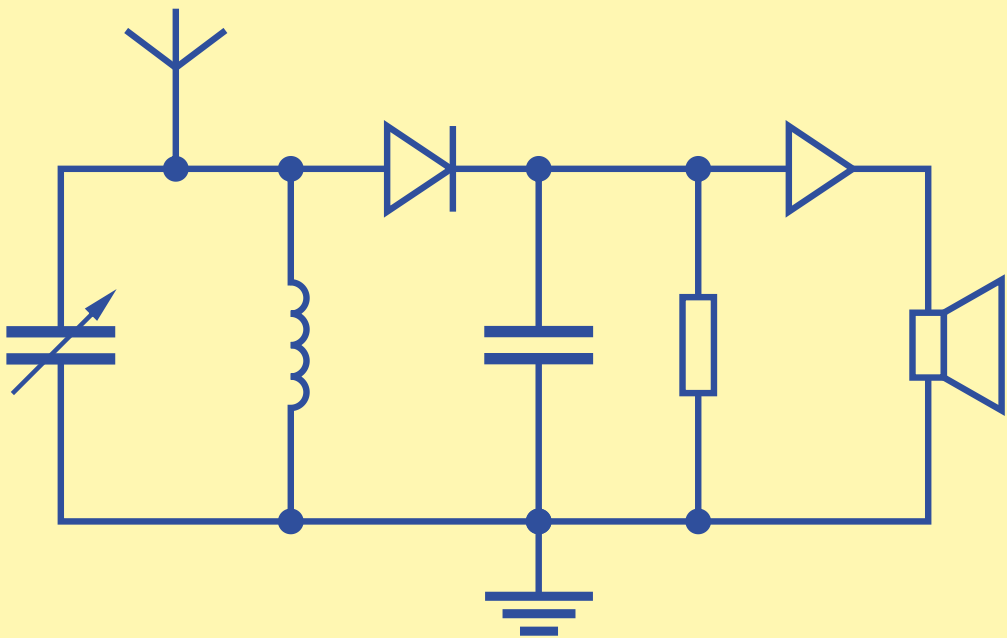


Khalid Saeed  
Marek Parfieniuk

# PODSTAWY ELEKTROTECHNIKI I ELEKTRONIKI

DLA STUDENTÓW INFORMATYKI



Khaild Saeed, Marek Parfieniuk

**Podstawy elektrotechniki i elektroniki  
dla studentów informatyki**



OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ  
BIAŁYSTOK 2020

Recenzenci:  
prof. dr hab. inż. Sławomir Wierchoń  
dr inż. Grzegorz Rubin

Redaktor naukowy dyscypliny:  
prof. dr hab. Jarosław Stepaniuk

Redakcja i korekta językowa:  
Katarzyna Duniewska

Redakcja techniczna, skład:  
Khalid Saeed  
Marek Parfieniuk

Projekt okładki:  
Marcin Dominów

Podstawa wydania: K. Saeed, M. Parfieniuk, *Wprowadzenie do układów elektrycznych i elektronicznych dla studentów informatyki*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2012, ISBN 978-83-7464-495-2.

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2020

**ISBN 978-83-66391-33-8**  
**e-ISBN 978-83-66391-34-5**  
**DOI 10.24427/978-83-66391-34-5**



Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons  
Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND 4.0).  
Pełną treść licencji udostępniono na stronie  
[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl).  
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Druk: PARTNER POLIGRAFIA Andrzej Kardasz

---

Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej  
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok  
tel.: 85 746 91 37, e-mail: [oficina.wydawnicza@pb.edu.pl](mailto:oficina.wydawnicza@pb.edu.pl)  
[www.pb.edu.pl](http://www.pb.edu.pl)

# Spis treści

<b>1. Podstawy teorii obwodów elektrycznych</b>	<b>19</b>
1.1. Natężenie pola elektrycznego . . . . .	19
1.2. Potencjał i napięcie elektryczne . . . . .	20
1.3. Pojemność elektryczna i kondensatory . . . . .	21
1.3.1. Kondensator . . . . .	21
1.3.2. Szeregowe połączenie kondensatorów . . . . .	22
1.3.3. Równoległe połączenie kondensatorów . . . . .	24
1.3.4. Wytrzymałość dielektryczna . . . . .	24
1.3.5. Energia w kondensatorach . . . . .	25
1.4. Prąd elektryczny . . . . .	26
1.4.1. Rodzaje prądu elektrycznego . . . . .	28
1.4.2. Gęstość prądu . . . . .	28
1.5. Rezystancja . . . . .	28
1.5.1. Łączenie rezystorów . . . . .	29
1.6. Prawo Ohma . . . . .	31
1.7. Źródła energii elektrycznej . . . . .	33
1.7.1. Przekształcanie źródeł . . . . .	34
1.8. Pole magnetyczne i indukcyjność . . . . .	35
1.8.1. Indukcyjność . . . . .	35
1.8.2. Energia w cewkach . . . . .	38
1.9. Rzeczywiste elementy bierne . . . . .	38
1.10. Moc i energia elektryczna . . . . .	39
1.11. Obwód a jego elementy . . . . .	41
1.11.1. Obwody i sieci . . . . .	41
1.11.2. Elementy, przyrządy i komponenty . . . . .	41
1.11.3. Klasyfikacja elementów . . . . .	41
1.11.4. Systemy . . . . .	43
1.12. Topologia i geometria obwodu . . . . .	44
1.13. Klasyfikacja obwodów i systemów . . . . .	45
1.13.1. Obwody pasywne a aktywne . . . . .	46
1.13.2. Systemy liniowe a nieliniowe: twierdzenie o liniowości . . . . .	46
1.13.3. Sieci o parametrach skupionych a rozłożonych . . . . .	46



1.13.4.	Systemy zmienne a niezienne w czasie . . . . .	47
1.13.5.	Sieci bilateralne a unilateralne . . . . .	47
1.13.6.	Układy ciągłe a dyskretne . . . . .	47
1.13.7.	Systemy przyczynowe a nieprzyczynowe . . . . .	48
1.13.8.	Obwody odwracalne a nieodwracalne . . . . .	48
1.13.9.	Sieci jednoportowe a wieloportowe . . . . .	48
1.13.10.	Obwody planarne a nieplanarne . . . . .	48
1.13.11.	Właściwości obwodów <i>RLC</i> . . . . .	49
1.14.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	49
1.14.1.	Pytania . . . . .	49
1.14.2.	Problemy rozwiązane . . . . .	50
1.14.3.	Quiz . . . . .	58
<b>2.</b>	<b>Obwody prądu stałego: prawa i metody analizy</b>	<b>59</b>
2.1.	Prawa Kirchhoffa . . . . .	59
2.1.1.	Napięciowe prawo Kirchhoffa . . . . .	61
2.1.2.	Szeregowe połączenie rezystorów . . . . .	63
2.1.3.	Dzielnik napięcia . . . . .	65
2.1.4.	Prądowe prawo Kirchhoffa . . . . .	66
2.1.5.	Równoległe połączenie rezystorów . . . . .	67
2.1.6.	Dzielnik prądu . . . . .	70
2.2.	Redukcja sieci rezystorów . . . . .	71
2.2.1.	Przekształcenie trójkąt-gwiazda i gwiazda-trójkąt . . . . .	75
2.2.2.	Podsumowanie . . . . .	79
2.3.	Metoda praw Kirchhoffa . . . . .	79
2.4.	Metoda prądów oczkowych . . . . .	82
2.4.1.	Rozwiązanie układu równań za pomocą wyznaczników (wzorów Cramera) . . . . .	84
2.4.2.	Porównanie metody prądów oczkowych z metodą praw Kirchhoffa . . . . .	87
2.4.3.	Uwagi odnośnie do metody prądów oczkowych . . . . .	89
2.5.	Metoda potencjałów węzłowych . . . . .	94
2.5.1.	Uwagi odnośnie do metody potencjałów węzłowych . . . . .	96
2.5.2.	Rozwiązanie ogólne . . . . .	99
2.6.	Kondensatory i cewki w obwodach prądu stałego . . . . .	102
2.7.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	103
2.7.1.	Pytania . . . . .	104
2.7.2.	Problemy rozwiązane . . . . .	105
2.7.3.	Quiz . . . . .	125

<b>3. Twierdzenia stosowane do analizowania obwodów elektrycznych</b>	<b>127</b>
3.1. Pojęcie liniowości i zasada superpozycji . . . . .	127
3.2. Dowód zasady superpozycji . . . . .	130
3.3. Twierdzenie Thevenina . . . . .	131
3.4. Dowód twierdzenia Thevenina . . . . .	135
3.5. Twierdzenie Nortona . . . . .	137
3.6. Twierdzenie o wzajemności . . . . .	140
3.6.1. Przypadek źródła napięcia . . . . .	140
3.6.2. Przypadek źródła prądu . . . . .	141
3.6.3. Uwagi odnośnie do twierdzenia o wzajemności . . . . .	142
3.7. Twierdzenie o substytucji . . . . .	143
3.8. Twierdzenie o kompensacji: dopełnienie twierdzenia o substytucji	143
3.9. Twierdzenie Millmana jako uzupełnienie metody potencjałów węzłowych . . . . .	145
3.9.1. Przypadek źródeł napięcia . . . . .	145
3.9.2. Przypadek źródeł prądu . . . . .	146
3.10. Twierdzenie o mocy maksymalnej . . . . .	147
3.10.1. Sprawność i moc maksymalna . . . . .	148
3.10.2. Prąd a moc maksymalna . . . . .	149
3.10.3. Napięcie a moc maksymalna . . . . .	149
3.11. Pytania, problemy i quiz . . . . .	151
3.11.1. Pytania . . . . .	152
3.11.2. Problemy rozwiązane . . . . .	154
3.11.3. Quiz . . . . .	170
<b>4. Przebiegi sinusoidalne i obwody prądu zmiennego</b>	<b>173</b>
4.1. Przebiegi i sygnały okresowe . . . . .	174
4.2. Obwody prądu sinusoidalnego . . . . .	178
4.3. Elementy obwodów prądu zmiennego . . . . .	178
4.3.1. Źródła prądu i napięcia sinusoidalnego (zależne i niezależne)	179
4.3.2. Rezystory w obwodach prądu sinusoidalnego . . . . .	180
4.3.3. Kondensatory w obwodach prądu sinusoidalnego . . . . .	181
4.3.4. Cewki w obwodach prądu sinusoidalnego . . . . .	184
4.4. Obwody <i>RLC</i> prądu zmiennego . . . . .	185
4.4.1. Szeregowe połączenie <i>RLC</i> i pojęcie impedancji . . . . .	186
4.4.2. Równoległe połączenie <i>RLC</i> i pojęcie admitancji . . . . .	189
4.5. Wartość średnia a skuteczna (rms) . . . . .	191
4.5.1. Wartość średnia . . . . .	192
4.5.2. Wartość skuteczna (rms) . . . . .	196
4.5.3. Współczynniki kształtu i szczytu . . . . .	197
4.6. Moc prądu zmiennego . . . . .	197
4.6.1. Moc w rezystorach . . . . .	198

4.6.2.	Moc w cewkach . . . . .	198
4.6.3.	Moc w kondensatorach . . . . .	200
4.6.4.	Moc w elementach idealnych . . . . .	200
4.6.5.	Moc w obwodach <i>RLC</i> . . . . .	200
4.6.6.	Współczynnik mocy . . . . .	201
4.6.7.	Trójkąt mocy . . . . .	202
4.7.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	203
4.7.1.	Pytania . . . . .	203
4.7.2.	Problemy rozwiązane . . . . .	204
4.7.3.	Quiz . . . . .	207
<b>5.</b>	<b>Analiza obwodów prądu sinusoidalnego metodą symboliczną</b>	<b>209</b>
5.1.	Algebra zespolona . . . . .	209
5.2.	Sposoby reprezentowania liczb zespolonych . . . . .	211
5.2.1.	Postać algebraiczna/kanoniczna . . . . .	211
5.2.2.	Interpretacja geometryczna . . . . .	211
5.2.3.	Postać trygonometryczna . . . . .	213
5.2.4.	Postać wykładnicza . . . . .	213
5.2.5.	Postać biegunowa: moduł i kąt . . . . .	213
5.3.	Przedstawienie napięcia sinusoidalnego z użyciem liczb zespolonych	214
5.3.1.	Wektorowa reprezentacja prądu i spadku napięcia na elemencie pasywnym . . . . .	217
5.3.2.	Rezystor . . . . .	217
5.3.3.	Cewka . . . . .	218
5.3.4.	Kondensator . . . . .	219
5.4.	Analizowanie połączeń <i>RLC</i> z użyciem liczb zespolonych . . . . .	220
5.4.1.	Notacja zespolona jako sposób na ułatwienie analizy obwodów . . . . .	220
5.4.2.	Szeregowe połączenie <i>RLC</i> i pojęcie impedancji zastępczej	220
5.4.3.	Równoległe połączenie <i>RLC</i> i pojęcie admitancji zastępczej	223
5.5.	Moc w notacji zespolonej . . . . .	225
5.6.	Redukcja obwodów prądu zmiennego . . . . .	227
5.7.	Prawa Kirchhoffa . . . . .	230
5.8.	Dzielniki napięcia i prądu . . . . .	231
5.9.	Metoda prądów oczkowych . . . . .	233
5.10.	Metoda potencjałów węzłowych . . . . .	235
5.11.	Zasada superpozycji . . . . .	235
5.12.	Twierdzenie Thevenina . . . . .	238
5.13.	Twierdzenie Nortona . . . . .	239
5.14.	Twierdzenie o mocy maksymalnej . . . . .	240
5.15.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	245
5.15.1.	Pytania . . . . .	245

5.15.2. Problemy rozwiązane . . . . .	246
5.15.3. Quiz . . . . .	260
<b>6. Rezonans</b>	<b>263</b>
6.1. Rezonans szeregowy: rezonans napięć . . . . .	263
6.1.1. Istota rezonansu napięć . . . . .	263
6.1.2. Rezonans w szeregowym połączeniu <i>RLC</i> . . . . .	265
6.1.3. Wykresy wektorowe . . . . .	266
6.1.4. Wykresy częstotliwościowe . . . . .	266
6.1.5. Podsumowanie . . . . .	269
6.2. Interpretacja charakterystyk częstotliwościowych . . . . .	270
6.2.1. Wpływ rezystancji <i>R</i> na wykresy częstotliwościowe . . . . .	270
6.2.2. Dobroć szeregowego obwodu rezonansowego . . . . .	270
6.2.3. Współczynnik tłumienia a selektywność cewki . . . . .	271
6.2.4. Częstotliwości graniczne i szerokość pasma . . . . .	272
6.2.5. Dobroć a szerokość pasma . . . . .	275
6.2.6. Przestrzajanie obwodu rezonansowego . . . . .	275
6.3. Rezonans równoległy: rezonans prądów . . . . .	277
6.3.1. Dobroć równoległego obwodu rezonansowego . . . . .	280
6.4. Praktyczne układy rezonansowe . . . . .	280
6.4.1. Układ z rysunku 6.12a . . . . .	280
6.4.2. Układ z rysunku 6.12b . . . . .	282
6.4.3. Układ z rysunku 6.12c . . . . .	284
6.4.4. Rezonator kwarcowy . . . . .	284
6.5. Filtry elektryczne jako praktyczne zastosowanie rezonansu . . . . .	285
6.6. Pytania, problemy i quiz . . . . .	286
6.6.1. Pytania . . . . .	287
6.6.2. Problemy rozwiązane . . . . .	288
6.6.3. Quiz . . . . .	293
<b>7. Stany nieustalone</b>	<b>295</b>
7.1. Istota stanu nieustalonego a funkcje wykładnicze . . . . .	297
7.2. Szeregowe połączenie <i>RC</i> . . . . .	297
7.2.1. Uwagi ogólne . . . . .	297
7.2.2. Ładowanie kondensatora . . . . .	298
7.2.3. Stała czasowa . . . . .	300
7.2.4. Rozładowanie kondensatora . . . . .	301
7.3. Szeregowe połączenie <i>RL</i> . . . . .	302
7.3.1. Dołączenie szeregowego połączenia <i>RL</i> do źródła napięcia stałego . . . . .	302

7.3.2.	Zamknięcie obwodu $RL$ przy niezerowym warunku początkowym . . . . .	304
7.4.	Porównanie obwodów $RL$ i $RC$ pod względem stanów nieustalonych	305
7.5.	Stan nieustalony w szeregowym połączeniu $RLC$ . . . . .	305
7.6.	Stany nieustalone w obwodach prądu zmiennego . . . . .	309
7.7.	Przekształcenie Laplace'a jako podstawa operatorowej metody analizy obwodów . . . . .	311
7.7.1.	Wprowadzenie . . . . .	311
7.7.2.	Unilateralna transformacja Laplace'a . . . . .	311
7.7.3.	Właściwości przekształcenia Laplace'a . . . . .	314
7.7.4.	Wykorzystanie przekształcenia Laplace'a do analizowania obwodów $RLC$ . . . . .	316
7.8.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	319
7.8.1.	Pytania . . . . .	319
7.8.2.	Problemy rozwiązane . . . . .	320
7.8.3.	Quiz . . . . .	330
<b>8.</b>	<b>Diody półprzewodnikowe</b>	<b>331</b>
8.1.	Półprzewodniki . . . . .	331
8.2.	Złącze półprzewodnikowe $pn$ . . . . .	332
8.3.	Dioda prostownicza . . . . .	333
8.4.	Dioda Zenera . . . . .	336
8.5.	Inne rodzaje diod . . . . .	336
8.5.1.	Wprowadzenie . . . . .	336
8.5.2.	Dioda elektroluminescencyjna (LED) . . . . .	336
8.5.3.	Dioda Schottky'ego . . . . .	338
8.5.4.	Dioda pojemnościowa . . . . .	339
8.5.5.	Dioda tunelowa . . . . .	339
8.5.6.	Fotodiody . . . . .	339
8.6.	Ograniczniki napięcia . . . . .	340
8.7.	Układy przylegania . . . . .	344
8.8.	Diodowe układy przełączające i bramki logiczne . . . . .	346
8.9.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	347
8.9.1.	Problemy rozwiązane . . . . .	347
<b>9.</b>	<b>Tranzystory i ich zastosowania</b>	<b>357</b>
9.1.	Tranzystory bipolarne . . . . .	357
9.1.1.	Budowa i działanie . . . . .	357
9.1.2.	Punkt pracy i polaryzacja . . . . .	360
9.1.3.	Obliczeniowe modele tranzystora . . . . .	362
9.2.	Wzmacniacze . . . . .	364
9.2.1.	Ogólna charakterystyka układów wzmacniających . . . . .	364

9.2.2.	Zasada działania wzmacniacza . . . . .	367
9.2.3.	Wtórnik emiterowy . . . . .	369
9.2.4.	Wzmacniacz różnicowy . . . . .	370
9.3.	Tranzystory unipolarne . . . . .	371
9.3.1.	Informacje ogólne . . . . .	371
9.3.2.	Tranzystory unipolarne z izolowaną bramką (MOSFET) . .	372
9.3.3.	Tranzystory unipolarne złączone (JFET) . . . . .	374
9.4.	Tranzystory a wytwarzanie układów logicznych . . . . .	376
9.4.1.	Ogólna zasada reprezentowania informacji z użyciem tranzystora . . . . .	376
9.4.2.	Realizowanie bramek logicznych za pomocą tranzystorów bipolarnych . . . . .	376
9.4.3.	Realizowanie bramek logicznych za pomocą tranzystorów unipolarnych . . . . .	377
9.4.4.	Pobór energii a przełączanie bramki . . . . .	379
9.5.	Tranzystory w wytwarzaniu pamięci . . . . .	379
9.5.1.	Ogólna struktura układów pamięciowych . . . . .	379
9.5.2.	Pamięci stałe . . . . .	380
9.5.3.	Pamięci o dostępie swobodnym . . . . .	381
9.5.4.	Pamięci dynamiczne . . . . .	381
9.5.5.	Pamięci statyczne . . . . .	382
9.6.	Sprzężenie zwrotne . . . . .	383
9.7.	Generatory . . . . .	384
9.7.1.	Generatory sinusoidalne . . . . .	384
9.7.2.	Generatory impulsów prostokątnych . . . . .	386
9.8.	Pytania, problemy i quiz . . . . .	387
9.8.1.	Problemy rozwiązane . . . . .	387
<b>10.</b>	<b>Wzmacniacze operacyjne</b> . . . . .	<b>403</b>
10.1.	Właściwości wzmacniaczy operacyjnych . . . . .	404
10.2.	Komparatory . . . . .	406
10.3.	Podstawowe konfiguracje wzmacniające . . . . .	407
10.4.	Wtórnik napięciowy . . . . .	409
10.5.	Układ sumujący . . . . .	410
10.6.	Układ całkujący . . . . .	411
10.7.	Układ różniczkujący . . . . .	411
10.8.	Przesuwnik fazy . . . . .	412
10.9.	Filtry aktywne . . . . .	414
10.10.	Generatory . . . . .	415
10.11.	Przetwornik napięcie-prąd . . . . .	416
10.12.	Cyfrowe przetwarzanie sygnałów . . . . .	417
10.13.	Przetwornik analogowo-cyfrowy . . . . .	419

10.14. Przetwornik cyfrowo-analogowy . . . . .	419
10.15. Pytania, problemy i quiz . . . . .	420
10.15.1. Problemy rozwiązane . . . . .	420
<b>11. Zasilanie urządzeń elektronicznych</b>	<b>427</b>
11.1. Ogólny schemat zasilacza . . . . .	427
11.2. Transformator . . . . .	430
11.3. Prostowniki . . . . .	431
11.3.1. Prostownik półokresowy . . . . .	431
11.3.2. Mostkowy prostownik pełnookresowy . . . . .	433
11.3.3. Prostownik pełnookresowy z transformatorem o dzielonym uzwojeniu . . . . .	434
11.4. Filtry wygładzające . . . . .	436
11.5. Stabilizatory o działaniu ciągłym . . . . .	437
11.5.1. Dioda Zenera jako parametryczny stabilizator napięcia . .	437
11.5.2. Równoległe stabilizatory kompensacyjne . . . . .	438
11.5.3. Szeregowe stabilizatory kompensacyjne . . . . .	440
11.5.4. Stabilizatory scalone . . . . .	441
11.5.5. Zastosowania stabilizatorów o działaniu ciągłym . . . . .	441
11.6. Stabilizatory i zasilacze impulsowe . . . . .	442
11.7. Zasilanie bateryjne . . . . .	444
11.7.1. Wprowadzenie . . . . .	444
11.7.2. Baterie a akumulatory . . . . .	445
11.7.3. Właściwości najpopularniejszych typów baterii . . . . .	447
11.7.4. Ładowanie akumulatorów . . . . .	448
11.8. Przetwornice napięcia stałego . . . . .	449
11.9. Pytania, problemy i quiz . . . . .	449
11.9.1. Problemy rozwiązane . . . . .	449
<b>Bibliografia</b>	<b>459</b>
<b>Bibliografia uzupełniająca</b>	<b>461</b>

# Wstęp

Merytoryczny wstęp do książki podany poniżej jako „Wprowadzenie” był wstępem do książki w pierwszym wydaniu w wydawnictwie AGH na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie w 2012 roku.

Obecnie chciałbym odnieść się do nowych poprawek edytorskich, które wprowadziliśmy z współautorem dr. hab. Markiem Parfieniukiem oraz podkreślić jego rolę przy przygotowaniu nowego wydania w LaTeXu. Panu Markowi zawdzięczam nowy wygląd wydawniczy i styl — po uzgodnieniu wszystkich aspektów ze mną. Poprawiono tekst, ilustracje rozszerzono o szczegóły tak, że obecnie są bardziej czytelne. Dokonano wiele drobnych zmian, które znacząco poprawiły brzmienie tekstu i płynność wniosków i dowodów. W kilku miejscach przedstawiono podrozdziały, zmieniono treść oraz opisy metod analiz i zostały uporządkowane i rozszerzone o szereg praktycznych informacji.

Chciałbym serdecznie podziękować recenzentom — prof. Sławomirowi Wierzchoniowi i dr. Grzegorzowi Rubinowi za rzetelne recenzje i słowa uznania. Dziękuję wydawnictwu AGH za wyrażenie zgody na opublikowanie nowej wersji książki w wydawnictwie Politechniki Białostockiej. Jesteśmy wdzięczni wydawnictwu PB za sprawdzenie i poprawę językową.

A moje osobiste podziękowania kieruję panu Markowi Parfieniukowi za wielki wkład w przygotowanie nowego wydania.

Mamy nadzieję, że czytelnicy, a w szczególności studenci kierunku informatyka znajdą to, czego oczekiwali oraz to, co potrzebowali.

Khalid Saeed





# Wprowadzenie

## (Wstęp do pierwszego wydania)

Choć komputer jest urządzeniem elektrycznym, przedmioty nauczania przedstawiające treści z zakresu teorii obwodów i elektroniki nie wzbudzają na ogół zainteresowania studentów informatyki. Wręcz odwrotnie: padają stwierdzenia, że ich nauka to strata czasu, że to nie jest informatyka i że taka wiedza nie przyda się potem w pracy zawodowej. Tymczasem ze względu na dydaktykę znajomość podstawowych elementów i układów elektronicznych oraz reguł rządzących ich działaniem ma bardzo duże znaczenie dla rozwoju przyszłego inżyniera. Wiedza z tej dziedziny warunkuje bowiem zdolność rozwiązania wielu zadań, które może postawić przed nim praktyka wykraczająca poza programowanie i administrację systemami. Jako przykłady takich problemów można wskazać identyfikację niektórych uszkodzeń komputerów i zapobieganie im, ocenę zużycia energii przez system komputerowy i dobór zasilacza czy dołączenie do komputera nietypowego urządzenia zewnętrznego (czujnik, automat itp.) i zrozumienie jego działania na tyle, by napisać program obsługi. Znajomość pojęć takich jak moc, impedancja, częstotliwość, pasmo czy decybel stanowi też fundament dialogu i współpracy ze specjalistami z innych dziedzin w przedsięwzięciach, które łączą informatykę z elektroniką, automatyką czy telekomunikacją. Wreszcie zajęcia dotyczące obwodów elektrycznych umożliwiają doskonalenie umiejętności, które można określać mianem uniwersalnych i których opanowanie decyduje o dojrzałości technicznej absolwenta. Zadania rachunkowe rozwijają umiejętność logicznego myślenia, a laboratoria doskonale uczą planowania i organizacji pracy, w szczególności zespołowej, działania w warunkach stresu i ograniczeń czasowych oraz czytania i tworzenia dokumentacji technicznej (instrukcje/karty katalogowe, sprawozdania).

Autorzy mają nadzieję, że niniejsza książka nie tylko ułatwi studentom przyswojenie podstaw elektrotechniki i elektroniki, ale także nastawi ich pozytywnie do tych dziedzin i całego powiązanego wątku studiów. Dotyczy to sprzętu komputerowego i komunikacji systemów informatycznych ze światem zewnętrznym, obejmując dodatkowo treści z zakresu techniki cyfrowej, projektowania układów logicznych i architektury komputerów z jednej strony, a cyfrowego przetwarzania obrazu i dźwięku, komunikacji multimedialnej oraz interakcji człowiek-komputer

z drugiej strony. Podstawową intencją niniejszej książki jest dostarczenie studentom informatyki jednego pełnego i wygodnego źródła wiedzy, które przedstawia niezbędny materiał z teorii obwodów oraz elektroniki i w którym wiadomościom teoretycznym towarzyszą liczne przykłady i zadania. W trakcie własnych studiów, a potem podczas pracy dydaktycznej, autorzy napotkali bowiem problem braku pozycji, która zaspokajałaby wszystkie potrzeby studenta, a jednocześnie nie przytłaczała go. Konieczne było korzystanie z podręczników dla wydziałów elektrycznych, oddzielnych do teorii obwodów i do elektroniki, które zawierały wiele treści spoza zakresu wykładanego na informatyce, odwracając uwagę czytelnika od tego, co mu przydatne. W związku z tym, na podstawie swoich doświadczeń, autorzy dokonali uważnej selekcji materiału, uzupełniając go dygresjami, które wykazują związki przedstawianych wiadomości z informatyką.

Książka odzwierciedla wykłady z teorii obwodów oraz elementów i układów elektronicznych dla studentów kierunku informatyka, które prowadziłem przez prawie 35 lat na ośmiu różnych uczelniach w Polsce i za granicą. Rozdziały dotyczące elementów i układów elektronicznych to przedstawienie moich wykładów z elektroniki. Zostały one bardzo umiejętnie opracowane przez dra Marka Parfieniuka, który najpierw wykładów wysłuchał (jako wyróżniający się student), a później współpracował ze mną jako prowadzący ćwiczenia i laboratorium znakomity asystent Wydziału Informatyki Politechniki Białostockiej.

Pierwsze siedem rozdziałów było recenzowanych przez profesora Stanisława Bolkowskiego oraz profesora Sławomira Wierzchonia, zaś całość książki recenzował profesor Marek Idzik. Ich uwagi przyczyniły się do poprawy jakości książki, za co chciałbym im serdecznie podziękować.

Khalid Saeed

# Przedmowa do pierwszego wydania

Książka profesora Khalida Saeeda i jego asystenta, dra Marka Parfieniuka, zatytułowana *Wprowadzenie do układów elektrycznych i elektronicznych dla studentów informatyki*, którą mam przyjemność otwierać tą przedmową, jest dziełem zdecydowanie godnym uwagi. Powiem więcej: jako autor blisko stu podręczników i jako nauczyciel akademicki z ponad 40-letnim stażem pozwalam sobie tę książkę gorąco tu **rekomendować**. Pozwolę sobie wyjaśnić, dlaczego ją tak chwalebę.

Po pierwsze jest to wyjątkowo dobrze przygotowany podręcznik z zakresu tytułowych układów elektrycznych i elektronicznych. W tym zakresie główną zaletą książki jest fakt zebrania w niej w jednym miejscu wszystkich tych wiadomości, których normalnie trzeba szukać w wielu różnych podręcznikach, artykułach i monografiach naukowych. Takie całościowe ujęcie jest dziś rzadkością, bo nauka i technika lubią się obecnie zagłębiać w szczegóły oraz drażnić bardzo wąskie i specjalistyczne aspekty. Wynika to z logiki rozwoju całej nauki oraz techniki. Rozległość i stopień zaawansowania współczesnej wiedzy powoduje, że nowatorskie odkrycia naukowe, a także innowacyjne rozwiązania techniczne wymagają koncentracji uwagi na wąskich szczegółach, gdyż tylko w ten sposób można coś nowego odkryć lub coś znacząco usprawnić. Na takich wąskich aspektach skupiają więc uwagę badacze i konstruktorzy osiągający sukcesy.

To jednak formuje ich intelektualnie. Nic więc dziwnego, że gdy ktoś cieszący się zasłużoną sławą odkrywcy lub wynalazcy zostaje poproszony, żeby — jako autorytet wr danej dziedzinie — napisał podręcznik dla studentów, to koncentruje się także w tekście tworzonej książki na owych wąskich aspektach, których zbadanie przyniosło mu sławę. Tymczasem te specjalistyczne aspekty są oczywiście interesujące, ale głównie z punktu widzenia samych autorów. Takie specjalistyczne ujęcia, które zagłębiają się w wąskie i szczegółowe zagadnienia, a jednocześnie nie dostarczają wiedzy całościowej i podstawowej — są prawdziwą zmurą studentów. Niestety takie są podręczniki pisane przez większość badaczy i kreatywnych inżynierów, a obserwowane z punktu widzenia studentów, powodują one efekt, który najtrafniej ujmuje stare powiedzenie: „Spoza drzew nie widać lasu”.

Zajmuję się analizą i oceną podręczników akademickich z górą ćwierć wieku

i stwierdzam, że większość autorów książek nawet tych deklarowanych jako podręczniki na poziomie elementarnym, unika wyjaśniania spraw podstawowych, ogólnych i w istocie elementarnych. Dla autorów tych książek owe sprawy podstawowe i ogólne są tak oczywiste jak abecadło, dlatego trudno jest im zwykle wręcz wyobrazić sobie, że dla kogoś to właśnie jest nieznanie i niewiadome. Student to powinien umieć równie dobrze jak pisać i czytać!

Tymczasem nie rodzimy się ze znajomością nawet najprostszych faktów naukowych, a szkoła średnia zwykle też nie dostarcza potrzebnej wiedzy w wymaganej ilości i przyzwoitej jakości. Dlatego nawet najprostsze fakty bywają czasem przeszkodą nie do przebycia dla początkujących studentów, bo ich po prostu nie znają, a poznać ich nie mogą, bo nie ma skąd.

Piszę o tych wszystkich mankamentach typowych podręczników akademickich, ponieważ zapowiadana tu książka jest inna. Główny Autor, profesor Khalid Saeed, będący wybitnym informatykiem, stworzył (wraz ze swoim asystentem) jedyny w swoim rodzaju podręcznik elektrotechniki i elektroniki dla studentów informatyki. Podręcznik ten jest obszerny (11 rozdziałów!) i skupia się właśnie na tych sprawach podstawowych i ogólnych, których w większości podręczników nie omawia się wcale albo które są omawiane krótko, zdawkowo, ogólnikowo. To ogromnie ułatwia naukę, a także pozwala na uzyskanie całościowego poglądu czytelnika na bardzo rozległą i bogatą w szczegóły dziedzinę obwodów i systemów elektrycznych i elektronicznych.

Autor we wstępie stwierdza, że napisał tę książkę po to, żeby studenci informatyki mogli poznać zagadnienia układów elektrycznych i elektronicznych wrz zakresie i w stopniu, w jakim im to będzie potem potrzebne w pracy zawodowej informatyka, nie sięgając do zbyt obszernych i zbyt trudnych dla nich w tym zakresie podręczników używanych na wydziałach elektrycznych. Jest to zamierzenie trafne i ze wszech miar godne poparcia. Jednak jako absolwent wydziału elektrycznego po przeczytaniu tej książki muszę stwierdzić, iż ogromnie żałuję, że w czasach, kiedy ja sam studiowałem na Wydziale Elektrycznym AGH nie mieliśmy (wraz z moimi kolegami) do dyspozycji podobnego podręcznika. Pamiętam właśnie z moich czasów studenckich, a także z okresu kiedy zaczynałem pracę jako młody asystent, że trudności problematyki obwodów elektrycznych i elektronicznych bywały dla wielu osób barierą nie do przebycia — i „odsiew” na tym wydziale elektrycznym był naprawdę ogromny. Dostępność takiej książki, jak prezentowany tu podręcznik profesora Khalida Saeeda, mogłaby uratować wielu moich kolegów od ostatecznej klęski, jaką była konieczność rezygnacji z ulubionego kierunku studiów (elektrotechniki, elektroniki, automatyki, telekomunikacji itp.) w związku z porażającą trudnością przebrnięcia przez słynne w całej Akademii Górniczo-Hutniczej kolokwia z teorii obwodów.

Przeglądając książkę profesora Khalida Saeeda za jej szczególnie walor uznałem sposób prezentacji większości zagadnień poprzez przykłady typowych problemów, dla których w książce przedstawiono gotowe rozwiązania. Właśnie te rozwiązane zadania, w połączeniu z zadaniami, w przypadku których dopiero czytelnik sam

musi dostarczyć odpowiedzi, stanowią główną zaletę książki dostarczającej nie tylko gotowej do użycia wiedzy, ale także gwarantującej właściwe jej wykorzystanie.

Wykład przedstawiony w książce jest systematyczny i bardzo dobrze skoncentrowany na najważniejszych zagadnieniach, dzięki czemu czytelnik nie traci czasu na studiowanie zagadnień mało ważnych czy mało przydatnych, zaś pogłębione uwagi i dyskusje, towarzyszące wykładanym tezom, skłaniają do dalszych własnych studiów i stwarzają podstawę do potraktowania problematyki obwodów i systemów elektrycznych nie tylko jako zasobu wiadomości koniecznych do pojęciowego i koncepcyjnego przyswojenia, ale także jako fascynującej przygody intelektualnej.

Na koniec jeszcze jedna uwaga. Sam od lat wykładam (metody sztucznej inteligencji) na kierunkach informatyka, informatyka stosowana oraz informatyka i ekonometria (ten ostatni na Uniwersytecie Ekonomicznym). Znam w związku z tym z własnej praktyki nastawienie studentów informatyki, którzy wszystko, co nie wiąże się bezpośrednio z komputerami i ich programowaniem, traktują jako rzecz mało ważną i niepotrzebnie zajmującą czas. Jest więc wysoce prawdopodobne, że biorący do ręki ten tom student informatyki, będzie to czynił z niechęcią, pod przymusem wynikającym z programu studiów, bez przekonania. Wszystkich takich nieprzekonanych zachęcam gorąco, żeby zanim wgryzą się w treść książki, zechcieli przeczytać jej wstęp. W tym wstępie profesor Khalid Saeed, o którym mogę zaświadczyć, że jest informatykiem „z krwi i kości”, cieszącym się ogromnym autorytetem wśród polskich informatyków, ale mającym także wybitną pozycję na arenie międzynarodowej, tłumaczy, dlaczego właśnie ta wiedza, zawarta właśnie w tym podręczniku, jest wręcz nieodzowna właśnie informatykom. Warto przeczytać tych kilka mądrych i bardzo trafnych uwag, gdyż dzięki temu czytanie całej dalszej treści podręcznika będzie łatwiejsze i przyjemniejsze.

*Prof. zw. dr hab. inż. Ryszard Tadeusiewicz*



# Rozdział 1

## Podstawy teorii obwodów elektrycznych

### Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawione zostały ogólne podstawy elektrostatyki oraz teorii pola elektrycznego i magnetycznego. Przyjęto, że czytelnik zna już pojęcie ładunku i niektóre inne elementarne fakty z zakresu teorii pola elektrycznego i magnetycznego, ale podano wszystkie definicje i prawa, które są niezbędne do rozważań w pozostałej części książki.

### 1.1 Natężenie pola elektrycznego

Aby objaśnić pojęcie pola elektrycznego i jego natężenia, najpierw zdefiniujemy siłę elektryczną, która działa na ładunek znajdujący się w otoczeniu innych ładunków. Zgodnie z prawem Coulomba<sup>1</sup>, siła elektryczna  $F$ , która wynika z oddziaływania dwóch ładunków  $q_1$  i  $q_2$ , jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich wartości, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości  $r$  między środkami ich mas:

$$F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

Jeżeli  $q_1$  i  $q_2$  są określone w kulombach [C], zaś  $r$  — w metrach [m], to jednostką  $F$  są niutony [N]. Dla próżni, która charakteryzuje się przenikalnością elektryczną  $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ , współczynnik proporcjonalności  $k$  ma wartość  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ .

---

<sup>1</sup> Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806) — francuski fizyk, którego prawo zostało opublikowane w 1785 roku.



Polem elektrycznym jest nazywana właściwość przestrzeni sprawiająca, że na umieszczone w niej naładowane ciało działa siła, która zależy od ładunku zgromadzonego w ciele oraz natężenia pola w miejscu położenia ciała. Pole elektryczne występuje w otoczeniu ciała naładowanego, które jest źródłem pola.

Natężenie pola określa siłę, która działa na jednostkowy ładunek dodatni, ale samo jest określone stosunkiem siły  $F$ , która działa na ładunek próbny  $q_0$ :

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (1.2)$$

Ładunek próbny nie może zaburzać pola, czyli musi być znacznie mniejszy od ładunku wytwarzającego pole. Jest pożądane, by  $q_0 \rightarrow 0$ , przy czym nawet elementarny ładunek elektronu ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  C) byłby zbyt duży w przypadku podobnie małego ładunku źródłowego.

Jednostką natężenia pola jest [N/C]. Ponieważ  $q_0$  jest wielkością skalarną, zaś  $F$  — wektorem,  $E$  jest wektorem skierowanym zgodnie z  $F$ .

Podstawiając  $q$  i  $q_0$  do (1.1), za  $q_1$  i  $q_2$ , a następnie łącząc równania (1.1) i (1.2), można uzyskać bardziej praktyczną zależność:

$$E = k \frac{q}{r^2} \quad (1.3)$$

która określa natężenie pola w odległości  $r$  od ładunku  $q$  wytwarzającego to pole.

## 1.2 Potencjał i napięcie elektryczne

Praca  $W$ , która jest potrzebna, by przesunąć ładunek próbny  $q_0$  z nieskończoności do określonego punktu w polu elektrycznym wytwarzanym przez ładunek  $q$ , określa potencjał

$$U = \frac{W}{q_0} \quad (1.4)$$

czyli wielkość skalarną, której jednostką jest wolt<sup>2</sup> [V], tożsamy z ilorazem dżula<sup>3</sup> i kulomba [J/C].

Przyjmując inny punkt widzenia, można rozpatrywać przemieszczenie ładunku próbnego między dwoma punktami pola elektrycznego wytwarzanego przez ładunek  $q$ . Wtedy interesująca staje się różnica potencjałów w tych punktach, czyli napięcie elektryczne  $U$ .

<sup>2</sup> Alessandro Volta (1745–1827) — włoski fizyk, wynalazca pierwszego ogniwa elektrochemicznego (galwanicznego).

<sup>3</sup> James Prescott Joule (1818–1889) — brytyjski fizyk, twórca teorii elektromagnetyzmu.

Ponieważ praca jest równa sile pomnożonej przez przemieszczenie, łatwo można wykazać, że wyrażenie

$$U = k \frac{q}{r} \quad (1.5)$$

określa napięcie między środkiem ładunku  $q$  a punktem odległym od niego o  $r$ .

Biorąc pierwszą pochodną z równania (1.5) i porównując uzyskany wynik z (1.3), można wyprowadzić następujący związek:

$$E = - \frac{dU}{dr} \quad (1.6)$$

z którego wynika, że natężenie pola jest tożsame z gradientem potencjału i można je mierzyć w [V/m]. Znak minus oznacza, że  $E$  jest skierowane przeciwnie do  $\frac{dU}{dr}$ .

Równanie (1.6) można zapisać w formie całkowej:

$$U = \int_a^b dU = - \int_a^b E dr = U_b - U_a \quad (1.7)$$

gdzie  $a$  i  $b$  oznaczają punkty pola odległe o  $r$ , a  $U_a$  i  $U_b$  — potencjały w tych punktach. Jeżeli  $a$  leży w nieskończoności, czyli  $U_a = 0V$ , co wynika z podstawienia  $r \rightarrow \infty$  do równania (1.5), to

$$U = \int_a^b E dr = U_b \quad (1.8)$$

W przypadku pola jednorodnego  $U = Er$ , czyli  $E = U/r$ , co można udowodnić bezpośrednio na podstawie równań (1.3) i (1.5).

## 1.3 Pojemność elektryczna i kondensatory

### 1.3.1 Kondensator

Kondensator tworzą dwie płyty z materiału przewodzącego, odizolowane od siebie substancją nieprzewodzącą i wyposażone w wyprowadzenia (zaciski), którymi można doprowadzić napięcie z zewnątrz. Napięcie powoduje zgromadzenie się na płytach ładunków równych co do wartości bezwzględnej ale przeciwnych. Magazynując ładunek, kondensator przechowuje energię w formie pola elektrycznego, a jego zdolność do tego jest określona pojemnością  $C$ . Odwrotność pojemności,  $1/C$ , jest nazywana elastancją.

Jeżeli na kondensatorze należy utrzymywać napięcie  $U$  woltów, aby naładować jedną płytę do  $+q$  kulombów, a tym samym drugą do  $-q$  kulombów, to jego pojemność wynosi

$$C = \frac{q}{U} \quad (1.9)$$

faradów<sup>4</sup> [F] .

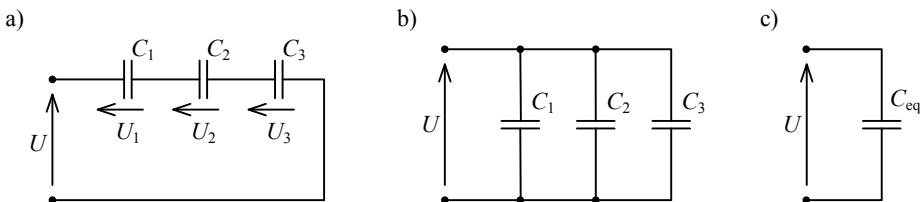
Pojemność zależy od powierzchni płyt  $A$ , odległości między nimi  $d$  oraz przenikalności elektrycznej materiału izolacyjnego (dielektryka)  $\epsilon$ . Wielkości te są powiązane w następujący sposób:

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad (1.10)$$

Ponieważ farad odpowiada bardzo dużej pojemności, w praktyce zwykle używane są jednostki wtórne, które określają pojemności znacznie mniejsze: mikrofarad ( $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{F}$ ), nanofarad ( $1 \text{nF} = 10^{-9} \text{F}$ ) i pikofarad ( $1 \text{pF} = 10^{-12} \text{F}$ ). Takich rzędów pojemnościami charakteryzują się typowe kondensatory do urządzeń elektronicznych powszechnego użytku.

W produkowanych komercyjnie kondensatorach izolator charakteryzuje się rezystancją skończoną, ale bardzo dużą, np.  $10000 \text{M}\Omega$  (zob. podrozdział 1.9).

Kondensatory można łączyć na różne sposoby w celu uzyskania mniejszej lub większej pojemności wypadkowej. Podstawowe znaczenie mają połączenia szeregowe i równoległe, których przykłady pokazano na rys. 1.1. Ten sam rysunek ilustruje pojęcie pojemności zastępczej, czyli oznaczanej symbolem  $C_{\text{eq}}$  pojemności abstrakcyjnego kondensatora, który jest równoważny (ang. *equivalent*) połączeniu wielu elementów pod względem wypadkowego napięcia i ładunku.



Rysunek 1.1: Połączenie kondensatorów: (a) szeregowe i (b) równoległe oraz (c) pojemność zastępcza

### 1.3.2 Szeregowe połączenie kondensatorów

Jeżeli kondensatory są połączone szeregowo, tak jak na rys. 1.1a, to w każdym z nich gromadzi się taki sam ładunek, który jest równy wypadkowemu ładunkowi

<sup>4</sup> Michael Faraday (1791–1867) — brytyjski fizyk i chemik.

w układzie:

$$q = q_1 = q_2 = q_3 \quad (1.11)$$

Na elementach występują spadki napięć, które są określone równaniem (1.9), czyli zależą od pojemności. Jednocześnie zachodzi bilans napięć

$$U = U_1 + U_2 + U_3 \quad (1.12)$$

przy czym wypadkowe napięcie jest rozdzielane proporcjonalnie do pojemności, więc

$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

skąd

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \quad (1.13)$$

gdzie  $C_{\text{eq}}$  symbolizuje zastępczą pojemność szeregowego połączenia trzech kondensatorów.

### Przykład 1.1

Obliczyć napięcia i ładunki na kondensatorach połączonych szeregowo, tak jak na rys. 1.1a, mając dane:  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 20 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 30 \mu\text{F}$  oraz  $U = 12\text{V}$ .

### Rozwiązanie

Najpierw, wykorzystując równanie (1.13), obliczamy zastępczą pojemność

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{10\mu} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{11}{60}$$

czyli  $C_{\text{eq}} \approx 5,5 \mu\text{F}$ . Ładunek zgromadzony na pojemności zastępczej

$$q = C_{\text{eq}} \cdot U = 5,5 \mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 65 \mu\text{C}$$

jest równy ładunkom zgromadzonym na poszczególnych kondensatorach:  $q_1 = q_2 = q_3 = q$ . Zatem napięcia na elementach są równe:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{65 \mu\text{C}}{10 \mu\text{F}} = 6,5\text{V}$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{65 \mu\text{C}}{20 \mu\text{F}} = 3,3\text{V}$$

$$U_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{65 \mu\text{C}}{30 \mu\text{F}} = 2,2\text{V}$$

□

### 1.3.3 Równoległe połączenie kondensatorów

W przypadku połączenia równoległego, takiego jak na rys. 1.1b, do każdego kondensatora doprowadzone jest to samo napięcie,  $U_1 = U_2 = U_3 = U$ . Całkowity zgromadzony ładunek, dostarczony ze źródła napięcia, zostaje natomiast rozdzielony pomiędzy kondensatory,  $q = q_1 + q_2 + q_3$ , odpowiednio do ich pojemności:

$$C_{\text{eq}}U = C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3$$

czyli

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 \quad (1.14)$$

Zatem zastępcza pojemność  $C_{\text{eq}}$  połączenia równoległego jest określona sumą poszczególnych pojemności.

#### Przykład 1.2

Obliczyć napięcia i ładunki na kondensatorach połączonych równoległe, tak jak na rys. 1.1a, wiedząc, że  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 20 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 30 \mu\text{F}$  i  $U = 12\text{V}$ , czyli wartości są takie same jak w przykładzie 1.1.

#### Rozwiązanie

Tak jak w przykładzie 1.1, rozpoczynamy od obliczenia pojemności zastępczej  $C_{\text{eq}}$ . Tym razem wykorzystujemy jednak wzór (1.14):

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 = 10 + 20 + 30 = 60 [\mu\text{F}]$$

Napięcie na zaciskach każdego z kondensatorów jest takie samo i równe napięciu na pojemności zastępczej,  $U = 12\text{V}$ . Zatem ładunki zakumulowane w poszczególnych kondensatorach są określone następująco:

$$q_1 = C_1U = 10 \mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 120 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2U = 20 \mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 240 \mu\text{C}$$

$$q_3 = C_3U = 30 \mu\text{F} \cdot 12\text{V} = 360 \mu\text{C}$$

□

### 1.3.4 Wytrzymałość dielektryczna

Każdy dielektryk (izolator) charakteryzuje się właściwą sobie tolerancją na doprowadzoną do niego różnicę potencjałów. Jeżeli zostaje przekroczone określone napięcie graniczne, to następuje przebicie: dielektryk traci (trwale lub chwilowo) właściwości elektroizolacyjne, wskutek czego przepływa prąd o dużym natężeniu.

Za przykład może posłużyć zjawisko wyładowania atmosferycznego. Wiadomo, że między chmurami a ziemią jest pojemność z powietrzem w roli izolatora. Kiedy różnica potencjałów między nimi staje się bardzo wysoka (powiedzmy 100 MV,

która to wartość jak najbardziej możliwa), to przez powietrze zaczyna płynąć bardzo duży prąd, czego przejawem jest błyskawica.

W efekcie przebicia większość dielektryków ulega nieodwracalnemu uszkodzeniu i traci właściwości elektroizolacyjne. Niektóre izolatory ciekłe i gazowe są jednak zdolne do regenerowania się.

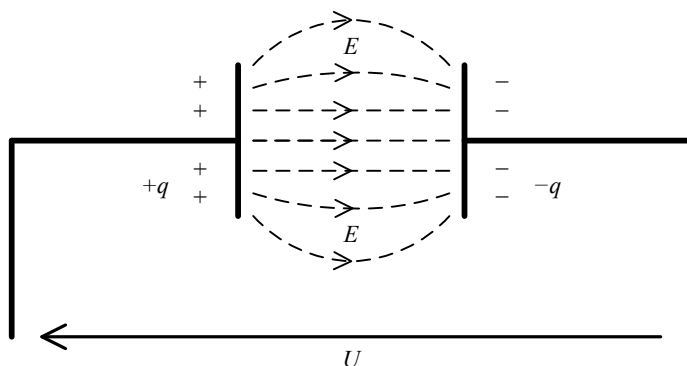
Podatność substancji na przebicie jest określana wytrzymałością dielektryczną, czyli graniczną wartością natężenia pola elektrycznego,  $E$ , która określa minimalne napięcie powodujące przebicie warstwy izolatora o jednostkowej grubości.

### 1.3.5 Energia w kondensatorach

Rysunek 1.2 pokazuje wielkości elektryczne w naładowanym kondensatorze. Idealny kondensator nie pozwala, by ładunki przechodziły między jego okładkami, tylko akumuluje je na okładkach, między którymi występuje pole elektryczne. Pole jest bezpośrednim przejawem gromadzenia się energii w kondensatorze. Przepisując równanie (1.4) w postaci różniczkowej  $U = \frac{dW}{dq}$  i wykorzystując  $U = q/C$ , można stwierdzić, że do zakumulowania ładunku  $q$  potrzebna jest praca (czyli energia)

$$W_C = \int_0^q U dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 \quad (1.15)$$

Jest ona składowana wewnątrz kondensatora w postaci energii elektrycznej (zob. podrozdział 1.10).



Rysunek 1.2: Pole elektryczne w naładowanym kondensatorze

Ponieważ w kondensatorze pole elektryczne jest jednorodne, a dla takiego pola  $U = E r$ , jak wspomniano na końcu podrozdziału 1.2,

$$W = \frac{1}{2} C r^2 E^2 \quad (1.16)$$

co oznacza, że  $W$  jest proporcjonalne do  $E^2$ . Na podstawie równania (1.10) można podstawić  $C = \frac{\epsilon A}{r}$ , uzyskując zależność  $W = \frac{1}{2} \epsilon A r E^2$ . Ponieważ  $A r$  jest objętością kondensatora, można określić gęstość energii, czyli energię przypadającą na jednostkową objętość

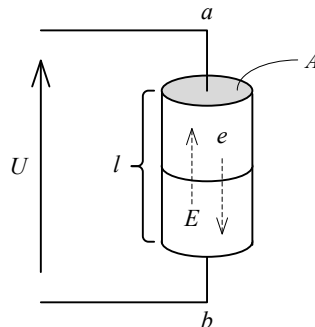
$$\frac{W}{\text{objętość}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (1.17)$$

## 1.4 Prąd elektryczny

Prąd elektryczny jest definiowany ogólnie jako uporządkowany ruch ładunków, które mogą być dodatnie lub ujemne, zależnie do sytuacji.

Za najbardziej podstawowy można uznać prąd elektronowy, który występuje w metalach. Metale są bardzo dobrymi przewodnikami, gdyż występują w nich liczne wolne elektrony, które utraciły związek z atomami i są w ciągłym przypadkowym ruchu. Jeżeli takie elektrony znajdują się w polu elektrycznym, wskutek przyłożenia napięcia do brzegów obiektu metalowego, to będą one poruszać się w sposób uporządkowany, w kierunku przeciwnym do zwrotu natężenia pola.

W szczególności napięcie  $U$  doprowadzone do końców  $a$  i  $b$  przewodu o długości  $l$  i powierzchni przekroju poprzecznego  $A$ , tak jak na rys. 1.3, powoduje wystąpienie pola elektrycznego o natężeniu  $E = U / l$ , skierowanym od  $b$  do  $a$ , czyli wywołującym ruch elektronów od  $a$  do  $b$ .



Rysunek 1.3: Przewód dołączony do napięcia  $U$

W niektórych substancjach pole elektryczne powoduje przemieszczanie się jonów, które mogą charakteryzować się ładunkiem dodatnim lub ujemnym, czyli mogą poruszać się zgodnie ze skierowaniem pola lub przeciwnie.

Istnieją też substancje, w których miejscowo może występować ładunek dodatni związany z niezrównoważonym protonem w atomie opuszczonym przez jeden z elektronów. Gdy do takiego atomu przejdzie elektron z atomu sąsiedniego, „dziura elektronowa” znika, ale nowa pojawia się w atomie sąsiednim. Zewnętrzne pole elektryczne ukierunkowuje przechodzenie elektronów w taki sposób, że miejsce wystąpienia ładunku dodatniego zmienia się, jakby to on przemieszczał się, chociaż protony nie mogą przechodzić między atomami. Takie zjawisko jest nazywane prądem-przewodnictwem dziurowym.

Ponieważ ruch ładunków ujemnych można utożsamiać z przeciwnie skierowanym ruchem ładunków dodatnich, podczas analizowania obwodów zwykle można nie wnikać w naturę przewodnictwa i mówić po prostu ogólnie, że prąd płynie. Jeżeli trzeba rozpatrywać ładunki w elementach obwodu, to powszechnie stosowana jest konwencja, że prąd polega na przemieszczaniu się ładunków dodatnich, nawet jeżeli poruszają się elektrony lub jony ujemne. Takie założenia ułatwiają zachowanie spójności i przejrzystości rozważań.

Podstawową wielkością charakteryzującą prąd jest jego natężenie, określone szybkością zmian ładunku:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (1.18)$$

i mierzone w amperach<sup>5</sup> [A], które odpowiadają kulombom na sekundę [C/s]. Wystąpienie niezerowego natężenia można utożsamiać z przepływem prądu, więc prąd i jego natężenie są oznaczane tym samym symbolem na schematach i we wzorach, a w opisach często pomijane jest słowo „natężenie”. Zamiast mówić ściśle „prąd o natężeniu  $x$  A”, można powiedzieć „prąd  $x$  A”.

Przystępując do analizowania obwodu, należy oznaczyć prąd na schemacie, umieszczając na linii, która symbolizuje połączenie lub zacisk elementu, strzałkę wskazującą kierunek przepływu prądu, w sensie ruchu ładunków dodatnich. W niniejszej książce zwrot prądu jest oznaczany strzałką z grotem zamkniętym i zaczer-nionym, a zwrot napięcia — strzałką z grotem otwartym, aby ułatwić rozróżnienie wielkości elektrycznych.

Chociaż ładunki dodatnie muszą poruszać się od potencjału większego do mniejszego, nie zawsze wiadomo, z której strony elementu występuje potencjał ujemny, więc nie można przewidzieć kierunku, w którym płynie prąd.

Zwykle można założyć dowolny kierunek przepływu prądu. Trzeba jedynie zwracać uwagę na skierowanie prądu względem napięcia na elemencie, które musi być zgodne ze wzorami opisującymi działanie danego elementu. Na przykład prąd w oporniku zawsze trzeba skierować przeciwnie do napięcia. Należy też konse-

<sup>5</sup> Andre Marie Ampere (1775–1836) — francuski fizyk i matematyk.



kwentnie zapisywać wzory zgodnie z założonymi kierunkami prądów i napięć. Jeżeli nasze założenia okażą się niewłaściwe, to z obliczeń wynikną po prostu ujemne wartości. Minus przy natężeniu prądu oznacza, że prąd ten płynie w kierunku przeciwnym do założonego, oznaczonego strzałką.

### 1.4.1 Rodzaje prądu elektrycznego

Prąd elektryczny jest nazywany prądem stałym i oznaczany wielką literą  $I$ , gdy jego natężenie jest zawsze takie samo. Gdy natężenie zmienia się w czasie, to mówimy o prądzie zmiennym i stosujemy oznaczenie  $i(t)$ . Czasami w celu odróżnienia prądu stałego od zmiennego wykorzystywane są skróty wywodzące się z literatury anglojęzycznej: d.c. (ang. *direct current*) i a.c. (ang. *alternating current*).

Na ogół przepływ prądu jest powodowany przez źródła, które wprowadzają energię do obwodu z zewnątrz. Prąd może też jednak płynąć wskutek przemian energii zgromadzonej wewnątrz obwodu, np. naładowany kondensator wywołuje przepływ prądu w dołączonym równolegle oporniku. W drugim przypadku mówi się o prądzie nieustalonym.

Prąd stały jest rozpatrywany w rozdziałach 2 i 3, zmienny — w rozdziałach 4 i 5, zaś pojęcie prądu nieustalonego stanowi główny przedmiot rozważań w rozdziale 7 niniejszej książki.

### 1.4.2 Gęstość prądu

Prąd elektryczny, jako ruch ładunków, można charakteryzować nie tylko natężeniem  $I$ , ale też gęstością

$$J = \frac{I}{A} \quad (1.19)$$

gdzie  $A$  oznacza powierzchnię przekroju poprzecznego przewodnika. Gęstość prądu pozwala badać rozkład ładunku w objętości przewodnika i zdefiniować wielkości charakteryzujące przewodnictwo substancji.

## 1.5 Rezystancja

Chociaż przewodnik jest substancją, która ma właściwości sprzyjające przepływowi prądu, to jego atomy zawsze w pewnym stopniu hamują ruch ładunków. Dlatego napięcie doprowadzone do końców przewodu powoduje prąd, którego natężenie jest ograniczone i ściśle określone. Zależy ono nie tylko od napięcia, ale też od wymiarów, materiału i temperatury przewodu.

Parametry przewodu zwykle można rozpatrywać łącznie, jako jedną wielkość, która jest nazywana rezystancją (oporem elektrycznym) i zdefiniowana następująco:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (1.20)$$

gdzie  $l$  symbolizuje długość przewodu,  $A$  jest polem jego przekroju poprzecznego, zaś  $\rho$  jest rezystywnością materiału, z którego przewód został wykonany.

Właściwości elektryczne substancji, czyli także charakterystyki przewodów i elementów, zależą od temperatury. Wartości rezystywności i rezystancji są zatem zwykle podawane z zastrzeżeniem, że dotyczą one specyficznej wartości temperatury, najczęściej temperatury pokojowej.

Opór  $R$  jest mierzony w omach<sup>6</sup> [ $\Omega$ ]. Jeżeli  $l$  jest określone w metrach [m], zaś  $A$  w metrach kwadratowych [ $m^2$ ], to jednostką  $\rho$  jest  $\Omega \cdot m$ .

Odwrotność rezystancji,  $G = 1 / R$ , jest określana mianem konduktancji i mierzona w simensach [S].

Odwrotność rezystywności,  $\sigma = 1 / \rho$ , nosi nazwę konduktywności i jest mierzona w [ $\Omega m$ ]<sup>-1</sup>. Wykorzystując ją, można zapisać (1.20) w alternatywnej formie:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \quad (1.21)$$

Przewody połączeniowe powinny charakteryzować się jak najlepszym przewodnictwem, czyli jak najmniejszą rezystancją. W obwodach elektrycznych i elektronicznych wykorzystywane są też jednak elementy nazywane rezystorami albo opornikami, których zadaniem jest realizowanie określonej rezystancji. Odmianę oporników stanowią reostaty i potencjometry, których rezystancję można regulować pokrętkiem lub suwakiem.

Rezystancje wytwarzanych oporników są znormalizowane. Mogą być określone tylko iloczynem potęgi 10 i wartości ze specyficznego szeregu. Na przykład szereg E12 obejmuje wartości: 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68 i 82.

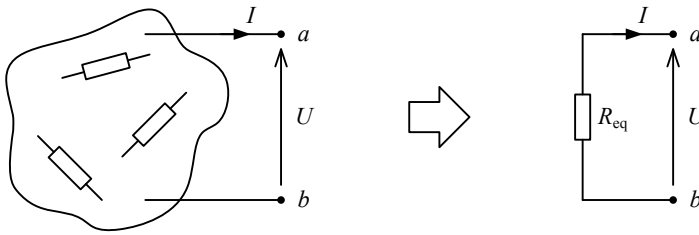
W odróżnieniu od kondensatorów, oporniki nie magazynują energii elektrycznej, tylko przekształcają ją w energię termiczną (zob. podrozdział 1.10), nagrzewając się i rozpraszając ciepło do swojego otoczenia.

### 1.5.1 Łączenie rezystorów

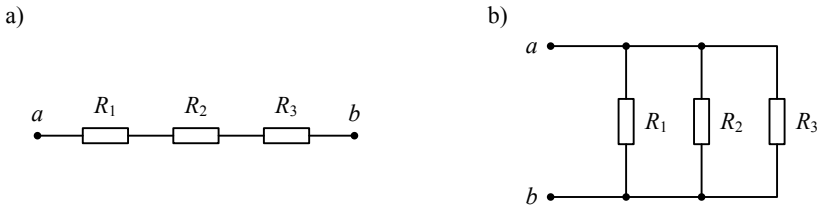
Rezystory mogą być łączone szeregowo, równolegle lub w sposób mieszany. Podobnie jak w przypadku kondensatorów, czasem przydatne jest rozpatrywanie rezystancji zastępczej, która jest równoważna określonej sieci oporników pod względem napięcia i natężenia prądu na zaciskach łączących tę sieć z pozostałą częścią obwodu. Tę abstrakcyjną wielkość objaśnia rys. 1.4.

Rysunek 1.5 pokazuje połączenie szeregowo i równoległe trzech oporników. Niżej podajemy wzory na odpowiednie rezystancje zastępcze. Dowody tych formuł zostały zamieszczone w rozdziale 2 jako podstawowe zastosowania praw Kirchhoffa.

<sup>6</sup> Georg Ohm (1787–1854) — fizyk niemiecki.



Rysunek 1.4: Rezystancja zastępcza połączenia rezystorów



Rysunek 1.5: Połączenie rezystorów: (a) szeregowe i (b) równoległe

Jeżeli  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  są połączone szeregowo, tak jak na rys. 1.5a, to równoważna rezystancja między  $a$  i  $b$  jest określona sumą:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (1.22)$$

więc przewyższa największy z połączonych oporów (zob. pytanie Q1.3).

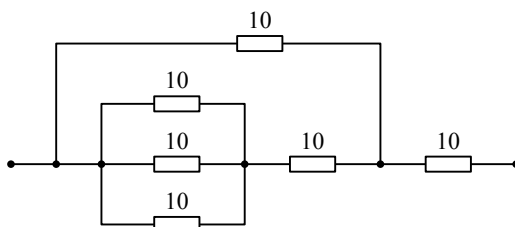
Jeżeli te same rezystory są połączone równoległe, tak jak na rys. 1.5b, to rezystancja zastępcza  $R_{\text{eq}}$  jest określona wyrażeniem:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{eq}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (1.23)$$

W równaniu (1.23) odwrotność  $R_{\text{eq}}$  jest sumą odwrotności łączonych rezystancji, więc  $R_{\text{eq}}$  ma wartość mniejszą od najmniejszej z rezystancji (zob. pytanie Q1.4 i problem P1.5). Więcej szczegółowych informacji na temat połączenia równoległego znajduje się w rozdziale 2, gdzie zależność (1.23) została przedstawiona w kategoriach konduktancji jako równoważny wzór (2.20).

