największej koncentracji naprężeń ściskających w pobliżu górnej i dolnej krawędzi elementu ciernego występują w końcowym etapie hamowania, a ich maksymalne wartości bezwzględne na powierzchni cierniej  $\zeta = 0$  są osiągnięte w chwili zatrzymania (tab. 2.2). Pomiędzy izoliniami zerowymi, utrzymującymi się podczas całego procesu hamowania na głębokościach  $\zeta \approx 0,2$  oraz  $\zeta \approx 0,75$ , występuje strefa naprężeń rozciągających. Naprężenia te monotonicznie zwiększają się w czasie hamowania, osiągając maksimum w chwili zatrzymania.

## 2.3. Wnioski

Rezultaty otrzymane w wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej udowadniają, że kształt profilu czasowego gęstości mocy tarcia ma znaczący wpływ na rozkład przestrzenno-czasowy temperatury i naprężeń termicznych w elementach ciernych. Poniżej przedstawiono główne spostrzeżenia:

1. Istnieje ścisła korelacja pomiędzy maksymalnymi wartościami gęstości mocy tarcia a temperaturą. Im dłuższy jest czas osiągnięcia maksimum mocy tarcia, tym później pojawia się temperatura maksymalna. Najwyższe wartości temperatury występują w procesach hamowania, podczas których intensywność tarciovego strumienia ciepła monotonicznie rośnie w czasie.
2. Maksymalne temperatury wyznaczone z przybliżonego rozwiązania Chichinadze (1.3.36) zawyżają nawet o 11% odpowiadające im wartości temperatury maksymalnej znalezione na podstawie otrzymanych w niniejszym rozdziale rozwiązań dokładnych. Wraz z oddalaniem się od nagrzewanej powierzchni, różnice te ulegają zwiększeniu. Są one najmniejsze dla procesów charakteryzujących się monotonicznym wzrostem mocy tarcia w trakcie hamowania, a największe wtedy, gdy maksimum mocy tarcia osiągnięte jest na wcześniejszym etapie hamowania.
3. Przy monotonicznym wzroście mocy tarcia podczas hamowania ( $i = 2, 4, 6$ ) lub kiedy jej wartość maksymalna osiągnięta jest w pobliżu chwili zatrzymania ( $i = 9$ ), na powierzchni roboczej elementu ciernego występują jedynie ściskające normalne naprężenia termiczne. Natomiast gdy maksymalne wartości mocy tarcia i temperatury są osiągnięte wcześniej, w trakcie hamowania ( $i = 1, 3, 5, 7, 8, 10$ ), to na skutek obniżenia temperatury powierzchni cierniej przed zatrzymaniem pojawiają się naprężenia rozciągające. W przypadku, gdy ich wartość przekroczy granicę wytrzymałości materiału ciernego na rozciąganie, może dojść do inicjacji przypowierzchniowych pęknięć [43, 158].

4. Zależność pomiędzy maksymalną wartością gęstości mocy tarcia a wartościami bezwzględnymi normalnego naprężenia poprzecznego jest wprost proporcjonalna. Czas zmiany znaku naprężeń termicznych na powierzchni tarcia (ze ściskających na rozciągające) w dużej mierze zależy natomiast od czasu osiągnięcia maksymalnej wartości temperatury.

Wyniki badań zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracach [115–117, 119, 150, 153, 154].



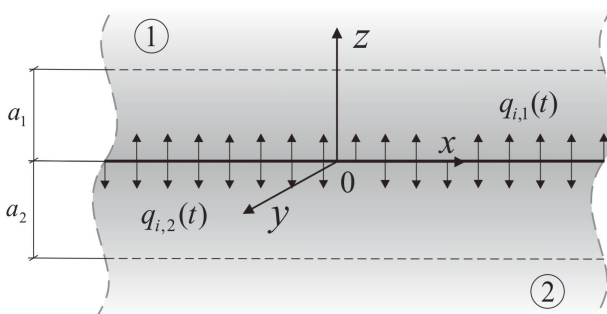
### 3. ZAGADNIENIE CIEPLNE TARCIA DLA UKŁADU DWÓCH PÓŁPRZESTRZENI (MODEL SPRZĘŻONY)

W poniższym rozdziale opracowano model analityczny do wyznaczenia trybu temperaturowego tarczowego układu hamulcowego. W tym celu sformułowano początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła dla dwóch półograniczonych ciał (półprzestrzeni) z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia. Dokładne rozwiązania zagadnienia otrzymano przy dziesięciu profilach czasowych gęstości mocy tarcia (tab. 1.1). Na podstawie uzyskanych nieustalonych pól temperatury znaleziono odpowiednie quasi-statyczne rozkłady naprężeń termicznych.

#### 3.1. Pola temperatury

##### 3.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzono układ dwóch półprzestrzeni, ślizgających się ze zmienną prędkością, odniesiony do współrzędnych kartezjańskich  $Oxyz$  (rys. 3.1). W chwili początkowej  $t = 0$  rozpoczyna się proces generacji ciepła tarciovego na powierzchni kontaktu  $z = 0$ . Założono, że tarciovą kontakt cieplny pomiędzy elementami jest idealny. Oznacza to, że temperatura powierzchni ciał jest jednakowa, a suma intensywności strumieni ciepła  $q_{i,l}(t)$ ,  $i = 1,2,\dots,10$ ,  $l = 1,2$  na powierzchni kontaktu, skierowanych wzdłuż normalnej  $Oz$  do wnętrza elementów, jest równa gęstości mocy tarcia  $q_i(t)$ ,  $i = 1,2,\dots,10$  (tab. 1.1). Proces nagrzewania trwa do chwili zatrzymania  $t = t_s$ . Temperatura początkowa układu jest stała i równa  $T_a$ .



Rysunek 3.1. Schemat zagadnienia

Rozkłady temperatury w górnej  $T_{i,1}(z,t)$ ,  $i = 1,2,\dots$  oraz dolnej  $T_{i,2}(z,t)$  półprzestrzeni zostaną wyznaczone z rozwiązania poniższego jednowymiarowego, początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 T_{i,1}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_1} \frac{\partial T_{i,1}(z,t)}{\partial t}, \quad z > 0, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 T_{i,2}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial T_{i,2}(z,t)}{\partial t}, \quad z > 0, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (3.1.2)$$

$$K_2 \frac{\partial T_{i,2}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - K_1 \frac{\partial T_{i,1}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = q_i(t), \quad 0 < t \leq t_s, \quad (3.1.3)$$

$$T_{i,1}(0,t) = T_{i,2}(0,t), \quad 0 < t \leq t_s, \quad (3.1.4)$$

$$T_{i,l}(z,t) \rightarrow T_a, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad 0 < t \leq t_s, \quad l = 1,2, \quad (3.1.5)$$

$$T_{i,l}(z,0) = 0, \quad |z| < \infty, \quad l = 1,2. \quad (3.1.6)$$

Zagadnienie początkowo-brzegowe (3.1.1)–(3.1.6) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\partial^2 T_{i,1}^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_{i,1}^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 T_{i,2}^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial T_{i,2}^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (3.1.8)$$

$$K^* \frac{\partial T_{i,2}^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - \frac{\partial T_{i,1}^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = q_i^*(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (3.1.9)$$

$$T_{i,1}^*(0,\tau) = T_{i,2}^*(0,\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (3.1.10)$$

$$T_{i,l}^*(\zeta,\tau) \rightarrow 0, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l = 1,2, \quad (3.1.11)$$

$$T_{i,l}^*(\zeta,0) = 0, \quad |\zeta| < \infty, \quad l = 1,2, \quad (3.1.12)$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{z}{a_1}, \tau = \frac{k_1 t}{a_1^2}, \tau_s = \frac{k_1 t_s}{a_1^2}, K^* = \frac{K_2}{K_1}, k^* = \frac{k_2}{k_1}, T_0 = \frac{q_0 a_1}{K_1}, T_{i,l}^* = \frac{T_{i,l} - T_a}{T_0}, \quad (3.1.13)$$

$a_l = \sqrt{3k_l t_s}$ ,  $l = 1, 2$  to efektywne głębokości przenikania ciepła (rys. 3.1) [28].

### 3.1.2. Rozwiązanie zagadnienia

Rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła (3.1.7)–(3.1.12) przy stałej gęstości mocy tarcia  $q_0^*(\tau) = 1$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$  ma postać [25]:

$$T_{0,l}^*(\zeta, \tau) = 2\gamma\sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2, \quad (3.1.14)$$

gdzie:

$$Z_l(\zeta, \tau) = \begin{cases} \frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}, & l = 1, \quad \zeta \geq 0, \\ -\frac{\zeta}{2\sqrt{k^* \tau}}, & l = 2, \quad \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

$$\gamma = \frac{1}{(1 + \varepsilon)}, \quad \varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}}. \quad (3.1.16)$$

Należy zaznaczyć, że parametr  $\gamma$  (3.1.16) to współczynnik rozdziału strumieni ciepła określony wzorem (1.3.56), a  $\varepsilon$  to współczynnik aktywności cieplnej materiału dolnej półprzestrzeni ( $l = 2$ ) względem materiału górnej ( $l = 1$ ) (1.3.55).

Rozwiązanie zagadnienia (3.1.7)–(3.1.12), otrzymane dzięki zastosowaniu twierdzenia Duhamela, przedstawiono w postaci [78]:

$$T_{i,l}^*(\zeta, \tau) = \int_0^{\tau} q_i^*(s) \frac{\partial}{\partial \tau} T_{0,i}^*(\zeta, \tau - s) ds, \quad |\zeta| < \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (3.1.17)$$

Uwzględniając w rozwiązaniu (3.1.17) postacie funkcji  $T_{0,i}^*(\zeta, \tau)$  (3.1.14) i  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (tab. 1.1) oraz pochodnej cząstkowej [3]

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_{0,i}^*(\zeta, \tau - s) = \gamma \frac{\exp[-Z_l^2(\zeta, \tau - s)]}{\sqrt{\pi(\tau - s)}}, \quad (3.1.18)$$

poszukiwane pola bezwymiarowej temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $|\zeta| < \infty$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$  zapisano w postaci:

$$T_{1,l}^*(\zeta, \tau) = 2\gamma[I_l^{(0)}(\zeta, \tau) - I_l^{(1)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.19)$$

$$T_{2,l}^*(\zeta, \tau) = 2\gamma I_l^{(1)}(\zeta, \tau), \quad (3.1.20)$$

$$T_{3,l}^*(\zeta, \tau) = 1,5\gamma[I_l^{(0)}(\zeta, \tau) - 0,5I_l^{(1)}(\zeta, \tau) - 0,125I_l^{(2)}(\zeta, \tau) - 0,0625I_l^{(3)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.21)$$

$$T_{4,l}^*(\zeta, \tau) = 1,5\gamma I_l^{(0,5)}(\zeta, \tau), \quad (3.1.22)$$

$$T_{5,l}^*(\zeta, \tau) = 3\gamma[I_l^{(0)}(\zeta, \tau) - 2I_l^{(1)}(\zeta, \tau) + I_l^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.23)$$

$$T_{6,l}^*(\zeta, \tau) = 3\gamma I_l^{(2)}(\zeta, \tau), \quad (3.1.24)$$

$$T_{7,l}^*(\zeta, \tau) = 6\gamma[I_l^{(1)}(\zeta, \tau) - I_l^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.25)$$

$$T_{8,l}^*(\zeta, \tau) = 1,2\gamma[I_l^{(0)}(\zeta, \tau) + I_l^{(1)}(\zeta, \tau) - 2I_l^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.26)$$

$$T_{9,l}^*(\zeta, \tau) = 1,2\gamma[3I_l^{(1)}(\zeta, \tau) - 2I_l^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.27)$$

$$T_{10,l}^*(\zeta, \tau) = 6\gamma[I_l^{(0,5)}(\zeta, \tau) - I_l^{(1)}(\zeta, \tau)], \quad (3.1.28)$$

gdzie:

$$I_l^{(n)}(\zeta, \tau) = \int_0^\tau \frac{\exp[-Z_l^2(\zeta, \tau - s)]}{\sqrt{\pi(\tau - s)}} \left(\frac{s}{\tau_s}\right)^n ds, \quad l = 1, 2, \quad n = 0; 0,5; 1; 2; 3. \quad (3.1.29)$$

Przy otrzymywaniu wzoru (3.1.21) dodatkowo skorzystano z aproksymacji (2.1.15) funkcji  $q_3^*(\tau)$ . Stosując podstawienie  $x = 1/\sqrt{\tau - s}$ , całki (3.1.29) zapisa-  
no w postaci:

$$I_l^{(0)}(\zeta, \tau) = J_l^{(2)}(\zeta, \tau), \quad (3.1.30)$$

$$I_l^{(0,5)}(\zeta, \tau) = \sqrt{\tau^*} M_l(\zeta, \tau), \quad (3.1.31)$$

$$I_l^{(1)}(\zeta, \tau) = \tau^* J_l^{(2)}(\zeta, \tau) - J_l^{(4)}(\zeta, \tau) / \tau_s, \quad (3.1.32)$$

$$I_l^{(2)}(\zeta, \tau) = \tau^{*2} J_l^{(2)}(\zeta, \tau) - 2\tau^* J_l^{(4)}(\zeta, \tau) / \tau_s + J_l^{(6)}(\zeta, \tau) / \tau_s^2, \quad (3.1.33)$$

$$I_l^{(3)}(\zeta, \tau) = \tau^{*3} J_l^{(2)}(\zeta, \tau) - 3\tau^{*2} J_l^{(4)}(\zeta, \tau) / \tau_s + 3\tau^* J_l^{(6)}(\zeta, \tau) / \tau_s^2 - J_l^{(8)}(\zeta, \tau) / \tau_s^3, \quad (3.1.34)$$

gdzie:

$$J_l^{(n)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\sqrt{\tau}}^{\infty} x^{-n} \exp[-\tau Z_l^2(\zeta, \tau)x] dx, \quad l=1,2, \quad n=2,4,6,8, \quad (3.1.35)$$

$$M_l(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\tau}^{\infty} x^{-2} \sqrt{x-\tau^{-1}} \exp[-\tau Z_l^2(\zeta, \tau)x] dx, \quad l=1,2, \quad (3.1.36)$$

a parametr  $\tau^*$  określony jest wzorem (2.1.42).

Całki (3.1.35) obliczono za pomocą wzoru rekurencyjnego [98]:

$$J_l^{(n)}(\zeta, \tau) = \tau \{ \sqrt{\tau^{n-3}} \exp[-Z_l^2(\zeta, \tau)] - 2Z_l^2(\zeta, \tau) J_l^{(n-2)}(\zeta, \tau) \} / (n-1), \quad l=1,2, \quad n=4,6,8, \quad (3.1.37)$$

$$J_l^{(2)}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad l=1,2. \quad (3.1.38)$$

Podstawiając znalezione w ten sposób funkcje  $J_l^{(n)}(\zeta, \tau)$  (3.1.37), (3.1.38) do prawych stron wzorów (3.1.30), (3.1.32)–(3.1.34), otrzymano:

$$I_l^{(0)}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad (3.1.39)$$

$$I_l^{(1)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \}, \quad (3.1.40)$$

$$I_l^{(2)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{15} \sqrt{\tau} \tau^{*2} \{ [8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) [7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \}, \quad (3.1.41)$$

$$I_l^{(3)}(\zeta, \tau) = \frac{2}{105} \sqrt{\tau} \tau^{*3} \{ [48 + 174Z_l^2(\zeta, \tau) + 80Z_l^4(\zeta, \tau) + 8Z_l^6(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) [57 + 36Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \}. \quad (3.1.42)$$

Całkowanie przez części we wzorze (3.1.36) daje:

$$M_l(\zeta, \tau) = 0,5M_l^{(0)}(\zeta, \tau) - \tau Z_l^2(\zeta, \tau) M_l^{(1)}(\zeta, \tau), \quad l=1,2, \quad (3.1.43)$$



gdzie:

$$M_l^{(n)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\tau}^{\infty} x^{-1} (x - \tau^{-1})^{n-1/2} \exp[-\tau Z_l^2(\zeta, \tau) x] dx, \quad n=0,1. \quad (3.1.44)$$

Za pomocą wzoru [98]

$$\int_u^{\infty} x^{-1} (x-u)^{\nu} e^{-\mu x} dx = u^{\nu} \Gamma(\nu+1) \Gamma(-\nu; \mu u), \quad u > 0, \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} \mu > 0 \quad (3.1.45)$$

całki (3.1.44) zapisano w postaci:

$$M_l^{(n)}(\zeta, \tau) = \tau^{1/2-n} \Gamma(0,5+n) \Gamma[0,5-n; Z_l^2(\zeta, \tau)] / \sqrt{\pi}, \quad l=1,2, \quad n=0,1. \quad (3.1.46)$$

Uwzględniając zależności (2.1.37) oraz [3]

$$\Gamma[0,5; Z_l^2(\zeta, \tau)] = \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \quad \text{i} \quad (3.1.47)$$

$$\Gamma[-0,5; Z_l^2(\zeta, \tau)] = 2\sqrt{\pi} [Z_l(\zeta, \tau)]^{-1} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad (3.1.48)$$

ze wzoru (3.1.46) otrzymano:

$$M_l^{(0)}(\zeta, \tau) = \sqrt{\pi\tau} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad M_l^{(1)}(\zeta, \tau) = \sqrt{\pi} [\sqrt{\tau} Z_l(\zeta, \tau)]^{-1} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad l=1,2. \quad (3.1.49)$$

Podstawiając funkcję  $M_l^{(n)}(\zeta, \tau)$  (3.1.49) do równości (3.1.43), zapisano:

$$M_l(\zeta, \tau) = 0,5\sqrt{\pi\tau} [\operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - 2Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau)], \quad l=1,2. \quad (3.1.50)$$

Uwzględniając postać funkcji  $M_l(\zeta, \tau)$  (3.1.50) we wzorze (3.1.30), wyznaczono:

$$I_l^{(0,5)}(\zeta, \tau) = 0,5\sqrt{\pi\tau\tau^*} [\operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - 2Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau)], \quad l=1,2. \quad (3.1.51)$$

Znając funkcje  $I_l^{(n)}(\zeta, \tau)$ ,  $l=1,2$ ,  $n=0;0,5;1;2;3$  (3.1.39)–(3.1.42), (3.1.51), ze wzorów (3.1.19)–(3.1.27) wyznaczono pola bezwymiarowej temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i=1,2, \dots, 10$ ,  $l=1,2$  w postaci:

$$T_{1,l}^*(\zeta, \tau) = \frac{4}{3} \gamma \sqrt{\tau\tau^*} \left\{ \left[ \frac{3}{\tau^*} - 2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \right] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) + Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\}, \quad (3.1.52)$$

$$T_{2,l}^*(\zeta, \tau) = \frac{4}{3} \gamma \sqrt{\tau\tau^*} \{ 2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \}, \quad (3.1.53)$$

$$\begin{aligned}
T_{3,l}^*(\zeta, \tau) = & \gamma \sqrt{3\sqrt{\tau}} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - \frac{\sqrt{\tau} \tau^*}{2} \{2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\} - \\
& - \frac{\sqrt{\tau} \tau^{*2}}{40} \{[8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\} - \\
& - \frac{\sqrt{\tau} \tau^{*3}}{560} \{48 + 174Z_l^2(\zeta, \tau) + 80Z_l^4(\zeta, \tau) + 8Z_l^6(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[57 + 36Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{3.1.54}$$

$$T_{4,l}^*(\zeta, \tau) = \frac{3}{4} \gamma \sqrt{\pi \tau \tau^*} [\operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - 2Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau)], \tag{3.1.55}$$

$$\begin{aligned}
T_{5,l}^*(\zeta, \tau) = & 2\gamma \sqrt{\tau} \{3 \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - 2\tau^* \{2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\} + \\
& + 0,2\tau^{*2} \{[8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{3.1.56}$$

$$\begin{aligned}
T_{6,l}^*(\zeta, \tau) = & \frac{2}{5} \gamma \sqrt{\tau} \tau^{*2} \{[8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{3.1.57}$$

$$\begin{aligned}
T_{7,l}^*(\zeta, \tau) = & 4\gamma \sqrt{\tau} \tau^* \{2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\} - \\
& - 0,2\tau^* \{[8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{3.1.58}$$

$$\begin{aligned}
T_{8,l}^*(\zeta, \tau) = & \frac{4}{5} \gamma \sqrt{\tau} \{3 \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) + \tau^* \{2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\} - \\
& - 0,4\tau^{*2} \{[8 + 18Z_l^2(\zeta, \tau) + 4Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\
& - Z_l(\zeta, \tau)[7 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)\},
\end{aligned} \tag{3.1.59}$$

$$T_{9,l}^*(\zeta, \tau) = \frac{4}{5} \gamma \sqrt{\tau} \tau^* \left\{ 3 \{ 2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \} - \right. \\ \left. - 0,4 \tau^* \{ [8 + 18 Z_l^2(\zeta, \tau) + 4 Z_l^4(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \right. \\ \left. - Z_l(\zeta, \tau) [7 + 2 Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \} \right\}, \quad (3.1.60)$$

$$T_{10,l}^*(\zeta, \tau) = \gamma \tau^* \left\{ 3 \sqrt{\pi \tau_s} [\operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - 2 Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau)] - \right. \\ \left. - 4 \sqrt{\tau} \{ 2[1 + Z_l^2(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \} \right\}, \quad (3.1.61)$$

gdzie funkcje  $Z_l(\zeta, \tau)$ ,  $l = 1, 2$  są określone zależnością (3.1.15).

### 3.1.3. Intensywności strumieni ciepła

Intensywności strumieni ciepła wnikających do elementów pary ciernej wyznaczono według prawa Fouriera:

$$q_{i,l}(z, t) = (-1)^l K_l \frac{\partial T_{i,l}(z, t)}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad l = 1, 2. \quad (3.1.62)$$

Uwzględniając oznaczenia (3.1.13), równość (3.1.62) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$q_{i,l}^*(\zeta, \tau) = \frac{q_{i,l}(z, t)}{q_0} = \begin{cases} -\frac{\partial T_{i,1}^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, & \zeta \geq 0, 0 \leq \tau \leq \tau_s, \\ K^* \frac{\partial T_{i,2}^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}, & \zeta \leq 0, 0 \leq \tau \leq \tau_s. \end{cases} \quad (3.1.63)$$

Podstawiając do wzorów (3.1.63) bezwymiarowe temperatury (3.1.52)–(3.1.61) i różniczkując, otrzymano:

$$q_{1,l}^*(\zeta, \tau) = 2\eta_l [2\tau^* Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) + (1 - \tau^*) \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau)], \quad (3.1.64)$$

$$q_{2,l}^*(\zeta, \tau) = 2\eta_l \tau^* [\operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - 2Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau)], \quad (3.1.65)$$

$$q_{l,3}^*(\zeta, \tau) = \eta_l \left\langle \tau^{*2} \left\{ \frac{1}{8} [5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] + \frac{\tau^*}{280} [117 + 98Z_l^2(\zeta, \tau) + 14Z_l^4(\zeta, \tau)] \right\} \times \right. \\ \left. \times Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) + \frac{3}{2} \left\{ 1 - \tau^* [0,5 - Z_l(\zeta, \tau)] - \frac{\tau^{*2}}{24} [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\tau^{*3}}{1680} [105 + 168Z_l^2(\zeta, \tau) + 28Z_l^4(\zeta, \tau)] \right\} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\rangle, \quad (3.1.66)$$

$$q_{4,l}^*(\zeta, \tau) = 1,5\eta_l \sqrt{\pi\tau^*} \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad (3.1.67)$$

$$q_{l,5}^*(\zeta, \tau) = \eta_l \left\langle \{3(1 - 2\tau^*) + \tau^{*2} [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - \right. \\ \left. - 2\tau^* \{6 - \tau^* [5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\rangle, \quad (3.1.68)$$

$$q_{6,l}^*(\zeta, \tau) = \eta_l \tau^{*2} \{ [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] \} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - \\ - 2[5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)] Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau), \quad (3.1.69)$$

$$q_{7,l}^*(\zeta, \tau) = \eta_l \tau^* \left\langle \{6 - 2\tau^* [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - \right. \\ \left. - 4\{3 - \tau^* [5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\rangle, \quad (3.1.70)$$

$$q_{8,l}^*(\zeta, \tau) = 0,4\eta_l \left\langle \{3(1 + \tau^*) - 2\tau^{*2} [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - \right. \\ \left. - 2\tau^* \{3 - 2\tau^* [5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\rangle, \quad (3.1.71)$$

$$q_{9,l}^*(\zeta, \tau) = 0,4\eta_l \tau^* \left\langle \{9 - 2\tau^* [3 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) - \right. \\ \left. - 2\{9 - 2\tau^* [5 + 2Z_l^2(\zeta, \tau)]\} Z_l(\zeta, \tau) \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) \right\rangle, \quad (3.1.72)$$

$$q_{10,l}^*(\zeta, \tau) = 6\eta_l \sqrt{\tau^*} \{ [\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\tau^*} Z_l(\zeta, \tau)] \operatorname{ierfc} Z_l(\zeta, \tau) - \sqrt{\tau^*} \operatorname{erfc} Z_l(\zeta, \tau) \}, \quad (3.1.73)$$

gdzie:

$$\eta_l = \gamma, \quad \eta_2 = \varepsilon\gamma, \quad l = 1, 2, \quad (3.1.74)$$

a współczynniki  $\varepsilon$  i  $\gamma$  dane są wzorami (3.1.16).

Na powierzchni kontaktu  $\zeta = 0$ , jak wynika ze wzorów (3.1.64)–(3.1.74),  $q_{i,l}^*(0, \tau) = \eta_l q_i^*(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ ,  $l = 1, 2$ , w przypadku których postaci bezwymiarowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  zamieszczono w tabeli 1.1. Stąd otrzymano, że  $q_{i,1}(0, \tau) + q_{i,2}(0, \tau) = q_i^*(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ , co oznacza spełnienie przez rozwiązania (3.1.52)–(3.1.61) warunku brzegowego (3.1.9). Oprócz tego wywnioskowano, że współczynniki  $\eta_l$ ,  $l = 1, 2$  (3.1.74) charakteryzują rozdzielanie strumienia ciepła pomiędzy elementami pary ciernej w postaci zaproponowanej przez Charrona [26]:

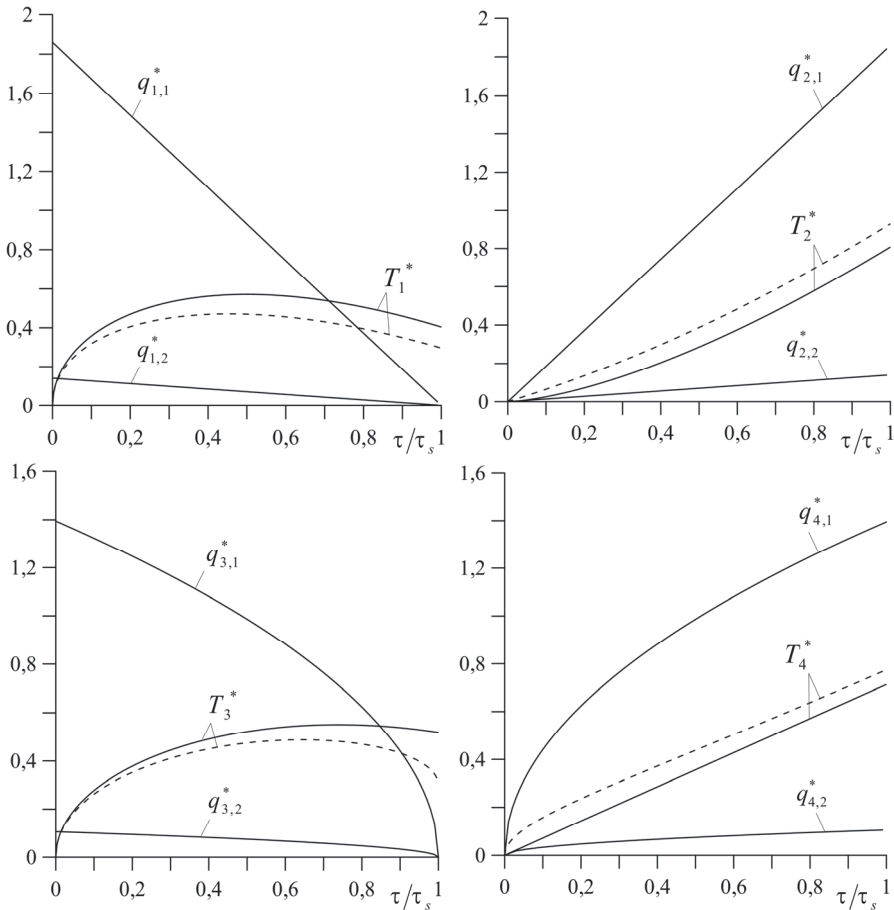
$$\eta_1 \equiv \frac{q_{i,1}^*(0, \tau)}{q_i^*(\tau)} = \frac{1}{(1 + \varepsilon)}, \quad \eta_2 = 1 - \eta_1 \equiv \frac{q_{i,2}^*(0, \tau)}{q_i^*(\tau)} = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)}, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (3.1.75)$$

### 3.1.4. Analiza numeryczna

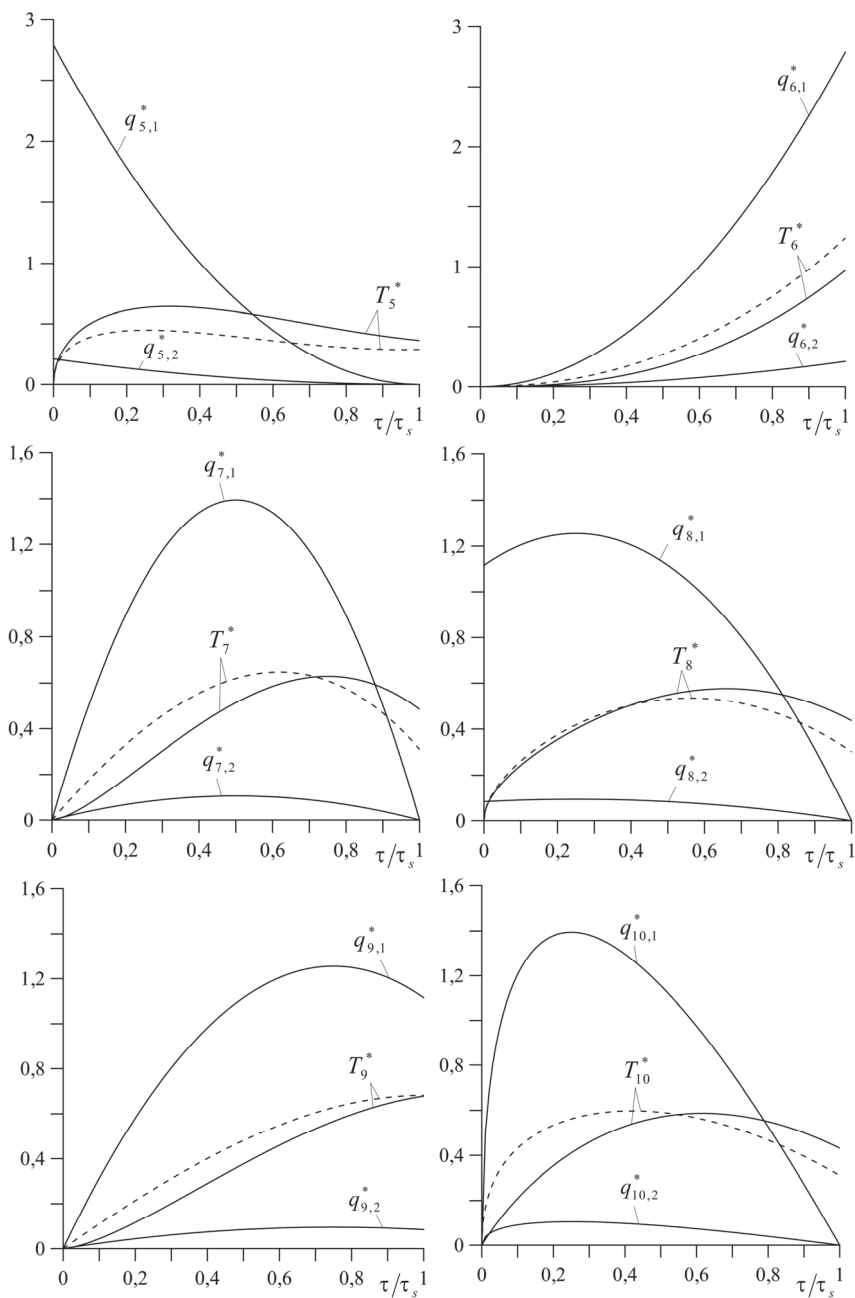
Analizę numeryczną przeprowadzono dla typowych materiałów stosowanych w tarczowych układach hamulcowych. Przyjęto, że tarcza (górną półprzestrzeń,  $l = 1$ ) jest żeliwna ChNMKh ( $K_1 = 51 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $k_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ), a nakładka (dolną półprzestrzeń,  $l = 2$ ) jest wykonana z retinaksu FM-16L ( $K_2 = 0,65 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $k_2 = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) [33]. Dla powyższych materiałów obliczono wartości współczynnika aktywności cieplnej  $\varepsilon = 0,0754$  (3.1.16) oraz współczynników rozdzielania strumieni ciepła  $\eta_1 = 0,93$ ,  $\eta_2 = 0,07$  (3.1.75). Wartość parametru  $a$ , wykorzystywanego przy wprowadzaniu bezwymiarowych zmiennych we wzorach (3.1.13), przyjęto równą efektywnej głębokości przenikania ciepła do górnej półprzestrzeni  $a_1$ . Wtedy  $a_1^* = 1$ ,  $a_2^* = a_2 / a_1 = \sqrt{k^*} = 0,169$ , a bezwymiarowy czas hamowania równy jest  $\tau_s = 0,33$ . Niezależnymi bezwymiarowymi zmiennymi do przeprowadzenia obliczeń są współrzędna przestrzenna  $\zeta$  oraz czas  $\tau$  (3.1.13).

Zmianę bezwymiarowej temperatury na powierzchni kontaktu  $T_i^*(0, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (3.1.52)–(3.1.61) oraz intensywności strumieni ciepła  $q_{i,l}^*(0, \tau) = \eta_l q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$  na tej powierzchni oznaczono krzywymi ciągłymi na rysunkach 3.2 i 3.3. Odpowiednie rezultaty, otrzymane z rozwiązania przybliżonego (1.3.42), (1.3.43), oznaczono na tym samym wykresie liniami przerywanymi. Charakter przebiegu czasowego intensywności strumieni ciepła  $q_{i,l}^*(0, \tau)$ ,  $l = 1, 2$  jest taki sam jak odpowiadających im profili gęstości mocy tarcia, ponieważ wielkości te, jak wynika ze wzoru (3.1.75), są wprost proporcjonalne. Z wartości współczynników proporcjonalności  $\eta_l$  obliczonych dla wybranej pary ciernej wynika, że do żeliwnej tarczy skierowane jest 93% generowanego na powierzchni

kontaktu ciepła, a do nakładki z retinaksu pozostałe 7%. Dlatego ewolucje intensywności strumienia ciepła  $q_{i,l}^*(0, \tau)$  na powierzchni ciernej tarczy (rys. 3.2 i 3.3) prawie zbiegają się z profilami czasowymi gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  (rys. 1.1) i również można wyodrębnić z nich trzy grupy.



Rysunek 3.2. Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T_i^*$  i intensywności strumieni ciepła  $q_{i,l}^*$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $l = 1, 2$  na powierzchni kontaktu  $\zeta = 0$ ; linie ciągłe – rezultaty otrzymane na podstawie rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego



Rysunek 3.3. Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T_i^*$  i intensywności strumieni ciepła  $q_{i,l}^*$ ,  $i=5,6,\dots,10$ ,  $l=1,2$  na powierzchni kontaktu  $\zeta=0$ ; linie ciągłe – rezultaty otrzymane na podstawie rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego

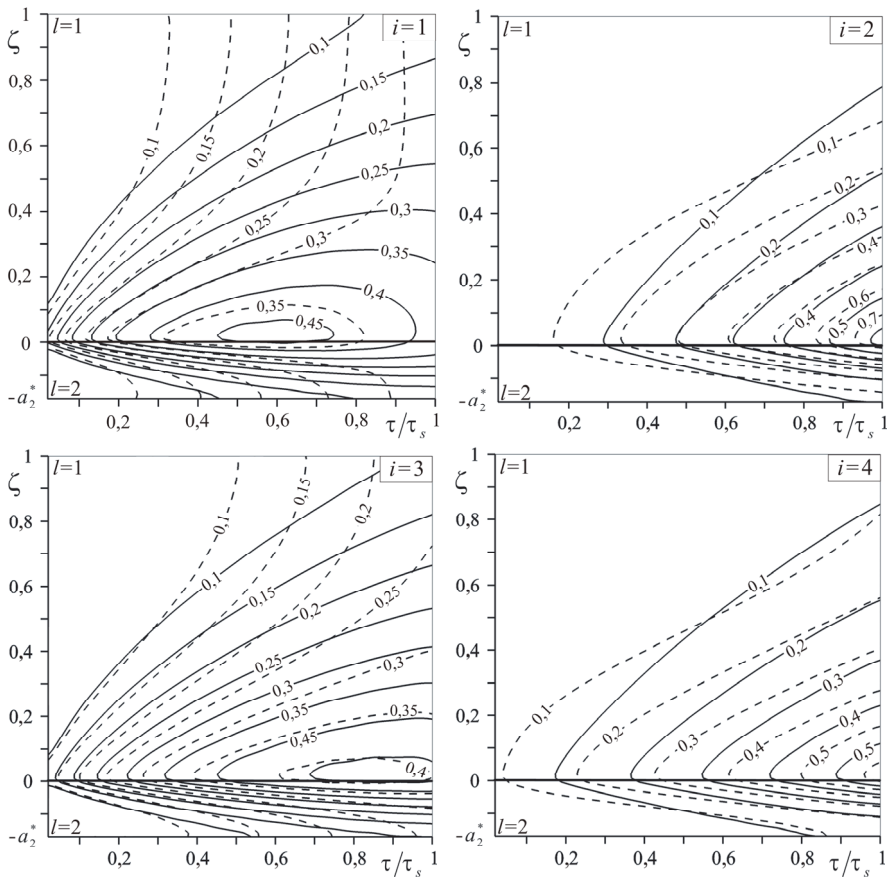
Do pierwszej grupy należą przebiegi czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 3, 5$ , które charakteryzują się monotonicznym zmniejszeniem ich wartości w czasie hamowania. Odpowiadające tym profilom krzywe, reprezentujące ewolucje bezwymiarowej temperatury powierzchniowej, gwałtownie narastają w czasie, osiągając wartości maksymalne  $T_{i, \max}^* = 0,57; 0,55; 0,65$  odpowiednio w chwilach  $\tau = 0,5\tau_s; 0,74\tau_s; 0,32\tau_s$  przy  $i = 1, 3, 5$ . Następnie temperatura powierzchni ciernych maleje do wartości  $T_i^* = 0,40; 0,52; 0,36$ ,  $i = 1, 3, 5$  w chwili zatrzymania  $\tau = \tau_s$ . Odpowiednie ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T_i^*$ ,  $i = 1, 3, 5$ , znalezione na podstawie rozwiązania przybliżonego (1.3.42), (1.3.43), są jakościowo zbliżone do rozwiązań dokładnych. Pod względem ilościowym rozwiązanie przybliżone daje заниżone wartości temperatury (maksymalnie około 39% dla  $i = 3$ ) w porównaniu z wartościami otrzymanymi z rozwiązań dokładnych.

Drugą grupę stanowią funkcje  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 2, 4, 6$ , rosnące monotonicznie od zera w chwili początkowej do wartości maksymalnej w chwili zatrzymania. Wspomniane procesy charakteryzują się tym, że temperatura również monotonicznie wzrasta w czasie hamowania, osiągając maksymalne wartości  $T_{i, \max}^* = 0,81; 0,71; 0,97$   $i = 2, 4, 6$  w chwili zakończenia procesu. Przebieg czasowy temperatury obliczonej za pomocą rozwiązania przybliżonego jest zbliżony do odpowiadających im rezultatów otrzymanych z rozwiązań dokładnych. Natomiast ilościowo rozwiązanie przybliżone zawyża temperaturę (maksymalnie o około 28% dla  $i = 6$ ) w stosunku do wartości ustalonych na podstawie rozwiązań dokładnych.

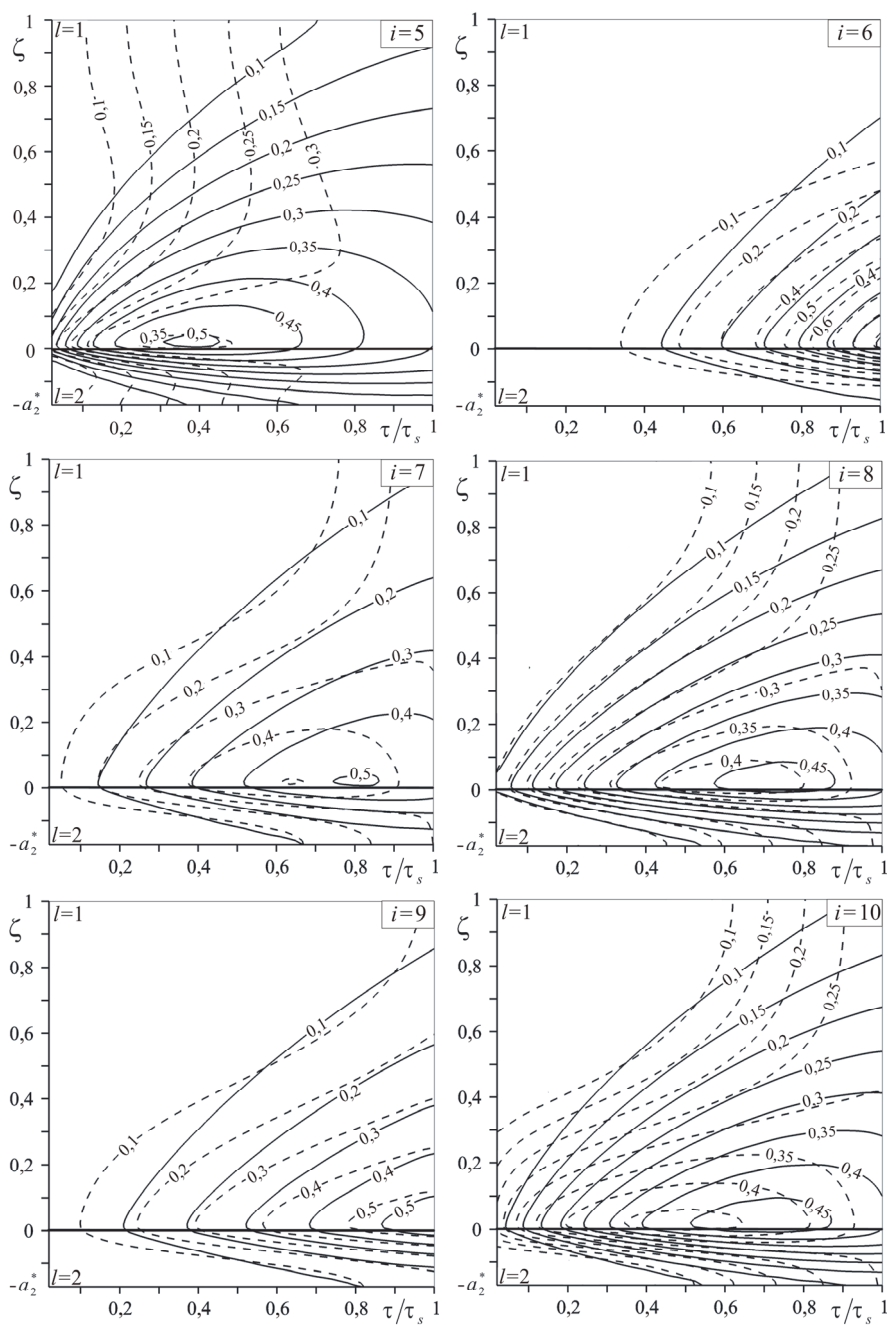
Do trzeciej grupy należą profile czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 7, 8, 9, 10$  posiadające maksimum lokalne wewnątrz czasowego przedziału hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ . Bezwymiarowa temperatura  $T_i^*(\tau)$ ,  $i = 7, 8, 10$  rośnie w początkowym etapie hamowania, osiągając wartości maksymalne  $T_{i, \max}^* = 0,63; 0,58; 0,59$  odpowiednio w chwilach  $\tau = 0,75\tau_s; 0,66\tau_s; 0,62\tau_s$ . Następnie temperatura powierzchni kontaktu obniża się aż do zakończenia procesu hamowania. Krzywa temperaturowa  $T_9^*(\tau)$  natomiast monotonicznie rośnie podczas hamowania do wartości maksymalnej  $T_{9, \max}^* = 0,68$ , osiąganą w chwili zatrzymania. W tej grupie różnice pomiędzy rezultatami otrzymanymi z wykorzystaniem rozwiązań dokładnych i przybliżonego są najbardziej widoczne. Na etapie zwiększenia temperatury jej wartości otrzymane z rozwiązania przybliżonego przy  $i = 7, 8, 10$  są wyższe niż odpowiadające im wartości znalezione za pomocą rozwiązań dokładnych. Natomiast na etapie chłodzenia odpowiednie wartości przybliżone temperatury są niższe od dokładnych. W przypadku  $i = 9$  temperatura wyznaczona z rozwiązania przybliżonego jest zawyżona w stosunku do temperatury obliczonej z rozwiązania dokładnego przez cały czas trwania procesu hamowania.



Izolinie bezwymiarowej temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$ , obliczone na podstawie dokładnych (3.1.52)–(3.1.61) (linie ciągłe) oraz przybliżonych (1.3.42), (1.3.43) (linie przerywane) rozwiązań, zaprezentowano na rysunkach 3.4 i 3.5. Wpływ gęstości mocy tarcia na rozkład temperatury w tarczy jest o wiele większy niż w nakładce, co jest spowodowane tym, że retinaks jest znacznie gorszym przewodnikiem ciepła w porównaniu do żeliwa. Stąd efektywna głębokość przenikania ciepła do nakładki ( $a_2^* = 0,169$ ) jest o wiele mniejsza niż odpowiadająca jej głębokość dla tarczy ( $a_1^* = 1$ ) (rys. 3.4 i 3.5).



Rysunek 3.4. Izolinie bezwymiarowej temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i=1,2,3,4$ ,  $l=1,2$ ; linie ciągłe – wyniki otrzymane z rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego



Rysunek 3.5. Izolinie bezwymiarowej temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 5, 6, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$ ; linie ciągłe – wyniki otrzymane z rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego

Przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury w tarczy są zdeterminowane przez charakter zmian gęstości mocy tarcia w czasie hamowania. Największe zagęszczenie izoterm wewnątrz tarczy występuje w pobliżu ogrzewanej powierzchni, gdzie osiągnięte jest maksimum temperaturowe. W przypadku pierwszej z wyróżnionych wcześniej trzech grup profili  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1,3,5$  wraz z początkiem hamowania tarcza jest nagrzewana na całej grubości efektywnej, a obniżenie temperatury wraz z oddaleniem od powierzchni kontaktu w głąb elementu ma charakter nieliniowy. Inny jest natomiast rozkład izoterm wewnątrz tarczy w przypadkach  $i = 2,4,6$ , kiedy moc tarcia monotonicznie narasta w procesie hamowania. Tarcza nie nagrzewa się na całej grubości efektywnej, a spadek temperatury przy zwiększeniu odległości od powierzchni ciernej jest prawie liniowy. W przypadku trzeciej grupy profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 7,8,9,10$  tarcza jest nagrzewana do efektywnej głębokości przenikania ciepła tylko dla  $i = 8,10$ . Różnice pomiędzy temperaturą obliczoną za pomocą rozwiązań dokładnych (3.1.52)–(3.1.61) i przybliżonych (1.3.42), (1.3.43) zwiększają się wraz z oddaleniem od powierzchni kontaktu. Przy czym w odróżnieniu od ewolucji tych temperatur na powierzchni ciernej (rys. 3.2 i 3.3) ich zmiany w czasie na ustalonej głębokości wewnątrz tarczy różnią się nie tylko ilościowo, ale i wyraźnie jakościowo (rys. 3.4 i 3.5).

## 3.2. Naprężenia termiczne

W niniejszym podrozdziale wyznaczono przestrzenno-czasowe rozkłady quasi-statycznych naprężeń termicznych w elementach pary ciernej spowodowanych niejednorodnością pól temperatury  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1,2,\dots,10$ ,  $l = 1,2$ , (3.1.52)–(3.1.61). W tym celu, podobnie jak w podrozdziale 2.2, skorzystano z modelu temperaturowego zginania grubej warstwy ze swobodnymi brzegami [87, 112].

### 3.2.1. Rozwiązanie zagadnienia

Zgodnie z przyjętym modelem w każdym punkcie przypowierzchniowych warstw  $0 \leq z \leq a_1$  w nakładce oraz  $-a_2 \leq z \leq 0$  w tarczy (rys. 3.1) w kierunkach  $Ox$  i  $Oy$  działają jednakowe, niezerowe normalne naprężenia termiczne:

$$\sigma_{i,l}(z, t) = \sigma_{0,l} \sigma_{i,l}^*(\zeta, \tau), \quad -a_2 \leq z \leq a_1, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (3.2.1)$$

gdzie:

$$\sigma_{0,l} = \frac{\alpha_l E_l T_0}{1 - \nu_l}, \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_{i,l}^*(\zeta, \tau) = \varepsilon_{i,l}^*(\zeta, \tau) - T_{i,l}^*(\zeta, \tau), \quad a_2^* \leq \zeta \leq a_1^*, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (3.2.3)$$

$$\varepsilon_{i,l}^*(\zeta, \tau) = [(-1)^{l+1} 4 - 6\zeta] M_{i,l}^{(0)}(\tau) + [(-1)^{l+1} 12\zeta - 6] M_{i,l}^{(1)}(\tau), \quad (3.2.4)$$

$$M_{i,l}^{(m)}(\tau) = \int_0^{a_i^*} \zeta^m T_{i,l}^*(\zeta, \tau) d\zeta, \quad a_i^* = (-1)^{l+1} a_l / a_1, \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad l = 1, 2, \quad m = 0, 1. \quad (3.2.5)$$

Podstawiając bezwymiarową temperaturę  $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$  (3.1.52)–(3.1.61) do wzorów (3.2.5), otrzymano:

$$M_{1,l}^{(m)}(\tau) = \frac{4}{3} \gamma \sqrt{\tau} \tau^* X_l^{m+1}(\tau) \{ [3 / \tau^* - 2] I_l^{(m)}(\tau) - 2 I_l^{(m+2)}(\tau) + J_l^{(m+1)}(\tau) \}, \quad (3.2.6)$$

$$M_{2,l}^{(m)}(\tau) = \frac{4}{3} \gamma \sqrt{\tau} \tau^* X_l^{m+1}(\tau) \{ 2 [I_l^{(m)}(\tau) + I_l^{(m+2)}(\tau)] - J_l^{(m+1)}(\tau) \}, \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} M_{3,l}^{(m)}(\tau) = & \gamma X_l^{m+1}(\tau) \{ 3 \sqrt{\tau} I_l^{(m)}(\tau) - 0,5 \sqrt{\tau} \tau^* \{ 2 [I_l^{(m)}(\tau) + I_l^{(m+2)}(\tau)] - J_l^{(m+1)}(\tau) \} - \\ & - \frac{\sqrt{\tau} \tau^{*2}}{40} \{ 8 I_l^{(m)}(\tau) + 18 I_l^{(m+2)}(\tau) + 4 I_l^{(m+4)}(\tau) - 7 J_l^{(m+1)}(\tau) - 2 J_l^{(m+3)}(\tau) \} - \\ & - \frac{\sqrt{\tau} \tau^{*3}}{560} \{ 48 I_l^{(m)}(\tau) + 174 I_l^{(m+2)}(\tau) + 80 I_l^{(m+4)}(\tau) + \\ & + 8 I_l^{(m+6)}(\tau) - 57 J_l^{(m+1)}(\tau) - 36 J_l^{(m+3)}(\tau) - 4 J_l^{(m+5)}(\tau) \} \}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$M_{4,l}^{(m)}(\tau) = 0,75 \gamma \sqrt{\pi \tau_s} \tau^* X_l^{m+1}(\tau) [J_l^{(m)}(\tau) - 2 I_l^{(m+1)}(\tau)], \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} M_{5,l}^{(m)}(\tau) = & 2 \gamma \sqrt{\tau} X_l^{m+1}(\tau) \{ 3 I_l^{(m)}(\tau) - 2 \tau^* [2 I_l^{(m)}(\tau) + 2 I_l^{(m+2)}(\tau) - J_l^{(m+1)}(\tau)] + \\ & + 0,2 \tau^{*2} [8 I_l^{(m)}(\tau) + 18 I_l^{(m+2)}(\tau) + 4 I_l^{(m+4)}(\tau) - 7 J_l^{(m+1)}(\tau) - 2 J_l^{(m+3)}(\tau)] \}, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} M_{6,l}^{(m)}(\tau) = & 0,4 \gamma \sqrt{\tau} \tau^{*2} X_l^{m+1}(\tau) [8 I_l^{(m)}(\tau) + 18 I_l^{(m+2)}(\tau) + \\ & + 4 I_l^{(m+4)}(\tau) - 7 J_l^{(m+1)}(\tau) - 2 J_l^{(m+3)}(\tau)], \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} M_{7,l}^{(m)}(\tau) = & 4 \gamma \sqrt{\tau} \tau^* X_l^{m+1}(\tau) \{ [2 I_l^{(m)}(\tau) + 2 I_l^{(m+2)}(\tau) - J_l^{(m+1)}(\tau)] - \\ & - 0,2 \tau^* [8 I_l^{(m)}(\tau) + 18 I_l^{(m+2)}(\tau) + 4 I_l^{(m+4)}(\tau) - 7 J_l^{(m+1)}(\tau) - 2 J_l^{(m+3)}(\tau)] \}, \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} M_{8,l}^{(m)}(\tau) = & 0,8 \gamma \sqrt{\tau} X_l^{m+1}(\tau) \{ 3 I_l^{(m)}(\tau) + \tau^* [2 I_l^{(m)}(\tau) + 2 I_l^{(m+2)}(\tau) - J_l^{(m+1)}(\tau)] - \\ & - 0,4 \tau^{*2} [8 I_l^{(m)}(\tau) + 18 I_l^{(m+2)}(\tau) + 4 I_l^{(m+4)}(\tau) - 7 J_l^{(m+1)}(\tau) - 2 J_l^{(m+3)}(\tau)] \}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$M_{9,l}^{(m)}(\tau) = 0,8\gamma\sqrt{\tau} \tau^* X_l^{m+1}(\tau) \{3[2I_l^{(m)}(\tau) + 2I_l^{(m+2)}(\tau) - J_l^{(m+1)}(\tau)] - 0,4\tau^*[8I_l^{(m)}(\tau) + 18I_l^{(m+2)}(\tau) + 4I_l^{(m+4)}(\tau) - 7J_l^{(m+1)}(\tau) - 2J_l^{(m+3)}(\tau)]\}, \quad (3.2.14)$$

$$M_{10,l}^{(m)}(\tau) = \gamma\tau^* X_l^{m+1}(\tau) \{3\sqrt{\pi\tau_s}[J_l^{(m)}(\tau) - 2I_l^{(m+1)}(\tau)] - 4\sqrt{\tau}[2I_l^{(m)}(\tau) + 2I_l^{(m+2)}(\tau) - J_l^{(m+1)}(\tau)]\}, \quad (3.2.15)$$

gdzie:

$$I_l^{(k)}(\tau) = \int_0^{Y_l(\tau)} x^k \operatorname{ierfc}(x) dx = \pi^{-1/2} L_l^{(k)}(\tau) - J_l^{(k+1)}(\tau), \quad k = 0, 1, \dots, 7, \quad (3.2.16)$$

$$J_l^{(k)}(\tau) = \int_0^{Y_l(\tau)} x^k \operatorname{erfc}(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, 8, \quad (3.2.17)$$

$$L_l^{(k)}(\tau) = \int_0^{Y_l(\tau)} x^k \exp(-x^2) dx, \quad k = 0, 1, \dots, 7, \quad (3.2.18)$$

$$X_l(\tau) = \frac{1}{Z_l(1, \tau)}, \quad Y_l(\tau) = \frac{a_l^*}{X_l(\tau)}, \quad (3.2.19)$$

a funkcje  $Z_l(1, \tau)$ ,  $l = 1, 2$  wyznaczono ze wzorów (3.1.15).