**Przykład 1.3**

Obliczyć rezystancję zastępczą między zaciskami  $a$  i  $b$  układu z rys. 1.6.



Rysunek 1.6: Schemat do przykładu 1.3

**Rozwiązanie**

Trzy rezystory, które są połączone równolegle, na podstawie (1.23) zastępujemy jednym równoważnym opornikiem

$$R_1 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10} = \frac{10}{3} [\Omega]$$

Ustalając rezystancje zastępcze kolejnych połączeń szeregowych i równoległych, otrzymujemy

$$R_{ab} = 10 + \frac{10 \cdot (R_1 + 10)}{10 + (R_1 + 10)} = \frac{110}{7} [\Omega]$$

□

**1.6 Prawo Ohma**

Prawo Ohma mówi, że natężenie prądu  $I$ , który płynie przez rezystor, jest określone ilorazem

$$I = \frac{U}{R} \quad (1.24)$$

gdzie  $U$  oznacza napięcie występujące między zaciskami tego opornika, a  $R$  jest rezystancją elementu, przy czym jednostkami tych wielkości są odpowiednio amper [A], wolt [V] i om [ $\Omega$ ].

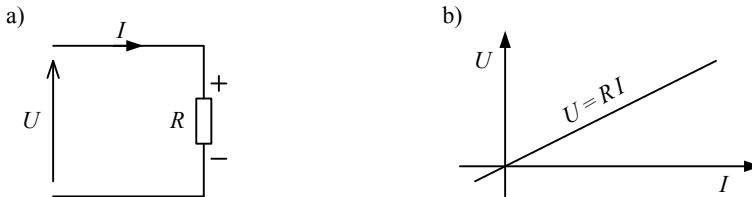
Równanie (1.24) przedstawia prąd jako efekt przyłożenia napięcia do zacisków rezystora, ale często przyjmuje się odmienny punkt widzenia. Można mianowicie powiedzieć, że prąd  $I$ , płynąc przez rezystor  $R$ , powoduje wystąpienie na nim różnicy potencjałów, inaczej spadku napięcia, określonego iloczynem

$$U = RI$$

Prawo Ohma zostało zilustrowane na rys. 1.7. Ogólnie rzecz biorąc, charakteryzuje ono rezystor jako element, w którym prąd i napięcie są powiązane liniową zależnością. Napięcie jest wprost proporcjonalne do prądu, przy czym rezystancja stanowi współczynnik proporcjonalności.

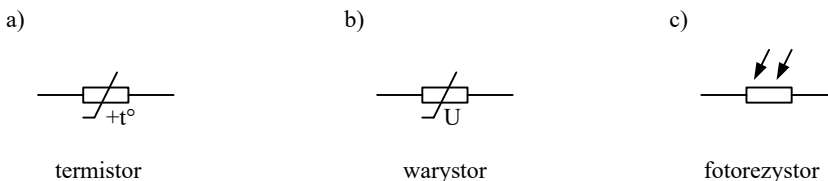
Rysunek 1.7 przedstawia metodę oznaczania napięć i prądów związanych z rezystorami, która jest stosowana w całej niniejszej książce oraz zbieżna z normami obowiązującymi w elektrotechnice i elektronice. Napięcie oznaczamy strzałką z grotem otwartym, skierowaną od potencjału niższego (–) do wyższego (+), zaś prąd — strzałką z grotem zamkniętym i zaczerntonym, skierowaną przeciwnie, czyli od potencjału wyższego do niższego.

W przypadku rezystora nie rozróżnia się zacisku dodatniego i ujemnego. Na rys. 1.7 znak plus wskazuje jedynie zacisk o wyższym potencjale, czyli zacisk do którego wpływa prąd.



Rysunek 1.7: Prawo Ohma

Należy zauważyć, że istnieją rezystory nieliniowe, których prawo Ohma nie dotyczy. Ich opór zależy od napięcia, temperatury lub intensywności oświetlenia, więc nie można takiego elementu scharakteryzować prostą proporcjonalnością między prądem a napięciem. Rezystory nieliniowe posiadają swoiste nazwy i są oznaczane symbolami, które pokazano na rys. 1.8.



Rysunek 1.8: Symbole rezystorów nieliniowych

Prawo Ohma można wyrazić w kategoriach gęstości prądu i natężenia pola elektrycznego:

$$J = \sigma E \quad (1.25)$$

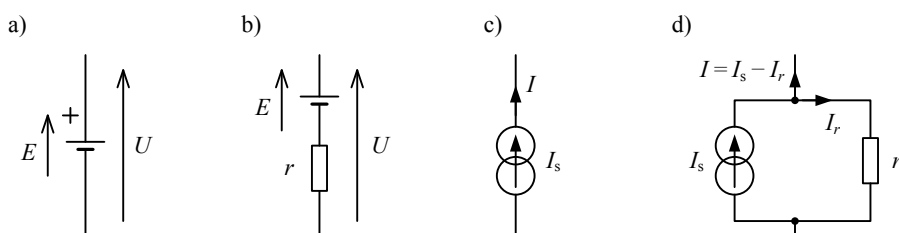
Zależność tę można wyprowadzić, podstawiając do (1.24)  $I$  oraz  $R$  określone odpowiednio równaniami (1.19) i (1.21). Wynikowy związek  $J = \sigma \frac{U}{l}$  odpowiada wzorowi (1.25), ponieważ  $E = \frac{U}{l}$ .

Prawo Ohma obowiązuje też w odniesieniu do pewnych wielkości magnetycznych. Obwody magnetyczne wykraczają jednak poza zakres niniejszej książki.

## 1.7 Źródła energii elektrycznej

Urządzenie, które dostarcza energię elektryczną do innych, jest nazywane źródłem, zaś urządzenie, które pobiera energię ze źródła jest określane mianem obciążenia (ang. *load*). Przykładami źródeł są baterie oraz prądnice (generatory) różnego rodzaju: agregaty prądotwórcze, alternatory samochodowe, dynamy rowerowe. Oczywiście źródła nie wytwarzają energii elektrycznej z niczego, a tylko przekształcają w prąd i napięcie inne rodzaje energii, najczęściej mechaniczną (prądnice) albo chemiczną (baterie). Rozróżnia się generatory prądu stałego i zmiennego, podczas gdy baterie mogą dostarczać tylko prąd stały.

Rysunek 1.9 pokazuje symbole i schematy zastępcze źródeł napięcia oraz prądu stałego. Symbole wykorzystywane do reprezentowania źródeł napięcia i prądu zmiennego zostały przedstawione w podrozdziale 4.3.1.



Rysunek 1.9: Źródło napięcia stałego: (a) idealne i (b) rzeczywiste oraz źródło prądu stałego: (c) idealne i (d) rzeczywiste

Źródła prądu są konstruowane w taki sposób, by wymuszały przepływ prądu o pewnym nominalnym natężeniu w gałęzi, w której zostaną włączone. Napięcie na zaciskach źródła prądu zależy od obciążenia. Źródła napięcia utrzymują między swoimi zaciskami nominalną różnicę potencjałów — mówi się, że wytwarzają siłę elektromotoryczną. Obciążenie decyduje o natężeniu prądu, który płynie przez źródło napięcia.

Oprócz nominalnego napięcia lub prądu, ważnym parametrem źródła jest rezystancja wewnętrzna, czyli pasożytniczy opór wynikający z konstrukcji urządzenia i przejmujący część energii, która powinna być dostarczana do obciążenia. W niektórych sytuacjach zaniedbuje się rezystancję wewnętrzną i przyjmuje źródło za idealne, które może być reprezentowane w układzie jednym symbolem. Jednak nierzadko trzeba rozpatrywać źródło rzeczywiste, czyli połączenie źródła idealnego z opornikiem, który reprezentuje rezystancję wewnętrzną.

Rysunek 1.9a pokazuje symbol, którym oznaczamy idealne źródło napięcia stałego. Nominalne napięcie  $E$  zawsze powinno być skierowane od zacisku ujemnego do dodatniego, niezależnie od przyjętego kierunku przepływu prądu. Nominalne napięcie występuje na zaciskach, którymi źródło jest podłączane do obciążenia, gdyż rezystancja wewnętrzna jest zerowa. Innymi słowy napięcie  $U$ , które można uzyskać ze źródła, jest równe nominalnemu.

Jeśli trzeba uwzględnić niezerową rezystancję wewnętrzną, to należy rozpatrywać rzeczywiste źródło napięcia stałego: szeregowe połączenie idealnego źródła napięcia  $E$  z opornikiem  $r$  symbolizującym rezystancję wewnętrzną. W takim układzie, który pokazano na rys. 1.9b, na zaciskach do podłączania obciążenia występuje napięcie  $U$ , które jest mniejsze od nominalnego o spadek napięcia na  $r$ . Zatem napięcie  $U$  zależy od natężenia prądu płynącego przez źródło, czyli od dołączonego obciążenia, w przeciwieństwie do  $E$ , które jest zawsze stałe.

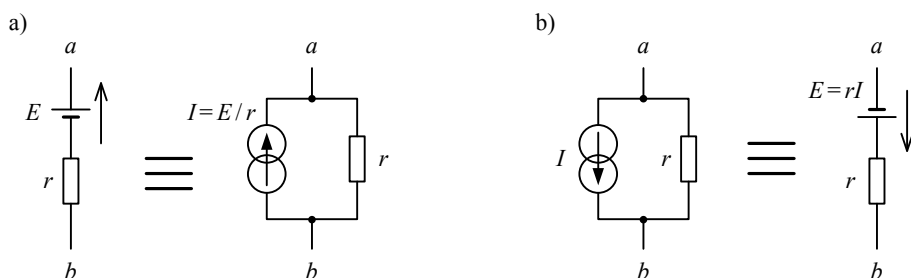
W podobny sposób można rozpatrywać źródła prądu. Symbol pokazany na rys. 1.9c służy do reprezentowania idealnych źródeł prądu stałego, które charakteryzują się nieskończoną rezystancją wewnętrzną. Natężenie  $I$  nie zależy od rezystancji przyłączonego obciążenia  $R_L$ . Źródło utrzymuje nominalne natężenie prądu, dopasowując do obciążenia napięcie między swoimi zaciskami.

Rzeczywiste źródło prądu należy przedstawiać tak jak na rys. 1.9d — równoległym połączeniem idealnego źródła prądu o nominalnym natężeniu  $I$  oraz opornika  $r$  reprezentującego rezystancję wewnętrzną. Jest ona skończona, więc płynie przez nią prąd, tak że natężenie prądu, który płynie w obciążeniu pod wpływem źródła, jest odpowiednio mniejsze od nominalnego.

### 1.7.1 Przekształcanie źródeł

Źródło napięcia z rys. 1.9b i źródło prądu z rys. 1.9d są równoważne, jeżeli obydwa charakteryzują się taką samą rezystancją wewnętrzną oraz  $I = E / r$ . Równoważność oznacza, że źródła jednakowo oddziałują na identyczne obciążenia włączone między zaciski  $a$  i  $b$ , powodując wystąpienie na nich takich samych napięć i prądów. Mówi się, że źródło napięcia  $E$  jest dualne do źródła prądu  $I$  i vice versa.

Czasami można ułatwić sobie analizowanie obwodu, przekształcając rzeczywiste źródło napięcia w źródło prądu lub odwrotnie, tak jak na rys. 1.10. Należy wtedy uważać na kierunki  $E$  i  $I$ , które powinny być zgodne.



Rysunek 1.10: Przekształcenia elementów aktywnych: (a) źródła napięcia w źródło prądu i (b) źródła prądu w źródło napięcia

## 1.8 Pole magnetyczne i indukcyjność

Wokół każdego przewodnika, przez który płynie prąd, i ogólnie wokół poruszających się ładunków lub naładowanych ciał oprócz pola elektrycznego występuje pole magnetyczne. Często jest ono tak słabe, że można zaniedbać jego oddziaływanie, ale są elementy i obwody, których działanie opiera się na wytwarzaniu pola magnetycznego lub reagowaniu na jego zmiany.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że oddziaływań magnetycznych nie ma w otoczeniu idealnych rezystorów, które tylko przekształcają energię elektryczną w termiczną, i idealnych kondensatorów, które tylko magazynują energię elektryczną. Pole magnetyczne interesuje nas głównie ze względu na jego kluczowe znaczenie dla działania trzeciego podstawowego elementu elektrycznego, czyli cewki, nazywanej też induktorem.

### 1.8.1 Indukcyjność

Cewka (induktor) powstaje w wyniku ukształtowania przewodnika w zwoje, które otaczają powietrze lub rdzeń z materiału magnetycznego, np. rdzeń ferromagnetyczny. Liczba zwojów oraz wymiary i rodzaj rdzenia określają podstawowy parametr elementu, czyli indukcyjność własną, która jest oznaczana symbolem  $L$  i mierzona w henrach<sup>7</sup> [H].

Jeżeli przez cewkę płynie prąd o zmieniającym się natężeniu,  $i_L(t)$ , to indukuje się w niej siła elektromotoryczna. Między zaciskami elementu występuje napięcie, którego wartość jest liniowo proporcjonalna do szybkości zmian prądu:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.26)$$

<sup>7</sup> Joseph Henry (1797-1878) — amerykański fizyk, odkrywca indukcyjności własnej i wzajemnej.



przy czym indukcyjność własna stanowi współczynnik proporcjonalności. Kierunek  $u_L(t)$  jest zawsze przeciwny do zwrotu  $di_L(t) / dt$ , zgodnie z regułą Lenza<sup>8</sup>.

Na działanie induktora mogą wpływać inne cewki znajdujące się w pobliżu. Siłę oddziaływania dwóch induktorów szacuje się z użyciem indukcyjności wzajemnej, która jest oznaczana symbolem  $M$  i czasami rozpatrywana jako odrębny element obwodu. Częściej rozpatrywana jest jednak tylko indukcyjność własna, dlatego ją będziemy mieli na myśli, mówiąc skrótowo „indukcyjność”.

Znany jest szereg twierdzeń i metod stosowanych do analizowania układów magnetycznych, ale ta tematyka wykracza poza zakres niniejszej książki. Przedstawiamy tylko kilka podstawowych faktów, które są niezbędne do zrozumienia działania obwodów elektrycznych.

Oddziaływanie dwóch cewek stanowi podstawę działania transformatora, któremu poświęcony został podrozdział 11.2.

Podobnie jak w przypadku rezystorów i kondensatorów, można rozpatrywać indukcyjność zastępczą układu cewek. Gdy cewki są połączone szeregowo, jest ona określona sumą poszczególnych indukcyjności:

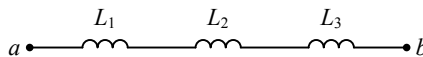
$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

natomiast gdy cewki są połączone równolegle:

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots$$

#### Przykład 1.4

Obliczyć zastępczą indukcyjność  $L_{\text{eq}}$ , która odpowiada pokazanemu na rys. 1.11 szeregowemu połączeniu cewek:  $L_1 = 600 \mu\text{H}$ ,  $L_2 = 0,3 \text{ mH}$  i  $L_3 = 0,08 \text{ mH}$ .



Rysunek 1.11: Szeregowo połączenie cewek: schemat do przykładu 1.4

#### Rozwiązanie

Indukcyjność zastępcza jest równa sumie indukcyjności poszczególnych cewek:

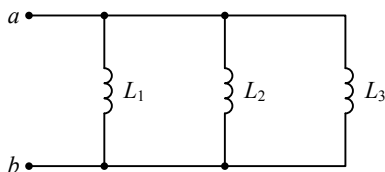
$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3 = 0,98 \text{ mH}$$

□

<sup>8</sup> Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865) — fizyk rosyjski; sformułował prawo w 1833 roku.

**Przykład 1.5**

Te same co w przykładzie 1.4 cewki połączone równolegle, tak jak na rys. 1.12. Obliczyć indukcyjność zastępczą,  $L_{eq}$ .



Rysunek 1.12: Równoległe połączenie cewek: schemat do przykładu 1.5

**Rozwiązanie**

Odwrotność równoważnej indukcyjności:

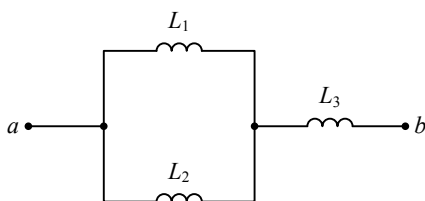
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{600 \mu\text{H}} + \frac{1}{0,3 \text{mH}} + \frac{1}{0,08 \text{mH}} = \frac{7000}{400} \left[ \frac{1}{\text{H}} \right]$$

czyli  $L_{eq} \approx 57 \mu\text{H}$ .

□

**Przykład 1.6**

Obliczyć równoważną indukcyjność mieszanego połączenia cewek z rys. 1.13. Ich indukcyjności są takie same jak w przykładzie 1.4.



Rysunek 1.13: Mieszane połączenie cewek: schemat do przykładu 1.6

**Rozwiązanie**

Wyrażenie  $\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$  określa równoważną indukcyjność połączenia równoległego  $L_1$  i  $L_2$ . Ponieważ jest ona połączona szeregowo z  $L_3$ ,

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} + L_3 = 0,2 + 0,08 = 0,28 \text{ [mH]}$$

□

## 1.8.2 Energia w cewkach

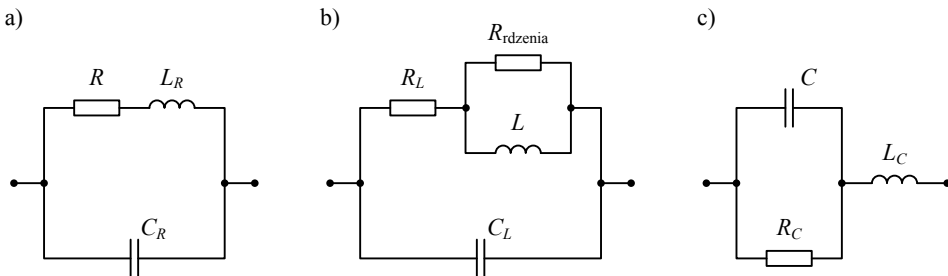
Wytwarzając pole magnetyczne, idealna cewka magazynuje dostarczoną do niej energię elektryczną w postaci energii magnetycznej. Chwilowa energia w cewce jest określona wzorem

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \quad (1.27)$$

co zostanie wykazane w podrozdziale 1.10.

## 1.9 Rzeczywiste elementy bierne

W niniejszej książce przyjmujemy, że symbole  $R$ ,  $L$  i  $C$  oznaczają elementy idealne. Jednak idealne kondensatory, cewki ani oporniki nie występują w praktyce: każdy rzeczywisty element wytwarza pole elektryczne i magnetyczne oraz rozprasza energię, wydzielając ciepło. Oznacza to, że rzeczywisty element można postrzegać jako połączenie pojemności, indukcyjności i rezystancji, przy czym jedna wielkość jest wiodąca i pożyteczna, a pozostałe mają znikome wartości i pasożytniczy charakter. Rysunek 1.14 pokazuje schematy zastępcze powszechnie stosowane do reprezentowania rzeczywistego rezystora, kondensatora i cewki.



Rysunek 1.14: Schematy elementów rzeczywistych: (a) rezystora, (b) cewki i (c) kondensatora

Na rysunku 1.14a  $R$  oznacza nominalną (idealną) rezystancję opornika. Indukcyjność  $L_R$  reprezentuje występowanie pola magnetycznego wokół elementu, przez który płynie prąd. Dotyczy to szczególnie rezystorów wytwarzanych metodą zwijania drutu. Pojemność  $C_R$  jest natomiast związana z występowaniem pola elektrycznego między kolejnymi zwojami przewodnika w rezystorach drutowych.

W układzie z rys. 1.14b  $L$  przedstawia idealną indukcyjność,  $R_L$  jest rezystancją drutu, z którego wykonano cewkę, a  $C_L$  odpowiada pojemności między zwojami przewodnika. Rezystancja rdzenia zależy od materiału, z którego został on wykonany. W cewkach z rdzeniem powietrznym  $R_{rdzenia} \rightarrow \infty$ .

W schemacie rzeczywistego kondensatora, który pokazano na rys. 1.14c,  $C$  stanowi pojemność nominalną, rezystancja  $R_C$  reprezentuje upływność, a  $L_C$  jest indukcyjnością zacisków. Upływność polega na tym, że między okładkami kondensatora przepływa mały prąd, wskutek czego ilość zgromadzonego ładunku zmniejsza się z biegiem czasu. Prąd może płynąć, ponieważ dielektryk, który rozdziela okładki, na ogół nie jest doskonałym izolatorem i ma skończoną rezystancję.

Większość produkowanych elementów można uznać za idealne tylko wtedy, gdy dopuszczalna jest mała dokładność analizy obwodu. Na ich działanie silnie wpływa temperatura oraz parametry pasożytnicze. Nawet wartość podstawowego parametru może znacząco różnić się od nominalnej, np. typowa tolerancja rezystancji wynosi 2...5%, a tolerancja pojemności — 10...20%.

Wytwarzane są także elementy precyzyjne, ale charakteryzują się tylko poprawioną dokładnością, a nie brakiem niedoskonałości, i są drogie.

## 1.10 Moc i energia elektryczna

Szybkość zmian energii elektrycznej (dostarczanej, rozpraszanej lub magazynowanej) jest nazywana mocą elektryczną

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (1.28)$$

Jeżeli jednostką  $W(t)$  jest dżul [J], to  $p(t)$  jest określana w watach<sup>9</sup> [W].

Energia elektryczna jest przekazywana ze źródła do odbiornika za pośrednictwem prądu i napięcia, które muszą być jednocześnie niezerowe. Jest to oczywiste, gdyż bateria, choć cały czas wytwarza napięcie o ustalonej wartości, nie oddaje energii, dopóki nie zostanie użyta w urządzeniu, tak że napięciu będzie towarzyszył prąd i razem utworzą one moc.

Moc elementu (źródła,  $R$ ,  $L$  lub  $C$ ) jest bowiem określona iloczynem jego napięcia i prądu:

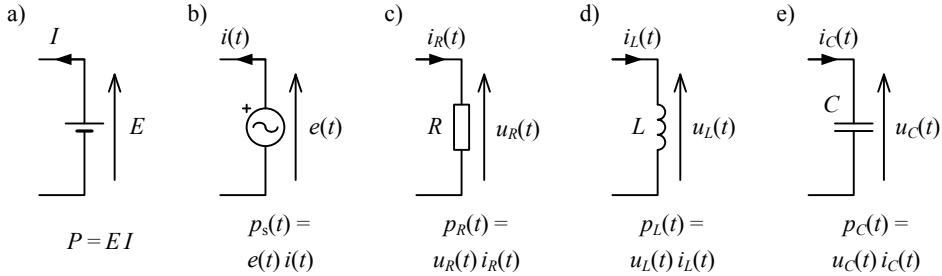
$$\underbrace{p(t) = u(t)i(t)}_{\text{moc [W]=napięcie [V]}\cdot\text{prąd [A]}} \quad (1.29)$$

co można udowodnić, wykorzystując zależność (1.4):

$$u(t) = \frac{dW(t)}{dq(t)} = \frac{dW(t)}{i(t)dt} \rightarrow u(t)i(t) = \frac{dW(t)}{dt} = p(t) \quad (1.30)$$

<sup>9</sup> James Watt (1736–1819) — brytyjski mechanik.

Relacja między kierunkiem prądu a kierunkiem napięcia odróżnia źródła, które oddają energię do obwodu, od elementów pasywnych, które ją pobierają albo przechowują. Rysunek 1.15 pokazuje właściwe skierowanie prądu względem napięcia dla podstawowych elementów. Poszczególne przypadki zostaną dokładnie rozpatrzone w kolejnych podrozdziałach.



Rysunek 1.15: Moc w elementach obwodu: dostarczanie ze źródła napięcia (a) stałego i (b) zmiennego, (c) zmiana w energię termiczną, składowanie w postaci pola (d) magnetycznego i (e) elektrycznego

Znając moc, można określić energię, którą element dostarcza lub pobiera w czasie  $t$ . Na podstawie całkowej formy równania (1.28):

$$W(t) = \int_0^t p(t) dt \tag{1.31}$$

można wyznaczyć

$$W_R = \int_0^t U_R I_R dt = R \int_0^t I_R^2 dt = I^2 R t \tag{1.32}$$

i

$$W_L(t) = \int_0^t U_L i_L(t) dt = \int_0^t L \frac{di_L(t)}{dt} i_L(t) dt = L \int_0^t i_L(t) di_L(t) = \frac{1}{2} L i_L(t)^2 \tag{1.33}$$

przy czym wyprowadzenia (1.33) dowodzą słuszności wzoru (1.27).

Energię zmagazynowaną w kondensatorze określa równanie (1.15), którego poprawność została już dowiedziona. Wiedząc, że  $i_C(t) = q(t) / t = C u_C(t) / t$ ,

wzór (1.15) można wyprowadzić z zależności (1.31) w nieco inny sposób:

$$\begin{aligned} W_C(t) &= \int_0^t u_C(t) i_C(t) dt = \int_0^t u_C(t) C \frac{du_C(t)}{dt} dt = C \int_0^t u_C(t) du_C(t) \\ &= \frac{1}{2} C u_C(t)^2 \end{aligned} \quad (1.34)$$

## 1.11 Obwód a jego elementy

### 1.11.1 Obwody i sieci

Obwód elektryczny jest takim połączeniem elementów elektrycznych, że formują one zamkniętą ścieżkę (lub ścieżki), którą może płynąć prąd elektryczny, gdy uaktywnione zostaną źródła energii. Mówi się, że obwód jest prosty, jeżeli można go łatwo zredukować do co najwyżej trzech elementów  $R$ ,  $L$  i  $C$ , połączonych szeregowo lub równoległe ze źródłem<sup>10</sup>. Obwód, który jest kombinacją elektrycznie lub magnetycznie skojarzonych dwóch lub więcej obwodów prostych, jest określany mianem obwodu złożonego lub sieci.

### 1.11.2 Elementy, przyrządy i komponenty

Podstawową jednostką obwodu elektrycznego jest element. Element może dostarczać energię do obwodu (tak jak źródła napięcia i prądu) lub ją z niego pobierać (tak jak rezystory  $R$ , kondensatory  $C$  i cewki  $L$ ). Istnieją pewne elementy (takie jak diody, tranzystory, wzmacniacze operacyjne i transformatory), które ze względu na bardziej skomplikowane działanie są często nazywane przyrządami. Zarówno elementy, jak i przyrządy są określane mianem komponentów.

Ponieważ przyrząd jest definiowany jako element, który pełni jedną lub więcej określonych funkcji, przyrządami można nazywać też źródła elektryczne. Na przykład źródło napięcia ma generować prąd i utrzymywać napięcie, podczas gdy jedną z funkcji tranzystora jest wzmacnianie. W niniejszej książce określenie „element” jest stosowane do źródeł,  $R$ ,  $L$  i  $C$ .

### 1.11.3 Klasyfikacja elementów

Elementy elektryczne i elektroniczne można klasyfikować na wiele sposobów. Niektóre kategorie obejmują zasadniczo elementy idealne, abstrakcyjne, tak że rzeczywiste można do nich zaliczyć tylko warunkowo, godząc się na przybliżone wyniki.

<sup>10</sup> Obwód, który zawiera inne elementy o dwóch zaciskach (np. diody półprzewodnikowe), można także uważać za prosty, jeżeli da się go zredukować do połączenia szeregowego lub równoległego.

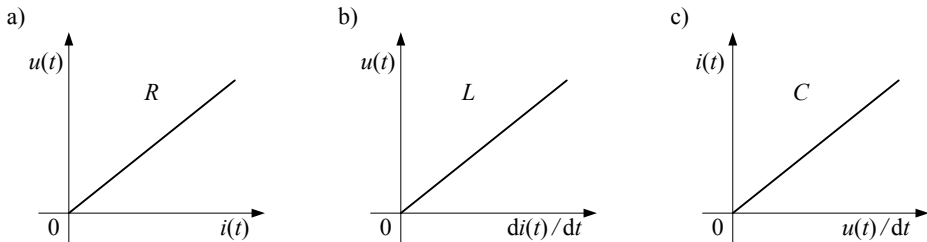
Takie uproszczone podejście stanowi podstawę teorii obwodów, ale jest też bardzo użyteczne w praktyce.

Element nazywamy pasywnym lub biernym, gdy rozprasza on energię elektryczną, która jest dostarczana do niego z pozostałej części obwodu, jak  $R$ , albo ją magazynuje, jak  $L$  i  $C$ .

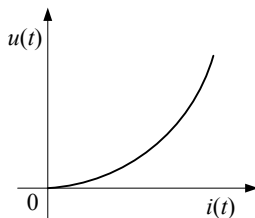
Elementy aktywne dostarczają energię do obwodu (źródła prądu i napięcia) lub zwiększają moc sygnału (np. tranzystory). Aktywny element można rozpoznać po tym, że jego schemat zastępczy zawiera źródła napięcia i/lub prądu.

Sposób działania elementu liniowego nie zależy od natężenia prądu płynącego przezeń ani od napięcia na jego zaciskach. Związek między prądem i napięciem (w przypadku  $R$ ) lub między jedną z tych wielkości a szybkością zmian drugiej (w przypadku  $L$  i  $C$ ) jest proporcjonalnością prostą, co zilustrowano na rys. 1.16. Przykładami elementów liniowych są idealne  $R$ ,  $L$  i  $C$ .

Element nieliniowy charakteryzuje się tym, że jego oddziaływanie na obwód zależy od napięcia na nim lub od natężenia płynącego przezeń prądu. W przypadku takiego elementu związku między napięciem a prądem nie można opisać linią prostą (rys. 1.17). Przykładami elementów nieliniowych są m.in.: rezystor drutowy, żarówka elektryczna, cewka z rdzeniem ferromagnetycznym oraz kondensator z ferrodielektrykiem.



Rysunek 1.16: Zależności między wielkościami elektrycznymi w elementach liniowych



Rysunek 1.17: Przykład związku między prądem a napięciem w elemencie nieliniowym

W niniejszej książce zakładamy, że elementy *RLC* mają parametry skupione. Oznacza to, że elektryczne parametry elementu są skoncentrowane w jednym punkcie geometrycznym, niezależnie od jego rzeczywistych wymiarów. Założenie o skupieniu parametrów jest słuszne wtedy, gdy wymiary elementu są pomijalnie małe w zestawieniu z długością fali elektromagnetycznej związanej z jego działaniem, w związku z czym zmiany wielkości elektrycznych następują błyskawicznie w całym obwodzie. W przeciwnym razie mówi się, że element ma parametry rozłożone i konieczne jest użycie specjalnych metod analizy, przede wszystkim teorii linii długich [3], które uwzględniają zjawiska falowe i uzależniają prądy oraz napięcia nie tylko od czasu, ale i od położenia.

Długość fali jest określona ilorazem szybkości jej rozchodzenia się i częstotliwości. Prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej jest na ogół zbliżona do prędkości światła,  $3 \cdot 10^8$  m/s, więc problemy z rozproszeniem parametrów występują w dwóch przypadkach. Po pierwsze wtedy, gdy element nie jest fizycznie duży, ale ma przetwarzać sygnały o wielkich częstotliwościach, rzędu GHz, które są stosowane w telewizji, radarach i łączności satelitarnej. Po drugie wtedy, gdy częstotliwości są umiarkowane, ale urządzenie jest relatywnie duże, tak jak w przypadku anten, linii elektroenergetycznych i łącz teletransmisyjnych. Analiza takich problemów wykracza poza zakres niniejszej książki.

Elementy o stałych, niezmiennych względem czasu parametrach (np. *R*, *L* i *C*) są nazywane niezmiennymi w czasie. W przeciwnym razie określa się je mianem elementów zmiennych w czasie.

Element bilateralny (np. *R*, *L* i *C*) dopuszcza przepływ energii w obydwu kierunkach. W elemencie unilateralnym (np. w tranzystorze i diodzie półprzewodnikowej) energia może przepływać tylko w jednym kierunku.

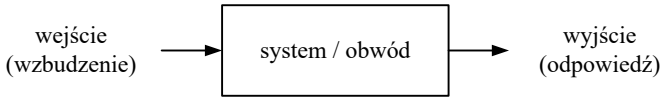
Elementy z dwoma zaciskami noszą nazwę jednoportowych. Należą do nich: *R*, *L*, *C* oraz diody. Elementy o czterech zaciskach (lub trzech, jeżeli jeden z zacisków można traktować jako dwa zwarte) są nazywane elementami dwuportowymi. Przykładami elementów dwuportowych są: transformatory, żyratory (przyrządy cztero-końcówkowe) i tranzystory (przyrządy trzykońcówkowe). Elementy, które posiadają więcej niż dwa zaciski, są ogólnie określane mianem wieloportowych. Na przykład przyrządem trzyportowym jest wzmacniacz operacyjny (zob.: problem P5.14, a szczególnie rozdział 10, gdzie omówiono jego właściwości oraz przedstawiono niektóre zastosowania). W niniejszej książce rozważania są jednak generalnie ograniczone do elementów jednoportowych i niektórych przyrządów dwuportowych.

#### 1.11.4 Systemy

Pod pojęciem systemu będziemy rozumieli obwód elektryczny o pewnym określonym przeznaczeniu. System posiada wejście, na które podawane jest wzbudzenie, oraz wyjście, gdzie pojawia się jego odpowiedź, tak jak zilustrowano na rys. 1.18. W obwodach elektrycznych wzbudzenie stanowią prądy i napięcia źródłowe, nato-



miast dowolne z pozostałych napięć i prądów można traktować jako odpowiedź. Dla uproszczenia, w następującej dalej dyskusji i klasyfikacji obwodów, układ, system i sieć będą utożsamiane.



Rysunek 1.18: Reprezentacja systemu

## 1.12 Topologia i geometria obwodu

W teorii obwodów elektrycznych topologia układu charakteryzuje sposób połączenia jego elementów pod względem relacji geometrycznych. Rozpatrzenie topologii obwodu jest niezbędne do zrozumienia jego działania, więc stanowi podstawowy etap wszystkich metod analizy, co zostanie zademonstrowane w podrozdziale 2.3. Topologię obwodu charakteryzują węzły, gałęzie i oczka.

Węzeł jest punktem dołączenia elementu do obwodu. Węzeł jest nazywany głównym, gdy stykają się w nim zaciski trzech lub więcej elementów. Liczba węzłów głównych jest podstawową miarą złożoności obwodu.

Gałąź jest szeregowym połączeniem elementów, między którymi nie ma węzłów głównych. Przez każdy element gałęzi płynie ten sam prąd. Gałąź może obejmować tylko jeden element. Ponieważ gałęzie tworzą elementy ograniczone dwoma węzłami, można ją traktować jako złożony element o dwóch zaciskach.

Oczko stanowi jakąkolwiek ścieżkę prowadzącą po węzłach obwodu, która zaczyna się i kończy w tym samym węźle. Oczko może obejmować elementy i gałęzie, które są połączone tak, że tworzą obwód zamknięty. Przechodząc od węzła do węzła, można też jednak przyjąć, że nie ma między nimi połączenia, czyli że jest przerwa. W takim przypadku oczko określa obwód otwarty, a przerwę można utożsamiać z opornikiem o nieskończonej wielkiej rezystancji.

Rysunek 1.19 umożliwia objaśnienie pojęć na przykładzie. Na schemacie zaznaczono cztery węzły:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$ , z których  $b$  i  $d$  są węzłami głównymi. Rozpatrując początkowy i końcowy węzeł, można bezpośrednio wskazać pięć gałęzi:  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ ,  $bd$  i  $da$ , ale gałęziami są też połączenia  $da-ab$  oraz  $bc-cd$ . Można wskazać trzy oczka, które określają obwody zamknięte:  $dab$ ,  $bcd$  oraz  $abcd$ . Oczka  $dab$  i  $abc$  odpowiadają natomiast obwodom, które obejmują przerwę między  $a$  i  $c$ .

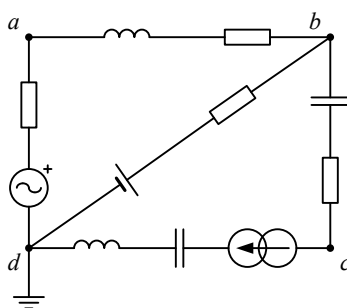
Często w obwodach wyróżniana jest tzw. masa (ang. *ground*: GND), czyli węzeł, który stanowi punkt odniesienia do określania potencjałów pozostałych węzłów, szczególnie punktów doprowadzenia zasilania i sygnałów wejściowych oraz punk-

tów wyprowadzenia sygnałów wyjściowych. Zwykle masie przypisywany jest potencjał 0V i jest ona utożsamiana z punktem uziemienia układu, czyli miejscem jego połączenia z gruntem, który charakteryzuje się zerowym potencjałem.

W urządzeniach o metalowej obudowie stanowi ona masę i jest fizycznie łączona z gruntem, aby zapobiec porażeniu użytkownika w razie przedostania się na nią wysokiego napięcia. Za przykład może służyć pralka, która jest wyposażona we wtyczkę dopasowaną do gniazd elektrycznych z bolcem uziemiającym — takich jakie są instalowane w łazienkach.

Na rys. 1.19 uziemiony jest węzeł  $d$ , co wskazano, łącząc go ze specjalnym symbolem. Jeżeli na schemacie jest wiele symboli masy, to należy rozumieć, że wszystkie one dotyczą jednego węzła. Połączenia między nimi nie zostały narysowane, by schemat był przejrzysty.

Jeżeli węzły są bezpośrednio połączone, to mówimy, że są zwarte lub że jest zwarcie między nimi. Charakteryzuje je ten sam potencjał i można utożsamiać je z jednym węzłem. Bezpośrednie połączenie można natomiast utożsamiać z opornikiem o zerowej rezystancji.



Rysunek 1.19: Schemat ilustrujący pojęcia dotyczące topologii obwodów

## 1.13 Klasyfikacja obwodów i systemów

Obwody, sieci i systemy można klasyfikować na różne sposoby. Do podstawowych kryteriów kategoryzowania obwodów można zaliczyć: naturę komponentów, charakter związku między wejściem a wyjściem, kierunek przepływu energii, typ sygnałów wejściowych (źródła napięcia i prądu), właściwości odpowiedzi, sposób przenoszenia sygnałów, liczbę portów oraz właściwości topologiczne układu.

### 1.13.1 Obwody pasywne a aktywne

W sieci aktywnej występuje przynajmniej jeden element aktywny. Sieci zbudowane wyłącznie z elementów pasywnych nazywamy pasywnymi. Obwód statyczny, nazywany też stratnym lub rezystancyjnym, tworzą tylko oporniki. Jeżeli obwód zawiera przynajmniej jeden element  $L$  lub  $C$ , który magazynuje energię, to jest on nazywany dynamicznym, niezależnie od obecności  $R$ . Obwód dynamiczny jest bezstratny, gdy nie zawiera rezystancji  $R$ .

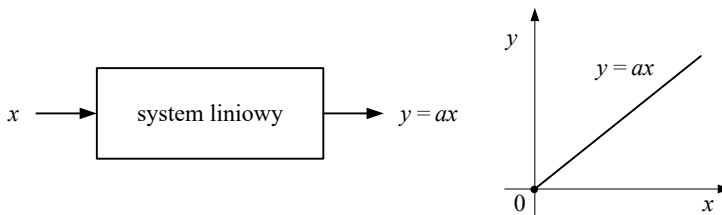
### 1.13.2 Systemy liniowe a nieliniowe: twierdzenie o liniowości

Jeżeli wszystkie elementy systemu są liniowe, to określa się go mianem liniowego. Jeden nieliniowy element wystarcza, by cały układ był nieliniowy, ale znane są szczególne przypadki systemów [6, s. 7], które są liniowe, choć zawierają nieliniowe elementy. Dlatego występowanie elementu nieliniowego stanowi tylko przesłankę, ale nie wystarcza do stwierdzenia, że obwód jest nieliniowy.

Do weryfikowania liniowości systemów służy twierdzenie, które mówi, że obwód jest liniowy, niezależnie od jego struktury, jeżeli związek pomiędzy jego wejściem a wyjściem jest liniowy i zerowemu wejściu odpowiada zerowe wyjście.

Liniowy związek między wejściem a wyjściem układu został zilustrowany na rys. 1.20. Podanie wartości  $x$  na wejście systemu liniowego skutkuje pojawieniem się na wyjściu wartości  $y = ax$ , gdzie  $a$  jest stałą. Zatem  $x = 0$  determinuje  $y = 0$ . Ponadto, jeżeli  $y = ax_1 = y_1$  dla  $x = x_1$ , zaś  $y = ax_2 = y_2$  dla  $x = x_2$ , to  $y = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = y_1 + y_2$  dla  $x = x_1 + x_2$ .

Ostatnia reguła jest nazywana zasadą superpozycji i ma bardzo duże znaczenie w analizie obwodów elektrycznych. Została ona dokładniej omówiona w podrozdziałach 3.1 i 5.11.



Rysunek 1.20: Charakterystyka przejściowa systemu liniowego

### 1.13.3 Sieci o parametrach skupionych a rozłożonych

Obwody złożone z elementów o parametrach skupionych są nazywane sieciami o parametrach skupionych, a obwody złożone z elementów o parametrach rozłożo-

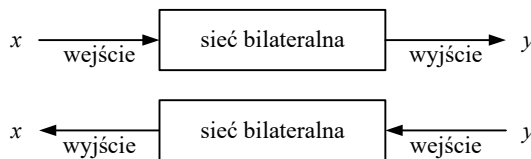
nych — sieciami o parametrach rozłożonych. Jak już zasygnalizowano w podrozdziale 1.11, definiując obydwie kategorie elementów, dalej będziemy zajmować się tylko obwodami o parametrach skupionych, które są częściej spotykane w praktyce i łatwiejsze w analizie.

### 1.13.4 Systemy zmienne a niezmiennie w czasie

Jeśli działanie obwodu nie ulega zmianom w czasie, czyli związek pomiędzy wejściem i wyjściem systemu ciągle jest taki sam, to system nazywa się niezmiennym w czasie. W tego rodzaju systemach opóźnienie sygnału wejściowego powoduje takie samo opóźnienie odpowiedzi: jeżeli  $x(t) \Rightarrow y(t)$ , to  $x(t - \Delta t) \Rightarrow y(t - \Delta t)$ , gdzie  $\Delta t$  oznacza opóźnienie. Jeśli powyższy warunek nie jest spełniony, to mamy do czynienia z systemem zmiennym w czasie.

### 1.13.5 Sieci bilateralne a unilateralne

Obwód zawierający tylko elementy bilateralne jest nazywany bilateralnym, gdyż energia może przez niego przepływać w różnych kierunkach, co zilustrowano na rys. 1.21. Jeżeli obwód zawiera co najmniej jeden element unilateralny, to możliwy jest tylko jeden kierunek przepływu energii, zatem całą sieć należy uważać za unilateralną.



Rysunek 1.21: Sieć bilateralna

### 1.13.6 Układy ciągłe a dyskretne

Jeżeli odpowiedź układu na wzbudzenie ciągłe w czasie jest również ciągłą funkcją czasu, to układ jest nazywany ciągłym. Odpowiedź układu dyskretnego jest natomiast określona tylko dla niektórych punktów z osi czasu, więc ma postać sekwencji liczb, nazywanych próbkami.

Chociaż w niniejszej książce zajmujemy się tylko systemami z pierwszej kategorii, należy wspomnieć, że układy dyskretne mają wiele praktycznych zastosowań. Między innymi systemy dyskretne stanowią podstawę cyfrowego przetwarzania sygnałów [20] — bardzo ciekawej dziedziny, która obejmuje między innymi obróbkę dźwięku i obrazu z użyciem komputera.

### 1.13.7 Systemy przyczynowe a nieprzyczynowe

W systemie przyczynowym nie ma odpowiedzi, jest ona zerowa, dopóki nie zostanie dostarczone pobudzenie: jeżeli sygnał wejściowy  $x(t)$  był zerowy do pewnej chwili  $t = t_1$ , to również sygnał wyjściowy  $y(t) = 0$  dla  $t < t_1$ . Jeśli jednak  $y(t) \neq 0$  dla pewnych  $t < t_1$ , to system nazywamy nieprzyczynowym.

Systemy nieprzyczynowe są przydatne w rozważaniach teoretycznych. Nie można ich jednak realizować w praktyce, gdyż w rzeczywistym świecie zawsze przyczyna poprzedza skutek.

### 1.13.8 Obwody odwracalne a nieodwracalne

Odwracalne są wszystkie obwody  $RLC$  z jednym źródłem. W obwodach odwracalnych zamiana wejścia z wyjściem nie wpływa na uzyskiwaną odpowiedź, czyli takie obwody spełniają twierdzenie o wzajemności, które zostało przedstawione w podrozdziale 3.6. Jeżeli traktując wyjście jako wejście, uzyskujemy zmienioną odpowiedź, to obwód jest nieodwracalny.

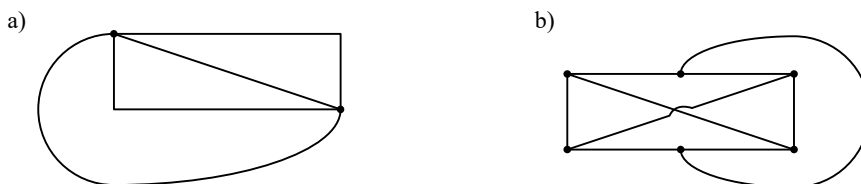
### 1.13.9 Sieci jednoportowe a wieloportowe

Sieć jednoportowa posiada tylko dwa zaciski, które stanowią wejście lub wyjście. Sieci wieloportowe mają wiele zacisków, z których część może pełnić funkcję wejść, a część — wyjść, czyli takie sieci posiadają więcej niż jedno wejście i/lub więcej niż jedno wyjście. W sieci dwuportowej są cztery zaciski, z których dwa tworzą wejście a dwa — wyjście.

Przykładami sieci dwuportowych są filtry i układy sprzęgające do transformowania energii lub konwertowania sygnałów i przesyłania informacji między obwodami skojarzonymi.

### 1.13.10 Obwody planarne a nieplanarne

Obwody o układzie dwuwymiarowym są nazywane planarnymi. Jeżeli zaś obwodu nie można odwzorować na płaszczyźnie w taki sposób, żeby uniknąć przecinania się gałęzi, to określa się go mianem nieplanarnego. Różnicę w wymiarowości obwodów ilustruje rys. 1.22.



Rysunek 1.22: Przykładowa topologia układu (a) planarnego i (b) nieplanarnego

### 1.13.11 Właściwości obwodów *RLC*

Powyższe klasyfikacje można podsumować stwierdzeniem, że wszystkie układy złożone tylko z elementów  $R$ ,  $L$  i  $C$  są pasywne, liniowe, odwracalne, niezmiennie w czasie, skupione i bilateralne. Dla uproszczenia są one zwykle określane mianem systemów liniowych. Tego typu sieci oraz obwody aktywne, które powstają z dołączenia źródeł prądu i napięcia do elementów pasywnych, stanowią zasadniczy przedmiot naszych rozważań w dalszej części książki.

## 1.14 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 1.14.1 Pytania

#### Pytanie Q1.1

Wykazać, że połączenie szeregowe dwóch kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$  odpowiada pojemności zastępczej, która jest określona następującym wzorem:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

#### Pytanie Q1.2

Wykazać, że połączenie równoległe dwóch oporników  $R_1$  i  $R_2$  odpowiada rezystancji zastępczej, która jest określona następującym wzorem:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

**Pytanie Q1.3**

Wykazać, najpierw opierając się na intuicji, a potem za pomocą obliczeń, że  $100\text{ M}\Omega$  jest bardzo dobrą aproksymacją rezystancji zastępczej połączenia szeregowego dwóch rezystorów o wartościach  $100\text{ M}\Omega$  i  $10\Omega$ . Sformułować ogólną regułę.

---

**Pytanie Q1.4**

Rozpatrzyć połączenie równoległe rezystorów z pytania Q1.3 i wykazać, że odpowiednia rezystancja zastępcza wynosi  $10\Omega$ .

---

**Pytanie Q1.5**

Wykazać, że zmniejszenie o połowę mocy wydzielanej w elemencie (np. rezystorze) odpowiada zmniejszeniu natężenia prądu do około 70% wartości początkowej.

---

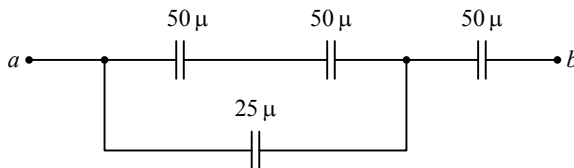
**Pytanie Q1.6**

Wyjaśnić, dlaczego idealne elementy  $L$  i  $C$  są uznawane za liniowe, chociaż prawo Ohma nie opisuje związku między napięciem a prądem w żadnym z tych elementów.

---

**1.14.2 Problemy rozwiązane****Problem P1.1**

Obliczyć pojemność zastępczą połączenia kondensatorów z rys. 1.23.



Rysunek 1.23: Schemat do problemu P1.1

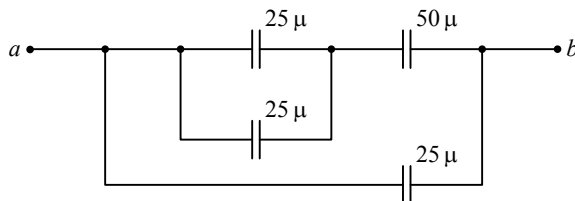
**Rozwiązanie**

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right) + 25} + \frac{1}{50}} = 25\ [\mu\text{F}]$$

---

**Problem P1.2**

Określić pojemność zastępczą połączenia kondensatorów z rys. 1.24.



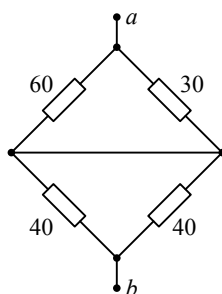
Rysunek 1.24: Schemat do problemu P1.2

**Rozwiązanie**

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{25+25} + \frac{1}{50}} + 25 = 50 [\mu\text{F}]$$

**Problem P1.3**

Obliczyć rezystancję zastępczą połączenia mostkowego z rys. 1.25



Rysunek 1.25: Schemat do problemu P1.3

**Rozwiązanie**

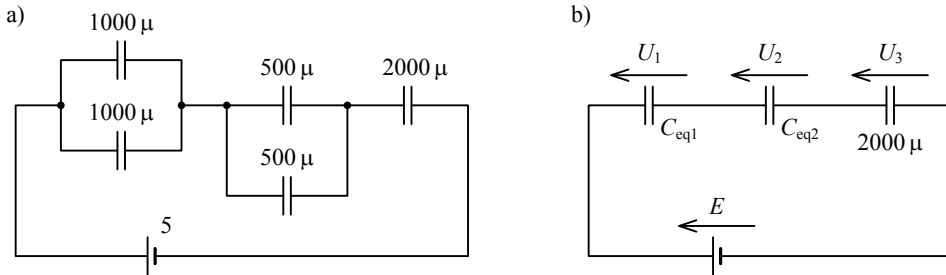
Nie trzeba zamieniać trójkąta w gwiazdę ani gwiazdy w trójkąt. Powyżej i poniżej poziomej gałęzi oporniki są połączone równolegle, więc

$$R_{ab} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} + \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} = 40 [\Omega]$$



**Problem P1.4**

W obwodzie z rys. 1.26a określić ładunki zgromadzone w kondensatorach oraz napięcia na elementach.



Rysunek 1.26: Schematy do problemu P1.4

**Rozwiązanie**

Obwód można zastąpić równoważnym układem z rys. 1.26b, gdzie

$$C_{eq1} = 1000 + 1000 = 2000 [\mu\text{F}] \quad C_{eq2} = 500 + 500 = 1000 [\mu\text{F}]$$

Ponieważ kondensatory są połączone szeregowo, pojemność zastępcza wynosi:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_{eq1}} + \frac{1}{C_{eq2}} + \frac{1}{2000}} = \frac{1}{\frac{1}{2000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}} = 500 [\mu\text{F}]$$

a ładunek

$$Q = C_{eq}U = 500 \cdot 5 = 2500 [\text{C}]$$

jest zgromadzony w każdym z elementów.

Nie wszystkie napięcia na kondensatorach są jednak równe:

$$U_1 = \frac{Q_{eq}}{C_{eq1}} = \frac{2500}{2000} = 1,25 [\text{V}]$$

$$U_2 = \frac{Q_{eq}}{C_{eq2}} = \frac{2500}{1000} = 2,5 [\text{V}]$$

$$U_3 = \frac{Q_{eq}}{C_{eq3}} = \frac{2500}{2000} = 1,25 [\text{V}]$$

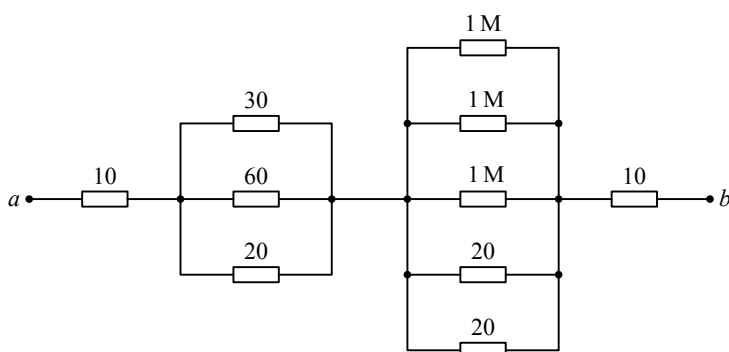
Znając te wartości, można obliczyć ładunki na kondensatorach, które są połączone równoległe w obwodzie oryginalnym:

$$Q_{1k} = 1000 \cdot U_1 = 1000 \cdot 1,25 = 1250 [\mu\text{C}]$$

$$Q_{500} = 500 \cdot U_2 = 500 \cdot 2,5 = 1,25 [\text{mC}]$$

### Problem P1.5

Określić rezystancję zastępczą obwodu z rys. 1.27.



Rysunek 1.27: Schemat do problemu P1.5

### Rozwiązanie

Rezystancje  $20\Omega$ ,  $30\Omega$  i  $60\Omega$  są połączone równoległe, a więc odpowiednią rezystancję zastępczą można obliczyć na podstawie równania (1.23):

$$\frac{1}{R_{p1}} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10} [\text{S}]$$

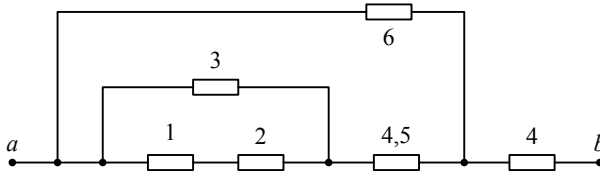
czyli  $R_{p1} = 10\Omega$ . W ten sam sposób należy postąpić z drugim połączeniem równoległym, przy czym można wykorzystać wnioski z pytania Q1.4:

$$\frac{1}{R_{p2}} = \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \approx \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} [\text{S}]$$

czyli  $R_{p2} = 10\Omega$ . Rozpatrywany układ jest więc równoważny szeregowemu połączeniu czterech oporników  $10\Omega$ , któremu odpowiada zastępcza rezystancja  $R_{ab} = 40\Omega$ .

**Problem P1.6**

Wyznaczyć rezystancję zastępczą sieci oporników pokazanej na rys. 1.28.



Rysunek 1.28: Schemat do problemu P1.6

**Rozwiązanie**

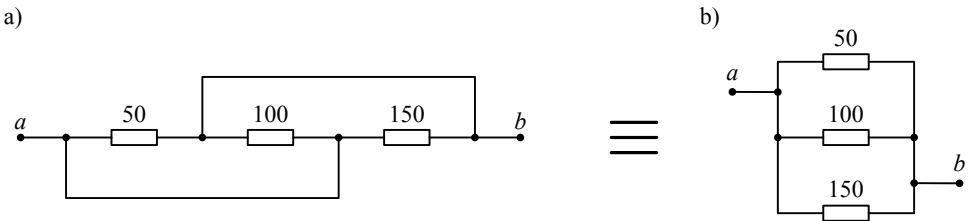
$$R_{ab} = \frac{R_1 \cdot 6}{R_1 + 6} + 4 = \frac{6 \cdot 6}{6 + 6} + 4 = 7 [\Omega]$$

gdzie

$$R_1 = \frac{3 \cdot (1 + 2)}{3 + (1 + 2)} + 4,5 = 6 [\Omega]$$

**Problem P1.7**

Uprościć połączenie oporników z rys. 1.29a i określić rezystancję zastępczą.



Rysunek 1.29: Schematy do problemu P1.7

**Rozwiązanie**

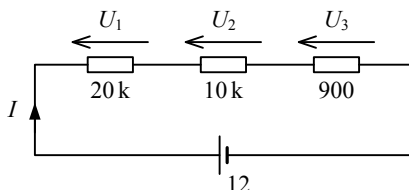
Układ można przerysować w postaci z rys. 1.29a, czyli mamy tu do czynienia z połączeniem równoległym trzech rezystorów. Zatem

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{100} + \frac{1}{150} [S]$$

czyli  $R_{ab} = 27 \Omega$ .

**Problem P1.8**

Obliczyć napięcia na rezystorach oraz prąd w obwodzie szeregowym z rys. 1.30.



Rysunek 1.30: Schemat do problemu P1.8

**Rozwiązanie**

Po ustaleniu natężenia

$$I = \frac{12}{20000 + 10000 + 900} = 0,39 \text{ [mA]}$$

możemy obliczyć poszczególne spadki napięcia:

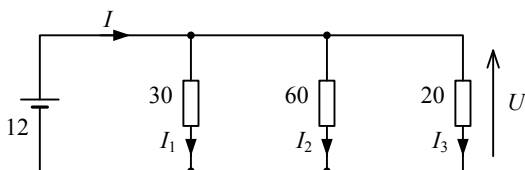
$$U_1 = 20000 \cdot I = 20000 \cdot 0,00039 = 7,8 \text{ [V]}$$

$$U_2 = 10000 \cdot I = 10000 \cdot 0,00039 = 3,9 \text{ [V]}$$

$$U_3 = 900 \cdot I = 900 \cdot 0,00039 = 0,3 \text{ [V]}$$

**Problem P1.9**

Obliczyć natężenia prądów płynących w gałęziach połączenia równoległego z rys. 1.31.



Rysunek 1.31: Schemat do problemu P1.9

**Rozwiązanie**

Na każdym rezystorze jest taki sam spadek napięcia  $U$ , równy napięciu źródłowemu. Zatem prądy, które płyną przez oporniki, możemy łatwo obliczyć na podstawie

prawa Ohma:

$$I_1 = \frac{U}{30} = \frac{12}{30} = 0,4 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{U}{60} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ [A]}$$

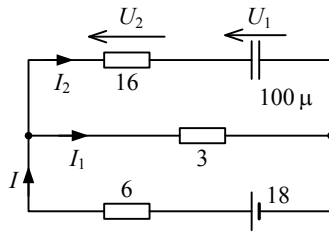
$$I_3 = \frac{U}{20} = \frac{12}{20} = 0,6 \text{ [A]}$$

a prąd źródła — na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,4 + 0,2 + 0,6 = 1,2 \text{ [A]}$$

### Problem P1.10

Określić prądy i napięcia, które zaznaczono w obwodzie na rys. 1.32.



Rysunek 1.32: Schemat do problemu P1.10

### Rozwiązanie

Jest to obwód prądu stałego, zatem kondensator uniemożliwia przepływ prądu w gałęzi, w której go umieszczono:

$$I_2 = 0 \text{ A}$$

Wobec tego

$$I = I_1 = \frac{18}{6 + 3} = 2 \text{ [A]}$$

$$U_2 = 16 \cdot I_2 = 16 \cdot 0 = 0 \text{ [V]}$$

zaś

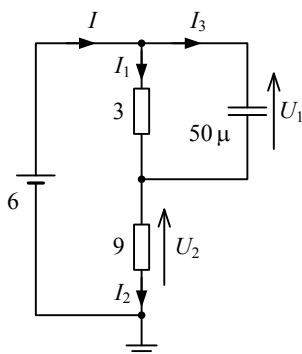
$$U_1 = 3 \cdot I_1 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ [V]}$$

gdyż

$$U_1 + U_2 = 3 \cdot I_1$$

**Problem P1.11**

Obliczyć napięcia i prądy zaznaczone w obwodzie z rys. 1.33.



Rysunek 1.33: Schemat do problemu P1.11

**Rozwiązanie**

Ponieważ obwód jest zasilany źródłem napięcia stałego, więc prąd nie płynie przez kondensator:

$$I_3 = 0 \text{ A}$$

Rozpatrując bilanse prądów w węzłach, do których jest dołączony kondensator, stwierdzamy, że

$$I = I_1 = I_2 = \frac{6}{3+9} = 0,5 \text{ [A]}$$

Znając natężenia prądów, możemy obliczyć spadki napięć:

$$U_1 = 3I_1 = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ [V]}$$

$$U_2 = 6 - U_1 = 6 - 1,5 = 4,5 \text{ [V]}$$

lub

$$U_2 = 9I_2 = 9 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ [V]}$$

**Problem P1.12**

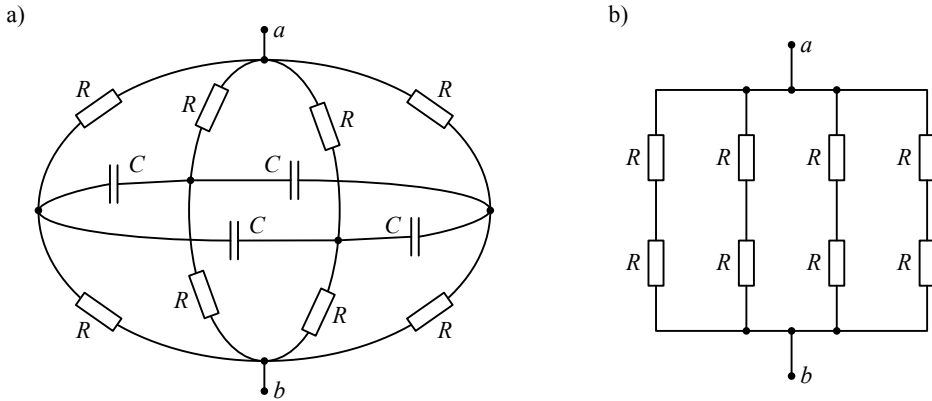
Określić rezystancję zastępczą między węzłami *a* i *b* w obwodzie z rys. 1.34a.

**Wskazówka**

Należy założyć, że od *a* do *b* płynie prąd stały o pewnym natężeniu. Ponieważ kondensatory nie pozwalają na przepływ prądu stałego, można je usunąć i rozpatrywać uproszczoną sieć z rys. 1.34b, która składa się z samych oporników. Równolegle połączone są cztery jednakowe gałęzie, z których każda stanowi szeregowe połączenie

dwóch jednakowych rezystorów, zatem sieć jest równoważna rezystancji zastępczej

$$R_{ab} = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2}$$

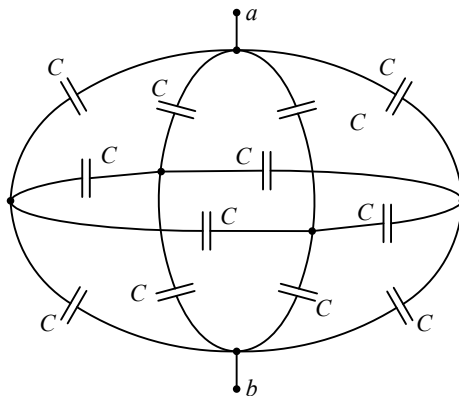


Rysunek 1.34: Schematy do problemu P1.12

### 1.14.3 Quiz

#### Quiz 1.1

Obliczyć pojemność zastępczą między zaciskami  $a$  i  $b$  układu z rys. 1.35.



Rysunek 1.35: Schemat do quizu 1.1

#### Wskazówka

Należy wzorować się na rozwiązaniu problemu P1.12.  $C_{eq} = 4 \frac{C}{2} = 2C$ .

## Rozdział 2

# Obwody prądu stałego: prawa i metody analizy

### Wprowadzenie

Do analizowania obwodów elektrycznych niezbędna jest znajomość kilku podstawowych praw, na których opiera się ich funkcjonowanie, oraz metod obliczania odpowiedzi systemu na zadane wzbudzenie. Oprócz prawa Ohma, omówionego w podrozdziale 1.6, fundamentalne znaczenie mają prawa Kirchhoffa<sup>1</sup>. Metoda prądów oczkowych i metoda potencjałów węzłowych są natomiast podstawowymi systematycznymi technikami analizy.

Chociaż te same lub analogiczne prawa i metody stosuje się zarówno do obwodów prądu stałego, jak i zmiennego, to korzystnie jest przedstawić je najpierw w kontekście pierwszej kategorii obwodów, których analiza jest prostsza, szczególnie pod względem rachunkowym.

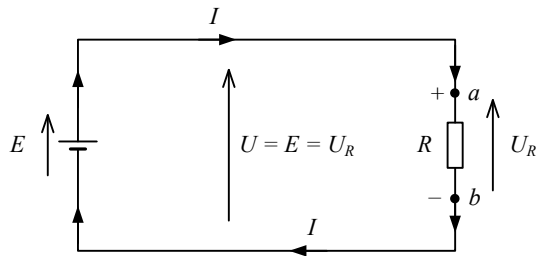
### 2.1 Prawa Kirchhoffa

Jeżeli rezystor (obciążenie) o rezystancji  $R$  zostanie dołączony do idealnego źródła napięcia  $E$ , tak jak na rys. 2.1, to prąd wypływa ze źródła, z zacisku dodatniego, wpływa do opornika zaciskiem  $a$  i opuszcza je przez zacisk  $b$ , powodując wystąpienie między  $b$  i  $a$  spadku napięcia  $U_{ab} = U_a - U_b$ , oznaczanego symbolem  $U_R$ , i kieruje się z powrotem do źródła. Ponieważ źródło jest idealne ( $E = U$ ), całe jego napięcie pojawia się na  $R$ , czyli  $U_R = U = E$ .

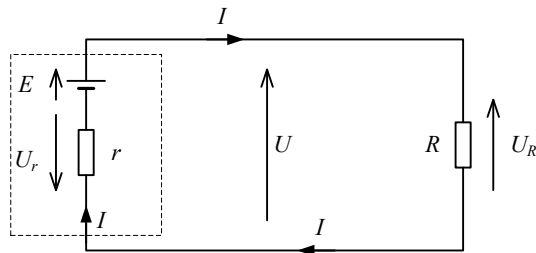
---

<sup>1</sup> Gustaw Robert Kirchhoff (1824–1887) — fizyk niemiecki.





Rysunek 2.1: Rezystor dołączony do idealnego źródła napięcia



Rysunek 2.2: Rezystor dołączony do rzeczywistego źródła napięcia

Jeśli jednak rezystor zostanie dołączony do rzeczywistego źródła napięcia, czyli źródła o wewnętrznej rezystancji  $r$ , tak jak na rys. 2.2, to  $U \neq E$ , gdyż

$$U_R = U = E - U_r \quad (2.1)$$

gdzie  $U_r$  jest spadkiem napięcia na  $r$  wewnątrz źródła.

Przy założeniu, że w obwodzie płynie prąd o natężeniu  $I$ , na oporniku występuje napięcie

$$U_R = U = RI \quad (2.2)$$

podczas gdy spadek napięcia na rezystancji wewnętrznej

$$U_r = rI \quad (2.3)$$

Zatem równanie (2.1) można przedstawić w postaci:

$$RI = E - rI \quad (2.4)$$

z której wynika, że napięcie dostarczane do obciążenia jest mniejsze od nominalnego napięcia baterii, a różnica między napięciami jest określona stosunkiem rezystancji obciążenia do wewnętrznego oporu źródła.

Obniżeniu napięcia towarzyszy utrata części mocy (energii), którą wytwarza źródło. Z dostarczanych przez nie  $EI$  watów  $U_r I$  watów jest rozpraszane w  $r$ , czyli do obciążenia dociera moc

$$U_R I = EI - U_r I \quad (2.5)$$

Zależność ta pokrywa się z równaniem (2.1).

Do określenia napięć  $U_R$  i  $U_r$  można wykorzystać równania (2.2) i (2.3), po uprzednim obliczeniu prądu  $I$  za pomocą równania (2.4):

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (2.6)$$

W ten sposób uzyskujemy bezpośrednio wzory:

$$U_R = \frac{E}{R + r} R \quad (2.7)$$

oraz

$$U_r = \frac{E}{R + r} r \quad (2.8)$$

Równanie (2.1) zostało zapisane po raz pierwszy przez Kirchhoffa na podstawie eksperymentów. Wzór opiera się na drugim prawie Kirchhoffa, które dotyczy bilansu napięć w oczku obwodu. Mianem pierwszego prawa Kirchhoffa jest natomiast określana zależność dotycząca bilansu prądów w węźle. Prawa omówimy, poczynając od drugiego.

### 2.1.1 Napięciowe prawo Kirchhoffa

Napięciowe (drugie) prawo Kirchhoffa mówi, że w każdym oczku obwodu algebraiczna suma napięć jest równa zeru. Wobec tego, w oczku obejmującym  $l$  elementów

$$\sum_{k=1}^l \pm U_k = 0 \quad (2.9)$$

gdzie  $\pm U_k$  symbolizuje napięcie występujące na  $k$ -tym elemencie z uwzględnieniem zwrotu tego napięcia względem przyjętego kierunku obiegu oczka. Jeżeli zwrot jest zgodny z kierunkiem obiegu, to napięcie dodajemy, a jeżeli jest przeciwny, to odejmujemy.

Podstawiając do wzoru konkretną wartość napięcia, należy zawsze zachowywać jej znak. Jeżeli z analizy obwodu wynikło napięcie ujemne, to należy rozumieć, że faktyczny zwrot napięcia jest przeciwny do założonego, oznaczonego strzałką.

Jeżeli przydatne jest odróżnianie elementów aktywnych od pasywnych, to napięciowe prawo Kirchhoffa można sformułować w alternatywny sposób: w każdym oczku obwodu

$$\sum \text{napięć źródłowych} = \sum \text{spadków napięć}$$

czyli

$$\sum E = \sum U = \sum RI \quad (2.10)$$

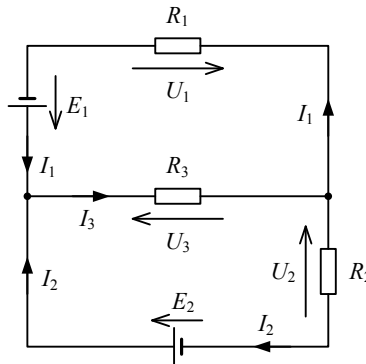
W prostym (jedno oczko) obwodzie z rys. 2.2 zależność wynikająca z drugiego prawa Kirchhoffa ma postać:

$$E = U_R + U_r = RI + rI$$

czyli pokrywa się z (2.1) i (2.4).

### Przykład 2.1

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa zapisać równania, które przedstawiają bilanse napięć w oczkach obwodu z rys. 2.3.



Rysunek 2.3: Schemat do przykładu 2.1

### Rozwiązanie

W górnym oczku bilans napięć można opisać zgrubnym równaniem:

$$E_1 = U_1 + U_3$$

albo równoważnym dokładniejszym wyrażeniem:

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

które otrzymujemy, uwzględniając to, że spadki napięć na opornikach są określone

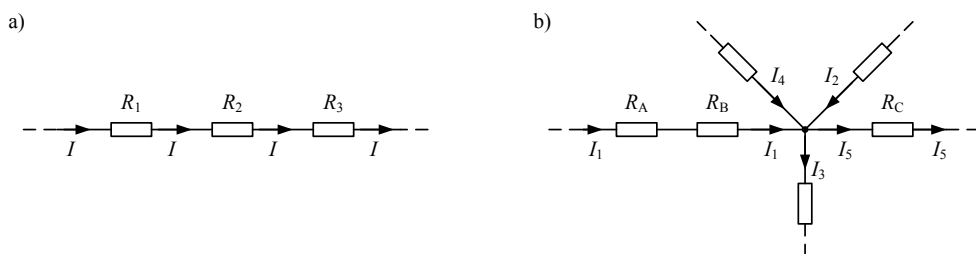
prawem Ohma:  $U_1 = R_1 I_1$  i  $U_3 = R_3 I_3$ . Postępując analogicznie z dolnym oczkiem, otrzymujemy:

$$E_2 = U_2 + U_3 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

□

## 2.1.2 Szeregowe połączenie rezystorów

O dwóch lub więcej rezystorach mówi się, że są połączone szeregowo, jeśli formują one jedną gałąź, czyli nie ma między nimi rozgałęzień, w wyniku czego płynie przez nie ten sam prąd. Rysunek 2.4a pokazuje trzy rezystory  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , które są połączone szeregowo, zaś na rysunku 2.4b tylko  $R_A$  i  $R_B$  tworzą jedną gałąź. Pozostałe oporniki, np.  $R_C$ , nie należą do tej samej gałęzi, choć przez każdy z nich może płynąć prąd taki sam jak przez  $R_A$  i  $R_B$ . Można bowiem uzyskać np.  $I_5 = I_1$ , odpowiednio łącząc pozostałe elementy obwodu i dobierając ich parametry.



Rysunek 2.4: Przykłady łączenia rezystorów: (a)  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  są połączone szeregowo, (b)  $R_c$  nie jest połączone szeregowo z  $R_a$  i  $R_b$

Chociaż łączenie rezystorów zostało już omówione w rozdziale 1, nie przedstawiono tam formalnych dowodów, które wyjaśniałyby wzory na rezystancje zastępcze. Dlatego wykorzystajmy drugie prawo Kirchhoffa do dowiedzenia słuszności wzoru na rezystancję zastępczą połączenia szeregowego oporników.

Połączenie szeregowe  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  z rys. 2.4a można zastąpić opornikiem o rezystancji

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (2.11)$$

czyli określonej równaniem (1.22).

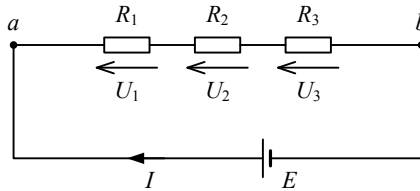
### Dowód

Przyjmijmy, że w obwodzie z rys. 2.5 ze źródła napięcia  $E$  wypływa prąd  $I$ . Jest on przyczyną wystąpienia na  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  spadków napięcia o wartościach  $U_1 = R_1 I$ ,  $U_2 = R_2 I$  i  $U_3 = R_3 I$ , które wynikają z prawa Ohma. Ponadto  $IR_{\text{eq}} = E$ , gdyż rezystancja zastępcza  $R_{\text{eq}}$  między  $a$  i  $b$  musi zapewniać zachowanie wypadkowego prądu i napięcia.

Na mocy napięciowego prawa Kirchhoffa możemy zapisać bilans napięć:

$$E = U_1 + U_2 + U_3 \quad \leftrightarrow \quad R_{\text{eq}} I = R_1 I + R_2 I + R_3 I$$

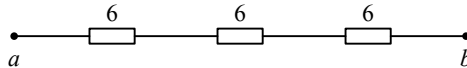
Eliminując  $I$ , uzyskujemy  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$ , czyli równanie (2.11).



Rysunek 2.5: Szeregowe połączenie trzech rezystorów i źródła napięcia

### Przykład 2.2

Określić rezystancję zastępczą, która odpowiada szeregowemu połączeniu trzech oporników z rys. 2.6. Rezystory są jednakowe,  $6\Omega$  każdy.



Rysunek 2.6: Schemat do przykładu 2.2

### Rozwiązanie

Wykorzystując równanie (2.11), otrzymujemy:

$$R_{\text{eq}} = 6 + 6 + 6 = 3 \cdot 6 = 18 [\Omega]$$



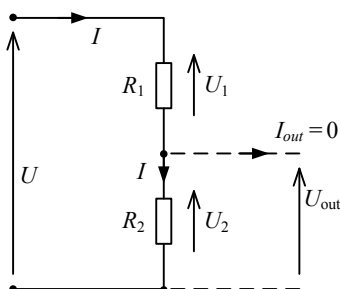
### Wniosek

Łącząc szeregowo  $n$  jednakowych oporników,  $R\Omega$  każdy, uzyskuje się rezystancję zastępczą:

$$R_{\text{eq}} = \underbrace{R + R + \dots + R}_{n \text{ razy}} = nR$$

### 2.1.3 Dzielnik napięcia

Napięcie  $U$  doprowadzone do szeregowego połączenia oporników zostaje podzielone odpowiednio do ich rezystancji. Dlatego szeregowe połączenie rezystorów jest nazywane dzielnikiem napięcia, szczególnie wtedy gdy są dwa oporniki i jeden ze spadków napięcia na nich jest wykorzystywany jako sygnał wejściowy w innym układzie, gdzie jest przekształcany lub reguluje działanie elementów. Napięcia na poszczególnych opornikach w dzielniku można bezpośrednio obliczyć na podstawie prostych wzorów, bez obliczania prądu i zapisywania pełnego zestawu równań, które wynikają z prawa Ohma i praw Kirchhoffa.



Rysunek 2.7: Dzielnik napięcia

W celu wyprowadzenia tych wzorów założmy, że napięcie  $U$  doprowadzono do dzielnika złożonego z dwóch rezystorów  $R_1$  i  $R_2$ , połączonych tak jak na rys. 2.7. Pomiędzy  $R_1$  i  $R_2$  jest wyprowadzenie, które pozwala wykorzystać spadek napięcia na  $R_2$  jako napięcie wyjściowe. Jeżeli do wyjścia może być dołączony tylko układ, który nie obciąża dzielnika, taki że  $I_{out} = 0$ , to pomimo istnienia wyprowadzenia, można uważać  $R_1$  i  $R_2$  za połączone szeregowo.

Przez obydwa oporniki płynie prąd

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad (2.12)$$

a  $U_1 = R_1 I$ , więc

$$U_1 = R_1 \frac{U}{R_1 + R_2} \Rightarrow U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (2.13)$$

i analogicznie

$$U_2 = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2} \Rightarrow U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (2.14)$$

gdź  $U_2 = R_2 I$ .

Zależności te można wykorzystywać także wtedy, gdy  $I_{\text{out}} \ll I$  i akceptowalne są niewielkie błędy w wynikach. Warto też zauważyć, że również  $U_1$  może stanowić napięcie wyjściowe dzielnika.

Wzory na dzielnik są bardzo praktyczne i znajdują zastosowanie nie tylko w analizie, ale i w projektowaniu obwodów. W wielu układach występują bowiem fragmenty, w których podział napięcia zachodzi na dwóch lub więcej elementach.

### 2.1.4 Prądowe prawo Kirchhoffa

Prądowe prawo Kirchhoffa mówi, że dla każdego węzła obwodu algebraiczna suma wszystkich prądów gałęziowych jest równa zeru:

$$\sum \text{prądów} = 0 \quad (2.15)$$

Zatem w węźle, w którym zbiega się  $B$  gałęzi,

$$\sum_{k=1}^B \pm I_k = 0 \quad (2.16)$$

gdzie  $\pm I_k$  oznacza natężenie prądu w  $k$ -tej gałęzi, z uwzględnieniem zwrotu tego prądu względem węzła. Jeżeli prąd wpływa do węzła, to jego natężenie dodajemy, a jeżeli prąd wypływa z węzła, to odpowiednie natężenie odejmujemy. Czasami wygodnie jest pogrupować prądy ze względu na zwrot i zapisać (2.16) w postaci:

$$\sum \text{prądów wpływających} = \sum \text{prądów wypływających} \quad (2.17)$$

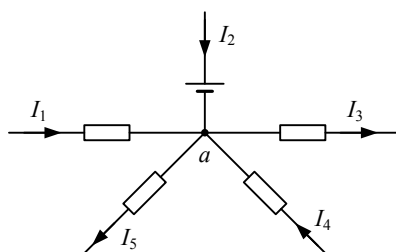
Rysunek 2.8 przedstawia fragment obwodu z węzłem  $a$ , w którym zbiega się pięć gałęzi, czyli  $B = 5$ . Na mocy prądowego prawa Kirchhoffa

$$\sum_{k=1}^5 \pm I_k = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

czyli inaczej

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

Podstawiając do wzorów konkretną wartość natężenia, trzeba zawsze zachowywać jej znak. Jeżeli z rachunków wynika ujemne natężenie prądu, to nie należy pochopnie uważać tego za błąd. Ujemne natężenie oznacza, że faktycznie prąd płynie w kierunku przeciwnym do założonego, wskazanego strzałką, który należy uwzględnić zapisując wzory z symbolem prądu.



Rysunek 2.8: Schemat objaśniający pojęcie węzła

### Przykład 2.3

Wykorzystując prądowe prawo Kirchhoffa oraz równania z przykładu 2.1, określić natężenia wszystkich prądów płynących w obwodzie z rys. 2.3. Dane są:  $E_1 = 10\text{ V}$ ,  $E_2 = 20\text{ V}$ ,  $R_1 = 100\ \Omega$ ,  $R_2 = 200\ \Omega$  i  $R_3 = 300\ \Omega$ .

### Rozwiązanie

Na mocy prądowego prawa Kirchhoffa

$$-I_3 + I_1 + I_2 = 0$$

a z napięciowego prawa Kirchhoffa wynikają zależności:

$$\begin{cases} E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \end{cases}$$

które wystąpiły w przykładzie 2.1). Podstawiając zadane wartości napięć i rezystancji, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 100I_1 + 300I_3 = 10 \\ 200I_2 + 300I_3 = 20 \end{cases}$$

którego rozwiązanie stanowią:

$$I_1 = -9,1\text{ mA} \quad I_2 = 45,5\text{ mA} \quad I_3 = 36,4\text{ mA}$$

□

### 2.1.5 Równoległe połączenie rezystorów

O dwóch lub więcej rezystorach mówi się, że są połączone równoległe, gdy każdy z nich jest włączony pomiędzy te same węzły obwodu, czyli napięcie na nim jest takie samo jak na pozostałych i równe różnicy potencjałów między tymi węzłami.



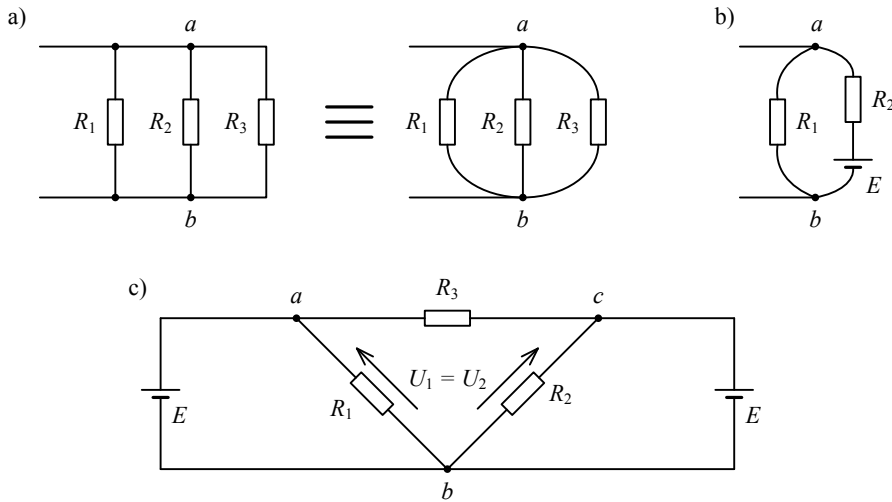
Różnice między połączeniem równoległym a podobnymi układami można objaśnić, wykorzystując schematy z rys. 2.9.

Na rysunku 2.9a  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  są połączone równolegle, czyli różnica potencjałów między zaciskami każdego z nich jest taka sama i równa  $U_{ab}$ .

Rezystory  $R_1$  i  $R_2$  z rys. 2.9b nie są połączone równolegle, ponieważ  $E$  oddziela  $R_2$  od wężła  $b$  oraz sprawia, że napięcie na  $R_2$  jest różne od  $U_{ab}$ .

W układzie z rys. 2.9c oporniki  $R_1$  i  $R_2$  nie są połączone równolegle, gdyż ich górne zaciski rozdziela  $R_3 \neq 0$ , tak że nie ma między nimi bezpośredniego połączenia. Tym niemniej napięcia na nich są równe ( $U_1 = U_2$ ) wskutek specyficznego połączenia elementów i dobrania ich parametrów.

Czasami, w celu usprawnienia analizy obwodu, można uważać  $R_1$  i  $R_2$  w konfiguracji takiej jak na rys. 2.9c za połączone równolegle. Taka sytuacja może występować np. w obwodzie nazywanym mostkiem Wheatstone'a, którego dotyczą problem P2.15 oraz pytanie Q3.1.



Rysunek 2.9: Przykłady łączenia rezystorów: (a)  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  są połączone równolegle, (b) i (c)  $R_1$  i  $R_2$  nie są połączone równolegle

Jak pamiętamy z podrozdziału 1.5, równoległe połączenie  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , takie jak na rys. 2.9a, odpowiada rezystancji zastępczej  $R_{eq}$ , którą określa wyrażenie

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (2.18)$$

czyli

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \quad (2.19)$$

Abstrakcyjny opornik  $R_{\text{eq}}$  jest równoważny oryginalnemu połączeniu pod względem wypadkowego prądu i napięcia, co zilustrowano na rys. 2.10. Poprawność wzoru na  $R_{\text{eq}}$  można udowodnić, opierając się na prądowym prawie Kirchhoffa.

### Dowód

Założmy, że do zacisków  $a$  i  $b$  obwodu z rys. 2.10a doprowadzono pewne napięcie  $U$ , które powoduje, że prądy płyną przez rezystory. Natężenia tych prądów są następujące:  $I_1 = U / R_1$ ,  $I_2 = U / R_2$ , zaś  $I_3 = U / R_3$ .

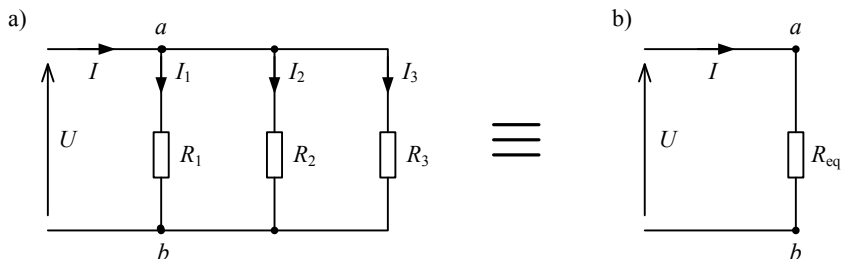
Wypadkowy prąd  $I$  można określić ilorazem napięcia  $U$  i rezystancji zastępczej  $R_{\text{eq}}$ , tj.  $I = U / R_{\text{eq}}$  (rys. 2.10b). Alternatywnie, na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa w węzłach  $a$  i  $b$ ,

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Łącząc równania, otrzymujemy:

$$\frac{U}{R_{\text{eq}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

Usuając z tej zależności  $U$ , przy założeniu, że  $U \neq 0$ , uzyskujemy równanie (2.18).



Rysunek 2.10: Zastąpienie połączenia równoległego rezystorów jednym oporem równoważnym

Równanie (2.18) można zapisać zwięźle:

$$G_{\text{eq}} = G_1 + G_2 + G_3 \quad (2.20)$$

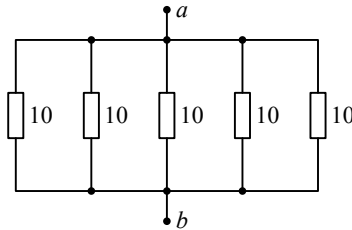
wykorzystując konduktancje:  $G_{\text{eq}} = \frac{1}{R_{\text{eq}}}$ ,  $G_1 = \frac{1}{R_1}$ ,  $G_2 = \frac{1}{R_2}$  oraz  $G_3 = \frac{1}{R_3}$ .

Rezystancja zastępcza równoległego połączenia  $n$  jednakowych oporników,  $R\Omega$  każdy, wynosi:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R}{n}$$

**Przykład 2.4**

Jaka jest rezystancja zastępcza układu pięciu oporników, każdy o rezystancji  $10\Omega$ , połączonych równolegle, tak jak na rys. 2.11? Zapisać ogólny wzór na rezystancję zastępczą równoległego połączenia  $n$  jednakowych rezystorów.



Rysunek 2.11: Schemat do przykładu 2.4

**Rozwiązanie**

Korzystając z (2.18) lub (2.20), obliczamy:

$$G_{\text{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 [\text{S}]$$

Wobec tego:

$$R_{\text{eq}} = \frac{10}{5} = 2 [\Omega]$$

□

**2.1.6 Dzielnik prądu**

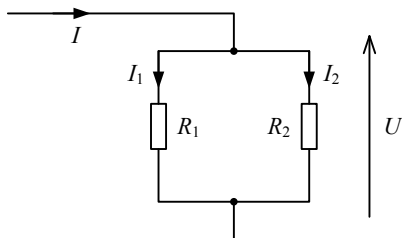
Jeżeli pewien prąd  $I$  dopływa do równoległego połączenia dwóch oporników, tak jak na rys. 2.12, to rozdziela się odpowiednio do ich rezystancji. Układ jest nazywany dzielnikiem prądu, a natężenia prądów płynących przez oporniki, mogą zostać bezpośrednio obliczone na podstawie następujących wzorów:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (2.21)$$

zaś

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (2.22)$$

bez zapisywania wszystkich równań, które wynikają z prawa Ohma i Kirchhoffa.



Rysunek 2.12: Dzielnik prądu

### Dowód

Na obydwu opornikach  $R_1$  i  $R_2$  występuje to samo napięcie, które jest określone iloczynem ich rezystancji zastępczej oraz prądu  $I$ :

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

Podstawiając to wyrażenie do równań  $I_1 = U / R_1$  oraz  $I_2 = U / R_2$ , które wynikają z prawa Ohma, uzyskujemy wzory opisujące dzielnik prądu.

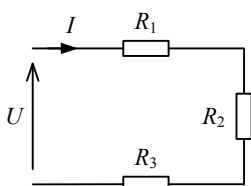
■

## 2.2 Redukcja sieci rezystorów

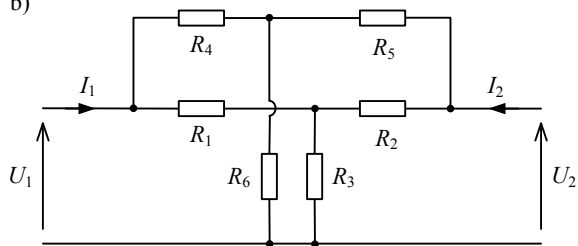
W niektórych obwodach występują skomplikowane sieci rezystorów, ale nie zawsze analizowanie takiego układu musi być trudne. Czasem złożoną sieć oporników można zredukować, czyli zastąpić prostszym połączeniem mniejszej liczby rezystorów. Redukcja sieci jest szczególnie przydatna w sytuacji, gdy poszukiwane jest tylko jedno napięcie lub prąd w obwodzie.

Niektóre układy łatwo zredukować, np. taki jak na rys. 2.13a, ale inne, np. taki jak na rys. 2.13b, mogą wymagać spostrzegawczości, pomysłowości i przyjęcia pewnych pomocniczych założeń.

a)



b)



Rysunek 2.13: Przykładowe obwody: (a) prosty i (b) złożony

**Przykład 2.5**

W obwodzie z rys. 2.14 określić rezystancję zastępczą między  $a$  i  $b$  oraz natężenie prądu, który płynie przez rezystor  $3\Omega$ .

**Rozwiązanie**

Rezystancja zastępcza między  $a$  i  $b$  wynosi:

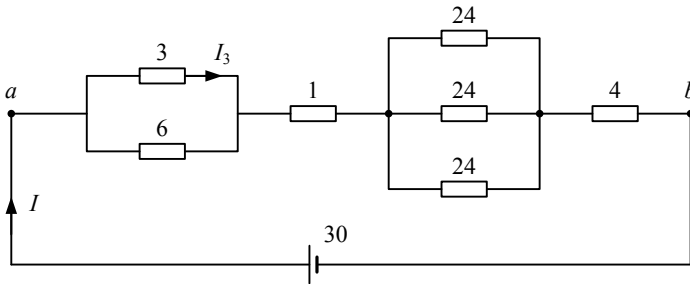
$$R_{ab} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} + 1 + \frac{24}{3} + 4 = 15 [\Omega]$$

Całkowity prąd  $I$  w obwodzie jest zatem równy:

$$I = \frac{30}{R_{ab}} = \frac{30}{15} = 2 [\text{A}]$$

Szukany prąd  $I_3$ , który płynie przez rezystor  $3\Omega$ , obliczamy za pomocą wzoru na dzielnik prądu:

$$I_3 = \frac{6}{3 + 6} I = 0,67 \cdot 2 = 1,33 [\text{A}]$$



Rysunek 2.14: Schemat do przykładu 2.5

□

**Przykład 2.6**

Obliczyć napięcie  $U$  na rezystorze  $1\Omega$  oraz prąd  $I$  w obwodzie z rys. 2.15.

**Rozwiązanie**

Sieć oporników między  $a$  i  $b$  jest równoważna rezystancji zastępczej

$$R_{ab} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 1 + \frac{24}{3} = 9 [\Omega]$$

gdzie

$$R_1 = 4 + \frac{30 \cdot (20 + 40)}{30 + (20 + 40)} = 24 [\Omega]$$

$$R_2 = 9 + 15 = 24 [\Omega]$$

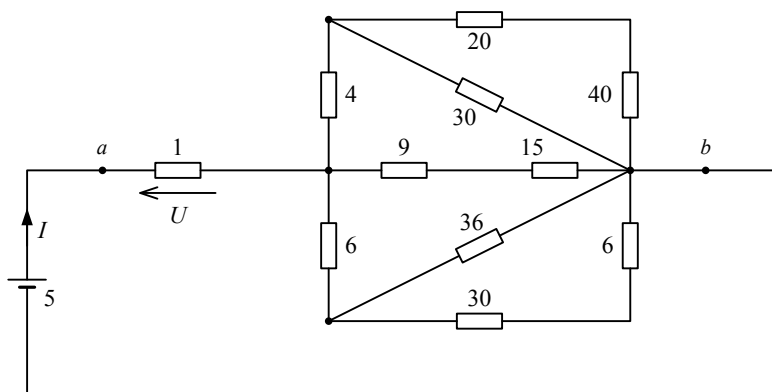
$$R_3 = 6 + \frac{36 \cdot (30 + 6)}{36 + (30 + 6)} = 24 [\Omega]$$

Wobec tego:

$$I = \frac{E}{R_{ab}} = \frac{5}{9} = 0,56 [\text{A}]$$

a

$$U = 1 \cdot I = 0,56 [\text{V}]$$

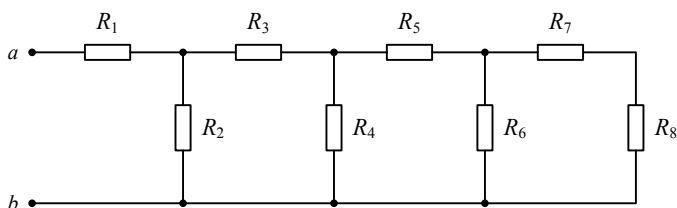


Rysunek 2.15: Schemat do przykładu 2.6

□

### Przykład 2.7 Sieć drabinkowa

Obwód z rys. 2.16 jest nazywany siecią drabinkową. Wyprowadzić ogólne wyrażenie na  $R_{ab}$ , rezystancję zastępczą takiej sieci.



Rysunek 2.16: Sieć drabinkowa

## Rozwiązanie

Aby określić  $R_{ab}$ , należy zredukować kombinację szeregowo-równoległą, zaczynając od prawej strony układu. Oporniki  $R_7$  i  $R_8$  są połączone szeregowo, zaś ich zastępcza rezystancja  $R_7 + R_8$  jest połączona równoległe z  $R_6$ , czyli można obliczyć kolejną rezystancję zastępczą  $R_6 \cdot (R_7 + R_8) / (R_6 + R_7 + R_8)$ . Ta jest natomiast połączona szeregowo z  $R_5$ , a całość równoległe z  $R_4$  itd. W końcu dochodzimy do  $R_1$ , który jest w szeregu z pozostałą kombinacją, otrzymując ostateczny rezultat:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 \cdot \left( R_3 + \frac{R_4 \cdot \left( R_5 + \frac{R_6 \cdot (R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} \right)}{R_4 + R_5 + \frac{R_6 \cdot (R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8}} \right)}{R_2 + R_3 + \frac{R_4 \cdot \left( R_5 + \frac{R_6 \cdot (R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8} \right)}{R_4 + R_5 + \frac{R_6 \cdot (R_7 + R_8)}{R_6 + R_7 + R_8}}} \quad (2.23)$$

Takie podejście do postawionego zadania jest uciążliwe, więc lepiej postępować według ogólniejszej, a jednocześnie prostszej metody. Polega ona na dodawaniu rezystancji w przypadku połączenia szeregowego i dodawaniu konduktancji, gdy rozpatrywane jest połączenie równoległe. W zadanym obwodzie  $R_7$  i  $R_8$  są połączone szeregowo, więc ich rezystancje trzeba dodać. Uzyskana rezystancja zastępcza jest równoległa do  $R_6$ , czyli można zsumować konduktancje:

$$\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7 + R_8}$$

Odwrotność tego jest rezystancją połączoną szeregowo z  $R_5$ , więc

$$R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7 + R_8}}$$

a konduktancja tego układu może zostać zsumowana z konduktancją  $R_4$ :

$$\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7 + R_8}}}$$

Odwrotność powyższego należy dodawać do  $R_3$  itd.

Postępujemy w ten sposób, aż osiągniemy zaciski sieci. Uzyskany wzór na  $R_{ab}$  jest tożsamy z (2.23), ale ma bardziej przejrzystą postać:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7 + R_8}}}}}} \quad (2.24)$$

Alternatywnie  $R_{ab}$  można wyrazić, posługując się jednocześnie rezystancjami i konduktancjami:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4 + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{G_6 + \frac{1}{R_7 + R_8}}}}} \quad (2.25)$$

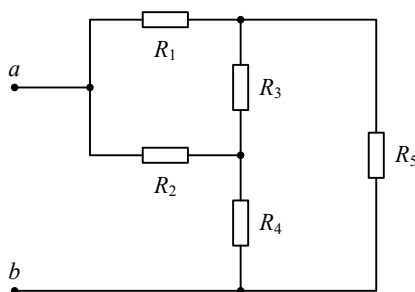
Takie równanie daje się łatwo uogólnić do przypadku  $n$  rezystorów:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{G_{n-2} + \frac{1}{R_{n-1} + R_n}}}}}}$$

□

### 2.2.1 Przekształcenie trójkąt-gwiazda i gwiazda-trójkąt

Po przeanalizowaniu przykładów połączeń szeregowych, równoległych i mieszanych rozpatrzmy obwód z rys. 2.17. Nietrudno jest zauważyć, że nie ma w nim rezystorów, które byłyby połączone szeregowo albo równolegle. Zatem taki układ nie może zostać zredukowany do jednej rezystancji zastępczej metodami omówionymi dotychczas. Konieczne jest użycie innego narzędzia analizy obwodów, a mianowicie przekształcenia trójkąt-gwiazda albo gwiazda-trójkąt. Każde trzy oporniki w układzie trójkąta ( $\Delta$ ) można bowiem zastąpić odpowiednio dobranymi trzema rezystancjami w układzie gwiazdy ( $Y$ ), nie oddziałując na pozostałą część obwodu. Dopuszczalne jest też przekształcenie odwrotne.



Rysunek 2.17: Sieć rezystancyjna bez połączeń szeregowych ani równoległych, łatwych do zredukowania



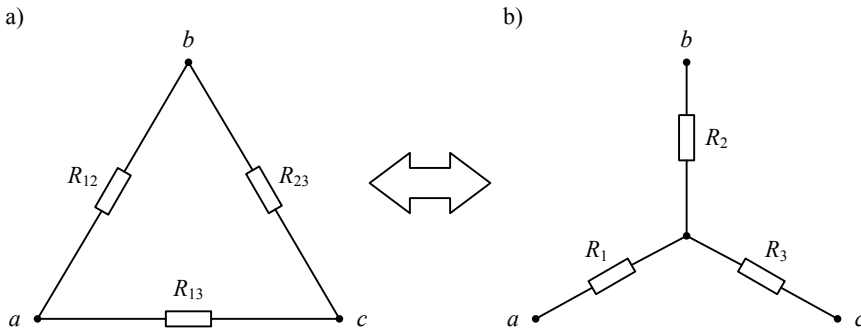
Rozpatrzmy trójkąt i gwiazdę, które pokazano na rys. 2.18. Trójkąt jest równoważny gwiazdzie wtedy, gdy między odpowiednimi zaciskami obydwu układów są takie same rezystancje zastępcze. Na tej podstawie można wyprowadzić wzory na rezystancje gwiazdy:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \\ R_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

która odpowiada danemu trójkątowi, oraz zależności:

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{13} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

które opisują przekształcenie odwrotne.



Rysunek 2.18: Konwersja trójkąt-gwiazda i gwiazda-trójkąt

### Dowód

Układy z rys. 2.18 są równoważne wtedy, gdy między odpowiednimi ich zaciskami są takie same rezystancje zastępcze. Jeżeli weźmiemy pod uwagę zaciski  $a$  i  $b$ , to dla trójkąta zastępczy opór  $R_{ca\Delta}$  jest określony równoległym połączeniem  $R_{12}$

z szeregowym połączeniem  $R_{23}$  i  $R_{13}$ , czyli

$$R_{ab\Delta} = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Dla gwiazdy natomiast

$$R_{abY} = R_1 + R_2$$

W podobny sposób można rozpatrzyć pozostałe pary zacisków, tak aby określić  $R_{bc\Delta}$  i  $R_{bcY}$  oraz  $R_{ca\Delta}$  i  $R_{caY}$ . Równoważność układów wymaga, by  $R_{ab\Delta} = R_{abY}$ ,  $R_{bc\Delta} = R_{bcY}$  i  $R_{ca\Delta} = R_{caY}$ , czyli żeby

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} &= R_1 + R_2 \\ \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} &= R_2 + R_3 \\ \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} &= R_1 + R_3 \end{aligned} \right\}$$

Rozwiązując ten układ współzależnych równań względem rezystancji  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , tak aby wyrazić je w kategoriach  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  i  $R_{13}$ , otrzymujemy (2.26), wzory na przekształcenie trójkąta w gwiazdę. Zakładając, że znane są  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ , i rozwiązując układ względem  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  i  $R_{13}$ , uzyskujemy (2.27), równania na przekształcenie gwiazdy w trójkąt.



### Przykład 2.8

Znaleźć rezystancję zastępczą połączenia oporników, które pokazano na rys. 2.17. Należy przyjąć, że  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$ ,  $R_4 = 4\Omega$  i  $R_5 = 5\Omega$ .

### Rozwiązanie

W celu zredukowania układu należy przekształcić jedną z gwiazd,  $R_1-R_3-R_5$  albo  $R_2-R_3-R_4$ , w równoważny trójkąt. Decydując się na przekształcenie  $R_2-R_3-R_4$ , uzyskujemy równoważne połączenie, które pokazano na rys. 2.19. Zastępcze oporniki mają następujące rezystancje:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_4} = 2 + 3 + \frac{2 \cdot 3}{4} = 6,5 [\Omega]$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_2} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{2} = 13 [\Omega]$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3} = 2 + 4 + \frac{2 \cdot 4}{3} = 8,67 [\Omega]$$

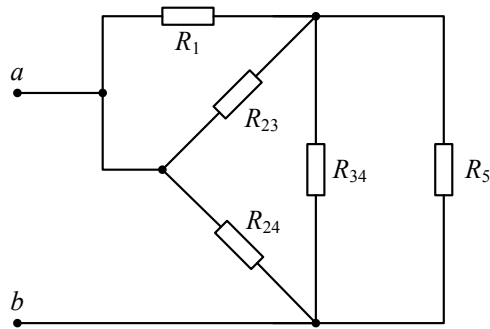
Teraz można łatwo określić  $R_{ab}$ , zastępczą rezystancję między  $a$  i  $b$ , bo stanowi ona równoległe połączenie  $R_{24}$  z  $R$ , rezystancją zastępczą pozostałej części układu. Ponieważ

$$R = \frac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} + \frac{R_5 \cdot R_{34}}{R_5 + R_{34}} = \frac{1 \cdot 6,5}{1 + 6,5} + \frac{5 \cdot 13}{5 + 13} = 4,48 [\Omega]$$

więc

$$R_{ab} = \frac{R \cdot R_{24}}{R + R_{24}} = \frac{4,48 \cdot 8,67}{4,48 + 8,67} = 2,95 [\Omega]$$

□

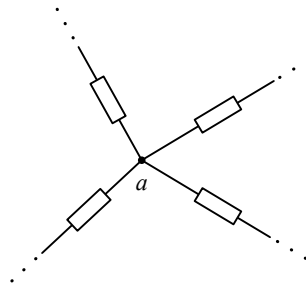


Rysunek 2.19: Połączenie rezystorów uzyskane ze schematu na rys. 2.17 w wyniku przekształcenia gwiazdy w trójkąt

### Uwaga 2.1

W trójkąt można przekształcić tylko gwiazdę o dokładnie trzech ramionach. Wykluczone jest stosowanie równań (2.26) do połączeń gwiazdzistych takich jak to na rys. 2.20, gdzie więcej niż trzy gałęzie zbiegają się w jednym węźle. Innymi słowy, nie można przyjmować, że niektóre z rezystorów stanowią trójramienną gwiazdę, a ignorować pozostałe.

△



Rysunek 2.20: Gwiazdźiste połączenie oporników niedające się przekształcić w trójkąt

### 2.2.2 Podsumowanie

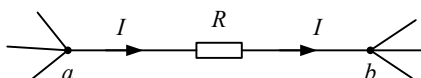
We wszystkich przykładach przedstawionych w tym podrozdziale układ zawierał tylko jedno źródło napięcia lub prądu, a poszukiwana była tylko jedna wielkość elektryczna. W takich przypadkach redukcja sieci rezystorów jest skuteczną techniką analizowania obwodów, lecz ustępuje innym metodom w sytuacji, gdy układ zawiera więcej źródeł i/lub trzeba wyznaczyć wiele prądów lub napięć. Tym niemniej wstępnie redukując sieć, czasami można znacząco ułatwić wykorzystanie bardziej zaawansowanych podejść, takich jak prezentowane dalej metody, które opierają się na systematycznym konstruowaniu równań na podstawie praw Kirchhoffa.

## 2.3 Metoda praw Kirchhoffa

Problemy z zakresu teorii obwodów zwykle są analizowane w ten sposób, że układ fizyczny (układ elektryczny) jest opisywany za pomocą modelu matematycznego (układ równań). Wtedy uzyskane wyniki obliczeń przedstawiają ocenę zachodzących zjawisk fizycznych.

Analiza obwodu zwykle sprowadza się do obliczenia wszystkich prądów gałęziowych lub potencjałów węzłowych dla zadanych napięć i prądów źródłowych oraz rezystancji. Podstawowymi narzędziami do rozwiązania tak postawionego zadania są prawa Kirchhoffa. Pozwalają one bowiem zapisać układ równań algebraicznych potrzebny do wyznaczenia szukanych wielkości. Liczba niezależnych równań musi być równa liczbie niewiadomych: jeżeli w obwodzie jest  $B$  gałęzi i  $N$  głównych węzłów, to potrzeba  $B$  niezależnych równań.

Na podstawie prądowego (pierwszego) prawa Kirchhoffa należy zapisać  $(N - 1)$  niezależnych równań węzłowych. Chociaż można sformułować  $N$  równań, tyle ile jest głównych węzłów, to tylko  $(N - 1)$  z nich jest niezależnych, gdyż prąd każdej gałęzi występuje w równaniach dotyczących dwóch węzłów, do których podłączone są zaciski tej gałęzi (zob. rys. 2.21).



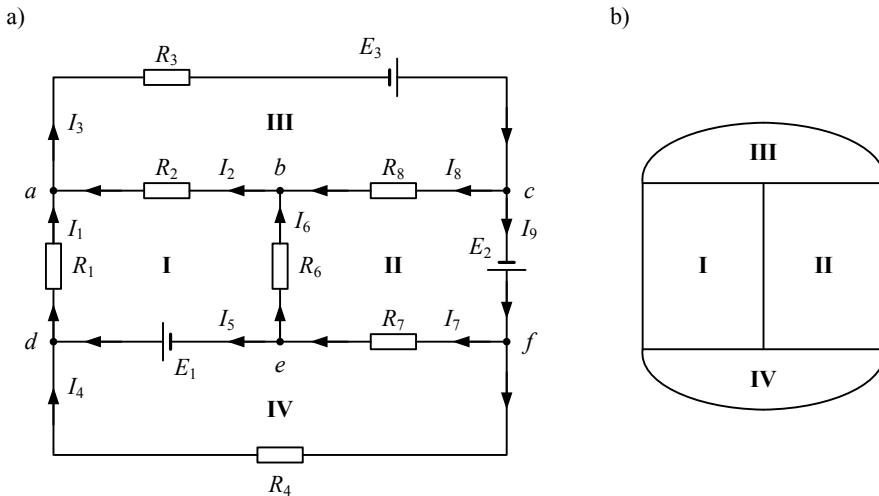
Rysunek 2.21: Prąd  $I$  wspólny dla dwóch węzłów

Pozostałe  $M = B - (N - 1)$  niezależnych równań trzeba uzyskać na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa, rozpatrując  $M$  niezależnych oczek. Takie oczka można wybrać na różne sposoby, co utrudnia zadanie w przypadku obwodów złożonych i nieplanarnych. Najłatwiej jest wybrać po prostu wszystkie oczka, w których wnętrzu nie ma gałęzi, czyli nie można wskazać wewnątrz nich pomniejszych oczek będących obwodami zamkniętymi (zob. podrozdział 1.12). Takie podejście nie jest

jednak wystarczająco ogólne, gdyż może wymagać przypisania do dwóch oczek gałęzi, która powinna zostać skojarzona z tylko jednym oczkiem i być rozpatrywana w szczególny sposób, tak jak np. gałąź ze źródłem prądu. Bardziej uniwersalna jest metoda grafu obwodu, w której wybieranie niezależnych oczek jest połączone z usuwaniem krawędzi grafu. Obydwa podejścia zostały objaśnione na poniższym przykładzie analizy obwodu za pomocą metody praw Kirchhoffa.

### Przykład 2.9

Metodą praw Kirchhoffa obliczyć natężenia wszystkich prądów gałęziowych w obwodzie z rys. 2.22a.



Rysunek 2.22: Schematy do przykładu 2.9: (a) układ i (b) graf unaoczniający jego topologię

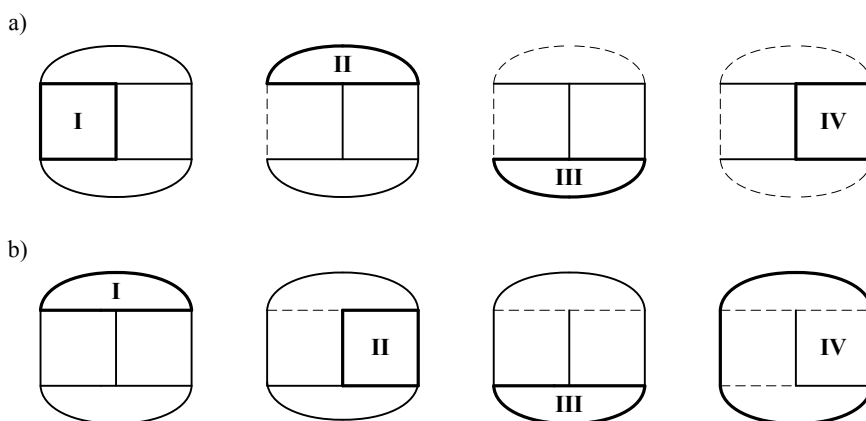
### Rozwiązanie

W rozpatrywanym obwodzie jest  $B = 9$  gałęzi i  $N = 6$  głównych węzłów, a więc można zapisać  $N - 1 = 5$  niezależnych równań węzłowych. Aby obliczyć dziewięć prądów gałęziowych, potrzebujemy jeszcze  $M = 9 - 5 = 4$  niezależnych równań, które opisywałyby bilanse napięć w niezależnych oczkach, czyli wynikałyby z napięciowego prawa Kirchhoffa. Odpowiednie są cztery oczka, które oznaczono cyframi rzymskimi na rys. 2.22, gdyż nie zawierają pomniejszych oczek, które byłyby obwodami zamkniętymi.

Sprawdźmy jednak użyteczność alternatywnej metody grafu obwodu. Rozpoczynamy od przerysowania obwodu z rys. 2.22a w taki sposób, że każda gałąź jest reprezentowana przez linię. Wynikowy diagram, który zamieszczono na rys. 2.22b, nosi nazwę grafu obwodu i przejrzyste reprezentuje topologię układu. Za pierwsze niezależne oczko bierzemy którekolwiek z 14 dostępnych do wyboru, a po jego

oznaczeniu usuwamy jedną z tworzących je gałęzi. Dowolne oczko spośród pozostałych spełnia warunek niezależności, więc wybieramy jedno i usuwamy należącą do niego gałąź. Postępując w ten sposób, dochodzimy do obwodu jednooczkowego, który stanowi ostatecznie niezależne oczko.

Kolejne etapy metody grafu obwodu zilustrowano na rys. 2.23, pokazując dowolność postępowania. Na rys. 2.23a wybierane są tylko oczka, wewnątrz których nie ma podukładów zamkniętych, zaś na rys. 2.23b w ostatnim etapie wybrano oczko, które zawiera podsieć zamkniętą.



Rysunek 2.23: Dwa warianty redukcji grafu i wyboru niezależnych pętli dla obwodu z rys. 2.22a

Mając wybrane węzły i pętle, zapisujemy współzależne równania algebraiczne, które opisują działanie obwodu, czyli równania węzłowe:

- węzeł  $a$ :  $I_1 + I_2 = I_3$
- węzeł  $b$ :  $I_6 + I_8 = I_2$
- węzeł  $c$ :  $I_8 + I_9 = I_3$
- węzeł  $d$ :  $I_4 + I_5 = I_1$
- węzeł  $e$ :  $I_5 + I_6 = I_7$

oraz równania oczkowe:

- oczko 1:  $R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_6 I_6 = E_1$
- oczko 2:  $R_6 I_6 + R_7 I_7 - R_8 I_8 = E_2$

- oczko 3:  $R_3 I_3 + R_2 I_2 + R_8 I_8 = E_3$
- oczko 4:  $R_7 I_7 - R_4 I_4 = E_1$

Razem mamy dziewięć równań, czyli tyle, ile niewiadomych,  $I_1 \dots I_9$ . Są to równania liniowe o stałych współczynnikach, a więc układ można rozwiązać metodą podstawiania, eliminacji lub wyznaczników.

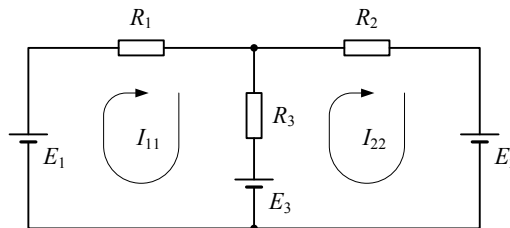
□

Rozwiązanie układu, który obejmuje wiele współzależnych równań, jest skomplikowanym zadaniem obliczeniowym, nawet przy użyciu komputera. Dlatego w praktyce nie stosuje się metody praw Kirchhoffa do obwodów wieloochkowych. Preferowane są podejścia pozwalające zminimalizować liczbę równań, a tym samym ilość obliczeń: metoda prądów oczkowych i metoda potencjałów węzłowych.

## 2.4 Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych (metodzie oczkowej) przyjmuje się, że w oczkach krążą wymagowane prądy, zwane oczkowymi. Każde oczko ma swój własny prąd, niezależny od pozostałych. Prądy oczkowe są bezpośrednio związane z gałęziowymi, więc znając je, można łatwo obliczyć te drugie.

Do wyznaczenia prądów oczkowych służą natomiast równania, które są zapisywane na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa. Równania uzyskuje się, postępując systematycznie według ustalonej procedury, co ułatwia analizowanie obwodów. Ponadto potrzeba znacznie mniej równań i niewiadomych niż w przypadku metody praw Kirchhoffa.



Rysunek 2.24: Obwód z zaznaczonymi prądami oczkowymi

Analiza obwodu metodą oczkową obejmuje następujące kroki, które objaśnimy na przykładzie obwodu z rys. 2.24:

1. W dogodny sposób wybieramy tyle niezależnych oczek, ile możemy w danym obwodzie. Potrzebujemy  $M = B - (N - 1) = 2$  oczek, gdyż  $B = 3$ , a  $N = 2$ .
2. Przypisujemy oczkom abstrakcyjne prądy oczkowe i przyjmujemy kierunki ich przepływu. Dla uproszczenia możemy przyjąć, że wszystkie prądy są skierowane jednakowo, np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Prąd  $k$ -tego oczka oznaczamy symbolem  $I_{kk}$ .
3. Dla każdej pętli zapisujemy napięciowe prawo Kirchhoffa na podstawie prądu oczkowego. W ten sposób powstaje układ  $M$  liniowych współzależnych równań, który można uporządkować, by pasował do następującej ogólnej postaci:

$$\begin{array}{cccccccc}
 R_{11} I_{11} & -R_{12} I_{22} & -R_{13} I_{33} & \dots & -R_{1k} I_{kk} & \dots & -R_{1M} I_{MM} & = E_{11} \\
 -R_{21} I_{11} & +R_{22} I_{22} & -R_{23} I_{33} & \dots & -R_{2k} I_{kk} & \dots & -R_{2M} I_{MM} & = E_{22} \\
 -R_{31} I_{11} & -R_{32} I_{22} & +R_{33} I_{33} & \dots & -R_{3k} I_{kk} & \dots & -R_{3M} I_{MM} & = E_{33} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 -R_{k1} I_{11} & -R_{k2} I_{22} & -R_{k3} I_{33} & \dots & +R_{kk} I_{kk} & \dots & -R_{km} I_{MM} & = E_{kk} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 -R_{M1} I_{11} & -R_{M2} I_{22} & -R_{M3} I_{33} & \dots & -R_{Mk} I_{kk} & \dots & +R_{MM} I_{MM} & = E_{MM}
 \end{array} \quad (2.28)$$

Lepiej jednak przedstawić równania za pomocą macierzy i wektorów:

$$\begin{bmatrix}
 R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1k} & \dots & -R_{1M} \\
 -R_{21} & R_{22} & \dots & -R_{2k} & \dots & -R_{2M} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 -R_{k1} & -R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & -R_{kM} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 -R_{M1} & -R_{M2} & \dots & -R_{Mk} & \dots & R_{MM}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 I_{11} \\
 I_{22} \\
 \vdots \\
 I_{kk} \\
 \vdots \\
 I_{MM}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 E_{11} \\
 E_{22} \\
 \vdots \\
 E_{kk} \\
 \vdots \\
 E_{MM}
 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Jeżeli  $k = m$ , to  $R_{km}$  symbolizuje rezystancję własną  $k$ -tego oczka, czyli sumę wszystkich rezystancji, przez które przepływa prąd oczkowy  $I_k$ . W obwodzie z rys. 2.24 są dwa oczka, które charakteryzują się rezystancjami własnymi  $R_{11} = R_1 + R_3$  i  $R_{22} = R_2 + R_3$ .

Jeżeli  $k \neq m$ , to  $R_{km}$  reprezentuje rezystancję wzajemną między  $k$ -tym a  $m$ -tym oczkiem. W naszym przypadku  $R_{12} = R_{21} = R_3$ .

Symbol  $E_{kk}$  oznacza napięcie źródłowe  $k$ -tego oczka, czyli algebraiczną sumę wszystkich źródeł napięcia działających w  $k$ -tym oczku. Dla rozpatrywanych oczek  $E_{11} = E_1 - E_3$ , a  $E_{22} = -E_2 + E_3$ .



Reasumując, rozpatrywany obwód opisujemy układem równań:

$$\begin{aligned}(R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 &= E_1 - E_3 \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3) I_2 &= -E_2 + E_3\end{aligned}\tag{2.30}$$

4. Rozwiązujemy układ równań dowolną metodą, np. wykorzystując wyznaczniki i wzory Cramera.

### 2.4.1 Rozwiązanie układu równań za pomocą wyznaczników (wzorów Cramera)

Obliczamy wyznacznik macierzy rezystancji z (2.29):

$$\det D = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1k} & \dots & -R_{1M} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & -R_{2k} & \dots & -R_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{k1} & -R_{k2} & \dots & R_{kk} & \dots & -R_{kM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{M1} & -R_{M2} & \dots & -R_{Mk} & \dots & R_{MM} \end{vmatrix} \neq 0$$

która jest symetryczna względem głównej przekątnej ( $R_{km} = R_{mk}$ ) dla obwodu odwracalnego<sup>2</sup>.

Niewiadome, czyli prądy  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$  można następnie obliczyć za pomocą wzorów Cramera:

$$I_k = \frac{1}{D} D_k\tag{2.31}$$

gdzie

$$D_k = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & E_{11} & \dots & -R_{1M} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & E_{22} & \dots & -R_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{k1} & -R_{k2} & \dots & E_{kk} & \dots & -R_{kM} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{M1} & -R_{M2} & \dots & E_{MM} & \dots & R_{MM} \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem macierzy, która powstaje z oryginalnej macierzy opisującej układ równań (o wyznaczniku  $D$ ) w wyniku zastąpienia jej  $k$ -tej kolumny (współczynników związanych z  $I_k$ ) wektorem  $E$  (wyrazami wolnymi  $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \dots, E_{MM}$ ).

<sup>2</sup> Wszystkie obwody i sieci rozpatrywane w niniejszej książce są odwracalne.

W przypadku obwodu z rys. 2.24 z (2.30) wynika, że

$$\det D = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = [(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2]$$

czyli  $M = 2$ , a  $k = 1, 2$ . Zatem

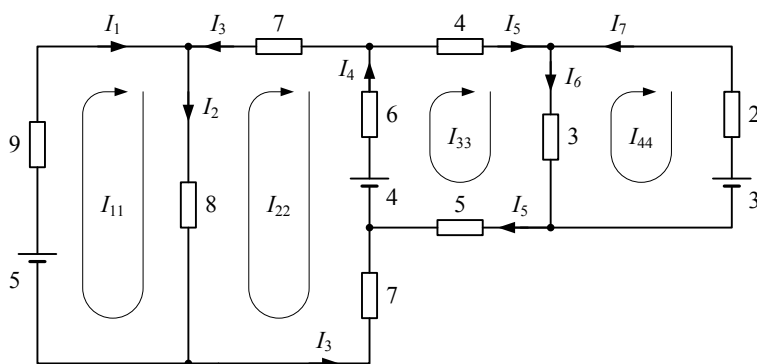
$$I_1 = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} E_1 - E_3 & -R_3 \\ -E_2 + E_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}$$

$$I_2 = \frac{1}{\det D} \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & E_1 - E_3 \\ -R_3 & -E_2 + E_3 \end{vmatrix}$$

Szczególny przypadek  $\det D = 0$  jest przedmiotem pytania Q2.3.

### Przykład 2.10

Metodą prądów oczkowych obliczyć natężenia prądów w obwodzie z rys. 2.25.



Rysunek 2.25: Schemat do przykładu 2.10

### Rozwiązanie

Należy rozpatrzyć cztery niezależne oczka. Wybieramy je i oznaczamy prądy oczkowe tak jak na rys. 2.25. Po zapisaniu odpowiedniego układu równań:

$$\begin{bmatrix} (9+8) & -8 & 0 & 0 \\ -8 & (8+7+6+7) & -6 & 0 \\ 0 & -6 & (6+4+3+5) & -3 \\ 0 & 0 & -3 & (3+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} 17 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 28 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \\ I_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

rozwiązujemy go np. za pomocą wyznaczników. Otrzymane natężenia prądów oczkowych:

$$I_{11} = 276 \text{ mA} \quad I_{22} = -38 \text{ mA} \quad I_{33} = 122 \text{ mA} \quad I_{44} = -527 \text{ mA}$$

służą do obliczenia natężeń prądów w gałęziach obwodu:

$$I_1 = I_{11} = 276 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 276 - (-38) = 314 \text{ [mA]}$$

$$I_3 = -I_{22} = 38 \text{ mA}$$

$$I_4 = -I_{22} + I_{33} = -(-38) + 122 = 160 \text{ [mA]}$$

$$I_5 = I_{33} = 122 \text{ mA}$$

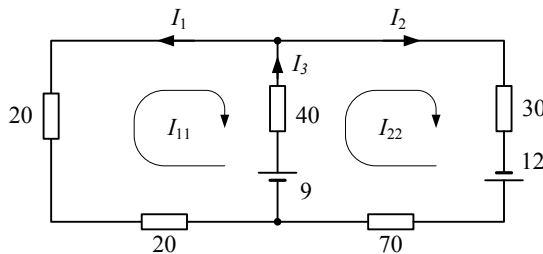
$$I_6 = I_{33} - I_{44} = 122 - (-527) = 649 \text{ [mA]}$$

$$I_7 = -I_{44} = 527 \text{ mA}$$

□

### Przykład 2.11

Wykorzystać metodę prądów oczkowych do określenia prądów zaznaczonych w obwodzie z rys. 2.26.



Rysunek 2.26: Schemat do przykładu 2.11

**Rozwiązanie**

W rozpatrywanym obwodzie są tylko dwa niezależne oczka. Odpowiedni układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} (20 + 40 + 20) & 40 \\ 40 & (40 + 30 + 70) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 + 12 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy

$$I_{11} = 43,75 \text{ mA} \qquad I_{22} = 137,5 \text{ mA}$$

Poszukiwane prądy są określone następująco:

$$I_1 = I_{11} = 43,75 \text{ mA}$$

$$I_2 = I_{22} = 137,5 \text{ mA}$$

$$I_3 = I_{11} + I_{22} = 43,75 + 137,5 = 181,25 \text{ [mA]}$$

□

### 2.4.2 Porównanie metody prądów oczkowych z metodą praw Kirchhoffa

W porównaniu do bezpośredniego użycia praw Kirchhoffa metoda prądów oczkowych jest znacznie mniej pracochłonna. Wymaga ona rozwiązania prostszego układu równań, gdyż jest dużo mniej niewiadomych.

Na przykład w celu przeanalizowania obwodu z rys. 2.22a metodą praw Kirchhoffa trzeba rozwiązać układ dziewięciu równań. Metoda oczkowa wymaga natomiast rozpatrzenia tylko czterech. Zmniejszenie liczby równań odpowiada takiemu samemu zmniejszeniu liczby niewiadomych.

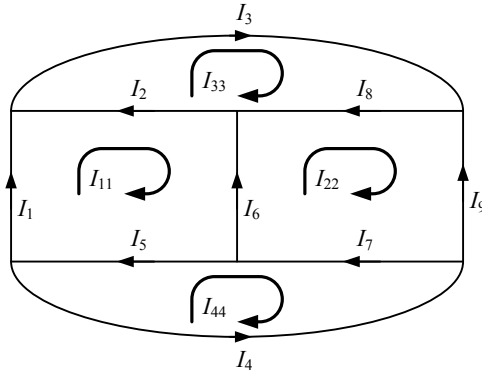
Można to stwierdzić, rozpatrując graf obwodu z rys. 2.27, który powstaje z dostosowania grafu z rys. 2.22b do metody prądów oczkowych. Są cztery niezależne oczka i dlatego układ (2.28) składa się z czterech współzależnych równań:

$$(R_1 + R_2 + R_6) I_1 - R_6 I_2 - R_2 I_3 - (0) I_4 = E_1$$

$$-R_6 I_1 + (R_6 + R_7 + R_8) I_2 - R_8 I_3 - R_7 I_4 = E_2$$

$$-R_2 I_1 - R_8 I_2 + (R_2 + R_3 + R_8) I_3 - (0) I_4 = E_3$$

$$(0) I_1 - R_7 I_2 - (0) I_3 + (R_4 + R_7) I_4 = -E_1$$



Rysunek 2.27: Graf obwodu z przykładu 2.9, z zaznaczonymi prądami oczkowymi

Odpowiedni wyznacznik  $D$  jest określony następująco:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & -R_6 & -R_2 & 0 \\ -R_6 & R_6 + R_7 + R_8 & -R_8 & -R_7 \\ -R_2 & -R_8 & R_2 + R_3 + R_8 & 0 \\ 0 & -R_7 & 0 & R_4 + R_7 \end{vmatrix} \neq 0$$

Wykorzystując wzór (2.31), obliczamy natężenia prądów oczkowych:

$$I_{11} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E_1 & -R_6 & -R_2 & 0 \\ E_2 & R_6 + R_7 + R_8 & -R_8 & -R_7 \\ E_3 & -R_8 & R_2 + R_3 + R_8 & 0 \\ -E_1 & -R_7 & 0 & R_4 + R_7 \end{vmatrix}$$

$$I_{22} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & E_1 & -R_2 & 0 \\ -R_6 & E_2 & -R_8 & -R_7 \\ -R_2 & E_3 & R_2 + R_3 + R_8 & 0 \\ 0 & -E_1 & 0 & R_4 + R_7 \end{vmatrix}$$

$$I_{33} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & -R_6 & E_1 & 0 \\ -R_6 & R_6 + R_7 + R_8 & E_2 & -R_7 \\ -R_2 & -R_8 & E_3 & 0 \\ 0 & -R_7 & -E_1 & R_4 + R_7 \end{vmatrix}$$

$$I_{44} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & -R_6 & -R_2 & E_1 \\ -R_6 & R_6 + R_7 + R_8 & -R_8 & E_2 \\ -R_2 & -R_8 & R_2 + R_3 + R_8 & E_3 \\ 0 & -R_7 & 0 & -E_1 \end{vmatrix}$$

Na ich podstawie można następnie obliczyć natężenia prądów w obwodzie:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} & I_2 &= I_{33} - I_{11} & I_3 &= I_{33} \\ I_4 &= -I_{44} & I_5 &= I_{11} - I_{44} & I_6 &= I_{22} - I_{11} \\ I_7 &= I_{22} - I_{44} & I_8 &= I_{33} - I_{22} & I_9 &= -I_{22} \end{aligned}$$

Uzyskanie ujemnego natężenia oznacza, że odpowiedni prąd płynie w kierunku przeciwnym do założonego, wskazywanego strzałką.