Korzystając z zależności rekurencyjnych [99]:

$$J_l^{(k)}(\tau) = \frac{1}{(k+1)} \times \left\{ \frac{k(k-1)}{2} J_l^{(k-2)}(\tau) + \left[ Y_l^2(\tau) - \frac{k}{2} \right] Y_l^{k-1}(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} Y_l^k(\tau) \exp[-Y_l^2(\tau)] \right\}, \quad (3.2.20)$$

$$L_l^{(k)}(\tau) = 0,5\{(k-1)L_l^{(k-2)}(\tau) - Y_l^{k-1}(\tau) \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (3.2.21)$$

gdzie:

$$J_l^{(0)}(\tau) = \pi^{-1/2} - \operatorname{ierfc} Y_l(\tau), \quad J_l^{(1)}(\tau) = 0,25\operatorname{erf} Y_l(\tau) - 0,5Y_l(\tau) \operatorname{ierfc} Y_l(\tau), \quad (3.2.22)$$

$$L_l^{(0)}(\tau) = 0,5\sqrt{\pi}[1 - \operatorname{erfc} Y_l(\tau)], \quad L_l^{(1)}(\tau) = 0,5\{1 - \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad (3.2.23)$$

całki  $J_l^{(k)}(\tau)$  (3.2.20) i  $L_l^{(k)}(\tau)$  (3.2.21) zapisano w postaci:

$$J_l^{(2)}(\tau) = 3^{-1} \left\langle Y_l^3(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + \pi^{-1/2} \{1 - [Y_l^2(\tau) + 1] \exp[-Y_l^2(\tau)]\} \right\rangle, \quad (3.2.24)$$

$$J_l^{(3)}(\tau) = 4^{-1} \{Y_l^4(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + 0,75 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [Y_l^2(\tau) + 1,5] \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad (3.2.25)$$

$$J_l^{(4)}(\tau) = 5^{-1} \left\langle Y_l^5(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + \pi^{-1/2} \{2 - [Y_l^4(\tau) + 2Y_l^2(\tau) + 2] \exp[-Y_l^2(\tau)]\} \right\rangle, \quad (3.2.26)$$

$$J_l^{(5)}(\tau) = 6^{-1} \{Y_l^6(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + 1,875 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [Y_l^4(\tau) + 2,5Y_l^2(\tau) + 3,75] \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad (3.2.27)$$

$$J_l^{(6)}(\tau) = 7^{-1} \left\langle Y_l^7(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + \pi^{-1/2} \{6 - [Y_l^6(\tau) + 3Y_l^4(\tau) + 6Y_l^2(\tau) + 6] \exp[-Y_l^2(\tau)]\} \right\rangle, \quad (3.2.28)$$

$$J_l^{(7)}(\tau) = 8^{-1} \{Y_l^8(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + 6,5625 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [Y_l^6(\tau) + 3,5Y_l^4(\tau) + 8,75Y_l^2(\tau) + 13,125] \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad (3.2.29)$$

$$J_l^{(8)}(\tau) = 9^{-1} \left\langle Y_l^9(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) + \pi^{-1/2} \{24 - [Y_l^8(\tau) + 4Y_l^6(\tau) + 12Y_l^4(\tau) + 24Y_l^2(\tau) + 24] \exp[-Y_l^2(\tau)]\} \right\rangle, \quad (3.2.30)$$

$$L_l^{(2)}(\tau) = 0,25\sqrt{\pi} \operatorname{erf} Y_l(\tau) - 0,5Y_l(\tau) \exp[-Y_l^2(\tau)], \quad (3.2.31)$$

$$L_l^{(3)}(\tau) = 0,5\{1 - [1 + Y_l^2(\tau)] \exp[-Y_l^2(\tau)]\}, \quad (3.2.32)$$

$$L_l^{(4)}(\tau) = 0,375\sqrt{\pi} \operatorname{erf} Y_l(\tau) - 0,5Y_l(\tau) [Y_l^2(\tau) + 1,5] \exp[-Y_l^2(\tau)], \quad (3.2.33)$$

$$L_l^{(5)}(\tau) = 1 - [0,5Y_l^4(\tau) + Y_l^2(\tau) + 1] \exp[-Y_l^2(\tau)], \quad (3.2.34)$$

$$L_l^{(6)}(\tau) = 0,937\sqrt{\pi} \operatorname{erf} Y_l(\tau) - Y_l(\tau) [0,5Y_l^4(\tau) + 1,25Y_l^2(\tau) + 1,87] \exp[-Y_l^2(\tau)], \quad (3.2.35)$$

$$L_l^{(7)}(\tau) = 3 - [0,5Y_l^6(\tau) + 1,5Y_l^4(\tau) + 3Y_l^2(\tau) + 3] \exp[-Y_l^2(\tau)]. \quad (3.2.36)$$

Znając funkcje  $J_l^{(k)}(\tau)$  i  $L_l^{(k)}(\tau)$  (3.2.24)–(3.2.36), obliczono całki  $I_l^{(k)}(\tau)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, \dots, 7$  (3.2.16):

$$I_l^{(0)}(\tau) = 0,5\pi^{-1/2} Y_l(\tau) \exp[-Y_l^2(\tau)] + 0,25 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - 0,5Y_l^2(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau), \quad (3.2.37)$$

$$I_l^{(1)}(\tau) = 6^{-1} \left\langle \pi^{-1/2} \{1 + [2Y_l^2(\tau) - 1] \exp[-Y_l^2(\tau)]\} - 2Y_l^3(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \right\rangle, \quad (3.2.38)$$

$$I_l^{(2)}(\tau) = 8^{-1} \{ \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [2Y_l^2(\tau) - 1] \exp[-Y_l^2(\tau)] + 0,5 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - 2Y_l^4(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \}, \quad (3.2.39)$$

$$I_l^{(3)}(\tau) = 5^{-1} \left\langle 0,5 \pi^{-1/2} \{ 1 + [2Y_l^4(\tau) - Y_l^2(\tau) - 1] \exp[-Y_l^2(\tau)] \} - Y_l^5(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \right\rangle, \quad (3.2.40)$$

$$I_l^{(4)}(\tau) = 6^{-1} \{ 0,25 \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [4Y_l^4(\tau) - 2Y_l^2(\tau) - 3] \exp[-Y_l^2(\tau)] + 0,375 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - Y_l^6(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \}, \quad (3.2.41)$$

$$I_l^{(5)}(\tau) = 7^{-1} \left\langle \pi^{-1/2} \{ 1 + [Y_l^6(\tau) - 0,5Y_l^4(\tau) - Y_l^2(\tau) - 1] \exp[-Y_l^2(\tau)] \} - Y_l^7(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \right\rangle, \quad (3.2.42)$$

$$I_l^{(6)}(\tau) = 8^{-1} \{ \pi^{-1/2} Y_l(\tau) [Y_l^6(\tau) - 0,5Y_l^4(\tau) - 1,25Y_l^2(\tau) - 1,875] \exp[-Y_l^2(\tau)] + 0,9375 \operatorname{erf} Y_l(\tau) - Y_l^8(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \}, \quad (3.2.43)$$

$$I_l^{(7)}(\tau) = 9^{-1} \pi^{-1/2} \{ \{ 3 + [Y_l^8(\tau) - 0,5Y_l^6(\tau) - 1,5Y_l^4(\tau) - 3Y_l^2(\tau) - 3] \exp[-Y_l^2(\tau)] \} - Y_l^9(\tau) \operatorname{erfc} Y_l(\tau) \}. \quad (3.2.44)$$

Uwzględniając funkcje  $J_l^{(k)}(\tau)$  (3.2.22), (3.2.24)–(3.2.30) oraz  $I_l^{(k)}(\tau)$  (3.2.37)–(3.2.44) we wzorach (3.2.6)–(3.2.15), znaleziono funkcje  $M_{i,l}^{(m)}(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$ ,  $m = 0, 1$ , a następnie wyznaczono bezwymiarowe naprężenia termiczne  $\sigma_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$  (3.2.3) i (3.2.4).

### 3.2.2. Analiza numeryczna

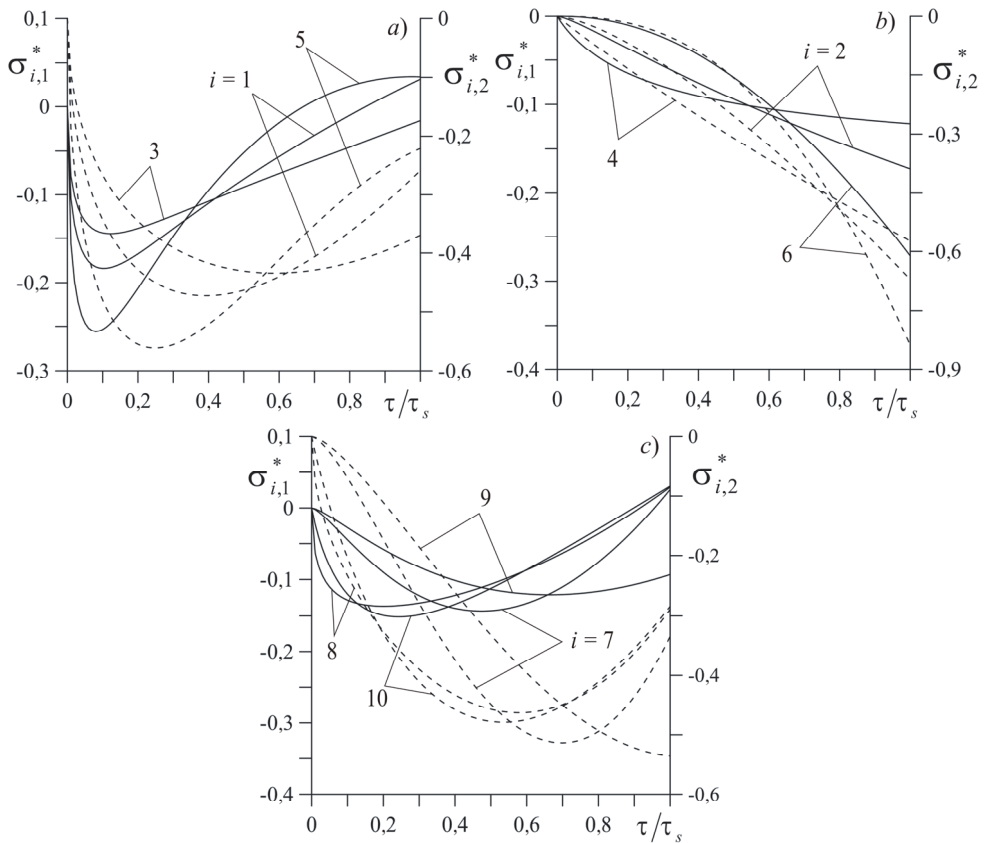
Obliczenia przeprowadzono dla pary ciernej wykonanej z takich samych materiałów (żeliwna tarcza i nakładka z retinaksu) jak w podrozdziale 3.1. Bazując na rozwiązaniach (3.2.6)–(3.2.15) i (3.2.37)–(3.2.44), zbadano rozkłady odpowiednich bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$ ,  $l = 1, 2$  (3.2.3), (3.2.4).

Zmiany bezwymiarowych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*(0, \tau)$  w czasie hamowania  $0 \leq \tau \leq \tau_s$  na powierzchniach roboczych tarczy ( $l = 1$ , linie ciągłe) oraz nakładki ( $l = 2$ , linie przerywane) dla różnych profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  zaprezentowano na rysunku 3.6. Przy  $i = 1, 3, 5$  bezwymiarowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$  zmniejszają się monotonicznie w procesie hamowania (rys. 1.1a). Bezwymiarowe temperatury powierzchniowe  $T_{i,l}^*(0, \tau)$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $l = 1, 2$  szybko rosną po rozpoczęciu hamowania do wartości maksymalnych, po czym następuje intensywne ochłodzenie trwające do końca procesu (rys. 3.2 i 3.3). Taki charakter ewolucji temperatury ma bezpośredni wpływ na zmianę naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*(0, \tau)$  w czasie hamowania. Na skutek temperaturowego rozszerzenia materiałów naprężenia te są ściskające w początkowej oraz środkowej fazie hamowania. Wraz

z rozpoczęciem hamowania wartości bezwzględne  $|\sigma_{i,l}^*|$  tych naprężeń gwałtownie zwiększają się, osiągając na powierzchni ciernej tarczy ( $l = 1$ ) wartości maksymalne 0,184 ( $i = 1$ ), 0,147 ( $i = 3$ ) i 0,256 ( $i = 5$ ) odpowiednio w chwilach  $0,1\tau_s$ ,  $0,12\tau_s$  oraz  $0,08\tau_s$  (rys. 3.6a). Na powierzchni ciernej nakładki ( $l = 2$ ) bezwzględne maksymalne wartości naprężeń termicznych wynoszą 0,472 ( $i = 1$ ), 0,434 ( $i = 3$ ), 0,562 ( $i = 5$ ) i są osiągane odpowiednio w chwilach  $0,39\tau_s$ ,  $0,59\tau_s$  oraz  $0,25\tau_s$ . Wspomniane wyżej ochłodzenie powierzchni kontaktu, następujące po osiągnięciu maksimum temperaturowego, powoduje redukcję bezwzględnych wartości naprężeń termicznych wraz z upływem czasu hamowania. Przy czym na powierzchni ciernej nakładki przy  $i = 1,3,5$  oraz powierzchni roboczej tarczy przy  $i = 3$  naprężenia termiczne pozostają ściskającymi aż do zatrzymania. W pozostałych dwóch przypadkach ( $i = 1,5$ ) naprężenia termiczne na powierzchni tarczy w chwilach  $0,85\tau_s$  ( $i = 1$ ) oraz  $0,67\tau_s$  ( $i = 5$ ) zmieniają natomiast znak, stając się naprężeniami rozciągającymi. Największe wartości  $-0,031$  ( $i = 1$ ) oraz  $0,034$  ( $i = 5$ ) – naprężenia rozciągające osiągają zaś w chwili zatrzymania.

Druga grupa wykresów, zaprezentowanych na rysunku 3.6b, odpowiada gęstościom mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 2,4,6$  (rys. 1.1a) zwiększającym się monotonicznie w procesie hamowania oraz temperaturze powierzchniowej  $T_{i,l}^*(0, \tau)$ ,  $l = 1,2$ ,  $i = 2,4,6$  (rys. 3.2 i 3.3), o podobnym charakterze zmiany w czasie. Bezwzględne wartości normalnych naprężeń ściskających na powierzchni roboczej tarczy ( $l = 1$ ), inicjowane takimi przebiegami temperatury, również zwiększają się od zera w chwili rozpoczęcia procesu hamowania do wartości maksymalnych 0,173 ( $i = 2$ ), 0,122 ( $i = 4$ ) i 0,270 ( $i = 6$ ) osiąganych w chwili zatrzymania. Z kolei na powierzchni ciernej nakładki ( $l = 2$ ) wartości te wynoszą odpowiednio: 0,670; 0,574 i 0,838.





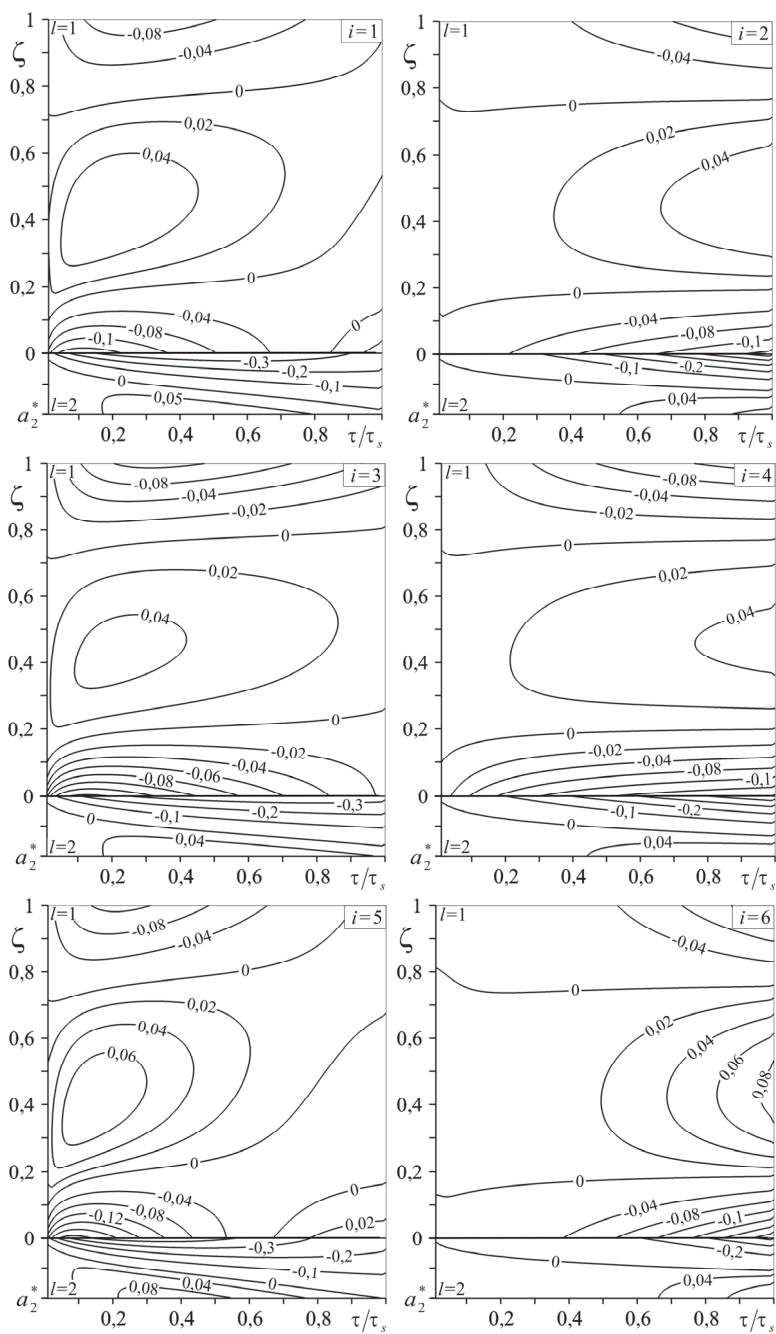
Rysunek 3.6. Zmiana bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*$  w czasie hamowania na powierzchniach ciernych tarczy (linia ciągła,  $l=1$ ) oraz nakładki (linia przerywana,  $l=2$ ) przy różnych bezwymiarowych gęstościach mocy tarcia  $q_i^*$ : a)  $i=1,3,5$ ; b)  $i=2,4,6$ ; c)  $i=7,8,9,10$

Przebiegi czasowe gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i=7,8,9,10$  posiadają maksimum lokalne w trakcie trwania hamowania (rys. 1.1b). Odpowiadające im ewolucje temperatury na powierzchni kontaktu również osiągają wartości maksymalne w przedziale czasowym  $0 < \tau < \tau_s$  (rys. 3.2 i 3.3). Zmiany naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*(0, \tau)$  w czasie hamowania (rys. 3.6c) jakościowo są podobne do tych, które odpowiadają monotonicznie rosnącej gęstości mocy tarcia (rys. 3.6a). Wraz z rozpoczęciem hamowania są one ściskające dla obu elementów ciernych, a ich wartości bezwzględne zwiększają się wraz z upływem czasu, aż do osiągnięcia maksimum lokalnego. Na powierzchni żeliwnej tarczy maksymalne wartości bezwymiarowych naprężeń  $|\sigma_{i,1}^*|$  oraz czasy ich osiągnięcia są równe: 0,143,  $0,47\tau_s$  ( $i=7$ ); 0,137,  $0,2\tau_s$  ( $i=8$ ); 0,121,  $0,66\tau_s$  ( $i=9$ ); 0,151,  $0,24\tau_s$  ( $i=10$ ). Odpowiednie wartości

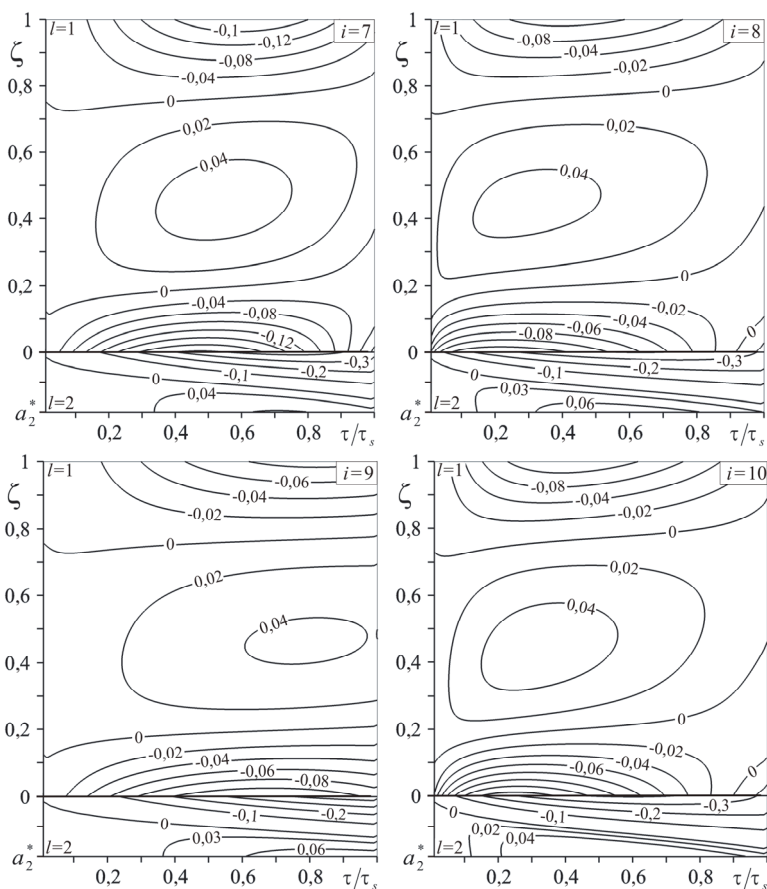
na powierzchni czarnej nakładki ( $l = 2$ ) wynoszą:  $0,514, 0,7\tau_s$  ( $i = 7$ );  $0,463, 0,58\tau_s$  ( $i = 8$ );  $0,536, \tau_s$  ( $i = 9$ );  $0,631, 0,24\tau_s$  ( $i = 10$ ). Po osiągnięciu tych wartości następuje spadek naprężeń ściskających  $|\sigma_{i,l}^*|$ ,  $l = 1,2$ , przy czym na powierzchni nakładki naprężenia pozostają ściskające aż do momentu zatrzymania. Zaś na roboczej powierzchni tarczy, w chwilach  $0,2\tau_s$  ( $i = 7$ ),  $0,66\tau_s$  ( $i = 8$ ) i  $0,24\tau_s$  ( $i = 10$ ), naprężenia maleją do zera, po czym pojawiają się naprężenia rozciągające, które następnie rosną, osiągając wartości  $0,026, 0,029$  i  $0,031$  w chwili zatrzymania, odpowiednio przy  $i = 7,8,10$ .

Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*(\zeta, \tau)$  w tarczy ( $l = 1$ ) i nakładce ( $l = 2$ ) dla profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q_i^*(\tau)$ ,  $i = 1,2,\dots,10$  (tab. 1.1) przedstawiono na rysunkach 3.7 i 3.8. Wynika z nich, że stany naprężeń w rozpatrywanych obszarach tarczy  $0 \leq \zeta \leq a_1^*$  oraz nakładki  $-a_2^* \leq \zeta \leq 0$  znacznie się różnią. W strefie przypowierzchniowej nakładki w trakcie całego procesu hamowania występują normalne naprężenia ściskające o znacznie wyższych wartościach niż w tarczy. Spowodowane jest to tym, że retinak, jak zauważono wcześniej, jest gorszym przewodnikiem ciepła niż żeliwo. Wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu wartości bezwzględne naprężeń ściskających maleją do zera, po czym wewnątrz nakładki pojawia się obszar naprężeń rozciągających, aż do względnej efektywnej głębokości  $\zeta = a_2^*$ .

Wraz z rozpoczęciem procesu hamowania naprężenia ściskające pojawiają się również w przypowierzchniowym obszarze  $0 \leq \zeta \leq 0,2$  tarczy. W przypadkach  $i = 1,3,5,7,8,10$  wartości bezwzględne tych naprężeń po osiągnięciu maksimum maleją do zera. Następnie pojawia się strefa naprężeń rozciągających, które z kolei narastają aż do zakończenia procesu. Zauważono, że im wcześniej osiągnięta jest wartość maksymalna mocy tarcia, tym wcześniej pojawia się izolinia „zerowa” i tym wyższe są wartości naprężeń rozciągających na powierzchni tarczy w chwili zatrzymania. Natomiast przy  $i = 2,4,6,9$  naprężenia w strefie przypowierzchniowej pozostają ściskające podczas całego procesu hamowania. Wewnątrz tarczy na poziomach  $\zeta \approx 0,2$  oraz  $\zeta \approx 0,75$  występują izoliny naprężeń „zerowych”. Pomiędzy nimi znajduje się strefa naprężeń rozciągających, których wartość maksymalna osiągnięta jest w czasie zbliżonym do czasu osiągnięcia maksimum przez naprężenia  $|\sigma_{i,l}^*|$   $i = 1,2,\dots,10$  na powierzchni czarnej tarczy. Poniżej ( $0,75 \leq \zeta \leq 1$ ) pojawia się drugi obszar naprężeń ściskających, o wartościach bezwzględnych znacznie mniejszych od wartości osiąganych w tym samym czasie w obszarze przypowierzchniowym.



Rysunek 3.7. Izolinie bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*$  przy różnych gęstościach bezwymiarowej mocy tarcia  $q_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$



Rysunek 3.8. Izolinie bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych  $\sigma_{i,l}^*$  przy różnych gęstościach bezwymiarowej mocy tarcia  $q_i^*$ ,  $i = 7, 8, 9, 10$

### 3.3. Wnioski

Na podstawie otrzymanych rezultatów ustalono, że:

1. Poziom i rozkład temperatury oraz naprężeń termicznych podczas jednokrotnego hamowania są ściśle skorelowane z przebiegiem czasowym gęstości mocy tarcia. Istnieje bezpośredni związek pomiędzy wartościami maksymalnymi gęstości mocy tarcia i temperatury oraz naprężeniami termicznymi.
2. Czas osiągnięcia najwyższej wartości mocy tarcia ma bezpośredni wpływ na czas pojawienia się maksymalnej temperatury oraz czas transformacji naprężeń ściskających na rozciągające, a także na ich wartość w chwili zatrzymania.

3. Temperatura maksymalna powierzchni ciernych nakładki i tarczy oszacowana na podstawie przybliżonego rozwiązania Chichinadze różni się o nie więcej niż 13% od odpowiadającej jej temperatury wyznaczonej za pomocą otrzymanych w niniejszym rozdziale rozwiązań dokładnych. Wraz z oddaleniem od powierzchni ciernej różnica ta zwiększa się. Tak więc rozwiązanie przybliżone z uwagi na uniwersalność może być wykorzystywane w obliczeniach temperatury powierzchni kontaktu w układach hamulcowych. Jednak wykorzystanie go do wyznaczenia rozkładów temperatury wewnątrz elementów ciernych lub temperatury objętościowej może spowodować znaczne niedokładności.
4. Współczynnik rozdzielenia ciepła generowanego na powierzchni ciernej nie zależy od profilu gęstości mocy tarcia. W przypadku układu dwóch półprzestrzeni przy idealnych warunkach cieplnych tarcia na powierzchni kontaktu pokazano, że ma on postać zaproponowaną przez Charrona i zależy jedynie od właściwości termofizycznych materiałów pary ciernej.

Wyniki badań przedstawione w tym rozdziale zostały opublikowane w pracach [118, 120, 151, 152].

## 4. WPŁYW ZMIANY CIŚNIENIA KONTAKTOWEGO W CZASIE NA TEMPERATURĘ PODCZAS HAMOWANIA

Charakterystyki mocy i pracy tarcia podczas hamowania są niezbędne do obliczeń wytrzymałościowych oraz doboru materiałów elementów ciernych hamulca. Jak zaprezentowano w rozdziale 1, w zależności od trybu hamowania moc tarcia może mieć różny rozkład czasowy. Dlatego też w rozdziałach 2 i 3 opracowano modele analityczne nagrzewania tarciovego podczas hamowania, uwzględniające różnorodne profile czasowe gęstości mocy tarcia. Podczas formułowania warunków brzegowych odpowiednich początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła z uwzględnieniem generacji ciepła tarciovego, zadano *a priori* funkcje czasowe opisujące zmiany gęstości mocy tarcia w czasie (tab. 1.1), zaproponowane w oparciu o przedstawione wyniki badań eksperymentalnych [28]. Alternatywnym sposobem wyznaczenia wspomnianej charakterystyki procesu hamowania jest skorzystanie z rozwiązania odpowiedniego zagadnienia ruchu sformułowanego przy zadanym przebiegu czasowym ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania. W tym schemacie obliczeniowym w celu ustalenia profilu czasowego prędkości, czasu zatrzymania oraz, w konsekwencji, ewolucji gęstości mocy tarcia, najpierw rozwiązywane jest zagadnienie początkowe ruchu rozpatrywanego układu hamulcowego. Następnie znaleziony w ten sposób przebieg czasowy gęstości mocy tarcia zostaje zaadaptowany do jednego z warunków brzegowych podczas formułowania odpowiedniego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego. Podejście to wykorzystano przy formułowaniu jednowymiarowych zagadnień cieplnych tarcia z uwzględnieniem eksponencjalnego narastania ciśnienia w układzie dwóch półprzestrzeni [41, 124, 129] oraz w układzie warstwa-półprzestrzeń [70, 71, 155, 156]. Zaproponowane modele umożliwiają zbadanie wpływu zmian ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania na zachowanie układu, a w szczególności czasu narastania ciśnienia do wartości nominalnej lub oscylacji jego wartości w czasie. Większość tych rozwiązań ma postać kwadratur i wymaga stosowania całkowania numerycznego przy wyznaczaniu temperatury.

W niniejszym rozdziale opracowano dokładne modele nagrzewania tarciovego układu nakładka-tarcza, wykorzystując sprzężony schemat kontaktowy. Składają się na niego ponowne rozwiązanie początkowego zagadnienia ruchu oraz, następnie, początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła, z uwzględnieniem różnych profili ciśnienia kontaktowego. W rozdziale zbadano także wpływ przebiegu czasowego ciśnienia kontaktowego podczas hamowania jednokrotnego na temperaturę układu.

## 4.1. Charakterystyka zmian ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania

Typowy tryb pracy tarczowego układu hamulcowego rozpoczyna się od zaciśnięcia okładzin ciernych na powierzchniach roboczych tarczy. Na tym etapie ciśnienie  $p$  pomiędzy elementami pary ciernej zwiększa się od zera w chwili rozpoczęcia hamowania  $t = 0$  do wartości nominalnej  $p_0$ , po czym stabilnie utrzymuje się na tym poziomie do chwili zatrzymania  $t = t_s$  [71]:

$$p(t) = p_0 p^*(t), \quad p^*(t) = 1 - e^{-t/t_i}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.1.1)$$

gdzie  $t_i$  – czas narastania ciśnienia do wartości nominalnej  $p_0$ . W pracach [31, 121, 122] zaadaptowano uproszczony profil liniowego wzrostu ciśnienia, który otrzymuje się, rozwijając funkcję eksponencjalną ze wzoru (4.1.1) w szereg potęgowy i ograniczając się w nim do dwóch pierwszych członów:

$$p^*(t) = \frac{t}{t_i} H(t_i - t) + H(t - t_i), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.1.2)$$

gdzie  $H(x)$  – jednostkowa funkcja Heaviside'a [3].

Ogólny profil zmian ciśnienia na powierzchni roboczej hamulca w czasie, zapisany za pomocą funkcji [70, 124]:

$$p^*(t) = [1 - \exp(-t/t_i)][1 + a^* \sin(\Omega t)], \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.1.3)$$

bierze pod uwagę możliwe fluktuacje ciśnienia wywołane przykładowo pracą układu ABS, gdzie  $a^*$  i  $\Omega$  są to odpowiednio amplituda oscylacji oraz częstotliwość wahań ciśnienia.

## 4.2. Zagadnienie początkowe ruchu

Rozpatrzmy proces jednokrotnego hamowania pojazdu o początkowej energii kinetycznej  $W_0$ , realizowany przez tarczowy układ hamulcowy składający się z dwóch nakładek z okładzinami ciernymi oraz tarczy. W chwili rozpoczęcia procesu  $t = 0$  nieruchome nakładki dociskane są do powierzchni roboczych obracającej się tarczy. Pomiędzy elementami pary ciernej narasta ciśnienie  $p$ , którego rozkład przestrzenny jest jednorodny na nominalnej powierzchni kontaktu  $A_n$ . W wyniku poślizgu na powierzchniach roboczych hamulca oddziałuje siła tarcia  $F$ . Przy wysokiej stabilności termicznej pary ciernej współczynnik tarcia  $f$  zmienia się nieznacznie podczas hamowania. Wtedy siłę tarcia możemy zapisać w postaci:

$$F(t) = A_n f p(t), \quad A_n = 2A_a, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.2.1)$$

gdzie  $A_a$  – pole nominalnej powierzchni kontaktu pomiędzy tarczą a nakładką hamulcową. Pod wpływem tarcia następuje redukcja prędkości  $V$  aż do zatrzymania w chwili zakończenia procesu  $t = t_s$ . Do znalezienia przebiegu prędkości poślizgu podczas hamowania wykorzystamy równanie ruchu [57]:

$$\frac{2W_0}{V_0^2} \frac{dV(t)}{dt} = -F(t), \quad 0 \leq t \leq t_s \quad (4.2.2)$$

wraz z warunkiem początkowym:

$$V(0) = V_0, \quad (4.2.3)$$

gdzie  $V_0$  – prędkość początkowa.

Rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego (4.2.2) spełniające warunek początkowy (4.2.3) przy sile tarcia zdefiniowanej wzorem (4.2.1) ma postać:

$$V(t) = V_0 V^*(t), \quad V^*(t) = 1 - \frac{1}{t_s^0} \int_0^t p^*(t) dt, \quad t_s^0 = \frac{W_0}{V_0 f A_a p_0}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.4)$$

#### 4.2.1. Eksponencjalny wzrost ciśnienia

Podstawiając przebieg czasowy ciśnienia (4.1.1) do rozwiązania (4.2.4), znaleźliśmy prędkość poślizgu tarczy względem nakładki hamulcowej:

$$V(t) = V_0 V^*(t), \quad V^*(t) = 1 - \frac{1}{t_s^0} [t_s + t_i p^*(t)], \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.5)$$

Bazując na zależności (4.2.5) otrzymano nieliniowe równanie funkcyjne do wyznaczenia czasu trwania procesu hamowania (w chwili zatrzymania  $t_s$ ):

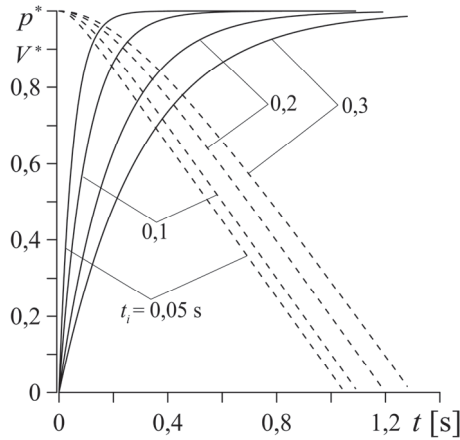
$$V^*(t_s) = 1 - \frac{1}{t_s^0} [t_s + t_i p^*(t_s)] = 0. \quad (4.2.6)$$



Należy zaznaczyć, że przechodząc do granicy przy  $t_i \rightarrow 0$ , nominalna wartość ciśnienia  $p_0$  jest osiągana natychmiastowo w chwili rozpoczęcia hamowania, a redukcja prędkości w czasie hamowania ma charakter liniowy:

$$V^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0}, \quad 0 \leq t \leq t_s^0. \quad (4.2.7)$$

Zatem parametr  $t_s^0$  (4.2.4) jest to czas hamowania z jednostajnym opóźnieniem. Przebiegi bezwymiarowych ciśnienia kontaktowego  $p^*(t)$  (4.1.1) i prędkości  $V^*(t)$  (4.2.5) przy różnych wartościach czasu narastania ciśnienia  $t_i$  i  $t_s^0 = 1$ s zaprezentowano na rysunku 4.1.



Rysunek 4.1. Zmiany bezwymiarowych: ciśnienia  $p^*$  (4.1.1) (linie ciągłe) oraz prędkości  $V^*$  (4.2.5) (linie przerywane) w czasie  $t$  dla różnych wartości parametru  $t_i$

Z uwzględnieniem przebiegu czasowego ciśnienia kontaktowego  $p$  (4.1.1) oraz prędkości  $V$  (4.2.6) zmianę gęstości mocy tarcia  $q$  podczas hamowania zapisano w postaci:

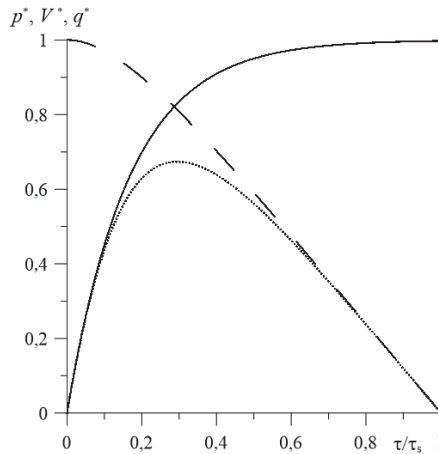
$$q(t) = q_0 q^*(t), \quad q_0 = f p_0 V_0, \quad q^*(t) = p^*(t) \left[ 1 - \frac{t}{t_s^0} + p^*(t) \frac{t_i}{t_s^0} \right], \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.8)$$

Znając profil czasowy gęstości mocy tarcia (4.2.8), przebieg czasowy pracy tarcia  $w$  przypadającej na jednostkę pola powierzchni roboczej hamulca (gęstości pracy tarcia) wyznaczono w postaci:

$$w(t) = w_0 w^*(t), \quad w_0 = q_0 t_s^0, \quad 0 \leq t \leq t_s,$$

$$w^*(t) = \int_0^t q^*(s) ds = \left(1 - \frac{t}{2t_s^0}\right) \frac{t}{t_s^0} - p^*(t) \left(1 - \frac{t}{t_s^0}\right) \frac{t_i}{t_s^0} - \frac{1}{2} \left[ p^*(t) \frac{t_i}{t_s^0} \right]^2. \quad (4.2.9)$$

Z warunku zatrzymania (4.2.6) otrzymano związek  $p^*(t_s) = (t_s - t_s^0)/t_i$ . Podstawiając go do wzoru (4.2.9), ustalono, że wartość bezwymiarowej gęstości pracy tarcia w chwili zatrzymania nie zależy od czasu narastania ciśnienia i jest równa  $w^*(t_s) = 0,5$ . Zmiany ciśnienia  $p^*$  (4.1.1), prędkości  $V^*$  (4.2.5) oraz gęstości mocy tarcia (4.2.8) podczas hamowania przedstawiono na rysunku 4.2.



Rysunek 4.2. Przebiegi ciśnienia  $p^*$  (4.1.1) (linia ciągła), prędkości  $V^*$  (4.2.5) (linia kreskowana) i gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.8) (linia kropkowana) przy zadanych wartościach:  $\tau_i = 0,2$ ,  $\tau_s^0 = 1$

Czas zatrzymania  $t_s$  zależy od czasu narastania ciśnienia  $t_i$ , a jego wartość wyznaczono w wyniku numerycznego rozwiązania nieliniowego równania funkcyjnego (4.2.6). Ustalono, że zwiększenie czasu narastania ciśnienia powoduje również zwiększenie czasu trwania hamowania. Nieliniowa redukcja prędkości występuje tylko w początkowym okresie hamowania, przy czym okres ten zwiększa się wraz ze zwiększeniem parametru  $t_i$ .

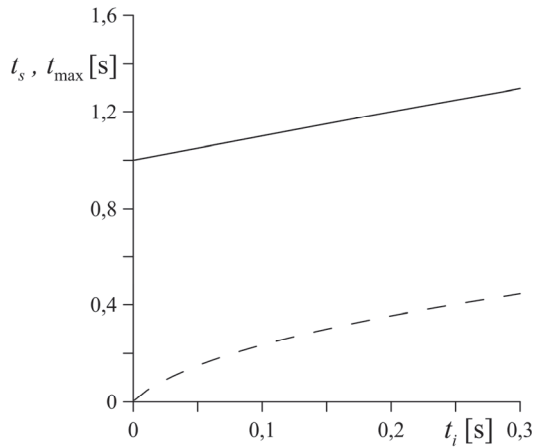
Uwzględniając postać funkcji  $q^*(t)$  (4.2.8) w warunku  $dq^*(t_{\max})/dt = 0$ , otrzymano nieliniowe równanie funkcyjne do wyznaczenia czasu  $t_{\max}$  osiągnięcia wartości maksymalnej przez gęstość mocy tarcia:

$$\left(1 - \frac{t_{\max}}{t_s^0}\right) \exp\left(-\frac{t_{\max}}{t_i}\right) - \left[1 - 2 \exp\left(-\frac{t_{\max}}{t_i}\right)\right] \frac{t_i}{t_s^0} p^*(t_{\max}) = 0. \quad (4.2.10)$$

W wyniku numerycznego rozwiązywania równań (4.2.6) i (4.2.10) metodą bisekcji [87], znaleziono następujące zależności aproksymujące:

$$t_s = 0,99t_i + t_s^0, \quad t_{\max} = 0,783\sqrt{t_it_s^0}, \quad 0 \leq t_i/t_s^0 \leq 0,3, \quad (4.2.11)$$

które zilustrowano na rysunku 4.3.



Rysunek 4.3. Zależności czasu zatrzymania  $t_s$  (linia ciągła) oraz czasu osiągnięcia maksimum gęstości mocy tarcia  $t_{\max}$  (linia przerywana) od czasu narastania ciśnienia  $t_i$

Zaproponowano również alternatywną funkcję aproksymującą profil czasowy gęstości mocy tarcia  $q(t)$  (4.2.8) w postaci [27, 28]:

$$q(t) = q_0 q^*(t), \quad q^*(t) = 0,5(\alpha + 1)(\alpha + 2) \frac{t_s^0}{t_s} \left(\frac{t}{t_s}\right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{t_s}\right), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.2.12)$$

$$\alpha = \frac{t_{\max}}{t_s - t_{\max}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (4.2.13)$$

a do ustalenia wartości parametru  $\alpha$  we wzorze (4.2.13) skorzystano ze związków (4.2.11).

Gęstość pracy, odpowiadająca intensywności mocy tarcia (4.2.12), jest równa:

$$w(t) = w_0 w^*(t), \quad w^*(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t_s} \right)^{\alpha+1} \left[ (\alpha+1) \left( 1 - \frac{t}{t_s} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.14)$$

Ze wzorów (4.2.12) i (4.2.14) wynika, że w chwili zatrzymania:

$$q^*(t_s) = 0, \quad w^*(t_s) = 0,5. \quad (4.2.15)$$

## 4.2.2. Liniowe narastanie ciśnienia

Przy liniowym zwiększeniu ciśnienia kontaktowego (4.1.2) bezwymiarowy przebieg prędkości poślizgu w czasie hamowania wyznaczono z rozwiązania zagadnienia (4.2.4) w postaci [114]:

$$V^*(t) = 1 - V_i^*(t)H(t_i - t) - [V_i^*(t_i) + V_s^*(t)]H(t - t_i), \\ V_i^*(t) = \frac{t^2}{2t_s^0 t_i}, \quad V_s^*(t) = \frac{t - t_i}{t_s^0}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.16)$$

Podstawiając wzory (4.2.16) do warunku zatrzymania  $V^*(t_s) = 0$ , ustalono czas trwania procesu hamowania:

$$t_s = t_s^0 + 0,5t_i. \quad (4.2.17)$$

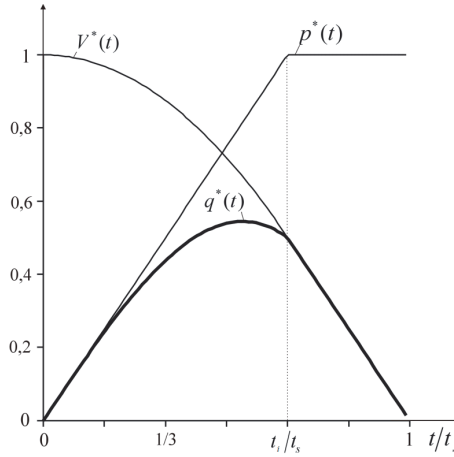
Przy profilach czasowych ciśnienia  $p^*$  (4.1.2) oraz prędkości  $V^*$  (4.2.16) wyznaczono przebiegi bezwymiarowych gęstości mocy  $q^*$  i pracy  $w^*$  tarcia:

$$q^*(t) = q_i^*(t)H(t_i - t) + q_s^*(t)H(t - t_i), \\ q_i^*(t) = \left[ 1 - \frac{t^2}{2t_s^0 t_i} \right] \frac{t}{t_i}, \quad q_s^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0} - \frac{t_i}{2t_s^0}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (4.2.18)$$

$$w^*(t) = w_i^*(t)H(t_i - t) - [w_i^*(t_i) + w_s^*(t)]H(t - t_i),$$

$$w_i^*(t) = \left[ 1 - \frac{t^2}{4t_s^0 t_i} \right] \frac{t^2}{2t_s^0 t_i}, \quad w_s^*(t) = \left( 1 - \frac{t}{2t_s^0} \right) \frac{t - t_i}{t_s^0}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (4.2.19)$$

Zmiany ciśnienia  $p^*$  (4.1.2) z uwzględnieniem jego liniowego wzrostu na początkowym etapie hamowania, wraz z odpowiadającą prędkością poślizgu  $V^*$  (4.2.16) oraz gęstością mocy tarcia  $q^*$  (4.2.18), zademonstrowano na rysunku 4.4 w postaci bezwymiarowej.



Rysunek 4.4. Profile czasowe:  $p^*$  (4.1.2), prędkości  $V^*$  (4.2.16) oraz gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.18) przy  $t_i = t_s^0 = 2t_s/3$

Warto zaznaczyć, że ze wzoru (4.2.19) wynika, iż w chwili zatrzymania  $w^*(t_s) = 0,5$ . Oznacza to, że ilości ciepła wygenerowanego na skutek tarcia podczas procesów hamowania przy profilach czasowych gęstości mocy tarcia (4.2.8), (4.2.12) oraz (4.2.18) są jednakowe.

### 4.2.3. Fluktuacje ciśnienia w czasie hamowania

Wprowadzając następujące zmienne i parametry:

$$\tau = \frac{k_1 t}{a^2}, \quad \tau_s = \frac{k_1 t_s}{a^2}, \quad \tau_s^0 = \frac{k_1 t_s^0}{a^2}, \quad \tau_i = \frac{k_1 t_i}{a^2}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega a^2}{k_1}, \quad a = \sqrt{3k_1 t_s^0}, \quad (4.2.20)$$

zagadnienie początkowe ruchu (4.2.2), (4.2.3) przekształcono do postaci bezwymiarowej:

$$\tau_s^0 \frac{dV^*(\tau)}{d\tau} = -p^*(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (4.2.21)$$

$$V^*(0) = 1, \quad (4.2.22)$$

gdzie profil czasowy ciśnienia (4.1.3) zadano za pomocą funkcji:

$$p(t) = p_0 p^*(\tau), \quad p^*(\tau) = (1 - e^{-\tau/\tau_i}) [1 + a^* \sin(\Omega^* \tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (4.2.23)$$

Należy zaznaczyć, że przy braku fluktuacji ciśnienia ( $a^* = 0$ ) powyższy przebieg (4.2.23) przyjmuje postać profilu (4.1.1). Podstawiając funkcję  $p(\tau)$  (4.1.20) do prawej strony równania ruchu (4.2.21), a następnie całkując, przebieg prędkości poślizgu otrzymano w postaci [71]:

$$V^*(\tau) = V_1^*(\tau) - \frac{a^*}{\tau_s^0} V_2^*(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (4.2.24)$$

gdzie:

$$V_1^*(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{\tau_i}{\tau_s} (1 - e^{-\tau/\tau_i}), \quad (4.2.25)$$

$$V_2^*(\tau) = \Omega^* [1 - \cos(\Omega^* \tau)] + \frac{1}{\tau_i^{-2} + \Omega^{*2}} \{ [\tau_i^{-1} \sin(\Omega^* \tau) + \Omega^* \cos(\Omega^* \tau)] e^{-\tau/\tau_i} - \Omega^* \}. \quad (4.2.26)$$

W chwili zatrzymania  $V^*(\tau_s) = 0$  ze wzorów (4.2.24) otrzymano nieliniowe równanie:

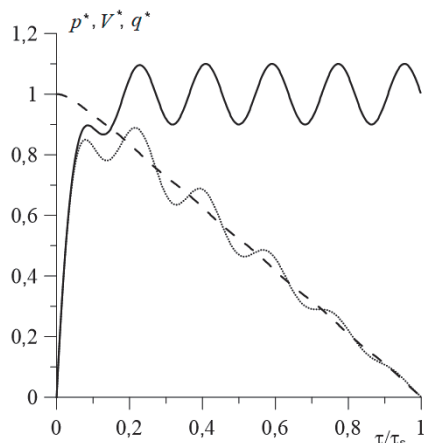
$$\tau_s^0 V_1^*(\tau_s) = a^* V_2^*(\tau_s), \quad (4.2.27)$$

względem bezwymiarowego czasu hamowania  $\tau_s$ . Funkcja gęstości mocy tarcia odpowiadająca prędkości poślizgu (4.2.24) oraz ciśnieniu (4.2.23) przyjmuje wówczas postać:

$$q(t) = q_0 q^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s,$$

$$q^*(\tau) = (1 - e^{-\tau/\tau_i}) [1 + a^* \sin(\Omega^* \tau)] \left\langle 1 - \frac{\tau}{\tau_s^0} - \frac{a^*}{\tau_s^0} \left\{ \frac{1}{\Omega^*} [1 - \cos(\Omega^* \tau)] + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} (1 - e^{-\tau/\tau_i}) + \frac{1}{\Omega^{*2} + \tau_m^{-2}} [\Omega^* \cos(\Omega^* \tau) e^{-\tau/\tau_i} + \tau_i^{-1} \sin(\Omega^* \tau)] - \Omega^* \right\} \right\rangle. \quad (4.2.28)$$

Bezwymiarowe profile ciśnienia  $p^*$  (4.2.23), prędkości  $V^*$  (4.2.24) oraz gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.28) dla  $a^* = 0,1$ ,  $\Omega^* = 100$ ,  $\tau_i = 0,017$  ( $t_i = 0,5$  s),  $\tau_s^0 = 1$  zaprezentowano na rysunku 4.5.



Rysunek 4.5. Zmiany bezwymiarowych: ciśnienia  $p^*$  (4.1.3) (linia ciągła), prędkości  $V^*$  (4.2.24) (linia kreskowana) i gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.28) (linia kropkowana) w czasie hamowania

W następnym podrozdziale otrzymamy dokładne rozwiązanie zagadnień podczas hamowania z uwzględnieniem profili czasowych gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.8), (4.2.12), (4.2.18) oraz (4.2.28).

### 4.3. Temperatura powierzchni kontaktu

Rozpatrzono model nagrzewania tarczowego układu hamulcowego, zastępując rzeczywiste elementy cierne (nakładkę i tarczę) ciałami półograniczonymi. Założono, że kontakt cieplny między rozpatrywanymi półprzestrzeniami jest idealny. Zmiany bezwymiarowej temperatury  $T^*(\tau)$  powierzchni ciernej następujące wraz z czasem hamowania możemy wyznaczyć z rozwiązania poniższego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial^2 T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.2)$$

$$K^* \frac{\partial T_2^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - \frac{\partial T_1^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = q^*(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.3)$$

$$T_1^*(0, \tau) = T_2^*(0, \tau) \equiv T^*(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.4)$$

$$T_1^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad T_2^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.5)$$

$$T_l^*(\zeta, 0) = 0, \quad |\zeta| < \infty, \quad l = 1, 2, \quad (4.3.6)$$

gdzie bezwymiarowe zmienne i parametry opisane są zależnościami (3.1.13) oraz (4.2.17).

Rozwiązanie zagadnienia (4.3.1)–(4.3.6) przy stałym w czasie profilu mocy tarcia  $q^*(\tau) = 1$  ma postać (3.1.14), z której przy  $\zeta = 0$  znaleziono:

$$\hat{T}^*(\tau) = 2\gamma \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{k^*}}{\sqrt{k^* + K^*}}, \quad K^* = \frac{K_2}{K_1}, \quad k^* = \frac{k_2}{k_1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (4.3.7)$$

Z uwzględnieniem rozwiązania (4.3.7) bezwymiarową temperaturę na powierzchni kontaktu przy zmiennej w czasie gęstości mocy tarcia zapisano w postaci [84]:

$$T^*(\tau) = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{q^*(s)}{\sqrt{\tau-s}} ds, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (4.3.8)$$

*Eksponencjalny wzrost ciśnienia.* Podstawiając pod znak całki we wzorze (4.3.8) profil czasowy gęstości mocy tarcia  $q^*(\tau)$  (4.2.8) odpowiadający eksponencjalnemu narastaniu ciśnienia, wyznaczono:

$$T^*(\tau) = \frac{\gamma}{\tau_s} [(\tau_s^0 + \tau_i)I_{0,0}(\tau) - I_{1,0}(\tau) - (\tau_s^0 + 2\tau_i)I_{0,1}(\tau) + I_{1,1}(\tau) + \tau_i I_{0,2}(\tau)], \quad (4.3.9)$$

gdzie:

$$I_{n,m}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{s^n}{\sqrt{\tau-s}} e^{-ms/\tau_i} ds, \quad n = 0, 1, \quad m = 0, 1, 2. \quad (4.3.10)$$

Korzystając z podstawienia  $x = \sqrt{\tau-s}$ , ze wzoru (4.3.10) przy  $m=0$  otrzymano:

$$I_{n,0}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau}} (\tau - x^2)^n dx, \quad n = 0, 1. \quad (4.3.11)$$

Na podstawie zależności [98]:

$$\int_0^b (b^\mu - x^\mu)^{\nu-1} dx = \mu^{-1} b^{\mu(\nu-1)+1} B(\nu; \mu^{-1}), \quad b, \mu, \operatorname{Re} \nu > 0, \quad (4.3.12)$$



gdzie:  $(B(\nu; \mu^{-1}) - \text{funkcja beta [3]}, \text{ przy } b = \sqrt{\tau}, \mu = 2, \nu = n + 1, \text{ całki (4.3.11) zapisano w postaci:}$

$$I_{n,0}(\tau) = B(n + 1; 0,5) \tau^n \sqrt{\tau/\pi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.13)$$

Uwzględniając wartości funkcji beta  $B(1; 0,5) = 2, B(2; 0,5) = 4/3$  [3], ze wzoru (4.3.13) wyznaczono:

$$I_{0,0}(\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}, \quad I_{1,0}(\tau) = \frac{4}{3}\tau\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \quad (4.3.14)$$

Jeżeli  $m \neq 0$ , to za pomocą podstawienia  $x = \sqrt{\tau - s}$  całki (4.3.10) sprowadzono do postaci:

$$I_{0,m}(\tau) = \sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{m\tau}{\tau_i}}\right), \quad m = 1, 2, \quad I_{1,1}(\tau) = (\tau + 0,5\tau_i)\sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_i}}\right) - \tau_i\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}, \quad (4.3.15)$$

gdzie:

$$D(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{x} \int_0^x \exp(s^2) ds. \quad (4.3.16)$$

Do obliczenia funkcji  $D(x)$  (4.3.16) zastosowano wzory aproksymacyjne [19]:

$$D(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!}, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad D(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^{n+1}}, \quad x > 3. \quad (4.3.17)$$

Po podstawieniu całek  $I_{n,m}(\tau)$  (4.3.14) i (4.3.15) do rozwiązania (4.3.9) otrzymano:

$$T^*(\tau) = \gamma\sqrt{\tau} \left[ \left( 1 + \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{3}{2} \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \right) D\left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_i}}\right) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} D\left(\sqrt{\frac{2\tau}{\tau_i}}\right) \right],$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (4.3.18)$$

W przypadku szczególnym, gdy ciśnienie osiąga swoją wartość nominalną natychmiast po rozpoczęciu hamowania ( $\tau_i \rightarrow 0$ ), z rozwiązania (4.3.18) otrzymano wzór Fazekasa do obliczenia temperatury powierzchni kontaktu podczas hamowania ze stałym opóźnieniem ruchu [50]:

$$T^*(\tau) = 2\gamma \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left( 1 - \frac{2\tau}{3\tau_s^0} \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s^0. \quad (4.3.19)$$

Z kolei po podstawieniu funkcji aproksymującej  $q^*(t)$  (4.2.12), (4.2.13), do wzoru (4.3.8), z uwzględnieniem oznaczeń (3.1.13) oraz (4.2.20), otrzymano:

$$T_l^*(\tau) = 0,5\gamma(\alpha+1)(\alpha+2)(\tau_s^0/\tau_s)[I_\alpha(\tau) - I_{\alpha+1}(\tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.20)$$

gdzie:

$$I_\alpha(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left( \frac{s}{\tau_s} \right)^\alpha \frac{ds}{\sqrt{\tau-s}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (4.3.21)$$

Uwzględniając wzór (4.3.13) oraz następujące związki [3]:

$$B(\alpha+1; 0,5) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1,5)}, \quad B(\alpha+2; 0,5) = \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+1,5)} B(\alpha+1; 0,5), \quad (4.3.22)$$

( $\Gamma(\alpha)$  – funkcja gamma), ze wzoru (4.3.20) otrzymano:

$$T^*(\tau) = \beta\gamma\sqrt{\tau} \left( \frac{\tau_s^0}{\tau_s} \right) \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right)^\alpha \left[ 1 - \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+1,5)} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) \right], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \\ \beta = (\alpha+1)(\alpha+2) \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(\alpha+1,5)}, \quad (4.3.23)$$

gdzie parametr  $\alpha$  wyznaczono ze wzoru (4.2.13). Przy  $\alpha=0$ ,  $\tau_s = \tau_s^0$  oraz z uwzględnieniem wartości funkcji gamma  $\Gamma(1)=1$ ,  $\Gamma(1,5)=0,5\sqrt{\pi}$  z rozwiązania (4.3.23) otrzymano również rozwiązanie Fazekasa (4.3.19).

*Liniowe narastanie ciśnienia.* Po uwzględnieniu we wzorze (4.3.8) funkcji  $q^*(t)$  (4.1.14) bezwymiarową temperaturę powierzchni kontaktu zapisano w postaci:

$$T^*(\tau) = \gamma \{ T_i^*(\tau) H(\tau_i - \tau) + [T_i^*(\tau_i) - T_s^*(\tau_i) + T_s^*(\tau)] H(\tau - \tau_i) \},$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (4.3.24)$$

gdzie:

$$T_i^*(\tau) = \frac{1}{\tau_i} \left[ I_{1,0}(\tau) - \frac{1}{2\tau_s^0 \tau_i} I_{3,0}(\tau) \right], \quad T_s^*(\tau) = \left( 1 + \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} \right) I_{0,0}(\tau) - \frac{1}{\tau_s^0} I_{1,0}(\tau), \quad (4.3.25)$$

całki  $I_{n,0}(\tau)$ ,  $n=0,1$  mają postać (4.3.14), zaś do obliczenia całki  $I_{3,0}(\tau)$  zastosowano wzór (4.3.13). Uwzględniając wartość funkcji beta  $B(4; 0,5) = 32/35$ , znaleziono:

$$I_{3,0}(\tau) = \frac{32}{35} \tau^3 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \quad (4.3.26)$$

Po podstawieniu całek  $I_{n,0}(\tau)$ ,  $n=0,1$  (4.3.14) oraz  $I_{3,0}(\tau)$  (4.3.26) do wzorów (4.3.25) otrzymano:

$$T_i^*(\tau) = \frac{4\tau}{\tau_i} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left( \frac{1}{3} - \frac{4\tau^2}{35\tau_s^0 \tau_i} \right), \quad T_s^*(\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left( 1 + \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} - \frac{2\tau}{3\tau_s^0} \right). \quad (4.3.27)$$

Korzystając z wyników (4.3.27), znaleziono różnicę:

$$T_i^*(\tau_i) - T_s^*(\tau_i) = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\tau_i}{\pi}} \left( 1 + \frac{13\tau_i}{70\tau_s^0} \right). \quad (4.3.28)$$

Biorąc pod uwagę zależności (4.3.27) i (4.3.28) w rozwiązaniu (4.3.24), wyznaczono poszukiwaną ewolucję bezwymiarowej temperatury  $T^*(\tau)$  na powierzchni kontaktu nakładki z tarczą. Należy zaznaczyć, że przy  $\tau_i \rightarrow 0$  rozwiązanie (4.3.24) także przyjmuje postać Fazekasa (4.3.19).