Należy zauważyć, że właściwie nie ma potrzeby zapisywania układu (2.28) i można od razu zająć się jego postacią macierzową (2.29). Drugi sposób zapisu jest też wykorzystywany w oprogramowaniu komputerowym do analizy obwodów, przy czym do wyznaczenia niewiadomych stosuje się metody numeryczne, takie jak np. eliminacja Gaussa, które są efektywniejsze od wzorów Cramera.

### 2.4.3 Uwagi odnośnie do metody prądów oczkowych

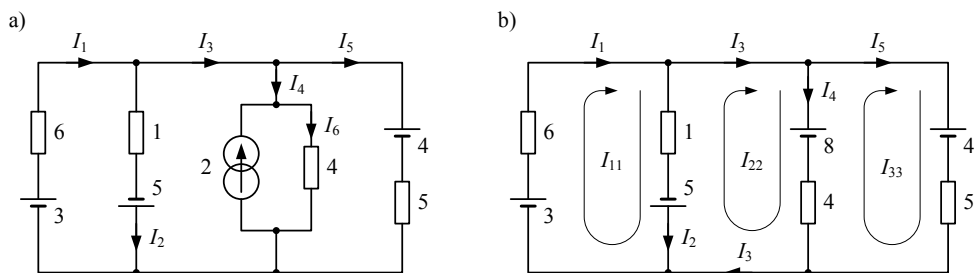
#### Uwaga 2.2

Liczbę równań i oczek do rozpatrzenia można zmniejszyć, przekształcając występujące w obwodzie rzeczywiste źródła prądu w równoważne źródła napięcia (zob. rys. 1.9 i podrozdział 1.7).

△

#### Przykład 2.12

Metodą prądów oczkowych wyznaczyć prądy w obwodzie z rys. 2.28a.



Rysunek 2.28: Schematy do przykładu 2.12

#### Rozwiązanie

Źródło prądu przekształcamy w równoważne źródło napięcia, uzyskując obwód o zmniejszonej liczbie oczek, którego schemat widnieje na rys. 2.28b.

Do obliczenia prądów oczkowych służy układ równań:

$$\begin{bmatrix} (6+1) & -1 & 0 \\ -1 & (1+4) & -4 \\ 0 & -4 & (4+5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+5 \\ -8-5 \\ 8-4 \end{bmatrix}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

stworzony na podstawie wzoru (2.29). Rozwiązując go, np. za pomocą wyznaczników, otrzymujemy:

$$I_{11} = 0,68\text{A} \quad I_{22} = -3,27\text{A} \quad I_{33} = -1,01\text{A}$$

zatem w oryginalnym obwodzie z rys. 2.28a:

$$I_1 = I_{11} = 0,68\text{A}$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,68 - (-3,27) = 3,95\text{ [A]}$$

$$I_3 = I_{22} = -3,27\text{A}$$

$$I_4 = I_{22} - I_{33} = -3,27 - (-1,01) = -2,26\text{ [A]}$$

$$I_5 = I_{33} = -1,01\text{A}$$

$$I_6 = I_4 + 2 = -2,26 + 2 = -0,26\text{ [A]}$$

□

### Uwaga 2.3

Nie można przekształcać źródła prądu, gdy jest ono idealne lub gdy niedopuszczalne są modyfikacje obwodu. W takiej sytuacji należy wybierać niezależne pętle w ten sposób, żeby tylko jedna z nich obejmowała źródło prądowe. Wtedy natężenie odpowiedniego prądu oczkowego jest znane z góry i równe natężeniu prądu źródłowego. Podejście to zostało zilustrowane na rys. 2.29, a przykład jego użycia przedstawiono w rozwiązywaniu problemu P2.14.

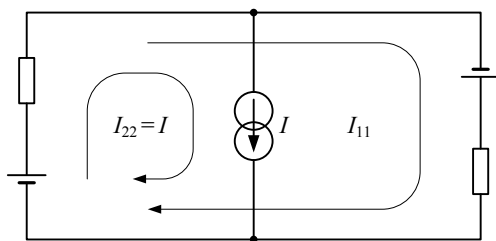
△

### Uwaga 2.4

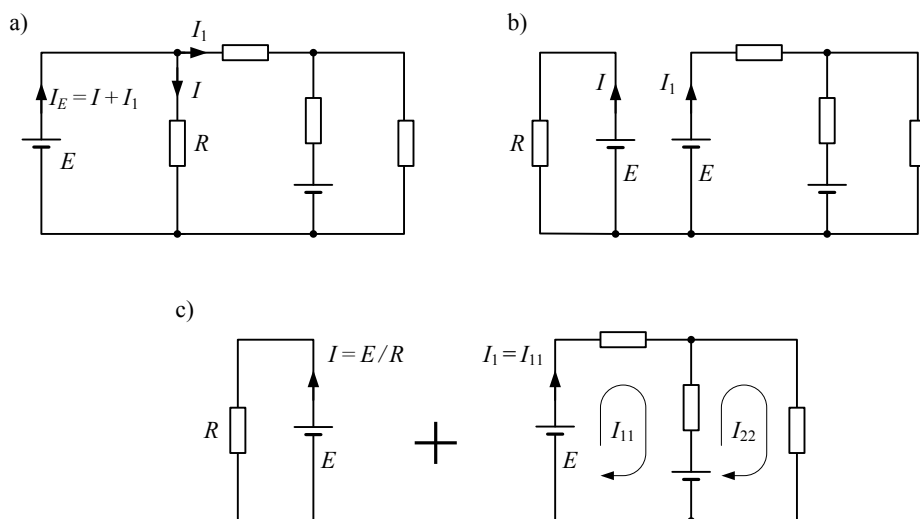
Jeśli w obwodzie występuje rezystor połączony równolegle z idealnym źródłem napięcia, tak jak na rys. 2.30a, to płynie przezeń prąd o natężeniu równym ilorazowi napięcia źródła i rezystancji opornika, czyli niezależny od pozostałej części obwodu. Rezystor, razem z repliką  $E$ , można zatem wydzielić z obwodu, tak jak pokazano na rys. 2.30b, w wyizolowane oczko, w którym będzie płynął prąd  $I = E / R$ . Usuając rezystor, zmniejszamy liczbę oczek w obwodzie, co demonstrowuje rys. 2.30c, czyli

pozostałą część obwodu można analizować metodą oczkową łatwiej niż układ oryginalny, bo trzeba rozpatrzyć o jedno równanie mniej. Należy jednak pamiętać, że w celu obliczenia natężenia prądu w gałęzi ze źródłem  $E$  w oryginalnym obwodzie należy algebraicznie zsumować natężenia w replikach tego źródła z wydzielonego oczka i uproszczonego układu.

△



Rysunek 2.29: Sposób wybierania oczek korzystny w przypadku obwodu zawierającego idealne źródło prądu



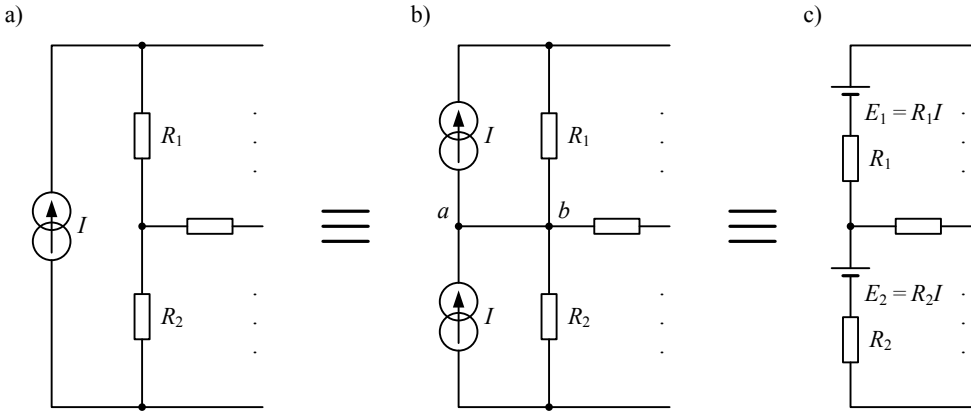
Rysunek 2.30: Schematy ilustrujące wydzielenie z obwodu rezystora  $R$  połączonego równolegle ze źródłem napięcia



**Uwaga 2.5**

Niektóre obwody można uprościć, wykorzystując przekształcenie objaśnione na rys. 2.31. Jedno źródło prądu zostaje zamienione w dwa źródła napięcia, ale zmniejsza się liczba oczek.

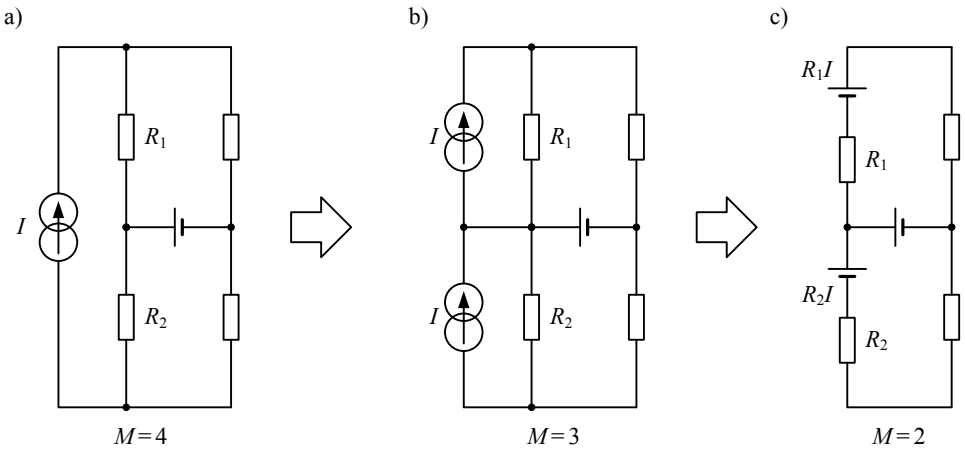
△



Rysunek 2.31: Zmiana źródła prądu w dwa źródła napięcia

**Przykład 2.13**

Zredukować obwód z rys. 2.32a, tak aby pozostało jak najmniej oczek.



Rysunek 2.32: Schematy do przykładu 2.13

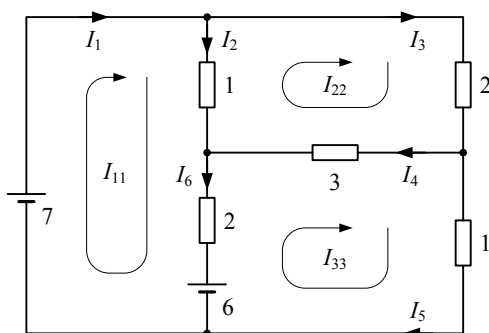
**Rozwiązanie**

Na podstawie uwagi 2.5 odnośnie do metody prądów oczkowych możemy dokonać przekształceń obwodu, które pokazano na rys. 2.32. Pełna analiza układu tego typu jest przedmiotem problemów P2.7 i P2.17.

□

**Przykład 2.14**

Metodą prądów oczkowych określić wszystkie prądy w obwodzie z rys. 2.33.



Rysunek 2.33: Schemat do przykładu 2.14

**Rozwiązanie**

Wybieramy oczka i przypisujemy im prądy tak, jak pokazano na rys. 2.33. Na tej podstawie zapisujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} (1+2) & -1 & -2 \\ -1 & (1+2+3) & -3 \\ -2 & -3 & (3+1+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując układ, otrzymujemy następujące natężenia prądów oczkowych:

$$I_{11} = 3\text{ A} \quad I_{22} = 2\text{ A} \quad I_{33} = 3\text{ A}$$

które wykorzystujemy do obliczenia natężeń prądów z gałęzi obwodu:

$$I_1 = I_{11} = 3 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 3 - 2 = 1 \text{ [A]}$$

$$I_3 = I_{22} = 2 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{22} - I_{33} = 2 - 3 = -1 \text{ [A]}$$

$$I_5 = I_{33} = 3 \text{ A}$$

$$I_6 = I_{11} - I_{33} = 3 - 3 = 0 \text{ [A]}$$

□

## 2.5 Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych (metoda węzłowa) polega na zapisaniu i rozwiązaniu układu równań, w którym niewiadomymi są potencjały głównych węzłów obwodu. Znając te potencjały, można jednak sprawnie obliczyć natężenia prądów w gałęziach obwodu.

Jeżeli w obwodzie jest  $N$  głównych węzłów, to trzeba zapisać  $P = N - 1$  równań, rozpatrując prądowe prawo Kirchhoffa w odniesieniu do niezależnych węzłów. Węzeł bez równania będzie służył za węzeł referencyjny (odniesienia) — należy przypisać mu potencjał zerowy. Potencjał każdego z pozostałych węzłów można wtedy utożsamiać z napięciem między danym węzłem a węzłem odniesienia, przy czym różnice takich napięć są równoważne różnicom potencjałów węzłów.

Procedurę przedstawmy na przykładzie obwodu pokazanego na rys. 2.34a. Celem jest obliczenie prądów  $I_1 \dots I_5$ , których rozptyw przyjęto taki, jak na rys. 2.34b. Metoda oczkowa obejmuje następujące etapy:

1. Oznaczamy węzły obwodu, których liczba to  $N = 3$ , i przypisujemy im potencjały  $U_1$ ,  $U_2$  oraz  $U_3$ .
2. Uznajemy jeden z węzłów za referencyjny i przyjmujemy, że jego potencjał jest zerowy (węzeł uziemiony). W ten sposób pozostają tylko  $(N - 1) = 2$  niezależne węzły, których potencjały  $U_1$  i  $U_2$  trzeba obliczyć.

Korzystnie jest brać za referencyjny ten węzeł, w którym zbiega się najwięcej gałęzi, czyli węzeł o potencjale  $U_3 = 0 \text{ V}$  z rys. 2.34b.

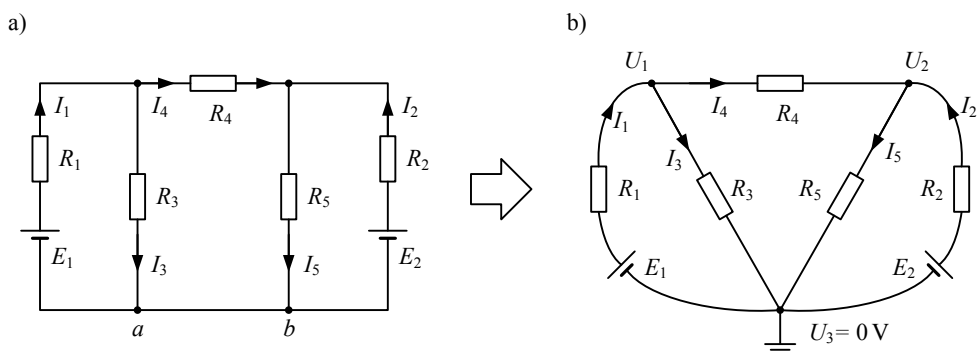
Jeżeli obwód zawiera źródło prądu, to węzłem referencyjnym powinien być jeden z zacisków tego źródła, tak jak na rys. 2.35a.

Jeżeli w obwodzie jest idealne źródło napięcia, to warto brać za węzeł odniesienia jeden z zacisków tego źródła. Od razu będzie wiadomo, jaki jest potencjał węzła, który odpowiada drugiemu zaciskowi. Przykład pokazano na rys. 2.35b, gdzie  $U_1 = E$ ).

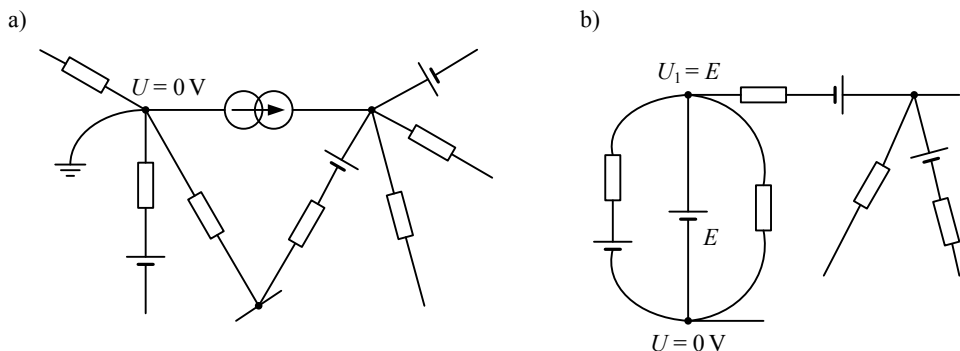
3. Podstawę obliczeń stanowią wyrażenia, które określają prądy w kategoriach potencjałów węzłowych. Dla obwodu z rys. 2.34b mają one postać:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_1 - U_1}{R_1} & I_3 &= \frac{U_1 - 0}{R_3} & I_4 &= \frac{U_1 - U_2}{R_4} \\ I_2 &= \frac{E_2 - U_2}{R_2} & I_5 &= \frac{U_2 - 0}{R_5} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Zapisując wyrażenia, należy uważać na przyjęte kierunki prądów i odpowiednio wybierać znaki.



Rysunek 2.34: Przygotowanie obwodu do analizy metodą węzłową;  $U_1, U_2$  i  $U_3$  oznaczają potencjały węzłów



Rysunek 2.35: Przykłady wyborów węzła odniesienia ułatwiających stosowanie metody potencjałów węzłowych

4. Na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa zapisujemy bilanse prądów w rozpatrywanych węzłach obwodu:

$$\sum_{\text{węzeł 1}} I = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_3 + I_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1 - U_1}{R_1} = \frac{U_1}{R_3} + \frac{U_1 - U_2}{R_4}$$

$$\sum_{\text{węzeł 2}} I = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = I_5 + I_4' \quad \Rightarrow \quad \frac{E_2 - U_2}{R_1} = \frac{U_2}{R_5} + \frac{U_2 - U_1}{R_4}$$

5. Upraszczamy i porządkujemy uzyskane równania:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_1 - \left( \frac{1}{R_4} \right) U_2 &= \left( \frac{1}{R_1} \right) E_1 \\ - \left( \frac{1}{R_4} \right) U_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_2 &= \left( \frac{1}{R_2} \right) E_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

W rezultacie powstaje układ współzależnych liniowych równań o stałych współczynnikach z  $(N - 1) = 2$  niewiadomymi  $U_1$  i  $U_2$ .

6. Rozwiązujemy układ równań dowolną metodą. Można użyć wzorów Cramera, tak jak w przypadku metody prądów oczkowych.
7. Znając potencjały węzłów, prądy w obwodzie można obliczyć za pomocą równań (2.32).

### 2.5.1 Uwagi odnośnie do metody potencjałów węzłowych

#### Uwaga 2.6

W metodzie potencjałów węzłowych posługiwanie się rezystancjami jest niezbyt naturalne i wygodne. Lepiej zapisywać równania w oparciu o konduktancje, czyli odwrotności rezystancji. Układ (2.33) przyjmuje wtedy bardziej przejrzystą i zwięzłą postać:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_3 + G_4) U_1 - G_4 U_2 &= G_1 E_1 \\ -G_4 U_1 + (G_2 + G_4 + G_5) U_2 &= G_2 E_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

lub

$$\begin{aligned} G_{11} U_1 - G_{12} U_2 &= I_{11} \\ -G_{21} U_1 + G_{22} U_2 &= I_{22} \end{aligned} \quad (2.35)$$

gdzie  $G_{11} = G_1 + G_3 + G_4$  oznacza własną konduktancję węzła 1,  $G_{22} = G_2 + G_4 + G_5$  oznacza własną konduktancję węzła 2,  $G_{12} = G_{21} = G_4$  jest wzajemną konduktancją między węzłami 1 i 2, zaś  $I_{11} = G_1 E_1$  i  $I_{22} = G_2 E_2$  reprezentują abstrakcyjne źródłowe prądy węzłów.

△

### Uwaga 2.7

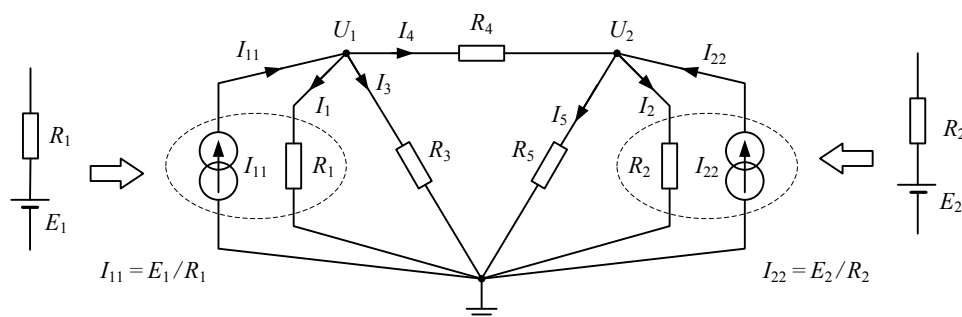
Obliczenia można uprościć, przekształcając źródła napięcia w źródła prądu, o ile elementy są odpowiednio połączone. Na przykład obwód z rys. 2.34 można przekształcić w sposób objaśniony na rys. 2.36. W wynikowym układzie

$$I_{11} = I_1 + I_3 + I_4 = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_3} + \frac{U_1 - U_2}{R_4}$$

$$I_{22} = I_2 + I_5 + I_4' = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_5} + \frac{U_2 - U_1}{R_4}$$

czyli równania są prostsze od tych z (2.33), który można odtworzyć, podstawiając  $\frac{E_1}{R_1} = I_{11}$  oraz  $\frac{E_2}{R_2} = I_{22}$ .

△



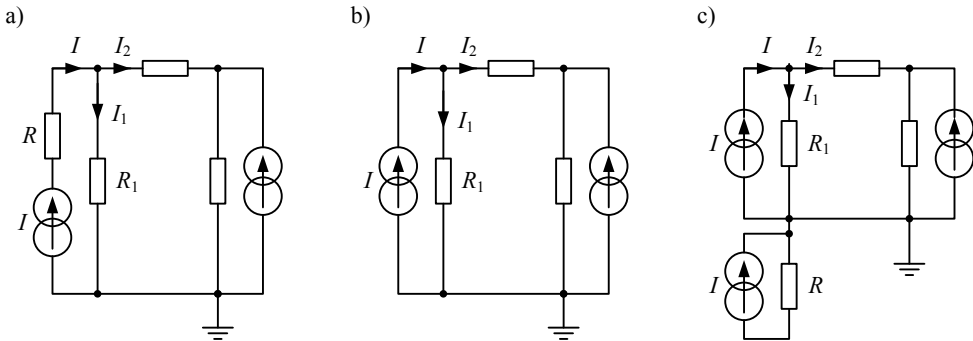
Rysunek 2.36: Przekształcenie źródła napięciowego w prądowe w celu ułatwienia analizy obwodu metodą węzłową

### Uwaga 2.8

Jeżeli pewną gałąź obwodu tworzą połączone szeregowo idealne źródło prądu  $I$  oraz opornik  $R$ , tak jak na rys. 2.37a, to rezystancja  $R$  nie wpływa na potencjały węzłów. Nie należy jej uwzględniać w obliczeniach związanych z metodą węzłową, tak jakby rozpatrywany był układ bez opornika  $R$ , taki jak na rys. 2.37b.

Prąd płynący przez ten rezystor ma bowiem znane natężenie  $I$  i nie zależy od pozostałej części obwodu (zob. problem P2.14). Opornik  $R$  wraz z repliką źródła prądu można zatem wydzielić z obwodu, tak jak na rys. 2.37c, tworząc wyizolowane oczko, w którym płynie prąd  $I$ . Jest to przypadek analogiczny do kłopotliwej sytuacji, gdy trzeba rozpatrzyć rezystor równoległy do źródła napięcia, analizując obwód metodą prądów oczkowych.

△

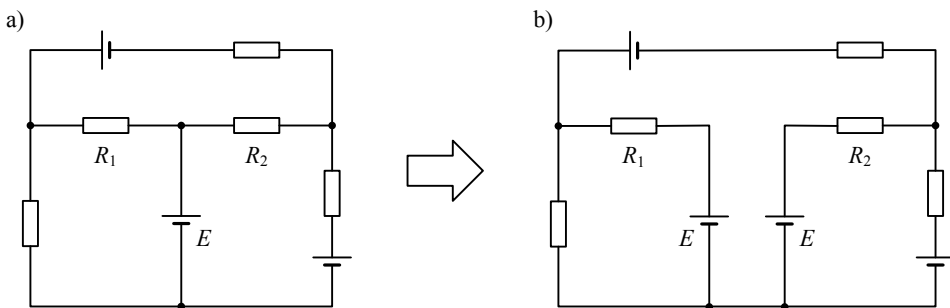


Rysunek 2.37: Rezystor  $R$  połączony szeregowo ze źródłem prądu  $I$  nie oddziałuje na pozostałą część obwodu

**Uwaga 2.9**

Poprawne jest przekształcenie, które pokazano na rys. 2.38. Jest ono dualne do tego z rys. 2.31, czyli polega na analogicznych działaniach, tylko zamiast prądu rozpatrywane jest napięcie.

△



Rysunek 2.38: Dopuszczalne przekształcenie źródła napięcia





**Przykład 2.15**

Rozwiązać równanie (2.35), wykorzystując wyznaczniki i wzory Cramera.

**Rozwiązanie**

Ponieważ  $G_{12} = G_{21}$ ,

$$D = \begin{vmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$$

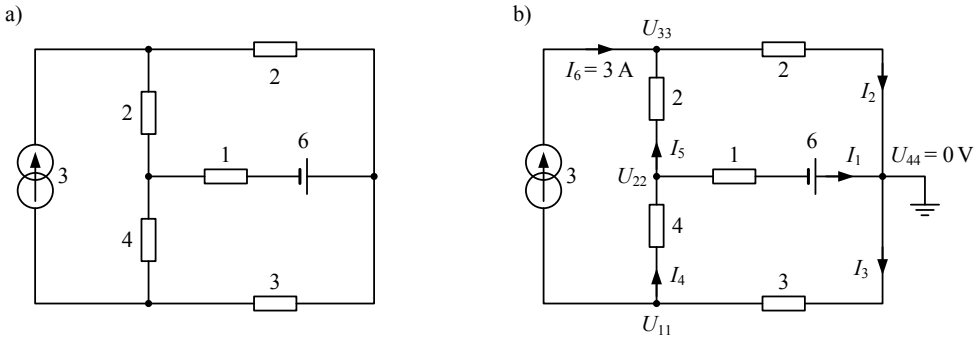
Jeżeli  $D \neq 0$ , to  $U_1$  i  $U_2$  można wyznaczyć za pomocą (2.37):

$$U_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} I_{11} & -G_{12} \\ I_{22} & G_{22} \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad U_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} G_{11} & I_{11} \\ -G_{21} & I_{22} \end{vmatrix}$$

□

**Przykład 2.16**

Obliczyć prądy w obwodzie z rys. 2.39a, wykorzystując metodę potencjałów węzłowych. Przebieg obliczeń i wyniki porównać do rozwiązania problemu P2.7, który dotyczy tego samego układu, ale wymaga użycia metody prądów oczkowych.



Rysunek 2.39: Schematy do przykładu 2.16

**Rozwiązanie**

Oznaczamy potencjały węzłów i przypisujemy jednemu z nich wartość 0, ustalając w ten sposób węzeł odniesienia, tak jak pokazano na rys. 2.39b. Następnie stosujemy wzory (2.36) i (2.37) do określenia potencjałów w pozostałych węzłach. Odpowiednia procedura obejmuje następujące kroki.

Najpierw należy określić związane z węzłami konduktancje własne:

$$G_{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 0,58 \text{ [S]}$$

$$G_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = 1,75 \text{ [S]}$$

$$G_{33} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ [S]}$$

konduktancje wzajemne

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{4} = -0,25 \text{ [S]}$$

$$G_{23} = G_{32} = -\frac{1}{2} = -0,5 \text{ [S]}$$

$$G_{31} = G_{13} = 0 \text{ S}$$

oraz prądy:

$$I_{11} = -3 \text{ A} \quad I_{22} = -6 \cdot \frac{1}{1} = -6 \text{ [A]} \quad I_{33} = 3 \text{ A}$$

Na tej podstawie zapisujemy układ równań w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0,58 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 1,75 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{22} \\ U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy potencjały węzłowe:

$$U_{11} = -6,97 \text{ V} \quad U_{22} = -4,16 \text{ V} \quad U_{33} = 0,92 \text{ V}$$

które wykorzystujemy do obliczenia prądów płynących w obwodzie:

$$I_1 = \frac{(U_{22} - 0) + 6}{1} = \frac{-4,16 + 6}{1} = 1,84 \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{U_{33} - 0}{2} = \frac{0,92}{2} = 0,46 \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{0 - U_{11}}{3} = \frac{6,97}{3} = 2,32 \text{ [A]}$$

$$I_4 = \frac{U_{11} - U_{22}}{4} = \frac{-6,97 + 4,16}{4} = -0,70 \text{ [A]}$$

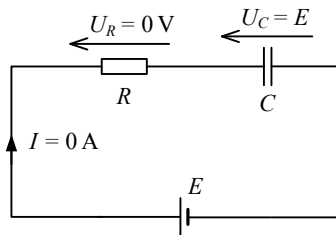
$$I_5 = \frac{U_{22} - U_{33}}{2} = \frac{-4,16 - 0,92}{2} = -2,54 \text{ [A]}$$

□

## 2.6 Kondensatory i cewki w obwodach prądu stałego

Jak wiemy z podrozdziału 1.3, kondensator magazynuje ładunek elektryczny, gdy do jego zacisków zostanie doprowadzona różnica potencjałów. Ponieważ jego struktura jest taka, że izolator rozdziela przewodniki, element nigdy nie pozwala na przepływ prądu i w obwodzie prądu stałego zachowuje się tak, jakby w jego miejscu było rozwarcie, czyli nieskończona rezystancja<sup>3</sup>.

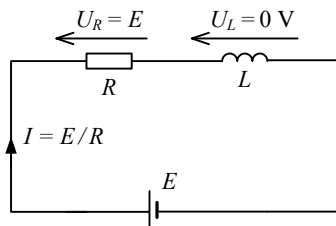
Na przykład w obwodzie z rys. 2.40 napięcie źródła  $E$  w całości odkłada się na kondensatorze  $C$ , który sprawia, że prąd nie płynie. Z prawa Kirchhoffa  $U_C = E - U_R = E$ , gdyż na mocy prawa Ohma  $U_R = 0\text{V}$ , gdy  $I = 0\text{A}$ .



Rysunek 2.40: Działanie kondensatora w obwodzie prądu stałego

W przeciwieństwie do kondensatora cewka jest elementem doskonale przewodzącym i w obwodach prądu stałego zachowuje się tak, jakby w jej miejscu było zwarcie, czyli doskonałe połączenie o zerowej rezystancji. W podrozdziale 1.8 wyjaśniono, że typowa cewka powstaje w wyniku zwinienia drutu, który powinien jak najlepiej przewodzić prąd. W związku z tym spadek napięcia na idealnej cewce jest zerowy, a płynący przez nią prąd zależy od pozostałych elementów obwodu.

Zachowanie się cewki w szeregowym obwodzie prądu stałego zilustrowano na rys. 2.41. Ponieważ między zaciskami cewki jest zerowa różnica potencjałów, całe napięcie  $E$  występuje na oporniku  $R$ , który ustala natężenie prądu  $I = E / R$ .

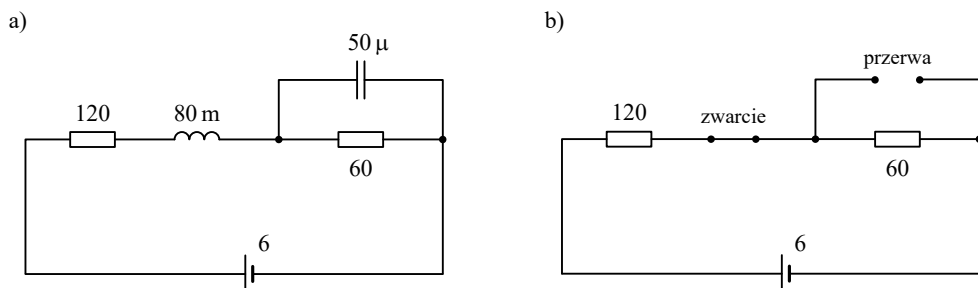


Rysunek 2.41: Działanie cewki w obwodzie prądu stałego

<sup>3</sup> Działanie kondensatora w obwodzie prądu zmiennego zostało omówione w podrozdziale 4.3, zaś stany nieustalone w układach z kondensatorem są tematem rozdziału 7.

**Przykład 2.17**

Określić prądy i spadki napięcia w obwodzie z rys. 2.42a.



Rysunek 2.42: Obwód prądu stałego z  $L$  i  $C$  stanowiącymi odpowiednio zwarcie i przerwę

**Rozwiązanie**

Zastępując  $L$  zwarcie, a  $C$  rozwarciem, upraszczamy obwód do postaci z rys. 2.42b. Dwa rezystory i źródło napięcia są połączone szeregowo, tworząc układ jednooczkowy, w którym płynie prąd o natężeniu  $6 / (120 + 60) = 1 / 30$  [A].

Z prawa Ohma wynika, że na rezystorze  $120\Omega$  występuje spadek napięcia  $120 \cdot 1 / 30 = 4$  [V], a na oporniku  $60\Omega$  jest różnica potencjałów  $60 \cdot 1 / 30 = 2$  [V], którą można też obliczyć, rozpatrując bilans napięć:  $6 - 4 = 2$  [V].

Napięcie na kondensatorze jest takie samo, jak na drugim rezystorze, czyli  $U_C = 2$  V. Spadek napięcia na cewce, która stanowi zwarcie, jest oczywiście zerowy.

□

**2.7 Pytania, problemy i quiz**

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

## 2.7.1 Pytania

### Pytanie Q2.1

Dlaczego w obwodzie prądu stałego idealny kondensator zachowuje się jak rozwarcie, zaś idealna cewka — jak zwarcie? Należy założyć, że w układzie nie występują stany nieustalone.

---

### Pytanie Q2.2

Jeżeli przez kondensator nie może płynąć prąd, to jak może występować na nim spadek napięcia?

---

### Pytanie Q2.3

Co można powiedzieć o obwodzie elektrycznym, któremu odpowiada zerowy wyznacznik  $D$  w równaniu (2.31)? Należy zademonstrować przykładowy układ.

### Odpowiedź

Uzyskanie  $D = 0$  oznacza, że obwód zawiera liniowo zależne oczka lub jest sprzeczny, co może wynikać ze specyficznego dobrania i połączenia elementów.

W obwodzie z rys. 2.24 oczka są zależne, gdy  $R_1 = R_2 = 0\Omega$ , a  $E_1 = E_2$ . W takim przypadku najlepiej jest analizować układ metodą inną niż oczkowa. Metodę prądów oczkowych można wykorzystać, ale trzeba być spostrzegawczym i nieco zmienić sposób postępowania. Należy zauważyć, że w zależnych oczkach płyną prądy o takich samych natężeniach, zatem w (2.30) jest tylko jedna niewiadoma, którą można wyznaczyć na podstawie jednego równania.

Obwód z rys. 2.24 jest sprzeczny, gdy  $R_1 = R_2 = 0$ , ale  $E_1 \neq E_2$ , czyli źródła wymuszają inne napięcia między tymi samymi węzłami. Oznacza to złamanie napięciowego prawa Kirchhoffa, więc sensownego wyniku nie można otrzymać żadną metodą. Łącząc w ten sposób rzeczywiste elementy, spowodowałibyśmy ich termiczne uszkodzenie. Układ dążyłby do zbilansowania napięć, tak że popłynęłyby w nim prądy o bardzo dużym natężeniu.

---

### Pytanie Q2.4

Dlaczego jest zalecane, by w razie występowania w obwodzie idealnego źródła prądu wybierać niezależne oczka tak, aby źródło to pojawiała się tylko w jednym z nich? Co należy uczynić, jeżeli wbrew zaleceniu źródło ma być rozpatrywane tak jak każdy inny element obwodu? Odpowiedź należy uzasadnić przykładem.

### Wskazówka

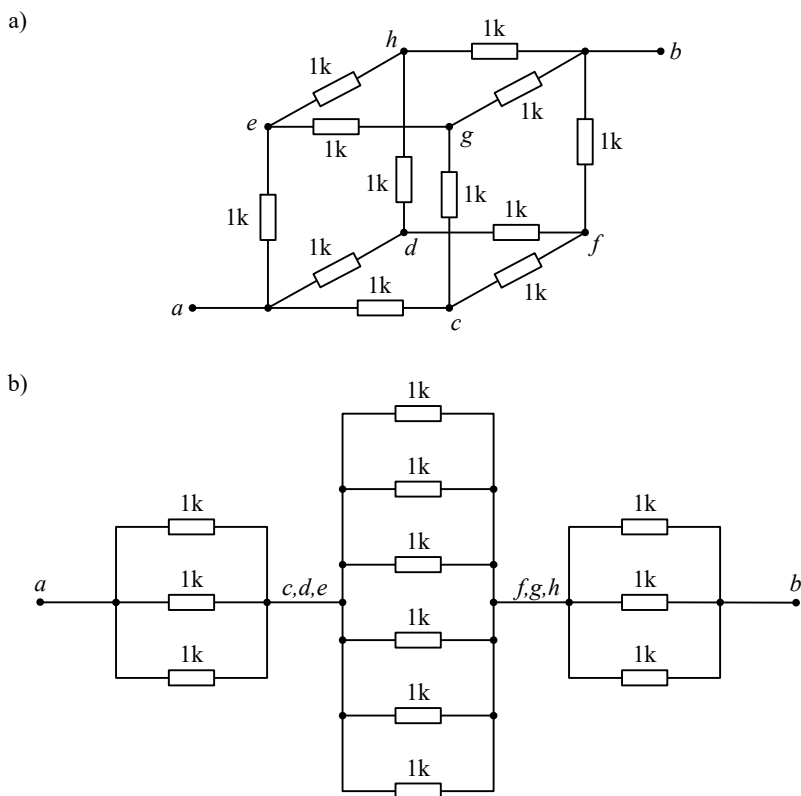
Należy pamiętać, że między zaciskami źródła prądu, które zasilają układ, występuje niezerowe napięcie. Dotyczy to tak źródeł idealnych, jak rzeczywistych.

---

## 2.7.2 Problemy rozwiązane

### Problem P2.1

Określić rezystancję zastępczą między  $a$  i  $b$  w obwodzie pokazanym na rys. 2.43a.



Rysunek 2.43: Obwody do problemu P2.1

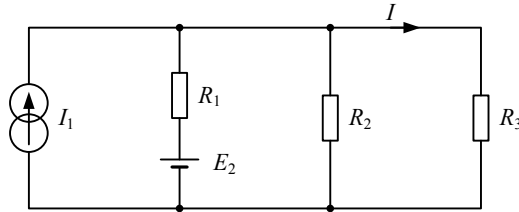
### Rozwiązanie

Założmy, że prąd wpływa z zewnątrz do sieci w węzle  $a$ , a wypływa z niej w węzle  $b$ . Ponieważ wszystkie rezystancje są równe, a połączenia — regularne, więc prąd musi rozplýwać się w równych częściach po gałęziach  $ac$ ,  $ad$  i  $ae$ . Zatem na odpowiednich rezystorach są równe spadki napięcia, a w węzłach  $c$ ,  $d$  i  $e$  jest taki sam potencjał. Analogicznie wnioskując o przepływie prądów w pozostałej części sieci, stwierdzamy, że jednakowe potencjały muszą występować też w węzłach  $f$ ,  $g$  i  $h$ . Wobec tego sześciang odpowiada układowi z rys. 2.43b, na podstawie którego łatwo jest wyznaczyć

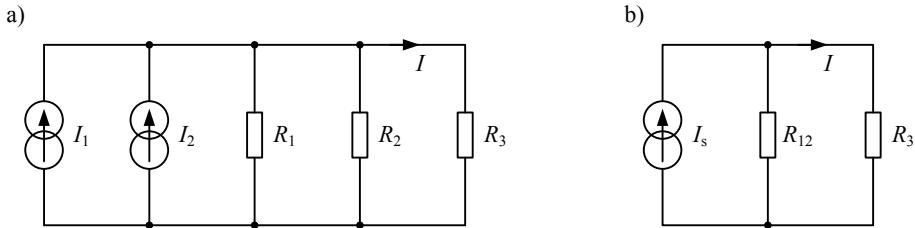
$$R_{ab} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \text{ [k}\Omega\text{]}$$

**Problem P2.2**

Przekształcając źródła, obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie z rys. 2.44. Dane są:  $I_1 = 1\text{ A}$ ,  $E_2 = 10\text{ V}$  oraz  $R_1 = R_2 = R_3 = 2\ \Omega$ .



Rysunek 2.44: Schemat do problemu P2.2



Rysunek 2.45: Schematy do rozwiązania problemu P2.2

**Rozwiązanie**

Źródło napięcia przekształcamy w równoważne źródło prądu o natężeniu

$$I_2 = \frac{E_2}{R_1} = \frac{10}{2} = 5\text{ [A]}$$

uzyskując układ taki jak na rys. 2.45a. Następnie upraszczamy obwód do postaci pokazanej na rys. 2.45b, gdzie

$$I_s = I_1 + I_2 = 6\text{ A}$$

zaś

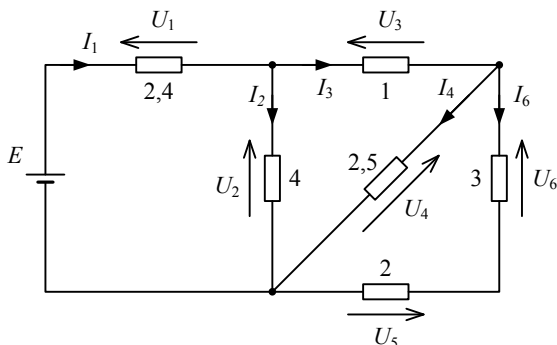
$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1\text{ [\Omega]}$$

Do obliczenia natężenia  $I$  wykorzystujemy wzór na dzielnik prądu:

$$I = \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} I_s = \frac{1}{1 + 2} 6 = 2\text{ [A]}$$

**Problem P2.3**

W obwodzie z rys. 2.46 wyznaczyć napięcie źródłowe, dla którego  $U_6 = 30\text{V}$ .



Rysunek 2.46: Schemat do problemu P2.3

**Rozwiązanie**

Wykorzystujemy prawo Ohma oraz prawa Kirchhoffa. Obliczając prąd lub napięcie związane z rezystorem, począwszy od  $3\Omega$ , uzyskujemy podstawę do ustalenia wartości związanych z następnym elementem:

$$I_6 = \frac{U_6}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ [A]}$$

$$U_5 = 2 I_6 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ [V]}$$

$$U_4 = U_5 + U_6 = 20 + 30 = 50 \text{ [V]}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{2,5} = \frac{50}{2,5} = 20 \text{ [A]}$$

$$I_3 = I_4 + I_6 = 20 + 10 = 30 \text{ [A]}$$

$$U_3 = 1 I_3 = 1 \cdot 30 = 30 \text{ [V]}$$

$$U_2 = U_3 + U_4 = 30 + 50 = 80 \text{ [V]}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{4} = \frac{80}{4} = 20 \text{ [A]}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 20 + 30 = 50 \text{ [A]}$$

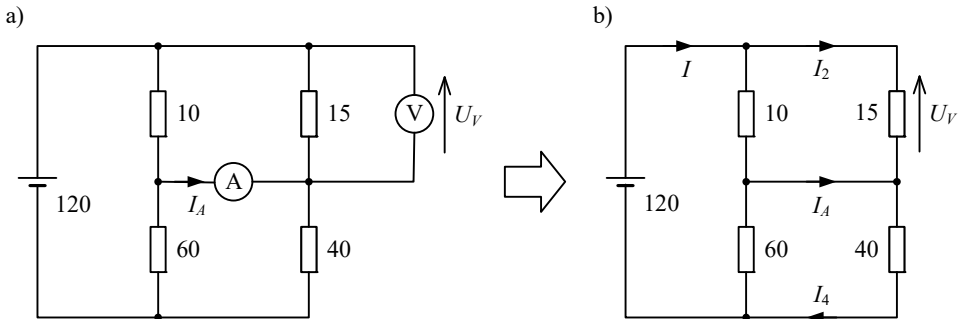
$$U_1 = 2,4 I_1 = 2,4 \cdot 50 = 120 \text{ [V]}$$

$$E = U_1 + U_2 = 120 + 80 = 200 \text{ [V]}$$



**Problem P2.4**

Określić prąd i napięcie wskazywane przez przyrządy pomiarowe, amperomierz (A) oraz woltomierz (V), w obwodzie z rys. 2.47a.



Rysunek 2.47: Obwody do problemu P2.4



Rysunek 2.48: Schematy zastępcze mierników elektrycznych: (a) amperomierza oraz (b) woltomierza

**Rozwiązanie**

Amperomierz jest przyrządem do pomiaru natężenia prądu, zaś woltomierz służy do mierzenia napięcia. Aby mierniki nie oddziaływały na badany układ, są one konstruowane w taki sposób, że między zaciskami amperomierza występuje bardzo mały opór, a między zaciskami woltomierza — bardzo duży.

Jeżeli potrzebne są bardzo dokładne wyniki pomiarów, to należy precyzyjnie określić rezystancje mierników. Aby rozwiązać zadanie, można jednak zastosować proste układy zastępcze z rys. 2.48, czyli przyjąć, że amperomierz ma zerową rezystancję (w jego miejscu jest zwarcie), a woltomierz ma rezystancję nieskończenie wielką (w odpowiednim miejscu jest przerwa). Takie założenia pozwalają nam rozpatrywać uproszczony układ, który pokazano na rys. 2.47b.

Rozpoczynamy od zredukowania sieci rezystorów i wyznaczenia prądu

$$I = \frac{120}{\frac{10 \cdot 15}{10 + 15} + \frac{60 \cdot 40}{60 + 40}} = 4 \text{ [A]}$$

który płynie w gałęzi ze źródłem napięcia. Następnie, korzystając ze wzoru na dzielnik prądu, obliczamy:

$$I_2 = \frac{10}{10 + 15} \cdot 4 = 1,6 \text{ [A]}$$

$$I_4 = \frac{60}{60 + 40} \cdot 4 = 2,4 \text{ [A]}$$

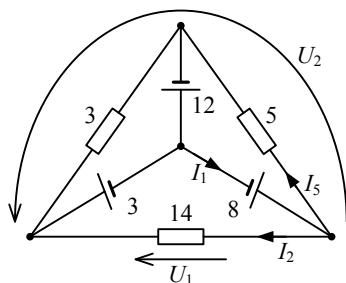
Na tej podstawie:

$$I_A = I_4 - I_2 = 2,4 - 1,6 = 0,8 \text{ [A]}$$

$$U_V = 15 \cdot I_2 = 15 \cdot 1,6 = 24 \text{ [V]}$$

### Problem P2.5

Obliczyć  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $I_1$  i  $I_2$  w obwodzie z rys. 2.49.



Rysunek 2.49: Schemat do problemu P2.5

### Rozwiązanie

Szukane napięcia są takie same:

$$U_1 = U_2 = 3 - 8 = -5 \text{ [V]}$$

co wynika z napięciowego prawa Kirchhoffa. Prąd  $I_2$  wyznaczamy z prawa Ohma:

$$I_2 = \frac{-U_1}{14} = \frac{5}{14} \text{ [A]}$$

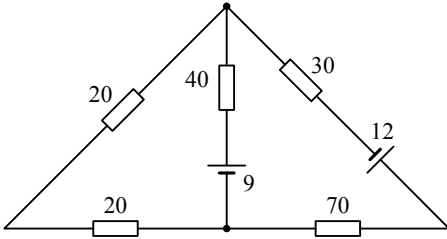
zaś  $I_1$  określamy na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa:

$$I_1 = I_2 + I_5 = \frac{5}{14} + \frac{8 + 12}{5} = 4 \frac{5}{14} \text{ [A]}$$

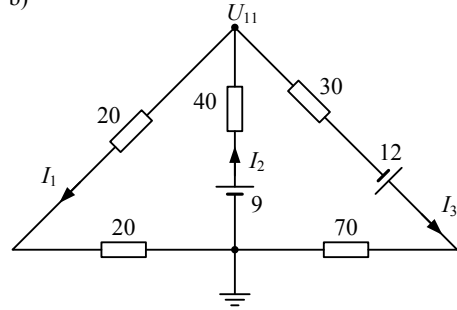
**Problem P2.6**

Metodą potencjałów węzłowych obliczyć natężenia prądów w układzie z rys. 2.50a.

a)



b)



Rysunek 2.50: Obwody do problemu P2.6

**Rozwiązanie**

W obwodzie są tylko dwa węzły. Jeżeli przypiszemy zerowy potencjał do jednego z nich, czyli uziemy ten węzeł, to do wyznaczenia pozostanie tylko potencjał drugiego. Zatem oznaczymy potencjały tak jak na rys. 2.50b. Konduktancja własna węzła, którego potencjał  $U_{11}$  należy określić, wynosi:

$$G_{11} = \frac{1}{20+20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{30+70} = \frac{3}{50} \text{ [S]}$$

a zasila go prąd źródłowy

$$I_{11} = \frac{9}{40} - \frac{12}{30+70} = \frac{21}{200} \text{ [A]}$$

Wobec tego

$$G_{11}U_{11} = I_{11} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{50}U_{11} = \frac{21}{200} \quad \Rightarrow \quad U_{11} = 1,75 \text{ V}$$

i możemy przystąpić do wyznaczania prądów:

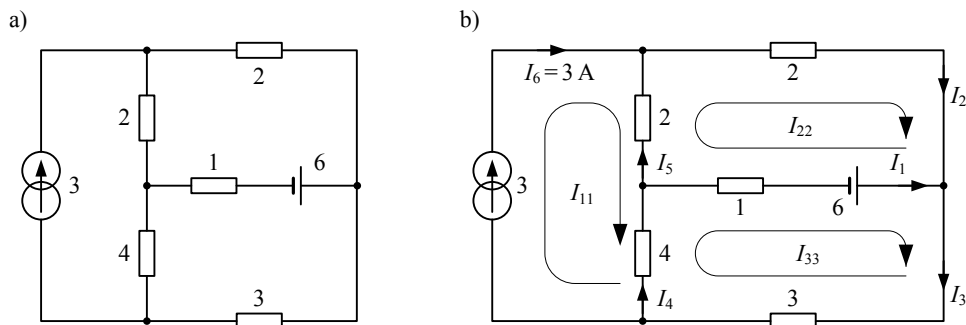
$$I_1 = \frac{U_{11}}{40} = 43,75 \text{ [mA]}$$

$$U_{40} = 9 - U_{11} = 7,25 \text{ [V]} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{U_{40}}{40} = 181,25 \text{ [mA]}$$

$$U_{30+70} = 12 + 1,75 = 13,75 \text{ [V]} \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{U_{30+70}}{30+70} = 137,5 \text{ [mA]}$$

**Problem P2.7**

Metodą prądów oczkowych dokonać analizy obwodu z rys. 2.51a. Porównać przebieg obliczeń i wynik z przykładem 2.16, który dotyczy tego samego układu i metody potencjałów węzłowych.



Rysunek 2.51: Schematy do problemu P2.7

**Rozwiązanie**

Wybermy oczka i oznaczmy prądy oczkowe tak jak na rys. 2.51b. Źródło prądu występuje tylko w jednym oczku, co jest zgodne z zaleceniami uzupełniającymi opis metody prądów oczkowych (uwaga 2.3 i rys. 2.29). Dzięki temu od razu znany natężenie:

$$I_{11} = I_6 = 3A$$

Następnie obliczamy rezystancje własne:

$$R_{22} = 2 + 2 + 1 = 5 [\Omega] \quad R_{33} = 1 + 3 + 4 = 8 [\Omega]$$

rezystancje wzajemne:

$$R_{12} = R_{21} = -2\Omega \quad R_{23} = R_{32} = -1\Omega \quad R_{31} = R_{13} = -4\Omega$$

oraz napięcia źródłowe:

$$E_{22} = -6V \quad E_{33} = 6V$$

związane z pozostałymi oczkami. Na tej podstawie tworzymy układ równań:

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

który od razu można uprościć do postaci:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \end{bmatrix}$$

uwzględniając, że  $I_{11} = 3\text{ A}$ . Rozwiązując układ, otrzymujemy pozostałe prądy oczkowe:

$$I_{22} = 0,46\text{ A} \quad I_{33} = 2,31\text{ A}$$

Dysponując niezbędnymi danymi, możemy obliczyć prądy w obwodzie:

$$I_1 = I_{33} - I_{22} = 2,31 - 0,46 = 1,85\text{ [A]}$$

$$I_2 = I_{22} = 0,46\text{ A}$$

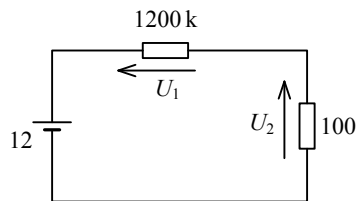
$$I_3 = I_{33} = 2,31\text{ A}$$

$$I_4 = I_{33} - I_{11} = 2,31 - 3 = -0,69\text{ [A]}$$

$$I_5 = I_{22} - I_{11} = 0,46 - 3 = -2,54\text{ [A]}$$

### Problem P2.8

Wyznaczyć spadki napięcia na rezystorach w obwodzie z rys. 2.52.



Rysunek 2.52: Schemat do problemu P2.8

### Rozwiązanie

Rezystory są połączone szeregowo, więc spadki można określić ze wzoru na dzielnik napięcia:

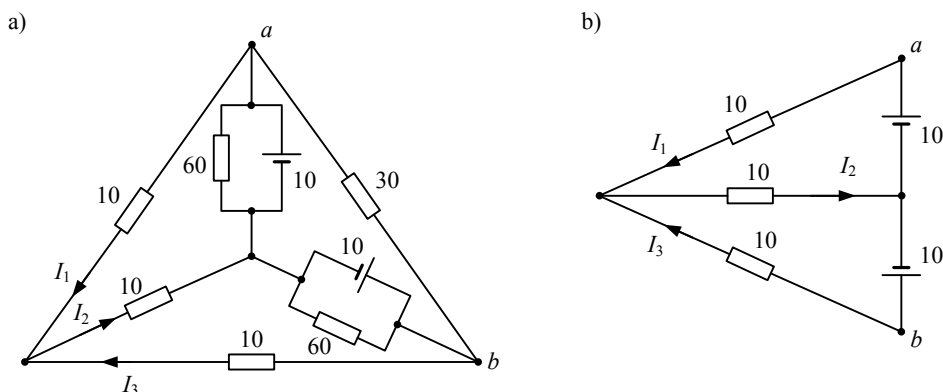
$$U_1 = \frac{1200000}{100 + 1200000} \cdot 12 = 11,999\text{ V}$$

$$U_2 = \frac{100}{100 + 1200000} \cdot 12 = 0,000999\text{ [V]} \approx 1\text{ [mV]}$$

Napięcie źródła prawie w całości odkłada się na oporniku o większej rezystancji.

**Problem P2.9**

Obliczyć natężenia prądów, które płyną przez rezystory  $10\Omega$  oraz  $60\Omega$  w obwodzie z rys. 2.53a.



Rysunek 2.53: Schematy do problemu P2.9

**Rozwiązanie**

Prąd nie płynie przez rezystor  $30\Omega$ , ponieważ różnica potencjałów między zaciskami tego opornika jest zerowa. Wynika to ze sposobu włączenia źródeł  $10V$ , których napięcia wzajemnie znoszą się, jeżeli są rozpatrywane ze strony zacisków tego rezystora.

Natężenia prądów, które płyną przez rezystory  $60\Omega$  połączone równolegle ze źródłami  $10V$ , można obliczyć z prawa Ohma:

$$I_{60} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ [A]}$$

Nie zależą one od pozostałej części obwodu i nie wpływają w żaden sposób na prądy  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I_3$ , które można określić, rozpatrując uproszczony układ z rys. 2.53b. Taki obwód opisują równania:

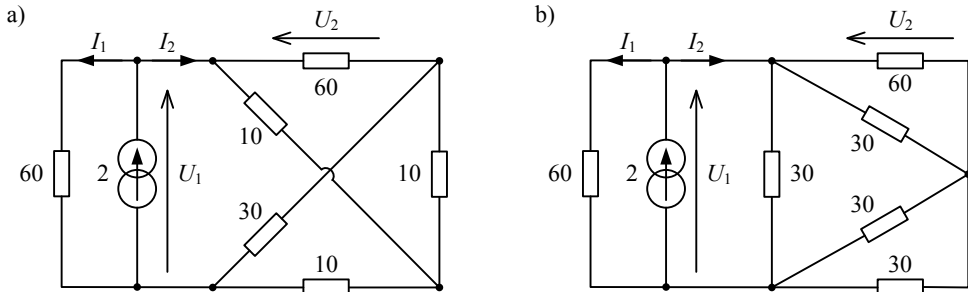
$$\begin{cases} 10 \cdot I_2 + 10 \cdot I_1 = 10 \\ 10 \cdot I_2 + 10 \cdot I_3 = 10 \\ I_1 + I_3 = I_2 \end{cases}$$

z których wynika, że

$$I_1 = I_3 = \frac{1}{3} \text{ A} \qquad I_2 = \frac{2}{3} \text{ A}$$

**Problem P2.10**

Obliczyć wartości napięć i prądów, które zaznaczono w obwodzie z rys. 2.54a.



Rysunek 2.54: Schematy do problemu P2.10

**Rozwiązanie**

Należy zauważyć, że trzy rezystory  $10\Omega$  tworzą gwiazdę. Przekształcamy ją w równoważny trójkąt złożony z trzech oporników po  $30\Omega$  każdy, otrzymując układ z rys. 2.54b.

Sieć rezystorów po prawej stronie schematu można zredukować:

$$R_{30\parallel 60} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60} = 20 [\Omega]$$

$$R_{30\parallel 30} = \frac{30 \cdot 30}{30 + 30} = 15 [\Omega]$$

i zastąpić oporem

$$R_{\text{eq}} = \frac{30 \cdot (R_{30\parallel 60} + R_{30\parallel 30})}{30 + (R_{30\parallel 60} + R_{30\parallel 30})} = \frac{30 \cdot (20 + 15)}{30 + (20 + 15)} = \frac{30 \cdot 35}{65} = 16,15 [\Omega]$$

Mając równoległe połączenie źródła prądu i dwóch oporników, szukane natężenia prądów możemy łatwo obliczyć ze wzoru na dzielnik prądu:

$$I_1 = \frac{R_{\text{eq}}}{60 + R_{\text{eq}}} \cdot 2 = \frac{16,15}{60 + 16,15} \cdot 2 = 0,42 [\text{A}]$$

$$I_2 = \frac{60}{60 + R_{\text{eq}}} \cdot 2 = \frac{60}{60 + 16,15} \cdot 2 = 1,58 [\text{A}]$$

Następnie jeden spadek napięcia uzyskujemy z prawa Ohma:

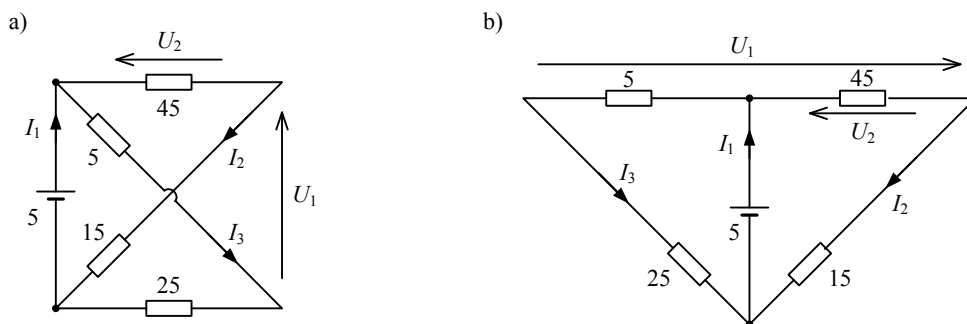
$$U_1 = 60 \cdot I_1 = 60 \cdot 0,42 = 25,2 [\text{V}]$$

a drugi — ze wzoru na dzielnik napięcia:

$$U_2 = \frac{R_{30\parallel 60}}{R_{30\parallel 60}} + R_{30\parallel 30} U_1 = \frac{20}{20 + 15} \cdot 25,2 = 14,4 \text{ [V]}$$

### Problem P2.11

Obliczyć prądy i napięcia zaznaczone w obwodzie z rys. 2.55a.



Rysunek 2.55: Schematy do problemu P2.11

### Rozwiązanie

Rozpoczynamy od przerysowania schematu w bardziej przejrzystej formie, którą pokazano na rys. 2.55b. Następnie obliczamy natężenia prądów:

$$I_2 = \frac{5}{45 + 15} = \frac{1}{12} \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{5}{5 + 25} = \frac{1}{6} \text{ [A]}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = 0,25 \text{ [A]}$$

które z kolei wykorzystujemy do wyznaczenia spadków napięć:

$$U_2 = 45 \cdot I_2 = 45 \cdot \frac{1}{12} = 3,75 \text{ [V]}$$

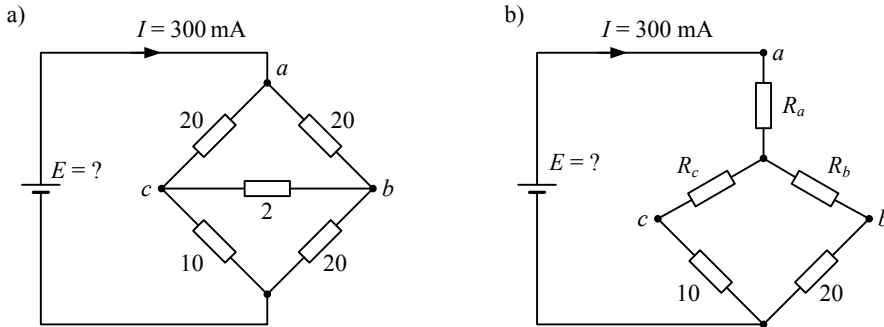
$$0 = U_1 + U_2 - 5 \cdot I_3$$

$$U_1 = 5 \cdot I_3 - U_2 = 5 \cdot \frac{1}{6} - 3,75 = -2,92 \text{ [V]}$$



**Problem P2.12**

Znając natężenie prądu  $I = 300 \text{ mA}$ , ustalić napięcie źródła  $E$  zasilającego obwód z rys. 2.56a.



Rysunek 2.56: Schematy do problemu P2.12

**Rozwiązanie**

Najpierw upraszczamy obwód do postaci z rys. 2.56b, przekształcając trójkąt  $abc$  w równoważną gwiazdę:

$$R_a = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20 + 2} = \frac{400}{42} = 9,52 \text{ } [\Omega]$$

$$R_b = R_c = \frac{2 \cdot 20}{20 + 20 + 2} = \frac{40}{42} = 0,95 \text{ } [\Omega]$$

Umożliwia to nam ustalenie rezystancji zastępczej:

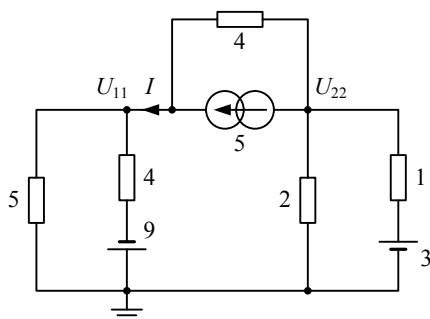
$$R_{\text{eq}} = R_a + \frac{(R_c + 10) \cdot (R_b + 20)}{(R_c + 10) + (R_b + 20)} = 9,52 + \frac{10,95 \cdot 20,95}{10,95 + 20,95} = 16,71 \text{ } [\Omega]$$

która jest równoważna całej sieci oporników. Na mocy prawa Ohma

$$E = I \cdot R_{\text{eq}} = 0,3 \cdot 16,71 = 5 \text{ } [\text{V}]$$

**Problem P2.13**

Metodą potencjałów węzłowych obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie z rys. 2.57. Potencjał odniesienia został ustalony tak, jak pokazano na schemacie.



Rysunek 2.57: Obwody do problemu P2.13

**Rozwiązanie**

Aby określić potencjały węzłowe, które są niezbędne do obliczenia  $I$ , wyznaczamy konduktancje:

$$G_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{10} \text{ [S]}$$

$$G_{22} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75 \text{ [S]}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{4} \text{ [S]}$$

oraz natężenia prądów:

$$I_{11} = 5 - \frac{9}{4} = 2,75 \text{ [A]}$$

$$I_{22} = -5 + \frac{3}{1} = -2 \text{ [A]}$$

Następnie konstruujemy odpowiedni układ równań:

$$\begin{bmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,25 & 1,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,75 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując ten układ, poznajemy wartości potencjałów:

$$U_{11} = 3,71 \text{ V}$$

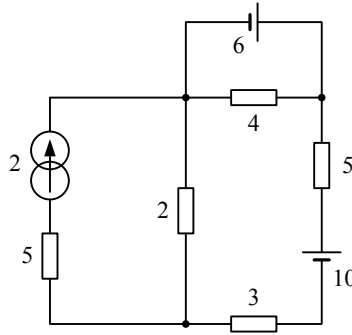
$$U_{22} = -0,61 \text{ V}$$

które wykorzystujemy w równaniu:

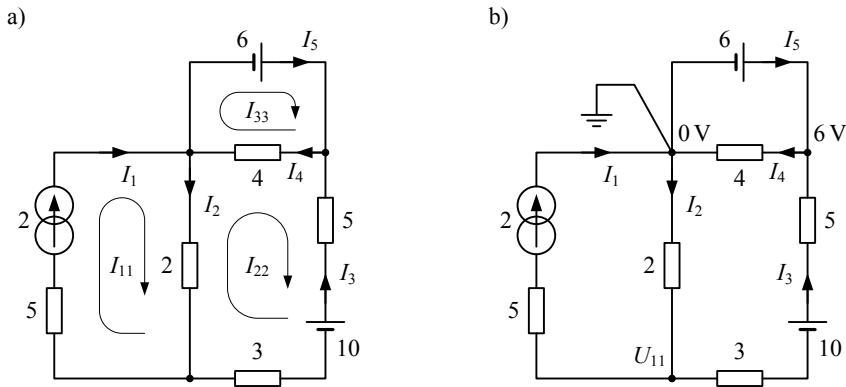
$$I = 5 + \frac{U_{22} - U_{11}}{4} = 5 + \frac{-0,61 - 3,71}{4} = 3,92 \text{ [A]}$$

**Problem P2.14**

Stosując metodę prądów oczkowych i metodę potencjałów węzłowych, obliczyć natężenia prądów w obwodzie z rys. 2.58.



Rysunek 2.58: Schemat do problemu P2.14



Rysunek 2.59: Schematy do rozwiązania problemu P2.14

**Rozwiązanie: Metoda prądów oczkowych**

Wybieramy oczka tak jak na rys. 2.59a. Wybór jest korzystny, gdyż źródło prądu występuje tylko w jednym oczku. Dzięki temu od razu znamy natężenie:

$$I_{11} = 2A$$

Następnie konstruujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2 \cdot I_{11} + (4 + 5 + 3 + 2) \cdot I_{22} - 4 \cdot I_{33} = -10 \\ 0 \cdot I_{11} - 4 \cdot I_{22} + 4 \cdot I_{33} = 6 \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} -4 + 14 \cdot I_{22} - 4 \cdot I_{33} = -10 \\ -4 \cdot I_{22} + 4 \cdot I_{33} = 6 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są:

$$I_{22} = 0 \text{ A} \quad \text{i} \quad I_{33} = 1,5 \text{ A}$$

Wobec tego prądy gałęziowe mają następujące natężenia:

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 2 - 0 = 2 \text{ [A]}$$

$$I_3 = -I_{22} = 0 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{33} - I_{22} = 1,5 - 0 = 1,5 \text{ [A]}$$

$$I_5 = I_{33} = 1,5 \text{ A}$$

### Rozwiązanie: Metoda potencjałów węzłowych

Aby ułatwić rozwiązanie zadania, najlepiej ustalić potencjał zero tak, jak pokazano na rys. 2.59b. Od razu znamy potencjał drugiego węzła, do którego prowadzi gałąź zawierająca tylko źródło napięcia 6V. Źródło ustala różnicę między potencjałami węzłów, więc nie zależy ona od parametrów i sposobu połączenia pozostałych elementów obwodu.

Podobnie źródło 2A określa natężenie prądu, który płynie przez rezystor  $5\Omega$  połączony szeregowo z tym źródłem. Można nie uwzględniać wymienionego opornika w równaniach węzłowych, co ułatwi ich rozwiązanie, ale nie zmieni wyniku.

Dalej postępujemy już standardowo według metody potencjałów węzłowych, czyli obliczamy:

$$G_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3+5} = \frac{5}{8} \text{ [S]}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{3+5} = -\frac{1}{8} \text{ [S]}$$

$$I_{11} = -2 - \frac{10}{3+5} = -\frac{26}{8} \text{ A}$$

a następnie zapisujemy i rozwiązujemy równanie, w którym niewiadomą jest jedyny nieznan potencjał węzłowy:

$$\frac{5}{8} \cdot U_{11} - \frac{1}{8} \cdot 6 = -\frac{26}{8}$$

$$U_{11} = -4 \text{ V}$$

Znając potencjały wszystkich węzłów, obliczamy prądy:

$$I_1 = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{0 - U_{11}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ [A]}$$

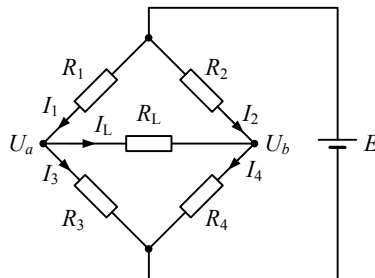
$$I_3 = \frac{(U_{11} - 6) + 10}{3 + 5} = \frac{0}{8} = 0 \text{ [A]}$$

$$I_4 = \frac{6 - 0}{4} = 1,5 \text{ [A]}$$

$$I_5 = I_4 - I_3 = 1,5 - 0 = 1,5 \text{ [A]}$$

**Problem P2.15**

Udowodnić, że jeżeli  $R_1 = 30\Omega$ ,  $R_2 = 90\Omega$ ,  $R_3 = 20\Omega$ , a  $R_4 = 60\Omega$  w obwodzie z rys. 2.60, to prąd nie płynie przez  $R_L$ , niezależnie od rezystancji  $R_L$  i napięcia  $E$ .



Rysunek 2.60: Schemat do problemu P2.15: mostek Wheatstone'a

**Wskazówka**

Rozpatrywany obwód jest nazywany mostkiem Wheatstone'a<sup>4</sup> i znajduje praktyczne zastosowania, szczególnie w miernictwie elektrycznym.

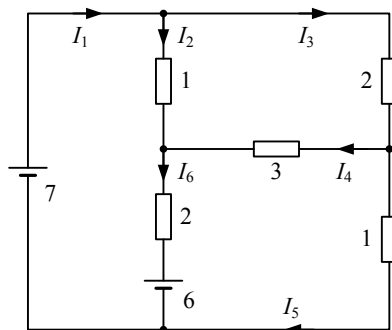
O jego użyteczności decyduje taka charakterystyczna właściwość, że w stanie zrównoważenia (ang. *balance*), gdy  $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ , prąd nie płynie przez  $R_L$ , czyli  $I_L = 0$ , niezależnie od  $R_L$  i  $E$ . Można dowieść tego za pomocą praw Kirchhoffa lub metodą prądów oczkowych, rozpatrując trzy niezależne oczka. Należy wykazać, że w stanie równowagi  $U_a = U_b$ , czyli nie ma na  $R_L$  napięcia, które powodowałyby przepływ prądu. Z innego punktu widzenia w stanie równowagi  $I_1 = I_3$  a  $I_2 = I_4$ , czyli  $I_L = I_1 - I_3 = I_4 - I_2 = 0$ .

Należy też zauważyć, że dany problem można rozwiązać łatwiej i szybciej innymi metodami, co zostało pokazane w rozdziale 3 (zob. Q3.1 i P3.13).

<sup>4</sup> Charles Wheatstone (1802–1875) — brytyjski naukowiec i wynalazca; wynalazł mostek, potrzebując narzędzia do pomiaru nieznanych rezystancji.

**Problem P2.16**

Obliczyć prądy w obwodzie z rys. 2.61, wykorzystując prawa Kirchhoffa.



Rysunek 2.61: Schemat do problemu P2.16

**Rozwiązanie**

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa:

$$0 = 7 - 1 \cdot I_2 - 2 \cdot I_6 - 6$$

$$0 = 1 \cdot I_2 - 2 \cdot I_3 - 3 \cdot I_4$$

$$0 = 6 + 2 \cdot I_6 + 3 \cdot I_4 - 1 \cdot I_5$$

a na podstawie prawa prądowego:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_2 + I_4 = I_6$$

$$I_3 = I_4 + I_5$$

Rozwiązując układ sześciu równań, otrzymujemy:

$$I_1 = 3\text{A} \quad I_2 = 1\text{A} \quad I_3 = 2\text{A}$$

$$I_4 = -1\text{A} \quad I_5 = 3\text{A} \quad I_6 = 0\text{A}$$

**Problem P2.17**

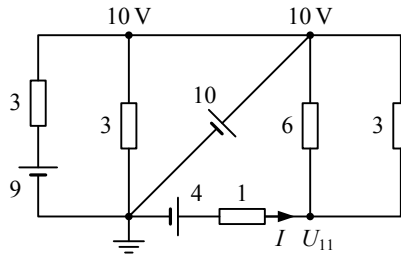
Wykorzystać uwagę 2.5 o metodzie prądów oczkowych do ustalenia natężenia prądu, który płynie przez źródło 6V w obwodzie z rys. 2.51a. Wynik porównać z rozwiązaniami problemu P2.7 oraz przykładu 2.16, które dotyczyły analizy tego samego obwodu.

**Wskazówka**

Należy wzorować się na przykładzie 2.13, który dotyczy podobnego obwodu, czyli uprościć układ przed przystąpieniem do obliczania natężenia prądu.

**Problem P2.18**

Metodą potencjałów węzłowych obliczyć prąd  $I$  w obwodzie z rys. 2.62.



Rysunek 2.62: Schemat do problemu P2.18

**Rozwiązanie**

Za wyjątkiem  $U_{11}$ , potencjały węzłów znany od razu. Dwa mają wartość 10V, a potencjał zerowy występuje w węźle, który został uziemiony. Metodę potencjałów węzłowych wykorzystujemy więc do skonstruowania i rozwiązania tylko jednego równania:

$$G_{11} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1,5 \text{ [S]}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ [S]}$$

$$I_{11} = \frac{4}{1} = 4 \text{ [A]}$$

$$\frac{3}{2} \cdot U_{11} - \frac{1}{2} \cdot 10 = 4 \quad \Rightarrow \quad U_{11} = (5 + 4) \cdot \frac{2}{3} = 6 \text{ [V]}$$

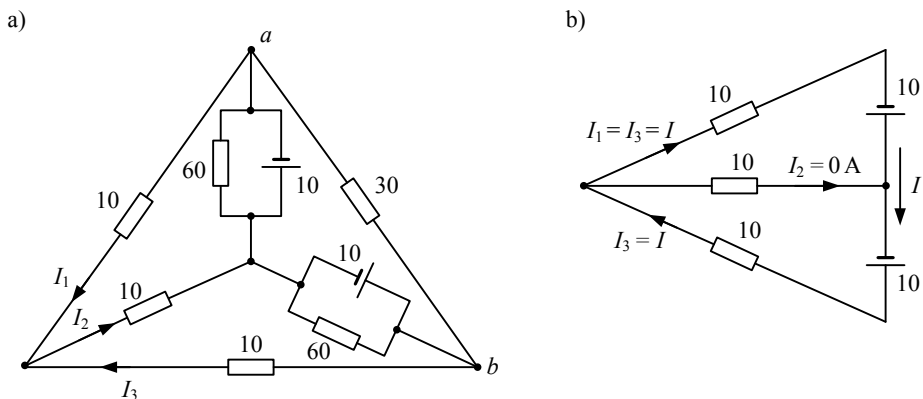
Znając potencjał  $U_{11}$ , możemy obliczyć szukany prąd:

$$I = \frac{4 - U_{11}}{1} = -2 \text{ [A]}$$

Minus oznacza, że prąd płynie w kierunku przeciwnym do danej strzałki.

**Problem P2.19**

W obwodzie, którego dotyczył problem P2.9, odwrócono jedno ze źródeł napięcia, uzyskując układ z rys. 2.63a. Jak ta modyfikacja wpłynęła na natężenia prądów?



Rysunek 2.63: Obwody do problemu P2.19

**Wskazówka**

W zmodyfikowanym układzie prąd, który płynie przez rezystor  $30\Omega$ , ma natężenie  $20/30\text{A}$ . Pozostałą część obwodu można uprościć, podobnie jak w rozwiązaniu problemu P2.9, uzyskując układ z rys. 2.63b.

Symetria układu powoduje, że prąd

$$I = (10 + 10) / (10 + 10) = 1 \text{ [A]}$$

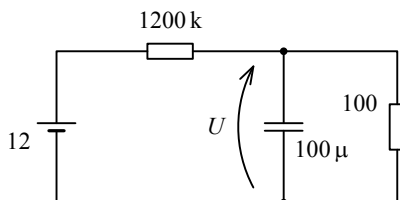
płynie w obydwu zewnętrżnych gałęziach, które zawierają źródła napięcia. Wobec tego prąd nie płynie w środkowej gałęzi, czyli  $I_2 = 0\text{A}$ .

Ponieważ przyjęte kierunki pozostałych szukanych prądów są zgodne ze zwrotem  $I$ , to

$$I_1 = I_3 = I = 1 \text{ A}$$

**Problem P2.20**

Ustalić napięcie  $U$  na kondensatorze w obwodzie z rys. 2.64.



Rysunek 2.64: Schemat do problemu P2.20

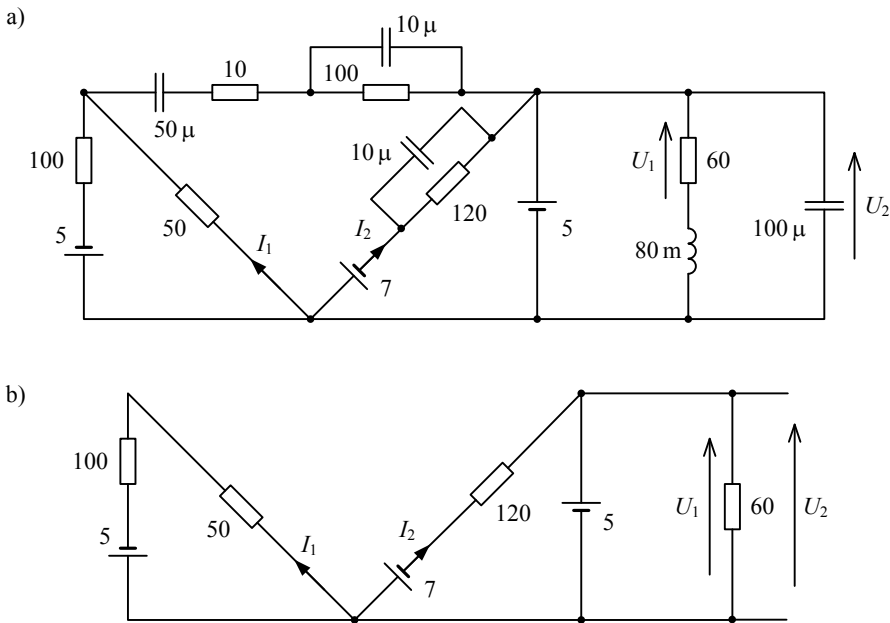


**Rozwiązanie**

Różnica potencjałów między zaciskami kondensatora jest równa napięciu na rezystorze  $100\Omega$ , gdyż elementy są połączone równolegle. W obwodzie prądu stałego kondensator stanowi rozwarcię, więc można przyjąć, że rezystory są połączone szeregowo, tak samo jak w układzie z problemu P2.8. Wobec tego spadek napięcia na kondensatorze wynosi około 1 mV.

**Problem P2.21**

Obliczyć prądy i napięcia, które zaznaczono w obwodzie z rys. 2.65a.



Rysunek 2.65: Schematy do problemu P2.21

**Wskazówka**

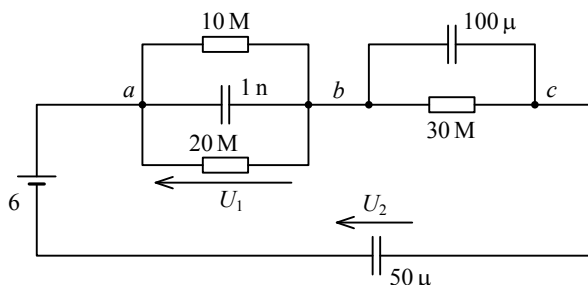
Jest to obwód prądu stałego, więc można z niego usunąć kondensatory. W uproszczonym obwodzie, który pokazano na rys. 2.65b, szukane wielkości można wyznaczyć znacznie łatwiej:

$$U_1 = U_2 = 5V$$

$$I_1 = \frac{5}{100 + 50} = \frac{1}{30} [A] \qquad I_2 = \frac{-7 - 5}{120} = -0,1 [A]$$

**Problem P2.22**

Wyznaczyć napięcia  $U_1$  i  $U_2$  w obwodzie z rys. 2.66.



Rysunek 2.66: Schemat do problemu P2.22

**Rozwiązanie**

Kondensatory nie pozwalają by prąd płynął w gałęziach, które je zawierają, tak jakby w odpowiednich miejscach były przerwy, rozswarcia. W szczególności kondensator  $50\mu\text{F}$  sprawia, że nie ma żadnej ścieżki, którą prąd mógłby płynąć przez rezystory, od jednego zacisku źródła do drugiego.

Wobec braku prądu, na mocy prawa Ohma, na opornikach są zerowe napięcia, czyli  $U_1 = 0\text{V}$ , zaś w punktach  $a$ ,  $b$  i  $c$  jest taki sam potencjał. Rozpatrując bilans napięć dla oczka obejmującego źródło, kondensator  $50\mu\text{F}$  oraz rezystory  $30\text{M}\Omega$  i  $20\text{M}\Omega$  lub  $10\text{M}\Omega$ , stwierdzamy, że całe napięcie zasilające obwód odkłada się na kondensatorze, czyli  $U_2 = -6\text{V}$ . Znak minus oznacza, że faktyczny zwrot napięcia jest przeciwny do założonego, który wskazano strzałką.

**2.7.3 Quiz****Quiz 2.1**

Obliczyć różnicę potencjałów między węzłami  $a$  i  $f$  w układzie z rys. 2.67.

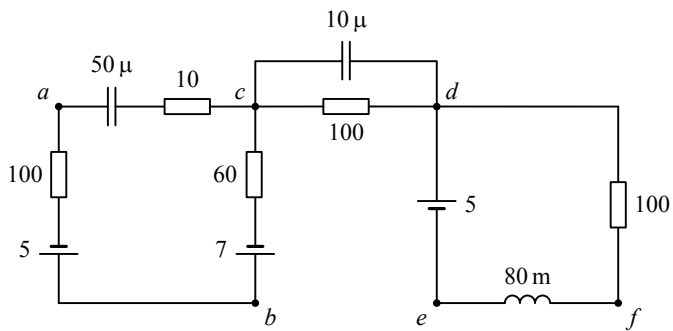
**Rozwiązanie**

W oczku pierwszym od lewej prąd nie płynie, ponieważ nie pozwala na to kondensator, naładowany wskutek działania źródeł napięcia stałego.

Między  $c$  i  $d$  jest zerowa różnica potencjałów, bo prąd nie płynie przez rezystor  $100\Omega$ , co wynika z braku zamkniętej drogi dla ruchu ładunków. Z innego punktu widzenia nie ma różnicy napięć między  $c$  i  $d$ , która wymuszałaby przepływ prądu.

Między  $d$  a  $f$  występuje napięcie  $-5\text{V}$ , gdyż nie ma spadku napięcia na cewce  $80\text{mH}$ , która stanowi zwarcie w obwodzie prądu stałego. Wobec tego

$$U_{af} = -5 + 7 + 5 = 7 [\text{V}]$$



Rysunek 2.67: Schemat do quizu 2.1

---

## Rozdział 3

# Twierdzenia stosowane do analizowania obwodów elektrycznych

### Wprowadzenie

Niniejszy rozdział przedstawia twierdzenia, które są wykorzystywane do analizowania niezmiennych w czasie, liniowych układów o elementach skupionych. Twierdzenia rozpatrujemy w odniesieniu do obwodów prądu stałego, ale większość z nich można stosować także do układów zasilanych źródłami sinusoidalnego napięcia i prądu. Zostanie to pokazane w rozdziałach 4 i 5.

### 3.1 Pojęcie liniowości i zasada superpozycji

W podrozdziale 1.13, w punkcie dotyczącym twierdzenia o liniowości objaśniono, w jaki sposób można zweryfikować liniowość systemu, i określono warunki, które element lub obwód musi spełniać, by można było nazywać go liniowym.

Znana jest jednak inna forma twierdzenia o liniowości, opierająca się bezpośrednio na prawach Kirchhoffa: jeżeli wszystkie równania

$$\sum I = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum RI = \sum E \quad (3.1)$$

które można zapisać dla obwodu na mocy praw Kirchhoffa, prądowego i napięciowego, są liniowe, czyli wszystkie  $R$  i  $E$  są stałymi, to ten obwód jest liniowy.

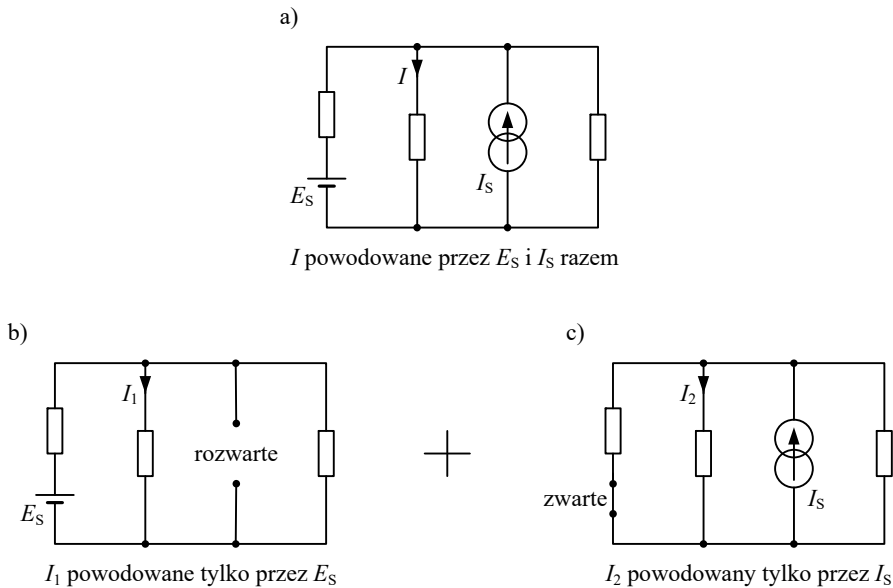
Obwody liniowe można analizować, wykorzystując zasadę superpozycji: w liniowej sieci, która zawiera dwa lub więcej źródeł, odpowiedź na jednoczesne oddziaływanie wszystkich źródeł jest określona sumą odpowiedzi na indywidualne oddziaływania poszczególnych źródeł. Zasadę superpozycji można zatem uznać za alternatywną definicję liniowości.

Aby wyjaśnić zasadę superpozycji, rozpatrzmy obwód z rys. 3.1a. Chociaż prąd  $I$  można wyznaczyć dowolną metodą analizy obwodu, zasada superpozycji pozwala dokonać tego szczególnie łatwo.

Niech najpierw działa samo źródło napięcia  $E_S$ , zatem wyłączamy źródło prądu  $I_S$ , zastępując je rozwarciem. Obliczamy natężenie prądu  $I_1$  w wynikowym obwodzie, który pokazano na rys. 3.1b.

Z powrotem włączamy źródło prądu  $I_S$ , a wyłączamy źródło napięcia  $E_S$ , zastępując je zwarcie. W wynikowym obwodzie, który widnieje na rys. 3.1c, wyznaczamy natężenie prądu  $I_2$ .

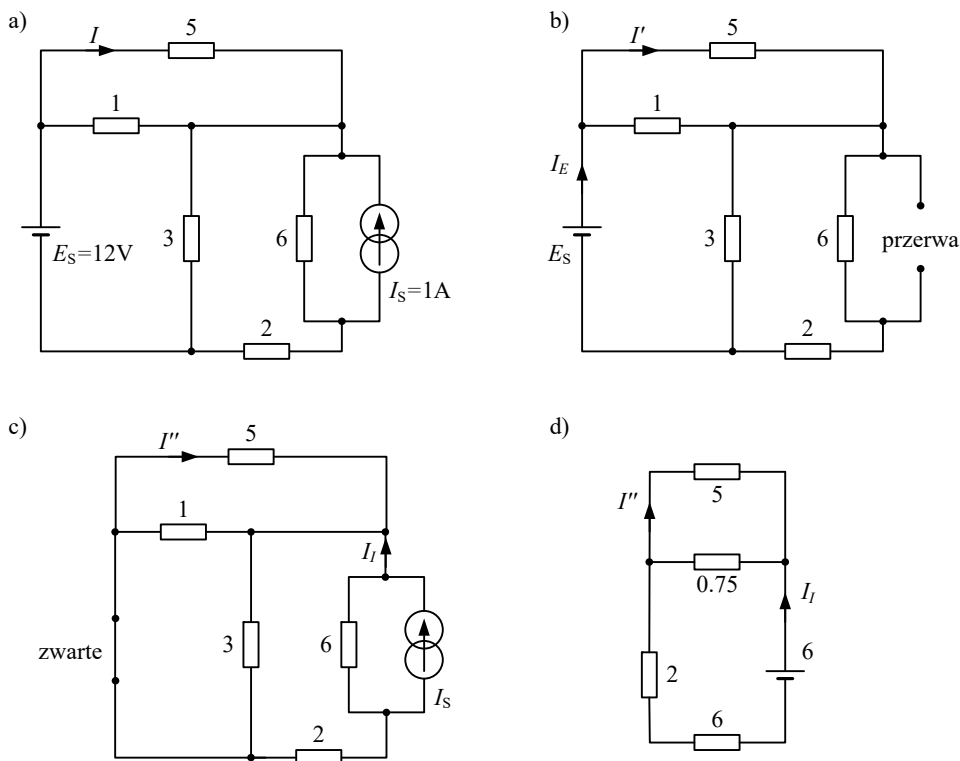
W efekcie tych działań otrzymujemy komplet wartości potrzebnych do obliczenia natężenia prądu  $I$ , który płynie wskutek jednoczesnego działania obydwu źródeł. Ponieważ obydwa prądy cząstkowe są skierowane zgodnie z  $I$ , szukane natężenie jest równe ich sumie:  $I = I_1 + I_2$ .



Rysunek 3.1: Ilustracja zasady superpozycji:  $I = I_1 + I_2$

**Przykład 3.1**

Wykorzystując zasadę superpozycji, obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie pokazanym na rys. 3.2a.



Rysunek 3.2: Schematy do przykładu 3.1

**Rozwiązanie**

Zaczynamy od rozpatrzenia obwodu z rys. 3.2b, w którym źródło prądu zastąpiono rozwarciem, tak że działa tylko  $E_S$ . Przez źródło napięcia płynie prąd

$$I_E = \frac{12}{\frac{1 \cdot 5}{1+5} + \frac{(2+6) \cdot 3}{(2+6)+3}} = 3,98 \text{ [A]}$$

Następnie, stosując wzór na dzielnik prądu, obliczamy

$$I' = \frac{1}{1+5} \cdot 3,98 = 0,66 \text{ [A]}$$

Teraz interesuje nas oddziaływanie  $I_s$ , czyli włączamy je z powrotem, a źródło napięcia zastępujemy zwarcie. Wynikowy układ pokazano na rys. 3.2c, ale można sprowadzić go do prostszej postaci, redukując równoległe połączenie rezystorów i przekształcając źródło prądu w źródło napięcia.

W uproszczonym obwodzie, który widzimy na rys. 3.2d, najpierw określamy

$$I_I = \frac{6}{2 + 6 + \frac{0,75 \cdot 5}{0,75 + 5}} = 0,69 \text{ [A]}$$

a następnie wykorzystujemy wzór na dzielnik prądu do obliczenia

$$I'' = -\frac{0,75}{0,75 + 5} \cdot 0,69 = -0,09 \text{ [A]}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji prąd  $I$  stanowi sumę prądów cząstkowych  $I'$  i  $I''$ :

$$I = I' + I'' = 0,66 - 0,09 = 0,57 \text{ [A]}$$

□

## 3.2 Dowód zasady superpozycji

Rozpatrzmy układ równań oczkowych (2.28) i jego rozwiązanie określone wyrażeniem (2.31) dla  $k = 1, 2, \dots, M$ . Przyjmijmy, że chcemy obliczyć prąd  $I_1$  ( $k = 1$ ) w obwodzie o trzech niezależnych pętach, czyli  $M = 3$ . W takim razie układ (2.28) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} R_{11}I_1 - R_{12}I_2 - R_{13}I_3 &= E_{11} \\ -R_{21}I_1 + R_{22}I_2 - R_{23}I_3 &= E_{22} \\ -R_{31}I_1 - R_{32}I_2 + R_{33}I_3 &= E_{33} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Obliczamy wyznacznik

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

i ze wzoru (2.31) uzyskujemy natężenie prądu

$$I_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & -R_{23} \\ E_{33} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = E_{11} \frac{A_{11}}{D} - E_{22} \frac{A_{21}}{D} + E_{33} \frac{A_{31}}{D} \quad (3.3)$$

gdzie  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  oraz  $A_{13}$  są algebraicznymi dopełnieniami odpowiednio  $R_{11}$ ,  $R_{21}$  i  $R_{31}$ , czyli:

$$\begin{aligned} A_{11} &= R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32} \\ A_{21} &= -R_{12}R_{33} - R_{13}R_{32} \\ A_{31} &= R_{12}R_{23} + R_{13}R_{22} \end{aligned}$$

Teraz zastosujemy zasadę superpozycji. Kiedy działa  $E_{11}$ , a  $E_{22}$  i  $E_{33}$  pozostają wyłączone, czyli zastąpione zwarciami, w obwodzie obserwujemy:

$$I_1' = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ 0 & R_{22} & -R_{23} \\ 0 & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = E_{11} \frac{A_{11}}{D}$$

Gdy funkcjonuje  $E_{22}$ , zaś w miejscach  $E_{11}$  i  $E_{33}$  są zwarcia,

$$I_1'' = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & -R_{12} & -R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & -R_{23} \\ 0 & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = -E_{22} \frac{A_{21}}{D}$$

Wreszcie, kiedy działa  $E_{33}$ , a zwarcia są w miejscach  $E_{11}$  i  $E_{22}$ ,

$$I_1''' = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & -R_{12} & -R_{13} \\ 0 & R_{22} & -R_{23} \\ E_{33} & -R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = E_{33} \frac{A_{31}}{D}$$

Zauważmy, że  $I_1' + I_1'' + I_1''' = E_{11} \frac{A_{11}}{D} - E_{22} \frac{A_{21}}{D} + E_{33} \frac{A_{31}}{D}$ , czyli uzyskujemy wartość  $I_1$  określoną równaniem (3.3).

Dowiedliśmy, że zasada superpozycji obowiązuje dla  $M = 3$ . Ponieważ rozważamy obwody liniowe, to zwiększanie liczby gałęzi przez dodawanie elementów liniowych będzie powodować wzrost  $M$ , ale nie zmieni natury sieci. Dlatego twierdzenie jest prawdziwe dla każdej wartości  $M$ .

Należy zauważyć, że zasadę superpozycji można udowodnić także na podstawie równań, które wynikają z metody potencjałów węzłowych (zob. problem P3.6).

### 3.3 Twierdzenie Thevenina

Analizę obwodów liniowych można czasami uprościć, stosując twierdzenie Thevenina<sup>1</sup> lub dualne do niego twierdzenie Nortona, które zostało omówione w podrozdziale 3.5. Są one szczególnie użyteczne wtedy, kiedy trzeba wyznaczyć natężenie

<sup>1</sup> Leon Charles Thevenin (1857–1926) — francuski inżynier zajmujący się telegrafią; twierdzenie sformułował w 1883 roku.

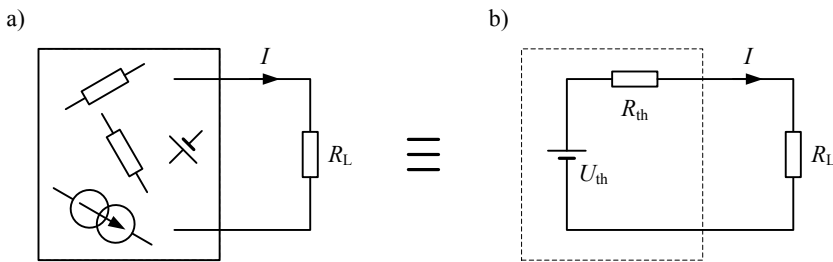


prądu w pojedynczej gałęzi obwodu, a jego całościowa analiza wymagałaby rozwiązywania złożonych układów równań.

Twierdzenie Thevenina mówi, że z każdej aktywnej sieci można wydzielić gałąź lub podsieć pomiędzy wybranych zacisków  $a$  i  $b$ , a dwuzaciskowy obwód, który pozostał między tymi zaciskami, można zastąpić rzeczywistym źródłem napięcia stanowiącym szeregowe połączenie:

- idealnego źródła napięcia równego napięciu między rozwartymi  $a$  i  $b$ ,  $U_{ab}$ ,
- oraz rezystancji równej oporowi między rozwartymi  $a$  i  $b$ ,  $R_{ab}$ , wyznaczonemu po wyłączeniu wszystkich niezależnych źródeł napięcia i prądu, czyli zastąpieniu ich odpowiednio zwarciami i przerwami.

Najczęściej wydzielany jest pojedynczy rezystor, który można traktować jako obciążenie pozostałego układu i oznaczyć  $R_L$ . Przypadek ten zilustrowano na rys. 3.3. Niemniej jednak można wydzielać dowolne, złożone połączenia rezystorów i źródeł.



Rysunek 3.3: Zastępczy obwód Thevenina

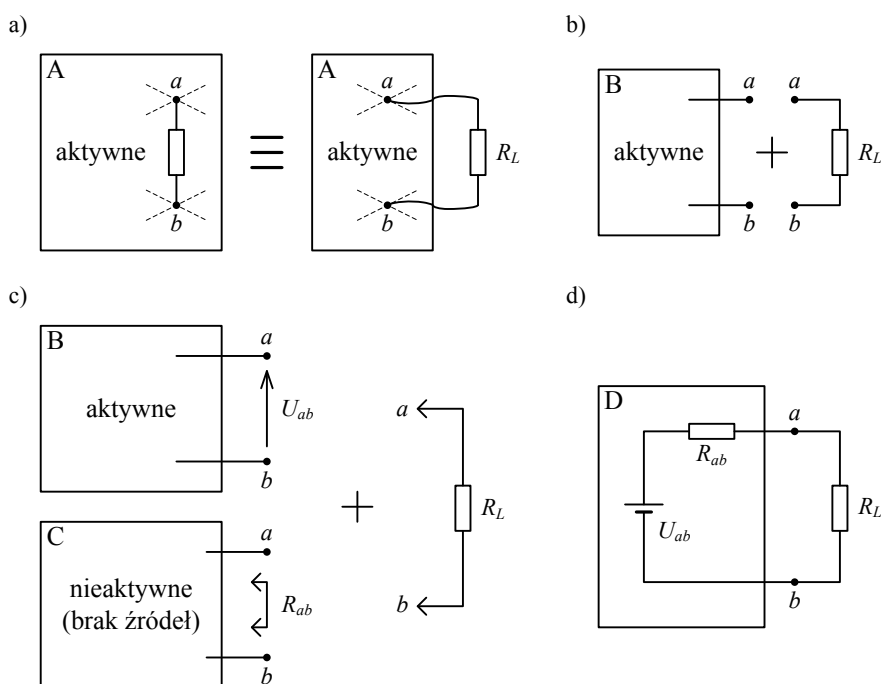
Równoległe połączenie wydzielonej gałęzi sieci ( $R_L$ ) z szeregowym połączeniem  $U_{ab}$  i  $R_{ab}$  stanowi obwód układ równoważny oryginalnemu pod względem prądu i napięcia na obciążeniu. Napięcie  $U_{ab}$ , które występuje między  $a$  i  $b$  po zastąpieniu  $R_L$  przerwą, jest nazywane napięciem Thevenina i zwykle oznaczane symbolem  $U_{Th}$ . Podobnie zastępcza rezystancja  $R_{ab}$  jest określana mianem rezystancji Thevenina i oznaczana  $R_{Th}$ . Szeregowe połączenie  $U_{Th}$  i  $R_{Th}$  nosi nazwę zastępczego źródła Thevenina. Po dołączeniu do niego obciążenia otrzymujemy obwód zastępczy Thevenina, którego schemat pokazano na rys. 3.3.

Natężenie prądu, który płynie przez  $R_L$  w oryginalnej sieci A, jest równe natężeniu prądu w obwodzie zastępczym, a to jest określone prostym wzorem:

$$I = \frac{U_{Th}}{(R_{Th} + R_L)} \quad (3.4)$$

Ponadto wyznaczenie  $U_{Th}$  i  $R_{Th}$  jest często łatwe, bo wskutek usunięcia obciążenia i źródeł z oryginalnej sieci powstają układy prostsze, których analiza wymaga znacznie mniej wysiłku. Dlatego korzystając z twierdzenia Thevenina, zwykle można sprawnie i szybko rozwiązywać problemy związane z wyznaczeniem prądu w jednej gałęzi obwodu. Jeżeli trzeba wyznaczyć prądy w wielu gałęziach, to efektywniejsze są metody kompleksowej analizy, takie jak metoda oczkowa.

W celu objaśnienia twierdzenia Thevenina założmy, że interesuje nas opornik  $R_L$ , który działa w aktywnej sieci A, włączony między węzły  $a$  i  $b$ , tak jak na rys. 3.4a. Sieć zawiera źródła (napięcia i/lub prądu) oraz elementy pasywne (rezystancje w wypadku obwodu prądu stałego). Rezystor  $R_L$  można wydzielić z sieci A, tak jak na rys. 3.4b. Odpowiada to uznaniu go za obciążenie aktywnej podsieci B, którą tworzą pozostałe elementy sieci A.



Rysunek 3.4: Schematy objaśniające twierdzenie Thevenina

Chcemy zastąpić podsieć B najprostszym układem równoważnym jej w tym sensie, że przez podłączone do niego obciążenie  $R_L$  popłynie prąd taki sam jak w sieci A. Takim układem może być źródło rzeczywiste, ale należy odpowiednio określić jego parametry, czyli napięcie źródła idealnego oraz rezystancję wewnętrzną. Można tego dokonać, analizując podsieć B oraz jej pasywną wersję, sieć C, w celu ustalenia wielkości zaznaczonych na rys. 3.4c.

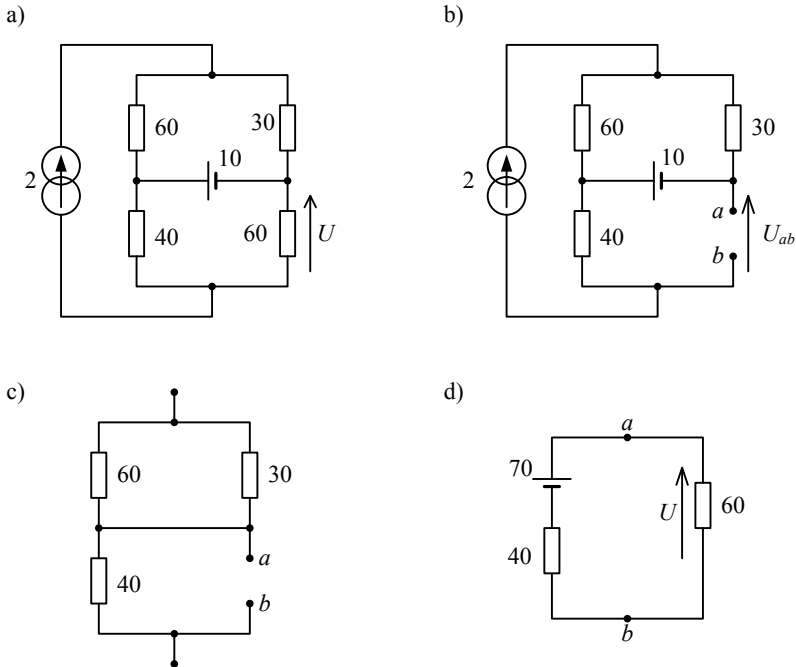
Rozpoczynamy od określenia napięcia  $U_{ab}$  występującego w sieci B, gdy obciążenie jest odłączone. Innymi słowy, należy obliczyć różnicę potencjałów, które występują w węzłach  $a$  i  $b$  sieci A po zastąpieniu  $R_L$  przerwą. W tym celu można wykorzystać dowolne twierdzenia i techniki analizy obwodów. Podsieć B spełnia warunki konieczne do ich stosowania, gdyż jest liniowa, skupiona i bilateralna, tak jak oryginalna sieć A.

Następnie należy wyznaczyć rezystancję zastępczą  $R_{ab}$  między zaciskami  $a$  i  $b$  w pasywnej sieci C, która powstaje z podsieci B wskutek wyłączenia wszystkich elementów aktywnych, czyli zastąpienia każdego źródła napięcia zwarciami, a źródła prądu — przerwą.

Napięcie  $U_{ab}$  i rezystancja  $R_{ab}$  określają parametry elementów podsieci D w prostym jednooczkowym obwodzie, którego schemat widnieje na rys. 3.4d. Pod względem kierunku i natężenia prądu w obciążeniu  $R_L$  jest on równoważny oryginalnej sieci A z rys. 3.4a.

**Przykład 3.2**

Wykorzystując twierdzenie Thevenina, obliczyć napięcie  $U$  w układzie z rys. 3.5a.



Rysunek 3.5: Schematy do przykładu 3.2

**Rozwiązanie**

Rezystor  $60\Omega$ , na którym występuje szukane napięcie, zastępujemy rozwarciem i obliczamy napięcie  $U_{ab}$  w wynikowym obwodzie, który pokazano na rys. 3.5b. Różnicę potencjałów  $U_{ab}$  między zaciskami  $a$  i  $b$  można wyznaczyć dowolną metodą analizy obwodów, ale najsprawniej dokonamy tego spostrzegając, że:

- zacisk  $b$  jest jednym z zacisków rezystora  $40\Omega$ ,
- między drugim zaciskiem tego rezystora a zaciskiem  $a$  jest źródło napięcia,
- cały prąd ze źródła  $2A$  płynie przez rozpatrywany rezystor.

Zatem na rezystorze  $40\Omega$  jest spadek napięcia  $2 \times 40V$ , który jest o  $10V$  większy od szukanego napięcia  $U_{ab}$ , czyli

$$U_{Th} = U_{ab} = 2 \cdot 40 - 10 = 70 [V]$$

Aby wyznaczyć rezystancję Thevenina, likwidujemy wszystkie źródła, uzyskując układ z rys. 3.5c. Ponieważ  $a$  i  $b$  są jednocześnie zaciskami rezystora  $40\Omega$ , jego opór określa szukaną rezystancję:

$$R_{Th} = R_{ab} = 40\Omega$$

Znając  $U_{Th}$  i  $R_{Th}$ , konstruujemy zastępczy obwód z rys. 3.5d, w którym  $U$  można łatwo obliczyć na podstawie wzoru na dzielnik napięcia:

$$U = \frac{60}{40 + 60} \cdot 70 = 42 [V]$$

□

**3.4 Dowód twierdzenia Thevenina**

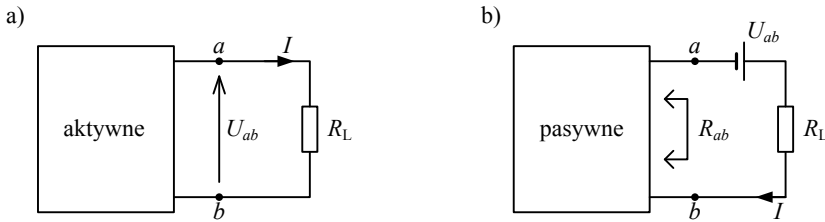
Dowód polega na wykazaniu, że sieci z rys. 3.6 są równoważne. W tym celu rozpatrzmy napięcie  $U_{ab}$ , które reprezentuje oddziaływanie aktywnej sieci z rys. 3.6a na obciążenie. Napięcie to nie zmieni się, gdy obwód zostanie zmodyfikowany tak jak na rys. 3.7, czyli gdy w szereg z  $R_L$  zostaną wstawione dwa jednakowe, ale przeciwnie skierowane źródła napięcia. Można przyjąć, że  $E_1 = E_2 = U_{ab}$ .

Teraz należy dowieść, że obwód z rys. 3.7b jest równoważny sieci z rys. 3.6b. Można tego dokonać, korzystając z zasady superpozycji, czyli rozpatrując  $E_1$  oddzielnie od pozostałych źródeł ( $E_2$  oraz wszystkie źródła, które działały w obwodzie oryginalnym).

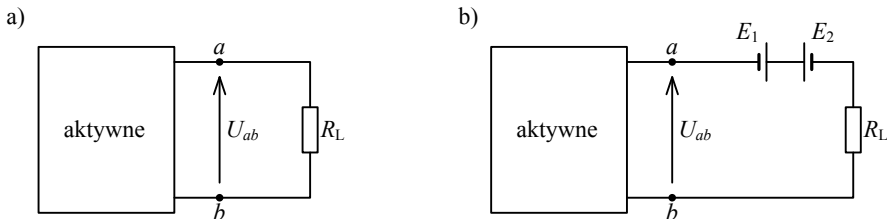
W układzie z rys. 3.8a wyznaczamy natężenie prądu  $I'$ , który jest wynikiem działania źródeł różnych od wyłączonego  $E_1$ . Ponieważ  $E_2 = U_{ab}$ , na obciążeniu nie ma napięcia, czyli  $I' = 0A$ , a  $I = I' + I'' = I''$ .

Natężenie prądu  $I''$  obliczamy na podstawie układu z rys. 3.8b, w którym działa tylko źródło  $E_1$ . Zakładając, że po wyłączeniu źródeł aktywna sieć staje się równoważna rezystancji zastępczej  $R_{ab}$ , ze wzoru na dzielnik napięcia otrzymujemy  $I'' = \frac{E_1}{R_{ab} + R_L}$ .

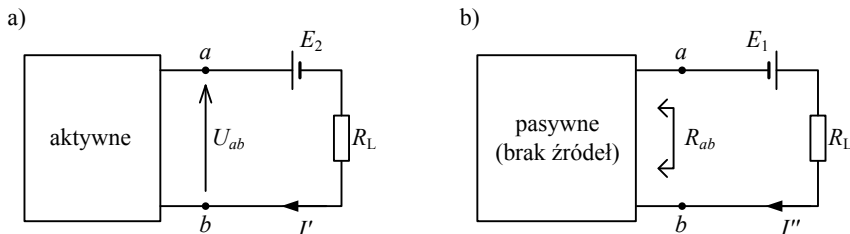
Utożsamiając napięcia i rezystancje z elementami zastępczego obwodu Thevenina,  $E_1 = U_{ab} = U_{Th}$  i  $R_{ab} = R_{Th}$ , otrzymujemy  $I = I'' = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_L}$ , co potwierdza słuszność twierdzenia.



Rysunek 3.6: Obwody równoważne pod względem prądu i napięcia na obciążeniu



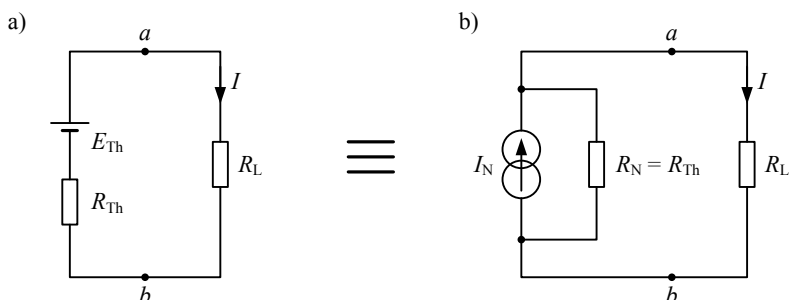
Rysunek 3.7: Obwody równoważne pod względem prądu i napięcia na  $R_L$ , gdy  $E_1 = E_2$



Rysunek 3.8: Zastosowanie zasady superpozycji do obwodu z rys. 3.7b: (a)  $I' = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_L}$ , zaś (b)  $I'' = \frac{E_1}{R_{ab} + R_L}$

### 3.5 Twierdzenie Nortona

Twierdzenie Nortona<sup>2</sup> jest dualne do twierdzenia Thevenina, zatem może być traktowane jako jego dopełnienie. Rysunek 3.9 objaśnia równoważność sieci z rys. 3.3 i dualnego układu, w którym  $I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$  i  $R_N = R_{Th}$ .



Rysunek 3.9: Równoważność zastępczych obwodów Thevenina i Nortona

Istota twierdzenia Thevenina może zostać wyrażona w kategoriach prądu zwarcia zamiast napięcia na rozwarciu. Taki alternatywny punkt widzenia przyjął Norton, formułując swoje twierdzenie.

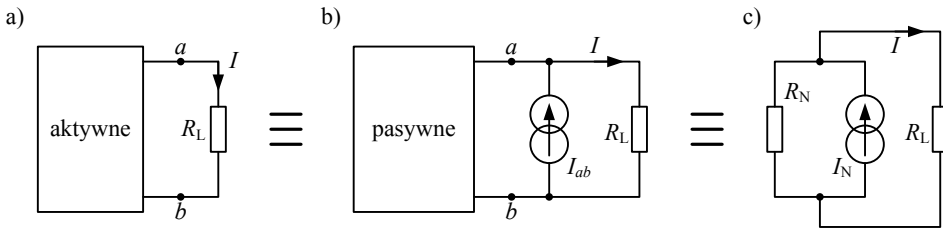
Twierdzenie Nortona mówi, że z każdej sieci aktywnej (rys. 3.10a) można wydzielić gałąź lub podsieć włączoną między wybrane zaciski  $a$  i  $b$ , a dwuzaciskowy obwód, który pozostał między  $a$  i  $b$ , można zastąpić równoległym połączeniem:

- idealnego źródła prądu o natężeniu takim, jakie ma prąd  $I_{ab}$  zwarcia między  $a$  i  $b$  (rys. 3.10b),
- oraz zastępczej rezystancji  $R_{ab}$  między rozwartymi  $a$  i  $b$  (rys. 3.10c), obliczonej po wyłączeniu wszystkich niezależnych źródeł napięcia i prądu (zastąpieniu ich odpowiednio zwarciami i przerwami).

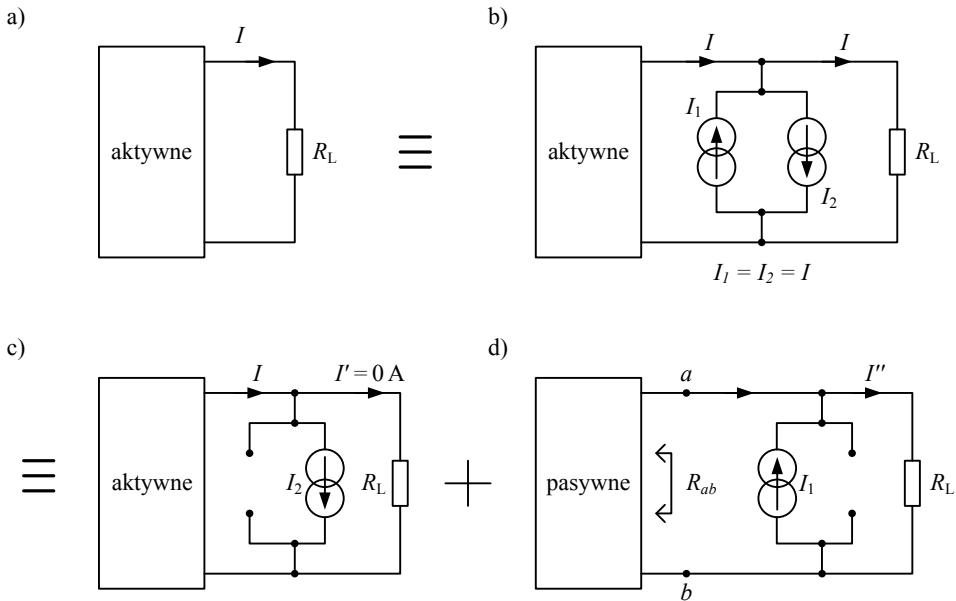
Twierdzenie Nortona może zostać dowiedzione w podobny sposób jak twierdzenie Thevenina. Różnica jest w tym, że trzeba rozpatrywać źródła prądu zamiast źródeł napięcia, przekształcając obwody tak jak na rys. 3.11 i sprawdzając, że  $I = I' + I'' = I''' = \frac{R_{ab}}{R_{ab} + R_L} I_1$ , a  $I_1 = I_N$ , czyli

$$I = \frac{R_{Th}}{R_{Th} + R_L} I_N \quad (3.5)$$

<sup>2</sup> Edward Lawry Norton (1893–1983) — wynalazca i inżynier z Bell Telephone Laboratories; twierdzenie sformułował w 1926 roku.



Rysunek 3.10: Przekształcenie aktywnej sieci w zastępczy obwód Nortona:  $I_N = I_{ab}$  oraz  $R_N = R_{Th} = R_{ab}$



Rysunek 3.11: Przekształcenia obwodu dowodzące słuszności twierdzenia Nortona

Wykorzystując twierdzenie Nortona do analizy obwodów, w celu wydzielenia  $R_L$  i wyznaczenia rezystancji rozwarcia  $R_{ab}$  postępuje się według tej samej procedury, co w przypadku stosowania twierdzenia Thevenina. Twierdzenie Nortona odróżnia się tym, że po usunięciu  $R_L$  należy zewrzeć zaciski  $a$  i  $b$  w celu obliczenia natężenia prądu zwarcia  $I_N = I_{ab}$ , który określa idealne źródło prądu z rys. 3.9b.

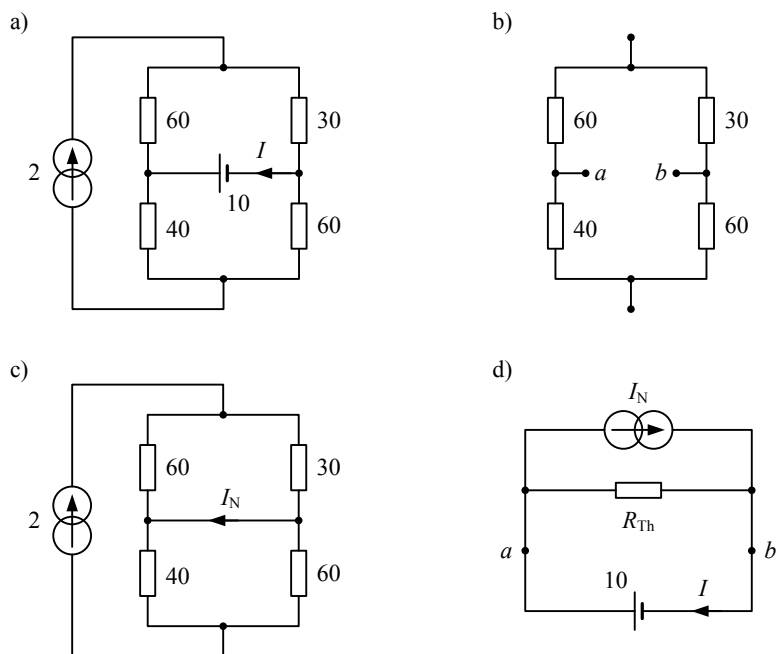
**Uwaga 3.1**

Natężenia prądu  $I_N$  nie można wyznaczać na podstawie prawa Ohma w postaci ilorazu ( $I = \frac{U}{R}$ ). Wynik tego dzielenia jest bowiem nieokreślony po zastąpieniu  $R_L$  zwarciem, którego rezystancja i spadek napięcia są jednocześnie zerowe. Brak różnicy potencjałów na zwarciu można jednak uzasadnić za pomocą prawa Ohma w postaci iloczynu, gdyż  $U = RI = 0I = 0$  [V] jest rezultatem przepływu prądu (o dowolnym natężeniu) przez gałąź o zerowej rezystancji.

△

**Przykład 3.3**

Wykorzystując twierdzenie Nortona, obliczyć natężenie prądu  $I$ , który płynie przez źródło 10V w obwodzie z rys. 3.12a. Ten sam układ był przedmiotem przykładu 3.2, ale interesowała nas inna metoda analizy i inna wielkość elektryczna.



Rysunek 3.12: Schematy do przykładu 3.3



**Rozwiązanie**

Rozpoczynamy od ustalenia rezystancji zastępczej między zaciskami  $a$  i  $b$  sieci z rys. 3.12b, która powstała w wyniku usunięcia źródła napięcia i wyłączenia źródła prądu. Uzyskujemy w ten sposób pierwszy parametr obwodu zastępczego Nortona:

$$R_{Th} = R_{ab} = \frac{(60 + 30) \cdot (40 + 60)}{(60 + 30) + (40 + 60)} = 47,37 [\Omega]$$

Drugi parametr otrzymujemy, obliczając natężenie prądu  $I_N$ , który płynie przez zwarcie w miejscu usuniętego źródła, między zaciskami  $a$  i  $b$  obwodu z rys. 3.12c, w którym działa źródło prądu.

Najpierw ze wzoru na dzielnik prądu wyznaczamy natężenia prądów, które płyną przez rezystory  $40 \Omega$  i  $60 \Omega$ :

$$I_{60} = \frac{30}{30 + 60} \cdot 2 = 0,67 [\text{A}]$$

$$I_{40} = \frac{60}{40 + 60} \cdot 2 = 1,2 [\text{A}]$$

a następnie wykorzystujemy prądowe prawo Kirchhoffa do obliczenia

$$I_N = I_{40} - I_{60} = 1,2 - 0,67 = 0,53 [\text{A}]$$

Uzyskany w ten sposób zastępczy obwód Nortona, który pokazano na rys. 3.12d, umożliwia określenie

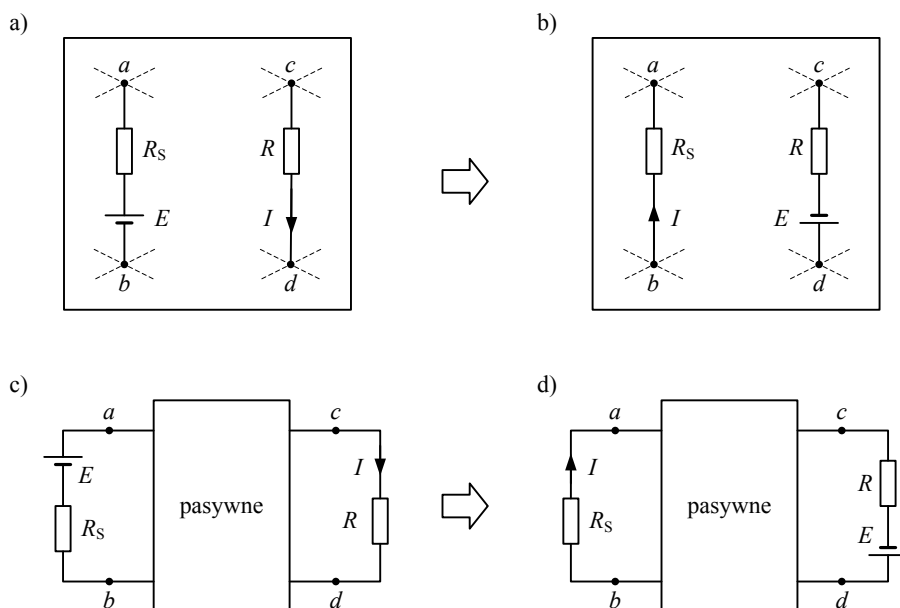
$$I = I_N + \frac{10}{R_{Th}} = 0,53 + \frac{10}{47,37} = 0,74 [\text{A}]$$

□

## 3.6 Twierdzenie o wzajemności

### 3.6.1 Przypadek źródła napięcia

Twierdzenie o wzajemności dotyczy skutku przestawiania źródła w liniowej bilateralnej sieci. Jeżeli sieć zawiera tylko jedno idealne źródło napięcia  $E$ , które jest umieszczone w pewnej gałęzi i powoduje przepływ prądu  $I$  w innej gałęzi, to po przeniesieniu źródła  $E$  do drugiej gałęzi taki sam prąd popłynie w pierwszej. Zilustrowano to na rys. 3.13, gdzie pierwszą gałąź wyznaczają zaciski  $a$  i  $b$ , a drugą — zaciski  $c$  i  $d$ .



Rysunek 3.13: Istota twierdzenia o wzajemności w przypadku obwodu ze źródłem napięcia

**Przykład 3.4**

Obliczyć  $I_1$  i  $I_2$  w obwodach pokazanych na rys. 3.14.

**Rozwiązanie**

W obwodzie z rys. 3.14a natężenie prądu  $I_1$ , który płynie wskutek działania źródła  $E$ , można opisać wzorem:

$$I_1 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{E}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3} \cdot E$$

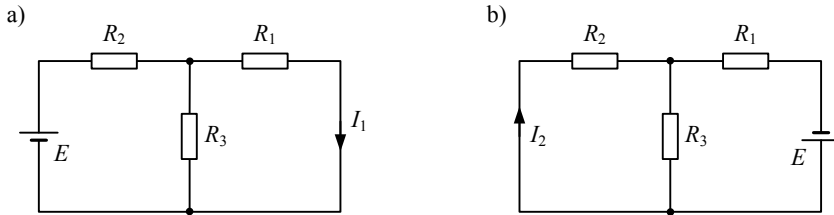
Obwód z rys. 3.14b powstał z przeniesienia  $E$  na inną pozycję. Nietrudno wykazać, że natężenie prądu  $I_2$  jest określone w ten sam sposób co natężenie  $I_1$ , czyli  $I_1 = I_2$ .

□

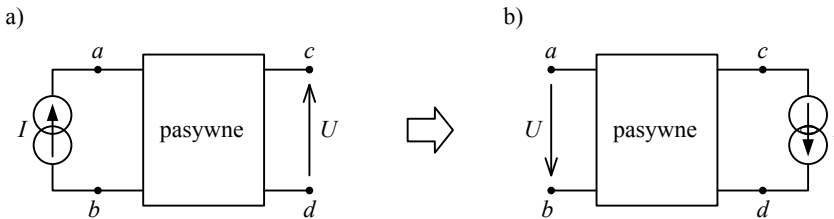
**3.6.2 Przypadek źródła prądu**

Twierdzenie o wzajemności obowiązuje też w każdym obwodzie, w którym działa tylko jedno źródło prądu. Jeżeli źródło prądu  $I$  jest włączone między węzłami  $a$  i  $b$  pasywnej sieci i powoduje wystąpienie napięcia  $U$  między dwoma innymi węzłami

$c$  i  $d$  tej sieci, to takie samo napięcie pojawi się między rozwartymi zaciskami  $a$  i  $b$  po przeniesieniu źródła między węzły  $c$  i  $d$ . Zostało to zilustrowane na rys. 3.15.



Rysunek 3.14: Schematy do przykładu 3.4, ilustrujące twierdzenie o wzajemności



Rysunek 3.15: Istota twierdzenia o wzajemności w przypadku obwodu ze źródłem prądu

### 3.6.3 Uwagi odnośnie do twierdzenia o wzajemności

#### Uwaga 3.2

Z twierdzenia o wzajemności wynika, że źródła można przenosić, nie zmieniając działania układu pod względem związku wielkości wejściowej z wyjściową. Innymi słowy, wzbudzenie i odpowiedź są wzajemnie wymienne.

△

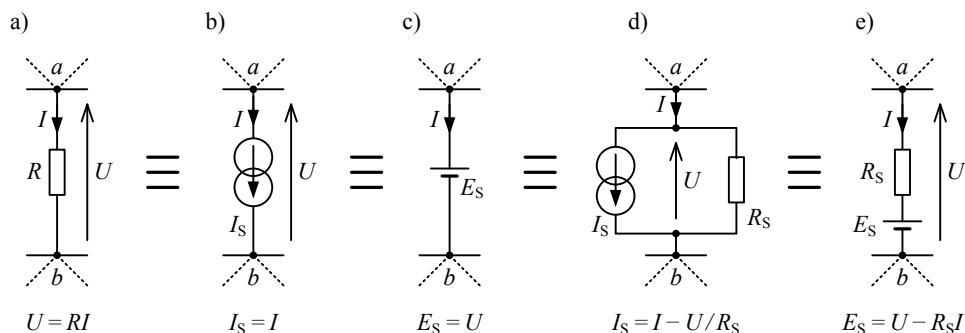
#### Uwaga 3.3

Twierdzenia o wzajemności nie można bezpośrednio stosować do obwodów, w których działa więcej niż jedno źródło. Twierdzenie o wzajemności można wykorzystać tylko, gdy taki obwód jest rozpatrywany według zasady superpozycji, do analizowania obwodów cząstkowych, w których działają pojedyncze źródła. Podejście takie nie jest jednak praktyczne, więc się go nie stosuje.

△

### 3.7 Twierdzenie o substytucji

Dowolną gałąź obwodu elektrycznego, w której płynie prąd  $I$  i na której występuje różnica potencjałów  $U$ , można zastąpić, nie wpływając na działanie pozostałej części obwodu, dowolną kombinacją elementów, która nie zmienia natężenia prądu i napięcia. Rysunek 3.16 pokazuje kilka konfiguracji elementów, które są równoważne pod względem oddziaływania na pozostałą część obwodu.