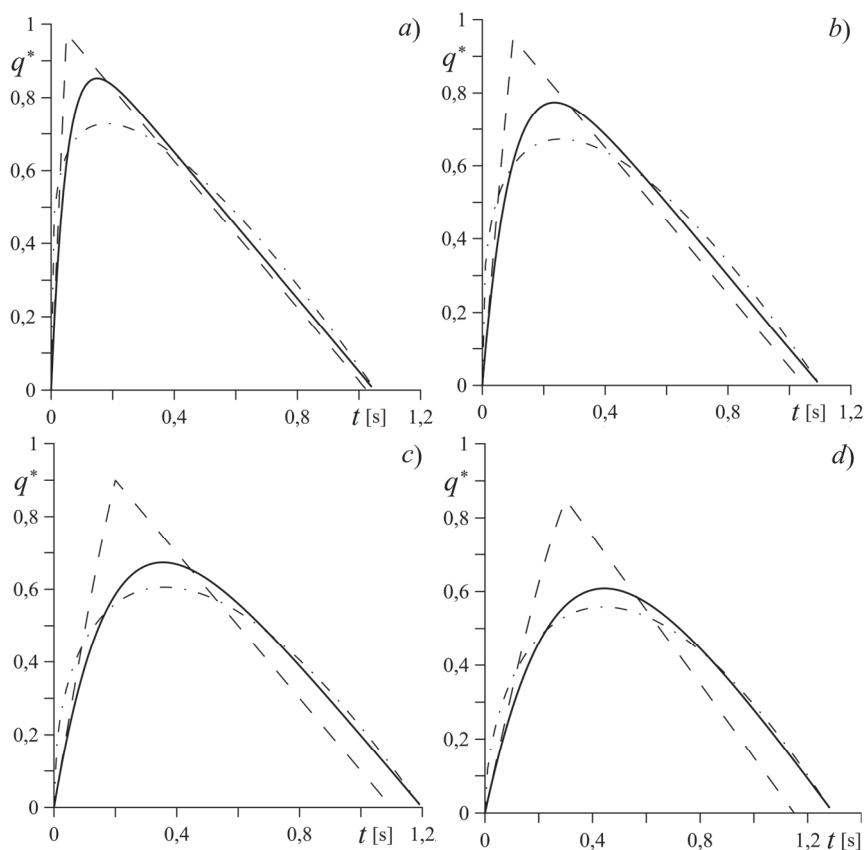
*Fluktuacje ciśnienia w czasie hamowania.* Bezwymiarowej temperatury powierzchni kontaktu dwóch półprzestrzeni przy oscylującym ciśnieniu kontaktowym (4.1.3) i odpowiadającym mu profilu czasowym gęstości mocy tarcia (4.2.28) poszukiwano za pomocą numerycznego całkowania rozwiązania (4.3.8). W tym celu wykorzystano procedurę numeryczną QAGS z pakietu QUADPACK [96].

#### 4.4. Analiza numeryczna

Analizę numeryczną procesu nagrzewania tarciowego rozpatrywanego układu hamulcowego przeprowadzono w postaci bezwymiarowej. Obliczenia wykonano dla pary ciernej składającej się z żeliwnej tarczy ChNMKh ( $K_1 = 51 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ ,  $k_1 = 14 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2\text{s}^{-1}]$ ) oraz nakładki wykonanej z metalo-ceramiki FMC-11 ( $K_2 = 34,3 [\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ ,  $k_2 = 15,2 \cdot 10^{-6} [\text{m}^2\text{s}^{-1}]$ ) [159]. Współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła  $\gamma$  wyznaczono ze wzoru (4.3.7) – okazał się on równy  $\gamma = 0,608$ . Efektywna głębokość przenikania ciepła wyniosła  $a = a_1 = \sqrt{3k_1 t_s^0}$ , zaś bezwymiarowy czas hamowania przy jednostajnym opóźnieniu  $\tau_s^0 = 0,33$  wyznaczono ze wzoru (4.2.20).

Profile czasowe gęstości mocy tarcia  $q^*$  otrzymane przy eksponencjalnym (4.2.8) i liniowym (4.2.18) wzroście ciśnienia kontaktowego oraz z wykorzystaniem funkcji aproksymującej (4.2.12) przedstawiono na rysunku 4.6. Obliczenia wykonano dla różnych wartości czasu narastania ciśnienia  $t_i$  przy jednakowej całkowitej pracy tarcia  $w(t_s) = 0,5w_0$ . Odpowiednie zmiany temperatury powierzchni kontaktu pary ciernej zaprezentowano na rysunku 4.7.

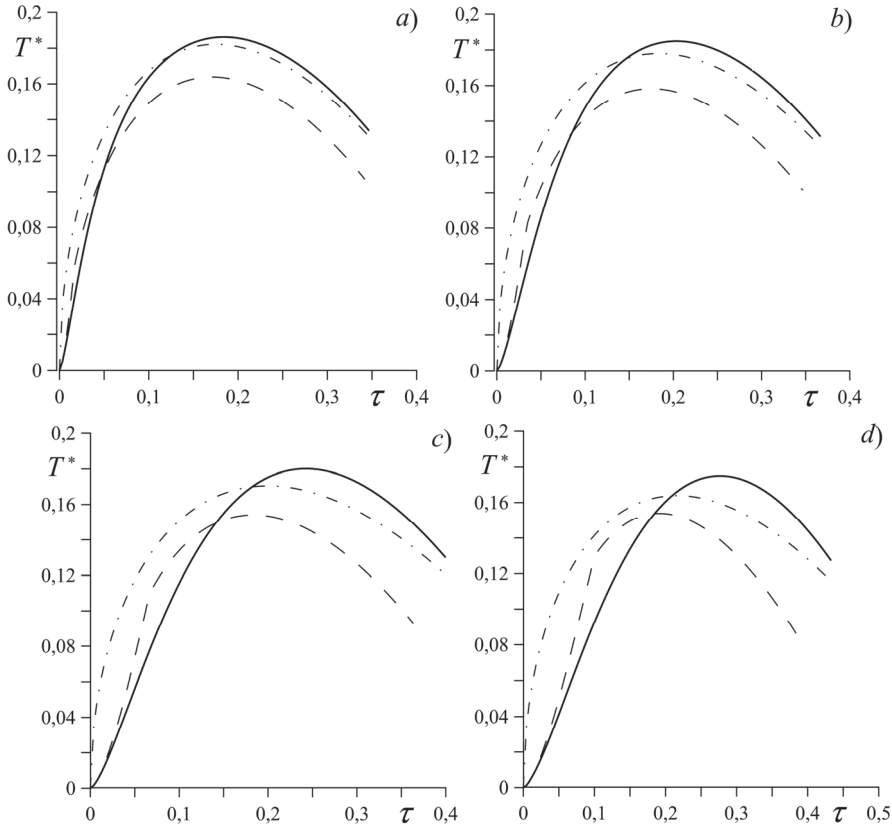
Ewolucje bezwymiarowej temperatury na powierzchni kontaktu  $T^*(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ , wyznaczone z dokładnych rozwiązań przy eksponencjalnym zwiększeniu ciśnienia (4.3.18) (linia ciągła), przy jego liniowym wzroście (4.3.24), (4.3.27) (linia przerywana) oraz przy gęstości mocy tarcia zmieniającej się zgodnie z aproksymacją Chichinadze (4.3.23) (linia kropka-kreska), przedstawiono na rysunku 4.7.



Rysunek 4.6. Ewolucja bezwymiarowej gęstości mocy tarcia  $q^*$  obliczonej przy eksponentalnie narastającym ciśnieniu (4.2.8) (linie ciągłe), liniowym wzroście ciśnienia (4.2.12) (linie przerywane) oraz na podstawie wzorów aproksymacyjnych (4.2.18) (linie kropka-kreska) przy różnych czasach narastania ciśnienia  $t_i$ : a) 0,05 s; b) 0,1 s; c) 0,2 s; d) 0,3 s

Na początkowym etapie hamowania temperatura rośnie, przy czym wzrost ten jest tym gwałtowniejszy, im krótszy jest czas narastania ciśnienia kontaktowego. Na tym etapie, w ustalonym momencie, najwyższa temperatura jest osiągnięta w przypadku korzystania z rozwiązania (4.3.23) opartego na aproksymacji (4.2.12), a najniższa – przy obliczeniach wykonywanych na podstawie dokładnego rozwiązania (4.3.18) z eksponentalnym zwiększeniem ciśnienia kontaktowego (4.1.1), (4.2.8). W tym ostatnim przypadku wzrost temperatury trwa najdłużej, a osiągnięte wartości maksymalne są najwyższe. Gdy temperatura osiągnie maksymalną wartość, następuje ochłodzenie powierzchni ciernej trwające aż do zatrzymania (rys. 4.7). Na tym etapie temperatura wyznaczona z rozwiązania dokładnego

(4.3.18) jest najwyższa, a intensywność obniżenia temperatury znalezionej za pomocą każdego z trzech rozwiązań jest podobna.

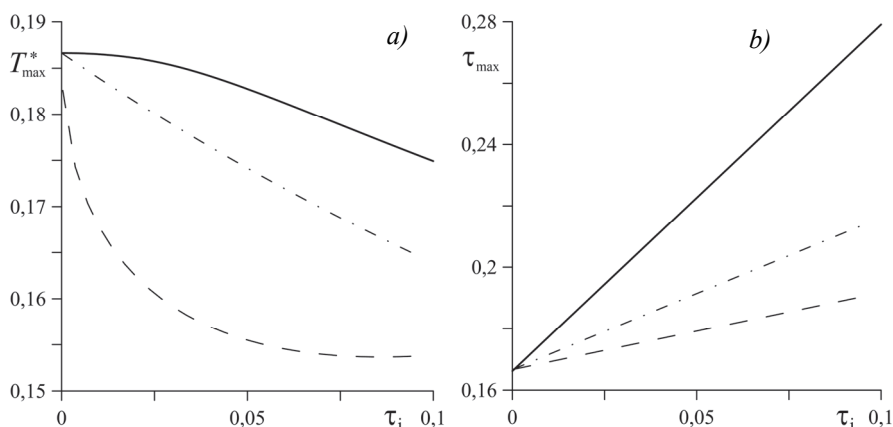


Rysunek 4.7. Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T^*$  znalezione z rozwiązań: (4.3.18) – linia ciągła, (4.3.24) i (4.3.27) – linia przerywana, (4.3.23) – linia kropka-kreska przy różnych wartościach bezwymiarowego czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$ : a) 0,017; b) 0,033; c) 0,067; d) 0,1

Jak ustalono wcześniej, czas hamowania  $t_s$  zwiększa się wraz ze wzrostem czasu narastania ciśnienia  $t_i$  (rys. 4.3). W przypadku liniowo narastającego ciśnienia przy ustalonej wartości  $t_i$  czas zatrzymania  $t_s$  wyznaczono ze wzoru (4.2.17) i okazał się on mniejszy od czasu zatrzymania w pozostałych dwóch przypadkach.

W przypadku hamowania ze stałym opóźnieniem ( $\tau_i = 0$ ) wszystkie trzy otrzymane rozwiązania dążą do rozwiązania Fazekasa (4.3.19), na podstawie którego znaleziono wartość bezwymiarowej temperatury maksymalnej  $T_{\max}^* = 0,187$  przy  $\tau_i = 0$  (rys. 4.8a), osiąganey w chwili  $\tau_{\max} = 0,17$  (rys. 4.8b). Zależności  $T_{\max}^*$  i  $\tau_{\max}$  od bezwymiarowego czasu zwiększania ciśnienia kontaktowego

$0 \leq \tau_i \leq 0,1$  ( $0 \leq t_i \leq 0,3t_s^0$ ) przedstawiono na rysunku 4.8. Zwiększenie parametru  $\tau_i$  powoduje obniżenie bezwymiarowej temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$  na powierzchni kontaktu nakładki z tarczą oraz liniowe zwiększenie bezwymiarowego czasu osiągnięcia maksimum temperaturowego  $\tau_{\max}^*$ . Przy zwiększeniu czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$  zaobserwowano liniowe obniżenie bezwymiarowej temperatury  $T_{\max}^*$ , wyznaczonej przy korzystaniu z rozwiązania (4.3.23) bazującego na aproksymacji (4.2.12). Temperatura maksymalna, obliczona z rozwiązania dokładnego (4.3.18), jest najmniej wrażliwa na zwiększanie parametru  $\tau_i$ . Przy ustalonej wartości bezwymiarowego czasu narastania ciśnienia  $\tau_i = 0,1$  bezwymiarowa temperatura maksymalna oraz czasy jej osiągnięcia wynoszą  $T_{\max}^* = 0,175; 0,164; 0,153$  i  $\tau_{\max}^* = 0,28; 0,22; 0,19$  – przy korzystaniu odpowiednio z rozwiązań (4.3.18), (4.3.24), (4.3.27) oraz (4.3.23).



Rysunek 4.8. Bezwymiarowe zależności: a) maksymalnej temperatury  $T_{\max}^*$ ; b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}^*$  od czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$  ustalone na podstawie rozwiązań: (4.3.18) – linia ciągła; (4.3.24), (4.3.27) – linia przerywana; (4.3.23) – linia kropka-kreska

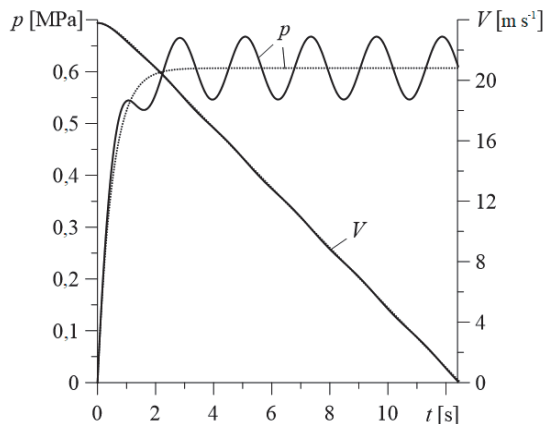
W dalszej części tego rozdziału przeprowadzono analizę procesu hamowania realizowanego poprzez rozpatrywany układ z uwzględnieniem fluktuacji ciśnienia w czasie. Przyjęte wartości parametrów operacyjnych przedstawiono w tabeli 4.1.

Ze wzoru (4.2.27) wyznaczono czas trwania procesu hamowania  $t_s = 12,43s$ , a ze wzoru (4.2.20) ustalono efektywną głębokość przenikania ciepła  $a = 22,45mm$ . Profile czasowe ciśnienia kontaktowego  $p(t)$  (4.1.3) oraz prędkości poślizgu  $V(t)$  (4.2.24) w czasie hamowania zaprezentowano na rysunku 4.9. Odpowiadające im zmiany w czasie hamowania gęstości mocy tarcia  $q(t)$  (4.2.28) oraz temperatury  $T(t)$  (4.3.29), (4.3.30) powierzchni kontaktu pokazano na rysunku 4.10. Linie ciągłe reprezentują wyniki otrzymane przy wartościach bezwymia-

rowej amplitudy fluktuacji  $a^* = 0,1$  oraz częstotliwości  $\Omega^* = 100$ , zaś linie kropkowane przy  $a^* = 0$  i  $\Omega^* = 0$ . Wpływ oscylacji ciśnienia na profil prędkości poślizgu jest nieznaczny – w obu rozpatrywanych przypadkach, niezależnie od wartości parametrów  $a^*$  i  $\Omega^*$  w danej sytuacji, prędkość zmniejsza się monotonicznie w czasie od wartości początkowej  $V_0$  do zera w chwili zatrzymania  $t = t_s$  (rys. 4.9).

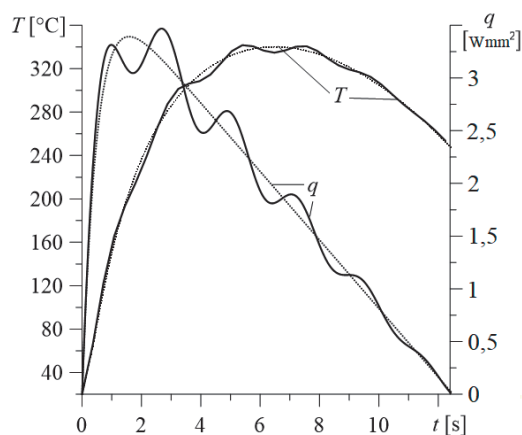
Tabela 4.1. Parametry operacyjne przy ciśnieniu oscylującym w czasie hamowania [124]

Parametr	Wartość
Prędkość początkowa, $V_0$ [ $\text{ms}^{-1}$ ]	23,8
Początkowa energia kinetyczna, $W_0$ [kJ]	103,54
Nominalna wartość ciśnienia, $p_0$ [MPa]	0,602
Współczynnik tarcia, $f$	0,27
Czas narastania ciśnienia, $t_i$ [s]	0,5
Temperatura otoczenia, $T_a$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	20
Nominalna powierzchnia kontaktu, $A_n$ [ $\text{m}^2$ ]	$4,42 \times 10^{-3}$



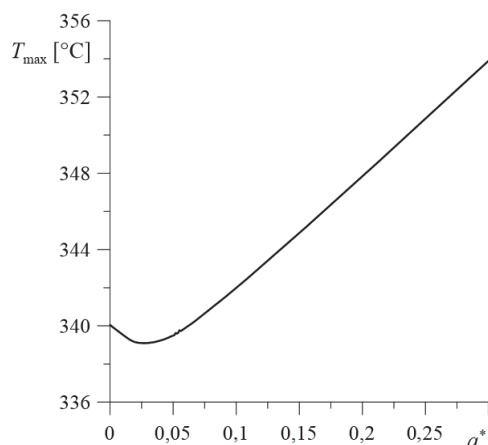
Rysunek 4.9. Ewolucje ciśnienia kontaktowego  $p(t)$  (4.1.3) i prędkości poślizgu  $V(t)$  (4.2.24) podczas hamowania na powierzchni kontaktu pary ciernej przy  $a^* = 0,1$  (linia ciągła) oraz  $a^* = 0$  (linia kropkowana)





Rysunek 4.10. Ewolucje gęstości mocy tarcia  $q(t)$  (4.2.28) oraz temperatury  $T(t)$  (4.3.29), (4.3.30) podczas hamowania na powierzchni kontaktu pary ciernej przy  $a^* = 0,1$  (linia ciągła) oraz  $a^* = 0$  (linia kropkowana)

Fluktuacje ciśnienia mają większy wpływ na przebieg czasowy gęstości mocy tarcia niż temperatura (rys. 4.10). Największe oscylacje gęstości mocy tarcia oraz temperatury zaobserwowano w pobliżu czasu osiągnięcia wartości maksymalnych  $q_{\max} = 3,46 \text{ Wmm}^{-2}$  oraz  $T_{\max} = 339,5^\circ\text{C}$ , odpowiednio w chwilach  $t = 2,66 \text{ s}$  oraz  $t = 6,64 \text{ s}$ . Wpływ amplitudy fluktuacji ciśnienia  $a^*$  na maksymalną wartość temperatury  $T_{\max}$  powierzchni kontaktu pokazano na rysunku 4.11.



Rysunek 4.11. Zależność maksymalnej temperatury  $T_{\max}$  powierzchni kontaktu od bezwymiarowej amplitudy fluktuacji ciśnienia  $a^*$

## 4.5. Wnioski

Powyżej zbadano wpływ profilu czasowego ciśnienia kontaktowego układu ciernego na przebieg procesu hamowania. W rezultacie przeprowadzonej analizy numerycznej ustalono, że:

1. Zwiększenie czasu narastania ciśnienia kontaktowego powoduje wydłużenie procesu hamowania, obniżenie temperatury maksymalnej i wydłużenie czasu jej osiągnięcia.
2. Wartości temperatury maksymalnej otrzymane z rozwiązania dokładnego, uwzględniającego eksponencjalny wzrost ciśnienia kontaktowego w czasie, są wyższe od odpowiadających im wartości wyznaczonych z rozwiązań aproksymacyjnych. Różnice te są tym większe, im dłuższy jest czas narastania ciśnienia kontaktowego.
3. Fluktuacje ciśnienia kontaktowego nie mają wpływu na przebieg czasowy prędkości poślizgu, natomiast powodują oscylacje gęstości mocy tarcia i temperatury. Największe oscylacje tych wielkości zaobserwowano w pobliżu chwili osiągnięcia ich wartości maksymalnych.

Badania zaprezentowane w niniejszym rozdziale zostały opublikowane w pracach [121, 124].



## 5. TEMPERATURA MAKSYMALNA OSIĄGANA PODCZAS HAMOWANIA

### 5.1. Hamowanie jednokrotne

Zaprezentowane dotychczas rozwiązania jednowymiarowych zagadnień przewodzenia ciepła z uwzględnieniem generacji ciepła tarciowego pozwalają na wyznaczenie ewolucji temperatury powierzchni kontaktu (temperatury średniej) [27]. Jej wartość w warunkach intensywnego tarcia, przykładowo w wysoko obciążonych hamulcach ciernych, może przekraczać nawet 500°C [18]. Temperatura średnia nie jest jednak jedyną składową całkowitego wzrostu temperatury powierzchni ciernej [63].

Tarcie i towarzyszące mu procesy, w tym nagrzewanie, nie zachodzą równomiernie na całej powierzchni nominalnego kontaktu pary ciernej. Nierówności powierzchni roboczych elementów wężła tarciowego powodują, że rzeczywisty obszar kontaktu składa się z niewielkich miejsc styku wierzchołków chropowatości powierzchni ciernych w obrębie nominalnego obszaru kontaktu [64]. W czasie poślizgu elementów roboczych hamulca rzeczywisty obszar ich kontaktu tarciowego nieustannie się zmienia, ponieważ czas trwania styku mikronierówności w warunkach tarcia suchego jest bardzo krótki. Taki lokalny, chwilowy wzrost temperatury na rzeczywistym obszarze kontaktu nazywany jest błyskiem temperaturowym [23]. Modelowy sposób obliczania temperatury błysku stanowi rozwiązywanie odpowiednich początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła sformułowanych dla półprzestrzeni z lokalnym źródłem ciepła poruszającym się po nominalnej powierzchni tarcia [111]. Wartości temperatury błysku podczas tarcia suchego przy dużych prędkościach poślizgu mogą przekraczać nawet 1100°C [110].

Jako podstawowe kryterium oceny pracy układu hamulcowego najczęściej wskazywana jest wartość maksymalnej temperatury osiągananej na powierzchni ciernej podczas hamowania. Całkowity wzrost temperatury powierzchni kontaktu ślizgowego zasadniczo wyznacza się jako sumę dwóch składowych: temperatury średniej nominalnego obszaru kontaktu oraz temperatury błysku na rzeczywistych obszarach styku powierzchni ciernych [27]. W niniejszym rozdziale, w oparciu o hipotezę sumacyjną Chichinadze, opracowano analityczny model obliczeniowy do wyznaczania maksymalnej temperatury osiągananej na powierzchni tarcia podczas jednokrotnego hamowania. Temperaturę średnią otrzymano na podstawie dokładnego rozwiązania jednowymiarowego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła przy stałych właściwościach termofizycznych materiałów. Do wyznaczenia błysku temperaturowego wykorzystano model kontaktu plastycznego z uwzględnieniem charakterystyk chropowatości powierzchni oraz wrażliwo-

ści termicznej materiałów. Analiza numeryczna przeprowadzona na podstawie zaproponowanego modelu obliczeniowego pozwoliła ustalić wpływ poszczególnych składowych na przebieg temperatury maksymalnej rozpatrywanego układu ciernego podczas jednokrotnego hamowania.

### 5.1.1. Model obliczeniowy

Ustalono, że prognozowanie temperatury błysku bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów może prowadzić do istotnego niedoszacowania lub przeszacowania jej wartości [32]. Dlatego do zaproponowanego modelu obliczeniowego zaimplementowano następujące zależności określające zmiany właściwości cieplnych i twardości materiałów elementów pary cierniej ( $l = 1,2$ ) pod wpływem temperatury [126]:

$$K_l(T) = K_{l,0} K_l^*(T),$$

$$K_l^*(T) = K_{l,1} + \frac{K_{l,2}}{[K_{l,3}(T - K_{l,6})]^2 + 1} + \frac{K_{l,4}}{[K_{l,5}(T - K_{l,7})]^2 + 1}, \quad (5.1.1)$$

$$\rho_l(T) = \rho_{l,0} \rho_l^*(T),$$

$$\rho_l^*(T) = \rho_{l,1} + \frac{\rho_{l,2}}{[\rho_{l,3}(T - \rho_{l,6})]^2 + 1} + \frac{\rho_{l,4}}{[\rho_{l,5}(T - \rho_{l,7})]^2 + 1}, \quad (5.1.2)$$

$$c_l(T) = c_{l,0} c_l^*(T),$$

$$c_l^*(T) = c_{l,1} + \frac{c_{l,2}}{[c_{l,3}(T - c_{l,6})]^2 + 1} + \frac{c_{l,4}}{[c_{l,5}(T - c_{l,7})]^2 + 1}, \quad (5.1.3)$$

$$HB_l(T) = HB_{l,0} HB_l^*(T),$$

$$HB_l^*(T) = HB_{l,1} + \frac{HB_{l,2}}{[HB_{l,3}(T - HB_{l,6})]^2 + 1} + \frac{HB_{l,4}}{[HB_{l,5}(T - HB_{l,7})]^2 + 1}. \quad (5.1.4)$$

Przy czym:  $K$  – przewodność cieplna,  $\rho$  – gęstość,  $c$  – ciepło właściwe,  $HB$  – twardość Brinella,  $K_{l,0}, \rho_{l,0}, c_{l,0}, HB_{l,0}$  – wartości właściwości materiałów w temperaturze pokojowej, zaś  $T_a$ , a  $K_{l,i}, c_{l,i}, \rho_{l,i}, HB_{l,i}$ ,  $i = 1,2,..,7$  to stałe współczynniki wyznaczone zgodnie z metodyką zaproponowaną w monografii [27]. Dyfuzyjność cieplną wyznaczono ze wzoru:

$$k_l(T) = \frac{K_l(T)}{\rho_l(T)c_l(T)}. \quad (5.1.5)$$

Wzajemne oddziaływanie powierzchni roboczych elementów ciernych w czasie poślizgu zachodzi jedynie w pewnej części obszaru nominalnego, utworzonego

przez tzw. płaskowyż chropowatości [39, 69]. Obszary te formułują kontury powierzchni, które to z kolei określają granice występowania rzeczywistych miejsc styku chropowatości. W ten sposób powstaje konturowy obszar kontaktu o polu powierzchni  $A_c$ , zmieniającym się w czasie hamowania zgodnie ze wzorem [36]:

$$A_c(t) = A_a \left[ \frac{p(t)b_0^{v-1}}{HB_{\min}(t)} \right]^{\frac{1}{v+1}}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (5.1.6)$$

$$HB_{\min}(t) = \min[HB_1(t), HB_2(t)], \quad HB_l(t) \equiv HB_l[T_m(t)], \quad l = 1, 2, \quad (5.1.7)$$

gdzie  $T_m(t)$  – profil czasowy średniej nominalnego obszaru kontaktu o polu  $A_a$ , zaś  $HB$  – twardość Brinella. Wartości  $b_0$ ,  $v$  są to natomiast parametry krzywej powierzchni odniesienia podstawowego (o większej twardości) elementu pary ciernej. W hamulcu tarczowym zazwyczaj takim elementem jest tarcza. Profil czasowy ciśnienia  $p_c$ , oddziałującego w obszarze konturowym o polu  $A_c$  (5.1.6), wyznaczono na podstawie wzoru [27]:

$$p_c(t) = p(t) \frac{A_a}{A_c(t)}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (5.1.8)$$

Biorąc pod uwagę warunki poślizgu podczas jednokrotnego procesu hamowania, założono, że:

- a) Przed wejściem w kontakt z powierzchnią nakładki temperatura chropowatości nie zmienia się wzdłuż jej wysokości i jest równa średniej temperaturze nominalnej powierzchni kontaktu  $T_m$ .
- b) Stykające się mikronierówności deformują się według mechanizmu plastycznego. Oznacza to, że kontakt wierzchołka chropowatości z powierzchnią elementu ciernego trwa do momentu przejścia jej materiału w stan plastyczny na skutek gwałtownego wzrostu temperatury i pojawienia się znaczących naprężeń termicznych.
- c) Wzajemne oddziaływania pomiędzy sąsiadującymi chropowatościami są pomijane.
- d) Chropowatości mają sferyczny kształt i znajdują się na znacznie twardszej i sztywniejszej powierzchni bieżni hamulcowej elementu podstawowego. Powierzchnia okładziny ciernej jest natomiast gładka.

Uwzględniając powyższe założenia, możemy stwierdzić, że styk pojedynczej chropowatości z gładką powierzchnią okładziny ciernej tworzą kołowy obszar kontaktu o średnicy  $d_r$ , wyznaczanej ze związku [37]:

$$d_r(t) = \left( \frac{8r_{av}h_{max}}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{p_c(t)}{HB_{min}(t)b_0} \right]^{\frac{1}{2\nu}}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (5.1.9)$$

gdzie  $r_{av}$ ,  $h_{max}$  są to odpowiednio uśredniony promień zaokrąglenia i maksymalna wysokość chropowatości. Sumaryczne pole  $A_r$  takich obszarów jest powiązane z polem powierzchni nominalnego obszaru kontaktu  $A_a$  następującą zależnością:

$$A_r(t) = A_a \frac{p(t)}{HB_{min}(t)}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (5.1.10)$$

Warto zaznaczyć, że wzory do wyznaczania pola  $A_r$  oraz średnicy  $d_r$  rzeczywistego obszaru kontaktu różnią się w zależności od zaistniałego mechanizmu odkształcenia wierzchołków chropowatości, który to może być: sprężysty, sprężystoplastyczny lub plastyczny [27]. Wzory (5.1.6)–(5.1.10) należy stosować przy mikrokontakcie plastycznym, którego wystąpienie jest najbardziej prawdopodobne podczas krótkotrwałego, intensywnego hamowania generującego znaczną ilość ciepła tarcioowego oraz wysoką temperaturę [27, 68].

Przebieg w czasie temperatury błysku  $T_f$  w obszarze rzeczywistego kontaktu elementów pary ciernej  $A_r$  (5.1.10) wyznaczono na podstawie wzoru [33, 55]:

$$T_f(t) = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{f\dot{p}(t)V(t)A_a d_r(t)}{A_r(t)[4K_1(t) + \sqrt{\pi V(t)d_r(t)}K_2(t)c_2(t)\rho_2(t)]}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (5.1.11)$$

gdzie właściwości materiałów zależą od wartości temperatury średniej  $T$  osiąganey w czasie  $t$ :

$$K_l(t) \equiv K_l[T(t)], \quad c_l(t) \equiv c_l[T(t)], \quad \rho_l(t) \equiv \rho_l[T(t)], \quad l=1,2. \quad (5.1.12)$$

Należy zaznaczyć, że powyższa postać rozwiązania (5.1.11) może być stosowana do obliczania temperatury błysku przy dowolnym mechanizmie odkształcenia chropowatości (sprężystym oraz plastycznym, ze wzmocnieniem lub bez wzmocnienia materiału).

Wyniki badań wskazują, że wartości temperatury średniej na nominalnej powierzchni ciernej uzyskane bez oraz z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiałów różnią się nawet o 10% [27]. Jednocześnie procedura wyznaczania temperatury średniej dla materiałów o właściwościach termofizycznych zależnych od stanu temperaturowego jest skomplikowana, ponieważ wymaga rozwiązania nieliniowych równań przewodzenia ciepła [61]. Inne, uproszczone podejście polega na wykorzystaniu rozwiązania liniowego zagadnienia cieplnego tarcia sformułowanego przy założeniu niezmiennych pod wpływem temperatury właściwości

materiałów. W takim przypadku do obliczeń przyjmuje się stałe termofizyczne wyznaczone przy uśrednionej w czasie hamowania temperaturze objętościowej elementów ciernych. Takie podejście daje zbliżone rezultaty do odpowiadających im wyników z rozwiązania nieliniowego zagadnienia przewodzenia ciepła, z uwzględnieniem zmian właściwości materiałów pod wpływem temperatury [40].

W tym podrozdziale, zgodnie z opisanym powyżej podejściem, do wyznaczenia temperatury średniej osiągananej na nominalnej powierzchni kontaktu wykorzystamy liniowe zagadnienie przewodzenia ciepła (4.3.1)–(4.3.6), sformułowane dla układu dwóch półograniczonych elementów w warunkach idealnego kontaktu cieplnego. Rozwiązania tego zagadnienia znaleziono w postaci (4.3.18), przy eksponencjalnym (4.1.1) narastaniu ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania, oraz w postaci (4.3.24), (4.3.27), przy liniowym (4.1.2) jego profilu czasowym. Wpływ wrażliwości termicznej materiałów na rozkład temperatury średniej zostanie wzięty pod uwagę poprzez zamianę występujących w tych rozwiązaniach właściwości cieplnych  $K_{l,0}, k_{l,0}$ ,  $l = 1, 2$  na wartości  $K_l, k_l$  osiągane w uśrednionej temperaturze objętościowej  $\theta_l$  elementów pary ciernej, wyznaczone z zależności (5.1.1)–(5.1.5):

$$K_{l,0} \equiv K_l(\theta_l), \quad c_{l,0} \equiv c_l(\theta_l), \quad \rho_{l,0} \equiv \rho_l(\theta_l), \quad k_{l,0} \equiv k_l(\theta_l), \quad l = 1, 2, \quad (5.2.1)$$

gdzie wartość temperatury objętościowej, uśrednionej w czasie hamowania, obliczono ze wzorów [33]:

$$\theta_l = T_a + \mathcal{G}_{l,0} \mathcal{G}^*, \quad \mathcal{G}_{l,0} = \frac{\alpha_l \psi_l W_0}{G_l c_{l,0}}, \quad \mathcal{G}^* = \frac{2}{t_s} \int_0^{t_s} w^*(t) dt, \quad l = 1, 2, \quad (5.2.2)$$

$$\alpha_1 = 1 - \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{(1 + \varepsilon)}, \quad \varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}}, \quad K^* = \frac{K_2}{K_1}, \quad k^* = \frac{k_2}{k_1}. \quad (5.2.3)$$

Przy czym:  $G_l$  – efektywne masy elementów absorbujących ciepło tarciove,  $\psi_l$  – współczynniki uwzględniające spadek temperatury spowodowany przewodzeniem ciepła poza efektywną strefę nagrzewania tarciovego,  $\gamma_l$  – współczynniki rozdzielienia strumienia ciepła, zaś  $w^*(t)$  – bezwymiarowy profil czasowy pracy tarcia podczas hamowania.

Uwzględniając pod znakiem całki we wzorze (5.2.2) funkcję (4.2.9) opisującą zmiany z czasem pracy tarcia przy eksponencjalnym zwiększeniu ciśnienia kontaktowego, a następnie funkcję (4.2.19) przy liniowym jego wzroście, otrzymano:



$$\mathcal{G}^* = \frac{2t_i^2}{t_s t_s^0} \left[ 1 - \frac{t_i}{4t_s^0} + \left( \frac{t_s}{t_s^0} - 1 \right) e^{-t_s/t_i} + \frac{t_i}{4t_s^0} e^{-2t_s/t_i} \right] - \frac{t_i}{t_s^0} \left( 2 - \frac{t_s}{t_s^0} + \frac{t_i}{t_s^0} \right) + \frac{t_s}{t_s^0} \left( 1 - \frac{t_s}{3t_s^0} \right),$$

$$0 \leq t \leq t_s, \quad (5.2.4)$$

$$\mathcal{G}^* = \frac{t_i^2}{3t_s t_s^0} \left( 1 + \frac{t_i}{10t_s^0} \right) - \frac{t_i}{t_s^0} \left( 1 - \frac{t_s}{2t_s^0} + \frac{t_i}{4t_s^0} \right) + \frac{t_s}{t_s^0} \left( 1 - \frac{t_s}{3t_s^0} \right), \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (5.2.5)$$

Zatem wartość uśrednionej temperatury objętościowej  $\theta_l$ ,  $l=1,2$  elementów pary ciernej wyznaczono z zależności (5.2.2) i (5.2.3), z uwzględnieniem wzorów (5.2.4) lub (5.2.5) w przypadku hamowania, odpowiednio z eksponencjalnym lub liniowym profilem ciśnienia kontaktowego.

## 5.1.2. Analiza numeryczna

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla układu hamulcowego, którego węzeł cierny złożony jest z trzech jednakowych tarcz wykonanych z kompozytu węglowego Termar-ADF [108]. Właściwości tego materiału w temperaturze otoczenia  $T_a = 20^\circ\text{C}$  zawarto w tabeli 5.1.

Do określenia zmian właściwości materiału ciernego pod wpływem temperatury wykorzystano funkcje (5.1.1)–(5.1.5), których współczynniki  $K_{l,i}, c_{l,i}, HB_{l,i}$ ,  $i=1,2\dots,7$ ,  $l=1,2$  podano w tabeli 5.2. Ich wartości zaczerpnięto z pracy [126], w której wyznaczono je na podstawie danych doświadczalnych [32], za pomocą metody przedstawionej w artykule [128]. Gęstość  $\rho_{l,i}$  nie została wylistowana w tabeli 5.2, ponieważ w przypadku kompozytu Termar-ADF posiada ona stałą wartość  $\rho = \rho_0$  (tab. 5.1).

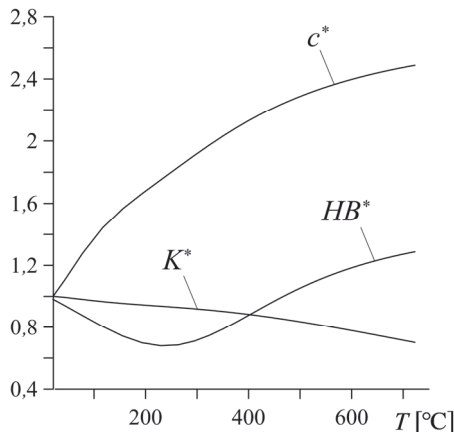
Bezwymiarowe funkcje aproksymujące współczynnik przewodzenia ciepła  $K^*$  (5.1.1), ciepło właściwe  $c^*$  (5.1.3) oraz twardość Brinella  $HB^*$  (5.1.4), ze współczynnikami odpowiadającymi charakterystykom kompozytu Termar-ADF (tab. 5.2), pokazano na rysunku 5.1.

Tabela 5.1. Właściwości materiału Termar-ADF w temperaturze  $T = 20^\circ\text{C}$  [32]

Parametr [jednostka]	Wartość
Ciepło właściwe $c_{l,0} = c_0$ [ $\text{J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ]	728,5
Gęstość materiału $\rho_{l,0} = \rho_0$ [ $\text{kg m}^{-3}$ ]	1800
Przewodność cieplna $K_{l,0} = K_0$ [ $\text{W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ]	21
Twardość Brinella $HB_{l,0} = HB_0$ [MPa]	90

Tabela 5.2. Współczynniki funkcji aproksymujących (5.1.1), (5.1.3) oraz (5.1.4) dla materiału Termar-ADF,  $l = 1, 2$  [126]

$i$	$K_{l,i}$	$c_{l,i}$	$HB_{l,i}$	Jednostka
1	0,11058	2,73824	1,50757	–
2	0,77810	7,52444	-8685,32	–
3	0,0012147	0,0047894	0,781381	$^\circ\text{C}^{-1}$
4	0,18735	-9,11912	-0,82528	–
5	0,0064472	0,0043811	0,0034893	$^\circ\text{C}^{-1}$
6	246,3	57,88	2232,2	$^\circ\text{C}$
7	-34,5	43,4	238,1	$^\circ\text{C}$



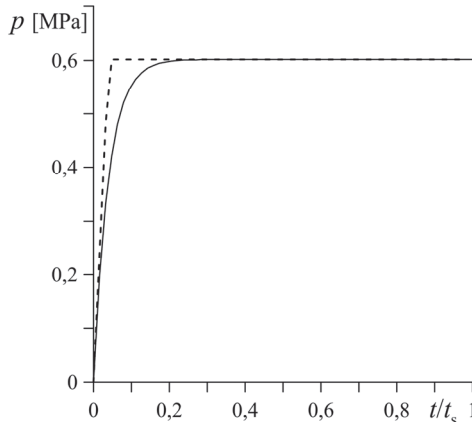
Rysunek 5.1. Bezwymiarowe funkcje aproksymujące zmiany: przewodności cieplnej  $K^*$ , ciepła właściwego  $c^*$  oraz twardości Brinella  $HB^*$  w zależności od temperatury  $T$

Parametry operacyjne takie jak: początkowa prędkość poślizgu  $V_0$ , ciśnienie nominalne  $p_0$ , współczynnik tarcia  $f$ , początkowa energia kinetyczna układu  $W_0$ , pole nominalnej powierzchni kontaktu  $A_a$ , temperatura otoczenia  $T_a$  oraz czas narastania ciśnienia  $t_i$  zawarto w tabeli 4.1. Poza tym przyjęto, że  $\psi_1 = 0,92$ ,

a  $\psi_2 = 1$  [75]. Wartości parametrów charakteryzujących chropowatość powierzchni ciernych zostały wzięte z artykułu [32]:  $v = 1,5$ ,  $b_0 = 2,5$ ,  $r_{av} = 6,3 \cdot 10^{-4}$  m, zaś  $h_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-6}$  m.

Bazując na zadanych parametrach wejściowych, z zależności (4.2.4) wyznaczono czas hamowania przy stałym opóźnieniu  $t_s^0 = 12,12$  s, ze wzoru (4.2.8) – nominalną gęstość mocy tarcia  $q_0 = 3,87$  MWm<sup>-2</sup>, a ze wzoru (4.2.9) – nominalną gęstość pracy tarcia  $w_0 = 46,87$  MJm<sup>-2</sup>. Efektywna głębokość przenikania ciepła wyniosła wtedy:  $a_l = \sqrt{3k_{l,0}t_s^0} = 0,014$  m, a efektywna masa elementów absorbujących ciepło tarciove –  $G_l = 3A_a a_l \rho_{l,0} = 0,167$  kg,  $l = 1,2$ . W rozpatrywanym układzie elementy cierne wykonane są z jednakowego materiału, w związku z czym ciepło tarciove generowane na powierzchniach kontaktu jest absorbowane przez elementy pary ciernej w takim samym stopniu. Dlatego też wartość współczynnika rozdzielenia strumienia ciepła (5.2.3) wynosi  $\alpha_l = \gamma = 0,5$ ,  $l = 1,2$ .

Analizę przeprowadzono dla dwóch wariantów zmiany z czasem ciśnienia kontaktowego – eksponencjalnego (4.1.1) oraz liniowego (4.1.2) (rys. 5.2). W przypadku liniowego profilu ciśnienia (linia przerywana) jego wzrost następuje bardziej gwałtownie, a wartość nominalna  $p_0$  osiągnięta jest wcześniej. Linia ciągła reprezentuje natomiast łagodniejszy wzrost ciśnienia kontaktowego, opisanego funkcją eksponencjalną (4.1.1). Czas trwania obu procesów hamowania nie jest jednakowy. Przy liniowym wzroście ciśnienia kontaktowego czas hamowania obliczony ze związku (4.2.17) wynosi  $t_s = 12,37$ s. Przy eksponencjalnym wzroście ciśnienia, zgodnie ze wzorem (4.2.11), proces trwa nieco dłużej  $t_s = 12,61$ s.

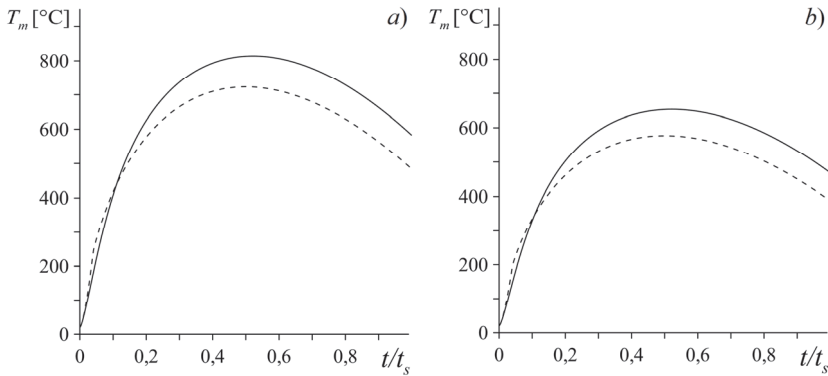


Rysunek 5.2. Zmiany ciśnienia  $p$  następujące wraz z czasem hamowania na nominalnej powierzchni kontaktu: eksponencjalnego (4.1.1) (linia ciągła) oraz liniowego (4.1.2) (linia przerywana)

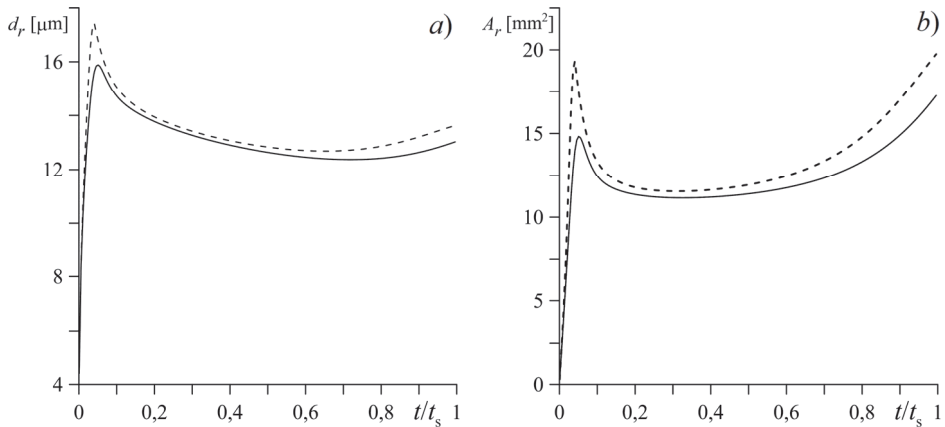
Przed rozpoczęciem analizy ewolucji temperatury należy wyznaczyć wartości uśrednionej temperatury objętościowej dla obu rozpatrywanych przypadków hamowania. Przy eksponencjalnym profilu ciśnienia na podstawie zależności (5.2.2) oraz (5.2.4) ustalono, że temperatura objętościowa  $\theta_l \cong 566^\circ\text{C}$ ,  $l=1,2$ . Z kolei dla przypadku liniowego wzrostu ciśnienia ze wzorów (5.2.2), (5.2.5) otrzymano  $\theta_l \cong 576^\circ\text{C}$ ,  $l=1,2$ . Za pomocą funkcji aproksymujących (5.1.1) oraz (5.1.3), z wykorzystaniem współczynników podanych w tabelach 5.1 i 5.2, wyznaczono przewodność cieplną  $K_{l,\theta}$  oraz ciepło właściwe  $c_{l,\theta}$  (5.2.1). Dla eksponencjalnie narastającego ciśnienia otrzymano:  $K_{l,\theta} = 16,75 \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $c_{l,\theta} = 1723,5 \text{ J kg}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $l=1,2$ , zaś przy jego liniowym wzroście znaleziono:  $K_{l,\theta} = 16,64 \text{ Wm}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $c_{l,\theta} = 1730 \text{ J kg}^{-1}\text{C}^{-1}$ ,  $l=1,2$ .

Obliczenia temperatury wykonano z uwzględnieniem właściwości cieplnych materiału wyznaczonych przy uśrednionej temperaturze objętościowej, a także przy właściwościach w temperaturze otoczenia w chwili rozpoczęcia hamowań. Analiza porównawcza obu wariantów hamowania pozwoliła ustalić wpływ wrażliwości termicznej materiału ciernego na temperaturę układu. Ewolucje temperatury średniej  $T_m(t)$  osiąganą podczas hamowań  $0 \leq t/t_s \leq 1$  na nominalnej powierzchni kontaktu przedstawiono na rysunku 5.3. Temperatura wyznaczona z rozwiązania (4.3.18) przy eksponencjalnym wzroście ciśnienia (linie ciągłe) jest wyższa w porównaniu z odpowiadającą mu temperaturą średnią wyznaczoną z rozwiązania (4.3.24), (4.3.27) przy liniowo rosnącym ciśnieniu (linie przerywane). Wartości temperatury średniej obliczone przy właściwościach termicznych materiału tarcz określonych przy temperaturze objętościowej  $K_{l,\theta}$ ,  $c_{l,\theta}$  (rys. 5.3a) są większe niż odpowiadające im wartości otrzymane dla właściwości materiału  $K_{l,0}$ ,  $c_{l,0}$  przy temperaturze początkowej  $T_a$  (rys. 5.3b). Najwyższe wartości temperatury średniej osiągnęte są blisko połowy czasu hamowania i przy eksponencjalnym ciśnieniu wynoszą odpowiednio  $814,4^\circ\text{C}$  i  $653,6^\circ\text{C}$  (przyrost wartości o 19,75%), a przy liniowej zmianie ciśnienia  $722,9^\circ\text{C}$  i  $576,9^\circ\text{C}$  (przyrost wartości o 20,2%).

Przebiegi zmian średnicy  $d_r$  (5.1.9) oraz pola  $A_r$  (5.1.10) obszaru kontaktu rzeczywistego przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu zaprezentowano na rysunku 5.4. Profil czasowy ciśnienia kontaktowego  $p(t)$  wpływa na wielkość pola rzeczywistego obszaru kontaktu. Widzimy, że wyższa wartość ciśnienia na początku procesu hamowania w przypadku liniowego wzrostu (rys. 5.3, linie przerywane) powoduje wzrost wielkości obszarów mikrokontaktów, a co za tym idzie również całkowitego pola powierzchni rzeczywistego kontaktu.



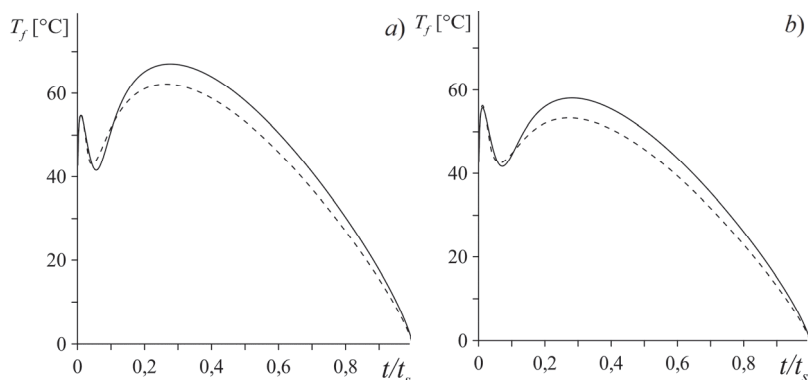
Rysunek 5.3. Ewolucje temperatury średniej  $T_m$  podczas hamowania przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: *a*) z uwzględnieniem oraz *b*) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału



Rysunek 5.4. Zmiany w czasie hamowania: *a*) średnicy  $d_r$ , *b*) pola powierzchni rzeczywistego obszaru kontaktu  $A_r$  przy eksponencjalnym (linie ciągłe) oraz liniowym wzroście ciśnienia (linie przerywane)

Zmiany temperatury błysku  $T_f(t)$  osiąganey w czasie poślizgu na rzeczywistym obszarze kontaktu ciernego  $A_r$  przedstawiono na rysunku 5.5. Obliczenia zostały wykonane zgodnie z wybranym mechanizmem plastycznego odkształcenia chropowatości powierzchni roboczych. Rozwiązanie analityczne (5.1.11), na podstawie którego przeprowadzono obliczenia, zawiera funkcje współczynnika przewodzenia ciepła, ciepła właściwego oraz twardości materiału ciernego zależne od temperatury średniej  $T_m$ . Dlatego też profil tej ostatniej ma znaczący wpływ na zmiany wartości temperatury błysku. W rozpatrywanym układzie, którego elementy cierne wykonane są z kompozytu węglowego Termar-ADF, temperatura błysku

jest o wiele niższa od poziomu osiągniętej temperatury średniej. Najwyższe wartości temperatury błysku osiągnęte są w początkowym etapie hamowań, kiedy elementy cierne są jeszcze względnie chłodne. Najwyższą wartość temperatury błysku ( $67^{\circ}\text{C}$ ) zaobserwowano podczas hamowania przy eksponencjalnej zmianie ciśnienia kontaktowego (linie ciągłe), z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiału (rys. 5.5a).

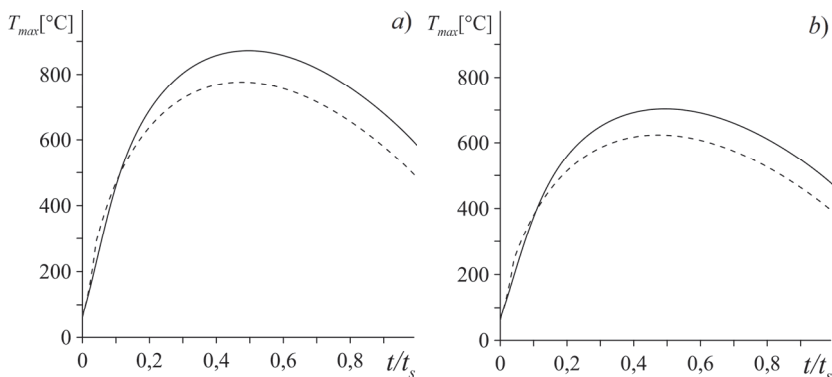


Rysunek 5.5. Zmiany temperatury błysku  $T_f$  podczas hamowania przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: a) z uwzględnieniem oraz b) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału

Znając rozkłady temperatury średniej  $T_m$  na nominalnej powierzchni kontaktu (rys. 5.2) oraz temperatury błysku  $T_f$  rzeczywistej powierzchni tarcia (rys. 5.4), możemy wyznaczyć maksymalną temperaturę układu [33]:

$$T_{\max}(t) = T_m(t) + T_f(t), \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (5.3.1)$$

Wyniki otrzymane na podstawie wzoru (5.3.1) zaprezentowano na rysunku 5.6. Przebieg temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  podczas hamowania rozpatrywanego układu hamulcowego jest uzależniony głównie od rozkładu czasowego temperatury średniej  $T_m$  (rys. 5.3). Przy eksponencjalnym wzroście ciśnienia najwyższe wartości  $T_{\max}$  wynoszą odpowiednio  $872^{\circ}\text{C}$  i  $703,6^{\circ}\text{C}$  z uwzględnieniem oraz bez uwzględniania wrażliwości termicznej materiału ciernego Termar-ADF (przyrost o 19,3%). W przypadku liniowego wzrostu ciśnienia wartości te wynoszą odpowiednio  $776,95^{\circ}\text{C}$  i  $622,93^{\circ}\text{C}$  (przyrost o 19,82%).



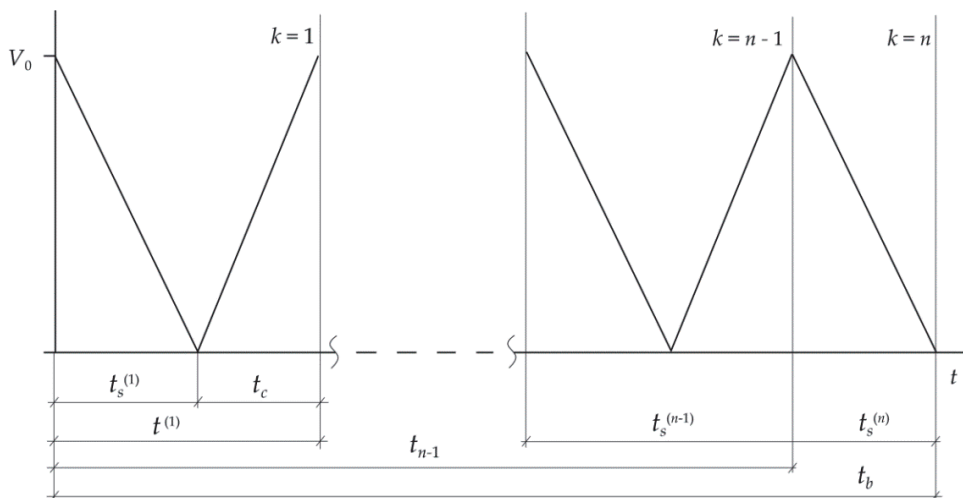
Rysunek 5.6. Przebieg w czasie hamowania temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: a) z uwzględnieniem oraz b) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału

## 5.2. Powtórno-krótkotrwały tryb hamowania

Powtórno-krótkotrwały (PKT) tryb hamowania polega na powtórным wykonywaniu przez układ krótkotrwałych hamowań aż do zatrzymania, pomiędzy którymi następuje rozpędzanie pojazdu [6, 29]. Tryb ten zawiera określoną liczbę cykli składających się z etapów hamowania i rozpędzania, podczas których para cierna jest kolejno nagrzewana i konwekcyjnie chłodzona [4, 5]. Celem badań przedstawionych w tym podrozdziale jest opracowanie analitycznego modelu obliczeniowego mającego posłużyć do znalezienia maksymalnej temperatury podczas PKT trybu pracy tarcowego układu hamulcowego.

### 5.2.1. Schemat hamowania oraz założenia modelowe

Rozpatrywany jest układ hamulcowy pracujący w trybie PKT. Polega on na wykonaniu kolejno  $n-1$  pełnych oraz jednego  $n$ -tego, niepełnego cyklu pracy (rys. 5.7). Każdy z pełnych cykli składa się z dwóch etapów. Na etapie pierwszym (hamowanie) prędkość liniowa poślizgu  $V^{(k)}$  zmniejsza się od wartości początkowej  $V_0$  do zera w czasie  $t = t_s^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Natychmiast po zatrzymaniu zaczyna się etap drugi (rozpędzanie), polegający na zwiększeniu prędkości do wartości początkowej  $V_0$  w czasie  $t = t_c$ . Tak więc czas trwania jednego cyklu jest równy  $t_k = t_s^{(k)} + t_c$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , zaś całkowity czas wykonania wszystkich pełnych cykli wynosi  $t_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} t_k$ . W ostatnim, niepełnym cyklu ma miejsce tylko hamowanie, podczas którego prędkość  $V^{(n)}$  ponownie spada od wartości początkowej  $V_0$  do zera w chwili zatrzymania  $t = t_s^{(n)}$ . Tak więc całkowity czas trwania rozpatrywanego PKT trybu pracy hamulca wynosi  $t_n = t_{n-1} + t_s^{(n)}$ .



Rysunek 5.7. Schemat przebiegu prędkości pojazdu podczas trybu PKT hamowania

Etapom hamowania towarzyszy intensywne nagrzewanie tarcieowe elementów pary ciernej układu (nakładka-tarcza, szczeka-bęben, itd.). Stąd wynika, że wartości współczynnika tarcia oraz cieplno-fizycznych właściwości materiałów pary przed rozpoczęciem i po ukończeniu każdego hamowania mogą się różnić. W związku z tym zakładamy, że podczas  $k$ -tego hamowania współczynniki przewodnictwa cieplnego  $K_l$ , gęstości  $\rho_l$ , ciepła właściwego  $c_l$ , twardości Brinella  $HB_l$  i dyfuzji cieplnej  $k_l$ ,  $l=1,2$  materiałów pary ciernej są funkcjami temperatury  $T$  (5.1.1)–(5.1.4), a funkcja opisująca zależność współczynnika tarcia  $f$  od temperatury ma postać:

$$f(T) = f_0 f^*(T), \quad f_0 = f(T_0),$$

$$f^*(T) = f_1 + \frac{f_2}{[f_3(T - f_4)]^2 + 1} + \frac{f_5}{[f_6(T - f_7)]^2 + 1}, \quad (5.2.1)$$

gdzie  $T_0$  – początkowa (otoczenia) temperatura układu, zaś  $f_j$ ,  $j=1,2,\dots,7$  – współczynniki aproksymacji odpowiednich danych eksperymentalnych [33]. Pozostałe założenia modelu obliczeniowego są następujące:

- W początkowym momencie każdego etapu hamowania element cierny jest dociskany do powierzchni roboczej elementu podstawowego równomiernym ciśnieniem  $p$ , zwiększającym się eksponencjalnie w czasie  $0 \leq t \leq t_s^{(k)}$  w każdym cyklu  $k = 1, 2, \dots, n$ , zgodnie ze wzorem (4.1.1).



- b) W chwili rozpoczęcia  $k$ -tego hamowania temperatura elementów ciernych równa jest uśrednionej temperaturze objętościowej układu  $T_0^{(k)}$ .
- c) W wyniku oddziaływania sił tarcia w obszarze kontaktu generowane jest ciepło, które następnie absorbowane jest przez elementy w kierunku normalnym do powierzchni cierniej.
- d) Kontakt cieplny tarcia elementów jest pełny. Oznacza to, że suma intensywności strumieni ciepła skierowanych do nich jest równa gęstości mocy tarcia, a wartości temperatury powierzchni ciernych obu elementów są jednakowe.
- e) Podczas wykonywania kolejnych hamowań powierzchnie wolne układu hamulcowego są adiabatyczne. Na etapach rozpędzania zachodzi natomiast ich niewymuszone chłodzenie konwekcyjne.

Przy eksponencjalnym profilu czasowym ciśnienia (4.1.1) redukcja wraz z upływem czasu liniowej prędkości  $V^{(k)}$  podczas  $k$ -tego hamowania odbywa się według rozwiązania (4.2.5), którego uogólnienie do przypadku hamowania w trybie PKT ma postać:

$$V^{(k)}(t) = V_0 V^{*(k)}(t), \quad V^{*(k)}(t) = 1 - \frac{t}{t_{s,0}^{(k)}} + p^*(t) \frac{t_i}{t_{s,0}^{(k)}}, \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.2)$$

gdzie czas zatrzymania przy hamowaniu ze stałym spowolnieniem wyznaczono ze wzoru:

$$t_{s,0}^{(k)} = \frac{2W_0}{q_0^{(k)} A_a}. \quad (5.2.3)$$

Czas  $k$ -tego hamowania  $t_s^{(k)}$  ustalono natomiast z warunku zatrzymania:

$$V^{*(k)}(t_s^{(k)}) = 0. \quad (5.2.4)$$

Na etapach rozpędzania prędkość zwiększa się liniowo wraz z upływem czasu:

$$V^{*(k)}(t) = \frac{t - t_s^{(k)}}{t_c}, \quad t_s^{(k)} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.5)$$

Zmiany maksymalnej temperatury  $T_{\max}^{(k)}$ , zachodzącej wraz z upływem czasu na powierzchni tarcia przy  $k$ -tym cyklu hamowania poszukiwano na podstawie hipotezy sumacyjnej (5.3.1) mającej postać:

$$T_{\max}^{(k)}(t) = T_m^{(k)}(t) + T_f^{(k)}(t), \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.6)$$

gdzie  $T_m^{(k)}$  – temperatura średnia nominalnego obszaru kontaktu, a  $T_f^{(k)}$  – temperatura obszaru kontaktu rzeczywistego (błysk temperaturowy) podczas trwania  $k$ -tego cyklu hamowania.

## 5.2.2. Model obliczeniowy

Z uwzględnieniem przyjętych wyżej założeń w jakości obliczeniowego schematu, do znalezienia temperatury średniej  $T_m^{(k)}$  przyjęto schemat tarcowego kontaktu dwóch różnorodnych półograniczonych ciał  $0 \leq z < \infty$  ( $l=1$ ) i  $-\infty < z \leq 0$ , ( $l=2$ ), ślizgających się ze względną prędkością  $V^{(k)}(t)$  (5.2.3)–(5.2.5). Nieustalone pole temperatury  $T^{(k)}(z,t)$  takiego układu podczas  $k$ -tego  $k=1,2,\dots,n$  cyklu hamowania, inicjowane tarcowym nagrzewaniem, wyznaczono z rozwiązania następującego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial^2 T^{(k)}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_{1,0}^{(k)}} \frac{\partial T^{(k)}(z,t)}{\partial t}, \quad 0 < z < \infty, \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad (5.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 T^{(k)}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{k_{2,0}^{(k)}} \frac{\partial T^{(k)}(z,t)}{\partial t}, \quad -\infty < z < 0, \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad (5.2.8)$$

$$K_{2,0}^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0^-} - K_{1,0}^{(k)} \frac{\partial T^{(k)}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = q^{(k)}(t), \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad (5.2.9)$$

$$T^{(k)}(0^+, t) = T^{(k)}(0^-, t) \equiv T_m^{(k)}(t), \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad (5.2.10)$$

$$T^{(k)}(z,t) \rightarrow T_0^{(k)}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad (5.2.11)$$

$$T^{(k)}(z,0) = T_0^{(k)}, \quad |z| < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.12)$$

gdzie:

$$q^{(k)}(t) = q_0^{(k)} q^{*(k)}(t), \quad q_0^{(k)} = f_0^{(k)} p_0 V_0, \quad q^{*(k)}(t) = p^*(t) V^{*(k)}(t), \quad (5.2.13)$$

$$k_{l,0}^{(k)} = \frac{K_{l,0}^{(k)}}{\rho_{l,0}^{(k)} c_{l,0}^{(k)}}, \quad l = 1, 2, \quad (5.2.14)$$

$$f_0^{(k)} = f(T_0^{(k)}), \quad K_{l,0}^{(k)} = K_l(T_0^{(k)}), \quad c_{l,0}^{(k)} = c_l(T_0^{(k)}), \quad \rho_{l,0}^{(k)} = \rho_l(T_0^{(k)}), \quad l = 1, 2, \quad (5.2.15)$$

wartości współczynnika tarcia  $f_0^{(k)}$  oraz właściwości materiałów ciernych  $K_{l,0}^{(k)}$ ,  $\rho_{l,0}^{(k)}$ ,  $c_{l,0}^{(k)}$ ,  $l = 1, 2$  zostały wyznaczone na podstawie funkcji (5.1.1), (5.1.2),

(5.1.3) oraz (5.1.5) przy średniej temperaturze objętościowej  $T_0^{(k)}$  układu hamulcowego przed  $k$ -tym hamowaniem. Wartość tejże temperatury obliczono ze wzorów [27, 142]:

$$T_0^{(k)} = \frac{T_{0,0}^{(k)} + T_{0,1}^{(k)}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.16)$$

$$T_{0,i}^{(k)} = T_0 + \frac{\gamma_i W_0}{2G c_{1,i}} \left( \frac{e^{-\alpha_i t_c} - e^{-k\alpha_i t_c}}{1 - e^{-\alpha_i t_c}} \right), \quad i = 0, 1, \quad (5.2.17)$$

gdzie:

$$\gamma_i = \frac{\sqrt{K_{1,i} \rho_{1,i} c_{1,i}}}{\sqrt{K_{1,i} \rho_{1,i} c_{1,i}} + \sqrt{K_{2,i} \rho_{2,i} c_{2,i}}}, \quad (5.2.18)$$

$$\alpha_i = \frac{h A_{vent}}{G c_{1,i}}, \quad (5.2.19)$$

$$K_{l,1} = K_l(T_{0,0}^{(k)}), \quad c_{l,1} = c_l(T_{0,0}^{(k)}), \quad \rho_{l,1} = \rho_l(T_{0,0}^{(k)}). \quad (5.2.20)$$

Przy czym:  $h$  – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła z otoczeniem,  $G$  – masa podstawowego elementu (tarcza, bęben) pary ciernej oraz  $A_{vent}$  – pole powierzchni zewnętrznej (wentylowanej) tego elementu. Temperatura objętościowa układu przed pierwszym hamowaniem ( $k = 1$ ) jest równa temperaturze otoczenia  $T_0^{(1)} = T_0$ , co również wynika ze wzorów (5.1.16) i (5.1.17).

Dokładne rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa ciepła (5.2.7)–(5.2.12) przy hamowaniu jednokrotnym otrzymano w poprzednim rozdziale (4.3.18). Uogólniając to rozwiązanie na rozpatrywany przypadek hamowania wielokrotnego, poszukiwaną temperaturę powierzchni ciernej przedstawiono w postaci:

$$T_m^{(k)}(t) = T_0^{(k)} + \gamma_0^{(k)} T_{m,0}^{(k)} T_m^{*(k)}(t), \quad 0 \leq t \leq t_s^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.2.21)$$

gdzie:

$$T_m^{*(k)}(t) = \sqrt{\frac{t}{t_{s,0}^{(k)}}} \left[ \left( 1 + \frac{3t_i - 2t}{3t_{s,0}^{(k)}} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \left( 1 + \frac{3t_i - 2t}{2t_{s,0}^{(k)}} \right) D \left( \sqrt{\frac{t}{t_{s,0}^{(k)}}} \right) + \frac{t_i}{t_{s,0}^{(k)}} D \left( \sqrt{\frac{2t}{t_{s,0}^{(k)}}} \right) \right], \quad (5.2.22)$$

$$\gamma_0^{(k)} = \frac{\sqrt{K_{1,0}^{(k)} \rho_{1,0}^{(k)} c_{1,0}^{(k)}}}{\sqrt{K_{1,0}^{(k)} \rho_{1,0}^{(k)} c_{1,0}^{(k)} + \sqrt{K_{2,0}^{(k)} \rho_{2,0}^{(k)} c_{2,0}^{(k)}}}, \quad T_{m,0}^{(k)} = \frac{q_0^{(k)} a^{(k)}}{K_{1,0}^{(k)}}, \quad (5.2.23)$$

$$a^{(k)} = \max\{a_l^{(k)}\}, \quad a_l^{(k)} = \begin{cases} d_l, & a_{l,eff}^{(k)} \geq d_l, \\ a_{l,eff}^{(k)}, & a_{l,eff}^{(k)} < d_l, \end{cases}, \quad a_{l,eff}^{(k)} = \sqrt{3k_{l,0}^{(k)} t_{s,0}^{(k)}}, \quad (5.2.24)$$

$d_l, l=1,2$  – grubość elementów pary ciernej,  $a_{l,eff}^{(k)}$  – efektywna głębokość przenikania ciepła tarciovego, zaś funkcja  $D(\cdot)$  zdefiniowana jest wzorami (4.3.16), (4.3.17).

Zastosowany algorytm znalezienia średniej temperatury nominalnego obszaru kontaktu polegał na wykonaniu kolejno następujących kroków:

- a) Sporządzenie za pomocą wzorów aproksymacyjnych (5.1.1)–(5.1.3), (5.1.5) oraz (5.2.1) wykresów krzywych stabilności termicznej tarcia  $f(T)$  oraz zależności temperaturowej właściwości cieplno-fizycznych  $K_l(T)$ ,  $c_l(T)$ ,  $k_l(T)$  oraz  $\rho_l(T)$ ,  $l=1,2$  materiałów pary ciernej na podstawie danych doświadczalnych.
- b) Zadanie wartości wejściowych parametrów operacyjnych:  $p_0, V_0, T_0, W_0, n, A_a, h, G, t_i, t_c, d_l, K_{l,0}, c_{l,0}, \rho_{l,0}, l=1,2$ .
- c) Rozpoczęcie pierwszego ( $k=1$ ) hamowania.
- d) Wyznaczenie ze wzorów (5.2.16)–(5.2.20) średniej temperatury objętościowej  $T_0^{(k)}$ .
- e) Ustalenie, z wykorzystaniem zależności (5.1.1)–(5.1.3), (5.1.5) oraz (5.2.1), wartości współczynnika tarcia  $f_0^{(k)}$  oraz właściwości materiałów  $K_{l,0}^{(k)}, \rho_{l,0}^{(k)}, c_{l,0}^{(k)}, k_{l,0}^{(k)}, l=1,2$  przy temperaturze  $T_0^{(k)}$ .
- f) Wyznaczenie czasu zatrzymania  $t_s^{(k)}$  i profilu czasowego prędkości  $V^{(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_s^{(k)}$  ze wzorów (5.2.2)–(5.2.5).
- g) Ustalenie profilu czasowego temperatury średniej nominalnego obszaru kontaktu  $T_m^{*(k)}(t)$ ,  $0 \leq t \leq t_s^{(k)}$  (5.2.21)–(5.2.24).
- h) Sprawdzenie równości  $k=n$ . Jeżeli  $k \neq n$ , to przejście do kolejnego  $k+1$ -ego etapu hamowania i powtórzenie obliczeń, począwszy od etapu d). Zakończenie procesu obliczeniowego po stwierdzeniu równości  $k=n$ .

Oprócz średniej temperatury nominalnego obszaru kontaktu oszacowano również temperaturę błysku, związaną z rzeczywistym obszarem kontaktu. Wzajemne oddziaływanie powierzchni roboczych elementów ciernych w czasie poślizgu za-

chodzi jedynie w pewnej części obszaru nominalnego, utworzonego przez tzw. płaskowyz chropowatości [39, 69]. Regiony te formują kontury powierzchni określające granice występowania rzeczywistych miejsc styku chropowatości. W ten sposób powstaje konturowy obszar kontaktu o polu powierzchni  $A_c^{(k)}$ , które zmienia się w czasie cykli hamowania  $0 \leq t \leq t_s^{(k)}$  według wzoru (5.1.6), z uwzględnieniem zmiany twardości Brinella elementu ciernego o niższej twardości (5.1.7). Ciśnienie  $p_c^{(k)}$  oddziałujące w obszarze konturowym  $A_c^{(k)}$  wyznaczamy na podstawie wzoru (5.1.8). Przyjmując założenia odpowiednie dla plastycznego mechanizmu odkształcenia wierzchołków chropowatości przy mikrokontaktach, sumaryczne pole  $A_r^{(k)}$  rzeczywistego obszaru kontaktu podczas poszczególnych cykli hamowania wyznaczono na podstawie związków (5.1.9), (5.1.10).

Ewolucję temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  w czasie  $k$ -tego cyklu hamowania  $0 \leq t \leq t_s^{(k)}$  rzeczywistego obszaru kontaktu wyznaczono ze wzoru [54, 55]:

$$T_f^{(k)}(t) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{f_m^{(k)}(t)p(t)V^{(k)}(t)A_a d_r^{(k)}(t)}{A_r^{(k)}(t)[4K_{1,m}^{(k)}(t) + \sqrt{\pi}V^{(k)}(t)d_r^{(k)}(t)K_{2,m}^{(k)}(t)c_{2,m}^{(k)}(t)\rho_{2,m}^{(k)}(t)]}, \quad (5.2.25)$$

z uwzględnieniem zmian w zależności od aktualnej średniej temperatury, współczynnika tarcia

$$f_m^{(k)}(t) \equiv f[T_m^{(k)}(t)] \quad (5.2.26)$$

oraz właściwości cieplno-fizycznych materiałów ciernych  $l = 1, 2$ :

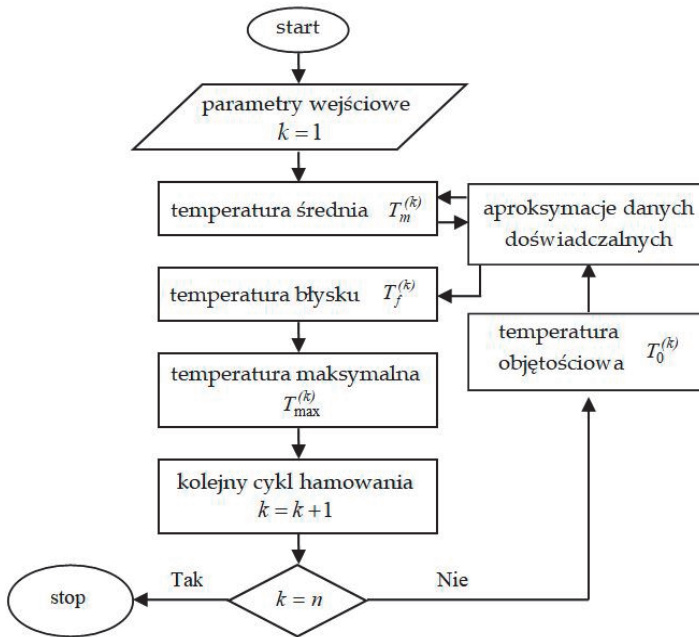
$$K_{l,m}^{(k)}(t) \equiv K_l[T_m^{(k)}(t)], \quad c_{l,m}^{(k)}(t) \equiv c_l[T_m^{(k)}(t)], \quad \rho_{l,m}^{(k)}(t) \equiv \rho_l[T_m^{(k)}(t)]. \quad (5.2.27)$$

Reasumując, zaproponowano taki następujący schemat wyznaczenia ewolucji temperatury błysku podczas  $k$ -tego hamowania, że:

- a) Na podstawie profilogramów powierzchni cierniej elementu podstawowego w kierunkach podłużnym i poprzecznym obliczono średnie wartości parametrów  $b_0$ ,  $\nu$ ,  $r_{av}$ ,  $h_{\max}$  charakteryzujących kształt chropowatości oraz ich rozkład po wysokości.
- b) Znając profil czasowy temperatury średniej nominalnego obszaru kontaktu  $T_m^{(k)}$  (5.2.21)–(5.2.24), za pomocą wzorów aproksymacyjnych (5.1.1)–(5.1.5) oraz (5.2.1) ustalono ewolucję  $HB_{l,m}^{(k)}$ ,  $f_m^{(k)}$ ,  $K_{l,m}^{(k)}$ ,  $c_{l,m}^{(k)}$ ,  $\rho_{l,m}^{(k)}$ ,  $l = 1, 2$ .

- c) Z uwzględnieniem profilu czasowego ciśnienia  $p$  (4.1.1) wyznaczono zmianę pola  $A_c^{(k)}$  (5.1.6) oraz ciśnienia  $p_c^{(k)}$  (5.1.8) konturowego obszaru kontaktu, następującą wraz z upływem czasu.
- d) Ustalono ewolucję średnicy obszaru mikrokontaktów  $d_r^{(k)}$  (5.1.9) oraz sumarycznego pola  $A_r^{(k)}$  rzeczywistych obszarów kontaktu (5.1.10).
- e) Obliczono, z uwzględnieniem profilu czasowego prędkości  $V^{(k)}$  (5.2.2)–(5.2.3), ewolucję temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  (5.2.25).

Schemat zastosowanego algorytmu obliczeniowego przedstawiono na rysunku 5.8.



Rysunek 5.8. Schemat procedury obliczeniowej

### 5.2.3. Analiza numeryczna

Na podstawie opracowanego algorytmu zbadano temperaturę powstałą podczas PKT trybu pracy dwóch układów hamulcowych: tarczowego oraz bębnowego. Temperaturę pierwszego z nich, tarczowego, analizowano wcześniej z wykorzystaniem metody różnic skończonych [142]. Odpowiednie ewolucje temperatury hamulca bębnowego podano natomiast w monografii [27], gdzie obliczenia temperatury średniej przeprowadzono na podstawie przybliżonego modelu z podrozdziału 1.3. Zaprezentowane niżej rezultaty obliczeń otrzymano przy zastosowaniu tych samych materiałów oraz parametrów operacyjnych, co i w wyżej wymienionych pracach. W obu układach rozpatrzono PKT tryb pracy hamulca zawierający cztery cykle ( $n = 4$ ): pierwszy niepełny (hamowanie) oraz trzy pełne (hamowanie i rozprędzanie). Tarczę w hamulcu tarczowym wykonano z żeliwa szarego ChNMKh, a nakładki – z metaloceramiki FMC-11. Bęben w hamulcu bębnowym wykonano ze stali 30KhHSA, zaś szczęki – z kompozytu retinaks FC-16L (tab. 5.3). Spiekany cermetalowy materiał cierny FMC-11 zawiera 64% Fe; 15% Cu; 3% SiO<sub>2</sub>; 2,6% BaSO<sub>4</sub>; 4,3% azbestu i 9% grafitu, zaś retinaks FC-16L jest to kompozyt stworzony na bazie żywic fenolowoformaldehydowych, wzmocniony opiłkami mosiądzu [127].

Tabela 5.3. Właściwości materiałów ciernych [27, 142]

Material	$f$	$K_t, \text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$	$c_t, \text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$	$\rho_t, \text{kg m}^{-3}$	$HB_t, \text{MPa}$
ChNMKh	0,45	52,2	444,6	7100	2100
FMC-11		35	479	4700	137
30KhHSA	0,39	38	490	7800	2050
FC-16L		0,8	961	2500	392

Wartości ciepłno-fizyczne poszczególnych właściwości materiałów oraz współczynników tarcia wybranych par ciernych w temperaturze początkowej podano w tabeli 5.3. Eksperymentalne dane dotyczące zmian właściwości rozpatrywanych materiałów przy zwiększaniu temperatury oraz dane badań doświadczalnych dotyczących tarciowej stabilności cieplnej par ciernych ChNMKh/FMC-11 i 30KhHSA/FC-16L są zawarte w monografiach [27, 33]. Wartości współczynników w funkcjach (5.1.1)–(5.1.3), (5.1.5) oraz (5.2.1) aproksymujących te dane podano w tabeli 5.4.

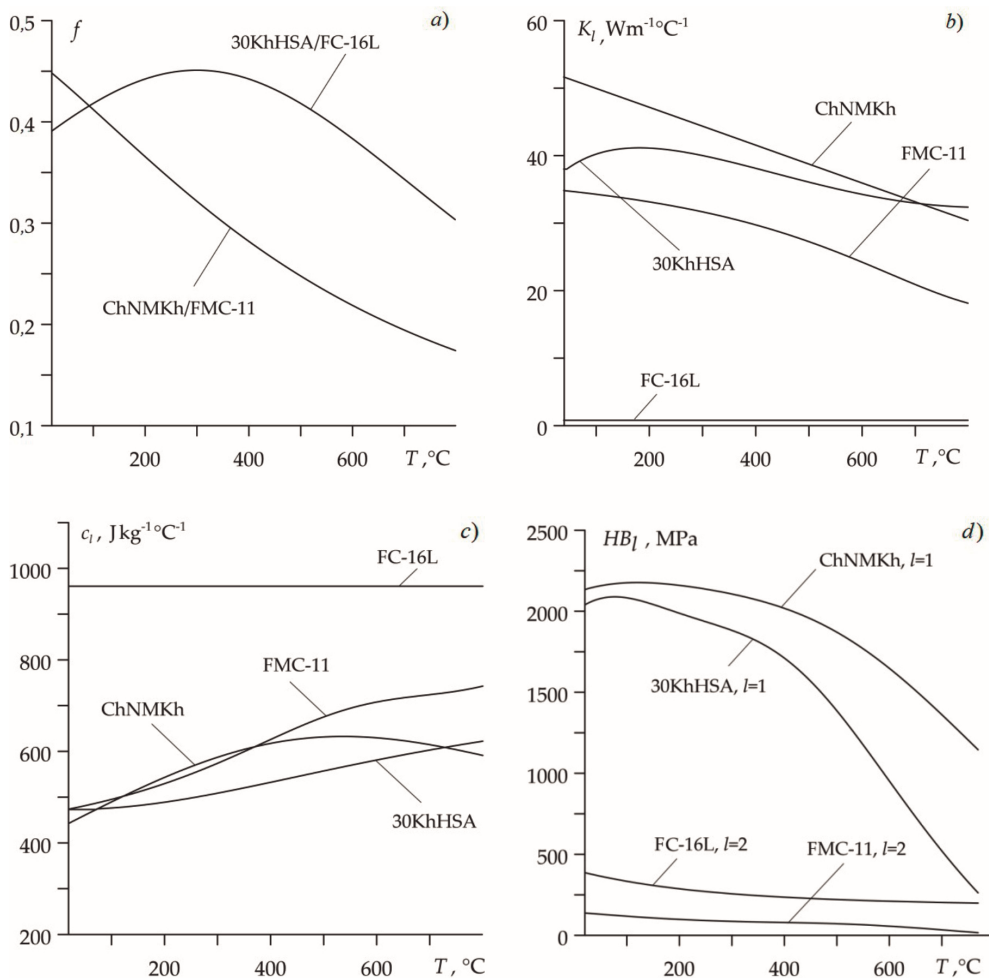
Tabela 5.4. Współczynniki aproksymacyjne w funkcjach (5.1.1)–(5.1.3), (5.1.5) oraz (5.2.1) dla rozpatrywanych materiałów ciernych

	Material	$i = 1, *$	$i = 2, *$	$i = 3, ^\circ\text{C}^{-1},$ $\times 10^3$	$i = 4, ^\circ\text{C}$	$i = 5, *$	$i = 6, ^\circ\text{C}^{-1},$ $\times 10^3$	$i = 7, ^\circ\text{C}$
$f_i$	ChNMKh/FMC-11	0,008	1,07	1,5	-250	0	0	0
	30KhHSA/FK-16L	0	1,1	0,0014	300	0	0	0
$K_{l,i}$	ChNMKh	-2,37	4,22	0,196	-254,3	0	0	0
	FMC-11	1,125	-0,639	2,3	900	0	0	0
	30KhHSA	2,455	-1,578	0,86	847	-1,05	6,3	-163
	FK-16L	1	0	0	0	0	0	0
$c_{l,i}$	ChNMKh	-0,85	6,6	0,57	4903	1,37	1,2	443
	FMC-11	0,775	0,7385	3,5	1059	0,5	2,6	573
	30KhHSA	2,996	-1,4	$2 \cdot 10^{-6}$	859	-0,59	1,36	20
	FK-16L	1	0	0	0	0	0	0
$HB_{l,i}$	ChNMKh	-0,54	1	2	-50	1	1,7	500
	FMC-11	-0,926	0,823	2,34	546	2,02	2	-233
	30KhHSA	-0,55	1	3,3	0	1	2,5	400
	FK-16L	0,43	1,05	3,5	-250	0	0	0

\* – wartości bezwymiarowe

Tu wzięto też pod uwagę fakt, że gęstości  $\rho_l$  wszystkich wybranych materiałów zmieniają się nieznacznie pod wpływem temperatury, w związku z czym wzór (5.1.2) przyjmuje postać  $\rho_l^*(T) = 1$ ,  $l = 1, 2$ . Wykresy funkcji  $f(T)$  (5.2.1),  $K_l(T)$  (5.1.1),  $c_l(T)$  (5.1.3) oraz  $HB_l(T)$  (5.1.4) dla obu rozpatrywanych par ciernych zaprezentowano na rysunku 5.9.



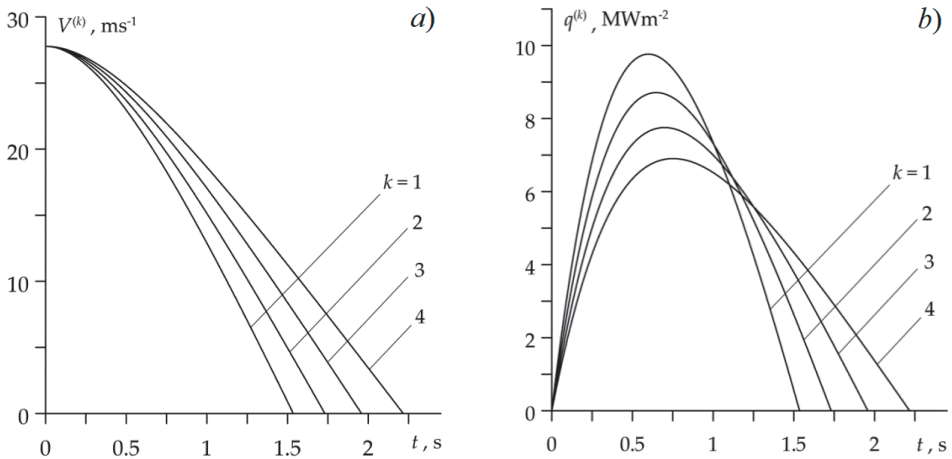


Rysunek 5.9. Wykresy funkcji aproksymujących dane eksperymentalne w zależności od temperatury: a) współczynnika tarcia  $f$ ; b) przewodności ciepła  $K_l$ ; c) ciepła właściwego  $c_l$ ; d) twardości Brinella  $HB_l$ ,  $l=1,2$

Wejściowe wartości parametrów operacyjnych dla tarczowego układu hamulcowego są następujące [9, 10]:  $p_0 = 1,47 \text{ MPa}$ ,  $V_0 = 27,78 \text{ m s}^{-1}$ ,  $W_0 = 392,1 \text{ kJ}$ ,  $G = 1,58 \text{ kg}$ ,  $A_a = 4,047 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $A_{vent} = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ ,  $d_1 = 5,5 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ mm}$ ,  $t_i = 0,5 \text{ s}$ ,  $t_c = 5 \text{ s}$ ,  $h = 100 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ,  $r_{av} = 450 \mu\text{m}$ ,  $h_{max} = 2,5 \mu\text{m}$ ,  $b_0 = 1,0$ ,  $\nu = 2,1$ . Na skutek geometrycznej symetrii tarczowego układu hamulcowego względem środkowej płaszczyzny tarczy, do wyznaczenia pola temperatury wystarczy rozpatrzyć układ cienny składający się z tarczy zastępczej i jednej nakładki o

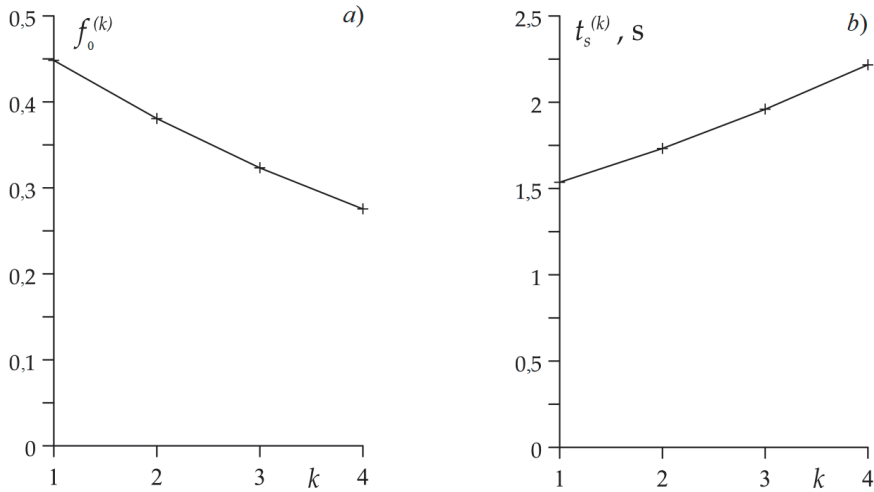
grubościach odpowiednio  $d_l$ ,  $l = 1, 2$ . Przy czym grubość tarczy zastępczej  $d_1$  równa jest połowie grubości tarczy rzeczywistej.

Profile czasowe prędkości  $V^{(k)}$  (5.2.2) oraz gęstości mocy tarcia  $q^{(k)}$  (5.2.13) podczas czterech hamowań zaprezentowano na rysunku 5.10. Z wyjątkiem początkowego okresu o trwałości około 0,5s, redukcja prędkości wraz z upływem czasu ma charakter liniowy, a czas zatrzymania zwiększa się z każdym kolejnym hamowaniem (rys. 5.11b). Gęstość mocy tarcia zwiększa się wraz z rozpoczęciem każdego hamowania aż do osiągnięcia wartości maksymalnej, po czym zmniejsza się do zera w chwili zatrzymania (rys. 5.10b). Jest to charakterystyczne dla tzw. racjonalnego trybu hamowania [150, 152]. Należy zaznaczyć, że praca tarcia wykonywana na każdym etapie hamowania (pole pod wykresem każdej z czterech krzywych na rysunku 5.10b) była jednakowa i równa początkowej kinetycznej energii układu  $W_0 = 392,1\text{kJ}$ .



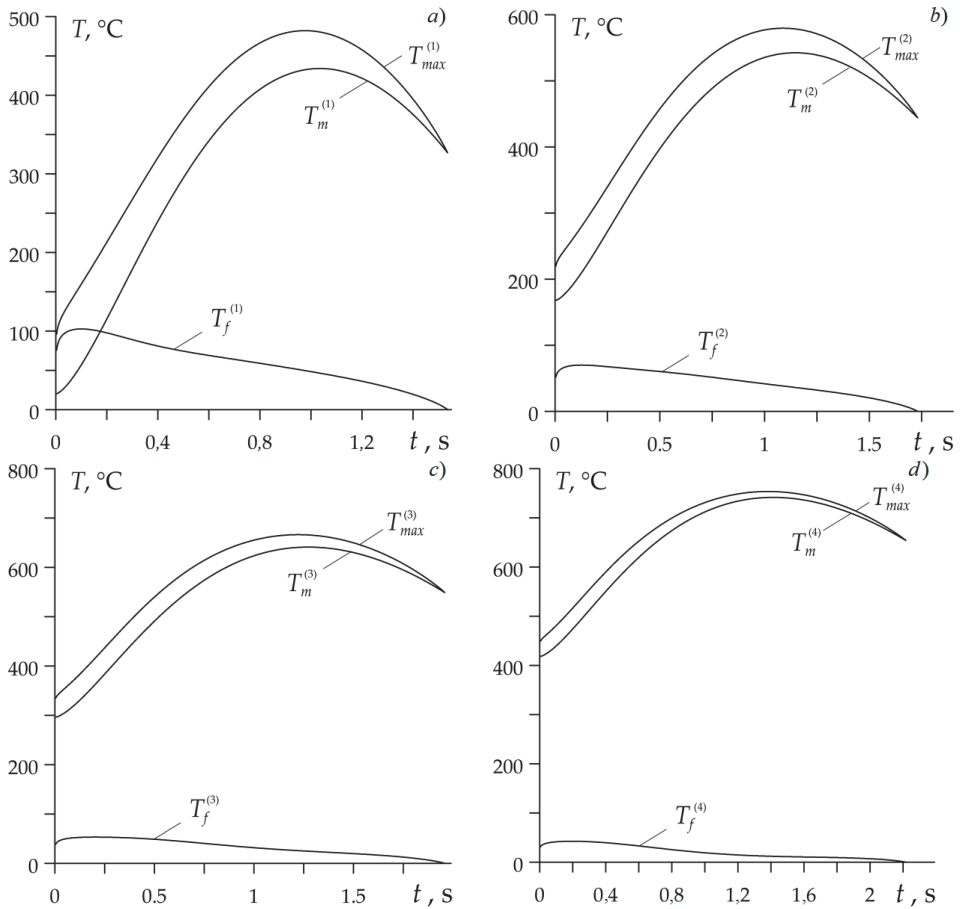
Rysunek 5.10. Zmiany w czasie poszczególnych cykli hamowania  $k = 1, 2, 3, 4$  przy PKT trybu pracy tarczowego układu hamulcowego: a) prędkości poślizgu tarczy  $V^{(k)}$ , b) gęstości mocy tarcia  $q^{(k)}$

Z każdym kolejnym hamowaniem współczynnik tarcia  $f_0^{(k)}$  (5.2.15) zmniejsza się od wartości 0,45 podczas pierwszego cyklu hamowania do wartości 0,28 przy ostatnim, czwartym cyklu (rys. 5.11a). Obniżenie współczynnika tarcia powoduje zwiększenie czasu zatrzymania  $t_s^{(k)}$  – jego wartości wynoszą odpowiednio 1,54s, 1,73s, 1,96s i 2,22s dla  $k = 1, 2, 3, 4$  (rys. 5.11b).



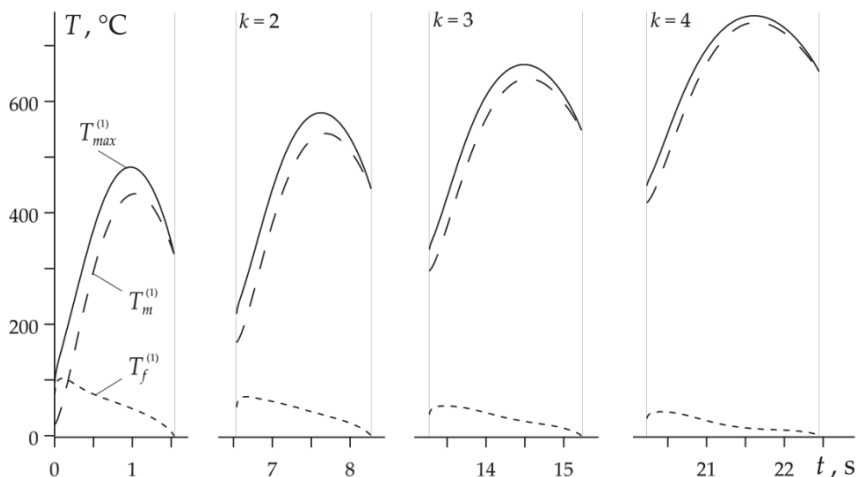
Rysunek 5.11. Wartości: a) współczynnika tarcia  $f_0^{(k)}$ , b) czasu hamowania  $t_s^{(k)}$  tarczowego układu hamulcowego w poszczególnych cyklach  $k = 1, 2, 3, 4$

Zmiany średniej temperatury  $T_m^{(k)}$  (5.2.21)–(5.2.24), temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  (5.2.25) oraz temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  (5.2.6) podczas każdego z czterech cykli pracy hamulca pokazano na rysunku 5.12. Ewolucja średniej temperatury nominalnego obszaru kontaktu podczas każdego hamowania przebiega odpowiednio do profili czasowych gęstości mocy tarcia zaprezentowanych na rysunku 5.11b. Początkowo ma miejsce wzrost  $T_m^{(k)}$  – aż do osiągnięcia maksymalnej wartości – a następnie jej spadek – aż do chwili zatrzymania. Zgodnie z przyjętym plastycznym mechanizmem deformacji chropowatości temperatura błysku osiąga znaczące wartości w początkowych chwilach poszczególnych etapów hamowania, kiedy w obszarze kontaktu nakładki z tarczą osiągnięta jest niska temperatura średnia, a następnie rozgrzewanie tego obszaru powoduje szybkie zmniejszenie  $T_f^{(k)}$ . Decydujący wpływ na profil czasowy oraz wartości temperatury maksymalnej ma średnia temperatura powierzchni ciernej. Przy czym z każdym następnym hamowaniem najwyższe wartości  $T_m^{(k)}$  oraz  $T_{\max}^{(k)}$  zwiększają się, natomiast  $T_f^{(k)}$  zmniejszają.



Rysunek 5.12. Ewolucje temperatury: średniej  $T_m^{(k)}$ , błysku  $T_f^{(k)}$  oraz maksymalnej  $T_{max}^{(k)}$  na powierzchni kontaktu nakładka-tarcza podczas kolejnych cykli: a)  $k=1$ , b)  $k=2$ , c)  $k=3$ , d)  $k=4$

Profile czasowe  $T_m^{(k)}$ ,  $T_f^{(k)}$  oraz  $T_{max}^{(k)}$  podczas wszystkich czterech cykli zaprezentowano na rysunku 5.13. Sumaryczny czas wykonania czterech hamowań stanowi 7,45 s, a z uwzględnieniem czasu trzech etapów rozprędkania 15 s, co daje całkowity czas trwania PKT trybu pracy tarczowego hamulca  $t_n = 22,45$  s.



Rysunek 5.13. Ewolucje temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  (linie ciągłe), średniej  $T_m^{(k)}$  (linie przerywane) oraz temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  (linie kropkowane) podczas PKT trybu hamowania układu tarczowego

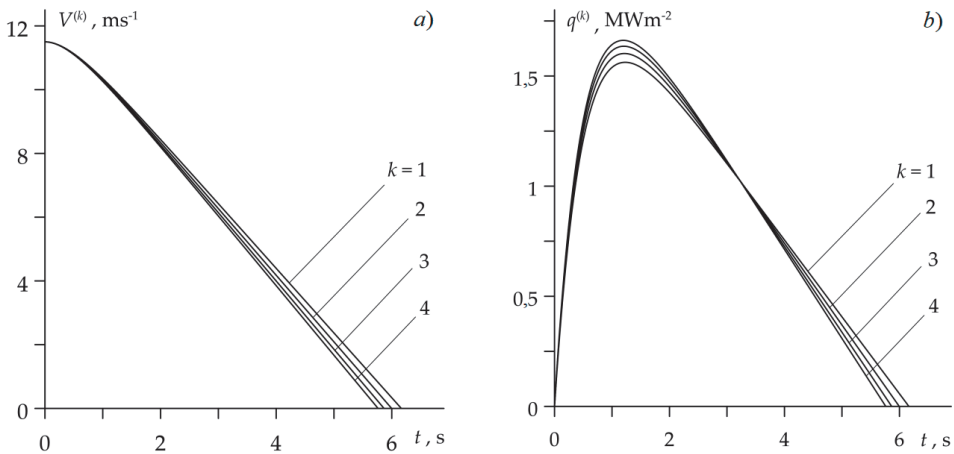
Rezultaty analizy przeprowadzonej dla tarczowego układu hamulcowego w postaci wartości współczynnika tarcia  $f^{(k)}$ , czasu zatrzymania  $t_s^{(k)}$  i temperatury objętościowej  $T_0^{(k)}$ , a także najwyższych wartości temperatury średniej  $T_m^{(k)}$ , temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  oraz temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  podczas wykonania każdego z czterech hamowań zademonstrowano w tabeli 5.5.

Tabela 5.5. Wartości wybranych charakterystyk w każdym cyklu hamowania

Wielkość	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$f^{(k)}$	0,45	0,38	0,32	0,28
$t_s^{(k)}$ , s	1,54	1,73	1,96	2,22
$T_0^{(k)}$ , °C	20	168	296	418
$\max T_m^{(k)}$ , °C	434	542	641	741
$\max T_f^{(k)}$ , °C	103	70	53	42
$\max T_{\max}^{(k)}$ , °C	482	560	666	753

Wartości parametrów wejściowych PKT trybu pracy pary cieńrej bębno-szczęka (odpowiednio  $l=1$  i  $l=2$ ), są następujące [27]:  $p_0=0,44\text{MPa}$ ,  $V_0=11,5\text{ms}^{-1}$ ,  $W_0=215,7\text{kJ}$ ,  $A_a=A_c=3,85\cdot 10^{-2}\text{m}^2$ ,  $A_{\text{vent}}=15\cdot 10^{-2}\text{m}^2$ ,  $G=5,5\text{kg}$ ,  $h=80\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ,  $d_1=10\text{mm}$ ,  $d_2=18\text{mm}$ ,  $t_i=0,5\text{s}$ ,  $t_c=25\text{s}$ ,  $r_{\text{av}}=500\mu\text{m}$ ,  $h_{\text{max}}=4,5\mu\text{m}$ ,  $b_0=1,0$ ,  $\nu=2,2$ .

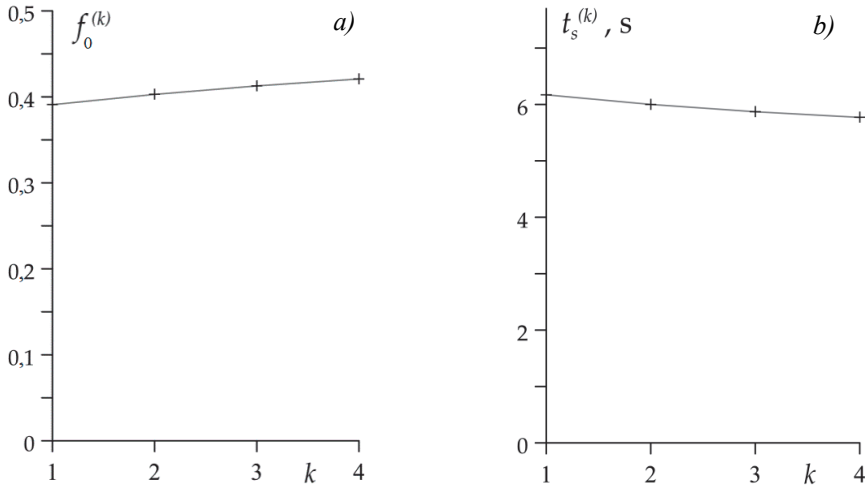
Ewolucje prędkości i gęstości mocy tarcia układu bębnowego, zaprezentowane na rysunku 5.14, są podobne do odpowiadających im wartości dla układu tarczowego z rysunku 5.10. Profile czasowe prędkości również zawierają krótki nieliniowy okres redukcji (rys. 5.14a), zaś profile gęstości mocy tarcia posiadają maksimum lokalne przesunięte tym razem bliżej początkowej chwili hamowania (rys. 5.14b). W odróżnieniu od układu tarczowego, czas trwania etapu hamowania w hamulcu bębnowym skraca się natomiast w każdym kolejnym cyklu hamowania, a maksymalna wartość gęstości mocy tarcia zmniejsza się.



Rysunek 5.14. Ewolucje w poszczególnych cyklach hamowania  $k=1,2,3,4$  podczas PKT trybu pracy bębnowego układu hamulcowego: a) prędkość poślizgu tarczy  $V^{(k)}$ , b) gęstość mocy tarcia  $q^{(k)}$

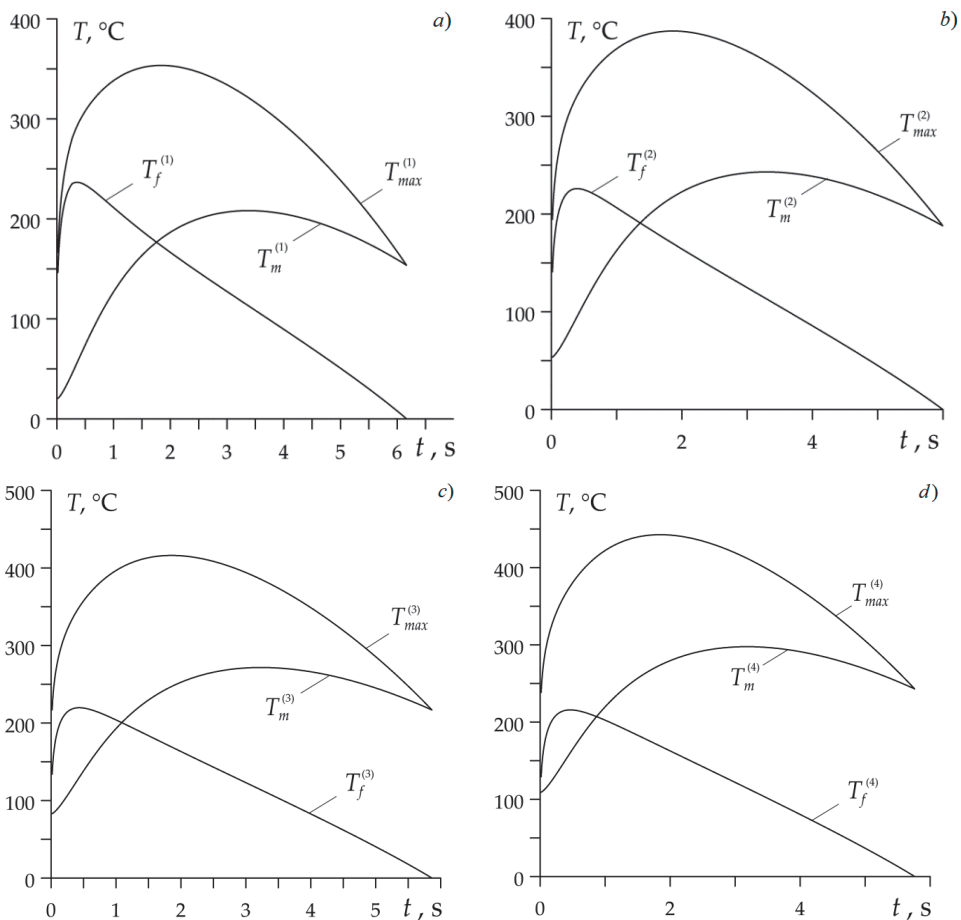
Widoczne na rysunku 5.14a skrócenie czasu kolejnych hamowań jest związane z odpowiednimi zmianami współczynnika tarcia: w rozpatrywanym układzie bębnowym jego wartość podczas pierwszego hamowania wynosi 0,39 i zwiększa się liniowo do 0,42 w momencie wykonywania czwartego hamowania (rys. 5.15a). Odpowiednie czasy zatrzymania są równe 6,17 s i 5,77 s (rys. 5.15b). Znacznie mniejsze niż w hamulcu tarczowym zmiany profili czasowych gęstości mocy tarcia podczas każdego hamowania (rys. 5.14b) skutkują tym, że ewolucje temperatury bębnowego hamulca podczas każdego etapu hamowania także różnią się między sobą znacznie mniej (rys. 5.16). Z kolei proporcje we wkładzie średniej temperatury powierzchni ciernej  $T_m^{(k)}$  i temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  do temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  w hamulcu bębnowym są zupełnie inne niż w hamulcu tarczowym. W tym ostatnim, jak zauważono wyżej, profil czasowy maksymalnej temperatury kształtowała przede wszystkim średnia temperatura powierzchni ciernej. W hamulcu bębnowym obie składowe,  $T_m^{(k)}$  i  $T_f^{(k)}$ , wywierają znaczący wpływ na ewolucję i wartości  $T_{\max}^{(k)}$ . Przy czym w początkowej fazie hamowań decydujący jest wpływ

temperatury błysku, a w końcowej – średniej temperatury obszaru kontaktu szczęki z bębniem.



Rysunek 5.15. Wartości: a) współczynnika tarcia  $f_0^{(k)}$ , b) czasu hamowania  $t_s^{(k)}$  bębnowego układu hamulcowego w poszczególnych cyklach  $k = 1, 2, 3, 4$

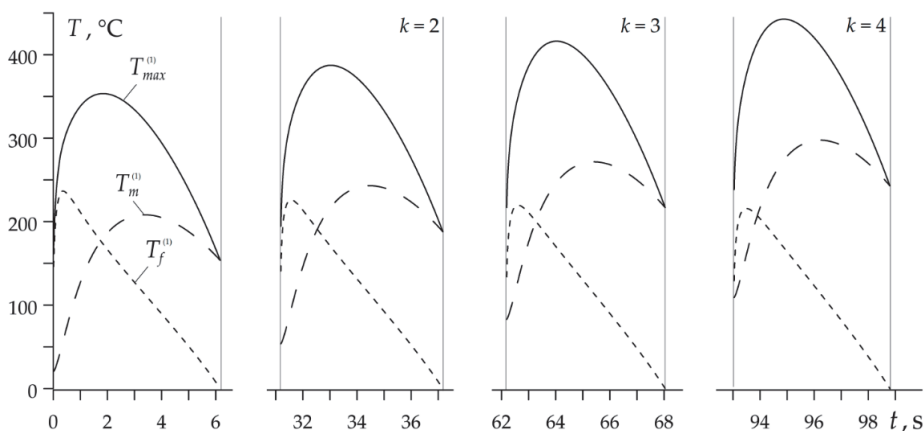
Zmiany temperatury następujące wraz z upływem czasu na poszczególnych etapach hamowania podczas wielokrotnego trybu pracy hamulca bębnowego zaprezentowano na rysunku 5.17. Wykonanie czterech hamowań zajęło 23,81 s, trzech rozpędów 75 s, zaś cały tryb pracy trwał 98,81 s. Podobnie jak w hamulcu tarczowym najwyższe wartości temperatury średniej oraz maksymalnej zwiększają się, natomiast temperatury błysku zmniejszają się przy każdym kolejnym hamowaniu. Jednak same te procesy nie są tak wyraźne jak w przypadku hamulca tarczowego. Jako jedną z przyczyn takich stosunkowo niewielkich zmian temperatury można wskazać o wiele (o około pięć razy) dłuższy trwający etap chłodzenia podczas rozpędu pojazdu.



Rysunek 5.16. Ewolucje temperatury: średniej  $T_m^{(k)}$ , błysku  $T_f^{(k)}$  oraz maksymalnej  $T_{max}^{(k)}$  bębnowego układu hamulcowego podczas kolejnych cykli: a)  $k=1$ , b)  $k=2$ , c)  $k=3$ , d)  $k=4$

Wartości współczynnika tarcia  $f^{(k)}$ , czasu zatrzymania  $t_s^{(k)}$  i temperatury objętościowej  $T_0^{(k)}$ , a także najwyższe wartości temperatury średniej  $T_m^{(k)}$ , temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  oraz temperatury maksymalnej  $T_{max}^{(k)}$  podczas wykonywania każdego z czterech hamowań realizowanych przez bębnowy układ hamulcowy zawarto w tabeli 5.6.





Rysunek 5.17. Ewolucje temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  (linie ciągłe), średniej  $T_m^{(k)}$  (przerywane linie) oraz temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  (linie kropkowane) podczas PKT trybu hamowania układu bębnowego

Tabela 5.6. Wartości wybranych charakterystyk w każdym cyklu hamowania

Wielkość	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$f^{(k)}$	0,39	0,40	0,41	0,42
$t_s^{(k)}$ , s	6,17	6,00	5,87	5,77
$T_0^{(k)}$ , °C	20	53	83	109
$\max T_m^{(k)}$ , °C	208	243	272	298
$\max T_f^{(k)}$ , °C	237	226	220	216
$\max T_{\max}^{(k)}$ , °C	353	387	416	443

### 5.3. Wnioski

W podrozdziale 5.1 opracowano model matematyczny służący do wyznaczania przebiegu temperatury maksymalnej osiągananej na powierzchni kontaktu elementów ciernych podczas jednokrotnego hamowania. Zgodnie z hipotezą Chichinadze [27, 33] wartość temperatury maksymalnej została wyznaczona jako suma temperatury średniej osiągananej na nominalnej powierzchni kontaktu elementów ciernych oraz temperatury obszaru kontaktu rzeczywistego (temperatura błysku). Bazując na rozwiązaniu zagadnienia początkowego ruchu, uwzględniono gęstość mocy tarcia zmienną w trakcie hamowania przy profilach czasowych ciśnienia kontaktowego – eksponencjalnym i liniowym. Temperaturę średnią wyznaczono z rozwiązania odpowiedniego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła. Poprzez przyjęcie wartości właściwości termofizycznych materiału wyznaczonych przy uśrednionej temperaturze objętościowej, na podstawie zależności temperatu-

rowych współczynnika przewodności cieplnej, ciepła właściwego oraz gęstości materiału, uwzględniono również wrażliwość termiczną materiałów ciernych. Przy wyznaczaniu temperatury błysku skorzystano z zależności twardości materiału elementu podstawowego pary ciernej od temperatury. Uwzględniono również parametry mikrogeometrii powierzchni ciernej. Temperaturę błysku wyznaczono ze wzorów otrzymanych przy założeniu występowania plastycznego mechanizmu odkształcenia wierzchołków chropowatości podczas hamowania.

Na podstawie opracowanego modelu przeprowadzono analizę numeryczną dla trzejelementowego tarczowego układu hamulcowego wykonanego z kompozytu węglowego Termar-ADF. Maksymalna temperatura podczas hamowania przy eksponencyjnym profilu ciśnienia okazała się większa od odpowiadającej jej wartości osiąganey przy liniowym jego wzroście. Wpływ wrażliwości termicznej materiału polega na tym, że różnica pomiędzy temperaturami wyznaczonymi z uwzględnieniem oraz bez uwzględnienia zależności właściwości cieplno-fizycznych od temperatury wynosi około 20%. Świadczy to o tym, że przy wyznaczaniu maksymalnej temperatury rozpatrywanego układu tarczowego należy uwzględnić wrażliwość termiczną materiału Termar-ADF.

W podrozdziale 5.2 zaproponowano analityczny model wyznaczania maksymalnej temperatury generowanej na skutek tarcia podczas PKT trybu pracy hamulca. Uwzględniono w nim wrażliwość termiczną materiałów pary ciernej oraz zależność temperaturową współczynnika tarcia. Zgodnie z hipotezą Chichinadze o sumowaniu temperatur maksymalnej temperatury  $T_{\max}^{(k)}$  podczas każdego hamowania ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) poszukiwano w postaci sumy temperatury średniej  $T_m^{(k)}$  nominalnego obszaru kontaktu oraz temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  obszaru kontaktu rzeczywistego. Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch układów: tarczowego (żeliwo/metaloceramika) i bębnowego (stal/retinaks) dla czterech cykli ( $n = 4$ ). Ustalono, że:

1. Zależność współczynnika tarcia od temperatury (krzywa stabilności termicznej) wywiera znaczący wpływ na profile czasowe prędkości, gęstości mocy tarcia oraz temperatury maksymalnej. Współczynnik tarcia, zmniejszający się wraz ze wzrostem temperatury w układzie tarczowym, powoduje wydłużenie czasu trwania każdego następnego etapu hamowania oraz zwiększenie maksymalnej wartości gęstości mocy tarcia. Efektem zwiększenia współczynnika tarcia przy podwyższeniu temperatury do około 300°C w układzie bębnowym jest skrócenie czasu hamowań oraz zmniejszenie maksymalnych wartości gęstości mocy tarcia.
2. W układzie tarczowym pracującym przy wysokim obciążeniu ewolucja oraz wartości temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  są zdeterminowane przez średnią temperaturę  $T_m^{(k)}$  nominalnego obszaru kontaktu. Wartości temperatury błysku  $T_f^{(k)}$  są niewielkie w porównaniu do temperatury maksymalnej.