Rysunek 3.16: Gałęzie równoważne w świetle twierdzenia o substytucji

### 3.8 Twierdzenie o kompensacji: dopełnienie twierdzenia o substytucji

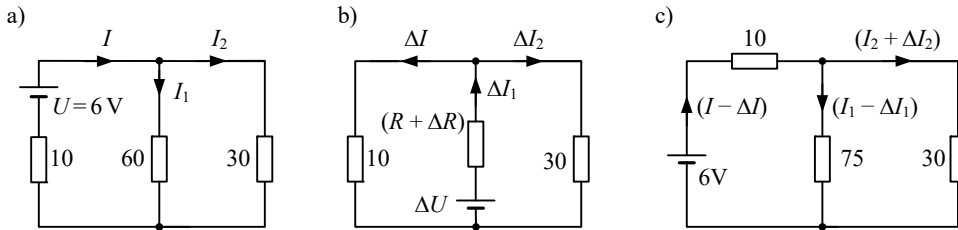
Twierdzenie o substytucji pozwala zastąpić rezystancję  $R$ , przez którą płynie prąd  $I$ , idealnym źródłem napięcia ( $RI$ ). Na podstawie takiego przekształcenia obwodu można sformułować twierdzenie o kompensacji, które dotyczy zmiany rezystancji.

Jeżeli w aktywnym obwodzie rezystancja  $R$ , przez którą płynie prąd  $I$ , zmieni się na  $(R + \Delta R)$ , to wynikające z tego zmiany natężeń prądów w całym obwodzie będą określone natężeniami prądów, których przepływ powodowałoby abstrakcyjne źródło napięcia ( $\Delta R \cdot I$ ) wstawione do gałęzi z  $(R + \Delta R)$ , tak aby prąd płynął w kierunku przeciwnym do  $I$ , po wyłączeniu wszystkich pozostałych źródeł. Natężenie prądu płynącego przez  $(R + \Delta R)$  można określić, odejmując od natężenia prądu  $I$ , który płynął przez  $R$ , natężenie prądu płynącego przez  $(R + \Delta R)$  wskutek działania samego źródła ( $\Delta R \cdot I$ ). To samo dotyczy prądów w pozostałych opornikach oraz całych gałęziach obwodu.

Należy pamiętać, że  $\Delta R$  może być dodatnie albo ujemne, odpowiadając zwiększeniu albo zmniejszeniu  $R$ . Jeżeli  $R$  zmniejsza się do  $(R - \Delta R)$ , to abstrakcyjne źródło napięcia ( $\Delta RI$ ) powinno być skierowane zgodnie z  $I$ .

**Przykład 3.5**

W obwodzie z rys. 3.17a rezystancja rezystora  $60\Omega$  zwiększyła się o 25% z powodu wzrostu temperatury. Jakie natężenia osiągnęły prądy?



Rysunek 3.17: Schematy do przykładu 3.5

**Rozwiązanie**

W oryginalnym obwodzie, który widzimy na rys. 3.17a, wskutek działania źródła napięcia  $U = 6V$  płynie prąd

$$I = \frac{6}{10 + \frac{60 \cdot 30}{90}} = 0,2 \text{ [A]}$$

oraz prądy  $I_1 = 0,067A$  i  $I_2 = 0,133A$ , których natężenia można wyznaczyć ze wzoru na dzielnik prądu.

Jeżeli rezystancja  $R = 60\Omega$  zwiększa się o  $\Delta R = \frac{25}{100} \cdot 60 = 15 \text{ [\Omega]}$ , to jej nowa wartość wynosi  $R + \Delta R = 60 + 15 = 75 \text{ [\Omega]}$ . Różnicę  $\Delta R$  można potraktować jako dodatkowy opornik, na którym występuje spadek napięcia  $\Delta U = \Delta R I_1 = 1V$  skierowany przeciwnie do prądu  $I_1$ .

Zgodnie z twierdzeniem o kompensacji rozpatrzmy obwód z rys. 3.17b, w którym oryginalne źródło pozostaje wyłączone, a działa tylko abstrakcyjne źródło reprezentujące spadek napięcia spowodowany zmianą rezystancji. Odpowiedź obwodu na takie wzbudzenie stanowią prądy:

$$\Delta I_1 = \frac{1}{75 + \frac{30 \cdot 10}{40}} = 0,012 \text{ [A]}$$

$$\Delta I_2 = \frac{30}{40} \cdot 0,012 = 0,009 \text{ [A]}$$

$$\Delta I = \frac{10}{40} \cdot 0,012 = 0,003 \text{ [A]}$$

Rozpływ prądów w zmodyfikowanym obwodzie jest określony algebraiczną sumą obydwu obliczonych odpowiedzi, co zilustrowano na rys. 3.17c.

□

### 3.9 Twierdzenie Millmana jako uzupełnienie metody potencjałów węzłowych

#### 3.9.1 Przypadek źródeł napięcia

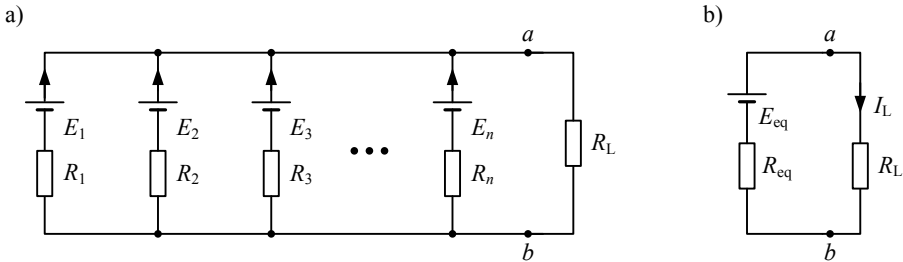
Twierdzenie Millmana jest swego rodzaju uzupełnieniem metody potencjałów węzłowych, omówionej w podrozdziale 2.5. Opiera się ono na prądowym prawie Kirchhoffa i mówi, że równoległe połączenie wielu rzeczywistych źródeł napięcia o niezerowych, niekoniecznie równych rezystancjach wewnętrznych można zastąpić jednym źródłem o odpowiednim napięciu i rezystancji wewnętrznej.

Zgodnie z twierdzeniem Millmana złożony obwód z rys. 3.18a jest równoważny prostemu układowi z rys. 3.18b pod warunkiem, że

$$E_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}}{\frac{1}{R_{eq}}} = \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} + \dots + \frac{E_n}{R_n} \right) R_{eq} \quad (3.6)$$

gdzie  $R_{eq}$  jest zastępczą rezystancją Thevenina między węzłami  $a$  i  $b$ , którą można określić z zależności

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3.7)$$



Rysunek 3.18: Twierdzenie Millmana — przypadek źródeł napięcia

#### Dowód

Rozpatrzmy sieć pomiędzy  $a$  i  $b$  po odłączeniu obciążenia  $R_L$ . Musi zachodzić bilans prądów:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (3.8)$$

gdzie:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{R_2} \quad \dots \quad I_n = \frac{E_n - U_{ab}}{R_n}$$

więc

$$\sum_{k=1}^n \frac{E_k - U_{ab}}{R_k} = 0$$

Przekształcając to wyrażenie w następujący sposób:

$$\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k} = \sum_{k=1}^n \frac{U_{ab}}{R_k} = U_{ab} \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

uzyskujemy

$$U_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}$$

czyli równanie (3.6).

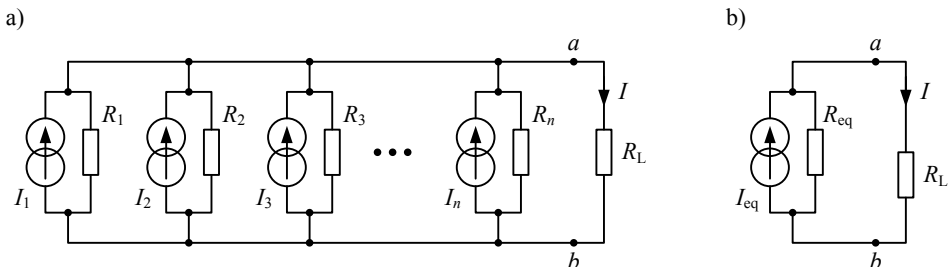


### 3.9.2 Przypadek źródeł prądu

Twierdzenie Millmana można sformułować także w odniesieniu do źródeł prądu. Obwody z rys. 3.19 są równoważne pod warunkiem, że

$$I_{eq} = (R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 + \dots + R_n I_n) \frac{1}{R_{eq}} \tag{3.9}$$

gdzie  $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$  jest zastępczą rezystancją Thevenina pomiędzy węzłami  $a$  i  $b$  w obwodzie z rys. 3.19a.



Rysunek 3.19: Twierdzenie Millmana — przypadek źródeł prądu

Dowód wzoru (3.9) jest przedmiotem pytania Q3.4 i opiera się bezpośrednio na dualizmie rzeczywistego źródła napięcia i rzeczywistego źródła prądu. Przekształcając źródła prądu z rys. 3.19 w równoważne źródła napięcia, uzyskujemy układy z rys. 3.18, których dotyczy napięciowa wersja twierdzenia Millmana.

### 3.10 Twierdzenie o mocy maksymalnej

Rysunek 3.20a przedstawia regulowane obciążenie  $R_L$ , które dołączono do sieci jednoportowej. Moc dostarczana do obciążenia  $R_L$  jest określona wzorem (1.29), czyli:

$$P_L = U_L I_L = R_L I_L^2$$

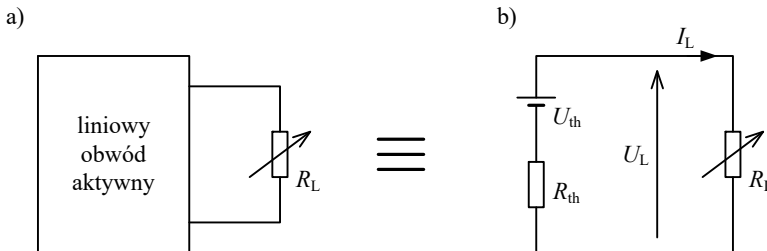
ale można ją też wyznaczyć, wykorzystując zastępczy obwód Thevenina (rys. 3.20b):

$$P_L = R_L \left( \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 \quad (3.10)$$

Zmieniając  $R_L$  od 0 (zwarcie) do  $\infty$  (przerwa), można zaobserwować, że maksymalna wartość  $P_L$  jest dostarczana do obciążenia, gdy

$$R_L = R_{Th} \quad (3.11)$$

co można potwierdzić metodami rachunkowymi.



Rysunek 3.20: Wykorzystanie zastępczego układu Thevenina do określenia maksymalnej mocy dostarczanej do obciążenia

#### Dowód

Aby dowieść, że twierdzenie o mocy maksymalnej jest słuszne, wystarczy zróżniczkować  $P_L$  względem  $R_L$ :

$$\frac{dP_L}{dR_L} = U_{Th}^2 \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4}$$

i przyrównać pochodną do zera:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_L = R_{Th}$$



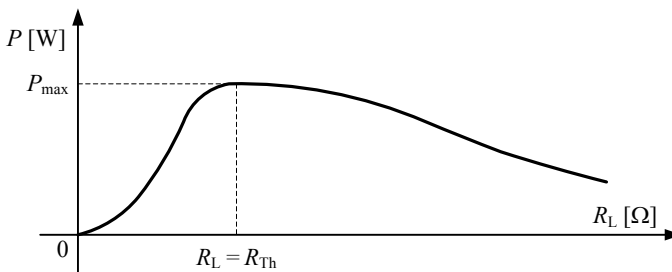
czyli dla  $R_L = R_{Th}$  moc osiąga maksimum:

$$P_{Lmax} = \left( \frac{U_{Th}}{2R_{Th}} \right)^2 R_{Th} = \frac{1}{4R_{Th}} U_{Th}^2 \quad (3.12)$$



Wykres zależności  $P_L$  od  $R_L$  zilustrowano na rys. 3.21. Należy zauważyć, że:

- $P_L = 0$     gdy     $R_L = 0$     (zwarcie w miejscu obciążenia),
- $P_L \rightarrow 0$     gdy     $R_L \rightarrow \infty$     (przerwa w miejscu obciążenia).



Rysunek 3.21: Krzywa mocy

### 3.10.1 Sprawność i moc maksymalna

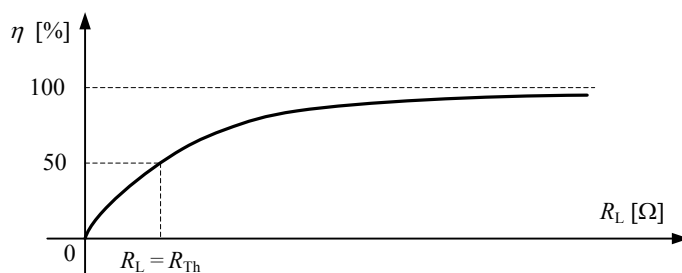
Sprawność  $\eta$  jest określona stosunkiem mocy wyjściowej  $P_L$  (dostarczanej do obciążenia) do mocy wejściowej  $P_{in}$  (wytwarzanej przez źródło):

$$\eta = \frac{P_L}{P_{in}}$$

Rysunek 3.22 pokazuje, jak sprawność zmienia się w zależności od obciążenia. Jest jasne, że dostarczanie maksymalnej mocy nie oznacza najwyższej sprawności. Gdy wyjściowa moc osiąga maksimum, sprawność wynosi tylko 50%:

$$\eta = \frac{\frac{U_{Th}^2}{4R_{Th}}}{\frac{U_{Th}^2}{2R_{Th}}} = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

Przeznaczenie układu decyduje o tym, czy ważniejsza jest maksymalizacja mocy, czy sprawności. W elektrotechnice i elektronice zwykle chodzi o przesyłanie do odbiornika jak największej mocy, ale w przypadku urządzeń elektromechanicznych, takich jak np. silniki elektryczne, pożądana jest wysoka sprawność.



Rysunek 3.22: Krzywa sprawności

### 3.10.2 Prąd a moc maksymalna

Natężenie prądu w obwodzie z rys. 3.20b jest określone równaniem (3.4):

$$I_L = \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_L} \quad (3.14)$$

czyli

$$I_L = \frac{U_{Th}}{2R_{Th}} \quad \text{gdy} \quad R_L = R_{Th} \quad (3.15)$$

zaś maksymalne natężenie prądu

$$I_L = I_{max} = \frac{U_{Th}}{R_{Th}} \quad \text{gdy} \quad R_L = 0 \quad (3.16)$$

Zatem podczas dostarczania maksymalnej mocy natężenie prądu jest równe połowie wartości maksymalnej:

$$I_L = \frac{1}{2} I_{max} \quad \text{gdy} \quad R_L = R_{Th} \quad (3.17)$$

co pokazano na rys. 3.23.

### 3.10.3 Napięcie a moc maksymalna

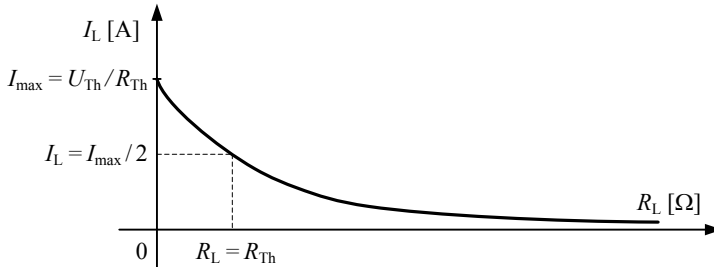
Napięcie na obciążeniu ma wartość

$$U_L = R_L I_L = R_L \left( \frac{U_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right) \quad (3.18)$$

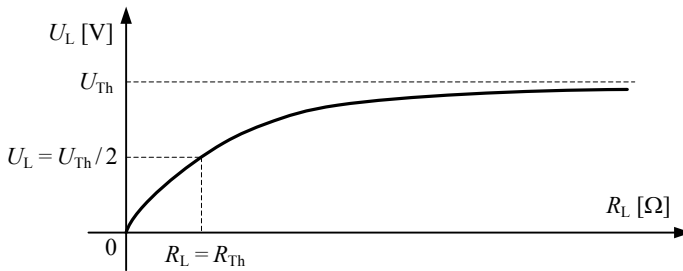
czyli

$$U_L = \frac{1}{2} U_{Th} \quad \text{dla} \quad R_L = R_{Th} \quad (3.19)$$

co pokazano na rys. 3.24. Uzyskanie maksymalnej mocy wiąże się więc ze zmniejszeniem napięcia na obciążeniu do połowy napięcia źródłowego.



Rysunek 3.23: Krzywa prądu



Rysunek 3.24: Krzywa napięcia

### Przykład 3.6

W obwodzie z rys. 3.25a określić rezystancję  $R_L$ , do której dostarczana byłaby maksymalna moc, oraz obliczyć tę moc.

### Rozwiązanie

Stosujemy twierdzenie Thevenina. Na podstawie rys. 3.25b wyznaczamy

$$R_{Th} = 3 + \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} = 4,33 \text{ } [\Omega]$$

a rys. 3.25c pomaga określić

$$U_{Th} = U_{ab} = U_2 - U_1 = \frac{4}{4 + 2} \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -11 \text{ } [V]$$

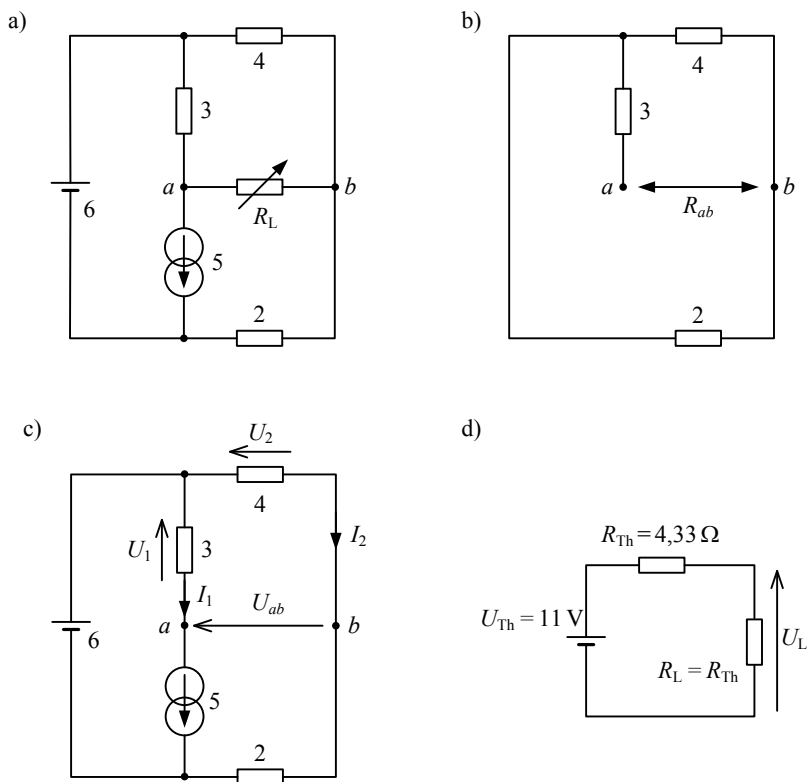
Dysponując zastępczym obwodem Thevenina, który pokazano na rys. 3.25d, na podstawie twierdzenia o mocy maksymalnej stwierdzamy, że

$$P = P_{\max} \Leftrightarrow R_L = R_{Th} = 4,33\Omega$$

przy czym

$$P_{\max} = \frac{U_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{(-11)^2}{4 \cdot 4,33} = 6,98 \text{ [W]}$$

□



Rysunek 3.25: Schematy do przykładu 3.6

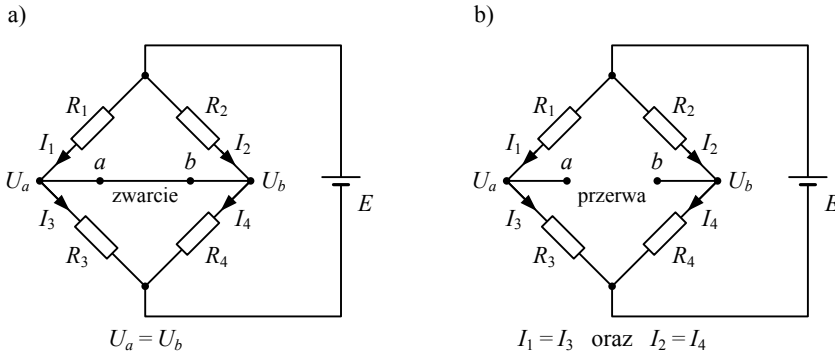
### 3.11 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 3.11.1 Pytania

#### Pytanie Q3.1

Jakie powinny być rezystancje w obwodzie mostkowym z rys. 2.60, aby: (i)  $U_a = U_b$ , (ii)  $I_{ab} = 0$  oraz (iii)  $I_{ab} \rightarrow \infty$ ?



Rysunek 3.26: Schematy do odpowiedzi na pytanie Q3.1

#### Wskazówka

- i) Równość potencjałów  $U_a = U_b$  można uzyskać na dwa sposoby. Można zewrzeć punkty  $a$  i  $b$ , biorąc  $R_L = 0\Omega$ , tak jak na rys. 3.26a. Wtedy  $U_{ab} = U_a - U_b = 0V$  niezależnie od pozostałych elementów obwodu.

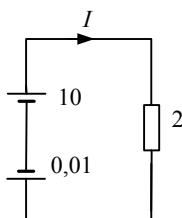
Warto zauważyć, że pomimo zerowej różnicy potencjałów między  $a$  i  $b$  prąd w zwarciu może mieć niezerowe natężenie. Ponieważ  $I_{ab} = I_1 - I_3 = I_4 - I_2$ , jego natężenie zależy od podziału prądu źródła w dzielnikach utworzonych przez równolegle połączone rezystory.

Równe potencjały można też uzyskać, równoważąc mostek, czyli dobierając rezystory tak, że  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ . Wtedy  $U_a = U_b$  niezależnie od  $R_L$ .

- ii) Podobnie  $I_{ab} = 0$  można uzyskać, zastępując  $R_L$  przerwą albo równoważąc mostek, czyli wymuszając zerowe napięcie na tym rezystorze.
- iii) Natężenie prądu w  $R_L$  można zmaksymalizować, biorąc  $R_L = 0$ , ale jednocześnie wartości pozostałych oporników muszą być bliskie zeru i spełniać warunek  $R_1 R_4 \gg R_2 R_3$  albo  $R_1 R_4 \ll R_2 R_3$ . Samo wyzerowanie  $R_L$  nie jest wystarczające, gdyż prąd w tym oporniku jest określony różnicą innych prądów, które muszą się znacząco różnić, np.  $I_1 \rightarrow \infty$  i  $I_1 \gg I_3$ .

**Pytanie Q3.2**

Jak sprawnie, bez użycia kalkulatora, obliczyć natężenie prądu w prostym obwodzie z rys. 3.27? Należy porównać różne metody analizy pod względem łatwości obliczeń.



Rysunek 3.27: Schemat do pytania Q3.2

**Wskazówka**

Ponieważ napięcie 10 V jest znacznie większe od napięcia 0,01 V, można pominąć drugie źródło i bezpośrednio zastosować prawo Ohma, uzyskując  $10 / 2 = 5$  [A], dobre przybliżenie szukanego natężenia.

Dokładny wynik można uzyskać, wykorzystując napięciowe prawo Kirchhoffa. Potrzeba niewiele więcej obliczeń, ale należy posługiwać się ułamekami :

$$\frac{10 - 0,01}{2} = \frac{9,99}{2} = 4,995 \text{ [A]}$$

Użycie zasady superpozycji jest niecelowe w tak prostym obwodzie, ponieważ wiąże się ze zbytnim „rozdrobieniem” obliczeń:

$$\frac{10}{2} - \frac{0,01}{2} = 5 - 0,005 = 4,995 \text{ [A]}$$

Z powyższych rozważań wypływa wniosek, że należy zwracać uwagę na układ elementów oraz wartości ich parametrów: zastanawiać się, czy nie można wstępnie uprościć obwodu i jaka metoda analizy będzie najwygodniejsza. Tymi zaleceniami warto kierować się szczególnie podczas kolokwium, gdy czas na rozwiązanie zadania jest ograniczony. Trzeba jednak upewnić się, że treść zadania nie wyklucza modyfikacji obwodu, a metoda nie jest narzucona.

**Pytanie Q3.3**

Czy zasadę superpozycji można stosować do analizowania obwodów z elementami aktywnymi?

**Pytanie Q3.4**

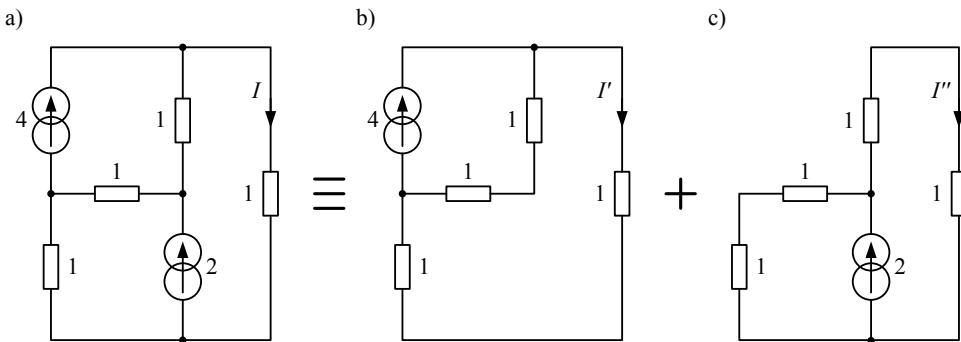
Udowodnić, że twierdzenie Millmana obowiązuje w odniesieniu do źródeł prądu.

**Wskazówka**

Przekształcając poszczególne źródła prądu, wraz z rezystancjami wewnętrznymi, w równoważne źródła napięcia, można wykazać, że układy z rys. 3.19 odpowiadają tym z rys. 3.18, czyli pośrednio, ale w pełni dotyczy ich wzór (3.6) oraz dyskusja przedstawiona w podrozdziale 3.9.1.

**3.11.2 Problemy rozwiązane****Problem P3.1**

Wykorzystując zasadę superpozycji, określić prąd  $I$  w obwodzie z rys. 3.28a.



Rysunek 3.28: Schematy do problemu P3.1

**Rozwiązanie**

Rozpatrujemy obwód z rys. 3.28b, w którym

$$I' = \frac{(1 + 1)}{(1 + 1) + (1 + 1)} \cdot 4 = 2 \text{ [A]}$$

a następnie obwód z rys. 3.28c, w którym

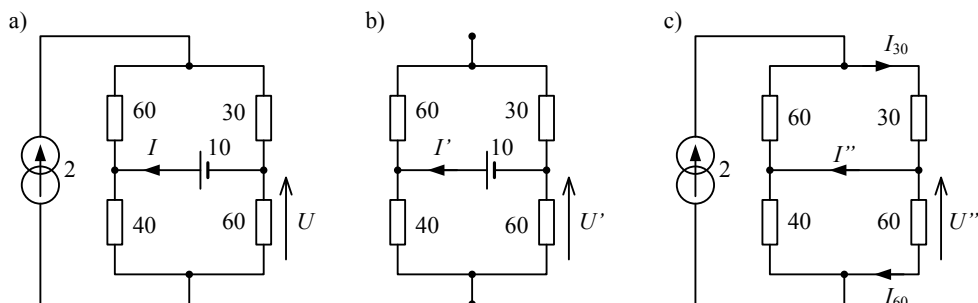
$$I'' = \frac{(1 + 1)}{(1 + 1) + (1 + 1)} \cdot 2 = 1 \text{ [A]}$$

Zatem

$$I = I' + I'' = 2 + 1 = 3 \text{ [A]}$$

**Problem P3.2**

Korzystając z zasady superpozycji, obliczyć napięcie  $U$  i natężenie prądu  $I$  w obwodzie z rys. 3.29. Ten sam obwód był rozpatrywany w przykładach 3.2 i 3.3. Która metoda pozwala najsprawniej rozwiązać to zadanie?



Rysunek 3.29: Schematy do problemu P3.2

**Rozwiązanie**

Aby określić oddziaływanie źródła napięcia, źródło prądu zastępujemy rozwarciem, uzyskując obwód z rys. 3.29b. W tym układzie

$$I' = \frac{10}{30 + 60} + \frac{10}{40 + 60} = 0,21 \text{ [A]}$$

$$U' = -\frac{60}{40 + 60} \cdot 10 = -6 \text{ [V]}$$

Następnie wracamy do obwodu oryginalnego i w miejscu źródła napięcia robimy zwarcie. Uzyskany układ, który pokazano na rys. 3.29c, pozwala określić cząstkową odpowiedź spowodowaną działaniem źródła prądu. Natężenia prądów płynących przez rezystory  $30\Omega$  i  $60\Omega$  łatwo wyznaczyć ze wzoru na dzielnik prądu:

$$I_{30} = \frac{60}{30 + 60} \cdot 2 = 1,33 \text{ [A]}$$

$$I_{60} = \frac{40}{40 + 60} \cdot 2 = 0,8 \text{ [A]}$$

Wobec tego:

$$I'' = I_{30} - I_{60} = 1,33 - 0,8 = 0,53 \text{ [A]}$$

$$U'' = I_{60} \cdot 60 = 0,8 \cdot 60 = 48 \text{ [V]}$$

a ostatecznie:

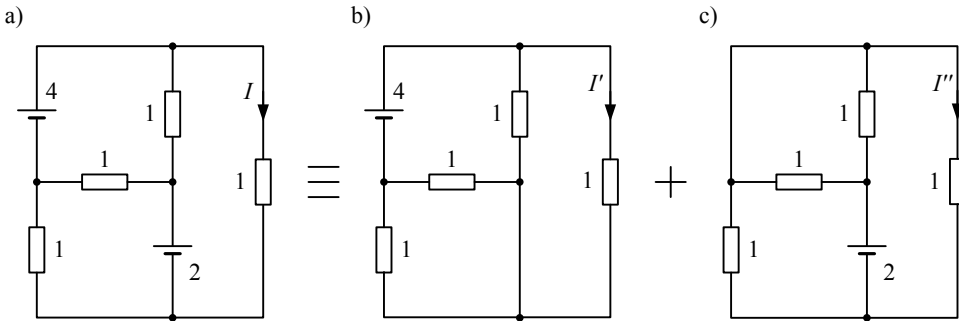
$$I = I' + I'' = 0,21 + 0,53 = 0,74 \text{ [A]}$$

$$U = U' + U'' = -6 + 48 = 42 \text{ [V]}$$



**Problem P3.3**

Wykorzystując zasadę superpozycji, obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie pokazanym na rys. 3.30a.



Rysunek 3.30: Schematy do problemu P3.3

**Rozwiązanie**

Zgodnie z zasadą superpozycji podaną w podrozdziale 3.1, wzorując się na przykładzie 3.1, obliczamy natężenia cząstkowych prądów  $I'$  i  $I''$ , których suma da szukany prąd  $I$ .

Pierwszy prąd reprezentuje oddziaływanie źródła 4V na oporniki w obwodzie z rys. 3.30b:

$$I' = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{4}{\frac{1 \cdot 1}{1+1} + \frac{1 \cdot 1}{1+1}} = 2 \text{ [A]}$$

a drugi — oddziaływanie źródła 2V w obwodzie z rys. 3.30c:

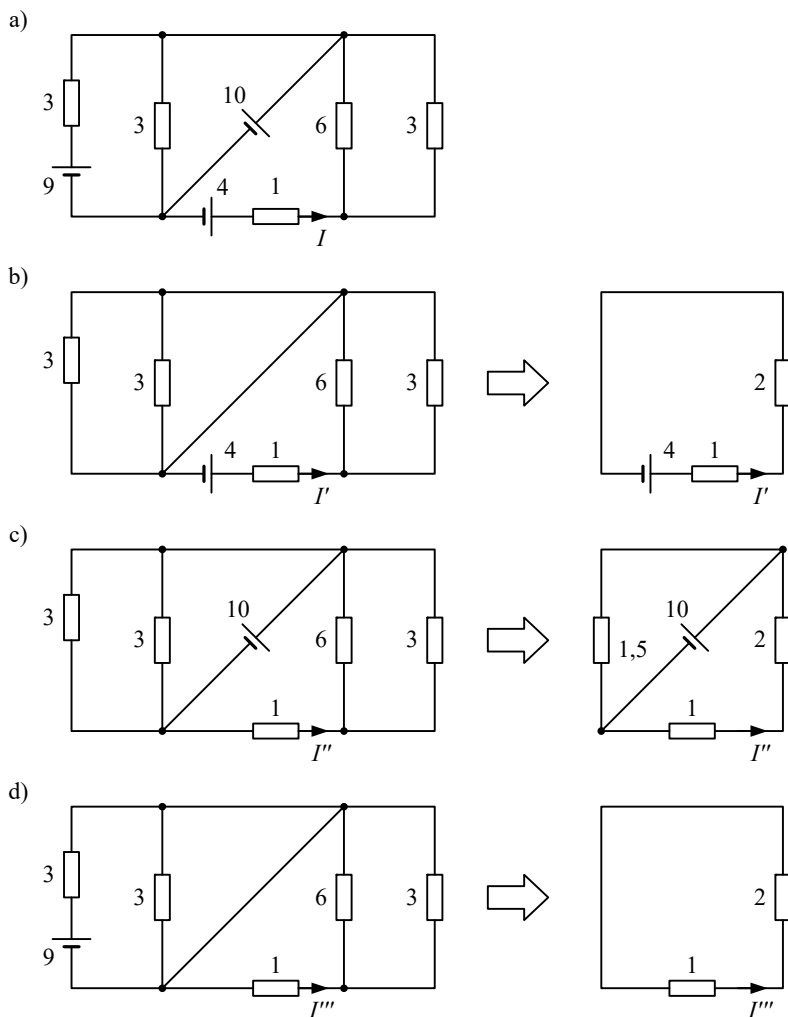
$$I'' = \frac{1}{1+1} \cdot \frac{2}{\frac{1 \cdot 1}{1+1} + \frac{1 \cdot 1}{1+1}} = 1 \text{ [A]}$$

Sumując natężenia tych prądów, które stanowią odpowiedzi układu na cząstkowe wzbudzenia, uzyskujemy odpowiedź wypadkową, czyli

$$I = I' + I'' = 2 + 1 = 3 \text{ [A]}$$

**Problem P3.4**

Wykorzystując zasadę superpozycji, obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie pokazanym na rys. 3.31a.



Rysunek 3.31: Schematy do problemu P3.4

**Rozwiązanie**

Rozpatrując kolejne obwody z rys. 3.31, obliczamy prądy cząstkowe:

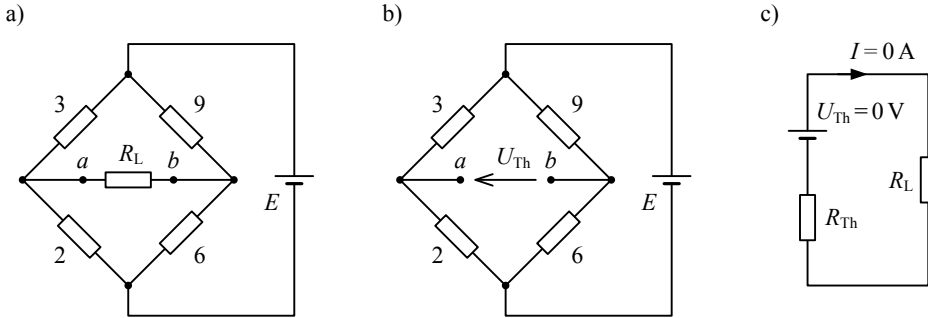
$$I' = \frac{4}{1 + \frac{6 \cdot 3}{6+3}} = 1,33 \text{ [A]} \quad I'' = -\frac{10}{1 + \frac{6 \cdot 3}{6+3}} = -3,33 \text{ [A]} \quad I''' = 0 \text{ A}$$

Sumując je, otrzymujemy szukane natężenie:

$$I = I' + I'' + I''' = 1,33 - 3,33 + 0 = -2 \text{ [A]}$$

**Problem P3.5**

Wykorzystując twierdzenie Thevenina, wykazać, że prąd nie płynie przez rezystor  $R_L$  w obwodzie z rys. 3.32a. Zadanie i uzyskane rezultaty odnieść do problemu P2.15 i pytania Q3.1.



Rysunek 3.32: Schematy do problemu P3.5

**Wskazówka**

Po usunięciu  $R_L$ , na podstawie rys. 3.32b

$$U_{Th} = \frac{3}{3+2}E - \frac{9}{9+6}E = 0 \text{ [V]}$$

Zatem w układzie zastępczym Thevenina, który widzimy na rys. 3.32c, nie ma źródła, które powodowałoby przepływ prądu. Nie zależy to od rezystancji  $R_{Th}$ , więc jej obliczanie nie ma sensu.

**Problem P3.6**

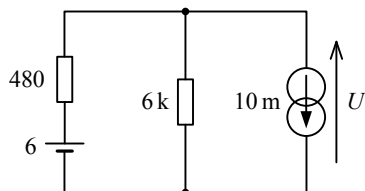
Udowodnić zasadę superpozycji, wykorzystując metodę potencjałów węzłowych.

**Wskazówka**

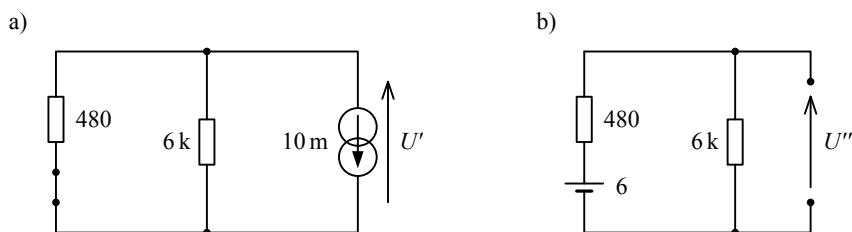
Należy wzorować się na dowodzie, który został przedstawiony w podrozdziale 3.2 i wykorzystuje metodę prądów oczkowych. Jednak trzeba rozpatrzyć napięcia zamiast prądów, opierając się na układzie równań (2.36) i wyrażeniu (2.37), które przedstawia jego rozwiązanie.

**Problem P3.7**

Obliczyć napięcie  $U$  na zaciskach źródła prądu w obwodzie z rys. 3.33.



Rysunek 3.33: Schemat do problemu P3.7



Rysunek 3.34: Schematy do rozwiązania problemu P3.7

**Rozwiązanie**

Stosujemy zasadę superpozycji. Rozpatrując obwody, których schematy pokazano na rys. 3.34, wyznaczamy

$$U' = -0,01 \cdot \frac{480 \cdot 6000}{480 + 6000} = -4,44 \text{ [V]}$$

i

$$U'' = \frac{6000}{480 + 6000} \cdot 6 = 5,56 \text{ [V]}$$

Sumując wyniki cząstkowe, otrzymujemy

$$U = U' + U'' = -4,44 + 5,56 = 1,12 \text{ [V]}$$

**Problem P3.8**

Obliczyć natężenie prądu  $I$  w obwodzie z rys. 2.39a, korzystając z zasady superpozycji oraz twierdzeń Thevenina i Nortona. Rezultaty porównać z wynikami przykładu 2.16 i problemu P2.7, które dotyczyły tego samego obwodu, ale był on analizowany metodą prądów oczkowych i metodą potencjałów węzłowych.

**Rozwiązanie: Zasada superpozycji**

Aby określić składową szukanego prądu, która jest związana z działaniem źródła 3A, rozpatrujemy obwód z rys. 3.35a. Na podstawie praw Kirchhoffa

$$1 \cdot I' = 2 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 \quad \text{oraz} \quad I_1 = 3 - I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{6 - I'}{4}$$

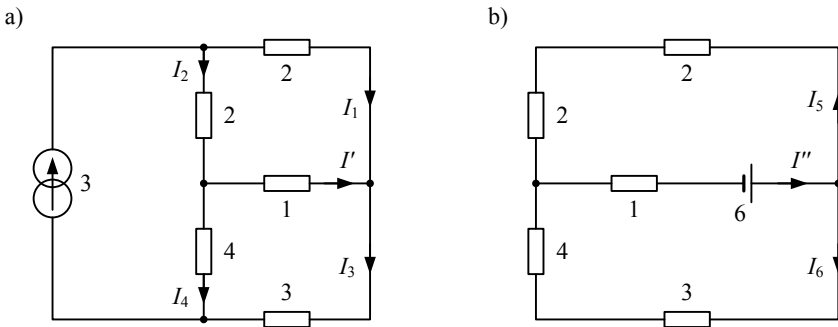
$$1 \cdot I' = 4 \cdot I_4 - 3 \cdot I_3 \quad \text{oraz} \quad I_3 = 3 - I_4 \quad \Rightarrow \quad I_4 = \frac{I' + 9}{7}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_4 = I_2 - I' &\Rightarrow \frac{I' + 9}{7} = \frac{6 - I'}{4} - I' \\ \Rightarrow 4 \cdot I' + 36 = 42 - 7 \cdot I' - 28 \cdot I' &\Rightarrow 39 \cdot I' = 6 \end{aligned}$$

czyli

$$I' = \frac{6}{39} \text{ [A]}$$



Rysunek 3.35: Schematy do rozwiązania problemu P3.8 za pomocą zasady superpozycji

Drugą składową szukanego prądu, wynikającą z działania źródła napięcia, wyznaczamy na podstawie obwodu z rys. 3.35b w podobny sposób:

$$1 \cdot I'' + (2 + 2) \cdot I_5 = 6 \quad \Rightarrow \quad I_5 = \frac{6 - I''}{4}$$

$$1 \cdot I'' + (4 + 3) \cdot I_6 = 6 \quad \Rightarrow \quad I_6 = \frac{6 - I''}{7}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_6 = I'' - I_5 &\Rightarrow \frac{6 - I''}{7} = I'' - \frac{6 - I''}{4} \\ \Rightarrow 24 - 4 \cdot I'' = 28 \cdot I'' - 42 + 7 \cdot I'' &\Rightarrow 39 \cdot I'' = 66 \end{aligned}$$

czyli

$$I'' = \frac{66}{39} \text{ A}$$

Ostatecznie

$$I = I' + I'' = \frac{6}{39} + \frac{66}{39} = \frac{72}{39} \text{ [A]}$$

**Rozwiązanie: Twierdzenie Thevenina**

Na podstawie rys. 3.36a wyznaczamy

$$R_{\text{Th}} = R_{ab} = \frac{(2+2) \cdot (4+3)}{(2+2) + (4+3)} = \frac{28}{11} \text{ [\Omega]}$$

a następnie rozpatrujemy rys. 3.36b, by określić napięcie Thevenina. Ze wzoru na dzielnik:

$$I_1 = \frac{(2+4)}{(2+3) + (2+4)} \cdot 3 = \frac{6}{5+6} \cdot 3 = \frac{18}{11} \text{ [A]}$$

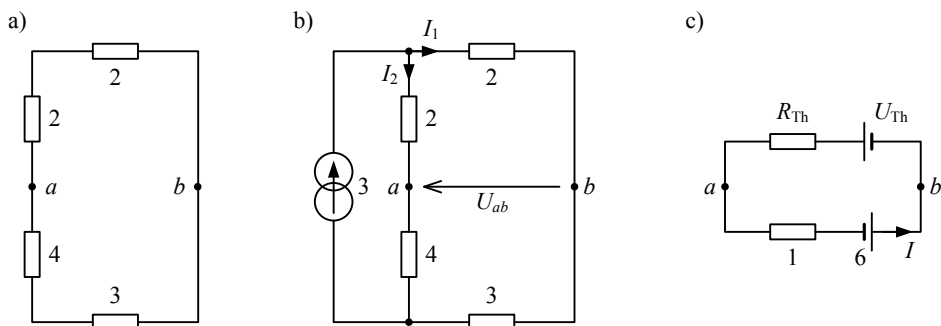
a z bilansu napięć:

$$U_{ab} = 2 \cdot I_1 - 2 \cdot I_2 = 2 \cdot (I_1 - I_2) \quad \text{oraz} \quad I_2 = 3 - I_1$$

$$\Rightarrow U_{ab} = 2 \cdot (I_1 - 3 + I_1) = 4 \cdot I_1 - 6$$

czyli

$$U_{\text{Th}} = U_{ab} = 4 \cdot \frac{18}{11} - 6 = \frac{6}{11} \text{ [V]}$$



Rysunek 3.36: Schematy do rozwiązania problemu P3.8 z wykorzystaniem twierdzenia Thevenina

Znając  $R_{Th}$  i  $U_{Th}$ , można skonstruować zastępczy obwód Thevenina, którego schemat pokazano na rys. 3.36c. W tym obwodzie

$$I = \frac{6 + \frac{6}{11}}{1 + \frac{28}{11}} = \frac{72}{39} \text{ [A]}$$

**Rozwiązanie: Twierdzenie Nortona**

Ponieważ  $R_N = R_{Th}$ , możemy wykorzystać wynik, który uzyskaliśmy na potrzeby twierdzenia Thevenina.

Natężenie prądu Nortona  $I_N$  wyznaczamy na podstawie schematu z rys. 3.37a, stosując prądowe prawo Kirchhoffa i wzór na dzielnik prądu:

$$I_N = I_2 - I_1 = \frac{3}{3+4} \cdot 3 - \frac{2}{2+2} \cdot 3 = -\frac{3}{14} \text{ [A]}$$

Zastępczy obwód Nortona ma zatem postać pokazaną na rys. 3.37b. Na podstawie praw Kirchhoffa:

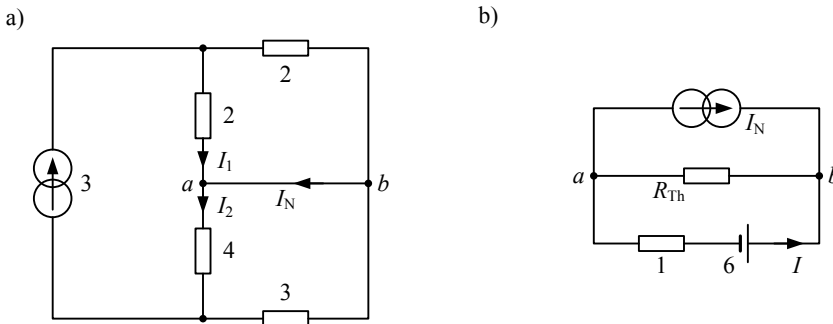
$$R_{Th} \cdot (I + I_N) = 6 - 1 \cdot I$$

czyli

$$\frac{28}{11} \cdot I - \frac{28}{11} \cdot \frac{3}{14} = 6 - I$$

Zatem

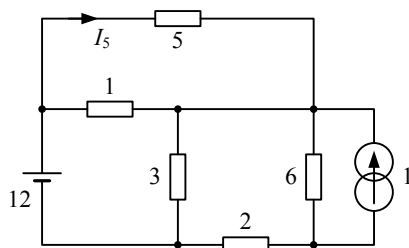
$$I = \frac{72}{39} \text{ A}$$



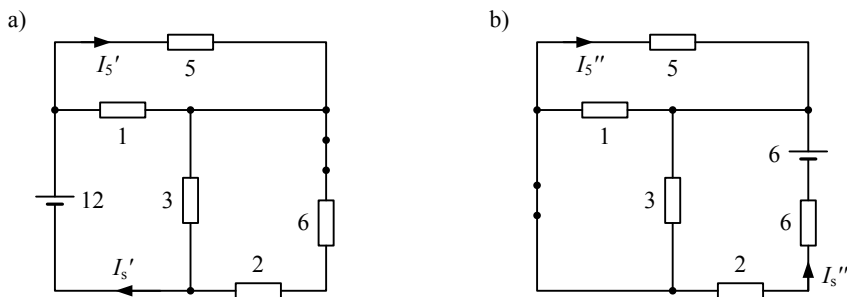
Rysunek 3.37: Schematy do rozwiązania problemu P3.8 z wykorzystaniem twierdzenia Nortona

**Problem P3.9**

Obliczyć natężenie prądu  $I_5$  w obwodzie pokazanym na rys. 3.38. Należy wykorzystać zasadę superpozycji i twierdzenie Nortona.



Rysunek 3.38: Schemat do problemu P3.9



Rysunek 3.39: Schematy do rozwiązania problemu P3.9 metodą superpozycji

**Rozwiązanie: Zasada superpozycji**

Zakładając, że działa tylko źródło 12V, tak jak na rys. 3.39a, obliczamy

$$I_5' = \frac{12}{\frac{1 \cdot 5}{1+5} + \frac{3 \cdot (6+2)}{3+(6+2)}} = 3,98 \text{ [A]}$$

a następnie

$$I_5' = \frac{1}{1+5} \cdot I = \frac{1}{6} \cdot 3,98 = 0,66 \text{ [A]}$$

Teraz interesuje nas oddziaływanie źródła prądowego, które dla wygody przekształcamy w równoważne źródło napięcia. W wynikowym obwodzie, który pokazano na rys. 3.39b, obliczamy natężenie

$$I_5'' = \frac{6}{2+6+\frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}} = 0,69 \text{ [A]}$$



które następnie wykorzystujemy do wyznaczenia

$$I_5'' = -\frac{\frac{1 \cdot 3}{1+3}}{5 + \frac{1 \cdot 3}{1+3}} \cdot I_2'' = -\frac{0,75}{5,75} \cdot 0,69 = -0,09 \text{ [A]}$$

Na podstawie zasady superpozycji

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 0,66 - 0,09 = 0,57 \text{ [A]}$$

**Rozwiązanie: Twierdzenie Nortona**

Natężenie prądu Nortona  $I_N$  wyznaczamy w obwodzie z rys. 3.40a, w którym jest zwarcie w miejscu interesującego nas opornika, zaś źródło prądu zostało zastąpione równoważnym źródłem napięcia. Ponieważ zaciski  $a$  i  $b$  są zwarte, na rezystorze  $1 \Omega$  nie ma napięcia, czyli nie płynie prąd na mocy prawa Ohma. Zatem

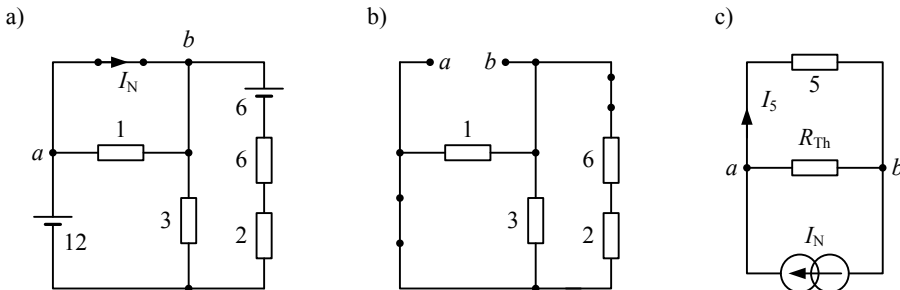
$$I_N = I_1 + I_2 = \frac{12}{3} + \frac{12 - 6}{6 + 2} = 4,75 \text{ [A]}$$

Na podstawie rys. 3.40b obliczamy

$$R_N = R_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2+6}} = \frac{24}{24 + 8 + 3} = \frac{24}{35} \text{ [\Omega]}$$

Zastępczy obwód Nortona ma postać z rys. 3.40c. Ze wzoru na dzielnik prądu

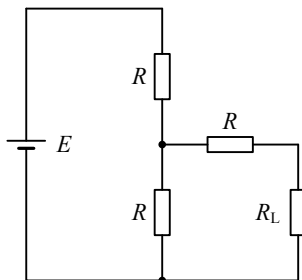
$$I_5 = \frac{R_{Th}}{5 + R_{Th}} I_N = \frac{\frac{24}{35}}{5 + \frac{24}{35}} \cdot 4,75 = 0,57 \text{ [A]}$$



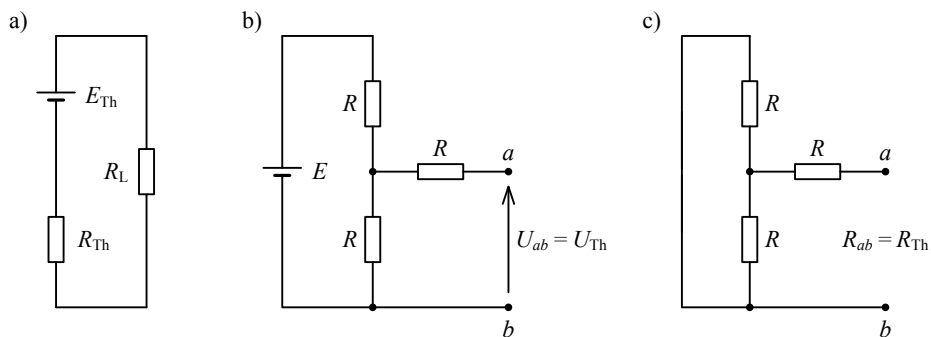
Rysunek 3.40: Schematy do rozwiązania problemu P3.9 z wykorzystaniem twierdzenia Nortona

**Problem P3.10**

Określić rezystancję  $R_L$  w obwodzie z rys. 3.41, dla której do opornika jest dostarczana maksymalna moc. Jaką maksymalną moc można osiągnąć, dobierając  $R_L$ ?



Rysunek 3.41: Schemat do problemu P3.10



Rysunek 3.42: Schematy do rozwiązania problemu P3.10

**Rozwiązanie**

Na podstawie schematów z rys. 3.42

$$R_{Th} = R + \frac{R \cdot R}{R + R} = 1,5R$$

$$U_{ab} = \frac{R}{R + R} \cdot E = \frac{E}{2}$$

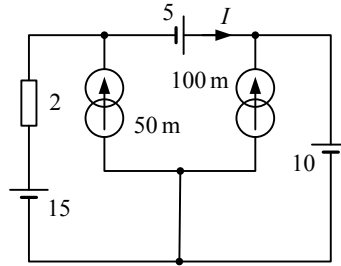
Zatem

$$P = P_{max} \quad \Leftrightarrow \quad R_L = R_{Th} = 1,5R$$

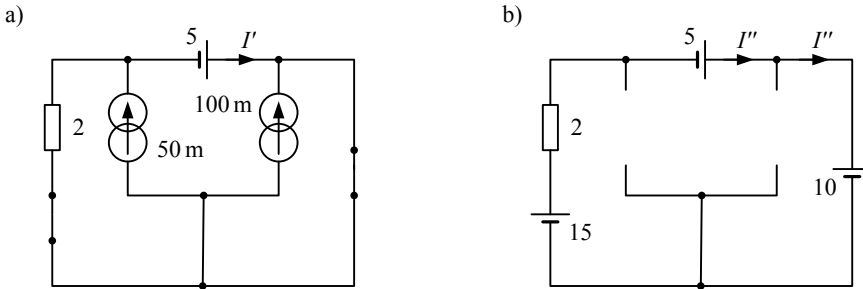
$$P_{max} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{\left(\frac{E}{2}\right)^2}{4 \cdot 1,5R} = \frac{E^2}{4 \cdot 6R} = \frac{E^2}{24R}$$

**Problem P3.11**

Określić natężenie prądu  $I$  w obwodzie z rys. 3.43. Należy zastosować zasadę superpozycji oraz twierdzenia Thevenina i Nortona.



Rysunek 3.43: Schemat do problemu P3.11



Rysunek 3.44: Schematy do rozwiązania problemu P3.11 za pomocą zasady superpozycji

**Rozwiązanie: Zasada superpozycji**

Najpierw rozpatrujemy układ z rys. 3.44, w którym źródła napięcia zostały zastąpione zwarciami, w związku z czym działają tylko źródła prądu. Ponieważ zaciski rezystora są zwarte, nie płynie prąd. Zatem źródło 50 mA określa natężenie

$$I' = 50 \text{ mA}$$

Następnie rozważamy oddziaływanie samych źródeł napięcia w obwodzie pokazanym na rys. 3.44b. Na mocy napięciowego prawa Kirchhoffa oraz prawa Ohma

$$I'' = \frac{5 - 10 + 15}{2} = 5 \text{ [A]}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji

$$I = I' + I'' = 0,05 + 5 = 5,05 \text{ [A]}$$

**Rozwiązanie: Twierdzenie Thevenina**

Aby zastosować twierdzenie Thevenina, musimy określić parametry źródła zastępczego. W układzie z rys. 3.45a określamy napięcie:

$$U_{Th} = U_{ab} = 2 \cdot 0,05 + 15 - 10 = 5,1 \text{ [V]}$$

a w układzie z rys. 3.45b — rezystancję:

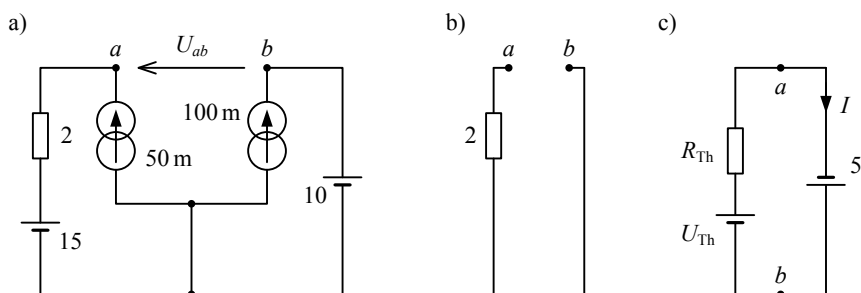
$$R_{Th} = R_{ab} = 2 \Omega$$

Rysunek 3.45c przedstawia odpowiedni zastępczy obwód Thevenina, w którym

$$5 + U_{Th} - R_{Th} \cdot I = 0$$

czyli

$$I = \frac{5 + U_{Th}}{R_{Th}} = \frac{5 + 5,1}{2} = 5,05 \text{ [A]}$$



Rysunek 3.45: Schematy do rozwiązania problemu P3.11 z wykorzystaniem twierdzenia Thevenina

**Rozwiązanie: Twierdzenie Nortona**

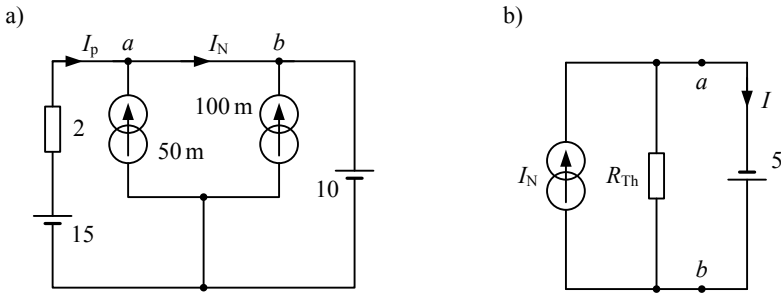
Z rozważań przeprowadzonych uprzednio odnośnie do twierdzenia Thevenina wiemy, że  $R_{Th} = 2 \Omega$ . Natężenie prądu Nortona jest określone natężeniem

$$I_N = I_p + 0,05 = \frac{15 - 10}{2} + 0,05 = 2,55 \text{ [A]}$$

w obwodzie ze zwartymi węzłami  $a$  i  $b$ , którego schemat pokazano na rys. 3.46a.

Zatem obwód zastępczy Nortona ma postać pokazaną na rys. 3.46b, czyli

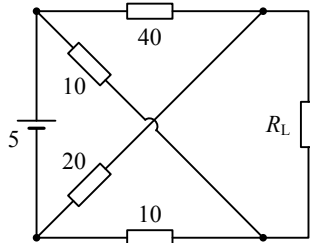
$$I = I_N + \frac{5}{R_{Th}} = 2,55 + \frac{5}{2} = 5,05 \text{ [A]}$$



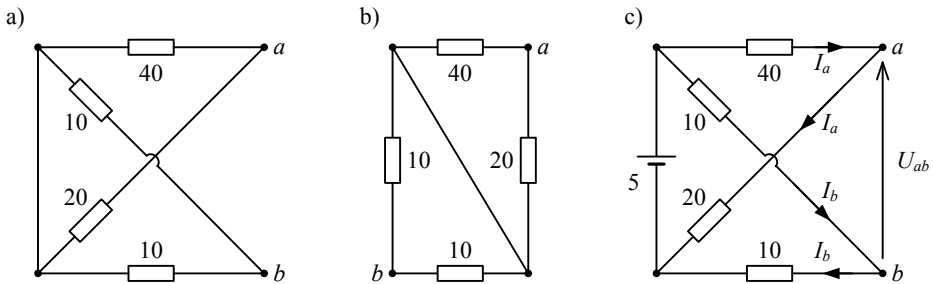
Rysunek 3.46: Schematy do rozwiązania problemu P3.11 z wykorzystaniem twierdzenia Nortona

**Problem P3.12**

Określić maksymalną moc, która może być dostarczana do  $R_L$  w obwodzie z rys. 3.47. Jaka jest odpowiednia rezystancja opornika?



Rysunek 3.47: Schemat do problemu P3.12



Rysunek 3.48: Schematy do rozwiązania problemu P3.12

**Rozwiązanie**

Aby maksymalna moc była dostarczana do  $R_L$ , ta rezystancja powinna być równa rezystancji zastępczej między węzłami  $a$  i  $b$  w układzie z rys. 3.48a, z wyłączonym źródłem i bez dołączonego obciążenia. Układ można przerysować w bardziej przejrzystej postaci pokazanej na rys. 3.48b, która unaocznia, że

$$R_L = R_{ab} = \frac{40 \cdot 20}{40 + 20} + \frac{10}{2} = \frac{40}{3} + 5 = \frac{55}{3} [\Omega]$$

Do obliczenia mocy jest też potrzebne napięcie między węzłami  $a$  i  $b$  w układzie z rys. 3.48c, z działającym źródłem, ale bez dołączonego obciążenia:

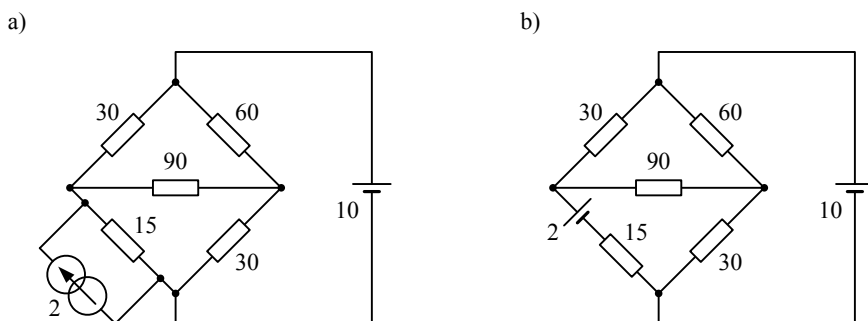
$$U_{ab} = 10 \cdot I_b - 40 \cdot I_a = 10 \cdot \frac{5}{10 + 10} - 40 \cdot \frac{5}{40 + 20} = -\frac{5}{6} [\text{V}]$$

Znając parametry zastępczego układu Thevenina, można określić

$$P_{\max} = \frac{U_{\text{Th}}^2}{4R_{\text{Th}}} = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{55} = \frac{5}{528} [\text{W}]$$

**Problem P3.13**

Czy obwody z rys. 3.49 są dualne? Odpowiedź należy uzasadnić. Jak najprościej zmodyfikować układy, by prąd nie płynął przez rezystor  $90 \Omega$ ?



Rysunek 3.49: Schematy do problemu P3.13

**Wskazówka**

Schematy wyglądają podobnie, ale na rys. 3.49a rzeczywiste źródło prądu jest tam, gdzie na rys. 3.49b jest rzeczywiste źródło napięcia. Obwody byłyby dualne, gdyby źródła były równoważne. Niestety, rzeczywiste źródło prądu o natężeniu 2A i rezystancji wewnętrznej  $15 \Omega$  odpowiada szeregowemu połączeniu tej samej rezystancji

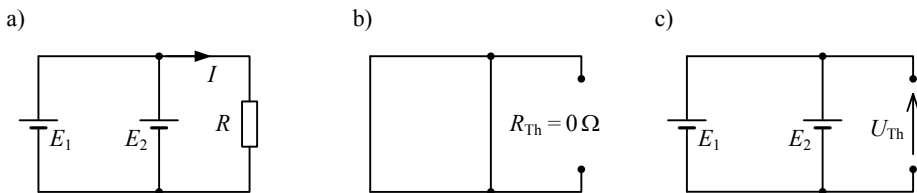
oraz źródła napięcia 30V, podczas gdy na schemacie jest źródło 2V. Zatem obwody nie są dualne, gdyż źródła nie są równoważne.

Chociaż obwody nie są mostkami, bardzo je przypominają. W szczególności rezystancje okalające opornik  $90\Omega$  spełniają warunek zrównoważenia, czyli prąd nie płynąłby przez ten element, gdyby nie działały źródła połączone z rezystancjami  $15\Omega$ . Zatem prąd będzie zerowy, gdy przekształcimy układy w zrównoważone mostki, usuwając źródła.

### 3.11.3 Quiz

#### Quiz 3.1

Jaki warunek muszą spełniać napięcia źródłowe w obwodzie z rys. 3.50a, by można było wyznaczyć natężenie prądu  $I$ ? Należy rozważyć użycie zasady superpozycji oraz twierdzeń Thevenina i Nortona.



Rysunek 3.50: Schematy do quizu 3.1

#### Wskazówka

- Układ można analizować tylko wtedy, gdy napięcia źródłowe są jednakowe, tj.  $E_1 = E_2 = E$ . Inaczej występowałaby sprzeczność z napięciowym prawem Kirchhoffa, która wykluczałaby uzyskanie sensownego wyniku jakąkolwiek metodą. Jeżeli różne źródła wymuszają inne napięcia między tymi samymi węzłami, to nie ma podstaw, by określić różnicę potencjałów tych węzłów.
- Równoległe połączenie rzeczywistych źródeł o różnych napięciach jest fizycznie możliwe, ale zwykle prowadzi od ich uszkodzenia. Źródło o mniejszym napięciu zamiast oddawać energię do obwodu, działa jako obciążenie, do którego wpływa z drugiego źródła prąd o natężeniu równym ilorazowi różnicy napięć źródłowych i sumy oporów wewnętrznych oraz rezystancji przewodów. Rezystancje te są na ogół bardzo małe, tak że prąd ma wielkie natężenie i powoduje uszkodzenie któregoś elementu obwodu, np. przepalenie przewodu. Obwód zostaje przerwany, a prąd przestaje płynąć, czyli można powiedzieć, że układ sam wraca do stanu równowagi.

- Nawet wtedy, gdy napięcia źródłowe są równe, nie można stosować zasady superpozycji do analizowania obwodu. Wspólne zaciski sprawiają, że źródła należy traktować jako zależne i rozpatrywać je łącznie.
- Z twierdzeniem Thevenina nie ma problemu. Łatwo jest obliczyć parametry obwodu zastępczego

$$R_{Th} = 0 \Omega$$

na podstawie rys. 3.50b oraz

$$U_{Th} = E (= E_1 = E_2)$$

na podstawie rys. 3.50c, a następnie szukane natężenie prądu

$$I = \frac{U_{Th}}{R}$$

- Użycie twierdzenia Nortona jest wykluczone. Zastępcze źródło Thevenina ma zerową rezystancję wewnętrzną, czyli nie można przekształcić go w źródło prądu, które stanowiłoby postawę obwodu zastępczego Nortona. Natężenia prądu źródłowego także nie można ustalić, zastępując rezystor  $R$  zwarcie i określając natężenie płynącego prądu. W ten sposób uzyskujemy błędny wynik, dowiadując się, że natężenie jest nieskończenie duże.





## Rozdział 4

# Przebiegi sinusoidalne i obwody prądu zmiennego

### Wprowadzenie

Do tej pory zajmowaliśmy się obwodami prądu stałego. Jednak, jak wspomniano w podrozdziale 1.4, w wielu układach występują prądy i napięcia, które zmieniają się w czasie. Zmiany mogą zachodzić na różne sposoby: przede wszystkim rozróżnia się przebiegi okresowe i nieokresowe oraz sinusoidalne i niesinusoidalne. Jeżeli zmiany wielkości elektrycznej są interpretowane jako przekaz informacji, to prąd albo napięcie można nazywać sygnałem.

Do opisania niektórych przebiegów potrzebny jest skomplikowany aparat matematyczny. Podstawowe znaczenie mają jednak napięcia i prądy sinusoidalne, których przebiegi są okresowe i dają się opisać względnie prosto za pomocą funkcji sinus. Takie przebiegi występują w sieci energetycznej, są powszechnie stosowane w telekomunikacji oraz stanowią podstawę teorii szeregów Fouriera i analizy harmonicznej, które pozwalają rozpatrywać różne, złożone sygnały w usystematyzowany i standardowy sposób.

Z tego powodu w niniejszym rozdziale rozpatrujemy głównie obwody, w których występują prądy i napięcia sinusoidalne. Przedtem wyjaśniamy jednak różnice między przebiegiem okresowym a nieokresowym oraz między przebiegiem sinusoidalnym a niesinusoidalnym na przykładzie przebiegów wykładniczego i piłokształtnego.

## 4.1 Przebiegi i sygnały okresowe

Przebieg lub sygnał  $u(t)$ , który stanowi funkcję czasu<sup>1</sup>, jest nazywany okresowym albo periodycznym, jeżeli przyjmuje on wartości, które powtarzają się cyklicznie:

$$u(t + nT) = u(t) \quad (4.1)$$

gdzie  $n$  jest dowolną liczbą całkowitą  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , zaś  $T$  oznacza okres przebiegu, czyli najkrótszy czas, po którym następuje powtórzenie.

Odwrotność okresu,

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.2)$$

jest nazywana częstotliwością przebiegu. Jeżeli  $T$  jest określone w sekundach, to odpowiada mu  $f$  w hercach<sup>2</sup> [Hz].

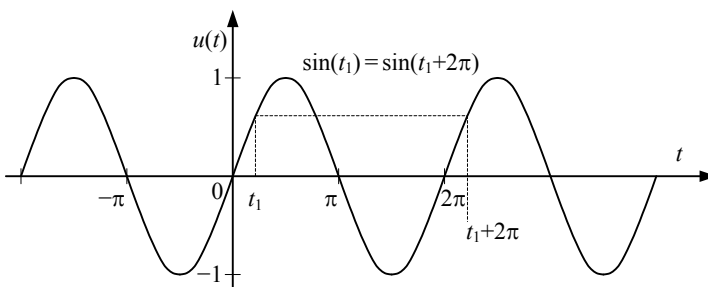
### Przykład 4.1

Przykładem przebiegu okresowego jest napięcie określone funkcją sinus

$$u(t) = \sin t \quad (4.3)$$

którą zilustrowano na rys. 4.1. Okresem jest  $T = 2\pi$ , bo wyraźnie widać, że wartości funkcji powtarzają się co każde  $2\pi$  sekund:

$$u(t + 2\pi) = \sin(t + 2\pi) = \sin t = u(t) \quad (4.4)$$



Rysunek 4.1: Przebieg sinusoidalny do przykładu 4.1

□

<sup>1</sup> W niniejszej książce używamy małych liter do oznaczania funkcji czasu.

<sup>2</sup> Henry Rudolf Hertz (1857–1894) — niemiecki fizyk.

Przebiegi okresowe, których wartości chwilowe można opisać uogólnioną wersją (4.3), czyli wzorem

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.5)$$

są nazywane przebiegami sinusoidalnymi. Przebieg taki posiada następujące parametry:

- $U_m$  — amplituda, czyli inaczej wartość maksymalna lub szczytowa; jej dwukrotność  $U_{pp} = 2U_m$  nosi nazwę wartości międzyszczytowej (ang. *peak-to-peak*),
- $\omega$  — prędkość kątowna, inaczej pulsacja,
- $\varphi$  — przesunięcie fazowe, inaczej kąt fazowy,

które objaśniono na rys. 4.2.

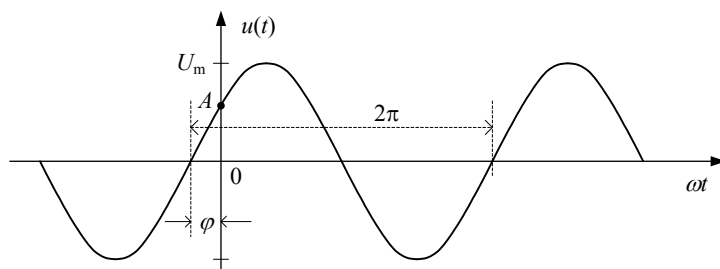
Wielkością pomocniczą jest wartość początkowa,  $u(t) = U_m \sin \varphi$ , którą przebieg przyjmuje dla  $t = 0$ . Dla  $\omega t = -\varphi$ ,  $u(t) = 0$ .

Tak określone  $u(t)$  jest funkcją periodyczną o okresie  $T$ , takim że

$$\omega T = 2\pi$$

czyli

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



Rysunek 4.2: Parametry przebiegu sinusoidalnego

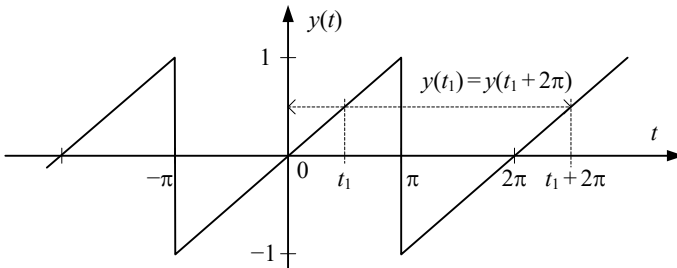
### Przykład 4.2

Rysunek 4.3 przedstawia przebieg piłokształtny, który jest przykładem niesinusoidalnej funkcji periodycznej. Taki sygnał może posiadać okres  $2\pi$ , ale nie można go opisać jedną zależnością, która obowiązywałaby dla wszystkich wartości  $t$ . Określa

go bowiem wzór:

$$y(t) = \begin{cases} \dots & \\ \frac{t}{\pi} + 2 & \text{dla } -3\pi < t < -\pi \\ \frac{t}{\pi} & \text{dla } -\pi < t < \pi \\ \frac{t}{\pi} - 2 & \text{dla } \pi < t < 3\pi \\ \dots & \end{cases} \quad (4.6)$$

□



Rysunek 4.3: Przebieg piłokształtny jako przykład niesinusoidalnego sygnału okresowego

#### Uwaga 4.1

Przebiegi okresowe, których nie można opisać wzorem (4.5), są nazywane niesinusoidalnymi. Na podstawie teorii szeregów Fouriera każdy przebieg niesinusoidalny można przedstawić w postaci złożenia przebiegów sinusoidalnych. Na przykład szereg

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right) \quad (4.7)$$

stanowi przybliżenie  $y(t)$  określonego wzorem (4.6). Szeregi Fouriera wykraczają jednak poza zakres niniejszej książki, ponieważ jesteśmy zainteresowani tylko analizą obwodów, w których występują przebiegi sinusoidalne.

△

#### Przykład 4.3

Funkcja

$$\begin{aligned} i(t) &= 4 \sin t + 3 \cos t = 5 \left( \frac{4}{5} \sin t + \frac{3}{5} \cos t \right) \\ &= 5 (\cos 37^\circ \sin t + \sin 37^\circ \cos t) = 5 \sin(t + 37^\circ) \end{aligned}$$

jest okresowa i sinusoidalna (zob. podrozdział 4.4 oraz problem P4.1).

□

**Uwaga 4.2**

Suma dwóch lub więcej przebiegów sinusoidalnych nie musi być sinusoidalna ani nawet periodyczna.

△

**Przykład 4.4**

Przebieg

$$u(t) = \sin 5t \cos \sqrt{5}t$$

jest równoważny sumie dwóch przebiegów

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( 5 - \sqrt{5} \right) t + \sin \left( 5 + \sqrt{5} \right) t \right]$$

o pulsacjach  $\omega_1 = 5 - \sqrt{5}$  i  $\omega_2 = 5 + \sqrt{5}$ . Okresowość sumy dwóch lub więcej przebiegów sinusoidalnych można sprawdzić, obliczając największy wspólny dzielnik (n.w.d.) ich pulsacji. Jeżeli jest on liczbą całkowitą, to suma jest periodyczna z okresem  $2\pi/\omega_0$ , gdzie  $\omega_0$  jest największym wspólnym dzielnikiem. W przeciwnym razie suma nie jest okresowa.

Badany przebieg nie jest okresowy, gdyż iloraz  $\omega_1 / \omega_2 = (5 - \sqrt{5}) / (5 + \sqrt{5})$  nie jest liczbą całkowitą.

□

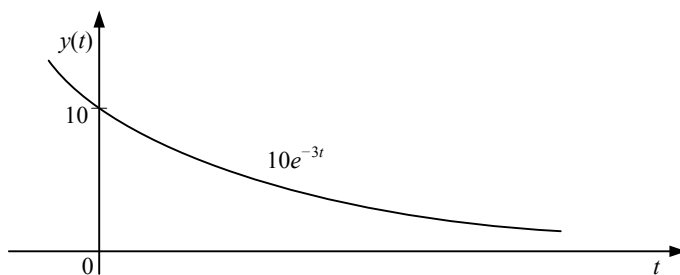
**Przykład 4.5**

Na rys. 4.4 pokazano wykładniczą funkcję czasu

$$y(t) = 10e^{-3t}$$

która jest malejąca. Ponieważ wartości takiego przebiegu nigdy się nie powtarzają, jest on nieokresowy.

□



Rysunek 4.4: Funkcja wykładnicza (nieokresowa)

## 4.2 Obwody prądu sinusoidalnego

Każde źródłowe napięcie sinusoidalne przyjmuje wartości chwilowe, które można opisać ogólnym wzorem

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \theta) \quad (4.8)$$

gdzie wartość maksymalna (szczytowa)  $E_m$  oraz przesunięcie fazowe  $\theta$  są parametrami konkretnego źródła. O ile nie zostanie wyraźnie powiedziane inaczej, będziemy zakładać, że pulsacja  $\omega$  jest parametrem obwodu, czyli jest jednakowa dla wszystkich źródeł prądu i napięcia, które w nim działają. Analiza układów, które zawierają źródła o różnych częstotliwościach, jest możliwa ale wykracza poza ramy niniejszej książki.

Jeżeli źródła napięcia sinusoidalnego zostaną użyte do zasilania liniowej sieci, to w jej gałęziach popłyną prądy sinusoidalnie zmienne o tej samej częstotliwości  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , niezależnie od struktury obwodu ani parametrów elementów biernych, które wchodzi w jego skład. Typy i parametry elementów oraz sposób ich połączenia decydują tylko o wartościach szczytowych i przesunięciach fazowych prądów i napięć w danym układzie.

Założmy, że w pewnej gałęzi płynie prąd, którego wartości chwilowe opisuje ogólny wzór

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad (4.9)$$

Przepływając przez element liniowy, taki prąd powoduje wystąpienie na nim spadku napięcia, który ma sinusoidalny przebieg:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) \quad (4.10)$$

o amplitudzie i przesunięciu fazowym, które zależą od rodzaju elementu oraz jego parametrów. Tylko w rezystorze takie samo przesunięcie fazowe charakteryzuje prąd i napięcie. W kondensatorach i cewkach przebieg prądu jest przesunięty w fazie względem przebiegu napięcia.

## 4.3 Elementy obwodów prądu zmiennego

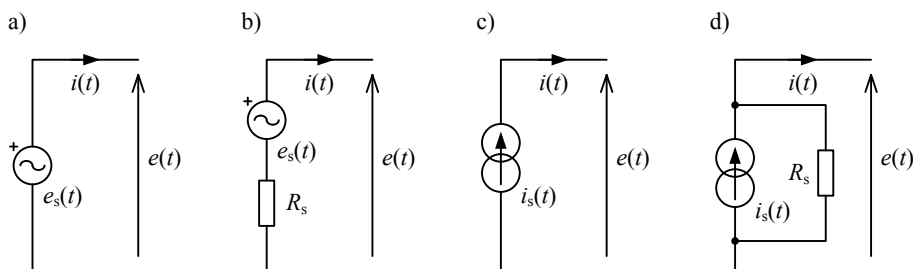
W skład obwodu liniowego mogą wchodzić źródła energii,  $E$  i  $I$ , oraz elementy pasywne,  $R$ ,  $L$  i  $C$ . Ich zachowanie w obwodach prądu stałego zostało omówione w poprzednich rozdziałach. Teraz rozpatrujemy działanie tych elementów w obwodach sinusoidalnego prądu zmiennego.

### 4.3.1 Źródła prądu i napięcia sinusoidalnego (zależne i niezależne)

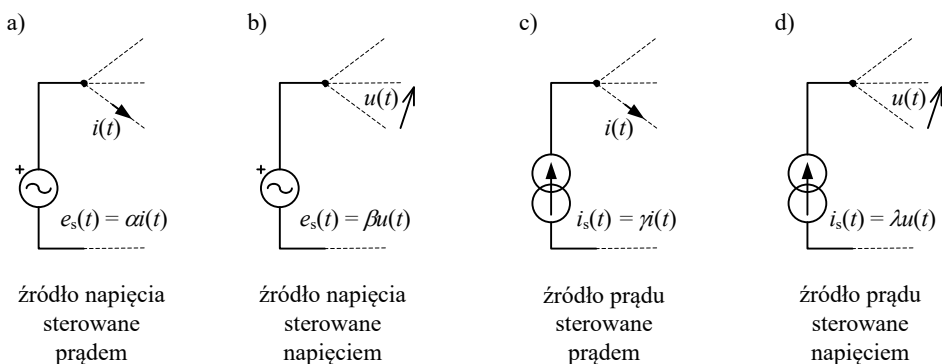
Tak jak w obwodach prądu stałego, w obwodach prądu zmiennego mogą występować źródła idealne, o zerowej rezystancji wewnętrznej, oraz rzeczywiste. Mogą one być niezależne lub zależne, czyli sterowane napięciem lub prądem z innej części tego samego układu.

Rysunek 4.5 przedstawia graficzną reprezentację źródeł niezależnych, na których działanie nie wpływają żadne czynniki zewnętrzne. W źródłach idealnych z rys. 4.5a i 4.5c odpowiednio  $e(t) = e_s(t)$ , a  $i(t) = i_s(t)$ , zaś w źródłach rzeczywistych z rys. 4.5b i 4.5d odpowiednio  $e(t) = e_s(t) - i(t)R_s$ , a  $i(t) = i_s(t) - e(t) / R_s$ .

Rysunek 4.6 pokazuje symbole źródeł zależnych, których napięcia lub prądy są proporcjonalne do pewnych innych napięć lub prądów w danym obwodzie, gdy  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\lambda$  są stałymi. Współczynniki  $\beta$  i  $\gamma$  są bezwymiarowe, jednostką  $\alpha$  jest  $\text{om} [\Omega]$ , zaś  $\lambda$  jest wyrażone w simensach [S]. Źródła zależne znajdują wiele zastosowań w teorii i projektowaniu obwodów elektrycznych i elektronicznych. Przykładowe układy zawierające takie źródła są rozpatrywane w rozdziałach 5 i 9, zob. problemy P5.13 i P5.15 oraz rys. 9.6 i 9.7.



Rysunek 4.5: Idealne i rzeczywiste źródła niezależne



Rysunek 4.6: Źródła zależne



### Uwaga 4.3 O źródłach zależnych

Analiza obwodów, które zawierają źródła zależne, często jest trudna (zob. problem P4.5). Bezpośrednio stosując zasadę superpozycji, twierdzenie Thevenina czy metodę Nortona, można uzyskać błędne wyniki, gdy źródło zależne wiąże wielkości elektryczne z różnych fragmentów obwodu, uniemożliwiając swobodne wyłączenie źródeł bez powodowania sprzeczności z prawami Kirchhoffa. Dlatego jest zalecane, by stosując zasadę superpozycji, pozostawiać w obwodzie źródła zależne, gdy rozpatrywane są oddziaływania kolejnych źródeł niezależnych. Z kolei w metodzie Thevenina rezystancję źródła zastępczego należy obliczać, dzieląc napięcie Thevenina przez prąd Nortona, a nie redukując sieć elementów pasywnych.

△

### 4.3.2 Rezystory w obwodach prądu sinusoidalnego

Załóżmy, że na zaciskach opornika o rezystancji  $R$  występuje sinusoidalne napięcie określone wzorem

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) \quad (4.11)$$

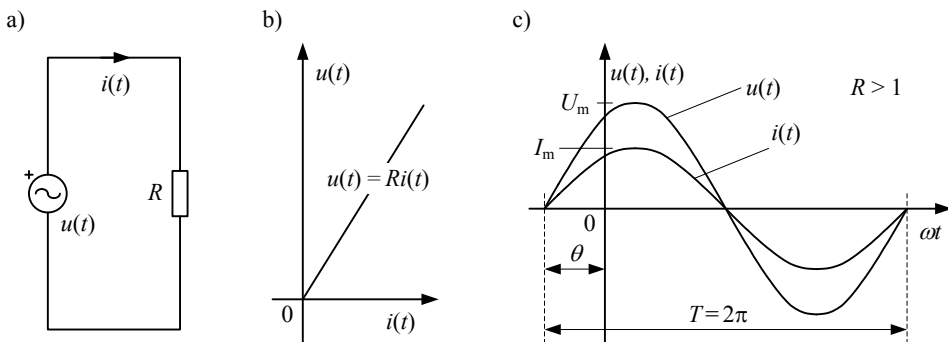
które może być wynikiem dołączenia źródła, tak jak na rys. 4.7a. Zgodnie z prawem Ohma, które zilustrowano na rys. 4.7b,

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \theta) \quad (4.12)$$

albo

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \quad (4.13)$$

gdzie  $I_m = \frac{U_m}{R}$ .



Rysunek 4.7: Działanie rezystora w obwodzie prądu zmiennego: schemat z zaznaczonym prądem i napięciem oraz wykresy objaśniające związek między tymi wielkościami

Zatem przebieg prądu w rezystorze różni się od przebiegu napięcia jedynie amplitudą (wartością maksymalną). Ponieważ przesunięcia fazowe obydwu przebiegów są takie same, to mówi się, że napięcie i prąd rezystora są w fazie. Obrazuje to rys. 4.7c, gdzie  $I_m$  jest mniejsze od  $U_m$ , gdyż przyjęto, że  $R > 1$ .

#### Przykład 4.6

Określić przebieg  $i(t)$  w obwodzie z rys. 4.7a, wiedząc, że  $u(t) = 10 \sin(100t + 30^\circ)$  V, a  $R = 100 \Omega$ .

#### Rozwiązanie

Należy wykorzystać wzór (4.12). Ponieważ  $I_m = 10 / 100 = 0,1$  [A], więc

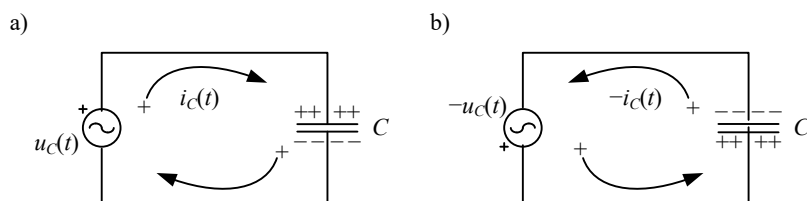
$$i(t) = 0,1 \sin(100t + 30^\circ) \text{ A}$$

□

### 4.3.3 Kondensatory w obwodach prądu sinusoidalnego

W rozdziale 1 wyjaśniono, dlaczego kondensator jest elementem zdolnym do gromadzenia energii w postaci pola elektrycznego. W podrozdziale 2.6 rozpatrzono zaś działanie kondensatora w obwodzie prądu stałego<sup>3</sup>, gdzie zachowuje się on tak, jakby w jego miejscu była przerwa. Idealny kondensator (z doskonałym izolatorem) ze swojej natury nigdy bowiem nie pozwala na przepływ prądu, gdyż nie istnieje ścieżka, którą ładunki mogłyby się przemieszczać. Mimo to w obwodzie prądu zmiennego element sprawia wrażenie, jakby był zdolny do przewodzenia.

Kondensator, do którego doprowadzono napięcie sinusoidalne, jest cyklicznie ładowany, a następnie rozładowywany, co zilustrowano na rys. 4.8. Zmiana napięcia powoduje bowiem zmianę ładunku na elektrodach kondensatora, przy czym chwilowy zwrot napięcia decyduje o tym, która okładka jest naładowana dodatnio, a która ujemnie, w danym momencie.



Rysunek 4.8: Działanie kondensatora w obwodzie prądu zmiennego: prąd płynie na zewnątrz elementu, ale nie przez jego wnętrze

<sup>3</sup> Nie brano jednak pod uwagę stanów nieustalonych, którym poświęcono rozdział 7.

Zjawiskom tym towarzyszy ruch ładunków między elektrodami kondensatora a resztą obwodu, więc można przyjąć, że zewnętrzny prąd o zmieniającym się natężeniu,  $i_C(t)$  na rys. 4.8, nazywany prądem pozornym, płynie także przez  $C$ .

Natężenie prądu w obwodzie z kondensatorem o pojemności  $C$  obliczamy za pomocą (1.9). Różniczkowa postać tego równania, czyli

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (4.14)$$

określa liniowy związek między prądem a szybkością zmian napięcia (zob. rys. 1.16c). Jeżeli do zacisków kondensatora zostało doprowadzone napięcie  $u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$ , to

$$i_C(t) = \omega C U_m \cos(\omega t + \theta_u) \quad (4.15)$$

czyli

$$i_C(t) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.16)$$

Porównując (4.16) z ogólnym wzorem (4.9), ustalamy

$$I_m = \omega C U_m$$

lub

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m \quad (4.17)$$

i

$$\theta_i = \theta_u + \frac{\pi}{2} \quad (4.18)$$

Zatem w kondensatorze kąt fazowy prądu jest większy o  $\pi/2$  od kąta napięcia. Dlatego mówi się, że prąd  $i_C(t)$  wyprzedza napięcie  $u_C(t)$  o  $\pi/2$  w fazie, czyli o  $1/4$  cyklu w czasie. Można też powiedzieć, że napięcie  $u_C(t)$  jest opóźnione względem prądu  $i_C(t)$  o  $\pi/2$  (rys. 4.9).

Amplituda napięcia  $U_m$  jest proporcjonalna do amplitudy prądu  $I_m$ , zgodnie z prawem Ohma. Współczynnik proporcjonalności  $1/\omega C$  jest określony w omach  $[\Omega]$  i dlatego traktuje się go jako wielkość podobną do rezystancji, nazywaną reaktancją pojemnościową lub pojemnościowym oporem biernym:

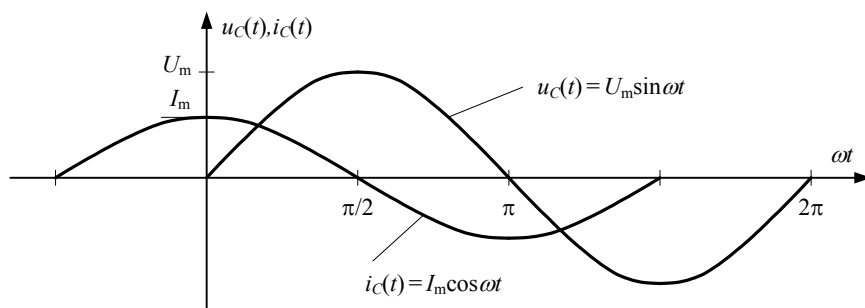
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4.19)$$

Nie można utożsamiać reaktancji z rezystancją. Rezystancja określa faktyczną zdolność elementu do przewodzenia prądu, w sensie przenoszenia ładunków. Ładunki w ogóle nie mogą przechodzić przez idealny kondensator, więc reaktancja jest tylko miarą jego wpływu na prąd w gałęzi, do której został włączony. Reaktancja zależy od częstotliwości źródła, natomiast rezystancja — nie.

Odwrotność reaktancji

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C \quad (4.20)$$

jest nazywana susceptancją pojemnościową. Jej jednostką jest siemens [S], a więc przypomina ona konduktancję.



Rysunek 4.9: Związek między napięciem a prądem kondensatora: prąd  $i_C(t)$  wyprzedza napięcie  $u_C(t)$  o  $\pi/2$  (przyjęto  $\theta_u = 0^\circ$ )

#### Przykład 4.7

Określić napięcie  $u_C(t)$  na kondensatorze, jeżeli prąd  $i_C(t) = 20 \sin 100t$  mA, a  $C = 50 \mu\text{F}$ . Obliczyć także  $X_C$  i  $B_C$ .

#### Rozwiązanie

Wykorzystujemy równanie (4.14) po przepisaniu go w postaci całkowej:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} \int_0^t 20 \sin 100t dt = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \left[ -\frac{20}{100} \cos 100t \right] \\ &= -4 \cos 100t \text{ [V]} \end{aligned}$$

Reaktancja i susceptancja wynoszą:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ } [\Omega]$$

$$B_C = \omega C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ [S]}$$

□

**Uwaga 4.4**

Analizując obwody prądu zmiennego, zwykle przyjmuje się, że kondensatory nie zawierają ładunków przed włączeniem źródeł. Początkowy stan obwodu należy skrupulatnie określić przed przystąpieniem do rozpatrywania stanów nieustalonych (zob. rozdział 7).

△

**4.3.4 Cewki w obwodach prądu sinusoidalnego**

Jak wyjaśniono w podrozdziale 2.6, w obwodzie prądu stałego idealna cewka zachowuje się tak, jakby w jej miejscu było zwarcie, połączenie o zerowej rezystancji, na którym nie ma spadku napięcia. W obwodzie prądu zmiennego element ten działa inaczej, tak że może na nim występować napięcie.

Jeżeli prąd  $i_L(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$  przepływa przez cewkę o indukcyjności  $L$ , to element wytwarza strumień magnetyczny i na jego zaciskach pojawia się indukowana siła elektromotoryczna (zob. podrozdział 1.8, a konkretnie wzór (1.26)). Siłę tę można postrzegać jako spadek napięcia

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i) = \omega L I_m \sin(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2}) \quad (4.21)$$

skierowany przeciwnie do prądu. Zatem w ogólnym równaniu (4.10)

$$U_m = \omega L I_m \quad (4.22)$$

zaś

$$\theta_u = \theta_i + \frac{\pi}{2} \quad (4.23)$$

Przeciwnie niż napięcie na kondensatorze, napięcie na cewce wyprzedza prąd o  $\pi/2$ . Innymi słowy prąd opóźnia się względem napięcia o  $\pi/2$ . Odpowiednią relację tych przebiegów ilustruje rys. 4.10.

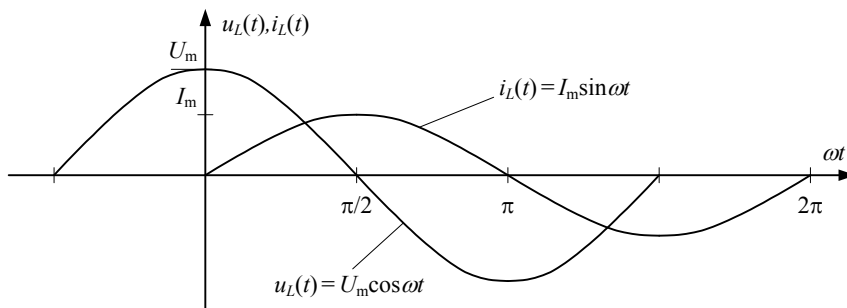
Podobnie jak kondensator, cewkę można scharakteryzować reaktancją. Iloczyn  $\omega L$  określa reaktancję indukcyjną (opór bierny indukcyjny)

$$X_L = \omega L \quad (4.24)$$

której jednostką jest  $\Omega$ . Odwrotność  $X_L$  nosi nazwę susceptancji indukcyjnej

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L} \quad (4.25)$$

i jest mierzona w siemensach [S].



Rysunek 4.10: Związek między prądem a napięciem na zaciskach cewki: napięcie  $u_L(t)$  wyprzedza prąd  $i_L(t)$  o  $\pi/2$  (przyjęto  $\theta_i = \theta_u = 0$ )

### Przykład 4.8

Określić natężenie prądu, który musiałby płynąć przez cewkę o indukcyjności  $L = 30 \text{ mH}$ , by między jej zaciskami wystąpiło napięcie  $u_L = 6 \sin 200t \text{ V}$ .

### Rozwiązanie

Równanie (4.21) można przekształcić do następującej postaci całkowej:

$$i_L(t) = -\frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt = \frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \theta_u)$$

Do uzyskanego ogólnego wzoru na przebieg prądu można podstawić wartości wynikające z treści zadania:

$$\theta_u = 0 \quad U_m = 6 \text{ V} \quad \omega = 200 \text{ rad/s} \quad L = 30 \text{ mH}$$

uzyskując konkretne, zwarte wyrażenie:

$$i_L(t) = \frac{1}{200 \cdot 0,03} 6 \cos(200t + 0) = \cos 200t \text{ [A]}$$

□

## 4.4 Obwody RLC prądu zmiennego

Po zbadaniu pojedynczych elementów rozpatrzmy połączenie szeregowo, a następnie równoległe, opornika o rezystancji  $R$ , cewki o indukcyjności  $L$  i kondensatora o pojemności  $C$ . W przypadku połączenia szeregowego interesują nas związki między wspólnym prądem a napięciami występującymi na poszczególnych elementach. W przypadku połączenia równoległego ciekawe są natomiast związki między wspólnym napięciem a natężeniami prądów płynących przez poszczególne elementy.

#### 4.4.1 Szeregowe połączenie $RLC$ i pojęcie impedancji

Założmy, że sinusoidalne napięcie  $u(t)$  zostało doprowadzone do szeregowego połączenia  $RLC$ , tak jak na rys. 4.11a, i powoduje, że przez elementy płynie prąd  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ . Zgodnie z prawem Ohma występują na nich spadki napięcia:

$$u_R(t) = RI_m \sin(\omega t + \theta_i) = U_{Rm} \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$u_C(t) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \theta_i) = U_{Cm} \cos(\omega t + \theta_i) \quad (4.26)$$

$$u_L(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i) = U_{Lm} \cos(\omega t + \theta_i)$$

których suma, na mocy prawa Kirchhoffa, jest równa napięciu wypadkowemu:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (4.27)$$

czyli

$$u(t) = RI_m \sin(\omega t + \theta_i) + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

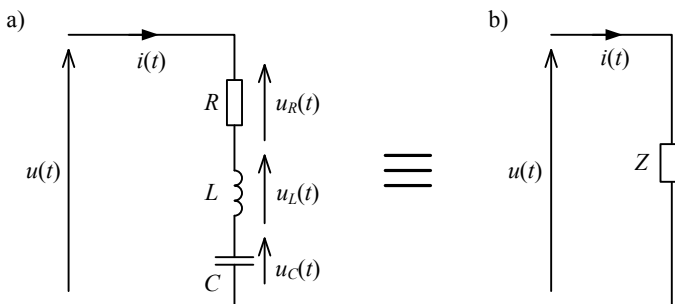
albo

$$u(t) = U_{Rm} \sin(\omega t + \theta_i) + (U_{Lm} - U_{Cm}) \cos(\omega t + \theta_i) \quad (4.28)$$

Ponieważ (4.28) ma charakterystyczną postać:

$$u(t) = a \sin x(t) + b \cos x(t)$$

gdzie  $a = RI_m$ ,  $b = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m$ , a  $x(t) = \omega t + \theta_i$ , można je uprościć do ogólnej postaci przebiegów sinusoidalnych (zob. problem P4.1).



Rysunek 4.11: Szeregowy obwód  $RLC$  i impedancja zastępcza

W rezultacie

$$u(t) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m \sin(\omega t + \theta_i + \varphi)$$

inaczej

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2} \sin(\omega t + \theta_i + \varphi) \\ &= U_m \sin(\omega t + \theta_i + \varphi) \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdzie  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$  określa przesunięcie fazowe między  $i(t)$  a  $u(t)$ .

Jeżeli  $\varphi > 0$ , czyli  $u(t)$  wyprzedza  $i(t)$  o  $\varphi$ , to obwód ma charakter indukcyjny, gdyż  $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ , czyli  $X_L > X_C$ .

Jeżeli  $\varphi < 0$ , czyli  $u(t)$  opóźnia się względem  $i(t)$  o  $\varphi$ , to obwód ma charakter pojemnościowy, ponieważ  $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ , czyli  $X_L < X_C$ .

Łączne oddziaływanie kondensatora i cewki można opisywać wypadkową reaktancją ich połączenia szeregowego,  $X = X_L - X_C$ . Natomiast związek między prądem a wypadkowym napięciem na zaciskach szeregowego połączenia  $RLC$  można zwięźle reprezentować impedancją, którą określają moduł i kąt:

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + X^2} \\ \varphi &= \arctg \frac{X}{R} \end{aligned} \quad (4.30)$$

ale częściej jest przedstawiana jako liczba zespolona, metodami opisanymi w rozdziale 5. Zatem impedancja jest wielkością wektorową, która stanowi połączenie rezystancji i reaktancji, o module mierzonym w  $\Omega$ .

Impedancję można postrzegać jako abstrakcyjny element sieci, który zastępuje połączenie  $RLC$ , tak jak pokazano na rys. 4.11. Impedancja pozwala wyrazić wypadkowe napięcie w następujący sposób:

$$u(t) = |Z| I_m \sin\left(\omega t + \theta_i + \arctg \frac{X}{R}\right) \quad (4.31)$$

czyli jest ono przebiegiem sinusoidalnym o amplitudzie  $U_m = |Z| I_m$  i kącie fazowym  $(\theta_i + \arctg \frac{X}{R})$ . Moduł impedancji określa związek między wartościami szczytowymi prądu i napięcia.



**Przykład 4.9**

Jaki charakter ma obwód z rys. 4.11: indukcyjny, pojemnościowy czy rezystancyjny? Wyznaczyć  $u(t)$ . Dane są:  $L = 50 \text{ mH}$ ,  $C = 3 \text{ mF}$ ,  $R = 20 \Omega$  oraz  $i(t) = 5 \sin 100t \text{ A}$ .

**Rozwiązanie**

Obwód jest indukcyjny, ponieważ

$$\omega L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 [\Omega] > \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 3,33 [\Omega]$$

Wykorzystując równanie (4.30), uzyskujemy

$$|Z| = \sqrt{20^2 + (5 - 3,33)^2} = \sqrt{400 + 2,78} = 20,07 [\Omega]$$
$$\varphi = \arctg \frac{5 - 3,33}{20} \approx 5^\circ$$

Znając impedancję i wiedząc, że  $I_m = 5 \text{ A}$ , możemy wykorzystać wzór (4.31) do określenia napięcia

$$u(t) = 5 \cdot 20,07 \cdot \sin(100t + 5^\circ) = 100,35 \cdot \sin(100t + 5^\circ) [\text{V}]$$

□

**Przykład 4.10**

Powtórnie wykonać polecenia z przykładu 4.9 po zmianie  $C$  na  $200 \mu\text{F}$ .

**Rozwiązanie**

Zmodyfikowany układ ma charakter pojemnościowy, gdyż

$$\omega L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 [\Omega] < \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3}} = 50 [\Omega]$$

Po obliczeniu

$$|Z| = \sqrt{20^2 + (5 - 50)^2} = \sqrt{400 + 2025} = 49,24 [\Omega]$$

oraz

$$\varphi = \arctg \frac{(5 - 50)}{20} \approx -66^\circ$$

możemy określić napięcie

$$u(t) = 5 \cdot 49,24 \cdot \sin(100t - 66^\circ) = 246,2 \cdot \sin(100t - 66^\circ) [\text{V}]$$

□

**Przykład 4.11**

Jeszcze raz wykonać polecenia z przykładu 4.9, przyjmując  $C = 2 \mu\text{F}$ .

**Rozwiązanie**

W tym przypadku obwód jest rezystancyjny, gdyż

$$\omega L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 [\Omega] \quad = \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 5 [\Omega]$$

Rezystancja określa impedancję:

$$Z = R = 20 \Omega$$

więc

$$\varphi = \arctg \frac{0}{20} \approx 0^\circ$$

a przebieg napięcia jest opisany prostym wyrażeniem:

$$u(t) = 5 \cdot 20 \cdot \sin 100t = 100 \cdot \sin 100t [\text{V}]$$

□

**4.4.2 Równoległe połączenie RLC i pojęcie admitancji**

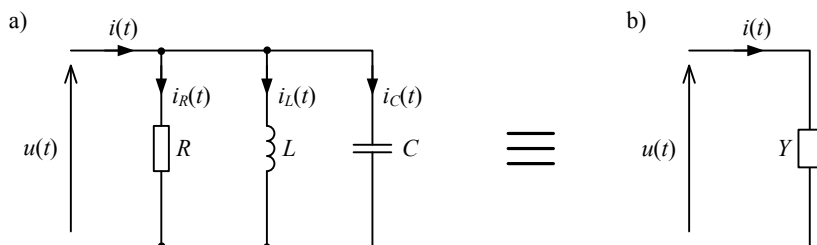
Równoległe połączenie RLC z zaznaczonymi prądami i napięciem pokazano na rys. 4.12a. Na każdym elemencie występuje to samo napięcie, określone napięciem między zaciskami układu.

Wypadkowy prąd jest określony sumą prądów gałęziowych:

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

przy czym

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \theta_u) \quad (4.32)$$



Rysunek 4.12: Równoległy obwód RLC i admitancja zastępcza

$$i_C(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \theta_u) \quad (4.33)$$

zaś

$$i_L(t) = -\frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \theta_u) \quad (4.34)$$

Zatem

$$i(t) = U_m \left[ \frac{1}{R} \sin(\omega t + \theta_u) + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \cos(\omega t + \theta_u) \right] \quad (4.35)$$

czyli

$$i(t) = U_m [G \sin(\omega t + \theta_u) + (B_C - B_L) \cos(\omega t + \theta_u)] \quad (4.36)$$

gdzie  $G$  jest konduktancją rezystora,  $B_C$  — susceptancją pojemnościową, a  $B_L$  — susceptancją indukcyjną.

Niech  $B = B_C - B_L$  oznacza wypadkową susceptancję obwodu. Postępując według procedury z przykładu 4.3 i problemu P4.1, można stwierdzić, że prąd ma przebieg sinusoidalny:

$$i(t) = \sqrt{G^2 + B^2} U_m \sin\left(\omega t + \theta_u + \arctg \frac{B}{G}\right) \quad (4.37)$$

Zatem związek prądu i napięcia można opisać za pomocą dwóch wielkości,  $G$  i  $B$ , ale często wygodniej jest posługiwać się jedną równoważną wielkością wektorową, nazywaną admitancją i oznaczaną symbolem  $Y$ . Admitancję można utożsamiać z uporządkowaną parą  $(G, B)$  albo opisywać modulem

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} \quad (4.38)$$

oraz kątem

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{B_C - B_L}{G} \quad (4.39)$$

które bezpośrednio przedstawiają związek amplitud lub wartości skutecznych prądu i napięcia oraz przesunięcie fazowe między przebiegami. Mianowicie

$$i(t) = |Y| U_m \sin(\omega t + \theta_u + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad (4.40)$$

czyli  $I_m = |Y| U_m$ , zaś  $\theta_i = \theta_u + \varphi$ .

Nietrudno zauważyć, że admitancja  $Y$  jest odwrotnością impedancji  $Z$  oraz że można na jej podstawie określić charakter obwodu. Gdy  $\varphi > 0$ , czyli  $i(t)$  wyprzedza  $u(t)$  o  $\varphi$ , obwód jest pojemnościowy,  $B_C > B_L$ . Gdy  $\varphi < 0$ , czyli  $i(t)$  opóźnia się względem  $u(t)$  o  $\varphi$ , obwód jest indukcyjny,  $B_C < B_L$ .

**Przykład 4.12**

Obliczyć natężenie prądu  $i(t)$ , który płynie w obwodzie z rys. 4.12, gdy  $R = 100\Omega$ ,  $C = 0,5\mu\text{F}$ ,  $L = 100\text{mH}$ , a  $u(t) = 200\sin 100t\text{mV}$ .

**Rozwiązanie**

Wykorzystując wzory (4.37)–(4.40), uzyskujemy:

$$B = B_C - B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L} = 100 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{100 \cdot 0,1} = 5 \cdot 10^{-5} - 0,1 \approx -0,1 \text{ [S]}$$

$$G = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ [S]}$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{0,01^2 + (-0,1)^2} \approx 0,1 \text{ [S]}$$

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{-0,1}{0,01} = -84^\circ$$

a następnie:

$$i(t) = 200 \cdot 0,1 \cdot \sin(100t - 84^\circ) = 20 \cdot \sin(100t - 84^\circ) \text{ [mA]}$$

□

**4.5 Wartość średnia a skuteczna (rms)**

W świetle poprzednich podrozdziałów nie ulega wątpliwości, że analiza obwodów prądu zmiennego wiąże się z obliczeniami znacznie bardziej skomplikowanymi niż w przypadku obwodów prądu stałego. Rozważania można jednak uprościć, rezygnując z posługiwania się wartościami chwilowymi i stosując notacje oraz wielkości wygodniejsze w użyciu.

W szczególności przebiegi sinusoidalne i związki między nimi można reprezentować w sposób zwięzły i przejrzysty za pomocą wektorów i liczb zespolonych, co jest przedmiotem rozdziału 5. Do tego celu wykorzystuje się wartość skuteczną przebiegu elektrycznego, którą można określić dla prądu oraz napięcia, ułatwiając obliczanie mocy związanej z elementami obwodów.

W niniejszym podrozdziale wartości średnią i skuteczną definiujemy czysto matematycznie. Ich fizyczna interpretacja jest omawiana w następnym podrozdziale, który ogólnie dotyczy mocy w obwodach prądu zmiennego. Na tej podstawie w rozdziale 5 przedstawiane są praktyczne metody przedstawiania sygnałów sinusoidalnych za pomocą wektorów.

### 4.5.1 Wartość średnia

Wartość średnia funkcji okresowej  $f(t)$  jest określona polem powierzchni obszaru, który wyznaczają krzywa opisana tą funkcją, granice jej okresu oraz oś czasu. Do jej obliczenia służy wzór całkowy:

$$F_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad (4.41)$$

Jeżeli  $t_1 = 0$ , to

$$F_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (4.42)$$

#### Uwaga 4.5

Funkcje sinusoidalne mają zerową wartość średnią całookresową, gdyż obszar związany z dodatnim półokresem przebiegu ma powierzchnię taką samą jak obszar wyznaczony półokresem ujemnym, więc algebraiczna suma obszarów jest równa zeru.

Fakt ten można też uzasadnić w kategoriach wielkości elektrycznych, rozpatrując średnie natężenie prądu, które jest określone ładunkiem przemieszczonym w ciągu okresu  $T = 2\pi$ , czyli  $I_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$ . Dla prądu sinusoidalnego ten ładunek, a więc i wartość średnia, są zerowe, ponieważ ładunki przemieszczane w ciągu półokresów są równe co do wartości bezwzględnej, różniąc się jedynie znakiem.

W pewnych zastosowaniach przydatne może być rozpatrywanie wartości średniej półokresowej (zob. przykład 4.15), która jest niezerowa.

△

#### Przykład 4.13

Obliczyć wartości średnie następujących funkcji:

(i)  $y(t) = 50 \sin(\omega t + 30^\circ)$

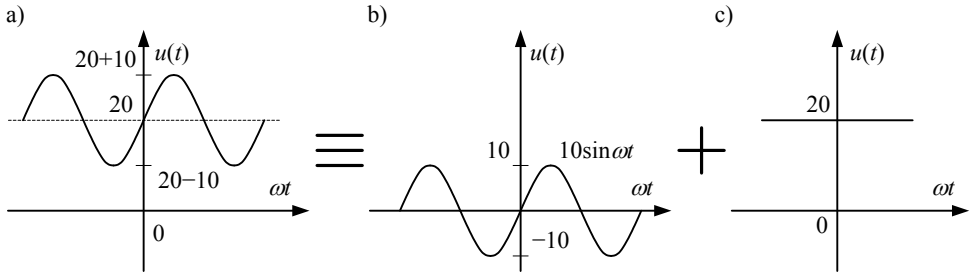
(ii)  $u(t) = 20 + 10 \sin \omega t$

#### Rozwiązanie

(i) 0, gdyż wzór opisuje przebieg sinusoidalny z przesunięciem fazowym  $30^\circ$ .

(ii) 20, co można wykazać rachunkowo lub graficznie, jak pokazano na rys. 4.13.

□



Rysunek 4.13: Graficzne rozwiązanie przykładu 4.13

**Uwaga 4.6**

Niesinusoidalny przebieg  $y(t) = A + B \sin(\omega t + \varphi)$  ma wartość średnią równą  $A$ .  
 △

**Dowód**

Przebieg stanowi złożenie dwóch funkcji elementarnych:  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , gdzie  $y_1(t) = A$ , zaś  $y_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ . Pierwsza jest stała, więc sama określa swoją wartość średnią. Druga jest przebiegiem sinusoidalnym o zerowej wartości średniej. Z własności całki wynika, że wartość średnia sumy przebiegów jest określona sumą ich wartości średnich.



**Przykład 4.14**

Określić średnie natężenie  $I_{avg}$  prądu  $i(t) = I_m \sin^2 \omega t$ .

**Rozwiązanie**

Natężenie prądu zawsze jest nieujemne, więc jego wartość średnia powinna być niezerowa. Wykorzystując zwiążek funkcji trygonometrycznych

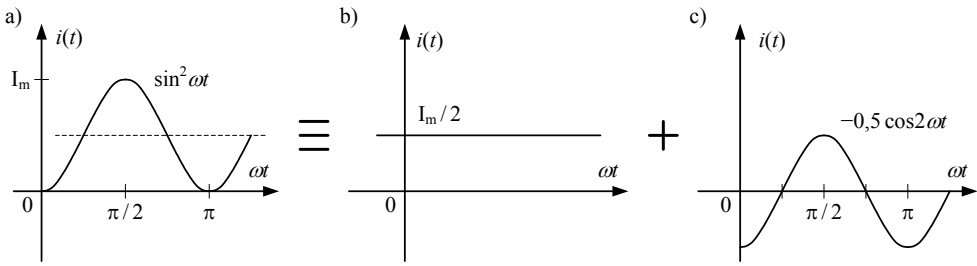
$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

przebieg prądu można traktować jako złożenie składowej stałej i fali sinusoidalnej:

$$i(t) = I_m \sin^2 \omega t = I_m \left( \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \right) = \frac{1}{2} I_m - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$$

co zilustrowano na rys. 4.14. Ponieważ stała sama jest swoją wartością średnią, a wartość średnia sinusoidy jest zerowa, więc  $I_{avg} = \frac{I_m}{2} - 0 = \frac{I_m}{2}$ .

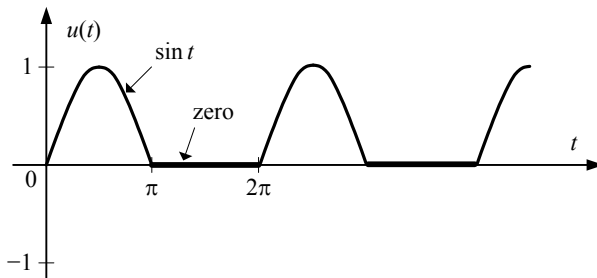




Rysunek 4.14: Przebiegi do przykładu 4.14: kwadrat funkcji sinusoidalnej nie jest przebiegiem sinusoidalnym

**Przykład 4.15**

Określić średnią wartość napięcia na wyjściu prostownika jednopółkowego. Odpowiedni przebieg pokazano na rys. 4.15.



Rysunek 4.15: Przebieg napięcia na wyjściu prostownika jednopółkowego

**Rozwiązanie**

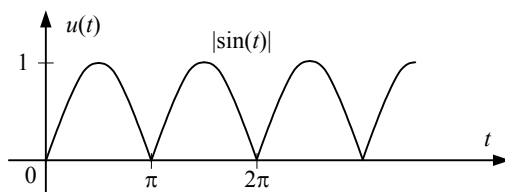
Wartość średnią rozpatrywanego napięcia obliczamy z definicji:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{avg}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 dt = \frac{1}{2\pi} [-\cos t]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} [1 + 1] = \frac{1}{\pi} = 0,318 [\text{V}]
 \end{aligned}$$

□

**Przykład 4.16**

Rysunek 4.16 pokazuje przebieg napięcia na wyjściu prostownika dwupołówkowego. Określić średnie napięcie, odnosząc się przy tym do przykładu 4.15.



Rysunek 4.16: Przebieg napięcia na wyjściu prostownika dwupołówkowego

**Rozwiązanie**

Opierając się na rezultatach poprzedniego przykładu, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 U_{\text{avg}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin t dt \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin t dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 = 0,637 \text{ [V]}
 \end{aligned}$$

czyli wartość średnia na wyjściu prostownika dwupołówkowego jest dwa razy większa niż w prostowniku jednapołówkowym.

□

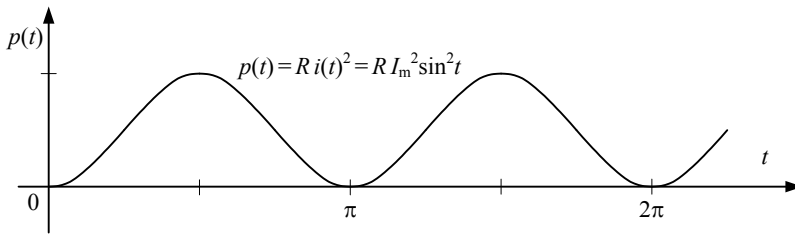
**Uwaga 4.7**

Za wyjątkiem pewnych zastosowań, takich jak np. ładowanie baterii, przebieg sinusoidalny może wykonywać użyteczną pracę, chociaż ma zerową wartość średnią. Na przykład ogrzewanie realizuje się, doprowadzając zmienne napięcie do rezystancji grzejnika.

Średnia moc, czyli także energia rozpraszana jako ciepło, jest niezerowa, gdyż chwilowa moc jest funkcją kwadratu chwilowego natężenia prądu,  $p(t) = Ri(t)^2$ , a  $i(t)^2$  zawsze przyjmuje wartości większe lub równe zero, oscylując w sposób pokazany na rys. 4.17.

△





Rysunek 4.17: Ilustracja do uwagi 4.7

#### 4.5.2 Wartość skuteczna (rms)

Uwaga 4.7 uzasadnia potrzebę wprowadzenia pojęcia skutecznej wartości przebiegu, często oznaczanej skrótem „rms” (ang. *root mean square*) zaczerpniętym z literatury angielskiej. Można bowiem wykazać, że wartość średniokwadratowa (średnia wartość kwadratu wartości chwilowej) przebiegu sinusoidalnego jest dodatnią stałą, która stanowi jego użyteczną charakterystykę.

Jeżeli  $f(t) = F_m \sin \omega t$ , to

$$\begin{aligned} (f(t)^2)_{\text{avg}} &= \frac{1}{T} \int_0^T (F_m \sin \omega t)^2 d\omega t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m^2 \sin^2 \omega t d\omega t \\ &= F_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{2} F_m^2 \end{aligned}$$

co wynika z definicji, czyli z równania (4.42) — zob. też przykład 4.14. Ten sam wynik zostałby uzyskany, gdyby rozpatrywane było niezerowe przesunięcie fazowe.

Wartość skuteczna jest pierwiastkiem kwadratowym z wartości średniej  $f(t)^2$ :

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{(f(t)^2)_{\text{avg}}} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m \quad (4.43)$$

co wyjaśnia przyczynę stosowania skrótu „rms”. Można ją podać zarówno dla prądu, jak i napięcia.

#### Uwaga 4.8

W obwodach prądu stałego wartości skuteczna, średnia i chwilowa są równe, dlatego nie rozróżnia się ich.

△

### 4.5.3 Współczynniki kształtu i szczytu

W niektórych sytuacjach interesujące są relacje między wartościami: skuteczną, średnią i szczytową. Można wtedy korzystać ze współczynników kształtu (ang. *form factor*) i szczytu (ang. *peak factor*).

Współczynnik kształtu przebiegu jest określony stosunkiem wartości skutecznej do wartości średniej:

$$\text{wsp. kształtu} = \frac{\text{wartość skuteczna}}{\text{wartość średnia}} \quad (4.44)$$

Dla przebiegów o zerowej wartości średniej, takich jak sinusoidalne, bierze się pod uwagę wartość średnią półokresową. Czyli dla  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$\text{wsp. kształtu} = \frac{I_m / \sqrt{2}}{(2/\pi) I_m} = 1,11$$

Współczynnik szczytu jest określony stosunkiem szczytowej wartości przebiegu do jego wartości skutecznej:

$$\text{wsp. szczytu} = \frac{\text{wartość szczytowa}}{\text{wartość skuteczna}} \quad (4.45)$$

W szczególności dla sinusoidalnego przebiegu  $u(t) = U_m \sin \omega t$

$$\text{wsp. szczytu} = \frac{U_m}{U_{\text{rms}}} = \frac{U_m}{U_m / \sqrt{2}} = 1,414$$

Współczynniki kształtu i szczytu znajdują zastosowanie w badaniach izolacji elektrycznej, ale tematyka ta wykracza poza ramy niniejszej książki.

## 4.6 Moc prądu zmiennego

W obwodach prądu zmiennego energia  $w(t)$ , czyli także moc  $p(t)$ , jest albo rozpraszana w  $R$ , albo magazynowana w  $L$  lub  $C$ . Jeżeli prąd o wartości chwilowej  $i(t)$  płynie przez element, na zaciskach którego jest chwilowe napięcie  $u(t)$ , to chwilową moc i energię w elemencie określają wyrażenia:

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = i(t)u(t) \quad (4.46)$$

oraz

$$w(t) = \int p(t)dt = \int i(t)u(t)dt \quad (4.47)$$

Opierając się na tych zależnościach, zbadajmy dokładnie moc chwilową i średnią w pojedynczych elementach, a następnie zajmijmy ich połączeniami.

#### 4.6.1 Moc w rezystorach

Jeżeli prąd  $i(t) = I_m \sin \omega t$  płynie przez rezystor  $R$ , na którym jest napięcie  $u(t) = U_m \sin \omega t$ , gdzie  $U_m = RI_m$ , to

$$p(t) = I_m U_m \sin^2 \omega t$$

a więc moc jest nieujemna dla wszystkich wartości  $\omega t$ . Ponieważ niesinusoidalna funkcja  $\sin^2 \omega t$  ma okres równy połowie okresu  $\sin \omega t$ , to okres  $p(t)$  wynosi  $\pi$ . Częstotliwość przebiegu mocy jest zatem dwa razy większa od częstotliwości  $i(t)$  oraz  $u(t)$ .

Średnią moc można obliczyć ze wzoru (4.42):

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m U_m \sin^2 \omega t dt$$

Podstawiając  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$  i całkując (zob. przykład 4.14), otrzymujemy:

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{2} I_m U_m = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{\sqrt{2}} = I_{\text{rms}} U_{\text{rms}} = R I_{\text{rms}}^2 = \frac{U_{\text{rms}}^2}{R} \quad (4.48)$$

Średnia moc rozpraszana w  $R$  jest nazywana mocą czynną, oznaczana skrótowo symbolem  $P$  i mierzona w watach.

#### 4.6.2 Moc w cewkach

Załóżmy, że prąd  $i(t) = I_m \sin \omega t$  płynie przez cewkę o indukcyjności  $L$ . Ponieważ  $u(t) = \omega L I_m \cos \omega t = U_m \cos \omega t$ , to

$$\begin{aligned} p(t) &= i(t)u(t) = I_m U_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} I_m U_m \sin 2\omega t \\ &= \frac{1}{2} X_L I_m^2 \sin 2\omega t = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{X_L} \sin 2\omega t = X_L I_{\text{rms}}^2 \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (4.49)$$

czyli moc chwilowa w cewce jest funkcją sinusoidalną o okresie  $\pi$ , której częstotliwość jest dwukrotnie większa od częstotliwości zmian  $i_L(t)$  i  $u_L(t)$ .

Rysunek 4.18 unaocznia ciągłość przemian energii między cewką a pozostałą częścią obwodu. Gdy moc jest dodatnia, czyli kiedy  $i(t)$  i  $u(t)$  jednocześnie są dodatnie lub ujemne, cewka absorbuje moc, odbierając ją z obwodu. Cała pochłonięta

energia

$$w(t) = \int p(t)dt = \int i(t)u(t)dt = \int Li(t)\frac{di(t)}{dt}dt = \frac{1}{2}Li(t)^2 \quad (4.50)$$

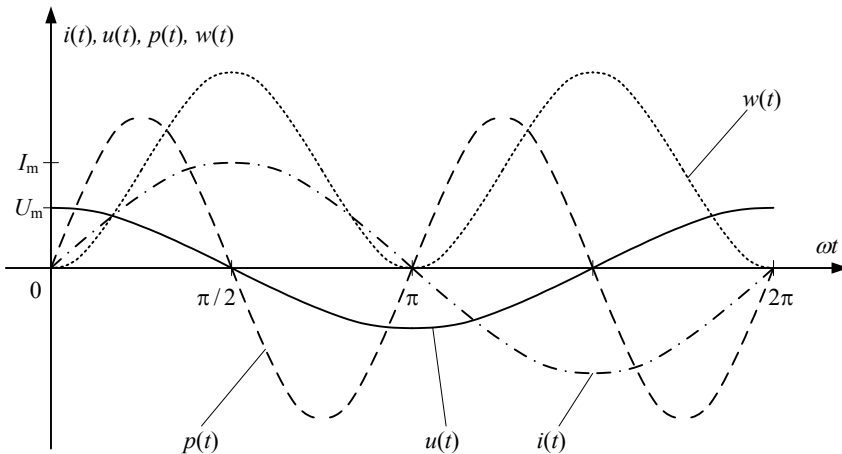
jest magazynowana w formie pola magnetycznego wokół cewki, o ile element jest idealny (zob. pytanie Q4.5), czyli nie ma rezystancji pasożytniczej, w której następowaloby rozpraszanie części mocy. Natomiast kiedy moc jest ujemna, czyli gdy  $i(t)$  i  $u(t)$  mają różne znaki, cewka zwraca energię do pozostałej części obwodu.

Ilość składowanej energii zmienia się, tak jak pokazano na rys. 4.18, osiągając maksimum dla  $\omega t = \pi / 2$  i opadając do zera dla  $\omega t = \pi$ . Wobec tego wypadkowy przepływ energii jest zerowy, nie jest wykonywana żadna praca, czyli średnia moc czynna jest zerowa.

Maksymalna wartość (4.49), którą  $p(t)$  osiąga dla  $\omega t = \pi / 4$ , jest nazywana mocą bierną, inaczej reaktancyjną, oznaczana symbolem  $Q_L$ , czyli

$$Q_L = X_L I_{rms}^2 = \frac{U_{Lrms}^2}{X_L} = I_{rms} U_{rms} \quad (4.51)$$

i mierzona w warach (ang. *volt-amper-reactive*: var).



Rysunek 4.18: Prąd, napięcie, moc i energia w cewce

### 4.6.3 Moc w kondensatorach

Energia zgromadzona w kondensatorze jest określona równaniem

$$w(t) = \int p(t)dt = \int C u(t) \frac{du(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} C u(t)^2 \quad (4.52)$$

Podczas pierwszej połowy okresu mocy,  $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ , element pobiera energię z obwodu i magazynuje ją w postaci pola elektrycznego. W drugim półokresie,  $\pi/2 \leq \omega t \leq \pi$ , kondensator zwraca energię do obwodu, w którym działa.

Zatem zjawiska zachodzące w idealnym kondensatorze przypominają to, co dzieje się w idealnej cewce, a przebiegi są analogiczne do tych z rys. 4.18. Moc chwilowa

$$\begin{aligned} p(t) = i(t)u(t) &= \frac{1}{2} I_m U_m \sin 2\omega t \\ &= \frac{1}{2} X_C I_m^2 \sin 2\omega t = X_C I_{\text{rms}}^2 \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (4.53)$$

a więc jej średnia wartość jest zerowa. Maksymalną wartość mocy chwilowej w kondensatorze oznacza się symbolem  $Q_C$ , czyli

$$Q_C = X_C I_{\text{rms}}^2 = \frac{U_{\text{rms}}^2}{X_C} = I_{\text{rms}} U_{\text{rms}} \quad (4.54)$$

określa się mianem mocy biernej (reaktancyjnej) i mierzy w warach.

### 4.6.4 Moc w elementach idealnych

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że elementy pasywne:  $R$ ,  $L$  i  $C$  są idealne, chyba że zostanie wyraźnie powiedziane inaczej. Idealny rezystor nie wytwarza pola elektrycznego ani magnetycznego, a tylko rozprasza moc elektryczną, przekształcając ją w ciepło. W idealnych  $L$  i  $C$  energia jest zaś tylko magazynowana, co nie powoduje jej strat.

### 4.6.5 Moc w obwodach RLC

Rozpatrzmy moc w szeregowym połączeniu  $R$ ,  $L$  i  $C$ . Jeżeli przez elementy płynie prąd  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ , to wypadkowe napięcie jest określone wzorem (4.31), czyli  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$ , gdzie  $U_m = |Z| I_m$ ,  $\theta_u = \theta_i + \varphi$ , a  $\varphi = \arctg(X/R)$  jest przesunięciem fazowym między  $i(t)$  a  $u(t)$ . Chwilową wartość mocy określa wyrażenie:

$$p(t) = i(t)u(t) = I_m U_m \sin(\omega t + \theta_u) \sin(\omega t + \theta_i) \quad (4.55)$$

Wykorzystując przekształcenie

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

otrzymujemy

$$p(t) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi - \frac{1}{2} I_m U_m \cos (2\omega t + \theta_u + \theta_i) \quad (4.56)$$

Z tego równania wyraźnie widać, że  $p(t)$  tworzą dwa składniki. Pierwszy, oznaczany symbolem  $P$ , ma stałą wartość  $\frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi$ , reprezentuje moc czynną związaną z  $R$  i określa średnią wartość  $p(t)$ . Drugim, oznaczanym symbolem  $Q$ , jest kosinuso-ida opisana wyrażeniem  $I_m U_m \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)$ , która ma zerową wartość średnią i reprezentuje moc bierną wynikającą z obecności  $L$  i  $C$ .