3. Temperatura maksymalna układu bębnowego pracującego przy niedużym obciążeniu jest wyznaczana na początku każdego etapu hamowania poprzez temperaturę błysku  $T_f^{(k)}$ , zaś w fazie końcowej tych etapów decydujący wpływ na  $T_{\max}^{(k)}$  ma temperatura średnia  $T_m^{(k)}$ .
4. Rezultaty uzyskane za pomocą zaproponowanego modelu analitycznego wykazują zadowalającą zgodność z odpowiadającymi im, znanymi z literatury naukowej danymi otrzymanymi przy wykorzystaniu metod numerycznych. Co najistotniejsze, najwyższe wartości temperatury maksymalnej  $T_{\max}^{(k)}$  na kolejnych etapach hamowania  $k = 1, 2, 3, 4$  wyznaczone w wyniku naszych obliczeń wynoszą 482°C, 560°C, 666°C i 753°C (tab. 5.5), a otrzymane w artykule [142] są równe odpowiednio: 491°C, 615°C, 720°C i 847°C. Największa względna procentowa różnica rezultatów pojawiła się na etapie czwartym i wyniosła  $\approx 11\%$ . W hamulcu bębnowym najwyższe ustalone wartości  $T_{\max}^{(k)}$  są równe 353°C, 387°C, 416°C i 443°C (tab. 5.5), a odpowiadające im wyniki zaprezentowane w monografii [27] wynoszą 295°C, 330°C, 400°C i 440°C. Maksymalna względna różnica rezultatów występuje na etapie pierwszym i stanowi  $\approx 21\%$ . Należy zaznaczyć, że temperatura średnia  $T_m^{(k)}$  wybranej przez nas pary ciernej w hamulcu bębnowym przy zbliżonych parametrach wejściowych podczas hamowania jednokrotnego ( $k = 1$ ) była analizowana z wykorzystaniem metody różnic skończonych w artykule [147]. Otrzymana w nim najwyższa wartość średniej temperatury nominalnego obszaru kontaktu szczęki z bębnem wyniosła 210°C, co jest zbliżone do wartości 208°C z tabeli 5.5.

Główną zaletą zaproponowanego w tej części monografii podejścia jest przedstawienie różnych możliwości adaptacji istniejących w literaturze naukowej dokładnych rozwiązań liniowych zagadnień cieplnych tarcia do wyznaczania maksymalnej temperatury hamulca nie tylko podczas jednokrotnego, ale również wielokrotnego trybu jego pracy. Pozwala to podczas każdego hamowania na ekspresowe, wystarczająco dokładne oszacowanie nie tylko maksymalnej temperatury, ale również takich ważnych charakterystyk procesu hamowania jak profile czasowe prędkości i gęstości mocy tarcia, czas czy droga hamowania.

Wyniki badań przedstawione w tym rozdziale zostały opublikowane w pracach [48, 166].

## **6. MODEL WYZNACZANIA ŚREDNIEJ TEMPERATURY POWIERZCHNI CIERNEJ Z UWZGLĘDNIENIEM EWOLUCJI POLA KONTUROWEGO OBSZARU KONTAKTU**

Powierzchnie cierne roboczych elementów hamulca tarczowego nie są idealnie gładkie. Wykazano doświadczalnie [66], że parametry obróbki mechanicznej tarczy hamulcowej, a co za tym idzie stanu chropowatości jej warstwy wierzchniej, istotnie wpływają na siłę tarcia oraz intensywność zużycia materiałów, szczególnie na początkowym etapie hamowania. Następnie zużycie warstw powierzchniowych tarczy i nakładki hamulcowej powoduje ich oszlifowanie, a co za tym idzie lepsze dopasowanie współpracujących powierzchni roboczych [103]. Na skutek falistości i chropowatości ich oddziaływania kontaktowe są dyskretne i zachodzą w trzech obszarach: nominalnym (zdeteminowanym wymiarami powierzchni ciernej nakładki), konturowym (utworzonym w miejscach styku fal i płaskowyzu) oraz faktycznym, na który składa się sumaryczne pole styku mikrochropowatości w granicach konturowego obszaru kontaktu [39]. Sumaryczne pole rzeczywistego obszaru kontaktu pary ciernej stanowi niewielką część pola obszaru kontaktu nominalnego i zmienia się w trakcie hamowania [102, 168]. Zgodnie z hipotezą sumowania Chichinadze maksymalna temperatura powierzchni ciernej równa jest sumie średniej temperatury obszaru kontaktu nominalnego i temperatury obszaru kontaktu rzeczywistego (błysku temperaturowego) [27]. Obliczenia średniej temperatury powierzchni ciernej zwykle dokonuje się przy stałej wartości pola nominalnego obszaru kontaktu [141, 150, 164]. Przy wyznaczaniu błysku temperaturowego uwzględnia się zmiany pól obszarów konturowego i rzeczywistego następujące podczas hamowania (rozdział 5).

Celem badań zaprezentowanych w tym rozdziale jest opracowanie modelu analitycznego wyznaczania średniej temperatury powierzchni ciernej hamulca tarczowego z uwzględnieniem związku pomiędzy polami obszarów nominalnego i konturowego. Otrzymano dokładne rozwiązanie początkowego zagadnienia ruchu i odpowiadającego mu zagadnienia cieplnego tarcia. Na ich podstawie zaproponowano wzory mające posłużyć do wyznaczania ewolucji prędkości poślizgu, gęstości mocy i pracy tarcia oraz średniej temperatury obszaru kontaktu. Wrażliwość termiczną materiałów pary ciernej uwzględniono poprzez wprowadzenie do wzorów obliczeniowych wartości współczynników przewodności cieplnej i ciepła właściwego przy temperaturze objętościowej. Analizę numeryczną przeprowadzono dla hamulca z tarczami wykonanymi z kompozytu węglowe Termar-ADF. Zbada-

no także wpływ zmiany pola obszaru konturowego na ewolucję średniej temperatury podczas hamowania.

## 6.1. Zagadnienie początkowe ruchu

Rozpatrzono proces hamowania z eksponencjalnym wzrostem ciśnienia kontaktowego  $p$  (4.1.1), w którym pole  $A_c$  konturowego obszaru kontaktu zmienia się liniowo wraz z upływem czasu [32]:

$$A_c(t) = A_a A_c^*(t), \quad A_c^*(t) = \frac{2}{5} + \frac{t}{2t_s}, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (6.1.1)$$

gdzie  $A_a$  – pole nominalnego obszaru kontaktu (powierzchni ciernej nakładki) wynoszące w warunkach całkowitego wzajemnego przykrycia elementów pary ciernej:

$$A_a = \pi(r_e^2 - r_i^2), \quad (6.1.2)$$

gdzie  $r_i$ ,  $r_e$  – odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny promień nominalnego obszaru kontaktu.

Wówczas siłę tarcia oddziałującą podczas hamowania na konturowym obszarze zapiszemy w postaci:

$$F(t) = F_0 F^*(t), \quad F_0 = fp_0 A_a, \quad F^*(t) = (1 - e^{-t/t_i}) A_c^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (6.1.3)$$

gdzie  $f$  – współczynnik tarcia,  $p_0$  – nominalne ciśnienie,  $t_i$  – czas narastania ciśnienia kontaktowego do wartości nominalnej.

Podstawiając zależność (6.1.3) do równania ruchu (4.2.2), uwzględniając warunek początkowy (4.2.3), znajdujemy zmianę względnej prędkości poślizgu  $V$ :

$$V(t) = V_0 V^*(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \\ V^*(t) = 1 - \frac{1}{t_s^0} \left[ t A_c^*(t) - t_i A_c^*(t_i) (1 - e^{-t/t_i}) + \frac{t}{2t_s} \left( t_i e^{-t/t_i} - \frac{t}{2} \right) \right], \quad (6.1.4)$$

zaś czas hamowania  $t_s$  wyznaczamy numerycznie z warunku zatrzymania  $V^*(t_s) = 0$ .

Ewolucję gęstości mocy tarcia  $q$  w czasie hamowania, przy ciśnieniu (4.1.1) i prędkości poślizgu tarczy (6.1.4), znajdujemy ze wzoru:

$$q(t) = q_0 q^*(t), \quad q_0 = fp_0 V_0, \quad 0 \leq t \leq t_s,$$

$$q^*(t) = \left\{ 1 - \frac{1}{t_s^0} \left[ tA^*(t) - t_i A^*(t_i) (1 - e^{-t/t_i}) + \frac{t}{2t_s} \left( t_i e^{-t/t_i} - \frac{t}{2} \right) \right] \right\} (1 - e^{-t/t_i}). \quad (6.1.5)$$

Ze związków na gęstość pracy tarcia otrzymujemy  $w$ :

$$w(t) = w_0 w^*(t), \quad w_0 = q_0 t_s, \quad w^*(t) = \frac{1}{t_s} \int_0^t q^*(t) dt. \quad (6.1.6)$$

Przyjmując gęstość mocy tarcia wynoszącą (6.1.5), znaleziono profil czasowy pracy tarcia w postaci:

$$w^*(t) = \frac{1}{t_s t_{s0}} \left\{ \left[ t_s^0 - \frac{t}{5} + \left( \frac{t_i^2}{t} - t_i - \frac{t}{3} \right) \frac{t}{4t_s} \right] t + \right. \\ \left. + \left[ \frac{t^2}{4} - t_i^2 - t_s^0 t_s + t_s (t - t_i) \frac{2}{5} \right] \frac{t_i}{t_s} (1 - e^{-t/t_i}) + \left( \frac{4t_s}{5} + \frac{3t_i}{2} + t \right) \frac{t_i^2}{4t_s} (1 - e^{-2t/t_i}) \right\}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (6.1.7)$$

## 6.2. Zagadnienie ciepłne tarcia

Analityczny model nagrzewania tarcowego hamulca ze zmiennym polem konturowego obszaru kontaktu (6.1.1) opracujemy w oparciu o początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła (4.3.1)–(4.3.6), sformułowane dla układu dwóch półprzestrzeni w warunkach idealnego kontaktu cieplnego. Uwzględniając bezwymiarowe zmienne i parametry opisane zależnościami (3.1.13) i (4.2.17) oraz otrzymaną funkcję gęstości mocy tarcia  $q(t)$  (6.1.5), w rozwiązaniu ogólnym (4.3.8) bezwymiarową temperaturę konturowego obszaru kontaktu podczas hamowania wyznaczono w postaci:

$$T^*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left\{ 1 - \frac{1}{\tau_s^0} \left[ \frac{2}{5} s + \frac{s^2}{4\tau_s} + \left( e^{-\frac{s}{\tau_i}} - 1 \right) \left( \frac{2}{5} + \frac{\tau_i}{2\tau_s} \right) \tau_i + \frac{\tau_i}{2\tau_s} s e^{-\frac{s}{\tau_i}} \right] \right\} \left( 1 - e^{-\frac{s}{\tau_i}} \right) \frac{ds}{\sqrt{\tau - s}} \\ 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (6.2.1)$$

Następnie powyższe rozwiązanie (6.2.1) zapisano w postaci sumy całek:

$$T^*(\tau) = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{\tau_i^2}{2\tau_s^0\tau_s}\right) [I_{0,0}(\tau) - I_{0,1}(\tau)] - \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \left[\frac{2}{5} + \frac{\tau_i}{2\tau_s}\right] [I_{0,1}(\tau) - I_{0,2}(\tau)] + \\ - \frac{2}{5\tau_s^0} [I_{1,0}(\tau) - I_{1,1}(\tau)] - \frac{1}{4\tau_s\tau_s^0} [I_{2,0}(\tau) - I_{2,1}(\tau)] - \frac{\tau_i}{2\tau_s\tau_s^0} [I_{1,1}(\tau) - I_{1,2}(\tau)], \\ 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (6.2.2)$$

gdzie:

$$I_{k,n}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{s^k}{\sqrt{\tau-s}} \exp\left(-\frac{ns}{\tau_i}\right) ds, \quad k=0,1,2, \quad n=0,1,2. \quad (6.2.3)$$

Korzystając z podstawienia  $x = \sqrt{\tau-s}$ , ze wzoru (6.2.3) otrzymano:

$$I_{k,n}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau}} (\tau-x^2)^k \exp\left[-\frac{n(\tau-x^2)}{\tau_i}\right] dx, \quad k=0,1,2, \quad n=0,1,2. \quad (6.2.4)$$

Na początku rozpatrzono szczególny przypadek  $n=0$ . Korzystając z wartości całki [98], obliczono:

$$\int_0^{\sqrt{\tau}} (\tau-x^2)^k dx = \tau^k \sqrt{\tau} B(k+1; 0,5), \quad k=0,1,2, \quad (6.2.5)$$

gdzie: ( $B(\nu; \mu^{-1})$  – funkcja beta [3]). Przy  $n=0$  otrzymano:

$$I_{k,0}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} B(k+1; 0,5) \tau^{k+0,5}, \quad k=0,1,2. \quad (6.2.6)$$

Z uwzględnieniem wartości funkcji beta  $B(1; 0,5) = 2$ ,  $B(2; 0,5) = 4/3$ ,  $B(3; 0,5) = 16/15$  ze wzoru (6.2.6) otrzymano:

$$I_{0,0}(\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}, \quad I_{1,0}(\tau) = \frac{4}{3}\tau\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}, \quad I_{2,0}(\tau) = \frac{16}{15}\tau^2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \quad (6.2.7)$$

Następnie, przy  $n=1,2$ , całki  $I_{k,n}(\tau)$ ,  $k=0,1,2$  (6.2.4) przekształcono do postaci:

$$I_{0,n}(\tau) = J_{0,n}(\tau), \quad (6.2.8)$$

$$I_{1,n}(\tau) = \tau J_{0,n}(\tau) - J_{2,n}(\tau), \quad (6.2.9)$$

$$I_{2,n}(\tau) = \tau^2 J_{0,n}(\tau) - 2\tau J_{2,n}(\tau) + J_{4,n}(\tau), \quad (6.2.10)$$

gdzie:

$$J_{m,n}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{n\tau}{\tau_i}\right) \int_0^{\sqrt{\tau}} x^m \exp\left(\frac{nx^2}{\tau_i}\right) dx, \quad m = 0, 2, 4, \quad n = 1, 2. \quad (6.2.11)$$

Stosując podstawienie  $y = nx^2/\tau_i$ , całki (6.2.11) zapisano w postaci:

$$J_{m,n}(\tau) = \left(\frac{\tau_i}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{\tau_i}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\tau}{\tau_i}\right) \int_0^{n\tau/\tau_i} y^{\frac{m-1}{2}} \exp(y) dy, \quad m = 0, 2, 4, \quad n = 1, 2. \quad (6.2.12)$$

Całkując przez części we wzorze (6.2.12), otrzymano:

$$J_{2,n}(\tau) = \frac{\tau_i}{n\sqrt{\pi}} \left[ \sqrt{\tau} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_i}{n}} \exp\left(-\frac{n\tau}{\tau_i}\right) \int_0^{n\tau/\tau_i} \frac{\exp(y)}{\sqrt{y}} dy \right], \quad (6.2.13)$$

$$J_{4,n}(\tau) = \frac{\tau_i \tau \sqrt{\tau}}{n\sqrt{\pi}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_i}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\tau_i}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{\tau_i}{n\pi}} \exp\left(-\frac{n\tau}{\tau_i}\right) \int_0^{n\tau/\tau_i} \frac{\exp(y)}{\sqrt{y}} dy. \quad (6.2.14)$$

Po podstawieniu  $s = \sqrt{y}$  do wzorów (6.2.11) przy  $m=0$  oraz (6.2.13), (6.2.14) wyznaczono:

$$J_{0,n}(\tau) = \sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right), \quad (6.2.15)$$

$$J_{2,n}(\tau) = \frac{\tau_i \sqrt{\tau}}{n} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right) \right], \quad (6.2.16)$$

$$J_{4,n}(\tau) = \frac{\tau_i \sqrt{\tau}}{n} \left\{ \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau_i}{n}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right) \right] \right\}, \quad (6.2.17)$$



gdzie:

$$D(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x \exp(s^2) ds, \quad n = 1, 2. \quad (6.2.18)$$

Z uwzględnieniem wzorów (6.2.15)–(6.2.17) w zależnościach (6.2.8)–(6.2.10), znaleziono:

$$I_{0,n}(\tau) = \sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right), \quad (6.2.19)$$

$$I_{1,n}(\tau) = \left[\frac{\tau_i}{2n} + \tau\right] \sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right) - \frac{\tau_i \sqrt{\tau}}{n\sqrt{\pi}}, \quad (6.2.20)$$

$$I_{2,n}(\tau) = \sqrt{\tau} D\left(\sqrt{\frac{n\tau}{\tau_i}}\right) \left\{ \tau^2 + \frac{\tau_i}{n} \left[ \tau + \frac{3}{4} \frac{\tau_i}{n} \right] \right\} - \frac{\tau_i \sqrt{\tau}}{n\sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} \frac{\tau_i}{n} + \tau \right). \quad (6.2.21)$$

Podstawiając wzory (6.2.18)–(6.2.21) oraz (6.2.7) do rozwiązania (6.2.2), otrzymano przebieg czasowy bezwymiarowej temperatury konturowego obszaru kontaktu w postaci:

$$\begin{aligned} T^*(\tau) = & \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[ 2 + \frac{1}{5\tau_s^0} \left( 2\tau_i - \frac{8\tau}{3} \right) + \frac{1}{\tau_s^0 \tau_s} \left( \frac{7\tau_i^2}{8} - \frac{4\tau^2}{15} - \frac{\tau\tau_i}{4} \right) \right] + \\ & + \frac{\tau_i \sqrt{\tau}}{\tau_s^0} \left[ \frac{2}{5} + \frac{1}{2\tau_s} \left( \tau - \frac{3\tau_i}{4} \right) \right] D\left(\sqrt{\frac{2\tau}{\tau_i}}\right) + \\ & + \frac{\sqrt{\tau}}{\tau_s^0} \left[ \frac{1}{5} (2\tau - 3\tau_i) + \frac{1}{4\tau_s} \left( \tau^2 - \frac{\tau_i^2}{4} - \tau_i\tau \right) - \tau_s^0 \right] D\left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_i}}\right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

gdzie funkcje  $D(x)$  (6.2.18) obliczono ze wzorów (4.3.17).

W celu wyznaczenia wartości temperatury objętościowej, uśrednionej w czasie hamowania, skorzystamy ze wzoru (5.2.2). Podstawiając do niego profil czasowy gęstości pracy tarcia (6.1.7), uwzględniający zmiany pola konturowego obszaru kontaktu (6.1.1), otrzymujemy:

$$\theta^* = 1 + \frac{t_i}{t_s t_s^0} \left\{ \left[ 0,4(t_s + t_i - 5t_s^0) - \frac{t_i^2}{t_s} \left( 2\frac{t_i}{t_s} + 1,55 \right) - 0,175\frac{t_s^2}{t_i} \right] + \right. \\ \left. + \frac{t_i^2}{t_s} \left[ \left( 0,55 - 0,3\frac{t_s}{t_i} + 2\frac{t_s^0}{t_i} + 3\frac{t_i}{t_s} \right) p^*(t_s) - \left( 0,45 + 0,5\frac{t_i}{t_s} \right) p^*(2t_s) \right] \right\}. \quad (6.2.23)$$

W przypadku szczególnym, gdy czas narastania ciśnienia kontaktowego jest pomijalnie mały ( $t_i \rightarrow 0$ ), proces hamowania odbywa się przy jednostajnym opóźnieniu. Wtedy ciśnienie kontaktowe pozostaje stałe w trakcie trwania poślizgu, a gdy uwzględnimy zmiany powierzchni konturowej tarcia zgodnie z zależnością (6.1.1), profil czasowy siły tarcia (6.1.3) przyjmuje postać:

$$F^*(t) = \frac{2}{5} + \frac{t}{2t_s}, \quad 0 \leq t \leq t_s. \quad (6.2.24)$$

Z rozwiązania zagadnienia początkowego ruchu (4.2.2), (4.2.3), przy zadanej sile tarcia (6.2.24), otrzymujemy następujący profil czasowy prędkości:

$$V^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0} \left( \frac{2}{5} + \frac{t}{4t_s} \right), \quad (6.2.25)$$

zaś z warunku zatrzymania  $V^*(t_s) = 0$  wyznaczamy czas trwania hamowania przy stałym opóźnieniu:

$$t_s = \frac{20}{13} t_s^0 \cong 1,54 t_s^0. \quad (6.2.26)$$

Na podstawie zależności (6.2.24) i (6.2.25), odpowiednio ze wzorów (6.1.5) oraz (6.1.6), znaleziono następujące profile czasowe gęstości mocy i pracy tarcia:

$$q^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0} \left( \frac{2}{5} + \frac{t}{4t_s} \right), \quad w^*(t) = \left[ 1 - \frac{t}{t_s^0} \left( \frac{1}{5} + \frac{t}{12t_s} \right) \right] \frac{t}{t_s^0}. \quad (6.2.27)$$

Podstawiając funkcje  $q^*(t)$  (6.2.27) pod znak całki we wzorze (4.3.8), otrzymano następujący wzór do opisu ewolucji bezwymiarowej temperatury powierzchni czarnej podczas hamowania:

$$T^*(\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2\tau}{\tau_s} \right) \frac{4\tau}{15\tau_s^0} \right], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (6.2.28)$$

Natomiast uwzględnienie funkcji  $w^*(t)$  we wzorze (5.2.2) pozwoliło ustalić wartość bezwymiarowej uśrednionej temperatury objętościowej:

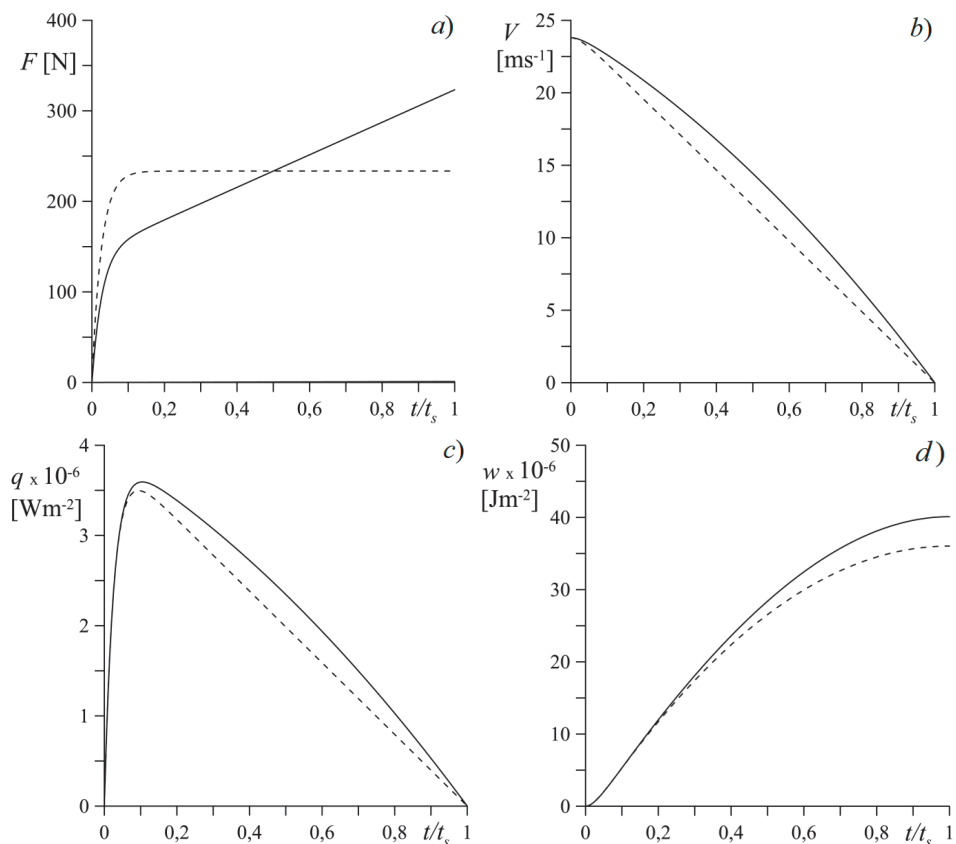
$$\theta^* = 1 - \frac{7t_s}{40t_s^0}. \quad (6.2.29)$$

### 6.3. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono dla układu hamulcowego rozpatrzonego w rozdziale 5. Składa się on z trzech tarcz wykonanych z kompozytu węglowego Termar-ADF. Właściwości tego materiału w temperaturze otoczenia  $T_a = 20^\circ\text{C}$  zawarto w tabeli 5.1. Wzięto także pod uwagę wpływ wrażliwości termicznej materiału poprzez uwzględnienie w obliczeniach właściwości cieplnych materiału Termar-ADF wyznaczonych przy temperaturze objętościowej. Do określenia zmian właściwości termicznych Termar-ADF pod wpływem temperatury wykorzystano funkcje (5.1.1), (5.1.3), (5.1.5) wraz ze współczynnikami z tabeli 5.2. Parametry operacyjne zawarte w tabeli 4.1 przyjęto jako dane wejściowe do przeprowadzenia symulacji obliczeniowej. Na ich podstawie wyznaczono:  $t_s^0 = 12,12 \text{ s}$ ,  $q_0 = 3,87 \text{ MWm}^{-2}$ ,  $w_0 = 46,87 \text{ MJm}^{-2}$ ,  $G = 0,167 \text{ kg}$  i  $\alpha = 0,5$ . Analizę numeryczną zrealizowano dla dwóch wariantów: uwzględniającego zmianę pola konturowego obszaru kontaktu  $A_c(t)$  (6.1.1) (wariant I) oraz przyjmującego jego stałą wartość  $\bar{A}_c = 0,65A_a$ , uśrednioną w czasie trwania procesu (wariant II). Wyznaczone na podstawie zależności (6.2.23) wartości temperatury objętościowej  $\theta$  dla wariantu I oraz II są równe odpowiednio  $585^\circ\text{C}$  i  $566^\circ\text{C}$ . Przy tych wartościach temperatury objętościowej odpowiednie wartości cieplno-fizyczne Termar-ADF wynoszą  $K = 16,5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $c = 1737 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$  i są jednakowe dla obu wariantów obliczeniowych.

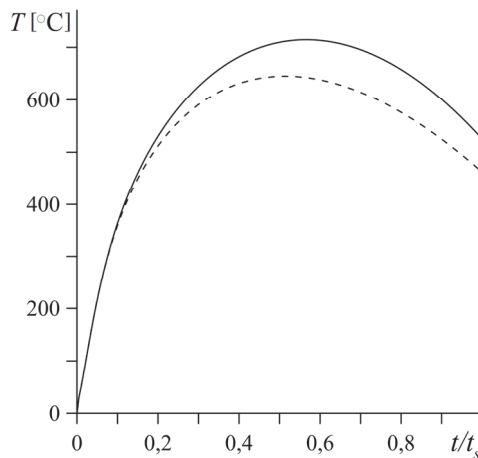
Przebiegi czasowe siły tarcia  $F$ , prędkości poślizgu tarczy  $V$  oraz gęstości mocy  $q$  i pracy tarcia  $w$  zostały zilustrowane na rysunku 6.1. Linie ciągłe reprezentują wyniki otrzymane ze wzorów (6.1.3)–(6.1.6) dla procesu hamowania z uwzględnieniem zmian powierzchni kontaktu, zaś linie przerywane, utworzone w oparciu o zależności (4.2.5), (4.2.8), (4.2.9), (4.2.11), odpowiadają rezultatom

otrzymanym przy założeniu stałej (uśrednionej w czasie) wartości pola powierzchni tarcia. Czas trwania hamowania przy stałej powierzchni kontaktu wynosi 19,13 s, natomiast po uwzględnieniu zmiany wielkości powierzchni w czasie hamowania nieznacznie się skraca i wynosi 18,95 s. Gęstość mocy tarcia ma przebieg czasowy typowy dla racjonalnego trybu hamowania (rys. 6.1c) [28]. Jej wartość gwałtownie wzrasta od zera w chwili początkowej do wartości maksymalnej, po czym łagodnie maleje do zera w chwili zatrzymania. Odpowiadająca jej gęstość mocy tarcia (rys. 6.1d) natomiast monotonicznie narasta w czasie hamowania, osiągając maksimum w chwili końcowej procesu hamowania (rys. 6.1d).



Rysunek 6.1. Profile czasowe: a) siły tarcia  $F$ , b) prędkości  $V$ , c) gęstości mocy  $q$ , d) pracy tarcia  $w$  przy zmiennej (linie ciągłe) oraz przy stałej (linie przerywane) wartości pola  $\bar{A}_c$  obszaru kontaktowego

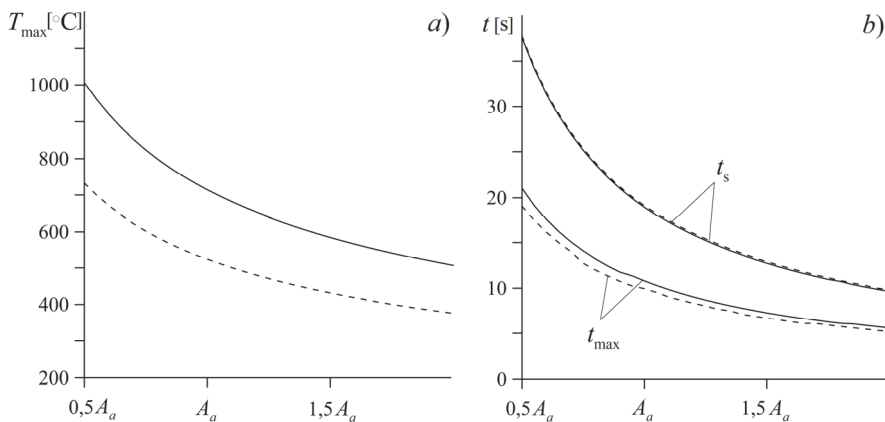
Ewolucja temperatury konturowego obszaru kontaktu ściśle zależy od przebiegu gęstości mocy tarcia w czasie hamowania (rys. 6.2). W przypadku racjonalnego trybu hamowania charakterystyczną cechą takich przebiegów jest wystąpienie najwyższej temperatury około połowy czasu hamowania [150]. Czas osiągnięcia maksimum temperaturowego zależy od czasu, w jakim ciśnienie narasta do wartości nominalnej na powierzchni kontaktu [121]. Wyższa wartość temperatury maksymalnej, 714°C, została osiągnięta podczas hamowania z uwzględnieniem zmiennej powierzchni tarcia w chwili 10,7 s, zaś przy stałej powierzchni kontaktu uzyskano 645°C w czasie 9,8 s. W momencie zakończenia procesu temperatura na powierzchni ciernej wynosiła odpowiednio 525°C oraz 462°C.



Rysunek 6.2. Ewolucje temperatury średniej osiąganej na powierzchni tarcia podczas hamowania: przy zmiennym polu  $A_c(t)$  obszaru kontaktu konturowego (linie ciągłe) oraz przy stałej wartości pola  $\bar{A}_c$  tego obszaru (linie przerywane)

Rezultaty obliczeń przedstawione na rysunkach 6.1, 6.2 zostały uzyskane przy ustalonej wartości pola obszaru nominalnego  $A_a = 2212 \text{ mm}^2$  ze zmiennym (wariant I) oraz stałym (wariant II) polem obszaru kontaktu konturowego. Natomiast na rysunku 6.3 pokazano wpływ wielkości pola nominalnego obszaru kontaktu na temperaturę maksymalną  $T_{\max}$  (rys. 6.3a), czas jej osiągnięcia  $t_{\max}$  oraz czas trwania procesu  $t_s$  (rys. 6.3b). Kiedy pole nominalnego obszaru kontaktu jest zmniejszone o połowę w stosunku do wartości bazowej  $A_a = 2212 \text{ mm}^2$ , maksimum temperatury wzrasta do 1007°C i 733°C, czas jej osiągnięcia do 21 s i 19 s, a procesy hamowania trwają przez 37,6 s i 37,8 s, odpowiednio dla wariantów I i II. Wraz ze wzrostem wartości pola obszaru kontaktu nominalnego wszystkie powyż-

sze charakterystyki monotonicznie maleją odpowiednio do wartości  $T_{\max} = 507^{\circ}\text{C}$  i  $376^{\circ}\text{C}$ ,  $t_{\max} = 5,6$  s i  $5,19$  s oraz  $t_s = 9,6$  s i  $9,8$  s.



Rysunek 6.3. Wpływ wielkości pola nominalnego obszaru kontaktu  $A_a$  na: a) temperaturę maksymalną  $T_{\max}$ , b) czas jej osiągnięcia  $t_{\max}$  i czas zatrzymania  $t_s$  przy zmiennym polu  $A_c(t)$  obszaru kontaktu konturowego (linie ciągłe) oraz przy stałej wartości pola  $A_c$  tego obszaru (linie przerywane)

## 6.4. Wnioski

Opracowano model analityczny do zbadania wpływu zmiany pola konturowego obszaru kontaktu podczas hamowania na temperaturę układu hamulcowego. Przeprowadzona na jego podstawie analiza numeryczna dla trójtarczowego układu hamulcowego, składającego się z jednokowych tarcz wykonanych w kompozytu węglowego Termar-ADF, wykazała, że:

1. Temperatura otrzymana przy założeniu stałej wartości pola powierzchni konturowego obszaru kontaktu jest niższa od odpowiadającej jej temperatury znalezionej z uwzględnieniem zmienności obszaru w czasie. W rozpatrywanym przypadku względna różnica pomiędzy wartościami temperatury maksymalnej nie przekracza 10%.
2. Uwzględnienie zmienności pola powierzchni obszaru kontaktu w czasie hamowania prowadzi do nieznaczącej, nieprzekraczającej 1%, redukcji czasu trwania procesu hamowania. W efekcie obliczenia temperatury układu hamulcowego mogą zostać zrealizowane z wystarczającą dokładnością przy stałej, uśrednionej w czasie procesu hamowania wartości pola konturowego obszaru kontaktu pary ciernej.
3. Określono wpływ zmian wartości pola nominalnego obszaru kontaktu na temperaturę maksymalną, czas jej osiągnięcia oraz chwilę zatrzymania. Zauważono, że wzrost nominalnej powierzchni kontaktu prowadzi do ob-

niżenia maksymalnej temperatury oraz redukcji czasu jej osiągnięcia, jak również skrócenia czasu trwania procesu hamowania.

Rezultaty badań zaprezentowane w tym rozdziale zostały opublikowane w pracy [165].

## 7. MODELOWANIE PROCESU NAGRZEWANIA CIERNEGO HAMULCA WIELOTARCZOWEGO

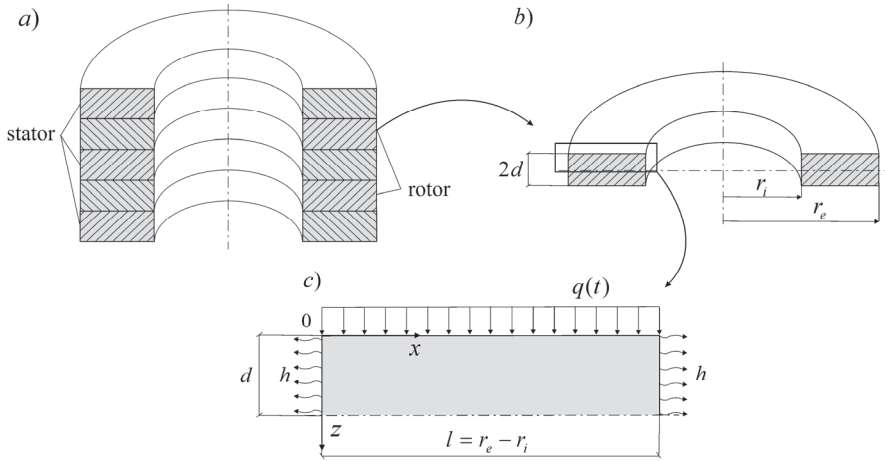
### 7.1. Zagadnienie cieplne tarcia dla warstwy chłodzonej konwekcyjnie na powierzchniach bocznych

Sformułowano początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła dla jednorodnej warstwy, której górna krawędź nagrzewana jest strumieniem ciepła, zaś na bocznych zachodzi niewymuszona konwekcyjna wymiana ciepła z otoczeniem. Założono, że intensywność strumienia ciepła jest proporcjonalna do gęstości mocy tarcia przy eksponentyjnym zwiększaniu ciśnienia w procesie hamowania. Otrzymano dokładne rozwiązanie zagadnienia i pokazano, że może ono służyć do wyznaczenia nieustalonego pola temperatury wielotarczowego układu hamulcowego. Na podstawie przeprowadzonej analizy numerycznej otrzymanych rozwiązań zbadano wpływ poszczególnych parametrów wejściowych, takich jak czas narastania ciśnienia, liczba Biota czy grubość tarczy, na nieustalone pole temperatury. Otrzymane rezultaty obliczeń temperatury poddano weryfikacji, porównując je z odpowiednimi danymi doświadczalnymi znanymi z literatury.

#### 7.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Schemat wielotarczowego układu hamulcowego pokazano na rysunku 7.1a, a podstawowy jego element – tarczę o promieniu wewnętrznym  $r_i$ , zewnętrznym  $r_e$  oraz grubości  $2d$ , wyodrębnioną z całego układu – zaprezentowano na rysunku 7.1b. Założono, że na powierzchniach czołowych tarcza jest nagrzewana strumieniami ciepła o intensywności (4.2.8), odpowiadającej gęstości mocy tarcia przy eksponentyjnym zwiększaniu ciśnienia kontaktowego. Powierzchnie boczne tarczy są chłodzone konwekcyjnie przy stałym współczynniku wymiany ciepła  $h$  (rys. 7.1c). Wszystkie tarcze wykonane są z tego samego materiału ortotropowego.





Rysunek 7.1. Schemat zagadnienia

Rozpatrywany układ cierny jest symetryczny, zarówno geometrycznie, jak i obciążeniowo, względem płaszczyzny  $z = d$  oraz osi obrotu tarczy (rys. 7.1b). Tak więc nieustalone pole temperatury tarczy jest jednorodne w kierunku obwodowym i zmienia się tylko w kierunkach promieniowym  $x$  oraz osiowym  $z$ . Zatem w celu jego znalezienia rozpatrzono następujące dwuwymiarowe zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła dla prostokąta  $0 \leq x \leq l = r_e - r_i$ ,  $0 \leq z \leq d$ , odniesionego do układu współrzędnych kartezjańskich  $0xz$  (rys. 7.1c):

$$K_x \frac{\partial^2 \tilde{T}(x, z, t)}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 \tilde{T}(x, z, t)}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial \tilde{T}(x, z, t)}{\partial t}, \quad (7.1.1)$$

$$0 < x < l, 0 < z < d, 0 < t \leq t_s,$$

$$K_z \frac{\partial \tilde{T}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q(t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq t_s, \quad (7.1.2)$$

$$K_z \frac{\partial \tilde{T}(x, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad 0 < x < l, 0 < t \leq t_s, \quad (7.1.3)$$

$$K_x \frac{\partial \tilde{T}(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h[\tilde{T}(0, z, t) - T_a], \quad 0 < z < d, 0 < t \leq t_s, \quad (7.1.4)$$

$$K_x \frac{\partial \tilde{T}(x, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = h[T_a - \tilde{T}(l, z, t)], \quad 0 < z < d, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (7.1.5)$$

$$\tilde{T}(x, z, 0) = T_a, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq d. \quad (7.1.6)$$

Przy czym:  $\tilde{T}(x, z, t)$  – pole temperatury,  $T_a$  – temperatura początkowa tarczy,  $q(t) = \gamma q_0 q^*(t)$  – gęstość mocy tarcia,  $\gamma = 0,5$  – współczynnik rozdzielania strumienia ciepła,  $q^*(t)$  – bezwymiarowy profil czasowy gęstości mocy tarcia (4.2.8),  $K_x$ ,  $K_z$  – współczynniki przewodnictwa cieplnego odpowiednio w kierunkach promieniowym i osiowym tarczy,  $c$  – ciepło właściwe,  $\rho$  – gęstość materiału.

Znaczącym ułatwieniem podczas rozwiązywania dwuwymiarowego zagadnienia przewodzenia ciepła (7.1.1)–(7.1.6) jest sprowadzenie go do zagadnienia jednowymiarowego. W tym celu skorzystano z opracowanej w teorii cienkich płyt metody uśredniania temperatury po grubości elementu [92]. Całkując równanie (7.1.1) względem zmiennej  $x$  w przedziałach od 0 do  $l$ , z uwzględnieniem warunków brzegowych (7.1.4) i (7.1.5), otrzymano:

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{2h^*}{K_z l} [T(z, t) - T_a] = \frac{1}{k} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t}, \quad 0 < z < d, \quad 0 < t \leq t_s, \quad (7.1.7)$$

gdzie:

$$T(z, t) = \frac{1}{l} \int_0^l \tilde{T}(x, z, t) dx, \quad (7.1.8)$$

$$h^* = \left( \frac{1}{h} + \frac{l}{2K_x} \right)^{-1}, \quad k = \frac{K_z}{\rho c}. \quad (7.1.9)$$

Wprowadzono następujące bezwymiarowe zmienne i parametry:

$$\zeta = \frac{z}{d}, \quad \tau = \frac{kt}{d^2}, \quad \tau_s = \frac{kt_s}{d^2}, \quad \tau_s^0 = \frac{kt_s^0}{d^2}, \quad \tau_i = \frac{kt_i}{d^2}, \quad Bi = \frac{2h^* d^2}{K_z l},$$

$$T_0 = \frac{\gamma q_0 d}{K_z}, \quad T^* = \frac{T - T_a}{T_0}, \quad (7.1.10)$$

gdzie:  $t_i$  – czas narastania ciśnienia kontaktowego. Wówczas równanie (7.1.7), warunki brzegowe (7.1.2) i (7.1.3) oraz warunek początkowy (7.1.6), z uwzględnieniem związku (7.1.8), zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2 T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} - BiT^*(\zeta, \tau) = \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.11)$$

$$\left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -q^*(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.12)$$

$$\left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.13)$$

$$T^*(\zeta, 0) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (7.1.14)$$

Przy czym, zgodnie ze wzorem (4.2.8), mamy:

$$q^*(\tau) = \left\{ 1 - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_i}\right) \right] \right\} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_i}\right) \right], \quad 0 < \tau \leq \tau_s. \quad (7.1.15)$$

Korzystając z podstawienia [92]

$$T^*(\zeta, \tau) = \Theta(\zeta, \tau)e^{-Bi\tau}, \quad (7.1.16)$$

początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła (7.1.11)–(7.1.14) sprowadzono do postaci:

$$\frac{\partial^2 \Theta(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \Theta(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.17)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -q^*(\tau)e^{Bi\tau}, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.18)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.19)$$

$$\Theta(\zeta, 0) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (7.1.20)$$

Rozwiązawszy zagadnienie (7.1.17)–(7.1.20) względem funkcji  $\Theta(\zeta, \tau)$ , ze związku (7.1.16) możemy znaleźć najpierw bezwymiarową temperaturę  $T^*(\zeta, \tau)$ , a następnie z ostatniego ze wzorów (7.1.10) wyznaczyć pole temperatury  $T(z, t)$ .

## 7.1.2. Rozwiązanie zagadnienia

Rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła (7.1.17)–(7.1.20) otrzymano w dwóch etapach. Na pierwszym etapie przyjęto, że intensywność strumienia ciepła jest stała w czasie:  $q^*(\tau) = 1$  oraz  $Bi = 0$ . Rozwiązanie takiego zagadnienia ma postać [59]:

$$\Theta_0(\zeta, \tau) = \zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 - \tau - \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 \tau}}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.21)$$

gdzie:

$$\lambda_n = \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1.22)$$

Różniczkując równanie (7.1.21), łatwo dowieść, że rozwiązanie to spełnia warunek brzegowy (7.1.18) przy  $q^*(\tau) = 1$ ,  $Bi = 0$  oraz warunek brzegowy (7.1.19). W chwili początkowej  $\tau = 0$  ze wzoru (7.1.21) otrzymano:

$$\Theta_0(\zeta, 0) = -\frac{1}{2}\zeta^2 + \zeta - \frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (7.1.23)$$

Uwzględniając we wzorze (7.1.23) sumę szeregu [98]

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n \zeta)}{\lambda_n^2} \equiv \hat{B}_2(\zeta) = 2B_2(0, 5\zeta) \quad (7.1.24)$$

oraz postać wielomianu Bernoulliego [3]

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad (7.1.25)$$

ustalono, że rozwiązanie (7.1.21), (7.1.22) spełnia również warunek początkowy (7.1.20).

Na etapie drugim rozwiązania wejściowego zagadnienia początkowo-brzegowego (7.1.17)–(7.1.20) poszukiwano za pomocą wzoru Duhamela [93]:

$$\Theta(\zeta, \tau) = - \int_0^{\tau} q^*(s) e^{Bi s} \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_0(\zeta, \tau - s) ds, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.26)$$

gdzie profil czasowy intensywności strumienia ciepła  $q^*(\tau)$  ma postać (7.1.15). Różniczkując rozwiązanie (7.1.21) względem zmiennej  $\tau$ , wyznaczono:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_0(\zeta, \tau - s) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(\tau-s)} \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.27)$$

gdzie symbol  $\sum'$  oznacza, że pierwszy składnik szeregu należy pomnożyć przez współczynnik 0,7. Podstawiając pochodną cząstkową (7.1.27) do prawej strony równości (7.1.26), otrzymano:

$$\Theta(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_n(\tau) \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.28)$$

gdzie:

$$J_n(\tau) = \int_0^{\tau} q^*(s) e^{Bi_n s} ds, \quad (7.1.29)$$

$$Bi_n = Bi + \lambda_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.1.30)$$

a liczby własne  $\lambda_n$  określone są wzorem (7.1.22).

Po uwzględnieniu postaci funkcji  $q^*(\tau)$  (7.1.15) we wzorze (7.1.29) zapisano:

$$J_n(\tau) = J_n^{(1)}(\tau) - J_n^{(2)}(\tau) + \frac{\tau_i}{\tau_s} J_n^{(3)}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.31)$$

gdzie:

$$J_n^{(1)}(\tau) = \int_0^{\tau} \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{s}{\tau_s^0} \right) e^{Bi_n s} ds, \quad J_n^{(2)}(\tau) = \int_0^{\tau} \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{s}{\tau_s^0} \right) e^{\beta_{1,n} s} ds, \\ J_n^{(3)}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\beta_{2,n} s} ds, \quad (7.1.32)$$

$$\beta_{k,n} = \beta_k + \lambda_n^2, \quad \beta_k = Bi - k \tau_i^{-1}, \quad k = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1.33)$$

W zależności od wartości parametrów  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2$  (7.1.33) postać rozwiązania (7.1.28) może być różna. Jeżeli  $\beta_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2$  i  $Bi \neq 0$ , to po obliczeniu całek (7.1.32) i podstawieniu wyników do prawej strony wzoru (7.1.31) otrzymano:

$$J_n(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n}\right) \frac{e^{Bi_n \tau}}{Bi_n} - \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n}\right) \frac{1}{Bi_n} -$$

$$- \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{e^{\beta_{1,n} \tau}}{\beta_{1,n}} + \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} (e^{\beta_{2,n} \tau} - 1), \quad (7.1.34)$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Po uwzględnieniu funkcji  $J_n(\tau)$  (7.1.34) rozwiązanie (7.1.28) przyjmuje postać:

$$\Theta(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n}\right) \frac{e^{Bi_n \tau}}{Bi_n} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{e^{\beta_{1,n} \tau}}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i e^{\beta_{2,n} \tau}}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} - \right.$$

$$\left. - \left[ \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n}\right) \frac{1}{Bi_n} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} \right] e^{-\lambda_n^2 \tau} \right\} \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.35)$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s.$$

Podstawiając funkcję  $\Theta(\zeta, \tau)$  (7.1.35) do związku (7.1.16), znaleziono bezwymiarową temperaturę warstwy:

$$T^*(\zeta, \tau) = P(\tau) + R(\zeta, \tau) - S(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.36)$$

gdzie:

$$P(\tau) = J_0(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi}\right) \frac{1}{Bi} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_1}\right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\beta_1} + \frac{\tau_i e^{-2\tau/\tau_i}}{\tau_s^0 \beta_2} -$$

$$- \left[ \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi}\right) \frac{1}{Bi} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_1}\right) \frac{1}{\beta_1} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_2} \right] e^{-Bi\tau}, \quad (7.1.37)$$

$$R(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\tau) \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.38)$$

$$R_n(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n}\right) \frac{1}{Bi_n} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i e^{-2\tau/\tau_i}}{\tau_s^0 \beta_{2,n}}, \quad (7.1.39)$$

$$S(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\tau) e^{-Bi_n \tau} \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.40)$$

$$S_n(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 B_{i_n}}\right) \frac{1}{B_{i_n}} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}}, \quad (7.1.41)$$

podczas gdy współczynniki  $B_{i_n}$ ,  $\beta_{k,n}$ ,  $\beta_k$ ,  $k=1,2$ ,  $n=1,2,\dots$  wyznaczono ze wzorów (7.1.30) i (7.1.33).

Jeżeli  $\beta_1 = 0$  ( $B_i = \tau_i^{-1}$ ), to  $\beta_2 = -\tau_i^{-1}$ , a zatem funkcja  $P(\tau)$  występująca w rozwiązaniu (7.1.36) przyjmuje postać:

$$P(\tau) = \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) \tau_i - \left[\left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0}\right) (\tau_i + \tau) - \frac{\tau^2}{2\tau_s^0} - \frac{\tau_i^2}{\tau_s^0}\right] e^{-\tau/\tau_i} - \frac{\tau_i^2}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i}, \quad (7.1.42)$$

zaś funkcje  $R_n(\tau)$  i  $S_n(\tau)$  (7.1.41) wyznaczono odpowiednio ze wzorów (7.1.39) i (7.1.41) przy następujących parametrach:

$$B_{i_n} = \lambda_n^2 + \tau_i^{-1}, \quad \beta_{1,n} = \lambda_n^2, \quad \beta_{2,n} = \lambda_n^2 - \tau_i^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.43)$$

W przypadku, gdy  $\beta_2 = 0$  ( $B_i = 2\tau_i^{-1}$ ), z zależności (7.1.33) obliczono  $\beta_1 = \tau_i^{-1}$ , a bezwymiarowy rozkład temperatury w warstwie wyznaczono na podstawie zależności (7.1.36), gdzie

$$P(\tau) = \left(1 + \frac{3\tau_i}{2\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) \frac{\tau_i}{2} - \left(1 + \frac{3\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) \tau_i e^{-\tau/\tau_i} + \left(1 + \frac{9\tau_i}{2\tau_s^0} + \frac{2\tau}{\tau_s^0}\right) \frac{\tau_i}{2} e^{-2\tau/\tau_i} \quad (7.1.44)$$

oraz  $R_n(\tau)$  (7.1.39) i  $S_n(\tau)$  (7.1.41) z parametrami:

$$B_{i_n} = \lambda_n^2 + 2\tau_i^{-1}, \quad \beta_{1,n} = \lambda_n^2 + \tau_i^{-1}, \quad \beta_{2,n} = \lambda_n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.45)$$

Uwzględniając wzory (7.1.24), (7.1.25) oraz następujące sumy szeregów [3, 98]:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n \zeta)}{\lambda_n^4} \equiv \hat{B}_4(\zeta) = -\frac{2}{3} B_4(0,5\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (7.1.46)$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_n \zeta)}{\lambda_n^2 \pm a^2} \equiv S_1^{\pm}(\zeta, a) = \pm \frac{1}{a} \left\{ \operatorname{cosech}(a) \operatorname{ch}[(1-\zeta)a] \right\} \mp \frac{1}{a^2}, \quad a \neq 0, \quad (7.1.47)$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi\zeta)}{(\lambda_n^2 \pm a^2)^2} \equiv S_2^{\pm}(\zeta, a) = \frac{1}{2a^3} \left[ \begin{array}{l} \operatorname{cosech}(a) \\ \operatorname{cosec}(a) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ch}[(1-\zeta)a] + a\zeta \operatorname{sh}[(1-\zeta)a] \\ \cos[(1-\zeta)a] - a\zeta \sin[(1-\zeta)a] \end{array} \right\} + \\ + \frac{1}{2a^2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cosech}^2(a) \operatorname{ch}(a\zeta) \\ \operatorname{cosec}^2(a) \cos(a\zeta) \end{array} \right\} - \frac{1}{a^4}, \quad (7.1.48)$$

gdzie:

$$\operatorname{cosec}(x) = 1/\sin(x), \quad \operatorname{cosech}(x) = 1/\operatorname{sh}(x), \quad (7.1.49)$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \quad (7.1.50)$$

znajdujemy sumę szeregu we wzorze (7.1.38). W tym celu zbiór wartości liczby Biota przedstawiono w postaci:  $Bi \in (0, \tau_i^{-1}) \cup [\tau_i^{-1}, 2\tau_i^{-1}) \cup (2\tau_i^{-1}, \infty)$ . Jeżeli  $Bi \in (0, \tau_i^{-1})$ , to  $\beta_k = Bi - k\tau_i^{-1} < 0$ ,  $\beta_{k,n} = \lambda_n^2 - |\beta_k|$ ,  $k=1,2$ ,  $n=1,2,\dots$ . Po uwzględnieniu sum (7.1.24) oraz (7.1.46)–(7.1.48), funkcję  $R(\zeta, \tau)$  (7.1.38), (7.1.39) zapisano w postaci:

$$R(\zeta, \tau) = \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \\ + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^-(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}). \quad (7.1.51)$$

Jeżeli wartość liczby Biota mieści się w przedziale  $Bi \in (\tau_i^{-1}, 2\tau_i^{-1})$ , to  $\beta_1 = Bi - \tau_i^{-1} > 0$ ,  $\beta_2 = Bi - 2\tau_i^{-1} < 0$ ,  $\beta_{1,n} = \lambda_n^2 + \beta_1$ ,  $\beta_{2,n} = \lambda_n^2 - |\beta_2|$ , a funkcję  $R(\zeta, \tau)$  (7.1.38), (7.1.39) można przedstawić w postaci:

$$R(\zeta, \tau) = \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \\ + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}). \quad (7.1.52)$$

W podobny sposób przy  $Bi \in (2\tau_i^{-1}, \infty)$  znaleziono  $\beta_k = Bi - k\tau_i^{-1} > 0$ ,  $\beta_{k,n} = \lambda_n^2 + \beta_k$ ,  $k=1,2$ ,  $n=1,2,\dots$ , i z wykorzystaniem sum (7.1.24), (7.1.46)–(7.1.48) otrzymano:



$$R(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \\ + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}). \quad (7.1.53)$$

Z kolei przy  $Bi = \tau_i^{-1}$  wyznaczono:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\tau_i^{-1}, \quad \beta_{1,n} = \lambda_n^2, \quad \beta_{2,n} = \lambda_n^2 - \tau_i^{-1},$$

$$R(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} \hat{B}_2(\zeta) + \\ + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} \hat{B}_4(\zeta) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}). \quad (7.1.54)$$

Przy  $Bi = 2\tau_i^{-1}$  znaleziono natomiast:

$$\beta_1 = \tau_i^{-1}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_{1,n} = \lambda_n^2 + \tau_i^{-1}, \quad \beta_{2,n} = \lambda_n^2,$$

$$R(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+[\zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2}] - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) + \\ + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+[\zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2}] - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} \hat{B}_2(\zeta), \quad (7.1.55)$$

gdzie funkcję  $S_k^\pm(\zeta, a)$ ,  $k=1,2$  i  $\hat{B}_4(\zeta)$  wyznaczono ze wzorów (7.1.46)–(7.1.50).

### 7.1.3. Temperatura nagrzewanej powierzchni warstwy

Na powierzchni  $\zeta = 0$  rozwiązanie (7.1.36) ma postać:

$$T^*(0, \tau) = P(\tau) + R(0, \tau) - S(0, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.56)$$

gdzie funkcję  $P(\tau)$  dla różnych przedziałów wartości liczby Biota wyznaczono ze wzorów (7.1.37), (7.1.42) lub (7.1.44). Uwzględniając zależności (7.1.25) i (7.1.46)–(7.1.50) przy obliczaniu funkcji  $R(0, \tau)$  (7.1.51)–(7.1.55), korzystano z następujących związków:

$$\hat{B}_2(0) = \frac{1}{3}, \quad \hat{B}_4(0) = \frac{1}{45}, \quad (7.1.57)$$

$$S_1^\pm(0, a) = \pm \frac{1}{a} \left\{ \frac{\operatorname{cth}(a)}{\cot(a)} \right\} \mp \frac{1}{a^2}, \quad (7.1.58)$$

$$S_2^\pm(0, a) = \frac{1}{2a^3} \left[ \frac{\operatorname{cth}(a)}{\cot(a)} \right] + \frac{1}{2a^2} \left[ \frac{\operatorname{cosech}^2(a)}{\operatorname{cosec}^2(a)} \right] - \frac{1}{a^4}. \quad (7.1.59)$$

Funkcję  $S(0, \tau)$  w rozwiązaniu (7.1.56) znaleziono ze wzorów (7.1.40) i (7.1.41), przy  $\zeta = 0$ . Uwzględniając powyższe, rozwiązanie (7.1.56) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} T^*(0, \tau) = & \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \frac{1}{2\tau_s^0 Bi} \left[ \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \right] + \\ & + \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\sqrt{|\beta_1|}} \cot(\sqrt{|\beta_1|}) - \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{2\tau_s^0 |\beta_1|} \left[ \frac{1}{\sqrt{|\beta_1|}} \cot(\sqrt{|\beta_1|}) + \operatorname{cosec}^2(\sqrt{|\beta_1|}) \right] + \\ & + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \frac{e^{-2\tau/\tau_i}}{\sqrt{|\beta_2|}} \cot(\sqrt{|\beta_2|}) - S(\tau), \quad 0 < Bi < \tau_i^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (7.1.60)$$

$$\begin{aligned} T^*(0, \tau) = & \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \frac{1}{2\tau_s^0 Bi} \left[ \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \right] - \\ & - \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\sqrt{\beta_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\beta_1}) - \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{2\tau_s^0 \beta_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\beta_1}) + \operatorname{cosech}^2(\sqrt{\beta_1}) \right] + \\ & + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \frac{e^{-2\tau/\tau_i}}{\sqrt{|\beta_2|}} \cot(\sqrt{|\beta_2|}) - S(\tau), \quad \tau_i^{-1} < Bi < 2\tau_i^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (7.1.61)$$

$$\begin{aligned} T^*(0, \tau) = & \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \frac{1}{2\tau_s^0 Bi} \left[ \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \right] - \\ & - \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\sqrt{\beta_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\beta_1}) - \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{2\tau_s^0 \beta_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \operatorname{cth}(\sqrt{\beta_1}) + \operatorname{cosech}^2(\sqrt{\beta_1}) \right] + \\ & + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \frac{e^{-2\tau/\tau_i}}{\sqrt{|\beta_2|}} \cot(\sqrt{|\beta_2|}) - S(\tau), \quad Bi > 2\tau_i^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (7.1.62)$$

$$\begin{aligned}
T^*(0, \tau) = & - \left[ \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{2}{3\tau_s^0} \right) \tau_i + \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{1}{3\tau_s^0} - \frac{\tau}{2\tau_s^0} \right) \tau + \frac{1}{3} + \frac{1}{45\tau_s^0} \right] e^{-\tau/\tau_i} + \\
& + \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \sqrt{\tau_i} \operatorname{cth}(\tau_i^{-1/2}) + \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} \operatorname{cosech}^2(\tau_i^{-1/2}) - \\
& - \frac{\tau_i \sqrt{\tau_i}}{2\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} \cot(\tau_i^{-1/2}) - S(\tau), \\
& + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} \frac{e^{-2\tau/\tau_i}}{\sqrt{|\beta_2|}} \operatorname{cth}(\sqrt{|\beta_2|}) - S(\tau), \quad Bi = \tau_i^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^*(0, \tau) = & \left[ \frac{\tau_i}{3\tau_s^0} + \left( 1 + \frac{9\tau_i}{2\tau_s^0} + \frac{2\tau}{\tau_s^0} \right) \frac{\tau_i}{2} \right] e^{-2\tau/\tau_i} + \left( 1 + \frac{5\tau_i}{4\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \sqrt{\frac{\tau_i}{2}} \operatorname{cth}[(0,5\tau_i)^{-1/2}] + \\
& + \frac{\tau_i}{4\tau_s^0} \operatorname{cosech}^2[(0,5\tau_i)^{-1/2}] - \left( 1 + \frac{5\tau_i}{2\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) \sqrt{\tau_i} e^{-\tau/\tau_i} \operatorname{cth}(\tau_i^{-1/2}) - \\
& - \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} \operatorname{cosech}^2(\tau_i^{-1/2}) - S(\tau), \quad Bi = 2\tau_i^{-1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.64)
\end{aligned}$$

gdzie:

$$S(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} - \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}} \right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} \right] e^{-Bi_n \tau}, \quad (7.1.65)$$

a współczynniki  $Bi_n$ ,  $\beta_k$ ,  $\beta_{k,n}$ ,  $k=1,2$ ,  $n=0,1,2,\dots$  są obliczane ze wzorów (7.1.30) i (7.1.33).

#### 7.1.4. Weryfikacja rozwiązania

Różniczkując rozwiązania (7.1.36)–(7.1.41) względem zmiennej  $\zeta$ , otrzymano:

$$\frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\substack{\zeta=0 \\ \zeta=1}} = \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\substack{\zeta=0 \\ \zeta=1}}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.66)$$

gdzie, z uwzględnieniem wzorów (7.1.52)–(7.1.55), dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^-(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}), \end{aligned} \quad (7.1.67)$$

$$0 < Bi < \tau_i^{-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}), \end{aligned}$$

$$\tau_i^{-1} < Bi < 2\tau_i^{-1}, \quad (7.1.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \sqrt{|\beta_1|}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \sqrt{|\beta_2|}), \end{aligned}$$

$$Bi > 2\tau_i^{-1}, \quad (7.1.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} \hat{B}_2^+(\zeta) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} \hat{B}_4^+(\zeta) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}), \end{aligned}$$

$$Bi = \tau_i^{-1}, \quad (7.1.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^+[\zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2}] + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^+[\zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2}] + \\ &\quad + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} \hat{B}_2^+(\zeta) - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} S_1^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}) - \frac{1}{\tau_s^0} e^{-\tau/\tau_i} S_2^+(\zeta, \tau_i^{-1/2}), \end{aligned}$$

$$Bi = 2\tau_i^{-1}. \quad (7.1.71)$$

Ze wzorów (7.1.24), (7.1.25) i (7.1.46), (7.1.47) wyznaczono pochodne:

$$\hat{B}_2'(\zeta) = \zeta - 1, \quad \hat{B}_4'(\zeta) = -\frac{1}{6}\zeta^3 + \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{3}\zeta, \quad (7.1.72)$$

$$S_1^\pm'(\zeta, a) = -\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cosech}(a)\operatorname{sh}[(1-\zeta)a] \\ \operatorname{cosec}(a)\sin[(1-\zeta)a] \end{array} \right\}, \quad (7.1.73)$$

$$S_2^\pm'(\zeta, a) = \mp \frac{\zeta}{2a} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cosech}(a)\operatorname{ch}[(1-\zeta)a] \\ \operatorname{cosec}(a)\cos[(1-\zeta)a] \end{array} \right\} \pm \frac{1}{2a} \left[ \begin{array}{l} \operatorname{cosech}^2(a)\operatorname{sh}(a\zeta) \\ \operatorname{cosec}^2(a)\sin(a\zeta) \end{array} \right] \quad (7.1.74)$$

oraz ich wartości na powierzchniach warstw  $\zeta = 0$  i  $\zeta = 1$ :

$$\hat{B}_2'(0) = -1, \quad \hat{B}_2'(1) = 0, \quad \hat{B}_4'(0) = 0, \quad \hat{B}_4'(1) = 0, \quad (7.1.75)$$

$$S_1^\pm'(0, a) = -1, \quad S_1^\pm'(1, a) = 0, \quad S_2^\pm'(0, a) = S_2^\pm'(1, a) = 0. \quad (7.1.76)$$

Uwzględniając we wzorach (7.1.67)–(7.1.71) postać bezwymiarowej intensywności strumienia ciepła  $q^*(\tau)$  (7.1.15) oraz wartości pochodnych (7.1.75), (7.1.76), otrzymano:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} &= -\left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) + \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) e^{-\tau/\tau_i} - \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} = -q^*(\tau), \\ \left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} &= 0, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (7.1.77)$$

co świadczy o spełnieniu warunków brzegowych (7.1.12) i (7.1.13).

Po uwzględnieniu postaci funkcji  $P(\tau)$  (7.1.37), (7.1.42) i (7.1.44) rozwiązanie (7.1.36)–(7.1.41), w chwili początkowej  $\tau = 0$ , daje:

$$T^*(\zeta, 0) = P(0), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (7.1.78)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} P(0) &= \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi}\right) \frac{1}{Bi} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_1}\right) \frac{1}{\beta_1} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_2} - \\ &\quad - \left[ \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 Bi}\right) \frac{1}{Bi} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_1}\right) \frac{1}{\beta_1} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_2} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$Bi \neq \tau_i^{-1} \wedge Bi \neq 2\tau_i^{-1}, \quad (7.1.79)$$

$$P(0) = \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0}\right)\tau_i - \left[\left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0}\right)\tau_i - \frac{\tau_i^2}{\tau_s^0}\right] - \frac{\tau_i^2}{\tau_s^0} = 0, \quad Bi = \tau_i^{-1}, \quad (7.1.80)$$

$$P(0) = \left(1 + \frac{3\tau_i}{2\tau_s^0}\right)\frac{\tau_i}{2} - \left(1 + \frac{3\tau_i}{\tau_s^0}\right)\tau_i + \left(1 + \frac{9\tau_i}{2\tau_s^0}\right)\frac{\tau_i}{2} = 0, \quad Bi = 2\tau_i^{-1}, \quad (7.1.81)$$

co potwierdza spełnienie warunku początkowego (7.1.14).

### 7.1.5. Hamowanie z jednostajnym opóźnieniem

Jeżeli  $\tau_i \rightarrow 0^+$ , to ciśnienie kontaktowe natychmiast, w chwili rozpoczęcia hamowania, osiąga swoją wartość nominalną  $p_0$ . Wówczas prędkość poślizgu zmniejsza się liniowo, a profil czasowy gęstości mocy tarcia (7.1.15) przyjmuje postać:

$$q^*(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\tau_s}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s = \tau_s^0. \quad (7.1.82)$$

Uwzględniając granice:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau_i \rightarrow 0^+} e^{-\tau/\tau_i} &= 0, \quad \lim_{\tau_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{\beta_k} = \lim_{\tau_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{Bi - k\tau_i^{-1}} = 0, \\ \lim_{\tau_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{\beta_{k,n}} &= \lim_{\tau_i \rightarrow 0^+} \frac{1}{Bi - k\tau_i^{-1} + \lambda_n^2} = 0, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (7.1.83)$$

oraz wzory (7.1.47) i (7.1.48), rozwiązanie (7.1.36)–(7.1.41) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} T^*(\zeta, \tau) &= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_s Bi}\right)\frac{1}{Bi} + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right)S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) + \frac{1}{\tau_s}S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) - \\ &- 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n}\right)\frac{1}{Bi_n} e^{-Bi_n\tau} \cos(\lambda_n\zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned} \quad (7.1.84)$$

gdzie:

$$S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] - \frac{1}{Bi}, \quad (7.1.85)$$

$$S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}) = \frac{1}{2\sqrt{Bi}Bi} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \{ \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \zeta \sqrt{Bi} \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] \} + \frac{1}{2Bi} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}(\zeta \sqrt{Bi}) - \frac{1}{Bi^2}. \quad (7.1.86)$$

Po podstawieniu funkcji  $S_k^+(\zeta, \sqrt{Bi})$ ,  $k=1,2$  (7.1.85) i (7.1.86) do rozwiązania (7.1.84) otrzymano:

$$T^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{2\tau_s Bi} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}(\zeta \sqrt{Bi}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} e^{-Bi_n \tau} \cos(\lambda_n \zeta) + \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \left\{ \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \frac{\zeta}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] \right\}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (7.1.87)$$

Na ogrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  z rozwiązania (7.1.87) znaleziono:

$$T^*(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) + \frac{1}{2\tau_s Bi} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} e^{-Bi_n \tau}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (7.1.88)$$

Poniżej udowodniono, że rozwiązanie (7.1.87) spełnia warunki brzegowe (7.1.12), (7.1.13) oraz warunek początkowy (7.1.14). Z uwzględnieniem następujących pochodnych [3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x), \quad \operatorname{cosech}'(x) = -\operatorname{ch}(x)/\operatorname{sh}^2(x), \\ \operatorname{cth}'(x) &= -\operatorname{cosech}^2(x) \end{aligned} \quad (7.1.89)$$

z rozwiązania (7.1.87) otrzymano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \left\{ - \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \sqrt{Bi} \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] - \frac{\zeta}{2\tau_s} \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] \right\} + \frac{1}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{sh}(\zeta \sqrt{Bi}), \\ &0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \end{aligned} \quad (7.1.90)$$

Na ogrzewanej powierzchni  $\zeta = 0$  warstwy ze wzoru (7.1.90) znaleziono:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \left[ \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \sqrt{Bi} \operatorname{sh}(\sqrt{Bi}) - \frac{1}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{sh}(\sqrt{Bi}) \right] = \quad (7.1.91) \\ &= -\left( 1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) + \frac{1}{2\tau_s Bi} = -q^*(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \end{aligned}$$

gdzie bezwymiarowa gęstość mocy tarcia  $q^*(\tau)$  ma postać (7.1.82). Na przeciwległej powierzchni wolnej warstwy ze wzoru (7.1.90) otrzymano:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} &= -\frac{1}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) + \frac{1}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{sh}(\sqrt{Bi}) = 0, \\ & \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (7.1.92) \end{aligned}$$

Równości (7.1.91) i (7.1.92) potwierdzają spełnienie warunków brzegowych (7.1.12) i (7.1.13).

W chwili początkowej  $\tau = 0$  rozwiązanie (7.1.87) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} T^*(\zeta, 0) &= \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \frac{\zeta}{2\tau_s \sqrt{Bi}} \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] \right\} + \\ & \quad + \frac{1}{2\tau_s Bi} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}(\zeta\sqrt{Bi}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (7.1.93) \end{aligned}$$

Z uwzględnieniem wzoru (7.1.30) oraz sum (7.1.47) i (7.1.48) szereg z prawej strony wzoru (7.1.93) przedstawiono w postaci:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} \cos(\lambda_n \zeta) = \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi} \right) \frac{1}{Bi} + S_1^+(\zeta, \sqrt{Bi}) + \frac{1}{\tau_s} S_2^+(\zeta, \sqrt{Bi}). \quad (7.1.94)$$

Podstawiając funkcje  $S_k^+(\zeta, \sqrt{Bi})$ ,  $k=1,2$  (7.1.85), (7.1.86) do prawej strony równania (7.1.94), otrzymano:



$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{\tau_s Bi_n} \right) \frac{1}{Bi_n} \cos(\lambda_n \zeta) = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \left( 1 + \frac{1}{2\tau_s Bi} \right) \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \frac{\zeta}{2\tau_s Bi} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \operatorname{sh}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] + \frac{1}{2\tau_s Bi} \operatorname{cosech}^2(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}(\zeta\sqrt{Bi}). \quad (7.1.95)$$

Z uwzględnieniem sumy (7.1.95) we wzorze (7.1.93) ustalono, że  $T^*(\zeta, 0) = 0$ , co świadczy o spełnieniu warunku początkowego (7.1.14).

Przechodząc do granicy  $\tau_s \rightarrow \infty$  we wzorach (7.1.82), (7.1.87), (7.1.88), otrzymano dodatkowo rozwiązanie zagadnienia (7.1.11)–(7.1.15) przy stałej intensywności strumienia ciepła  $q^*(\tau) = 1$ :

$$T^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cosech}(\sqrt{Bi}) \operatorname{ch}[(1-\zeta)\sqrt{Bi}] - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-Bi_n \tau}}{Bi_n} \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad (7.1.96)$$

$$T^*(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \operatorname{cth}(\sqrt{Bi}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-Bi_n \tau}}{Bi_n}, \quad \tau \geq 0. \quad (7.1.97)$$

### 7.1.6. Nagrzewanie warstwy izolowanej termicznie

Jeżeli chłodzenie konwekcyjne powierzchni bocznych tarczy jest pomijalnie małe ( $h \rightarrow 0$ ), to ze wzorów (7.1.9) i (7.1.10) wynika, że liczba Biota  $Bi = 0$ . Wówczas rozwiązanie zagadnienia (7.1.11)–(7.1.15) można zapisać w postaci:

$$T^*(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \tau} J_n(\tau) \cos(\lambda_n \zeta), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.98)$$

gdzie:

$$J_n(\tau) = \int_0^{\tau} q^*(s) e^{\lambda_n^2 s} ds, \quad (7.1.99)$$

zaś bezwymiarowa gęstość mocy tarcia  $q^*(\tau)$  i liczby własne  $\lambda_n$  zostały wyznaczone odpowiednio ze wzorów (7.1.15) i (7.1.22). Po podstawieniu funkcji  $q^*(\tau)$  (7.1.15) pod znak całki we wzorze (7.1.99) zapisano:

$$J_n(\tau) = J_n^{(1)}(\tau) - J_n^{(2)}(\tau) + \frac{\tau_i}{\tau_s} J_n^{(3)}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.100)$$

gdzie:

$$J_n^{(1)}(\tau) = \int_0^\tau \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{s}{\tau_s^0}\right) e^{\lambda_n^2 s} ds, \quad J_n^{(2)}(\tau) = \int_0^\tau \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{s}{\tau_s^0}\right) e^{\beta_{1,n} s} ds,$$

$$J_n^{(3)}(\tau) = \int_0^\tau e^{\beta_{2,n} s} ds, \quad (7.1.101)$$

przy czym:

$$\beta_{k,n} = \lambda_n^2 - k\tau_i^{-1}, \quad k=1,2, \quad n=0,1,2,\dots \quad (7.1.102)$$

Po obliczeniu całek (7.1.101) przy  $\beta_{k,n} \neq 0$  i podstawieniu ich do wzoru (7.1.100), znaleziono:

$$J_0(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_s^0}\right)\tau - \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right)\tau_i(1 - e^{-\tau/\tau_i}) - \frac{\tau_i^2}{2\tau_s^0}(1 - e^{-\tau/\tau_i})^2, \quad (7.1.103)$$

$$J_n(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \lambda_n^2}\right) \frac{e^{\lambda_n^2 \tau}}{\lambda_n^2} - \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \lambda_n^2}\right) \frac{1}{\lambda_n^2} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} (e^{\beta_{2,n} \tau} - 1) -$$

$$- \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{e^{\beta_{1,n} \tau}}{\beta_{1,n}} + \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}}, \quad n=1,2,\dots \quad (7.1.104)$$

Po uwzględnieniu funkcji  $J_n(\tau)$ ,  $n=0,1,2,\dots$  (7.1.103) i (7.1.104) w rozwiązaniu (7.1.98) bezwymiarową temperaturę warstwy zapisano w postaci:

$$T^*(\zeta, \tau) = J_0(\tau) + R_0(\zeta, \tau) - S_0(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.105)$$

gdzie:

$$R_0(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} R_{0,n}(\tau) \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.106)$$

$$R_{0,n}(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \lambda_n^2}\right) \frac{1}{\lambda_n^2} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i e^{-2\tau/\tau_i}}{\tau_s^0 \beta_{2,n}}, \quad (7.1.107)$$

$$S_0(\zeta, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{0,n}(\tau) e^{-\lambda_n^2 \tau} \cos(\lambda_n \zeta), \quad (7.1.108)$$

$$S_{0,n}(\tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \lambda_n^2}\right) \frac{1}{\lambda_n^2} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}}, \quad (7.1.109)$$

a współczynniki  $\lambda_n$  i  $\beta_{k,n}$  określono odpowiednio wzorami (7.1.22) i (7.1.102).

Z uwzględnieniem sum (7.1.24) oraz (7.1.46)-(7.1.48) funkcję  $R_0(\zeta, \tau)$  (7.1.106) zapisano w postaci:

$$R_0(\zeta, \tau) = \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) \hat{B}_2(\zeta) + \frac{1}{\tau_s^0} \hat{B}_4(\zeta) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-[ \zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2} ] - \\ - e^{-\tau/\tau_i} \left[ \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) \right], \quad (7.1.110)$$

gdzie:

$$S_1^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) = -\tau_i^{1/2} \operatorname{cosec}(\tau_i^{-1/2}) \cos[(1-\zeta)\tau_i^{-1/2}] + \tau_i, \quad (7.1.111)$$

$$S_1^-[ \zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2} ] = -(0,5\tau_i)^{1/2} \operatorname{cosec}[(0,5\tau_i)^{-1/2}] \cos[(1-\zeta)(0,5\tau_i)^{-1/2}] + 0,5\tau_i, \quad (7.1.112)$$

$$S_2^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) = 0,5\tau_i^{3/2} \operatorname{cosec}(\tau_i^{-1/2}) \{ \cos[(1-\zeta)\tau_i^{-1/2}] - \\ + \zeta \tau_i^{-1/2} \sin[(1-\zeta)\tau_i^{-1/2}] \} + 0,5\tau_i \operatorname{cosec}^2(\tau_i^{-1/2}) \cos(\zeta \tau_i^{-1/2}) - \tau_i^2. \quad (7.1.113)$$

Uwzględniając wzory (7.1.57)–(7.1.59), z rozwiązania (7.1.105)–(7.1.109) przy  $\zeta = 0$  bezwymiarową temperaturę nagrzewanej powierzchni warstwy znaleziono w postaci:

$$T^*(0, \tau) = J_0(\tau) + R_0(0, \tau) - S_0(0, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.114)$$

gdzie:

$$R_0(0, \tau) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) + \frac{1}{45\tau_s^0} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-[0, (0,5\tau_i)^{-1/2}] - \\ - e^{-\tau/\tau_i} \left[ \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0}\right) S_1^-(0, \tau_i^{-1/2}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2^-(0, \tau_i^{-1/2}) \right], \quad (7.1.115)$$

$$S_0(0, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \lambda_n^2}\right) \frac{1}{\lambda_n^2} - \left(1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} + \frac{1}{\tau_s^0 \beta_{1,n}}\right) \frac{1}{\beta_{1,n}} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0 \beta_{2,n}} \right] e^{-\lambda_n^2 \tau}, \quad (7.1.116)$$

$$S_1^-(0, \tau_i^{-1/2}) = -\tau_i^{1/2} \cot(\tau_i^{-1/2}) + \tau_i, \quad S_2^-(0, \tau_i^{-1/2}) = -\tau_i^{1/2} \cot(\tau_i^{-1/2}) + \tau_i, \quad (7.1.117)$$

$$S_1^-[0, (0,5\tau_i)^{-1/2}] = -(0,5\tau_i)^{1/2} \cot[(0,5\tau_i)^{-1/2}] + 0,5\tau_i, \quad (7.1.118)$$

$$S_2^-(0, \tau_i^{-1/2}) = 0,5\tau_i^{3/2} \cot(\tau_i^{-1/2}) + 0,5\tau_i \operatorname{cosec}^2(\tau_i^{-1/2}) - \tau_i^2, \quad (7.1.119)$$

a funkcję  $J_0(\tau)$  wyznaczono ze wzoru (7.1.103).

Różniczkując rozwiązanie (7.1.105)–(7.1.109), otrzymano:

$$\left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}^{\zeta=1} = \left. \frac{\partial R_0(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}^{\zeta=1}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.120)$$

gdzie, z uwzględnieniem wzorów (7.1.110)–(7.1.113), zapisano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_0(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = & \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) B_2'(\zeta) + \frac{1}{\tau_s^0} \hat{B}_4'(\zeta) + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} S_1^-[\zeta, (0,5\tau_i)^{-1/2}] - \\ & - e^{-\tau/\tau_i} \left[ \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) S_1'^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) + \frac{1}{\tau_s^0} S_2'^-(\zeta, \tau_i^{-1/2}) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.121)$$

Uwzględniając wartości pochodnych (7.1.75), (7.1.76), z równości (7.1.120), (7.1.121) znaleziono:

$$\left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = - \left( 1 + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) + \left( 1 + \frac{2\tau_i}{\tau_s^0} - \frac{\tau}{\tau_s^0} \right) e^{-\tau/\tau_i} - \frac{\tau_i}{\tau_s^0} e^{-2\tau/\tau_i} = -q^*(\tau), \quad (7.1.122)$$

$$\left. \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.123)$$

co potwierdza spełnienie przez rozwiązanie (7.1.105) warunków brzegowych (7.1.12) i (7.1.13). Przy  $\tau=0$  z rozwiązania (7.1.105) wynika, że  $T^*(\zeta, 0) = J_0(0) = 0$ , tzn. że warunek początkowy (7.1.14) również jest spełniony.

Następnie, przechodząc w rozwiązaniach (7.1.105)–(7.1.113) oraz (7.1.114)–(7.1.119) do granicy przy  $\tau_i \rightarrow 0^+$ , z uwzględnieniem związku  $\tau_s = \tau_s^0$ , bezwymiarową temperaturę warstwy podczas hamowania ze stałym opóźnieniem znaleziono w postaci:

$$T^*(\zeta, \tau) = \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_s}\right)\tau + \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right)\hat{B}_2(\zeta) + \frac{1}{\tau_s}\hat{B}_4(\zeta) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{\tau_s\lambda_n^2}\right)\frac{e^{-\lambda_n^2\tau}}{\lambda_n^2}\cos(\lambda_n\zeta),$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.124)$$

$$T^*(0, \tau) = \left(1 - \frac{\tau}{2\tau_s}\right)\tau + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_s} + \frac{1}{15\tau_s}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{\tau_s\lambda_n^2}\right)\frac{e^{-\lambda_n^2\tau}}{\lambda_n^2}, \quad 0 < \tau \leq \tau_s. \quad (7.1.125)$$

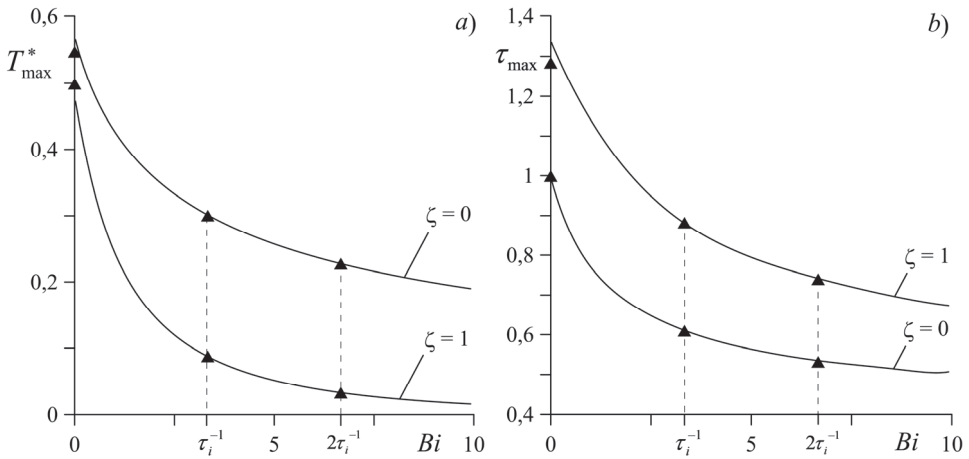
Należy zaznaczyć, że wzory (7.1.88) oraz (7.1.125), potrzebne do obliczenia temperatury nagrzewanej powierzchni warstwy, otrzymano wcześniej w artykule [90]. Opisują one ewolucję temperatury na powierzchni tarczy przy hamowaniu z jednostajnym opóźnieniem (przy stałym ciśnieniu kontaktowym). W pracy tej brak jest jednak rozwiązań pozwalających na zbadanie rozkładu przestrzennego temperatury w tarczy, jak również zmiany ciśnienia w czasie hamowania. Takie właśnie rozwiązania przedstawiono w niniejszym rozdziale. Natomiast w przypadkach szczególnych, za pomocą odpowiednich przejść granicznych, otrzymano rezultaty z pracy [90].

### 7.1.7. Analiza numeryczna

Analiza numeryczna rozkładów bezwymiarowej temperatury  $T^*(\zeta, \tau)$  w tarczy hamulcowej została przeprowadzona na podstawie dokładnych rozwiązań (7.1.36)–(7.1.41). Bezwymiarowe zmienne i parametry wejściowe (7.1.10) to: czas hamowania z jednostajnym opóźnieniem  $\tau_s^0 = 1$ , czas narastania ciśnienia kontaktowego  $0 \leq \tau_i \leq 0,3$ , liczba Biota  $0 \leq Bi \leq 10$ , zmienna przestrzenna  $0 \leq \zeta \leq 1$  oraz zmienna czasowa  $0 \leq \tau \leq \tau_s$ , gdzie czas hamowania  $t_s$ , niezbędny do znalezienia jego bezwymiarowego odpowiednika  $\tau_s$ , wyznaczono za pomocą numerycznego rozwiązania nieliniowego równania funkcyjnego (4.2.6).

Zależności bezwymiarowej temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$  oraz czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  od liczby Biota  $Bi$ ,  $0 \leq Bi \leq 10$  przy zadanej wartości czasu narastania ciśnienia  $\tau_i = 0,3$  przedstawiono na rysunku 7.2. Należy zaznaczyć, że zaprezentowane dane obliczeń numerycznych otrzymano, uwzględniając w rozwiązaniach (7.1.36)–(7.1.41) odpowiednie postaci funkcji  $P(\tau)$  i  $R(\tau)$ , w zależności od wartości liczby Biota: (7.1.37) i (7.1.51) przy  $Bi \in (0, \tau_i^{-1})$ , (7.1.37) i (7.1.52) przy  $Bi \in (\tau_i^{-1}, 2\tau_i^{-1})$ , (7.1.37) i (7.1.53) przy  $Bi \in (2\tau_i^{-1}, \infty)$ , (7.1.42) i (7.1.54) przy  $Bi = \tau_i^{-1}$  oraz (7.1.44) i (7.1.55) przy  $Bi = 2\tau_i^{-1}$ . W przypadku izolowanych termicznie ( $Bi = 0$ ) powierzchni bocznych tarczy korzystano z rozwiązań (7.1.103), (7.1.105)–(7.1.109). Należy podkreślić, że w punktach granicznych przy wartościach liczby Biota  $Bi = \tau_i^{-1}$  oraz  $Bi = 2\tau_i^{-1}$  (miejsca oznaczone trójką-

tami na rys. 7.2) zaprezentowane zależności, wyznaczone z wyżej wymienionych postaci otrzymanego rozwiązania, zachowują ciągłość. Natomiast rezultaty znalezione z rozwiązania (7.1.103), (7.1.105)–(7.1.109), przy  $Bi = 0$  (trójkąty na osiach rzędnych na rys. 7.2), nieznacznie odbiegają od trendu krzywych otrzymanych przy  $Bi \rightarrow 0$  w odpowiadającym mu rozwiązaniu, gdy  $Bi \in (0, \tau_i^{-1})$ .

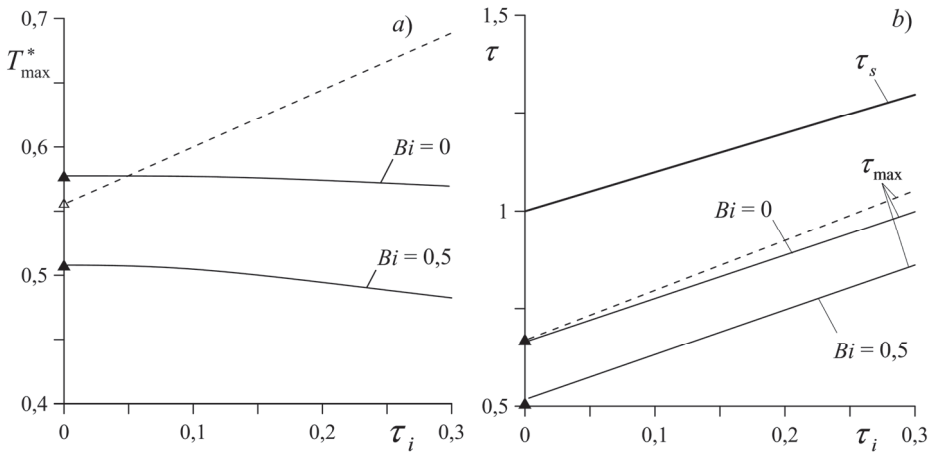


Rysunek 7.2. Zależność bezwymiarowych: a) temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$  oraz b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  od liczby Biota  $Bi$  na powierzchniach warstwy przy  $\tau_i = 0,3$

Zarówno na ogrzewanej  $\zeta = 0$ , jak i przeciwległej  $\zeta = 1$  powierzchni tarczy wraz ze zwiększaniem wartości liczby Biota następuje znaczące obniżenie temperatury maksymalnej oraz skrócenie czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$ . Najbardziej wyraźne jest to w przedziale zmiany liczby Biota  $Bi \in [0, \tau_i^{-1}]$ . Przy ustalonej wartości liczby Biota maksymalna temperatura ogrzewanej powierzchni tarczy jest znacznie wyższa i jest osiągana wcześniej niż na powierzchni przeciwległej.

Zależności bezwymiarowych maksymalnej temperatury  $T_{\max}^*$  na powierzchni ciernej tarczy oraz czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  i czasu  $\tau_s$  trwania procesu hamowania od czasu narastania ciśnienia kontaktowego  $\tau_i$  zaprezentowano na rysunku 7.3. Obliczenia wykonano, korzystając z rozwiązań dokładnych (7.1.103), (7.1.105)–(7.1.113) przy  $Bi = 0$  oraz (7.1.36), (7.1.37), (7.1.40), (7.1.51) przy  $Bi = 0,5$  (linie ciągłe). Trójkątami zaznaczono otrzymane z rozwiązań (7.1.88) i (7.1.124) odpowiednie rezultaty uzyskane przy natychmiastowym wzroście ciśnienia kontaktowego ( $\tau_i = 0$ ). W tym ostatnim przypadku czas hamowania jest najkrótszy ( $\tau_s = \tau_s^0 = 1$ ), a wartości bezwymiarowej temperatury maksymalnej są najwyższe ( $T_{\max}^* = 0,58$  przy  $Bi = 0$  oraz  $T_{\max}^* = 0,51$  przy  $Bi = 0,5$ ) i są osiągane w najkrótszym czasie – odpowiednio  $\tau_{\max} = 0,67$  i  $\tau_{\max} = 0,52$ . Wraz ze wzrostem

bezwymiarowego czasu narastania ciśnienia od zera do  $\tau_i = 0,3$  temperatura maksymalna nieznacznie spada do wartości  $T_{\max}^* = 0,57$  przy  $Bi = 0$  i  $T_{\max}^* = 0,48$  przy  $Bi = 0,5$ , osiągniętych odpowiednio w chwilach  $\tau_{\max} = 0,99$  i  $\tau_{\max} = 0,86$ . Tak więc wpływ narastania ciśnienia kontaktowego w rozpatrywanym przedziale wartości  $0 \leq \tau_i \leq 0,3$  na temperaturę maksymalną jest nieznaczny, zwłaszcza przy  $Bi = 0$  (rys. 7.3a). Parametr ten ma jednak istotny wpływ na czas  $\tau_{\max}$  osiągnięcia maksymalnej wartości temperatury (rys. 7.3b), a co za tym idzie, na profil czasowy temperatury powierzchni ciernej tarczy. Wraz ze zwiększeniem czasu narastania ciśnienia kontaktowego  $\tau_i$ , bezwymiarowe czasy  $\tau_{\max}$  oraz  $\tau_s$  rosną liniowo.



Rysunek 7.3. Zależności bezwymiarowych: a) temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$  oraz b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  i chwili zatrzymania  $\tau_s$  od czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$ . Linie ciągłe – obliczenia z rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego (1.3.36)

Zaprezentowane na rysunku 7.3 rezultaty, otrzymane z rozwiązania dokładnego (7.1.103), (7.1.105)–(7.1.113) przy  $Bi = 0$  (linie ciągłe), zestawiono z odpowiadającymi im danymi znalezionymi za pomocą przybliżonego rozwiązania Chichinadze (1.3.36), z uwzględnieniem bezwymiarowej gęstości mocy tarcia  $q^*(\tau)$  (7.1.15) oraz profilu czasowego gęstości pracy tarcia:

$$w^*(\tau) = \int_0^{\tau} q^*(s) ds = \left( \tau_s^0 + \tau_i - \frac{\tau}{2} \right) \frac{\tau}{\tau_s^0} + \tau_i \left[ \frac{e^{-\tau/\tau_i}}{\tau_s^0} \left( \tau_s^0 + \tau_i - \tau - \frac{\tau_i}{2} e^{-\tau/\tau_i} \right) - \frac{\tau_i}{2\tau_s^0} - 1 \right],$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7.1.126)$$

wyznaczonego ze związku (1.3.38) (linie przerywane). Temperatura maksymalna,

wyznaczona z rozwiązania dokładnego, praktycznie nie zmienia się przy zwiększaniu parametru  $\tau_i$ , natomiast wartości te obliczone z rozwiązania przybliżonego rosną liniowo, osiągając maksimum  $T_{\max}^* = 0,69$  przy  $\tau_i = 0,3$ . Zależności czasu  $\tau_{\max}$  osiągnięcia maksimum temperaturowego wyznaczone z obu rozwiązań są zbliżone jakościowo, a także ilościowo. Wartości  $\tau_{\max} = 0,67$  osiągnane przy  $\tau_i = 0$  są jednakowe (rys. 7.3b).

W kolejnym etapie badań przeprowadzono, z uwzględnieniem związków (7.1.10), analizę temperatury tarczy w postaci wymiarowej:

$$T(z,t) = T_a + T_0 T^*(\zeta, \tau), \quad 0 \leq z \leq d, \quad 0 \leq t \leq t_s \quad (0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s). \quad (7.1.127)$$

Obliczenia wykonano przy parametrach wejściowych zaczerpniętych z artykułu [126] i podanych w tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Uśrednione właściwości termofizyczne materiału, wymiary tarcz oraz parametry operacyjne pracy układu [126]

Parametr [jednostka]	Wartość
Przewodność cieplna $K = K_x = K_z$ [ $\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	21
Ciepło właściwe $c$ [ $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	728,5
Gęstość $\rho$ [ $\text{kg m}^{-3}$ ]	1800
Grubość $d$ [m]	0,014
Promień wewnętrzny $r_i$ [m]	0,0265
Promień zewnętrzny $r_e$ [m]	0,0375
Współczynnik tarcia $f$	0,27
Ciśnienie nominalne $p_0$ [MPa]	0,602
Początkowa prędkość kątowa $\omega_0$ [ $\text{rad s}^{-1}$ ]	736,5
Początkowa energia kinetyczna $W_0$ [J]	103 540
Współczynnik wymiany ciepła z otoczeniem $h$ [ $\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]	100
Temperatura początkowa $T_a$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	20
Czas narastania ciśnienia $t_i$ [s]	0,5

Rozpatrzono proces nagrzewania ciernego pojedynczej tarczy wielotarczowego układu hamulcowego przy hamowaniu ze stałym opóźnieniem. Tarcze o jednakowych wymiarach były wykonane z tego samego materiału ciernego – kompozytu z włóknami węglowymi (CFCM) Termar-ADF.

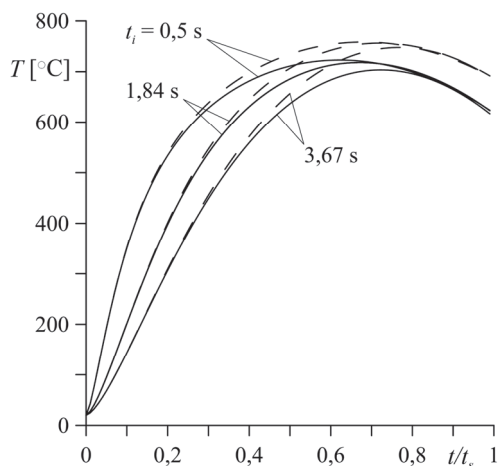
Tabela 7.2 zawiera wartości pozostałych parametrów wyznaczonych na podstawie danych z tabeli 7.1 i niezbędnych do obliczeń temperatury (7.1.127).



Tabela 7.2. Dodatkowe parametry wyznaczone na podstawie danych z tabeli 7.1

Parametr [jednostka]	Wartość
Dyfuzyjność cieplna (7.1.9) $k$ [ $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ]	$7,9 \times 10^{-6}$
Promień ekwiwalentny tarcia $r_{eq} = 2(r_e^2 + r_e r_i + r_i^2)/[3(r_e + r_i)]$ [m]	0,0323
Szerokość tarczy $l = r_e - r_i$ [m]	0,011
Początkowa prędkość liniowa $V_0 = \omega_0 r_{eq}$ [ $\text{ms}^{-1}$ ]	23,8
Nominalne pole powierzchni kontaktu $A_a = \pi(r_e^2 - r_i^2)$ [ $\text{m}^2$ ]	0,0022
Nominalna gęstość mocy tarcia $q_0 = fV_0 p_0$ [ $\text{MW m}^{-2}$ ]	3,868
Efektywny współczynnik wymiany ciepła (7.1.9) $h^*$ [ $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]	98
Liczba Biota (7.1.10) $Bi$	0,17
Czas hamowania z jednostajnym opóźnieniem $t_s^0 = W_0/(q_0 A_a)$	12,1
Czas hamowania $t_s$ [s]	12,6

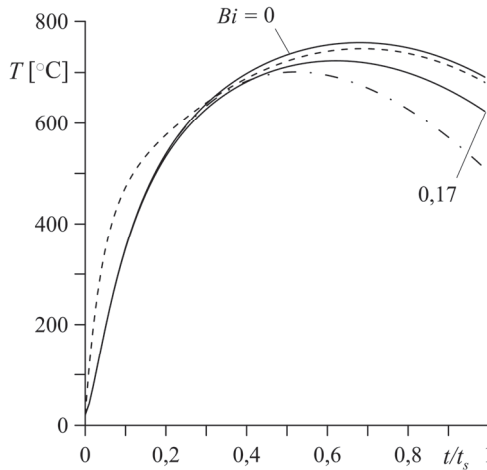
Zmiany temperatury  $T$  na powierzchni ciernej tarczy w czasie hamowania przedstawiono na rysunku 7.4. Rezultaty otrzymane z rozwiązania (7.1.60) przy  $Bi = 0,17$  oznaczono liniami ciągłymi. Linie przerywane odpowiadają zaś przebiegom czasowym temperatury wyznaczonym z rozwiązania (7.1.103), (7.1.114)–(7.1.116) przy  $Bi = 0$ . Obliczenia wykonano przy trzech różnych wartościach czasu narastania ciśnienia kontaktowego:  $t_i = 0,5$  s; 1,84 s; 3,67 s ( $\tau_i = 0,041$ ; 0,15; 0,3) i odpowiadających im wartościach czasu trwania hamowania:  $t_s = 12,6$  s; 13,92 s; 15,74 s. Wartości temperatury maksymalnej  $T_{\max} = 759^\circ\text{C}$ ,  $756^\circ\text{C}$ ,  $748^\circ\text{C}$  odpowiadające tym trzem czasom narastania ciśnienia  $t_i$  znalezione przy  $Bi = 0$  są nieznacznie wyższe i osiągnane nieco później w momentach czasu  $t_{\max}/t_s = 0,68$ ; 0,72; 0,77 w porównaniu z odpowiadającymi im rezultatami  $T_{\max} = 723^\circ\text{C}$ ,  $718^\circ\text{C}$ ,  $704^\circ\text{C}$ ,  $t_{\max}/t_s = 0,62$ ; 0,67; 0,72, otrzymanymi przy uwzględnieniu chłodzenia konwekcyjnego powierzchni bocznych tarczy ( $Bi = 0,17$ ). Wraz z wydłużeniem czasu narastania ciśnienia temperatura maksymalna zmniejsza się, natomiast czas jej osiągnięcia zwiększa się. W końcowej fazie procesu hamowania  $0,8 \leq t/t_s \leq 1$  temperatura powierzchni ciernej tarczy, wyznaczona dla różnych wartości parametru  $t_i$ , zmniejsza się do wartości  $T = 691^\circ\text{C}$  ( $Bi = 0$ ) oraz  $T = 624^\circ\text{C}$  ( $Bi = 0,17$ ) w chwili zatrzymania  $t = t_s$ .



Rysunek 7.4. Ewolucje temperatury nagrzewanej powierzchni tarczy  $z=0$  dla trzech wartości czasu narastania ciśnienia  $t_i$  przy  $Bi=0,17$  (linie ciągłe) oraz  $Bi=0$  (linie przerywane)

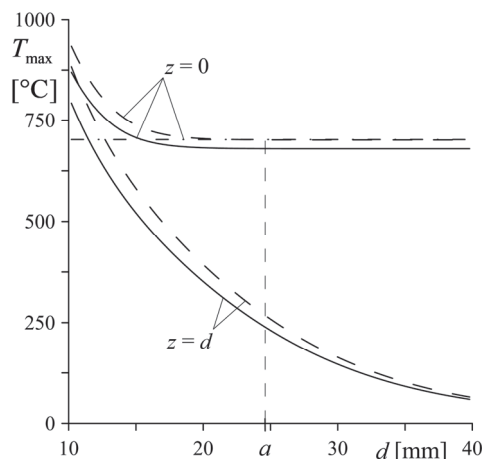
Zmianę temperatury  $T$  na powierzchni ciernej tarczy  $z=0$  w czasie hamowania  $0 \leq t \leq t_s$  przy ustalonej wartości czasu narastania ciśnienia  $t_i = 0,5$  s przedstawiono na rysunku 7.5. Zaprezentowane ewolucje temperatury wyznaczone na podstawie następujących rozwiązań analitycznych zagadnień cieplnych tarcia przy jednakowym profilu czasowym gęstości mocy tarcia (4.1.6): dokładnych dla warstwy przy  $h = 100 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  ( $Bi = 0,17$ ) (7.1.60) i przy  $Bi = 0$  (7.1.103), (7.1.114)–(7.1.116) (linie ciągłe), przybliżonego dla warstwy (1.3.36) (linia przerywana) oraz dokładnego rozwiązania dla półprzestrzeni (4.1.38) (linia kropka-kreska). Przebieg czasowy temperatury we wszystkich przypadkach jest podobny jakościowo, jednak wyniki różnią się ilościowo. Najniższą temperaturę otrzymano z rozwiązania dla półprzestrzeni, w którym nie uwzględniono wpływu konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchniach bocznych tarczy oraz jej grubości (linia kropka-kreska na rys. 7.5). Temperatura w tym przypadku osiąga maksymalną wartość  $T_{\max} = 702^\circ\text{C}$  w chwili  $t_{\max} = 0,52t_s$ , po czym spada do wartości  $T = 510^\circ\text{C}$  w chwili zatrzymania. Temperatura nagrzewanej powierzchni warstwy, wyznaczona z uwzględnieniem chłodzenia konwekcyjnego powierzchni bocznych, osiąga maksymalną wartość  $T_{\max} = 723^\circ\text{C}$  w czasie  $t_{\max} = 0,62t_s$  oraz wartość  $T = 624^\circ\text{C}$  w chwili zakończenia hamowania. Przy adiabatycznych powierzchniach bocznych maksymalna temperatura warstwy jest najwyższa ( $T_{\max} = 758^\circ\text{C}$ ) i jest osiągnięta również przy  $t_{\max} = 0,62t_s$ , zaś w chwili zatrzymania wynosi  $T = 691^\circ\text{C}$ . Zmiana temperatury na nagrzewanej powierzchni warstwy w czasie hamowania, znalezionej na podstawie przybliżonego rozwiązania Chichinadze (linia przerywana), przebiega bardzo po-

dobnie do ewolucji temperatury znalezionej na podstawie rozwiązania dokładnego dla warstwy przy  $Bi = 0$  (linia ciągła).



Rysunek 7.5. Ewolucje temperatury powierzchni czarnej tarczy przy  $t_i = 0,5s$ . Linie ciągłe – rozwiązania dokładne przy  $Bi=0$  (7.1.60) i  $Bi=0,17$  (7.1.103), (7.1.114)–(7.1.116), linia przerywana – rozwiązanie Chichinadze (1.3.36), linia kropka-kreska – rozwiązanie dokładne dla półprzestrzeni (4.1.38)

Zależności maksymalnej temperatury osiągananej na powierzchniach warstwy od jej grubości zaprezentowano na rysunku 7.6. Obniżenie wartości temperatury maksymalnej osiągananej na nagrzewanej powierzchni spowodowane zwiększeniem grubości warstwy  $d$  jest zauważalne do wartości tego parametru wynoszącej  $d = 20\text{ mm}$ . Przy adiabatycznych powierzchniach bocznych warstwy ( $Bi = 0$ ) oraz grubości warstwy  $d \geq 20\text{ mm}$  maksymalna temperatura  $T_{\max} = 702^\circ\text{C}$  powierzchni czarnej  $z = 0$  praktycznie nie zmienia się (linia przerywana). Tę samą wartość temperatury maksymalnej, przy jednakowych parametrach wejściowych, otrzymano również z rozwiązania (4.1.38) zagadnienia cieplnego tarcia dla półprzestrzeni nagrzewanej tarciovym strumieniem ciepła  $q^*(\tau)$  (7.1.15) (linia kropka-kreska). Oznacza to, że przy szacowaniu maksymalnej temperatury powierzchni czarnej tarcz o grubościach powyżej 40 mm podczas hamowania zachodzącego w zbliżonych warunkach jak obecnie analizowane możemy korzystać z odpowiednich rozwiązań zagadnień cieplnych tarcia dla ciał półograniczonych.



Rysunek 7.6. Zależność temperatury maksymalnej osiągniętej na powierzchniach warstwy od jej grubości  $d$ . Linia ciągła – rozwiązanie dokładne dla warstwy przy  $Bi=0,17$ , linia przerywana – przy  $Bi=0$ , linia kropka-kreska – rozwiązanie dokładne dla półprzestrzeni

Uwzględnienie chłodzenia konwekcyjnego na powierzchniach bocznych tarczy ( $Bi = 0,17$ ) powoduje obniżenie temperatury na obu jej powierzchniach czołowych. Ustalona wartość maksymalnej temperatury powierzchni ciernej  $z = 0$  przy  $d \geq 20$  mm wynosi  $T_{\max} = 680^{\circ}\text{C}$  (linia ciągła). Natomiast na izolowanej termicznie powierzchni  $z = d$  temperatura wraz ze zwiększaniem grubości warstwy spada w całym rozpatrywanym zakresie grubości  $10 \leq d \leq 40$  mm. Najwyższa temperatura jest osiągnięta, gdy  $d = 10$  mm, i wynosi  $T_{\max} = 793^{\circ}\text{C}$  przy  $Bi = 0,17$  oraz  $T_{\max} = 883^{\circ}\text{C}$  przy  $Bi = 0$ . Natomiast jeżeli  $d = 40$  mm, to  $T_{\max} = 59^{\circ}\text{C}$  przy  $Bi = 0,17$  i  $T_{\max} = 65^{\circ}\text{C}$  przy  $Bi = 0$ .

Stosowanie jednowymiarowych modeli do badania temperatury w tarczowych układach hamulcowych jest dopuszczalne, gdy charakterystyczny rozmiar nagrzewanego elementu ciernego (w rozpatrywanym przypadku jest to połowa grubości tarczy  $d$ ) jest większy od efektywnej głębokości przenikania ciepła  $a = \sqrt{3kt_s}$ , czyli odległości od nagrzewanej powierzchni, na której temperatura stanowi 5% wartości maksymalnej [28]. W analizowanym przypadku maksymalna temperatura nagrzewanej powierzchni warstwy przy  $d \geq a = 24,6$  mm jest ustalona i, jak wspomniano wyżej, przy  $Bi = 0$  równa wartości  $T_{\max} = 702^{\circ}\text{C}$ , otrzymanej z rozwiązania jednowymiarowego zagadnienia cieplnego tarcia dla półprzestrzeni.

Należy zaznaczyć, że temperatura wyznaczona na podstawie analizowanego modelu jest zbliżona do odpowiednich rezultatów otrzymanych w artykule [126], w którym obliczenia wykonano z wykorzystaniem metody elementów skończo-

nych, za pomocą numerycznego rozwiązania nieliniowego zagadnienia cieplnego tarcia uwzględniającego wrażliwość termiczną materiałów.

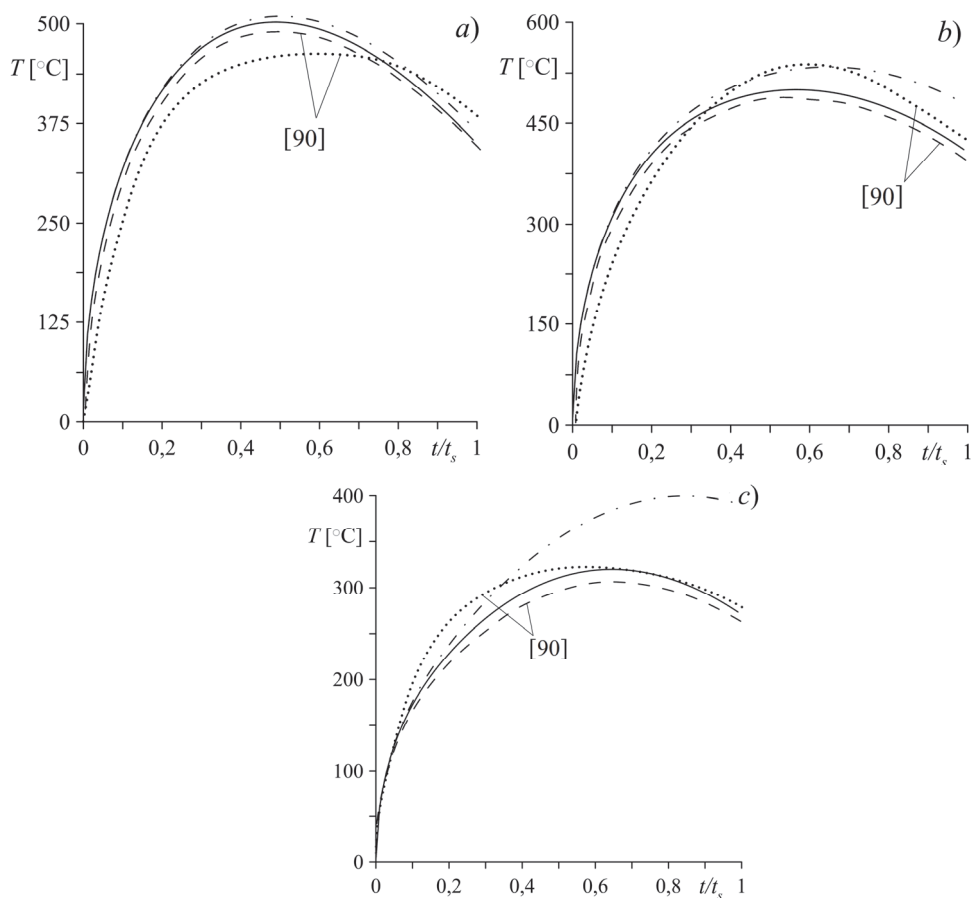
Rezultaty pomiarów doświadczalnych temperatury podczas hamowania ze stałym opóźnieniem ( $t_i = 0$ ) układu ciernego dwóch jednakowych tarcz wykonanych z węglowego kompozytu włóknistego (nazwa przemysłowa – Termar-ADF) zaprezentowano w artykule [90]. Uśrednione właściwości termofizyczne takiego kompozytu, grubości tarcz oraz temperaturę początkową podano wcześniej w tabelach 7.1 i 7.2. W porównaniu z danymi z tych tabel w rozpatrywanym przypadku różnią się wymiary promieni tarcz: wewnętrzny  $r_i = 27$  mm oraz zewnętrzny  $r_e = 37$  mm. Badania wykonano przy trzech trybach hamowania: I, II, III (tab. 7.3).

Tabela 7.3. Parametry operacyjne poszczególnych trybów hamowania [90]

Parametr	Tryb hamowania		
	I	II	III
Prędkość początkowa $V_0$ [ $\text{ms}^{-1}$ ] na promieniu $r_m$	19	19	26
Nominalne ciśnienie kontaktowe $p_0$ [MPa]	0,98	0,61	0,22
Współczynnik tarcia $f$	0,28	0,24	0,18
Czas zatrzymania $t_s$ [s]	6,8	23	53
Współczynnik wymiany ciepła $h$ [ $\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$ ]	140	140	140

Układ pomiarowy stanowiły trzy termopary zamontowane na średnim promieniu  $r_m = 32$  mm jednej z tarcz na głębokości 0,5 mm od powierzchni cierniej. Wartości temperatury wyznaczono, uśredniając dane pomiarowe uzyskane z poszczególnych termopar. Zmierzone w ten sposób dane przedstawiono na rysunku 7.7 (linie kropkowane) i porównano z obliczeniami z artykułu [90] (linie przerywane) oraz rezultatami otrzymanymi na podstawie modeli opracowanych w tym rozdziale. Ewolucje temperatury powierzchni  $z = 0$  wyznaczono ze wzoru (7.1.127), gdzie podstawiono otrzymane rozwiązania  $T^*(0, \tau)$  uwzględniające chłodzenie konwekcyjne powierzchni bocznych tarczy (7.1.88) lub ich izolację termiczną (7.1.125). Tryb I (rys. 7.7a), dla którego przeprowadzono obliczenia i badania doświadczalne (tab. 7.3), charakteryzuje się najwyższymi wartościami ciśnienia nominalnego i współczynnika tarcia oraz najkrótszym czasem hamowania. Odpowiadające mu przebiegi czasowe temperatury, wyznaczone na podstawie rozwiązań analitycznych, są do siebie bardzo zbliżone, zarówno jakościowo, jak i ilościowo. Krzywa zmiany temperatury w czasie, zmierzonej za pomocą termopar, nieznacznie różni się od obliczeń teoretycznych – ma łagodniejszy wzrost, osiąga niższą wartość maksymalną, a spadek jej wartości przed zatrzymaniem jest

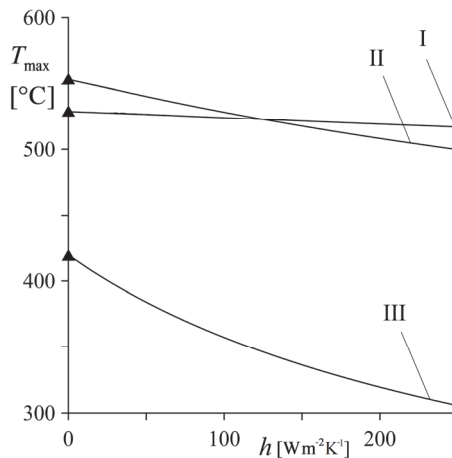
mniej intensywny. Zmniejszenie ciśnienia kontaktowego i wartości współczynnika tarcia przy jednoczesnej redukcji czasu hamowania (tryby II i III) powodują, że temperatura otrzymana z rozwiązania dokładnego (7.1.125) przy  $h = 0$  staje się znacząco wyższa od temperatury wyznaczonej z rozwiązania (7.1.88) przy  $h = 140 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  oraz od odpowiednich wartości doświadczalnych (rys. 7.7b, 7.7c). Najbardziej zauważalne jest to przy III trybie hamowania. W tym przypadku najlepszą zgodność z danymi doświadczalnymi wykazują rezultaty obliczeń temperatury z wykorzystaniem rozwiązania (7.1.88).



Rysunek 7.7. Ewolucje temperatury powierzchni ciernej tarczy przy trybach hamowania: a) I, b) II, c) III. Linie ciągłe – rozwiązanie dokładne przy  $h = 140 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  (7.1.88), linie przerywane – rezultaty obliczeń z artykułu [90], linie kropka-kreska – rozwiązanie dokładne przy  $h = 0$  (7.1.125), linie kropkowane – rezultaty doświadczalne [90]

Przeprowadzono obliczenia na podstawie rozwiązań (7.1.88) i (7.1.125) oraz porównano otrzymane rezultaty (linie ciągłe na rys. 7.7) z odpowiadającymi im danymi obliczeń zaprezentowanymi w artykule [90] (linie przerywane na rys. 7.7). Wykazano, że jakościowo krzywe te są zbieżne, przy jedynie niewielkiej różnicy odpowiednich wartości temperatury, które w artykule [90] są nieznacznie niższe.

Obniżenie temperatury maksymalnej  $T_{\max}$ , osiągananej na powierzchni roboczej tarczy, spowodowane zwiększaniem intensywności chłodzenia konwekcyjnego jej powierzchni bocznych, zaprezentowano na rysunku 7.8. Najwyższe wartości  $T_{\max} = 529^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\max} = 554^{\circ}\text{C}$  i  $T_{\max} = 420^{\circ}\text{C}$  (odpowiednio dla trybu I, II i III) osiąganę są przy izolowanych termicznie powierzchniach bocznych tarczy ( $h = 0$ ), a w celu ich wyznaczenia skorzystano z rozwiązania dokładnego (7.1.125). Wartości  $T_{\max}$  w przedziale  $0 < h \leq 250 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$  otrzymano natomiast z rozwiązania (7.1.88). Największy spadek temperatury, do wartości  $T_{\max} = 306^{\circ}\text{C}$ , zachodzi podczas najdłuższej trwającego III trybu hamowania. Obniżenie temperatury maksymalnej przy I i II trybie hamowania ma charakter liniowy i jest nieznaczne: najniższa temperatura przy  $h = 250 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$  podczas trybu II wynosi  $T_{\max} = 500^{\circ}\text{C}$ , a w przypadku hamowania w trybie I –  $T_{\max} = 517^{\circ}\text{C}$ . W tym ostatnim przypadku hamowanie trwa najkrócej (tab. 7.3), a wpływ konwekcyjnej wymiany ciepła na temperaturę jest nieznaczny nawet przy wysokich wartościach współczynnika  $h$ . Potwierdza to zasadność pomijania tego zjawiska przy opracowywaniu modeli analitycznych nagrzewania tarciovego dla krótkotrwałych procesów hamowania.



Rysunek 7.8. Wpływ współczynnika  $h$  wymiany ciepła na powierzchniach bocznych tarczy na temperaturę maksymalną  $T_{\max}$  przy trzech trybach hamowania

## 7.2. Temperatura tarczy kompozytowej z uwzględnieniem struktury materiału

W podrozdziale 7.1 do obliczenia temperatury tarczy wykonanej z węglowego kompozytu włóknistego zaadaptowano analityczne rozwiązania przy uśrednionych właściwościach cieplno-fizycznych materiału (tab. 7.1). W niniejszym podrozdziale zostanie podjęta próba uwzględnienia w tych rozwiązaniach rzeczywistej struktury kompozytu.

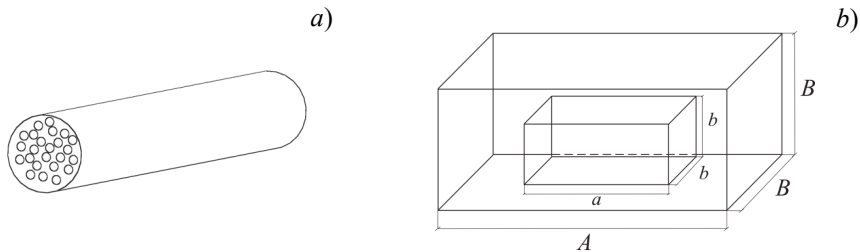
### 7.2.1. Efektywne wartości współczynników przewodzenia ciepła

Rozpatrzmy węglowy kompozyt włóknisty, który składa się z równolegle ułożonych wiązek w kształcie walców zawierających wtopione w materiał matrycy włókienka. Efektywne wartości współczynników przewodnictwa cieplnego takiego kompozytu  $K_x$  i  $K_z$ , odpowiednio w kierunku osi  $Ox$  i  $Oz$  (rys. 7.1), zostaną wyznaczone za pomocą metodyki zaproponowanej w pracy [79]. Uwzględni ona strukturę i właściwości składowych kompozytu na trzech poziomach skali: mikro, mezo i makro.

W skali mikro rozpatrywano pojedynczą wiązkę kompozytu w kształcie walca kołowego o skończonej długości, zawierającą rozmieszczone blisko siebie włókna w przestrzeni wypełnionej materiałem matrycy (rys. 7.9a). Efektywne współczynniki przewodnictwa cieplnego takiej wiązki, w kierunku poprzecznym  $\hat{K}_\perp$  i podłużnym  $\hat{K}_\parallel$ , wyznaczono zgodnie z prawem mieszanin [107]:

$$\hat{K}_\perp = \left( \frac{V_f}{K_f} + \frac{1-V_f}{K_m} \right)^{-1}, \quad \hat{K}_\parallel = V_f K_f + (1-V_f) K_m, \quad (7.2.1)$$

gdzie  $K_f$  i  $K_m$  są to odpowiednio współczynniki przewodności cieplnej materiałów włókien i matrycy, a  $0 \leq V_f \leq 1$  to współczynnik objętościowej koncentracji włókien w wiązce.



Rysunek 7.9. Schemat: a) wiązki na poziomie mikro; b) komórki podstawowej na poziomie mezo

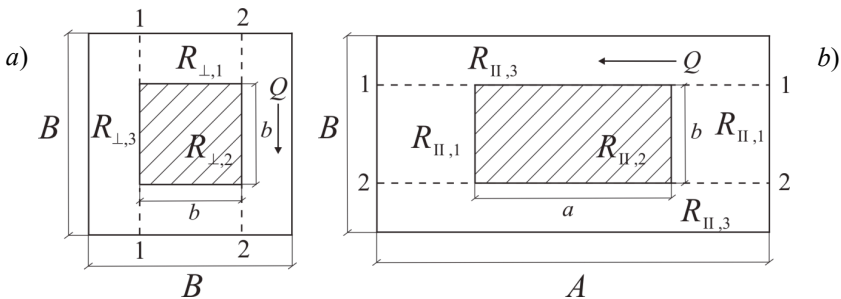


Na poziomie mezo rozpatruje się podstawową komórkę kompozytu w postaci prostopadłościanu o wysokości  $A$  z kwadratowym przekrojem poprzecznym o boku długości  $B$  (rys. 7.9b). Komórka ta zawiera pojedynczą wiązkę, której rzeczywisty kołowy kształt przekroju poprzecznego w celu umożliwienia dalszych obliczeń numerycznych zastąpiono kwadratowym o tym samym polu. Taka uproszczona wiązka jest więc prostopadłościanem o wysokości  $a$  z kwadratowym przekrojem poprzecznym o boku długości  $b$  (rys. 7.9b).

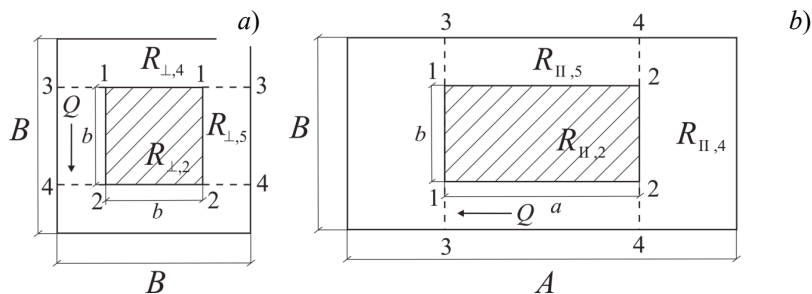
Efektywne współczynniki przewodnictwa cieplnego podstawowej komórki kompozytu w kierunkach podłużnym  $K_{\parallel}$  i poprzecznym  $K_{\perp}$  wyznaczono, korzystając z metody linearyzacji linii strumienia ciepła [38]. Istotą tej metody jest podział podstawowej komórki kompozytu dodatkowymi płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 (rys. 7.10) lub adiabatycznymi 1–1 i 2–2 oraz izotermicznymi 3–3 i 4–4 (rys. 7.11). Wówczas jednostkowe opory termiczne każdej części powstałej w wyniku podziału komórki podstawowej wyznacza się za pomocą wzoru [95]:

$$R = \frac{l}{S_p K}, \quad (7.2.2)$$

gdzie  $R$  – opór termiczny,  $l$  – długość drogi przebytej przez strumień ciepła,  $S_p$  – pole przekroju elementu prostopadłego do kierunku strumienia,  $K$  – współczynnik przewodności cieplnej materiału elementu. Nietrudno zauważyć, że otrzymane wyniki będą zależęły od sposobu podziału podstawowej komórki kompozytu, dlatego też w dalszych krokach obliczeń zastosowano następującą regułę [38]: w celu dokładniejszego oszacowania rzeczywistych wartości współczynników przewodnictwa cieplnego kompozytu należy wziąć średnią arytmetyczną wartości znalezionych przy adiabatycznym i adiabatyczno-izotermicznym podziale komórki podstawowej. Poniżej rozpatrzono oba te sposoby podziału bardziej szczegółowo.



Rysunek 7.10. Linearyzacja linii strumienia ciepła  $Q$  płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 w podstawowej komórce kompozytu: a) w kierunku poprzecznym, b) w kierunku podłużnym



Rysunek 7.11. Linearyzacja linii strumieni ciepła  $Q$  płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 oraz izotermicznymi 3–3 i 4–4: a) w kierunku poprzecznym, b) w kierunku podłużnym

Podział adiabatyczny komórki podstawowej płaszczyznami 1–1 i 2–2 w kierunku poprzecznym oraz podłużnym zaprezentowano na rysunku 7.10. Na podstawie wzoru (7.2.2) wyznaczono efektywne współczynniki przewodności cieplnej podstawowej komórki kompozytu w postaci:

$$K_{\perp} = \frac{B}{ABR_{\perp}} = \frac{1}{AR_{\perp}}, \quad K_{\parallel} = \frac{A}{B^2R_{\parallel}}. \quad (7.2.3)$$

Przy uwzględnieniu schematu łączenia poszczególnych oporów  $R_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  każdej części (rys. 7.12a) ogólne opory termiczne  $R_{\perp}$  i  $R_{\parallel}$  podstawowej komórki są równe:

$$R_{\perp} = \frac{(2R_{\perp,1} + R_{\perp,2})R_{\perp,3}}{2R_{\perp,1} + R_{\perp,2} + R_{\perp,3}} = \left( \frac{1}{R_{\perp,3}} + \frac{1}{2R_{\perp,1} + R_{\perp,2}} \right)^{-1}, \quad (7.2.4)$$

$$R_{\perp,1} = \frac{B-b}{2abK_m}, \quad R_{\perp,2} = \frac{1}{a\hat{K}_{\perp}}, \quad R_{\perp,3} = \frac{B}{(AB-ab)K_m}, \quad (7.2.5)$$

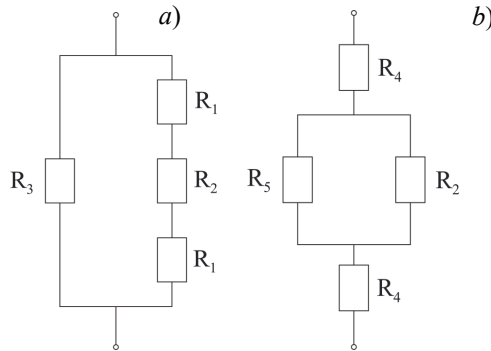
$$R_{\parallel} = \frac{(2R_{\parallel,1} + R_{\parallel,2})R_{\parallel,3}}{2R_{\parallel,1} + R_{\parallel,2} + R_{\parallel,3}} = \left( \frac{1}{R_{\parallel,3}} + \frac{1}{2R_{\parallel,1} + R_{\parallel,2}} \right)^{-1}, \quad (7.2.6)$$

$$R_{\parallel,1} = \frac{A-a}{2b^2K_m}, \quad R_{\parallel,2} = \frac{a}{b^2\hat{K}_{\parallel}}, \quad R_{\parallel,3} = \frac{A}{(B^2-b^2)K_m}, \quad (7.2.7)$$

gdzie efektywne przewodności cieplne  $\hat{K}_{II}$  i  $\hat{K}_{\perp}$  wiązki zawartej w komórce podstawowej obliczono ze wzorów (7.2.1). Podstawiając uogólnione opory termiczne  $R_{\perp}$  (7.2.4), (7.2.5) i  $R_{II}$  (7.2.6), (7.2.7) do wzorów (7.2.3), otrzymano:

$$K_{\perp} = \left(1 - \frac{ab}{AB}\right) K_m + \frac{1}{A} \left( \frac{B-b}{abK_m} + \frac{1}{a\hat{K}_{\perp}} \right)^{-1}, \quad (7.2.8)$$

$$K_{II} = \left(1 - \frac{b^2}{B^2}\right) K_m + \frac{A}{B^2} \left( \frac{A-a}{b^2K_m} + \frac{a}{b^2\hat{K}_{II}} \right)^{-1}. \quad (7.2.9)$$



Rysunek 7.12. Schematy łączenia poszczególnych oporów przy podziale komórki podstawowej płaszczyznami: a) adiabatycznymi, b) adiabatycznymi i izotermicznymi

Jednoczesny podział komórki podstawowej płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 oraz izotermicznymi 3–3 i 4–4 w kierunkach poprzecznym i podłużnym zaprezentowano na rysunku 7.11, zaś schemat łączenia oporów termicznych przy takich podziałach na rysunku 7.12b. W tym przypadku otrzymano:

$$R_{\perp} = 2R_{\perp,4} + \frac{R_{\perp,2}R_{\perp,5}}{R_{\perp,2} + R_{\perp,5}} = 2R_{\perp,4} + \left( \frac{1}{R_{\perp,2}} + \frac{1}{R_{\perp,5}} \right)^{-1}, \quad (7.2.10)$$

$$R_{\perp,4} = \frac{B-b}{2ABK_m}, \quad R_{\perp,5} = \frac{b}{(AB-ab)K_m}, \quad (7.2.11)$$

$$R_{II} = 2R_{II,4} + \frac{R_{II,2}R_{II,5}}{R_{II,2} + R_{II,5}} = 2R_{II,4} + \left( \frac{1}{R_{II,2}} + \frac{1}{R_{II,5}} \right)^{-1}, \quad (7.2.12)$$

$$R_{II,4} = \frac{A-a}{2B^2 K_m}, \quad R_{II,5} = \frac{a}{(B^2 - b^2) K_m}, \quad (7.2.13)$$

natomiast pozostałe opory termiczne  $R_{\perp,2}$  i  $R_{II,2}$  obliczono odpowiednio ze wzorów (7.2.5) i (7.2.7). Uwzględniając uogólnione opory termiczne  $R_{\perp}$  (7.2.10), (7.2.11) i  $R_{II}$  (7.2.12), (7.2.13) we wzorach (7.2.3), wyznaczono:

$$K_{\perp} = \frac{1}{A} \left[ \frac{B-b}{ABK_m} + \left( a\hat{K}_{\perp} + \frac{(AB-ab)}{b} K_m \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (7.2.14)$$

$$K_{II} = \frac{A}{B^2} \left[ \frac{A-a}{B^2 K_m} + \left( \frac{b^2}{a} \hat{K}_{II} + \frac{(B^2 - b^2)}{a} K_m \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (7.2.15)$$

Wymiary  $a$ ,  $b$  wiązki oraz  $A$  i  $B$  podstawowej komórki są powiązane zależnościami:

$$a - b = A - B, \quad ab^2 = V_p AB^2, \quad (7.2.16)$$

gdzie  $0 \leq V_p \leq 1$  – współczynnik objętościowej koncentracji wiązek w kompozycie. Eliminując parametr  $A$  w drugim ze wzorów (7.2.16) poprzez podstawienie wzoru pierwszego, otrzymano następujące równanie algebraiczne trzeciego stopnia służące do znalezienia parametru  $B$ :

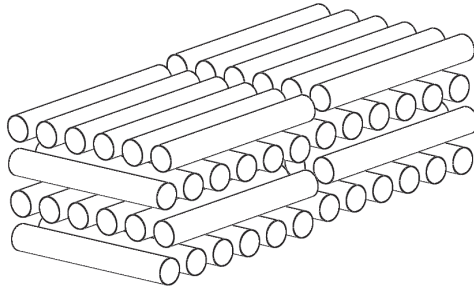
$$B^3 + (a-b)B^2 - ab^2 V_p^{-1} = 0. \quad (7.2.17)$$

Równanie (7.2.17) rozwiązywano numerycznie przy zadanych wymiarach  $a$  i  $b$  wiązki oraz współczynniku  $V_p$ . W rezultacie, z uwzględnieniem pierwszego ze związków (7.2.16), ustalono wymiary  $A$  i  $B$  podstawowej komórki kompozytu.

W celu wyznaczenia efektywnych współczynników przewodnictwa cieplnego na poziomie makro materiał traktujemy jak kompozyt zbudowany z wiązek ukształtowanych w warstwy ułożone na płaszczyznach równoległych do powierzchni czołowych tarczy (rys. 7.13). Wtedy efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego tarczy w kierunku osiowym równy jest uogólnionemu współczynnikowi przewodności cieplnej podstawowej komórki kompozytu w kierunku poprzecznym na poziomie mezo, tzn.

$$K_z = K_{\perp}, \quad (7.2.18)$$

gdzie  $K_{\perp}$  to średnia arytmetyczna wartości  $K_{\perp}$  wyznaczonych za pomocą wzorów (7.2.8) i (7.2.14).



Rysunek 7.13. Schemat ukształtowania wiązek warstwy na poziomie makro

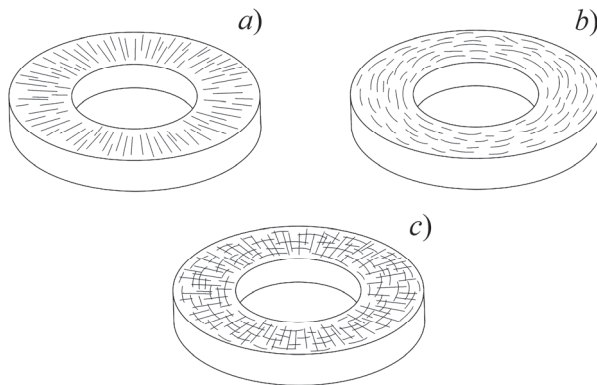
Wyznaczając efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego tarczy w kierunku promieniowym, należy uwzględnić orientację wiązek oraz włókien na płaszczyznach. Jeżeli włókna są ułożone w kierunku promieniowym (rys. 7.14a), to:

$$K_x = K_{\parallel}, \quad (7.2.19)$$

gdzie  $K_{\parallel}$  to średnia arytmetyczna wartości znalezionych ze wzorów (7.2.9), (7.2.15). Natomiast jeśli włókna są zorientowane w kierunku obwodowym (rys. 7.14b), to:

$$K_x = K_{\perp}, \quad (7.2.20)$$

gdzie  $K_{\perp}$  wyznaczamy w ten sam sposób jak we wzorze (7.2.18).



Rysunek 7.14. Schemat ułożenia wiązek w tarczy: a) orientacja promieniowa, b) orientacja obwodowa, c) orientacja losowa

W przypadku dowolnej (chaotycznej) orientacji wiązek na płaszczyznach kompozytu (rys. 7.14c) można postępować zgodnie z następującą regułą [38]: efektywne współczynniki przewodnictwa cieplnego układów z uporządkowaną lub chaotyczną strukturą są jednakowe, jeżeli struktury te są adekwatne, a właściwości komponentów i ich koncentracja objętościowa są takie same.

Pod pojęciem adekwatności przy przejściu od chaotycznej do uporządkowanej (periodycznej) struktury rozumie się zachowanie głównych cech struktury chaotycznej, np. jej izotropowości lub anizotropowości, stabilności itd. Zatem efektywny współczynnik przewodnictwa cieplnego w kierunku promieniowym w tarczy wykonanej z materiału kompozytowego o dowolnej orientacji włókien (rys. 7.14c) obliczono ze wzoru:

$$K_x = 0,5(K_{\perp} + K_{\parallel}), \quad (7.2.21)$$

gdzie  $K_{\perp}$  i  $K_{\parallel}$  wyznaczono ze średniej arytmetycznej odpowiednich wartości otrzymanych ze wzorów (7.2.8) i (7.2.14) oraz (7.2.9) i (7.2.15).

## 7.2.2. Analiza numeryczna

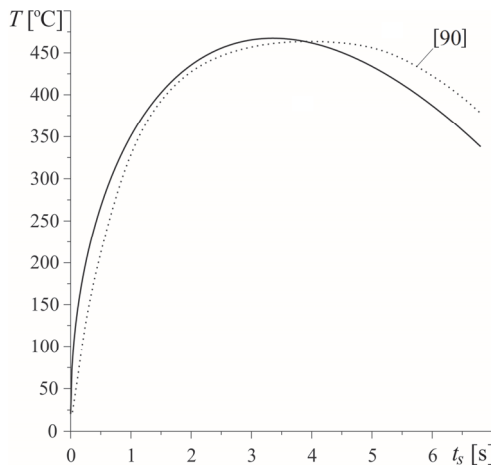
Obliczenia wykonano przy parametrach operacyjnych zawartych w tabeli 7.3 (I tryb hamowania) oraz takich samych jak w podrozdziale 7.1.7 rozmiarach tarczy. Wartości pozostałych parametrów wejściowych zamieszczono w tabeli 7.4. Materiał cierny jest kompozytem o strukturze z chaotyczną orientacją włókien (rys. 7.14c), zaś hamowanie odbywa się ze stałym opóźnieniem.

Tabela 7.4. Termofizyczne właściwości składowych oraz parametry geometryczne kompozytu [79]

Parametr [jednostka]	Wartość
Przewodność cieplna materiału włókna $K_f$ [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	250
Przewodność cieplna materiału matrycy $K_m$ [ $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ]	10
Współczynnik objętościowej koncentracji włókien w wiązce $V_f$	0,95
Współczynnik objętościowej koncentracji wiązek w kompozycie $V_p$	0,5
Wymiar wzdłużny wiązki $a$ [mm]	30
Wymiar poprzeczny wiązki $b$ [mm]	1

Zmianę temperatury powierzchni cierniej kompozytowej tarczy w czasie hamowania zaprezentowano na rysunku 7.15. Linią ciągłą oznaczono rezultaty obliczeń z wykorzystaniem wzoru (7.1.127) oraz rozwiązania (7.1.88), przy uwzględnieniu w nich efektywnych wartości współczynników przewodnictwa cieplnego

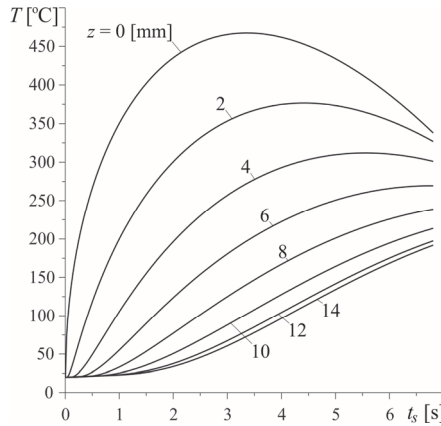
$K_x$  (7.2.21) i  $K_z$  (7.2.18). Linia kropkowana przedstawia dane zmierzone doświadczalnie (tryb I), opublikowane w pracy [90]. Przebieg obu krzywych jest zbliżony. Na początkowym etapie procesu hamowania temperatura wyznaczona na podstawie rozwiązania dokładnego gwałtownie narasta, osiągając wartość maksymalną  $T_{\max} = 466^\circ\text{C}$  w czasie  $t_{\max} = 3,36\text{s}$ , po czym spada do  $T = 337^\circ\text{C}$  w chwili zatrzymania  $t_s = 6,8\text{s}$ . Maksymalna wartość temperatury zmierzonej doświadczalnie jest praktycznie taka sama, natomiast zostaje ona osiągnięta nieznacznie później, w chwili  $t_{\max} \approx 4\text{s}$ . Na końcowym etapie hamowania jej wartości są nieco wyższe od wyznaczonych na podstawie rozwiązania analitycznego. Należy zaznaczyć, że profil czasowy temperatury wyznaczony z rozwiązania dokładnego (7.1.88), przy uwzględnieniu efektywnych wartości współczynników przewodnictwa cieplnego (rys. 7.15), jest bardziej zbliżony do krzywej doświadczalnej niż rezultaty uzyskane z tego samego rozwiązania przy jednakowych uśrednionych wartościach  $K_x = K_z = 21\text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$  (zaprezentowane na rys. 7.7a).



Rysunek 7.15. Ewolucje temperatury powierzchni ciernej kompozytowej tarczy: linia ciągła – na podstawie rozwiązania dokładnego (7.1.88), linia kropkowana – dane doświadczalne z artykułu [90]

Ewolucje temperatury w czasie hamowania  $0 \leq t \leq t_s$  na różnych odległościach od powierzchni roboczej tarczy pokazano na rysunku 7.16. Obliczenia wykonano na podstawie wzoru (7.1.127), uwzględniając w nim bezwymiarowe rozwiązanie (7.1.87). Wzrost temperatury zaraz po rozpoczęciu hamowania jest najszybszy i ma największą wartość na powierzchni ciernej  $z = 0$ , a wraz z oddalaniem od tej powierzchni w kierunku wnętrza tarczy następuje obniżenie temperatury oraz wydłużenie czasu  $t_{\max}$  osiągnięcia temperatury maksymalnej. Po osiągnięciu maksimum temperaturowego na poszczególnych głębokościach w stre-

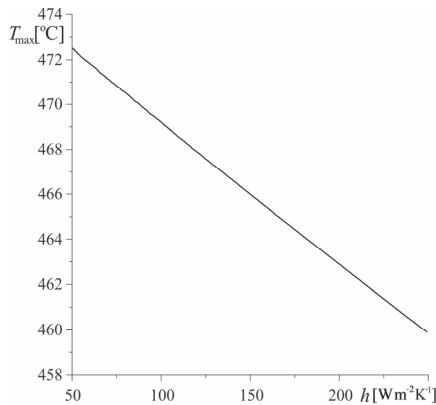
W obszarze  $0 \leq z < 6 \text{ mm}$  następuje spadek temperatury trwający aż do chwili zatrzymania. Na głębokościach  $z \geq 6 \text{ mm}$  temperatura monotonicznie zwiększa się podczas całego procesu hamowania.



Rysunek 7.16. Ewolucje temperatury na powierzchni ciernej i wewnątrz kompozytowej tarczy

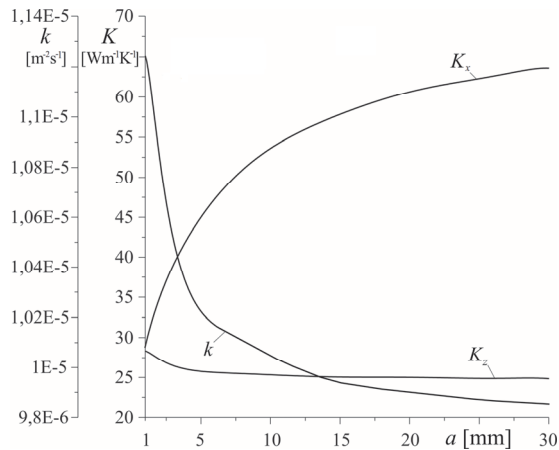
Liniowe obniżenie temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  powierzchni ciernej tarczy kompozytowej spowodowane zwiększeniem wartości współczynnika wymiany ciepła  $h$  zaprezentowano na rysunku 7.17. Najwyższa temperatura maksymalna  $T_{\max} = 473^{\circ}\text{C}$  ( $t_{\max} = 3,39 \text{ s}$ ) osiągana jest przy  $h = 50 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Wraz ze wzrostem tego współczynnika następuje zwiększenie intensywności chłodzenia oraz spadek temperatury maksymalnej do wartości  $T_{\max} = 460^{\circ}\text{C}$  ( $t_{\max} = 3,29 \text{ s}$ ) przy  $h = 250 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Podobne liniowe zmniejszenie maksymalnej temperatury tarczy, przy jednakowych uśrednionych wartościach współczynników przewodnictwa cieplnego, zaobserwowano również na rysunku 7.8. Uwzględnienie struktury materiału kompozytowego skutkuje tym, że spadek temperatury jest większy niż otrzymany przy uśrednionych właściwościach cieplno-fizycznych.





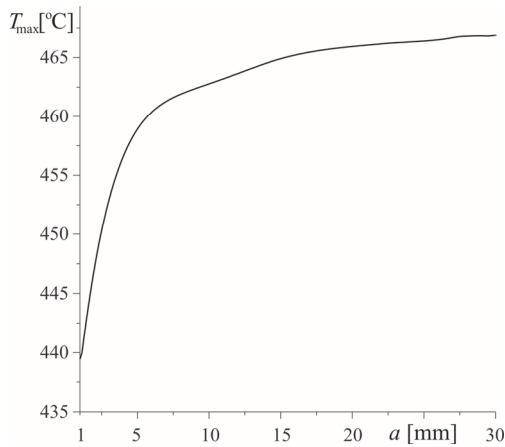
Rysunek 7.17. Wpływ współczynnika  $h$  wymiany ciepła na powierzchniach bocznych tarczy kompozytowej na temperaturę maksymalną  $T_{\max}$

Zmiany efektywnych termofizycznych właściwości materiału kompozytowej tarczy w zależności od długości pojedynczej wiązki  $a$  przedstawiono na rysunku 7.18. Najbardziej znaczące – zwiększenie  $K_x$  i obniżenie  $K_z$  oraz  $k$  – zachodzą przy zwiększeniu długości wiązki kompozytu od  $a = 1$  mm do wartości  $a \approx 15$  mm. Następnie, wraz ze wzrostem wartości  $a$ , zmiany te mają coraz łagodniejszy przebieg, zaś w pobliżu końca zakresu zmiany parametru  $a = 30$  mm wartości współczynników  $K_x$ ,  $K_z$  oraz  $k$  stabilizują się. Z powodu tego, że wiązki są rozmieszczone na płaszczyznach równoległych do powierzchni czołowej tarczy (rys. 7.13), ich długość  $a$  ma niewielki wpływ na przewodzenie ciepła w kierunku osiowym  $z$  tarczy. Przy najkrótszej rozpatrywanej długości  $a = 1$  mm efektywny współczynnik w kierunku osiowym przyjmuje największą wartość  $K_z = 28,3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Nieznaczny wzrost długości wiązek powoduje niewielkie obniżenie wartości do  $K_z \approx 25 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  i ustala się na tym poziomie w zakresie  $7 \text{ mm} \leq a \leq 30 \text{ mm}$ . Natomiast zdolność kompozytu do przewodzenia ciepła w kierunku promieniowym  $K_x$  znacząco rośnie od wartości  $28,7 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  przy  $a = 1$  mm do  $63,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  dla  $a = 30$  mm. Dyfuzyjność cieplna jest największa ( $k = 1,125 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ) dla kompozytu z najkrótszymi wiązkami o długości  $a = 1$  mm. Wraz ze zwiększaniem rozmiaru wiązki aż do  $a \approx 5$  mm dyfuzyjność cieplna maleje, osiągając wartość minimalną  $k = 0,985 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  przy  $a = 30$  mm.



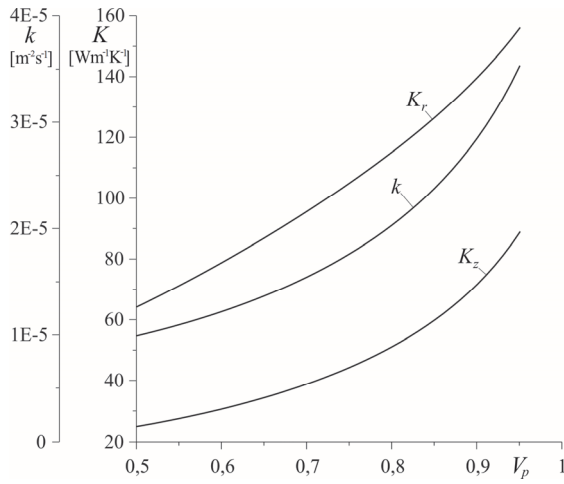
Rysunek 7.18. Zależność efektywnych współczynników przewodnictwa cieplnego w kierunkach promieniowym  $K_x$  i osiowym  $K_z$  oraz dyfuzyjności cieplnej  $k$  materiału kompozytowego od wymiaru wzdłużnego pojedynczej wiązki  $a$  przy  $V_f = 0,95$ ,  $V_p = 0,5$

Wraz ze zwiększeniem długości wiązki maksymalna temperatura powierzchni czarnej tarczy zwiększa się od wartości  $T_{\max} = 439,4^{\circ}\text{C}$  osiąganą przy  $a = 1$  mm do  $T_{\max} = 459,2^{\circ}\text{C}$  przy  $a = 30$  mm (rys. 7.19). Kompozyt z krótkimi wiązkami posiada zbliżone wartości efektywnych współczynników przewodnictwa cieplnego w obu kierunkach (promieniowym i osiowym), a jego dyfuzyjność cieplna ma najwyższą wartość (rys. 7.19). To właśnie ona powoduje szybsze odprowadzanie ciepła z powierzchni roboczej tarczy. Im dłuższe są wiązki w kompozycie, tym mniejsza staje się dyfuzyjność cieplna kompozytu i tym wyższe wartości  $T_{\max}$  są osiąganą na powierzchni czarnej tarczy. Wzrost temperatury maksymalnej jest najbardziej gwałtowny w zakresie zmiany  $1 < a \leq 5$  mm, kiedy to zmniejszenie dyfuzyjności cieplnej kompozytu jest największe (rys. 7.19).

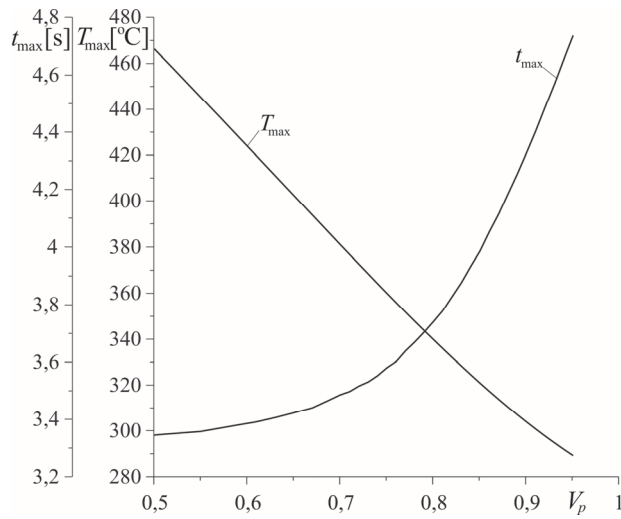


Rysunek 7.19. Zależność temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  powierzchni ciernej tarczy kompozytowej od wymiaru wzdłużnego pojedynczej wiązki  $a$  przy  $V_f = 0,95$ ,  $V_p = 0,5$

Wraz ze zwiększeniem współczynnika koncentracji wiązek  $V_p$  zwiększają się również przewodności cieplne kompozytu w obu kierunkach oraz jego dyfuzyjność cieplna: od wartości  $k = 0,985 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $K_x = 63,5 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  i  $K_z = 25 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  przy  $V_p = 0,5$  do  $k = 3,527 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $K_x = 155,9 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  i  $K_z = 88,9 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$  przy  $V_p = 0,95$  (rys. 7.20). Takie zwiększenie zdolności materiału do odprowadzania ciepła skutkuje prawie liniowym obniżeniem temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  na powierzchni roboczej tarczy przy wydłużającym się czasie jej osiągnięcia  $t_{\max}$  (rys. 7.21). Przy najniższej koncentracji wiązek w kompozycie,  $V_p = 0,5$ , temperatura maksymalna  $T_{\max} = 466^\circ\text{C}$  jest najwyższa i osiągnięta w chwili  $t_{\max} = 3,36 \text{ s}$ , zaś przy największej,  $V_p = 0,95$ , wielkości te są równe  $T_{\max} = 289,2^\circ\text{C}$  i  $t_{\max} = 4,73 \text{ s}$ .



Rysunek 7.20. Zależność efektywnych właściwości cieplnych  $K_x$ ,  $K_z$  oraz  $k$  materiału kompozytowego od współczynnika objętościowej koncentracji wiązek  $V_p$  przy  $a = 30\text{ mm}$ ,  $V_f = 0,95$



Rysunek 7.21. Zależność temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  oraz czasu jej osiągnięcia  $t_{\max}$  od współczynnika objętościowej koncentracji wiązek  $V_p$  przy  $a = 30\text{ mm}$ ,  $V_f = 0,95$

### 7.3. Wnioski

W wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej ustalono, że:

1. Uwzględnienie rzeczywistej grubości tarczy hamulcowej ma istotne znaczenie podczas wyznaczania temperatury w stosunkowo cienkich elementach ciernych. Jeżeli grubość elementu jest porównywalna lub większa od efektywnej głębokości przenikania ciepła, to jej wpływ na temperaturę maksymalną jest nieznaczny. Dlatego przy krótkotrwałych hamowaniach wysoko obciążonych układów ciernych do oszacowania temperatury maksymalnej uzasadnione jest stosowanie analitycznych modeli nagrzewania tarczowego dla ciał półograniczonych.
2. Zwiększenie intensywności chłodzenia konwekcyjnego na powierzchniach bocznych tarczy powoduje obniżenie temperatury jej powierzchni ciernej. Temperatura maksymalna tarczy podczas krótkotrwałego hamowania w warunkach wysokiego ciśnienia kontaktowego zmniejsza się liniowo przy zwiększeniu współczynnika wymiany ciepła. Materiał kompozytowy tarczy jest bardziej wrażliwy na chłodzenie konwekcyjne niż materiał jednorodny (o uśrednionych właściwościach cieplno-fizycznych).
3. Zmiana temperatury w czasie hamowania na powierzchni ciernej tarczy kompozytowej jest bardziej zbliżona do wyników zmierzonych doświadczalnie w porównaniu z przebiegami czasowymi temperatury uzyskanymi podczas nagrzewania tarczy wykonanej z materiału jednorodnego.
4. Wydłużenie wiązki zawierającej włókna węglowe w materiale kompozytowym, przy stałym ich udziale objętościowym w tarczy, powoduje wzrost efektywnej przewodności cieplnej w kierunku promieniowym oraz zmniejszenie dyfuzyjności cieplnej materiału. Skutkuje to zwiększeniem temperatury maksymalnej osiąganey na powierzchni ciernej tarczy.
5. Wzrost udziału objętościowego włókien węglowych w kompozycie przy stałej długości wiązki powoduje zwiększenie wartości efektywnych współczynników przewodzenia ciepła, a także dyfuzyjności cieplnej materiału. Prowadzi to do obniżenia temperatury maksymalnej na powierzchni roboczej tarczy oraz wydłużenia czasu jej osiągnięcia.

Badania zaprezentowane w niniejszym rozdziale zostały opublikowane w pracach [163, 164].

## PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

W niniejszej monografii rozpatrzono procesy nieustalonego nagrzewania tarciowego podczas różnych trybów pracy wysoko obciążonych układów hamulcowych. Dokonano syntetycznego przeglądu dotychczasowej wiedzy dotyczącej tej tematyki (rozdział *pierwszy*). Na jego podstawie opracowano analityczne modele w oparciu o zagadnienia ciepłne tarcia, których dokładne rozwiązania pozwoliły zbadać wpływ właściwości termomechanicznych materiałów oraz parametrów operacyjnych, w tym profilu czasowego mocy tarcia, na przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury w elementach ciernych. Znaleziono pola temperatury pozwoliły na otrzymanie w postaci analitycznej wzorów do wyznaczania odpowiednich quasi-statycznych naprężeń termicznych.

W pierwszej kolejności (rozdział *drugi*) opracowano model analityczny służący do zbadania wpływu zmiany gęstości mocy tarcia w procesie hamowania na temperaturę wyodrębnionego elementu pary ciernej (nakładki lub tarczy) tarczowego układu hamulcowego. W tym celu sformułowano jednowymiarowe początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła dla półprzestrzeni nagrzewanej na powierzchni strumieniem ciepła o intensywności proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia. Korzystając ze znanych z literatury naukowej rezultatów badań doświadczalnych, przeprowadzono klasyfikację dziesięciu przebiegów czasowych gęstości mocy tarcia o jednakowej pracy tarcia występujących podczas hamowania. Z wykorzystaniem twierdzenia Duhamela otrzymano dokładne rozwiązania zagadnienia z uwzględnieniem każdego z dziesięciu profili czasowych gęstości mocy tarcia. Na podstawie rozwiązań analitycznych przeprowadzono obliczenia numeryczne rozkładów temperatury, a następnie porównano je z odpowiadającymi im polami temperatury wyznaczonymi z rozwiązania przybliżonego Chichinadze, które jest obecnie stosowane do oszacowywania trybu temperaturowego elementów ciernych układów hamulcowych. Wykazano, że zadowalająca zgodność temperatury, znaleziona na podstawie rozwiązań dokładnego i przybliżonego dla wszystkich dziesięciu profili czasowych gęstości mocy tarcia, występuje tylko przy oszacowaniu temperatury na powierzchni tarcia. Oznacza to, że wykorzystanie rozwiązania Chichinadze do wyznaczenia temperatury wewnątrz elementów ciernych lub obliczenia ich tzw. temperatury objętościowej może być obarczone znacznymi błędami. Oprócz tego ustalono również, że kształt profilu czasowego gęstości mocy tarcia i czas osiągnięcia jej maksymalnej wartości mają znaczący wpływ na ewolucję temperatury na powierzchni roboczej oraz jej rozkład wewnątrz elementu ciernego. Istnieje bowiem ścisła relacja pomiędzy maksymalnymi wartościami gęstości mocy tarcia i temperatury. Im większy jest czas osiągnięcia

maksimum mocy tarcia, tym później osiągnięta jest maksymalna wartość temperatury. Największe wartości temperatury osiągnięte są natomiast w procesach, w których moc tarcia monotonicznie zwiększa się w czasie hamowania.

Na podstawie pól temperatury otrzymanych dla dziesięciu profili czasowych gęstości mocy tarcia znaleziono wzory do wyznaczania odpowiednich normalnych naprężeń termicznych w nagrzewanym elemencie ciernym. Przeprowadzona analiza wykazała, że stan naprężeń termicznych inicjowanych nagrzewaniem tarciovym w znacznym stopniu zależy od charakteru zmian mocy tarcia w czasie hamowania. Monotoniczny wzrost temperatury powoduje powstawanie normalnych naprężeń ściskających na powierzchni tarcia. Gdy natomiast maksymalne wartości mocy tarcia i temperatury są osiągnięte na wczesnym etapie hamowania, to na skutek ochłodzenia powierzchni ciernej przed zatrzymaniem w jej pobliżu pojawia się strefa naprężeń rozciągających. Jeżeli ich wartość maksymalna przekroczy granicę wytrzymałości materiału ciernego na rozciąganie, może to doprowadzić do pojawienia się powierzchniowych pęknięć termicznych.

Następnie (rozdział *trzeci*) zaproponowano sprzężony model analityczny do wyznaczania temperatury i naprężeń termicznych w dwuelementowym układzie ciernym (nakładka-tarcza). Opracowano go w oparciu o jednowymiarowe zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła sformułowane dla dwóch półprzestrzeni z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu. Założono, że tarciovym kontakt cieplny elementów jest idealny, tzn. temperatury ich powierzchni ciernych są sobie równe w każdej chwili hamowania, a suma intensywności strumieni ciepła absorbowanych przez elementy pary ciernej równa się gęstości mocy tarcia. Dokładne rozwiązania zagadnienia otrzymano dla tych samych dziesięciu czasowych profili mocy tarcia, co w modelu niesprzężonym – jednak w odróżnieniu od niego, intensywności strumieni ciepła na powierzchniach ciernych nie zadawano *a priori*, a wyznaczano je z otrzymanych rozwiązań. Wykazano, że współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła nie zależy od profilu czasowego mocy tarcia, a jedynie od właściwości termofizycznych materiałów pary ciernej (wzór Charrona). Na podstawie znalezionych pól temperatury wyznaczono odpowiednie normalne naprężenia termiczne. Przeprowadzona analiza rozwiązań pozwoliła ustalić, że wpływ profilu czasowego mocy tarcia na rozkłady temperatury i naprężeń termicznych jest znaczący, a wyniki są jakościowo zbliżone do rezultatów opracowanych na podstawie modelu niesprzężonego.

Przebieg czasowy temperatury powierzchni ciernej podczas racjonalnego trybu pracy tarczowego układu hamulcowego zbadano w rozdziale *czwartym*. Racjonalnymi nazywane są tryby hamowania, przy których moc tarcia zwiększa się od wartości zerowej wraz z rozpoczęciem procesu hamowania, zaś po osiągnięciu wartości maksymalnej maleje aż do zera w chwili zatrzymania. W ogólnym przypadku racjonalny profil czasowy gęstości mocy tarcia otrzymujemy przy eksponencjalnie narastającym wraz z upływem czasu hamowania ciśnieniu kontaktowym. W celu wyznaczenia odpowiednich profili czasowych gęstości mocy tarcia

sformułowano i otrzymano rozwiązania odpowiednich zagadnień początkowych dla równania ruchu. Pozwoliło to ustalić zmianę prędkości poślizgu w czasie hamowania oraz otrzymać funkcyjne równania do wyznaczenia chwili zatrzymania (czas hamowania). Ze względu na skomplikowaną postać profilu czasowego gęstości mocy tarcia (wyznaczonego jako iloczyn współczynnika tarcia, ciśnienia kontaktowego i prędkości) rozpatrzono jednocześnie dwie prostsze postaci jego aproksymacji. Pierwszą otrzymano, zakładając liniowy wzrost ciśnienia do wartości nominalnej, drugą natomiast na podstawie zaproponowanych przez Chichinadze wzorów aproksymacyjnych gęstości mocy tarcia podczas racjonalnego trybu hamowania. W celu zbadania ewolucji temperatury na powierzchni kontaktu elementów ciernych układu hamulcowego wykorzystano model sprzężony, opracowany w rozdziale *trzecim*. Otrzymano dokładne rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła dla dwóch półprzestrzeni z uwzględnieniem w warunku brzegowym na powierzchni kontaktu trzech (dokładnej i dwóch aproksymacyjnych) postaci profilu czasowego gęstości mocy tarcia podczas hamowania. Weryfikację opracowanych rozwiązań dotyczących procesu hamowania przeprowadzono, przechodząc w nich do granicy przy jednoczesnym zmniejszaniu czasu narastania ciśnienia do zera i otrzymując tym samym znany wzór Fazekasa do oszacowania temperatury powierzchni cierniej podczas hamowania z jednostajnym opóźnieniem. Ponadto, przeprowadzona analiza numeryczna pozwoliła ustalić, że wartości temperatury otrzymane z rozwiązań aproksymujących są niższe niż temperatura znaleziona z dokładnego rozwiązania przy eksponentyjnym zwiększeniu ciśnienia. Różnice pomiędzy tymi temperaturami są tym większe, im dłużej trwa narastanie ciśnienia kontaktowego do wartości nominalnej. Zauważono również, że wydłużenie czasu narastania ciśnienia powoduje także wydłużenie hamowania oraz zmniejszenie maksymalnej wartości temperatury przy zwiększającym się czasie jej osiągnięcia.

Dodatkowo rozpatrzono profil czasowy ciśnienia kontaktowego, który uwzględnia fluktuacje jego wartości w czasie hamowania. W tym przypadku rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia cieplnego tarcia znaleziono z wykorzystaniem całkowania numerycznego. Na jego podstawie przeprowadzono analizę wpływu oscylacji wartości ciśnienia kontaktowego w czasie hamowania na charakterystyki procesu, zwłaszcza na przebieg temperatury na powierzchni kontaktu. Ustalono, że fluktuacje ciśnienia nie mają widocznego wpływu na przebieg czasowy prędkości poślizgu, powodują natomiast znaczne oscylacje mocy tarcia oraz temperatury powierzchni tarcia podczas hamowania. Pomimo zadania stałej amplitudy wahań ciśnienia kontaktowego, amplituda oscylacji temperatury zmieniała się w czasie hamowania, a jej największe wartości wystąpiły w pobliżu momentu osiągnięcia maksimum temperatury.

Zaproponowane powyżej modele nagrzewania tarciowego pozwalają znaleźć profil czasowy temperatury nominalnego obszaru kontaktu (temperatura średnia) elementów pary cierniej. W rozdziale *piątym* opracowano natomiast schemat obli-



czania maksymalnej temperatury osiągananej podczas hamowania, bazujący na hipotezie sumacyjnej Chichinadze, która oprócz temperatury średniej bierze pod uwagę również temperaturę błysku generowaną na rzeczywistych obszarach styku chropowatości powierzchni roboczych elementów tarcowych. Do wyznaczenia błysku temperaturowego wykorzystano model kontaktu plastycznego z uwzględnieniem charakterystyk chropowatości powierzchni oraz wrażliwości termicznej materiałów ciernych, a także zmiany twardości materiału ciernego pod wpływem temperatury. Natomiast temperaturę średnią wyznaczono na podstawie rozwiązania liniowego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła z rozdziału *czwartego*. W celu uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów podczas szacowania temperatury średniej wykorzystano efektywne właściwości cieplno-fizyczne materiału przy temperaturze objętościowej. W tym celu skorzystano z zależności temperaturowych współczynnika przewodności cieplnej, ciepła właściwego oraz gęstości materiału. Na podstawie opracowanego modelu obliczeniowego przeprowadzono analizę rozkładu temperatury w hamulcu tarczowym, którego elementy cierne wykonano z kompozytu węglowego Termar-ADF. Obliczenia wykonano dla dwóch trybów hamowania – przy eksponencjalnym oraz liniowym wzroście ciśnienia kontaktowego. Poziom osiągananej temperatury okazał się wyższy podczas hamowania z eksponencjalnie rosnącym ciśnieniem niż w przypadku jego liniowego narastania. Różnica pomiędzy wynikami otrzymanymi z uwzględnieniem oraz bez uwzględnienia zmian właściwości termofizycznych materiału ciernego wynosiła około 20%, co potwierdza znaczący wpływ wrażliwości termicznej materiału Termar-ADF na prognozowanie trybu temperaturowego układu hamulcowego.

Dodatkowo zaproponowano schemat obliczeniowy do wyznaczania temperatury maksymalnej generowanej w wyniku tarcia podczas powtórno-krótkotrwałego (PKT) trybu pracy hamulca. Uwzględniono w nim zależności właściwości materiałów oraz zmiany współczynników tarcia par ciernych od temperatury. Maksymalną temperaturę w każdym cyklu hamowania wyznaczono według hipotezy sumacyjnej Chichinadze. Do zdefiniowania warunków początkowych w zagadnieniach przewodzenia ciepła dla kolejnych cykli hamowania wykorzystano wartość uśrednioną w czasie hamowania temperatury objętościowej elementów ciernych. Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwóch układów: tarczowego (żeliwna tarcza/metaloceramiczna nakładka) oraz bębnowego (stalowy bęben/szczęki z retinaksu). W układzie tarczowym pracującym w warunkach wysokiego obciążenia cieplnego poziom osiągananej temperatury maksymalnej jest zdeterminowany głównie przez średnią temperaturę nominalnego obszaru kontaktu, a wartości temperatury błysku są nieznaczne. Z kolei w układzie bębnowym pracującym w warunkach nieznacznego obciążenia cieplnego na początku każdego cyklu hamowania temperatura maksymalna zależy w znacznej mierze od wartości błysku temperaturowego, zaś w fazie końcowej cykli hamowania decydująca okazuje się temperatura średnia. W wyniku przeprowadzonej analizy zauważono, że krzywa stabilności termicznej (zależność współczynnika tarcia od temperatury) ma istotny wpływ na

charakterystyki prędkości, gęstości mocy tarcia oraz temperatury maksymalnej w czasie hamowania. Rezultaty otrzymane na podstawie opracowanego modelu analitycznego wykazują zadowalającą zgodność z odpowiadającymi im danymi literaturowymi otrzymanymi z wykorzystaniem metod numerycznych. Zaproponowany schemat obliczeniowy umożliwi adaptację dokładnych, analitycznych rozwiązań liniowych zagadnień cieplnych tarcia do wyznaczania maksymalnej temperatury układu hamulcowego różnego typu, podczas jednokrotnego lub wielokrotnego trybu hamowania.

W rozdziale *sóstym* zbadano wpływ ewolucji pola konturowego obszaru kontaktu na podstawowe charakterystyki procesu hamowania, takie jak prędkość, moc tarcia, czas hamowania oraz rozkład temperatury. Opracowano analityczny model obliczeniowy do wyznaczania średniej temperatury osiągniętej w konturowym obszarze kontaktu z uwzględnieniem monotonicznego, liniowego wzrostu jego pola w czasie hamowania. W tym celu sformułowano i rozwiązano początkowe zagadnienie ruchu, a następnie początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia ciepła z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia. Bazując na otrzymanym rozwiązaniu w postaci analitycznej, wykonano obliczenia dla układu ciernego składającego się z kompozytowych tarcz hamulcowych, a wyniki porównano z odpowiadającymi im rezultatami znalezionymi przy założeniu stałej w czasie powierzchni tarcia. Ustalono, że temperatura otrzymana przy niezmiennym konturowym obszarze kontaktu jest niższa od odpowiadającej jej temperatury znalezionej przy uwzględnieniu zmian tego obszaru (jednak różnica ta nie przekracza 10% dla maksymalnej wartości temperatury). Oznacza to, że obliczenia trybu temperaturowego układu hamulcowego mogą zostać zrealizowane z wystarczającą dokładnością przy założeniu stałej powierzchni kontaktu pary cierniej w czasie hamowania. Ponadto przeanalizowano wpływ wielkości pola nominalnego obszaru kontaktu na wybrane parametry procesu hamowania. Wykazano, że przy stałym lub zmieniającym się wraz z upływem czasu polem konturowego obszaru kontaktu zwiększenie pola nominalnego obszaru kontaktu prowadzi do skrócenia czasu hamowania, obniżenia temperatury maksymalnej i zmniejszenia czasu jej osiągnięcia.

Analityczny model do wyznaczania temperatury hamulca wielotarczowego zaproponowano w rozdziale *siódmym*. W tym celu sformułowano zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła dla warstwy, której górna powierzchnia nagrzewana jest tarciovym strumieniem ciepła o intensywności proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia, zaś dolna jest adiabatyczna. W zagadnieniu tym uwzględniono konwekcyjną wymianę ciepła z otoczeniem na powierzchniach bocznych tarczy oraz różne współczynniki przewodzenia ciepła materiału tarczy w kierunkach promieniowym i osiowym. Rozpatrzono jednokrotne hamowanie z eksponencjalnym zwiększeniem ciśnienia kontaktowego. Otrzymano dokładne rozwiązanie zagadnienia oraz jego postaci dla przypadków szczególnych znanych z literatury – przy natychmiastowym wzroście ciśnienia (hamowanie z jednostajnym opóźnieniem) oraz warstwie izolowanej termicznie. Otrzymane rozwiązania

zweryfikowano poprzez sprawdzenie realizacji warunków początkowo-brzegowych. Wykazano dobrą zgodność obliczonej na podstawie otrzymanego rozwiązania temperatury w przypadkach szczególnych z rezultatami innych autorów oraz z wynikami badań doświadczalnych. Ustalono, że wpływ konwekcyjnej wymiany ciepła na temperaturę tarczy jest tym większy, im dłużej trwa hamowanie. Zbadano również zależność pomiędzy grubością pojedynczej tarczy a wartością maksymalną temperatury na jej nagrzewanej powierzchni. Zauważono, że powyżej pewnej wielkości, tzw. efektywnej odległości od powierzchni ciernej, wymiary rzeczywiste tarczy nie wykazują wpływu na maksymalną temperaturę osiąganą na powierzchni roboczej.

Zakres stosowalności opracowanego modelu analitycznego rozszerzono na przypadek tarczy wykonanej z materiału kompozytowego. Zawiera on wiązki w postaci walców kołowych o skończonej długości, zbrojonych włóknami węglowymi. W przypadku ogólnym wiązki ułożono chaotycznie w płaszczyznach równoległych do powierzchni czołowych tarczy. Efektywne współczynniki przewodnictwa ciepła takiego kompozytu wyznaczono, dokonując uśrednienia ich wartości na trzech poziomach skali: mikro, mezo i makro. Na poziomie mikro rozpatrywano pojedynczą wiązkę z włóknami, a jej efektywne właściwości termofizyczne wyznaczono według prawa mieszanin. Na poziomie mezo efektywne współczynniki przewodnictwa ciepła podstawowej komórki kompozytu (pojedyncze włókno z otaczającym go materiałem matrycy) wyznaczono metodą linearyzacji linii strumieni ciepła. Metoda ta polega na podziale komórki podstawowej adiabatycznymi oraz izotermicznymi płaszczyznami na jednorodne elementy w celu znalezienia ich oporów termicznych, a następnie powiązanych z nimi odpowiednich współczynników przewodzenia ciepła w kierunkach promieniowym i osiowym. Na poziomie makro wykorzystano procedurę uśredniania wartości współczynników wyznaczonych na poziomie mezo w zależności od orientacji wiązek (promieniowa, obwodowa czy chaotyczna). Na podstawie dokładnego rozwiązania zagadnienia cieplnego dla warstwy jednorodnej przeprowadzono obliczenia temperatury z uwzględnieniem znalezionych efektywnych właściwości cieplno-fizycznych kompozytu. Ustalono, że przebieg czasowy temperatury nagrzewanej powierzchni tarczy kompozytowej wyznaczony z uwzględnieniem struktury materiału kompozytowego jest bardziej zbliżony do rezultatów eksperymentalnych niż odpowiadająca mu temperatura znaleziona przy wykorzystaniu rozwiązania dla tarczy wykonanej z materiału jednorodnego. Zbadano także wpływ długości włókien oraz współczynnika ich koncentracji w wiązce na temperaturę. Ustalono, że wydłużenie włókien węglowych w materiale powoduje wzrost efektywnej przewodności cieplnej w kierunku promieniowym oraz zmniejszenie dyfuzyjności cieplnej materiału. W efekcie wpływa to na podwyższenie temperatury maksymalnej osiąganą na powierzchni ciernej tarczy. Zwiększenie udziału objętościowego zbrojenia materiału kompozytowego powoduje z kolei wzrost wartości efektywnych współczynników przewo-

dzenia ciepła oraz dyfuzyjności cieplnej, co prowadzi do obniżenia maksymalnej temperatury i zwiększenia czasu jej osiągnięcia.

Reasumując, należy stwierdzić, że zaproponowane analityczne modele procesu nagrzewania tarczowego pozwalają na szybkie, wyznaczenie przestrzenno-czasowych rozkładów temperatury i naprężeń termicznych w elementach ciernych tarczowych układów hamulcowych, bez konieczności korzystania ze specjalistycznego oprogramowania. Postać otrzymanych wzorów analitycznych umożliwia przeprowadzenie jakościowej oraz ilościowej oceny stanu temperatury i naprężeń w hamulcu, określając wpływ wybranych parametrów procesu na ich rozkład. Rezultaty takich analiz mogą posłużyć na etapie projektowania do opracowania rekomendacji dotyczących doboru materiałów ciernych przy zadanych gabarytach hamulca i określonym trybie jego pracy.



# LITERATURA

1. **Abdel-Aal, H.A. (1998).** Error bounds variable conductivity temperature estimations in frictionally heated contacts. *Int. Comm. Heat Mass Trans.*, 25(1), 99–108.
2. **Abdel-Aal, H.A., Smith, S.T., Patten, J.A. (1997).** On the development of surface temperatures in precision single-point diamond abrasion of semi-conductors. *Int. Comm. Heat Mass Trans.*, 24(8), 1131–1140.
3. **Abramowitz, M., Stegun, I. (1979).** *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* National Bureau of Standards, Appl. Math., Series 55.
4. **Adamowicz, A. (2016).** Effect of convective cooling on temperature and thermal stresses in disk during repeated intermittent braking. *J. Frict. Wear.*, 37, 107–112.
5. **Adamowicz, A. (2016).** Thermal stressed state of a disk in the process of multiple braking. *Mater. Sci.*, 51, 814–820.
6. **Adamowicz, A., Grześ, P. (2011).** Influence of convective cooling of a disc brake temperature distribution during repetitive braking. *Applied Thermal Engineering*, 31(14–15), 2177–2185.
7. **Aleksandrov, M.P. (1965).** *Braking devices in mechanical engineering.* Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
8. **Awrejcewicz, J., Pyryev, Yu. (2009).** *Nonsmooth dynamics of contacting thermoelastic bodies.* New York: Springer.
9. **Balakin, V.A. (1980).** *Friction and wear at high sliding speeds.* Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
10. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P. (1999).** Calculation of heat generated in passenger car brakes. *J. Frict. Wear*, 20(3), 270–281.
11. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P. (1996).** Frictional heat resistance test of materials. *J. Frict. Wear*, 17(2), 194–201.
12. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Komkov, O.Yu. (1996).** Dynamic processes emerging at start of clutches and brakes. *J. Frict. Wear*, 17(4), 463–469.
13. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Komkov, O.Yu. (1996).** Heating at engagement of frictional clutches and brakes. *J. Frict. Wear*, 17(5), 589–597.
14. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Lysenok, Yu.V. (2002).** Temperature problems of friction. *J. Frict. Wear*, 23(3), 258–267.
15. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Lysenok, Yu.V. (2001).** Thermophysical processes in the zone of friction contact. *J. Frict. Wear*, 22(1), 5–9.

16. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Rodzevich, P.E. (2000).** Comparative analysis of heat loading of brakes of passenger cars. *J. Frict. Wear*, 21(4), 408–413.
17. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P., Rodzevich, P.E., Lysenok, Yu.V. (2001).** Comparative analysis of thermal load on truck brakes. *J. Frict. Wear*, 22(2), 123–127.
18. **Balakin, V.A., Sergienko, V.P. (1999).** *Thermal calculations brakes and friction units*. Gomel: IMMS NANB (in Russian).
19. **Barber, J.R., Martin-Moran, C.J. (1982).** Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane. *Wear*, 79(1), 11–19.
20. **Belyakov, N.S., Nosko, A.P. (2010).** Thermoelastic problem of friction of plane-parallel layers with allowance for nonstationarity of thermal processes. *J. Frict. Wear*, 31(5), 429–439.
21. **Blok, H. (1955).** The dissipation of frictional heat. *Applied Scientific Research*, Section A. (2–3), 151–181.
22. **Blok, H. (1937).** Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness conditions. *Proc. Inst. Mech. Eng. Gen. Disc. Lubrication*, 2, 222–235.
23. **Blok, H. (1963).** The flash temperature concept. *Wear*, 6(6), 483–494.
24. **Bowden, F.P., Ridler, K.E.W. (1935).** A note on the surface temperature of sliding metals. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31, 431–445.
25. **Carslaw, H.S., Jaeger, J.C. (1959).** *Conduction of Heat in Solids* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.
26. **Charron, F. (1943).** *Partage de la chaleur entre deux corps frottants* (article 182). Publ. Scient. et Techn. Ministere Air.
27. **Chichinadze, A.V., Braun, E.D., Ginzburg, A.G., Ignat'eva, E.V. (1979).** *Calculation, testing, and selection of frictional pairs*. Moscow: Nauka (in Russian).
28. **Chichinadze, A.V. (1967).** *Calculation and study of surface friction in braking*. Moscow: Nauka (in Russian).
29. **Chichinadze, A.V., Eiss, N.S. (1984).** *Polymers in Friction Assemblies of Machines and Devices: A Handbook*. New York, NY, USA: Allerton Press Inc.
30. **Chichinadze, A.V. (1995).** Processes in heat dynamics and modelling of friction and wear (dry and boundary friction). *Tribology International*, 28(1), 55–58.
31. **Chichinadze, A.V. (2009).** Theoretical and practical problems of thermal dynamics and simulation of the friction and wear of tribocouples. *J. Frict. Wear*, 30(3), 199–215.
32. **Chichinadze, A.V., Kozhemyakina, V.D., Suvorov, A.V. (2010).** Method of temperature-field calculation in model ring specimens during bilateral

friction in multidisc aircraft brakes with the IM-58-T2 new multipurpose friction machine. *J. Frict. Wear*, 31(1), 23–32.

33. **Chichinadze, A.V., Matveevski, R.M., Braun, E.P. (1986).** *Materials in tribotechnics non-stationary processes*. Moscow: Nauka (in Russian).
34. **Čičinadze, A.V. (1954).** *Issledovanie temperaturnykh polej nekotorykh uzlov suhogo treniâ*. Moskva: Avtoref. kand. dis. M., IMAŠ.
35. **Day, A.J. (2014).** *Braking of road vehicles*. Oxford: Elsevier.
36. **Demkin, N.B., Izmailov, V.V., Korotkov, M.A. (1976).** Estimation of the deformation of rough spheres and cylinders in compression. *Wear*, 39, 63–82.
37. **Demkin, N.B., Ryzhov, E.V. (1981).** *Surface Quality of Machine Contact Parts*. Mashinostroenie: Moscow: Mashinostroenie (in Russian).
38. **Dul'nev, G.N., Zarichniyak, Yu.P. (1974).** *Heat conductivity of mixtures and composition materials*. Leningrad: Energia (in Russian).
39. **Eriksson, M., Bergman, F., Jacobson, S. (2002).** On the nature of tribological contact in automotive brakes. *Wear*, 252(1–2), 26–36.
40. **Evans, D.J., Newcomb, T.P. (1961).** Temperatures reached in braking when the thermal properties of drum or disc vary with temperature. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 3(4), 315–317.
41. **Evtushenko, A.A., Ivanyk, E.G. (1999).** Formulas for calculating mean temperature and wear of friction surfaces in braking. *J. Frict. Wear*, 20(3), 257–264.
42. **Evtushenko, A., Kutsei, M. (2010).** Effect of pressure evolution during braking on temperature of a pad-disk tribosystem. *J. Frict. Wear*, 31(5), 326–333.
43. **Evtushenko, A., Kutsei, M. (2006).** Initiating of thermal cracking of materials by frictional heating. *J. Frict. Wear*, 27(2), 9–16.
44. **Evtushenko, A., Kutsey, M. (2008).** Effect of external surface cooling of the plane-parallel layer on the temperature of the layer-base tribosystem. *J. Frict. Wear*, 29(6), 455–460.
45. **Evtushenko, O., Kuciej, M., Och, E. (2014).** Effect of the heat sensitivity of materials on temperature in the course of friction. *Mat. Sci.*, 50(1), 126–134.
46. **Evtushenko, O., Kuciej, M., Och, E. (2014).** Modeling of temperature conditions for a braking system with regard for the heat sensitivity of materials. *Mat. Sci.*, 50(3), 397–405.
47. **Evtushenko, O., Kutsei, M., Roźniakowska, M. (2005).** Thermal cleavage stresses in a piecewise-homogeneous plate. *Mat. Sci.*, 41(5), 581–588.
48. **Evtushenko, O., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020).** Determination of the maximal temperature of a pad–disk tribosystem during one-time braking. *Materials Science*, 56(2), 152–159.



49. **Evtushenko, A., Matysiak, S., Kutsei, M. (2005).** Thermal problem of friction at braking of coated body. *J. Frict. Wear*, 26(2), 33–40.
50. **Fazekas, G.A.G. (1953).** Temperature gradients and heat stresses in brake drums. *SAE Trans.*, 61, 279–284.
51. **Ghosen, A.H., Sabbaghia, M. (1982).** Quasi-static coupled problems of thermoelasticity for cylindrical regions. *J. Therm. Stresses*, 5(3–4), 299–311.
52. **Ginzburg, A.G. (1973).** *Theoretical and experimental bases of calculation of the single braking process with the help of the system of equations of heat dynamics of friction. Optimal use of friction materials in friction units of machines.* Moscow: Nauka (in Russian).
53. **Grześ, P. (2011).** Partition of heat in 2D finite element model of a disc brake. *Acta Mechanica et Automatica*, 5, 35–41.
54. **Grześ, P. (2017).** Determination of the maximum temperature at single braking from the FE solution of heat dynamics of friction and wear system of equations. *Num. Heat Transf. Part A*, 71, 737–753.
55. **Grześ, P. (2018).** Finite element solution of the three-dimensional system of equations of heat dynamics of friction and wear during single braking. *Adv. Mech. Eng.*, 10, 1–15.
56. **Grześ, P. (2019).** Maximum temperature of the disc during repeated braking applications. *Adv. Mech. Eng.*, 11, 1–13.
57. **Grześ, P. (2019).** *Sprzężone modele numeryczne generacji ciepła w hamulcach tarczowych.* Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.
58. **Gurskii, B.E., Chichinadze, A.V. (2007).** Frictional heat problem and its evolution. Part 1. Blok model and its improvement. *J. Frict. Wear*, 28(3), 316–329.
59. **Hetnarski, R.B., Eslami, R.M., Gladwell, G.M.L. (2009).** *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications.* New York: Springer.
60. **Jewtuszenko, O. (red.) (2014).** *Analityczne i numeryczne modelowanie procesu nieustalanej generacji ciepła w elementach tarczowych układów hamulcowych.* Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.
61. **Jewtuszenko, O., Kuciej, M., Och, E. (2018).** *Nieliniowe modele nieustalonego nagrzewania tarczowego w układach hamulcowych.* Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.
62. **Jewtuszenko, O., Kuciej, M., Tolstoj-Sienkiewicz, J. (2015).** *Nieustalone i quasi-ustalone tarczowe pola temperatury.* Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.
63. **Kennedy, F.E. (2001).** Frictional heating and contact temperatures. W: B. Bhushan (red.), *Modern tribology handbook* (s. 235–272). Boca Raton, FL: CRS Press.

64. **Kennedy, F.E., Tian, X. (2016).** Modeling sliding contact temperatures including effects of surface roughness and convection. *Trans. ASME. J. Tribology*, 138(4), 042101.
65. **Khovansky, V.N., Chichinadze, A.V. (2001).** Prediction of friction and wear of sliding contacts, based on generalizational theory of thermal dynamics and modelling of friction and wear of tribosystems. *Meccanica*, 36(6), 641–649.
66. **Kołodziej, E., Skrzyniowski, A. (2008).** Wpływ obróbki mechanicznej tarczy hamulcowej na właściwości tribologiczne przy współpracy z nakładką cierną. *Czasopismo Techniczne Mechanika*, 105.8–M, 97–108.
67. **Kragel'skij, I.V., Chupilko, G.E., Čičinadze, A.V. (1955).** *Processes of friction in brakes of aviation wheels*. Moskva: Akademija Nauk SSSR (in Russian).
68. **Kragelsky, I.V., Demkin, N.B. (1960).** Contact area of rough surfaces. *Wear*, 3(3), 170–187.
69. **Kragelsky, I.V., Dobychin, M.N. Kombatov, V.S. (1982).** *Friction and wear: calculation methods*. Oxford: Pergamon.
70. **Kuciej, M. (2011).** Accounting changes of pressure in time in one-dimensional modeling the process of friction heating of disc brake. *Int. J. Heat Mass Trans*, 54(1–3), 468–474.
71. **Kuciej, M. (2012).** *Analityczne modele niestabilnego nagrzewania tarciowego*. Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej.
72. **Kuciej, M. (2011).** Investigation of the temperature field induced in the process of friction of a composite pad and a homogenous disc. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 38(1), 16–24.
73. **Kuciej, M. (2011).** Nonstationary frictional heat production in the course of sliding of a composite layer over the surface of a half space. *Mat. Sci.*, 47(1), 52–60.
74. **Kuciej, M. (2011).** The thermal problem of friction during braking for a three-element tribosystem with a composite pad. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 38(10), 1322–1329.
75. **Kuciej, M., Topczewska, K. (2019).** Determination of the maximum temperature of the friction pad in a one-disk clutch. *Mat. Sci.*, 54(6), 819–826.
76. **Ling, F.F. (1973).** *Surface mechanics*. New York: John Wiley&Sons.
77. **Loizou, A., Qi, H.S., Day, A.J. (2013).** A fundamental study on the heat partition ratio of vehicle disk brakes. *J Heat Tran: T ASME*, 135, 121302–1213028.
78. **Luikov, A.V. (1968).** *Analytical heat diffusion theory*. New York: Academic Press.
79. **Makhovskaya, Yu.Yu. (2015).** Modeling frictional heating of fibrous composite brake disk. *J. Fric. Wear*, 36(4), 286–292.

80. **Matysiak, S.J., Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2007).** Temperature field in the process of braking of a massive body with composite coating. *Mat. Sci.*, 43(1), 62–69.
81. **Matysiak, S.J., Yevtushenko, A.A. (2001).** On heating problems of friction. *J. Theor. Appl. Mech.*, 39(3), 577–588.
82. **Newcomb, T.P. (1961).** Calculation of surface temperatures reached in clutches when the torque varies with time. *J. Mech. Eng. Sci.*, 3(4), 340–347.
83. **Newcomb, T.P. (1960).** Temperatures reached in disc brakes. *J. Mech. Eng. Sci.*, 2(3), 167–177.
84. **Newcomb, T.P. (1960).** Temperatures reached in friction clutch transmissions. *J. Mech. Eng. Sci.*, 2(4), 273–287.
85. **Newcomb, T.P. (1959).** Transient temperatures attained in disc brakes. *Br. J. Appl. Phys.*, 10(7), 339–340.
86. **Newcomb, T.P., Spurr, R.T. (1967).** *Braking of road vehicles*. London: Chapman and Hall.
87. **Noda, N., Hetnarski, R.B., Tanigawa, Y. (2000).** *Thermal stresses*. Lastran Co.
88. **Nosko, O. (2018).** Thermal boundary conditions to simulate friction layers and coatings at sliding contacts. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 127, 1128–1137.
89. **Nosko, A.L., Belyakov, N.S., Nosko, A.P. (2009).** Application of the generalized boundary condition to solving thermal friction problems. *J. Frict. Wear*, 30(6), 455–462.
90. **Nosko, A.L., Mozalev, V.V., Nosko, A.P., Suvorov, A.V., Lebedeva, V.N. (2012).** Calculation of temperature of carbon disks of aircraft brakes with account of heat exchange with the environment. *J. Frict. Wear*, 33(4), 233–238.
91. **Nosko, A.L., Nosko, A.P. (2006).** Solution of contact heating problem with account for heat transfer between the friction members. *J. Frict. Wear*, 27, 35–40.
92. **Nowacki, W. (1986).** *Thermoelasticity*. Oxford: Pergamon Press.
93. **Ozisik, M.N. (1993).** *Heat conduction* (2nd ed.). New York: Wiley.
94. **Pereverzeva, O.V., Balakin, V.A. (1992).** Distribution of heat between rubbing bodies. *J. Frict. Wear*, 13(3), 507–516.
95. **Pietrak, K., Wiśniewski, T.S. (2015).** A review of models for effective thermal conductivity of composite materials. *J. Power Technologies*, 95(1), 14–24.
96. **Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C.W., Kahaner, D.K. (1983).** *QUADPACK: A Subroutine Package for Automatic Integration*. Berlin: Springer-Verlag.

97. **Press, W., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P. (1992).** *Numerical recipes in FORTRAN: The art of scientific computing* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
98. **Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I. (1986).** *Integrals and Series. Elementary Functions* (t. 1). New York: Gordon and Breach.
99. **Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., Marichev, O.I. (1998).** *Integrals and Series. Special Functions* (t. 2). New York: Taylor and Francis.
100. **Pyr'yev, Yu. (2004).** Dynamika układów kontaktowych z uwzględnieniem wytwarzania ciepła, tarcia i zużycia. *Zeszyty Naukowe. Rozprawy Naukowe, Politechnika Łódzka*, 936.
101. **Pyr'yev, Yu. (2002).** Investigation of the contact interaction between two layers with regard to the temperature dependence of friction and wear coefficients. *J. Math. Sci.*, 109(1), 1257–1265.
102. **Qi, H.S., Day, A.J. (2007).** Investigation of disc/pad interface temperatures in friction braking. *Wear*, 262, 505–513
103. **Qi, H.S., Noor, K., Day, A.J. (2002).** *Interface temperatures in friction braking, Conference Braking 2002: From the Driver to the Road* (red. D. Barton, B. Shilton).
104. **Qiu, L., Qi, H.S., Wood, A. (2018).** Two-dimensional finite element analysis investigation of the heat partition ratio of a friction brake. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. <https://doi.org/10.1177/1350650118757245>.
105. **Sazonov, V.S. (2006).** Exact solution of the problem of nonstationary heat conduction for two semi-spaces in nonideal contact. *J. Eng. Phys. Thermophys*, 79(5), 928–930.
106. **Sazonov, V.S. (2008).** Nonideal contact problem of nonstationary heat conduction for two half-spaces. *J. Eng. Phys. Thermophys*, 81(2), 397–408.
107. **Sendetski, J. (1978).** Elastic properties of composites. W: J. Sendetski (red.), *Mechanics of composition materials* (t. 2, s. 61–101) Moscow: Mir.
108. **Stepashkin, AA., Ozherelkov, D.Yu., Sazonov, Yu.B., Komissarov, A.A. (2019).** Fracture toughness evolution of a carbon/carbon composite after low-cycle fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, 206, 442–451.
109. **Straffelini, G., Verlinski, S., Verma, P.C., Valota, G., Gialanella, S. (2016).** Wear and contact temperature evolution in pin-on-disc tribotesting of low-metallic friction material sliding against pearlitic cast iron. *Tribology Letters*, 62, 1–11.
110. **Sutter, G., Ranc, N. (2010).** Flash temperature measurement during dry friction process at high sliding speed. *Wear*, 268(11–12), 1237–1242.
111. **Tian, X., Francis, E. Kennedy, Jr.** Maximum and average flash temperatures in sliding contacts. *Journal of Tribology*, 116(1), 167–174.
112. **Timoshenko, S.P., Goodier, J.N. (1962).** *Teoria sprężystości*. Arkady.

113. **Topczewska, K. (2015).** *Influence of the protective strip properties on the distribution of the temperature in brake disc. II – Braking with constant deceleration.* Kraków: Creativetime.
114. **Topczewska, K. (2016).** Temperature distribution in a brake disc with variable contact pressure. *Technical Issue, 1*, 90–95.
115. **Topczewska, K. (2017).** Thermal stresses due to frictional heating with time-dependent specific power of friction. *Acta Mechanica et Automatica, 11(4)*, 280–284.
116. **Topczewska, K. (2016).** *Frictional heating of a brake disc with specific power of friction variable in time.* 5th International Scientific-technical Conference. Theory and practice of rational design, manufacture and operation of machine construction structures, Lviv, Ukraine.
117. **Topczewska, K. (2017).** Frictional heating with time-dependent specific power of friction. *Acta Mechanica et Automatica, 11(2)*, 111–115.
118. **Topczewska, K. (2017).** Influence of the friction power on temperature in the process of braking. *Mat. Sci., 53(2)*, 235–242.
119. **Topczewska, K. (2018).** Analytical model for investigation of the effect of friction power on the thermal stresses in the friction elements of brakes. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 56(4)*, 1017–1027.
120. **Topczewska, K. (2018).** Influence of the friction power on temperature stresses in the course of one-time braking. *Mat. Sci., 53(5)*, 651–659.
121. **Topczewska, K. (2018).** Influence of the time of contact pressure increase on temperature in the pad-disc tribosystem during braking. *Mat. Sci., 54(2)*, 107–114.
122. **Topczewska, K., Gerlici, J., Yevtushenko, A., Kuciej, M., Kravchenko, K. (2022).** Analytical Model of the Frictional Heating in a Railway Brake Disc at Single Braking with Experimental Verification. *Materials, 15(19)*.
123. **Topczewska, K., Schlattmann, J., Abdullah, O.I. (2020).** Temperature and thermal stresses distributions in a dry friction clutch. *Journal of theoretical and applied mechanics, 58(2)*, 351–360.
124. **Topczewska, K., Zamojski, P. (2020).** Effect of pressure fluctuations on the temperature during braking. *Acta Mechanica et Automatica, 14(2)*, 103–107.
125. **Yevtushenko, A., Grześ, P. (2011).** Finite element analysis of heat partition in a pad/disc brake system. *Numer. Heat Tr. A-appl., 59(7)*, 521–542.
126. **Yevtushenko, A., Grześ, P. (2015).** Maximum temperature in a three-disc thermally nonlinear braking system. *Int. Commun. Heat Mass Tran., 68*, 291–298.
127. **Yevtushenko, A.A., Grześ, P. (2020).** Initial selection of disk brake pads material based on the temperature mode. *Materials, 13*.
128. **Yevtushenko, A.A., Grześ, P. (2012).** Axisymmetric finite element model for the calculation of temperature at braking for thermosensitive materials

- of a pad and a disc. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 62(3), 211–230.
129. **Yevtushenko, A., Ivanyk, E.G., Yevtushenko, O. (1999).** Exact formulae for determination of the mean temperature and wear during braking. *Heat Mass Trans.*, 35(2), 163–169.
  130. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Frictional heating during braking in a three-element tribosystem. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 52(13/14), 2942–2948.
  131. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Influence of convective cooling on the temperature in a frictionally heated strip and foundation. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 36(2), 129–136.
  132. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Influence of the pad's material properties on the thermal stresses during braking. *Numer. Heat Tr. A-appl.*, 56, 931–945.
  133. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Influence of the protective strip properties on distribution of the temperature at transient frictional heating. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 52(1/2), 376–384.
  134. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Initiating of the thermal splitting in friction elements during braking. W: A.C. Ambrósio Jorge, P.T. Silva Miguel (red.), *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference: book of abstracts* (s. 733–734). Lisbon: Portugese Association fot Theoretical, Applied and Computational Mechanics.
  135. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2009).** Temperature in a frictionally-heated ceramic-metal patch and cast iron disc during braking. *Numer. Heat Tr. A-appl.*, 56(2), 97–108.
  136. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2010).** Influence of the convective cooling and the thermal resistance on the temperature of the pad/disc tribosystem. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 37, 337–342.
  137. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2010).** Temperature and thermal stresses in a pad/disc during braking. *App. Therm. Eng.*, 30, 354–359.
  138. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2010).** Thermal problem of friction when the plane-parallel layer-base tribosystem brakes. *J. Frict. Wear*, 31(3), 230–236.
  139. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2011).** The thermal problem of friction for a three-element tribosystem with composite strip. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 54(25/26), 5427–5437.
  140. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2012).** The thermal problem of friction for two plane-parallel strips. *Numer. Heat Tr. A-appl.*, 61(10), 764–785.
  141. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2012).** One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 55(15/16), 4148–4153.

142. **Yevtushenko, A., Kuciej, M. (2020).** Calculation of friction characteristics of disc brakes used in repetitive short-term braking mode. *J. Frict. Wear*, 41, 687–697.
143. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E. (2014).** Influence of thermal sensitivity of the pad and disk materials on the temperature during braking. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 55, 84–92.
144. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E. (2015).** Some methods for calculating temperature during the friction of thermosensitive materials. *Numer. Heat Tr. A-appl.*, 67(6), 696–718.
145. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E. (2017).** Influence of thermal sensitivity of the materials on temperature and thermal stresses of the brake disc with thermal barrier coating. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 87, 288–294.
146. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E. (2018).** Modeling of the temperature regime and stress state in the thermal sensitive pad-disk brake system. *Adv. Mech. Eng.*, 10(6), 1–12.
147. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E., Yevtushenko, O. (2016).** Effect of the thermal sensitivity in modeling of the frictional heating during braking. *Adv. Mech. Eng.*, 8(12), 1–10.
148. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Och, E., Yevtushenko, O. (2018).** Frictional heating of the brake disc with essential nonlinearity thermal barrier coating. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 95, 210–216.
149. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Roźniakowska, M. (2009).** The contact heat transfer between the plane-parallel strip and the semi-infinite foundation. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 36, 787–793.
150. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2017).** Analytical model for investigation of the effect of friction power on temperature in the disk brake. *Adv. Mech. Eng.*, 9(12), 1–12.
151. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2018).** Analytical model to investigate distributions of the thermal stresses in the pad and disk for different temporal profiles of friction power. *Adv. Mech. Eng.*, 10(10), 1–10.
152. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2019).** Effect of the temporal profile of the friction power on temperature of a pad-disc brake system. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 57(2), 461–473.
153. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2017).** Effect of the temporal profile of the friction power on thermal stresses during braking. *Proceedings of the 9th International Conference BALTRIB'2017*. Kowno, Litwa, 123–128.
154. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2017).** *Temperature distribution in a friction element during heating with time-dependent specific friction power*. 9th International Symposium on Mechanics of Materials and Structures, Augustów.

155. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2010).** Influence of the pressure fluctuations on the temperature in pad/disc tribosystem. *Int. Comm. Heat Mass Trans.*, 37(8), 978–983.
156. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2011).** Influence of the temporal profile of the contact pressure on the maximal temperature in pad/disc tribosystem. *Heat Mass Trans.*, 47(9), 1113–1120.
157. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2015).** Modelling of the frictional heating in brake system with thermal resistance on a contact surface and convective cooling on a free surface of a pad. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 81, 915–923.
158. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2011).** Temperature and thermal stresses in material of a pad during braking. *Arch. Appl. Mech.*, 81(6), 715–726.
159. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2013).** The boundary conditions on the sliding surface in one-dimensional transient heat problem of friction. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 59, 1–8.
160. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2010).** The contact heat transfer during frictional heating in a three-element tribosystem. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 53(13/14), 2740–2749.
161. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. (2011).** Three-element model of frictional heating during braking with contact thermal resistance and time-dependent pressure. *Int. J. Therm. Sci.*, 50(6), 1116–1124.
162. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Grześ, P., Wasilewski, P. (2017).** Temperature in the railway disc brake at a repetitive short-term mode of braking. *Int. Com. Heat Mass Trans.*, 84, 102–109.
163. **Yevtushenko, A.A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020).** Frictional heating during braking of the C/C composite disc. *Materials*, 13.
164. **Yevtushenko, A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020).** Some theoretical model for determining the temperature field of a multi-disk brake. *Advances in Mechanical Engineering*, 12(1), 1–15
165. **Yevtushenko, A., Topczewska, K. (2021).** Model for Calculating the Mean Temperature on the Friction Area of a Disc Brake. *Journal of Friction and Wear*, 42(4), 296–302.
166. **Yevtushenko, A., Topczewska, K., Kuciej, M. (2021).** Analytical Determination of the Brake Temperature Mode during Repetitive Short-Term Braking. *Materials*, 14(8).
167. **Yevtushenko, A., Roźniakowska, M., Kuciej, M. (2007).** Transient temperature processes in composite strip and homogeneous foundation. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 34(9/10), 1108–1118.
168. **Varadi, K., Neder, Z., Friedrich, K. (1996).** Evaluation of the real contact areas, pressure distributions and contact temperatures during sliding contact between real metal surfaces. *Wear*, 200(1–2), 55–62.





# SPIS TABEL

Tabela 1.1.	Profile czasowe gęstości mocy tarcia $q_i^*$ , ich wartości maksymalne $q_{i,\max}^*$ i czasy osiągnięcia $t_{i,\max}$ oraz profile czasowe gęstości pracy hamowania $w_i^*$ .....	19
Tabela 2.1.	Maksymalne wartości bezwymiarowej temperatury $T_{i,\max}^*$ osiąganej w chwilach $\tau_{i,\max}$ na nagrzewanej powierzchni, wyznaczone na podstawie rozwiązań dokładnych (2.1.62)–(2.1.71) oraz rozwiązania przybliżonego (1.3.36).....	48
Tabela 2.2.	Bezwymiarowe maksymalna $\sigma_{i,\max}^*$ i minimalna $\sigma_{i,\min}^*$ wartości normalnych naprężeń termicznych na powierzchni ciernej, osiągane odpowiednio w czasie $\tau_{i,\max}$ i $\tau_{i,\min}$ , a także czas $\tau_{i,0}$ zmiany znaku tych naprężeń.....	59
Tabela 4.1.	Parametry operacyjne przy ciśnieniu oscylującym w czasie hamowania [124] .....	111
Tabela 5.1.	Właściwości materiału Termar-ADF w temperaturze $T = 20^\circ\text{C}$ [32] .....	121
Tabela 5.2.	Współczynniki funkcji aproksymujących (5.1.1), (5.1.3) oraz (5.1.4) dla materiału Termar-ADF, $l = 1,2$ [126] .....	121
Tabela 5.3.	Właściwości materiałów ciernych [27, 142].....	134
Tabela 5.4.	Współczynniki aproksymacyjne w funkcjach (5.1.1)–(5.1.3), (5.1.5) oraz (5.2.1) dla rozpatrywanych materiałów ciernych .....	135
Tabela 5.5.	Wartości wybranych charakterystyk w każdym cyklu hamowania .....	140
Tabela 5.6.	Wartości wybranych charakterystyk w każdym cyklu hamowania .....	144
Tabela 7.1.	Uśrednione właściwości termofizyczne materiału, wymiary tarcz oraz parametry operacyjne pracy układu [126] .....	183
Tabela 7.2.	Dodatkowe parametry wyznaczone na podstawie danych z tabeli 7.1.....	184

Tabela 7.3. Parametry operacyjne poszczególnych trybów hamowania [90] .....	188
Tabela 7.4. Termofizyczne właściwości składowych oraz parametry geometryczne kompozytu [79].....	197

# SPIS RYSUNKÓW

Rysunek 1.1.	Zmiany bezwymiarowych gęstości mocy tarcia $q_i^*$ w czasie: a) $i = 1,2,\dots,6$ ; b) $i = 7,8,9,10$ .....	20
Rysunek 1.2.	Zmiany bezwymiarowych gęstości pracy tarcia $w_i^*$ w czasie: a) $i = 1,2,\dots,6$ ; b) $i = 7,8,9,10$ .....	20
Rysunek 1.3.	Zmiany bezwymiarowych naprężeń stycznych $\sigma_i^*$ w czasie: a) $i = 1,2,\dots,6$ ; b) $i = 7,8,9,10$ .....	21
Rysunek 1.4.	Zależność współczynnika tarcia $f$ od temperatury $T$ w wysoko obciążonym tarczowym układzie hamulcowym dla trzech materiałów nakładki pracujących w parze z żeliwem ChNMKh: 1) kompozytu o osnowie polimerowej z metalowym zbrojeniem; 2) retinaksu FK-16L; 3) metaloceramiki FMK-11 [28].....	22
Rysunek 1.5.	Schemat nagrzewania warstwy .....	27
Rysunek 1.6.	Schematy modeli obliczeniowych: a) sprzężony, b) oddzielne nagrzewanie elementów .....	34
Rysunek 2.1.	Schemat zagadnienia.....	39
Rysunek 2.2.	Ewolucje bezwymiarowej temperatury $T_i^*(0, \tau)$ na nagrzewanej powierzchni: a) $i = 1,2,\dots,6$ ; b) $i = 7,8,9,10$ , przy czym linie ciągłe – rozwiązania dokładne; linie przerywane – rozwiązanie przybliżone (1.3.36) .....	49
Rysunek 2.3.	Izolinie bezwymiarowej temperatury $T_i^*(\zeta, \tau)$ , $i = 1,2,3,4$ przy różnych profilach czasowych gęstości mocy tarcia; linie ciągłe – rozwiązania dokładne, linie przerywane – rozwiązanie przybliżone .....	51
Rysunek 2.4.	Izolinie bezwymiarowej temperatury $T_i^*(\zeta, \tau)$ , $i = 5,6,\dots,10$ przy różnych profilach czasowych gęstości mocy tarcia; linie ciągłe – rozwiązania dokładne, linie przerywane – rozwiązanie przybliżone .....	52
Rysunek 2.5.	Ewolucje bezwymiarowych naprężeń normalnych $\sigma_i^*(0, \tau)$ na powierzchni ciernej elementu przy różnych przebiegach czasowych gęstości mocy tarcia: a) $i = 1,2,\dots,6$ ; b) $i = 7,8,9,10$ .....	60

Rysunek 2.6.	Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych $\sigma_i^*$ przy różnych profilach gęstości mocy tarcia $i = 1,2,3,4$ .....	62
Rysunek 2.7.	Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych $\sigma_i^*$ przy $i = 5,6,\dots,10$ .....	63
Rysunek 3.1.	Schemat zagadnienia.....	67
Rysunek 3.2.	Ewolucje bezwymiarowej temperatury $T_i^*$ i intensywności strumieni ciepła $q_{i,l}^*$ , $i = 1,2,3,4$ , $l = 1,2$ na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ ; linie ciągłe – rezultaty otrzymane na podstawie rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego .....	77
Rysunek 3.3.	Ewolucje bezwymiarowej temperatury $T_i^*$ i intensywności strumieni ciepła $q_{i,l}^*$ , $i = 5,6,\dots,10$ , $l = 1,2$ na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ ; linie ciągłe – rezultaty otrzymane na podstawie rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego .....	78
Rysunek 3.4.	Izolinie bezwymiarowej temperatury $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ , $i = 1,2,3,4$ , $l = 1,2$ ; linie ciągłe – wyniki otrzymane z rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego ...	80
Rysunek 3.5.	Izolinie bezwymiarowej temperatury $T_{i,l}^*(\zeta, \tau)$ , $i = 5,6,\dots,10$ , $l = 1,2$ ; linie ciągłe – wyniki otrzymane z rozwiązań dokładnych, linie przerywane – z rozwiązania przybliżonego ...	81
Rysunek 3.6.	Zmiana bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych $\sigma_{i,l}^*$ w czasie hamowania na powierzchniach ciernych tarczy (linia ciągła, $l = 1$ ) oraz nakładki (linia przerywana, $l = 2$ ) przy różnych bezwymiarowych gęstościach mocy tarcia $q_i^*$ : a) $i = 1,3,5$ ; b) $i = 2,4,6$ ; c) $i = 7,8,9,10$ .....	88
Rysunek 3.7.	Izolinie bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych $\sigma_{i,l}^*$ przy różnych gęstościach bezwymiarowej mocy tarcia $q_i^*$ , $i = 1,2,\dots,6$ .....	90
Rysunek 3.8.	Izolinie bezwymiarowych normalnych naprężeń termicznych $\sigma_{i,l}^*$ przy różnych gęstościach bezwymiarowej mocy tarcia $q_i^*$ , $i = 7,8,9,10$ .....	91
Rysunek 4.1.	Zmiany bezwymiarowych: ciśnienia $p^*$ (4.1.1) (linie ciągłe) oraz prędkości $V^*$ (4.2.5) (linie przerywane) w czasie $t$ dla różnych wartości parametru $t_i$ .....	96

- Rysunek 4.2. Przebiegi ciśnienia  $p^*$  (4.1.1) (linia ciągła),  
prędkości  $V^*$  (4.2.5) (linia kreskowana) i gęstości  
mocy tarcia  $q^*$  (4.2.8) (linia kropkowana)  
przy zadanych wartościach:  $\tau_i = 0,2$ ,  $\tau_s^0 = 1$  ..... 97
- Rysunek 4.3. Zależności czasu zatrzymania  $t_s$  (linia ciągła)  
oraz czasu osiągnięcia maksimum gęstości mocy  
tarcia  $t_{\max}$  (linia przerywana) od czasu narastania ciśnienia  $t_i$ ..... 98
- Rysunek 4.4. Profile czasowe:  $p^*$  (4.1.2), prędkości  $V^*$  (4.2.16)  
oraz gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.18) przy  $t_i = t_s^0 = 2t_s/3$ ..... 100
- Rysunek 4.5. Zmiany bezwymiarowych: ciśnienia  $p^*$  (4.1.3) (linia ciągła),  
prędkości  $V^*$  (4.2.24) (linia kreskowana)  
i gęstości mocy tarcia  $q^*$  (4.2.28) (linia kropkowana)  
w czasie hamowania..... 102
- Rysunek 4.6. Ewolucja bezwymiarowej gęstości mocy tarcia  $q^*$   
obliczonej przy eksponentalnie narastającym ciśnieniu (4.2.8)  
– (linie ciągłe), liniowym wzroście ciśnienia (4.2.12)  
(linie przerywane) oraz na podstawie wzorów  
aproksymacyjnych (4.2.18) (linie kropka-kreska)  
przy różnych czasach narastania ciśnienia  $t_i$ :  
a) 0,05 s; b) 0,1 s; c) 0,2 s; d) 0,3 s ..... 108
- Rysunek 4.7. Ewolucje bezwymiarowej temperatury  $T^*$   
znalezione z rozwiązań: (4.3.18) – linia ciągła,  
(4.3.24) i (4.3.27) – linia przerywana,  
(4.3.23) – linia kropka-kreska  
przy różnych wartościach bezwymiarowego czasu  
narastania ciśnienia  $\tau_i$ : a) 0,017; b) 0,033; c) 0,067; d) 0,1 ..... 109
- Rysunek 4.8. Bezwymiarowe zależności: a) maksymalnej temperatury  $T_{\max}$ ;  
b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  od czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$   
ustalone na podstawie rozwiązań: (4.3.18) – linia ciągła;  
(4.3.24), (4.3.27) – linia przerywana;  
(4.3.23) – linia kropka-kreska ..... 110
- Rysunek 4.9. Ewolucje ciśnienia kontaktowego  $p(t)$  (4.1.3)  
i prędkości poślizgu  $V(t)$  (4.2.24) podczas hamowania  
na powierzchni kontaktu pary ciernej  
przy  $a^* = 0,1$  (linia ciągła) oraz  $a^* = 0$  (linia kropkowana)..... 111

- Rysunek 4.10. Ewolucje gęstości mocy tarcia  $q(t)$  (4.2.28) oraz temperatury  $T(t)$  (4.3.29), (4.3.30) podczas hamowania na powierzchni kontaktu pary ciernej przy  $a^* = 0,1$  (linia ciągła) oraz  $a^* = 0$  (linia kropkowana)..... 112
- Rysunek 4.11. Zależność maksymalnej temperatury  $T_{\max}$  powierzchni kontaktu od bezwymiarowej amplitudy fluktuacji ciśnienia  $a^*$  ..... 112
- Rysunek 5.1. Bezwymiarowe funkcje aproksymujące zmiany: przewodności cieplnej  $K^*$ , ciepła właściwego  $c^*$  oraz twardości Brinella  $HB^*$  w zależności od temperatury  $T$ ..... 121
- Rysunek 5.2. Zmiany ciśnienia  $p$  następujące wraz z czasem hamowania na nominalnej powierzchni kontaktu: eksponencjalnego (4.1.1) (linia ciągła) oraz liniowego (4.1.2) (linia przerywana)..... 122
- Rysunek 5.3. Ewolucje temperatury średniej  $T_m$  podczas hamowania przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: a) z uwzględnieniem oraz b) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału ..... 124
- Rysunek 5.4. Zmiany w czasie hamowania: a) średnicy  $d_r$ , b) pola powierzchni rzeczywistego obszaru kontaktu  $A_r$  przy eksponencjalnym (linie ciągłe) oraz liniowym wzroście ciśnienia (linie przerywane)..... 124
- Rysunek 5.5. Zmiany temperatury błysku  $T_f$  podczas hamowania przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: a) z uwzględnieniem oraz b) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału ..... 125
- Rysunek 5.6. Przebieg w czasie hamowania temperatury maksymalnej  $T_{\max}$  przy eksponencjalnie (linie ciągłe) oraz liniowo (linie przerywane) rosnącym ciśnieniu kontaktowym: a) z uwzględnieniem oraz b) bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiału ..... 126

Rysunek 5.7.	Schemat przebiegu prędkości pojazdu podczas trybu PKT hamowania .....	127
Rysunek 5.8.	Schemat procedury obliczeniowej .....	133
Rysunek 5.9.	Wykresy funkcji aproksymujących dane eksperymentalne w zależności od temperatury: a) współczynnika tarcia $f$ ; b) przewodności ciepła $K_l$ ; c) ciepła właściwego $c_i$ ; d) twardości Brinella $HB_l$ , $l = 1,2$ .....	136
Rysunek 5.10.	Zmiany w czasie poszczególnych cykli hamowania $k = 1,2,3,4$ przy PKT trybu pracy tarczowego układu hamulcowego: a) prędkości poślizgu tarczy $V^{(k)}$ , b) gęstości mocy tarcia $q^{(k)}$ .....	137
Rysunek 5.11.	Wartości: a) współczynnika tarcia $f_0^{(k)}$ , b) czasu hamowania $t_s^{(k)}$ tarczowego układu hamulcowego w poszczególnych cyklach $k = 1,2,3,4$ .....	138
Rysunek 5.12.	Ewolucje temperatury: średniej $T_m^{(k)}$ , błysku $T_f^{(k)}$ oraz maksymalnej $T_{max}^{(k)}$ na powierzchni kontaktu nakładka-tarcza podczas kolejnych cykli: a) $k = 1$ , b) $k = 2$ , c) $k = 3$ , d) $k = 4$ .....	139
Rysunek 5.13.	Ewolucje temperatury maksymalnej $T_{max}^{(k)}$ (linie ciągłe), średniej $T_m^{(k)}$ (linie przerywane) oraz temperatury błysku $T_f^{(k)}$ (linie kropkowane) podczas PKT trybu hamowania układu tarczowego .....	140
Rysunek 5.14.	Ewolucje w poszczególnych cyklach hamowania $k = 1,2,3,4$ podczas PKT trybu pracy bębnowego układu hamulcowego: a) prędkość poślizgu tarczy $V^{(k)}$ , b) gęstość mocy tarcia $q^{(k)}$ .....	141
Rysunek 5.15.	Wartości: a) współczynnika tarcia $f_0^{(k)}$ , b) czasu hamowania $t_s^{(k)}$ bębnowego układu hamulcowego w poszczególnych cyklach $k = 1,2,3,4$ .....	142
Rysunek 5.16.	Ewolucje temperatury: średniej $T_m^{(k)}$ , błysku $T_f^{(k)}$ oraz maksymalnej $T_{max}^{(k)}$ bębnowego układu hamulcowego podczas kolejnych cykli: a) $k = 1$ , b) $k = 2$ , c) $k = 3$ , d) $k = 4$ .....	143
Rysunek 5.17.	Ewolucje temperatury maksymalnej $T_{max}^{(k)}$ (linie ciągłe), średniej $T_m^{(k)}$ (przerywane linie) oraz temperatury błysku $T_f^{(k)}$ (linie kropkowane) podczas PKT trybu hamowania układu bębnowego .....	144



- Rysunek 6.1. Profile czasowe: a) siły tarcia  $F$ , b) prędkości  $V$ ,  
c) gęstości mocy  $q$ , d) pracy tarcia  $w$   
przy zmiennej (linie ciągłe) oraz przy stałej (linie przerywane)  
wartości pola  $\bar{A}_c$  obszaru konturowego kontaktu..... 155
- Rysunek 6.2. Ewolucje temperatury średniej osiąganey  
na powierzchni tarcia podczas hamowania:  
przy zmiennym polu  $A_c(t)$  obszaru kontaktu konturowego  
(linie ciągłe) oraz przy stałej wartości pola  $\bar{A}_c$   
tego obszaru (linie przerywane)..... 156
- Rysunek 6.3. Wpływ wielkości pola nominalnego  
obszaru kontaktu  $A_a$  na: a) temperaturę maksymalną  $T_{\max}$ ,  
b) czas jej osiągnięcia  $t_{\max}$  i czas zatrzymania  $t_s$   
przy zmiennym polu  $A_c(t)$  obszaru kontaktu  
konturowego (linie ciągłe) oraz przy stałej wartości  
pola  $\bar{A}_c$  tego obszaru (linie przerywane) ..... 157
- Rysunek 7.1. Schemat zagadnienia..... 160
- Rysunek 7.2. Zależność bezwymiarowych:  
a) temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$   
oraz b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  od liczby Biota  $Bi$   
na powierzchniach warstwy przy  $\tau_i = 0,3$  ..... 181
- Rysunek 7.3. Zależności bezwymiarowych:  
a) temperatury maksymalnej  $T_{\max}^*$   
oraz b) czasu jej osiągnięcia  $\tau_{\max}$  i chwili zatrzymania  $\tau_s$   
od czasu narastania ciśnienia  $\tau_i$ . Linie ciągłe – obliczenia  
z rozwiązań dokładnych, linie przerywane  
– z rozwiązania przybliżonego (1.3.36) ..... 182
- Rysunek 7.4. Ewolucje temperatury nagrzewanej powierzchni tarczy  
 $z = 0$  dla trzech wartości czasu narastania ciśnienia  $t_i$   
przy  $Bi = 0,17$  (linie ciągłe) oraz  $Bi = 0$  (linie przerywane) ..... 185
- Rysunek 7.5. Ewolucje temperatury powierzchni czarnej tarczy  
przy  $t_i = 0,5s$ . Linie ciągłe – rozwiązania dokładne  
przy  $Bi = 0$  (7.1.60) i  $Bi = 0,17$  (7.1.103), (7.1.114)–(7.1.116),  
linia przerywana – rozwiązanie Chichinadze (1.3.36),  
linia kropka-kreska – rozwiązanie dokładne  
dla półprzestrzeni (4.1.38) ..... 186

Rysunek 7.6.	Zależność temperatury maksymalnej osiągniętej na powierzchniach warstwy od jej grubości $d$ . Linia ciągła – rozwiązanie dokładne dla warstwy przy $Bi = 0,17$ , linia przerywana – przy $Bi = 0$ , linia kropka-kreska – rozwiązanie dokładne dla półprzestrzeni .....	187
Rysunek 7.7.	Ewolucje temperatury powierzchni ciernej tarczy przy trybach hamowania: a) I, b) II, c) III. Linie ciągłe – rozwiązanie dokładne przy $h = 140 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ (7.1.88), linie przerywane – rezultaty obliczeń z artykułu [90], linie kropka-kreska – rozwiązanie dokładne przy $h = 0$ (7.1.125), linie kropkowane – rezultaty doświadczenia [90] .....	189
Rysunek 7.8.	Wpływ współczynnika $h$ wymiany ciepła na powierzchniach bocznych tarczy na temperaturę maksymalną $T_{\max}$ przy trzech trybach hamowania .....	190
Rysunek 7.9.	Schemat: a) wiązki na poziomie mikro; b) komórki podstawowej na poziomie mezo .....	191
Rysunek 7.10.	Linearyzacja linii strumienia ciepła $Q$ płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 w podstawowej komórce kompozytu: a) w kierunku poprzecznym, b) w kierunku podłużnym .....	192
Rysunek 7.11.	Linearyzacja linii strumienia ciepła $Q$ płaszczyznami adiabatycznymi 1–1 i 2–2 oraz izotermicznymi 3–3 i 4–4: a) w kierunku poprzecznym, b) w kierunku podłużnym.....	193
Rysunek 7.12.	Schematy łączenia poszczególnych oporów przy podziale komórki podstawowej płaszczyznami: a) adiabatycznymi, b) adiabatycznymi i izotermicznymi .....	194
Rysunek 7.13.	Schemat ukształtowania wiązek warstwy na poziomie makro .....	196
Rysunek 7.14.	Schemat ułożenia wiązek w tarczy: a) orientacja promieniowa, b) orientacja obwodowa, c) orientacja losowa .....	196

Rysunek 7.15. Ewolucje temperatury powierzchni ciernej kompozytowej tarczy: linia ciągła – na podstawie rozwiązania dokładnego (7.1.88), linia kropkowana – dane doświadczalne z artykułu [90].....	198
Rysunek 7.16. Ewolucje temperatury na powierzchni ciernej i wewnątrz kompozytowej tarczy .....	199
Rysunek 7.17. Wpływ współczynnika $h$ wymiany ciepła na powierzchniach bocznych tarczy kompozytowej na temperaturę maksymalną $T_{\max}$ .....	200
Rysunek 7.18. Zależność efektywnych współczynników przewodnictwa cieplnego w kierunkach promieniowym $K_x$ i osiowym $K_z$ oraz dyfuzyjności cieplnej $k$ materiału kompozytowego od wymiaru wzdłużnego pojedynczej wiązki $a$ przy $V_f = 0,95$ , $V_p = 0,5$ .....	201
Rysunek 7.19. Zależność temperatury maksymalnej $T_{\max}$ powierzchni ciernej tarczy kompozytowej od wymiaru wzdłużnego pojedynczej wiązki $a$ przy $V_f = 0,95$ , $V_p = 0,5$ .....	202
Rysunek 7.20. Zależność efektywnych właściwości cieplnych $K_x$ , $K_z$ oraz $k$ materiału kompozytowego od współczynnika objętościowej koncentracji wiązek $V_p$ przy $a = 30\text{mm}$ , $V_f = 0,95$ .....	203
Rysunek 7.21. Zależność temperatury maksymalnej $T_{\max}$ oraz czasu jej osiągnięcia $t_{\max}$ od współczynnika objętościowej koncentracji wiązek $V_p$ przy $a = 30\text{ mm}$ , $V_f = 0,95$ .....	203

# STRESZCZENIE

Niniejsza monografia dotyczy modelowania procesów nieustalonego nagrzewania tarciowego dla różnych trybów pracy wysoko obciążonych układów hamulcowych. W tym celu opracowano zestaw analitycznych modeli, które umożliwiły zbadanie wpływu właściwości termofizycznych materiałów ciernych oraz parametrów operacyjnych, takich jak profil czasowy mocy tarcia, na rozkłady przestrzenno-czasowe temperatury oraz naprężeń termicznych w elementach pary ciernej.

Na pierwszym etapie badań na podstawie rozwiązań początkowo-brzegowych zagadnień przewodzenia ciepła dla półprzestrzeni oraz dla układu dwóch półprzestrzeni opracowano dwa modele analityczne do wyznaczenia temperatury i naprężeń termicznych w układzie ciernym nakładka-tarcza podczas różnych trybów hamowania. W tym celu wykorzystano dziesięć różnych przebiegów czasowych mocy tarcia ustalonych doświadczalnie dla procesów pojedynczego hamowania, przy zachowaniu jednakowej całkowitej pracy tarcia zrealizowanej w takim samym czasie zatrzymania.

Następnie rozpatrzono nagrzewanie tarciove podczas hamowania przy eksponencjalnym i liniowym narastaniu ciśnienia kontaktowego, a także z uwzględnieniem fluktuacji wartości ciśnienia w czasie hamowania. Rozwiązano zagadnienia początkowe ruchu, które umożliwiły ustalenie zmian prędkości poślizgu oraz czasów trwania procesów, a następnie odpowiednich przebiegów czasowych gęstości mocy tarcia. W celu zbadania ewolucji temperatury na powierzchni kontaktu elementów ciernych układu hamulcowego wykorzystano model opracowany w pierwszej części badań dla układu dwóch półprzestrzeni.

W kolejnej części prezentowanych badań zaproponowano kompleksową metodykę do szacowania temperatury maksymalnej osiągananej podczas jednokrotnego lub wielokrotnego trybu hamowania. Opracowany schemat obliczeniowy uwzględniał zmiany ciśnienia kontaktowego oraz prędkości poślizgu w czasie hamowania, a także doświadczalne zależności właściwości cieplnych, współczynnika tarcia oraz twardości materiałów od temperatury. Maksymalna temperatura została znaleziona w oparciu o hipotezę sumacyjną Chichinadze, według której wartość maksimum wyznaczamy jako sumę temperatury średniej na nominalnej powierzchni kontaktu oraz błysku temperaturowego osiąganego na rzeczywistych obszarach styku wierzchołków chropowatości powierzchni roboczych elementów pary ciernej. Do uwzględnienia termoczułości materiałów w liniowych zagadnieniach cieplnych tarcia wykorzystano temperaturę objętościową, przy której wyznaczono wartości właściwości termicznych i mechanicznych materiałów ciernych. Bazując na zaproponowanym modelu, przeprowadzono analizę zachowania termicznego

dwóch układów hamulcowych: tarczowego oraz bębnowego dla wielokrotnego trybu pracy składającego się z czterech cykli hamowań.

W dalszej części badań przeanalizowano wpływ zmian pola powierzchni konturowej tarcia podczas hamowania na osiąganą temperaturę średnią. W tym celu rozwiązano początkowe zagadnienie ruchu uwzględniające liniowy wzrost powierzchni tarcia w czasie hamowania, co pozwoliło ustalić odpowiednie przebiegi czasowe prędkości poślizgu oraz mocy tarcia. Rozkład temperatury średniej wyznaczono z rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła sformułowanego dla układu dwóch półprzestrzeni w warunkach idealnego kontaktu cieplnego tarcia. Na podstawie uzyskanych rozwiązań przeprowadzono analizę, a otrzymane wyniki porównano z odpowiednimi rezultatami wyznaczonymi przy założeniu stałej powierzchni tarcia w czasie poślizgu. Ustalono, że wartości obliczonej temperatury są wyższe przy uwzględnieniu zmian powierzchni konturowej tarcia, jednak różnice te nie przekraczają 10%.

W ostatnim etapie badań opracowano model matematyczny dla pojedynczej tarczy wielotarczowego hamulca lotniczego, odpowiedni do szacowania temperatury podczas dłuższych procesów hamowania przy eksponencyjnym wzroście ciśnienia kontaktowego. Sformułowano i rozwiązano jednowymiarowe zagadnienie początkowo-brzegowe przewodzenia ciepła dla ortotropowej warstwy, której powierzchnia robocza nagrzewana jest tarciovym strumieniem ciepła o intensywności proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia, a druga jest adiabatyczna. W zagadnieniu tym uwzględniono konwekcyjną wymianę ciepła z otoczeniem na powierzchniach bocznych tarczy. Zakres stosowności opracowanego modelu analitycznego rozszerzono na przypadek tarczy wykonanej z materiału kompozytowego zbrojonego włóknami węglowymi. Efektywne współczynniki przewodnictwa ciepła takiego kompozytu wyznaczono, uśredniając ich wartości na trzech poziomach skali: mikro, mezo i makro.

Analityczne modele nagrzewania tarciovego opracowane w monografii pozwalają na szybkie wyznaczenie przestrzenno-czasowych rozkładów temperatury i naprężeń termicznych w elementach ciernych tarczowych układów hamulcowych, bez korzystania z metod całkowania numerycznego lub stosowania specjalistycznego oprogramowania. Otrzymane rozwiązania analityczne poddano weryfikacji poprzez sprawdzenie warunków początkowo-brzegowych oraz zbieżności przypadków szczególnych z odpowiednimi rozwiązaniami znanymi w literaturze naukowej. Wyznaczone w pracy rozkłady przestrzenno-czasowe temperatury porównano z wynikami otrzymanymi innymi metodami analitycznymi lub numerycznymi, a także danymi uzyskanymi doświadczalnie.

# ABSTRACT

## *Effect of Specific Friction Power on Temperature Mode in Braking Systems*

This monograph concerns the modeling of transient frictional heating processes for various operating modes of highly loaded braking systems. For this purpose, a set of analytical models was developed that made it possible to examine the influence of thermophysical properties of friction materials and operational parameters, such as the time profile of friction power, on the spatial-temporal distributions of temperature and thermal stresses in the elements of the friction pair.

In the first stage of the research, two analytical models were developed, based on solutions to the boundary-value problem of heat conduction for a semi-space and for a system of two semi-spaces, to determine the temperature and thermal stresses in the pad-disc friction system during various braking modes. In order to accomplish this, ten different temporal profiles of friction power were used, experimentally determined for single braking processes, while maintaining the same total friction work performed during the same stopping time.

Then, the frictional heating processes during braking were considered with an exponential and linear increase of the contact pressure, as well as with consideration of pressure fluctuations during braking. Initial problems of motion were solved, which made it possible to determine changes in sliding speed and process durations, and then appropriate time courses of specific friction power were found. In order to investigate the evolution of temperature on the contact surface of the friction elements of the braking system, the model developed in the first part of the research for two semi-spaces was used.

In the subsequent phase of the presented research, a comprehensive methodology was proposed for estimating the maximum temperature reached during single or repetitive braking modes. The developed calculation scheme took into account changes in contact pressure and sliding speed during braking, as well as experimental dependences of thermal properties, friction coefficient and material hardness on temperature. The maximum temperature was determined based on Chichinadze's summation hypothesis, which posits that the maximum value is the sum of the average temperature on the nominal contact surface and the temperature flash achieved on the real contact areas between the roughness peaks of the working surfaces of the friction pair elements. To account for the thermosensitivity of materials in linear thermal problems of friction, the bulk temperature was calculated, at which the values of the thermal and mechanical properties of friction ma-

materials were found. Utilizing the proposed model, an analysis of the thermal behavior of two braking systems, namely disc and drum, was performed for a repeated operation mode consisting of four braking cycles.

Further research analyzed the influence of changes in the contoured friction surface area during braking on the average temperature achieved. For this purpose, the initial problem of motion was solved, taking into account the linear increase of the friction surface area during braking, which allowed the determination of appropriate temporal profiles of the sliding speed and specific friction power. The distribution of mean temperature was found from the solution to the boundary-value heat conduction problem formulated for a system of two semi-spaces under conditions of perfect thermal contact of friction. Based on the obtained solutions, an analysis was carried out, and the results were compared with the corresponding outcomes found assuming a constant sliding friction surface over time. It was found that the calculated temperature values are higher when considering changes in the friction contour surface, but these differences do not exceed 10%.

In the final stage of the research, a mathematical model was developed for a single disc of a multi-disc aircraft brake, designed to estimate the temperature during extended braking processes with an exponential increase in contact pressure. A one-dimensional boundary-value heat conduction problem was formulated and solved for an orthotropic strip. The working surface of which is heated by a frictional heat flux with an intensity proportional to the specific friction power, and the other one is adiabatic. This problem considers convective heat exchange with the surroundings on the exposed surfaces of the disc. The scope of applicability of the developed analytical model was extended to the case of a disc made of a composite material reinforced with carbon fibers. The effective heat conductivity coefficients of such a composite were determined by averaging their values at three scale levels: micro, meso and macro.

The analytical models of frictional heating developed in the monograph enable rapid determination of spatial-temporal distributions of temperature and thermal stresses in the friction elements of disc brake systems, without relying on numerical integration methods or specialized software. The obtained analytical solutions were verified by assessing the consistency of the initial and boundary conditions, as well as by examining the convergence of special cases with the corresponding solutions documented in the scientific literature. The temperature distributions determined in this study were compared with results obtained using other analytical or numerical methods, and also with experimentally measured data.