Zatem

$$P = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = I_{\text{rms}} U_{\text{rms}} \cos \varphi \quad (4.57)$$

gdzie  $U_{\text{rms}}$  jest wypadkowym napięciem, którego składową rezystancyjną jest  $U_{\text{rms}} \cos \varphi$ . Ten sam rezultat można uzyskać z definicji wartości średniej:

$$P_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) u(t) dt = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi = I_{\text{rms}} U_{\text{rms}} \cos \varphi$$

#### 4.6.6 Współczynnik mocy

Kosinus kąta określającego przesunięcie fazowe między prądem a napięciem,  $\cos \varphi$ , jest nazywany współczynnikiem mocy. Z równania (4.57) wynika, że

$$\cos \varphi = \frac{P}{I_{\text{rms}} U_{\text{rms}}}$$

lub

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

gdzie  $S$  oznacza moc pozorną, która jest określona iloczynem  $I_{\text{rms}} U_{\text{rms}}$  i mierzona w woltoamperach [VA].

Współczynnikiem mocy o maksymalnej wartości, czyli 1, charakteryzują się obwody rezystancyjne, w których prąd i napięcie są w fazie,  $\varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$ .

**Uwaga 4.9**

Należy zauważyć, że chociaż  $\varphi$  teoretycznie może zmieniać się od zera do  $\pi/2$ , to druga wartość nigdy nie występuje w praktyce. Wystąpienie  $\cos(\pi/2) = 0$  oznaczałoby, że nie ma mocy czynnej, bo w obwodzie brak rezystancji, a ta zawsze występuje w rzeczywistych elementach, jak wyjaśniono w podrozdziale 1.9.

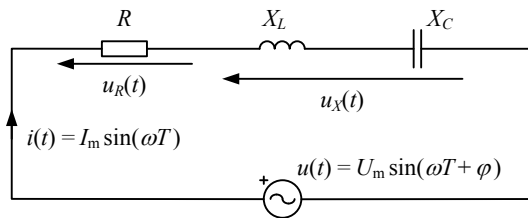
△

**4.6.7 Trójkąt mocy**

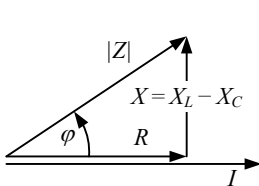
Z powyższej dyskusji wynika, że należy skrupulatnie rozróżniać trzy rodzaje mocy: moc czynną (rezystancyjną, rzeczywistą)  $P$ , moc bierną  $Q$  oraz moc pozorną  $S$  (wypadkową  $P$  i  $Q$ ). Te trzy wielkości wektorowe formują trójkąt prostokątny, który jest analogiczny do trójkąta impedancji obrazującego relacje między  $R$ ,  $X$  i  $Z$ .

Rysunek 4.19 pokazuje szeregowy obwód  $RLC$  oraz trójkąty stanowiące graficzną reprezentację przykładowej impedancji dla przypadku  $X_L > X_C$  oraz relacji między wartościami skutecznymi napięć, które wynikają z pomnożenia  $R$ ,  $X$  i  $Z$  przez  $I_{rms}$ . Jeżeli wartości skuteczne napięć  $U_R$ ,  $U_X$  i  $U$  zostaną następnie pomnożone przez wartość skuteczną prądu  $I$ , to powstaje kolejny trójkąt, który jest nazywany trójkątem mocy, gdyż obrazuje relacje między  $P$ ,  $Q$  i  $S$ .

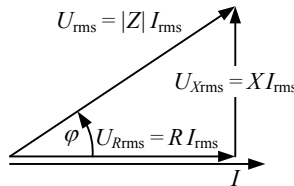
a)



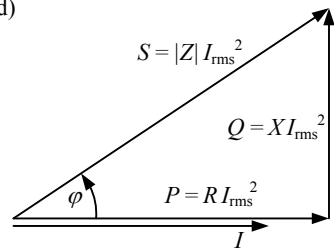
b)



c)



d)



Rysunek 4.19: Szeregowy obwód  $RLC$  wraz z odpowiednim trójkątem impedancji, trójkątem napięć i trójkątem mocy

Trójkąt mocy jest proporcjonalny do obydwu poprzednich, gdyż obrazuje  $R$ ,  $X$  i  $Z$  pomnożone przez  $I_{\text{rms}}^2$ :

$$P = RI_{\text{rms}}^2 = S \cos \varphi \quad (4.58)$$

$$Q = XI_{\text{rms}}^2 = S \sin \varphi \quad (4.59)$$

$$S = |Z|I_{\text{rms}}^2 \quad (4.60)$$

przy czym

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{U_R}{U_t} = \frac{P}{S}$$

Należy zauważyć, że wat, war i woltoamper są równorzędnymi jednostkami mocy. Aby wyróżnić moc czynną  $P$ , tylko jej przypisano rzeczywistą jednostkę mocy, czyli wat.

Analogiczne rezultaty można uzyskać dla równoległego połączenia RLC, rozpatrując  $I_{\text{rms}}$  zamiast  $U_{\text{rms}}$ . Przykłady i rozwiązane problemy dotyczące mocy, trójkąta mocy i ich zastosowań znajdują się w podrozdziale 5.5, gdzie moc rozpatrzono z wektorowego punktu widzenia.

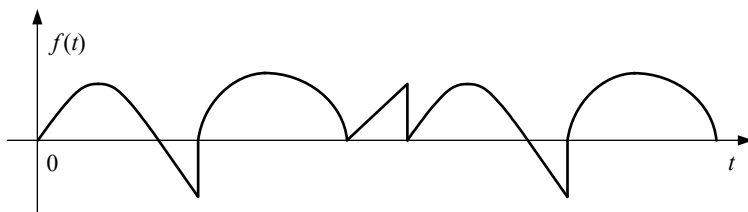
## 4.7 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 4.7.1 Pytania

#### Pytanie Q4.1

Jaki kształt powinny mieć niewidoczne części wykresu na rys. 4.20, by sygnał był okresowy? Należy rozpatrzyć różne możliwości.



Rysunek 4.20: Przebieg do pytania Q4.1



**Pytanie Q4.2**

Udowodnić, że wartość skuteczna zawsze jest większa od wartości średniej lub jej równa. Podać przykład przebiegu, dla którego wartości są równe.

**Wskazówka**

Wartość skuteczna jest równa średniej m.in. dla przebiegu prostokątnego.

---

**Pytanie Q4.3**

Dla elementów  $R$ ,  $L$  i  $C$  wyprowadzić wzory na energię  $w(t)$  zdefiniowaną równaniem (4.47). Narysować przebieg  $w(t)$  na tle wykresu  $p(t)$ .

---

**Pytanie Q4.4**

Udowodnić, że moc średnia:

- w rezystorze jest równa połowie szczytowej wartości przebiegu mocy chwilowej  $p(t) = i(t)u(t)$ ,
- w cewce i kondensatorze jest zerowa,

jeżeli przez te elementy przepływa prąd sinusoidalny.

---

**Pytanie Q4.5**

Jaki dodatkowy parametr i element obwodu należy wziąć pod uwagę, aby dyskusję na temat mocy w cewkach z podrozdziału 4.6.2, w tym rys. 4.18 i równanie (4.50), rozszerzyć na cewki nieidealne?

---

## 4.7.2 Problemy rozwiązane

**Problem P4.1**

Wyprowadzić prostsze wyrażenie, które odpowiada następującej ważonej sumie funkcji trygonometrycznych

$$y = a \sin x + b \cos x$$

W wyrażeniu powinna występować tylko funkcja sinus.

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \sin x + \sin \theta \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x + \theta) \end{aligned}$$

gdzie  $\theta = \arctg \frac{b}{a}$ .

---

**Problem P4.2**

Czy następujące funkcje:

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| a) $\sin t + \sin 2t$             | e) $\sin 3t \cdot \cos \sqrt{3}t$                      |
| b) $\sin t + \cos(t+1)$           | f) $\sin \frac{t}{3} + 3 \cos \frac{t}{4}$             |
| c) $2 \sin 5t + 3 \cos 15t$       | g) $\sin \frac{\omega}{3}t + 3 \cos \frac{\omega}{4}t$ |
| d) $\cos 6t + \sin 3t - \cos 18t$ |  |

są periodyczne?

**Wskazówka**

Należy pamiętać o uwadze 4.2 i wzorować się na przykładzie 4.4. Poprawne są następujące odpowiedzi:

- |        |        |
|--------|--------|
| a) tak | e) nie |
| b) nie | f) tak |
| c) tak | g) tak |
| d) tak |        |

---

**Problem P4.3**Sieć elektroenergetyczna dostarcza do naszych domów sinusoidalne napięcie o wartości skutecznej 230V i częstotliwości 50Hz. Zapisać wzór, który określa odpowiedni przebieg przy założeniu, że  $\phi = 0^\circ$ .**Rozwiązanie**Należy wykorzystać ogólny wzór  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Po ustaleniu wartości maksymalnej

$$U_m = U_{\text{rms}} \cdot \sqrt{2} = 230 \cdot \sqrt{2} \approx 325 \text{ [V]}$$

oraz pulsacji

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 100\pi \approx 314 \text{ [rad/s]}$$

możemy zapisać

$$u(t) = 230\sqrt{2} \sin 100\pi t \approx 325 \sin 100\pi t \text{ [V]}$$

Takie parametry napięcia sieci obowiązują w całej Unii Europejskiej. Zanim dostosowano polską sieć energetyczną do standardów UE, wartość skuteczna wynosiła 220V. W innych krajach napięcie sieci może mieć znacząco odmienne parametry. Na przykład w USA ma ono wartość skuteczną 110V i częstotliwość 60Hz.

---

**Problem P4.4**

Wyznaczyć napięcie  $u_L(t)$  na cewce o indukcyjności  $L = 50 \text{ mH}$ , przez którą płynie prąd  $i_L(t) = 10 \sin(100t + 30^\circ) \text{ A}$ . Określić  $X_L$  i  $B_L$ .

**Rozwiązanie**

Napięcie jest określone wzorem:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 100 \cos(100t + 30^\circ) = 50 \cos(100t + 30^\circ) \text{ [V]}$$

reaktancja:

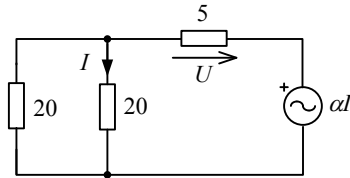
$$X_L = \omega L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ [\Omega]}$$

zaś susceptancja:

$$B_L = 1/\omega L = 0,2 \text{ [S]}$$

**Problem P4.5**

Obliczyć  $\alpha$  dla obwodu z rys. 4.21, w którym występuje zależne źródło napięcia  $\alpha I$ .



Rysunek 4.21: Schemat do problemu P4.5

**Wskazówka**

Wynik  $\alpha = 30 \Omega$  można uzyskać bezpośrednio na podstawie praw Kirchhoffa.

**Problem P4.6**

Sprawdzić, czy problem P4.5 można rozwiązać, stosując twierdzenie Thevenina. Zastanowić się nad ogólną użytecznością tego twierdzenia w analizie obwodów ze źródłami zależnymi.

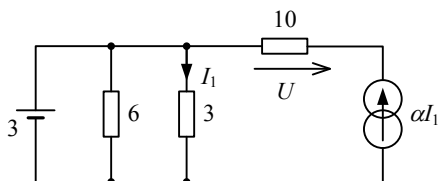
**Wskazówka**

Należy przypomnieć sobie dyskusję z podrozdziału 4.3, która dotyczyła źródeł zależnych. Twierdzenie Thevenina można stosować tylko wtedy, kiedy układ został tak podzielony na części stanowiące obciążenie i źródło zastępcze, że źródła zależne obecne w jednym podukładzie nie są sterowane wielkościami z drugiego [1].

### 4.7.3 Quiz

#### Quiz 4.1

Obliczyć napięcie  $U$  w obwodzie z rys. 4.22. Jedno ze źródeł jest zależnym źródłem prądu, którego natężenie jest sterowane prądem gałęziowym  $I_1$ , przy czym  $\alpha = 2$ .



Rysunek 4.22: Schemat do quizu 4.1

#### Odpowiedź

Szukane napięcie wynosi 20V.

---



## Rozdział 5

# Analiza obwodów prądu sinusoidalnego metodą symboliczną

### Wprowadzenie

W rozdziale 4 wykazano, że pojęcie wartości skutecznej napięcia lub prądu jest użyteczne w opisywaniu przebiegów sinusoidalnych, gdyż pozwala uprościć obliczenia. Jeszcze bardziej użytecznym narzędziem jest metoda liczb zespolonych (inaczej metoda symboliczna), która wykorzystuje algebrę zespoloną do reprezentowania wielkości elektrycznych (napięć, prądów, impedancji itd.) oraz związków między nimi. Poświęcony temu podejściu niniejszy rozdział rozpoczyna się od przedstawienia niezbędnych elementów algebry zespolonej, które są następnie wykorzystywane w analizie obwodów elektrycznych.

### 5.1 Algebra zespolona

Liczby zespolone stanowią rozszerzenie liczb rzeczywistych o dodatkowy wymiar. Można je przedstawiać w postaci:

$$z = x + jy \tag{5.1}$$

gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami rzeczywistymi, a  $j = \sqrt{-1}$  symbolizuje tzw. jednostkę urojoną. Liczba  $x$  jest nazywana częścią rzeczywistą, a liczba  $y$  — częścią urojoną liczby zespolonej. Części te są często oznaczane symbolami  $\text{Re}z$  oraz  $\text{Im}z$ .

Iloczyn  $j$  reprezentuje szczególną kategorię liczb zespolonych — liczby urojone. Podobnie liczby rzeczywiste można uważać za podzbiór liczb zespolonych, który wyróżnia zerowa część urojona.

Algebra liczb zespolonych opiera się na następujących definicjach i prawach:

1. Równoważność:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{oraz} \quad y_1 = y_2 \quad (5.2)$$

2. Suma/różnica:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2) \quad (5.3)$$

3. Iloczyn:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (5.4)$$

4. Przemienność, łączność i rozdzielność sumy oraz iloczynu:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (5.5)$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad (5.6)$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (5.7)$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \quad (5.8)$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad (5.9)$$

5. Liczba sprzężona do  $z = x + jy$  ma zmieniony znak części urojonej:

$$\bar{z} = x - jy \quad (5.10)$$

Sprzężeniem  $\bar{z}$  jest  $z$ :

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{(x - jy)} = x + jy = z$$

a iloczyn

$$z\bar{z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 \quad (5.11)$$

określa kwadrat modułu, będąc liczbą rzeczywistą dodatnią, chyba że  $z = 0$ .

6. Iloraz:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} \quad (5.12)$$

przy czym dzielenie jest wykonalne pod warunkiem, że  $z_2 \neq 0$ .

7. Moduł (wartość bezwzględna)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

czyli nieujemny pierwiastek kwadratowy z iloczynu (5.11).

Łatwo sprawdzić, że

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

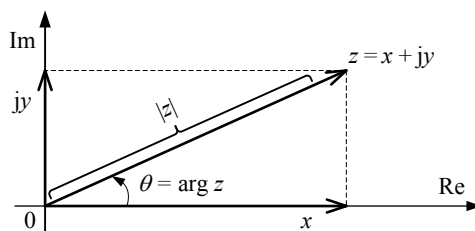
## 5.2 Sposoby reprezentowania liczb zespolonych

### 5.2.1 Postać algebraiczna/kanoniczna

Zapis (5.1) jest nazywany postacią algebraiczną lub kanoniczną liczby zespolonej. Ponieważ symbol pierwiastka nie określa znaku wyniku pierwiastkowania, jednostka urojona jest formalnie definiowana pośrednio, wyrażeniem  $j^2 = -1$ , czyli  $\frac{1}{j} = -j$ . W literaturze matematycznej jest ona powszechnie oznaczana literą „i”. Jednak w elektrotechnice i elektronice „i” stanowi zwyczajowy symbol prądu elektrycznego, więc w celu uniknięcia nieporozumień standardem jest stosowanie „j” jako symbolu jednostki urojonej.

### 5.2.2 Interpretacja geometryczna

Liczynom zespolonym można jednoznacznie przypisać punkty płaszczyzny oraz odpowiednie wektory wodzące, tak jak pokazano na rys. 5.1. W tym celu należy potraktować część rzeczywistą liczby zespolonej jako współrzędną  $x$ , a część urojoną — jako współrzędną  $y$  punktu w prostokątnym układzie współrzędnych. Punkty osi  $x$  odpowiadają liczbom rzeczywistym, a na osi  $y$  leżą liczby urojone. Określona takim odwzorowaniem płaszczyzna liczbowa jest nazywana płaszczyzną zespoloną lub płaszczyzną  $z$ .



Rysunek 5.1: Reprezentacja liczby zespolonej we współrzędnych prostokątnych



Moduł liczby zespolonej określa odległość punktu, który ją reprezentuje, od początku układu współrzędnych i jest równy długości wektora wodzącego.

Kąt  $\theta$  między osią  $x$  a wektorem reprezentującym  $z$  jest nazywany argumentem liczby  $z$  i często oznaczany symbolem funkcyjnym  $\arg z$ . Ponieważ

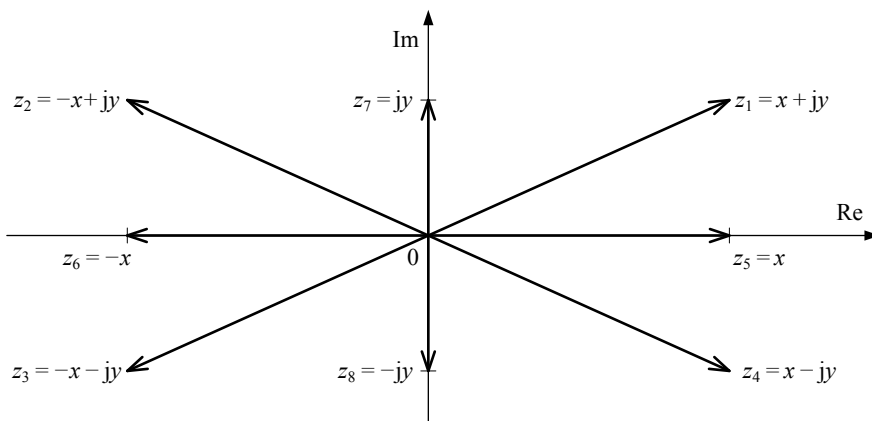
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (5.13)$$

więc

$$\arg z = \theta = \arctg \frac{y}{x} \quad (5.14)$$

Rysunek 5.2 pokazuje odwzorowanie kilku przykładowych liczb na płaszczyznę. Niektóre związki między liczbami w charakterystyczny sposób określają wzajemne położenie odpowiednich punktów. Można stwierdzić, że:

- $z_4 = \overline{z_1}$
- $z_3 = -z_1$
- $z_6 = -z_5$ , obydwie są rzeczywiste:  $y_6 = y_5 = 0$
- $z_8 = -z_7$ , obydwie są urojone:  $x_8 = x_7 = 0$



Rysunek 5.2: Liczby zespolone na płaszczyźnie liczbowej

### 5.2.3 Postać trygonometryczna

Gdy znane są jej moduł  $|z|$  i argument  $\theta$ , liczbę zespoloną  $z$  można przedstawić za pomocą funkcji trygonometrycznych  $\cos \theta$  i  $\sin \theta$ . Wystarczy przekształcić postać prostokątną, opierając się na rys. 5.1, z którego wynika, że

$$x = |z| \cos \theta \qquad y = |z| \sin \theta \qquad (5.15)$$

czyli

$$z = |z| \cos \theta + j |z| \sin \theta = |z| (\cos \theta + j \sin \theta) \qquad (5.16)$$

### 5.2.4 Postać wykładnicza

Z rozwinięcia funkcji eksponencjalnej w szereg:

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \dots + \frac{(j\theta)^n}{n!} + \dots = \operatorname{Re} e^{j\theta} + j \operatorname{Im} e^{j\theta}$$

przy czym  $\operatorname{Re} e^{j\theta} = \cos \theta$ , zaś  $j \operatorname{Im} e^{j\theta} = j \sin \theta$ , wynika tożsamość

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

która jest znana jako wzór Eulera. Łącząc ją ze wzorem (5.16), otrzymujemy postać wykładniczą liczby zespolonej

$$z = |z| e^{j\theta} \qquad (5.17)$$

Jest ona szczególnie użyteczna, gdy jesteśmy zainteresowani ich mnożeniem lub dzieleniem, bowiem łatwo można udowodnić, że

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (5.18)$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (5.19)$$

### 5.2.5 Postać biegunowa: moduł i kąt

Biegunowa postać liczby zespolonej stanowi uproszczenie reprezentacji trygonometrycznej i wykładniczej, gdyż polega na wypisaniu modułu i kąta w zwięzły sposób:

$$z = |z| \angle \theta \qquad (5.20)$$

Symbol  $\angle$  nie tylko oddziela składowe reprezentacji, ale także ją identyfikuje.

**Uwaga 5.1**

Wszystkie metody reprezentowania liczb zespolonych są użyteczne w praktyce. Ważne jest jednak, szczególnie podczas analizowania sieci elektrycznych, by wiedzieć, które przedstawienie najlepiej zastosować w określonej sytuacji. Na przykład, gdy trzeba dodawać lub odejmować liczby zespolone, to reprezentacja prostokątna jest najprostsza w użyciu. Gdy mnożymy lub dzielimy, najłatwiej stosować reprezentację biegunową lub wykładniczą. Pokazuje to poniższy przykład<sup>1</sup>.

△

**Przykład 5.1**

Wykonajmy operacje  $\overline{z_1}$ ,  $-z_1$ ,  $\overline{-z_1}$  oraz  $z_1^{-1}$  na liczbie zespolonej  $z_1 = 5 - j6$ , stosując reprezentację prostokątną:

$$\overline{z_1} = 5 + j6$$

$$-z_1 = -5 + j6$$

$$\overline{-z_1} = -5 - j6$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{5 - j6} = \frac{1}{5 - j6} \cdot \frac{5 + j6}{5 + j6} = \frac{5 + j6}{25 + 36} = \frac{5}{61} + j\frac{6}{61}$$

Dla porównania, powtórzmy te same operacje na liczbie  $z_2 = 7e^{j25^\circ}$ , wykorzystując tym razem reprezentację wykładniczą:

$$\overline{z_1} = 7e^{-j25^\circ}$$

$$-z_1 = -1 \cdot 7e^{j25^\circ} = e^{j180^\circ} \cdot 7e^{j25^\circ} = 7e^{j205^\circ} = 7e^{-j165^\circ}$$

$$\overline{-z_1} = \overline{7e^{-j165^\circ}} = 7e^{j165^\circ}$$

$$\frac{1}{z_1} = \left(7e^{j25^\circ}\right)^{-1} = \frac{1}{7}e^{-j25^\circ}$$

□

### 5.3 Przedstawienie napięcia sinusoidalnego z użyciem liczb zespolonych

Załóżmy, że dane jest napięcie sinusoidalne

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta) \quad (5.21)$$

o amplitudzie (wartości maksymalnej)  $U_m$  i przesunięciu fazowym  $\theta$ . Jak powiedziano w podrozdziale 4.2, częstotliwość  $f$  albo pulsacja  $\omega = 2\pi f$  jest parametrem

<sup>1</sup> Przykład 5.1 został zaczerpnięty z książki [15] i jej polskiego tłumaczenia [14].

całego obwodu, a nie pojedynczego źródła energii, więc  $U_m$  i  $\theta$  wystarczają do określenia  $u(t)$  dla każdej wartości  $t$ . Wobec tego  $u(t)$  można przedstawić za pomocą liczby zespolonej  $U$  o wartości bezwzględnej  $U_m$  i argumencie  $\theta$ .

Liczbę zespoloną  $U$ , która reprezentuje napięcie, można przedstawiać którymkolwiek ze sposobów wprowadzonych w podrozdziale 5.2:

- postać prostokątna:  $U = U_m \cos \theta + jU_m \sin \theta = \operatorname{Re}U + j\operatorname{Im}U$ ,
- postać biegunowa:  $U = U_m \angle \theta$ ,
- postać wykładnicza:  $U = U_m e^{j\theta}$ .

Aby ułatwić obliczanie mocy, zwykle w notacji zespolonej wykorzystuje się  $U_{\text{rms}}$  zamiast  $U_m$ :

$$U = U_{\text{rms}} \cos \theta + jU_{\text{rms}} \sin \theta = U_{\text{rms}} \angle \theta = U_{\text{rms}} e^{j\theta} \quad (5.22)$$

i taka konwencja będzie stosowana w dalszej części niniejszej książki.

### Przykład 5.2

Napięcie, którego przebieg jest określony wzorem  $u(t) = 10 \sin(100\omega t + 30^\circ)$  V, można opisać w notacji zespolonej na trzy równoważne sposoby:

- postać prostokątna:  $\frac{10}{\sqrt{2}} \cos 30^\circ + j\frac{10}{\sqrt{2}} \sin 30^\circ = 6,12 + j3,54$  V,
- postać biegunowa:  $\frac{10}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ$  V,
- postać wykładnicza:  $\frac{10}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ}$  V.

□

### Przykład 5.3

Podać alternatywne reprezentacje  $U = 20 \angle 60^\circ$  V, wiedząc, że częstotliwość  $f = 2$  kHz.

### Rozwiązanie

Rozpatrywane napięcie można przedstawić w postaci wykładniczej:

$$U = 20e^{j60^\circ} \text{ V}$$

prostokątnej:

$$U = 20(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ) = 20\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + j17,32 \text{ [V]}$$

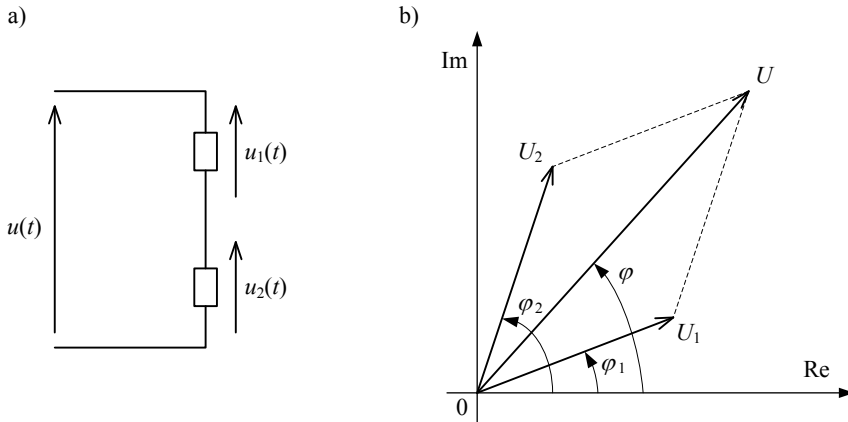
oraz jako przebieg w dziedzinie czasu:

$$u(t) = 20\sqrt{2} \sin(4000\pi t + 60^\circ) \text{ V}$$

□

**Przykład 5.4**

Obliczyć napięcie  $u(t)$  w obwodzie z rys. 5.3a, znając  $u_1(t) = 8 \sin(500t + 30^\circ)$  V oraz  $u_2(t) = 2 \sin(500t + 60^\circ)$  V.



Rysunek 5.3: Schemat i wykres wektorowy do przykładu 5.4

**Rozwiązanie**

Ponieważ mamy dodać przebiegi:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

najłatwiej będzie przedstawić  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  za pomocą liczb zespolonych w postaci prostokątnej:

$$U_1 = \frac{8}{\sqrt{2}} (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 4,9 + j2,8 \text{ [V]}$$

$$U_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ) = 0,7 + j1,2 \text{ [V]}$$

Sumując części rzeczywiste, a następnie urojone, uzyskujemy:

$$U = U_1 + U_2 = 5,6 + j4 = 6,88e^{j35^\circ} \text{ [V]}$$

Otrzymana liczba zespolona reprezentuje przebieg:

$$u(t) = 6,88 \sin(500t + 35^\circ) \text{ V}$$

Rozwiązanie można zilustrować wykresem wektorowym z rys. 5.3b i opisać, wykorzystując geometrię analityczną.

Jeżeli  $u_1(t) = U_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$  i  $u_2(t) = U_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$ , to

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

zaś

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{U_{m1} \sin \varphi_1 + U_{m2} \sin \varphi_2}{U_{m1} \cos \varphi_1 + U_{m2} \cos \varphi_2}$$

W naszym przykładzie  $U_{m1} = 8\text{V}$ ,  $U_{m2} = 2\text{V}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$  a  $\varphi_2 = 60^\circ$ . Podstawiając te wartości do powyższych wzorów, otrzymujemy:

$$U_m = 9,78 = 6,92\sqrt{2} \approx 6,88\sqrt{2} [\text{V}] \quad \text{oraz} \quad \varphi = 35,87^\circ$$

co dowodzi, że metoda liczb zespolonych daje poprawne wyniki.

□

### 5.3.1 Wektorowa reprezentacja prądu i spadku napięcia na elemencie pasywnym

Prąd sinusoidalnie zmienny można reprezentować liczbą zespoloną w sposób analogiczny jak napięcie. Zatem algebra zespolona nadaje się także do opisywania związków między prądem i napięciem, które charakteryzują działanie poszczególnych elementów pasywnych w obwodach prądu zmiennego. Jej użycie bardzo ułatwia analizowanie układów, co łatwo stwierdzić, porównując zamieszczone dalej wyprowadzenia do tych z podrozdziału 4.3, gdzie były bezpośrednio rozpatrywane przebiegi czasowe.

### 5.3.2 Rezystor

Wyrażenia (4.11) i (4.13) można przedstawić w postaci biegunowej:

$$U_R = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle \theta = U_{R\text{rms}} \angle \theta \quad (5.23)$$

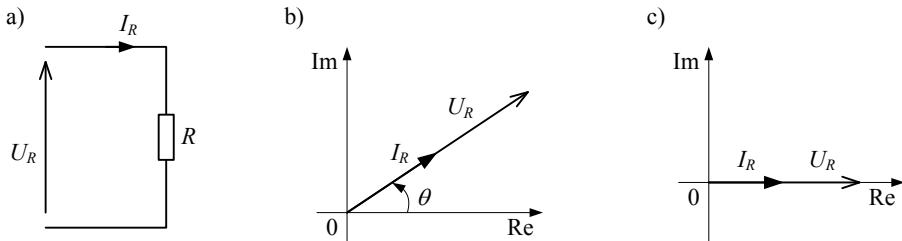
i

$$I_R = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \angle \theta = I_{R\text{rms}} \angle \theta \quad (5.24)$$

czyli

$$U_{R\text{rms}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = R \cdot I_{R\text{rms}}$$

Rysunek 5.4 przedstawia rezystor z zaznaczonym prądem i napięciem oraz przykładowe wykresy  $U_R$  i  $I_R$  na płaszczyźnie zespolonej. Należy zauważyć, że prąd i napięcie związane z opornikiem są zawsze w fazie.



Rysunek 5.4: Prąd i napięcie związane z rezystorem: (a) sposób oznaczenia na schemacie, (b) ogólna postać wykresu wektorowego oraz (c) wykres dla szczególnego przypadku  $\theta = 0$

### 5.3.3 Cewka

Przy upraszczającym założeniu, że  $\theta_i = 0$ , z równania (4.21) wynika, że na cewce, przez którą płynie prąd  $i_L(t) = I_m \sin \omega t$ , występuje napięcie

$$u_L(t) = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

Przebieg ten można reprezentować za pomocą liczby zespolonej w postaci biegunowej:

$$U_L = \frac{\omega L I_m}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle 90^\circ = U_{L_{rms}} \angle 90^\circ \quad (5.25)$$

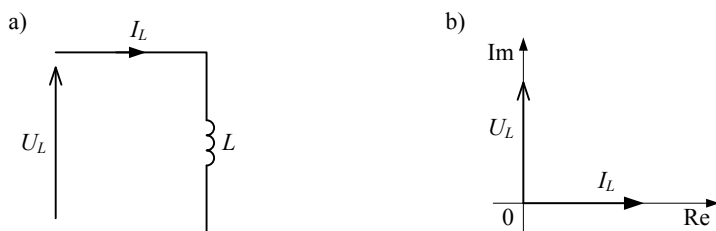
gdzie

$$U_{L_{rms}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{\omega L I_m}{\sqrt{2}}$$

lub w równoważnej postaci prostokątnej:

$$U_L = U_{L_{rms}} \left( \underbrace{\cos 90^\circ}_0 + j \underbrace{\sin 90^\circ}_1 \right) = j U_{L_{rms}} = j \omega L I_{L_{rms}} \quad (5.26)$$

Rysunek 5.5b pokazuje, że  $U_L$  wyprzedza  $I_L$  o  $90^\circ$ . Jeżeli cewka byłaby połączona szeregowo z rezystancją  $R$ , to napięcie  $U_L$  wyprzedzałoby o  $90^\circ$  zarówno prąd, jak i napięcie na oporniku, które byłyby w fazie. Dokładne objaśnienie tego znajduje się w podrozdziale 5.4, gdzie rozpatrywany jest ogólny przypadek szeregowego połączenia  $RLC$ .



Rysunek 5.5: Prąd i napięcie związane z cewką: (a) sposób oznaczenia na schemacie i (b) ogólna postać wykresu wektorowego

### 5.3.4 Kondensator

Napięcie na kondensatorze, przez który płynie prąd  $i_C(t) = I_m \sin \omega t$ , jest określone wyrażeniem

$$u_C(t) = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

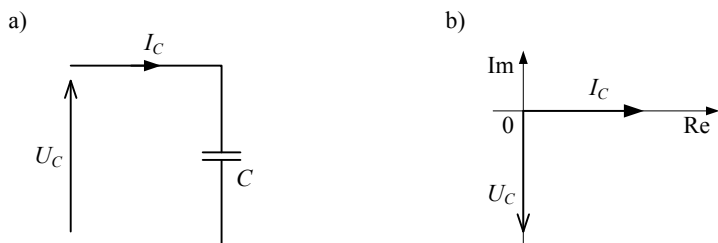
któremu odpowiadają następująca postać biegunowa:

$$U_C = \frac{I_m}{\sqrt{2}\omega C} \angle -90^\circ = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \angle -90^\circ = U_{C_{\text{rms}}} \angle -90^\circ \quad (5.27)$$

i prostokątna:

$$U_C = U_{C_{\text{rms}}} \cos(-90^\circ) + jU_{C_{\text{rms}}} \sin(-90^\circ) = -jU_{C_{\text{rms}}} = -j \frac{I_{\text{rms}}}{\omega C}$$

Zatem  $U_C$  opóźnia się względem  $I_C$  o  $90^\circ$ , co zilustrowano na rys. 5.6b.



Rysunek 5.6: Prąd i napięcie związane z kondensatorem: (a) sposób oznaczenia na schemacie i (b) ogólna postać wykresu wektorowego

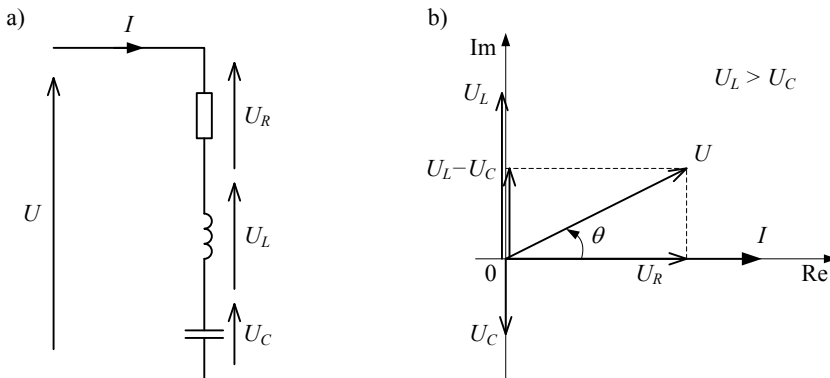


## 5.4 Analizowanie połączeń RLC z użyciem liczb zespolonych

### 5.4.1 Notacja zespolona jako sposób na ułatwienie analizy obwodów

W rozdziale 4 napięcia i prądy w obwodach RLC zostały rozpatrzone jako przebiegi czasowe. Takie podejście jest użyteczne w dydaktyce, gdyż pozwala objaśnić działanie elementów, ale wymaga zbyt skomplikowanych wyprowadzeń, by było użyteczne w praktyce. Analizowanie bardziej złożonych obwodów prądu zmiennego można znacząco uprościć, wykorzystując liczby zespolone, czyli wektory, do reprezentowania napięć, prądów i związków między nimi.

### 5.4.2 Szeregowe połączenie RLC i pojęcie impedancji zastępczej



Rysunek 5.7: Szeregowe połączenie RLC: (a) schemat i (b) wykres wektorowy napięć i prądu dla obwodu o charakterze indukcyjnym

Wyrażenia (4.27) i (4.31) można przepisać, stosując biegunową postać napięć. Przyjmując  $\theta_i = 0$  i wykorzystując równania (5.23), (5.25) i (5.27), dla obwodu z rys. 5.7 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} U_R &= R I_{\text{rms}} \angle 0^\circ = R I_{\text{rms}} \\ U_L &= X_L I_{\text{rms}} \angle 90^\circ = j X_L I_{\text{rms}} \\ U_C &= X_C I_{\text{rms}} \angle -90^\circ = -j X_C I_{\text{rms}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

gdzie  $X_L = \omega L$ , a  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ .

Wypadkowe napięcie  $U$  jest wektorową sumą napięć na poszczególnych elementach:

$$U = U_R + U_L + U_C = [R + j(X_L - X_C)] I_{\text{rms}} = (R + jX) I_{\text{rms}} \equiv Z I_{\text{rms}}$$

gdzie  $X = X_L - X_C$ , a

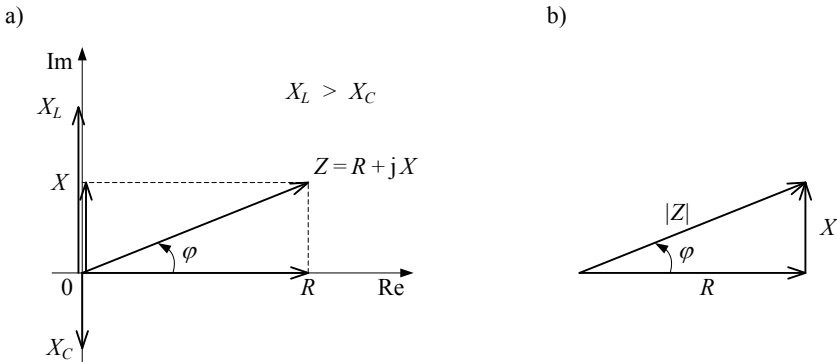
$$Z = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \arctg \frac{X}{R} = |Z| \angle \varphi$$

jest impedancją zastępczą. Wartość skuteczna

$$U_{\text{rms}} = |Z| I_{\text{rms}} \tag{5.29}$$

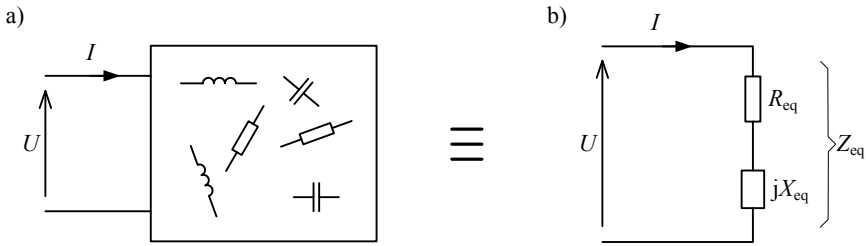
Argument impedancji  $\varphi$  określa przesunięcie fazowe między płynącym przez nią prądem a napięciem na niej.

Związek impedancji  $Z$  z jej składowymi  $R$  oraz  $X$  można zobrazować na płaszczyźnie zespolonej za pomocą trójkąta impedancji, tak jak na rys. 5.8. Obwód ma charakter indukcyjny, jeżeli  $X_L > X_C$ , a pojemnościowy, gdy  $X_C > X_L$ . Wyjaśniono to szczegółowo w podrozdziale 4.4.



Rysunek 5.8: Wykres wektorowy oraz trójkąt impedancji obwodu z rys. 5.9

Pojedynczą impedancją można zastąpić każdą, nawet bardzo skomplikowaną sieć elementów  $RLC$ , co zilustrowano na rys. 5.9. Część rzeczywista impedancji zastępczej — rezystancja zastępcza — stanowi miarę oddziaływania oporników z wnętrza sieci na obwód zewnętrzny, do którego jest dołączona. Podobnie, część reaktancyjna impedancji zastępczej — reaktancja zastępcza — pozwala stwierdzić, jak silny jest łączny wpływ kondensatorów oraz cewek i które elementy odgrywają rolę wiodącą.



Rysunek 5.9: Szeregowy obwód zastępczy

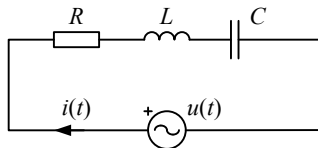
**Uwaga 5.2**

Reprezentacji zespolonej (wektorowej) impedancji  $Z$  nigdy nie można kojarzyć z przebiegiem sinusoidalnym — w odróżnieniu od reprezentacji zespolonej prądu czy napięcia.

△

**Przykład 5.5**

Wykorzystując metodę liczb zespolonych, określić przebieg napięcia źródłowego  $u(t)$  w obwodzie z rys. 5.10. Dane są  $i(t) = 2 \sin(10000t + \frac{\pi}{3})$  A,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1$  mH oraz  $C = 20 \mu\text{F}$ .



Rysunek 5.10: Schemat do przykładu 5.5

**Rozwiązanie**

Obliczamy impedancję zastępczą połączenia szeregowego  $RLC$ :

$$Z = 10 + j \left( 10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^4 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} \right) = 10 + j(10 - 5) = 10 + j5 [\Omega]$$

i stosujemy prawo Ohma, by określić symboliczną reprezentację poszukiwanego napięcia:

$$U = I \cdot Z = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \cdot 11,18 e^{j27^\circ} = 15,81 e^{j87^\circ} [\text{V}]$$

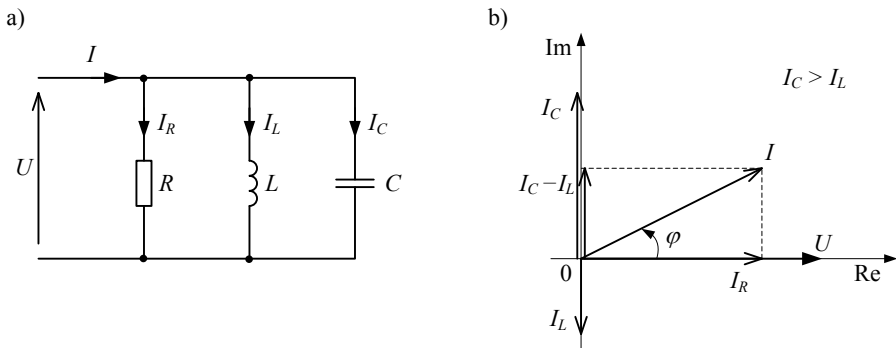
Podstawiając uzyskane wartości do ogólnego wzoru, który opisuje przebieg sinusoidalny, otrzymujemy

$$u(t) = 15,81\sqrt{2}\sin(10000t + 87^\circ) \text{ V}$$

□

### 5.4.3 Równoległe połączenie *RLC* i pojęcie admitancji zastępczej

Dyskusję podobną do tej, której poddano połączenie szeregowe *RLC*, można przeprowadzić w odniesieniu do połączenia równoległego tych elementów, opierając się na równaniach (4.32) ... (4.34) oraz (4.40) i przyjmując  $\theta_i = 0$ . Rysunek 5.11 pokazuje równoległe połączenie *RLC* oraz przykładowy wykres wektorowy napięć i prądów przy założeniu, że układ ma charakter pojemnościowy, czyli  $B_C > B_L$ .



Rysunek 5.11: Równoległe połączenie *RLC*: (a) schemat i (b) wykres wektorowy napięć i prądów dla układu o charakterze pojemnościowym

Z prawa Ohma uzyskujemy:

$$I_R = \frac{U_{\text{rms}}}{R} \angle 0^\circ = GU_{\text{rms}} = I_{R\text{rms}}$$

$$I_L = \frac{U_{\text{rms}}}{\omega L} \angle -90^\circ = -jB_L U_{\text{rms}} = -jI_{L\text{rms}}$$

$$I_C = \omega C U_{\text{rms}} \angle 90^\circ = jB_C U_{\text{rms}} = jI_{C\text{rms}}$$

gdzie:

$$G = \frac{1}{R} \qquad B_L = \frac{1}{\omega L} \qquad B_C = \omega C$$

są odpowiednio konduktancją, susceptancją indukcyjną i susceptancją pojemnościową poszczególnych elementów układu.

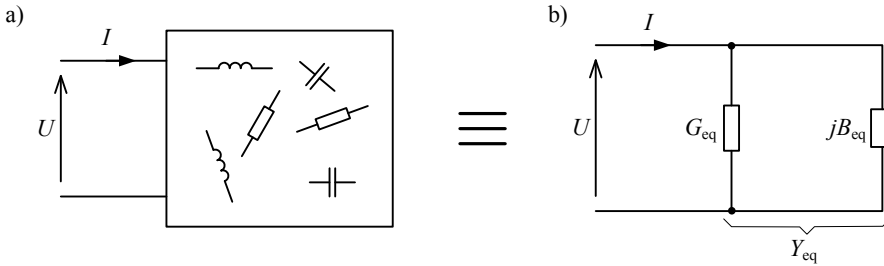
Opierając się na tych wynikach i rys. 5.11b, wypadkowy prąd można wyrazić w notacji zespolonej następująco:

$$I = I_R + j(I_C - I_L) = [G + j(B_C - B_L)]U_{\text{rms}} = (G + jB)U_{\text{rms}} = YU_{\text{rms}}$$

gdzie:

$$Y = G + jB = \sqrt{G^2 + B^2} \angle \arctg \frac{B}{G} = |Y| \angle \varphi$$

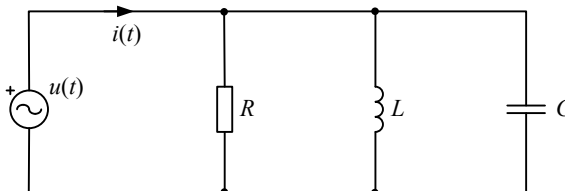
Symbole  $G$ ,  $B$  i  $Y$  należy interpretować jako konduktancję, susceptancję i admitancję obwodu zastępczego postaci pokazanej na rys. 5.12. Takim prostym układem równoległym można zastąpić każdą sieć pasywną. Jest on równoważny szeregowemu obwodowi zastępczemu, który opisano w poprzednim podrozdziale z użyciem impedancji. Admitancja zastępcza jest odwrotnością impedancji zastępczej i odwrotnie.



Rysunek 5.12: Równoległy obwód zastępczy

**Przykład 5.6**

Określić przebieg napięcia źródłowego  $u(t)$  w obwodzie z rys. 5.13. Dane są takie same, jak w przykładzie 5.5:  $i(t) = 2 \sin(10000t + \frac{\pi}{3})$  A,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1$  mH i  $C = 20 \mu\text{F}$ .



Rysunek 5.13: Schemat do przykładu 5.6

**Rozwiązanie**

Najpierw wyznaczamy admitancję zastępczą:

$$Y = \frac{1}{10} - j \frac{1}{10^4 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} + j10^4 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 0,1 - j0,1 + j0,2$$

$$= 0,1 + j0,1 = 0,1\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ [S]}$$

a następnie szukane napięcie:

$$U = \frac{I}{Y} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}e^{j60^\circ}}{0,1\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 10e^{j15^\circ} \text{ [V]}$$

Odpowiedni przebieg jest określony wzorem:

$$u(t) = 10\sqrt{2}\sin(10000t + 15^\circ) \text{ V}$$

□

**5.5 Moc w notacji zespolonej**

Podobnie jak inne wielkości elektryczne, moc prądu zmiennego określoną wzorem (4.57) wygodniej jest opisywać za pomocą notacji zespolonej. Rozpatrzmy rys. 5.14, który pokazuje, że moc pozorną można przedstawić w postaci prostokątnej:

$$S = P + jQ$$

lub biegunowej:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \arctg \frac{Q}{P} \quad (5.30)$$

Należy zauważyć, że

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{X}{R}$$

co wyraźnie widać na rys. 5.14b i 5.14c, które pokazują trójkąty mocy i impedancji.

Równania (4.58) – (4.60) i uwagi odnośnie do poszczególnych rodzajów mocy wciąż pozostają słuszne, gdyż moc czynna

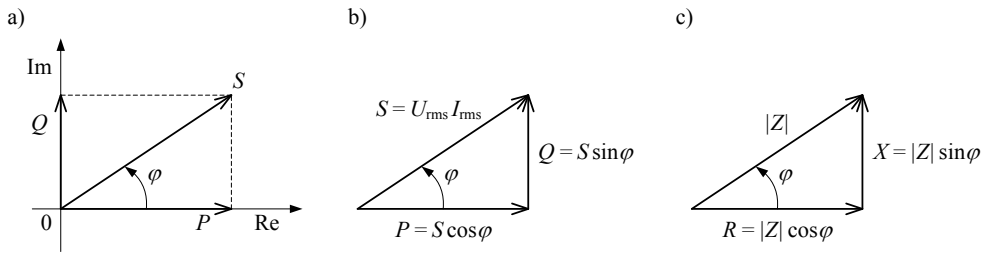
$$P = S \cos \varphi = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \varphi = R I_{\text{rms}}^2 \cos \varphi \quad \text{W}$$

moc bierna

$$Q = S \sin \varphi = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin \varphi \quad \text{var}$$

a moc pozorna

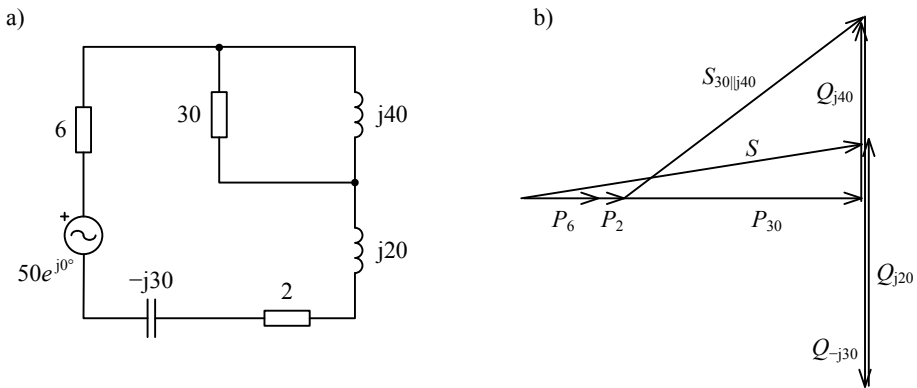
$$S = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad \text{VA}$$



Rysunek 5.14: Moc w notacji zespolonej: (a) wektory mocy na płaszczyźnie zespolonej, (b) trójkąt mocy i (c) trójkąt impedancji

**Przykład 5.7**

Obliczyć moce każdego rodzaju w obwodzie z rys. 5.15a, a następnie przedstawić rezultaty w postaci trójkąta mocy.



Rysunek 5.15: Schemat i wykres wektorowy do przykładu 5.7

**Rozwiązanie**

Prąd w gałęzi ze źródłem ma natężenie

$$I = \frac{50}{6 + \frac{30 \cdot j40}{30 + j40} + j20 + 2 - j30} = \frac{50}{27,2 + j4,4} = 1,79 - j0,29 = 1,81e^{-j9^\circ} \text{ [A]}$$

Wobec tego moce związane z poszczególnymi elementami wynoszą:

$$S = U \cdot \bar{I} = 50 \cdot 1,81e^{j9^\circ} = 90,67e^{j9^\circ} = 89,5 + j14,5 \text{ [VA]}$$

$$P_6 = |I|^2 \cdot 6 = 1,81^2 \cdot 6 = 19,66 \text{ [W]}$$

$$P_2 = |I|^2 \cdot 2 = 1,81^2 \cdot 2 = 6,55 \text{ [W]}$$

$$S_{30||j40} = |I|^2 \cdot \frac{30 \cdot j40}{30 + j40} = 1,81^2 \cdot (19,2 + j14,4) = 62,9 + j47,18 \text{ [VA]}$$

$$Q_{-j30} = |I|^2 \cdot 30 = 1,81^2 \cdot 30 = 98,28 \text{ [var]}$$

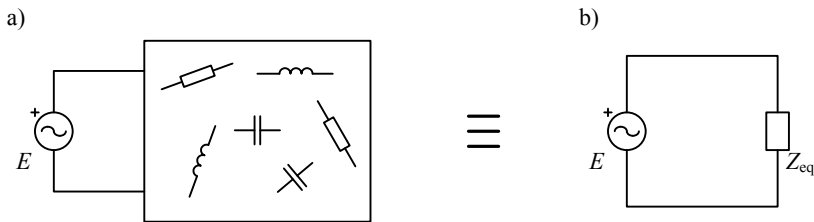
$$Q_{j20} = |I|^2 \cdot 20 = 1,81^2 \cdot 20 = 65,52 \text{ [var]}$$

Można narysować dwa trójkąty mocy: jeden dla całego obwodu, a drugi dla równoległego połączenia rezystora z cewką. Zostały one pokazane na rys. 5.15b.

□

## 5.6 Redukcja obwodów prądu zmiennego

Redukcja obwodu jest zwykle stosowana do analizy obwodów, w których występuje jedno źródło energii. Wszystkie rezystory, kondensatory i cewki są zastępowane jedną impedancją zastępczą, która jest bezpośrednio podłączona do źródła, tak jak na rys. 5.16. Można też zredukować tylko część obwodu, by uprościć lub wyklarować dalszą analizę.



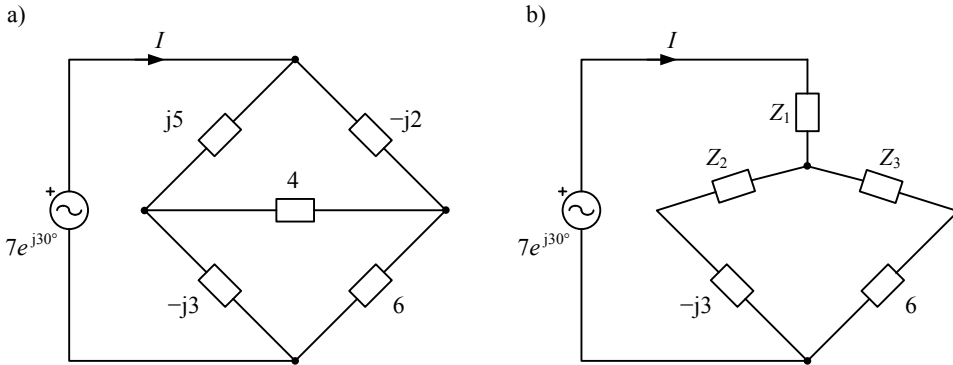
Rysunek 5.16: Redukcja sieci z jednym źródłem

Metoda redukcji opiera się na założeniu, że w przekształcanej podsięci występują połączenia szeregowo, równoległe oraz układy „trójkąt” i „gwiazda”. Poniższe przykłady wyjaśniają odpowiednie zasady postępowania.



**Przykład 5.8**

Obliczyć prąd, który płynie przez źródło w obwodzie z rys. 5.17a.



Rysunek 5.17: Schematy do przykładu 5.8

**Rozwiązanie**

Należy przekształcić jeden z trójkątów w równoważną gwiazdę. Przekształcając górny trójkąt, uzyskujemy obwód z rys. 5.17b, w którym:

$$Z_1 = \frac{j5 \cdot (-j2)}{4 + j5 - j2} = \frac{10}{4 + j3} = 1,6 - j1,2 [\Omega]$$

$$Z_2 = \frac{j5 \cdot 4}{4 + j5 - j2} = \frac{j20}{4 + j3} = 2,4 + j3,2 [\Omega]$$

$$Z_3 = \frac{4 \cdot (-j2)}{4 + j5 - j2} = \frac{-j8}{4 + j3} = -0,96 - j1,28 [\Omega]$$

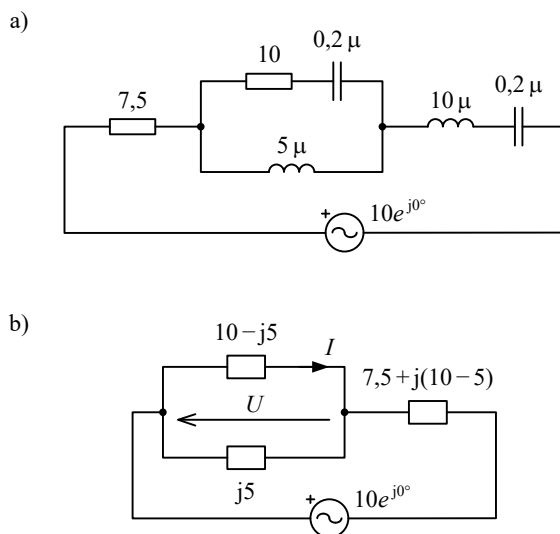
Teraz można obliczyć prąd

$$\begin{aligned} I &= \frac{7e^{j30^\circ}}{Z_1 + \frac{(Z_2 - j3) \cdot (Z_3 + 6)}{(Z_2 - j3) + (Z_3 + 6)}} = \frac{7e^{j30^\circ}}{1,6 - j1,2 + \frac{(2,4 + j0,2) \cdot (5,04 - j1,28)}{(2,4 + j0,2) + (5,04 - j1,28)}} \\ &= \frac{7e^{j30^\circ}}{1,6 - j1,2 + 1,67 - j0,04} = \frac{7e^{j30^\circ}}{3,27 - j1,24} = 1,27 + j1,55 [\text{A}] \end{aligned}$$

□

**Przykład 5.9**

Obliczyć natężenie prądu płynącego przez rezystor  $10\Omega$  w obwodzie z rys. 5.18a. Należy przyjąć  $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$ .



Rysunek 5.18: Schematy do przykładu 5.9

**Rozwiązanie**

Po obliczeniu reaktancji dla zadanej częstotliwości można narysować uproszczony schemat, który pokazano na rys. 5.18b. Napięcie na połączeniu równoległym wyznaczamy ze wzoru na dzielnik napięcia:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{((10 - j5) \parallel j5)}{((10 - j5) \parallel j5) + (7,5 + j5)} \cdot 10 = \frac{(2,5 + j5)}{(2,5 + j5) + (7,5 + j5)} \cdot 10 \\
 &= \frac{25 + j50}{10 + j10} = 3,75 + j1,25 \text{ [V]}
 \end{aligned}$$

a szukany prąd — z prawa Ohma:

$$I = \frac{U}{10 - j5} = \frac{3,75 + j1,25}{10 - j5} = 0,25 + j0,25 \text{ [A]}$$

□

## 5.7 Prawa Kirchhoffa

W obwodach prądu zmiennego prawa Kirchhoffa obowiązują w odniesieniu do chwilowych wartości prądów i napięć. Nie podlegają im natomiast wartości bezwzględne (amplitudy) ani wartości skuteczne, ponieważ obydwie wielkości są zawsze dodatnie i nie można uzyskać zera w wyniku ich sumowania.

Prawa Kirchhoffa można zapisywać w notacji wektorowej, reprezentując każdą wielkość elektryczną za pomocą i wartości bezwzględnej, i kąta fazowego.

### Uwaga 5.3

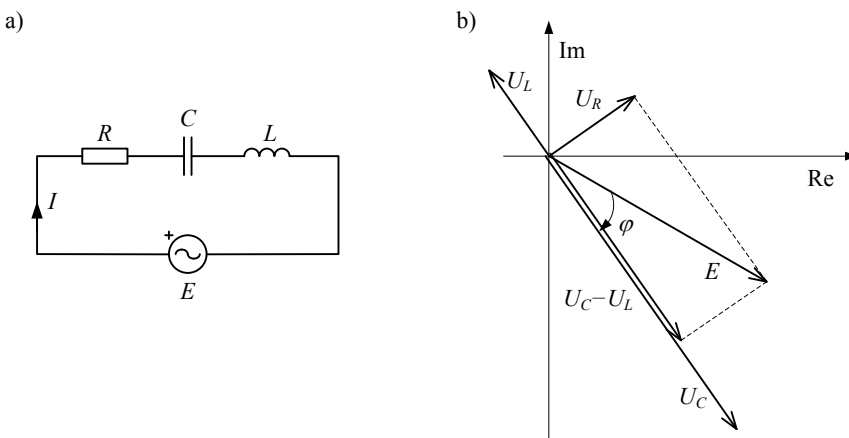
W obwodzie  $RLC$  spadek napięcia na elemencie reaktancyjnym może mieć wartość skuteczną większą niż napięcie źródła zasilającego układ.

△

Uwagę wyjaśnia poniższy przykład.

### Przykład 5.10

Napięcie sinusoidalne o wartości skutecznej  $E_{\text{rms}} = 100 \text{ V}$ , przesunięciu fazowym  $\theta = -30^\circ$  i częstotliwości  $f = 100 \text{ Hz}$  zostało doprowadzone do szeregowego połączenia  $RLC$ , tak jak na rys. 5.19a. Wiedząc, że  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,002 \text{ mH}$ , a  $C = 25 \mu\text{F}$ , obliczyć natężenie prądu płynącego w obwodzie oraz spadki napięcia na wszystkich elementach. Należy skomentować zaskakujący rezultat:  $|U_C| > |E|$ .



Rysunek 5.19: Schemat oraz wykres wektorowy do przykładu 5.10

**Rozwiązanie**

Najpierw wyznaczamy reaktancje oraz wypadkową impedancję:

$$X_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 0,008 = 10,05 [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{0,031} = 31,83 [\Omega]$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 10 - j(10,05 - 31,83) = 10 - j21,78 [\Omega]$$

Następnie możemy obliczyć natężenie prądu

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{100e^{-j30^\circ}}{10 - j21,78} = 3,4 + j2,41 = 4,17e^{j35^\circ} [\text{A}]$$

oraz spadki napięcia:

$$U_R = RI = 10 \cdot (3,4 + j2,41) = 34 + j24,1 = 41,68e^{j35^\circ} [\text{V}]$$

$$U_L = jX_L I = 10,05e^{j90^\circ} \cdot 4,17e^{j35^\circ} = 41,9e^{j125^\circ} [\text{V}]$$

$$U_C = -jX_C I = 31,83e^{-j90^\circ} \cdot 4,17e^{j35^\circ} = 132,73e^{-j55^\circ} [\text{V}]$$

Wyniki potwierdzają uwagę 5.3, gdyż  $|U_C| > |E|$ . Z diagramu wektorowego z rys. 5.19b widać, że  $E$  jest wektorową sumą  $U_R$ ,  $U_C$  i  $U_L$ .

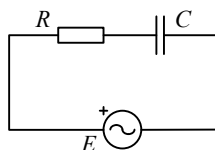
□

## 5.8 Dzielniki napięcia i prądu

Wzory dotyczące dzielników, które przedstawiono w podrozdziałach 2.1.3 i 2.1.6, można bezpośrednio stosować do analizowania obwodów prądu zmiennego. Obowiązują one bowiem nawet wtedy, gdy w miejscu rezystancji jest impedancja lub reaktancja.

### Przykład 5.11

Obliczyć napięcia na elementach  $R$  i  $C$  w obwodzie z rys. 5.20, stosując wzór na dzielnik napięcia.



Rysunek 5.20: Schemat do przykładu 5.11

**Rozwiązanie**

Wykorzystując wiadomości z podrozdziału 2.1.3, napięcia można opisać wzorami:

$$U_R = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega C}} E$$

oraz

$$U_C = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R - j\frac{1}{\omega C}} E$$

Na przykład jeżeli  $E = 10e^{j25^\circ}$  V,  $R = 10\Omega$ ,  $C = 200\mu\text{F}$  a  $\omega = 1000\text{rad/s}$ , to

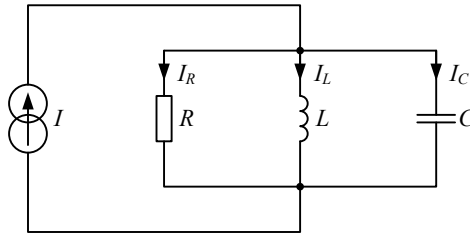
$$U_R = \frac{10}{10 - j\frac{1}{10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}} 10e^{j25^\circ} = \frac{10}{10 - j5} 10e^{j25^\circ} = \frac{100e^{j25^\circ}}{11,18e^{-j27^\circ}} = 8,94e^{j52^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_C = \frac{-j5}{10 - j5} 10e^{j25^\circ} = \frac{5e^{-j90^\circ} \cdot 10e^{j25^\circ}}{11,18e^{-j27^\circ}} = \frac{50e^{-j65^\circ}}{11,18e^{-j27^\circ}} = 4,47e^{-j38^\circ} \text{ [V]}$$

□

**Przykład 5.12**

Określić natężenia prądów w obwodzie z rys. 5.21, korzystając ze wzoru na dzielnik.



Rysunek 5.21: Schemat do przykładu 5.12

**Rozwiązanie**

Na podstawie podrozdziału 2.1.6 słuszne są następujące wzory:

$$I_R = \frac{\frac{1}{-jB_L + jB_C}}{R + \frac{1}{-jB_L + jB_C}} I$$

$$I_L + I_C = \frac{R}{R + \frac{1}{-jB_L + jB_C}} I$$

$$I_L = \frac{-jX_C}{jX_L - jX_C} (I_L + I_C)$$

$$I_C = \frac{jX_L}{jX_L - jX_C} (I_L + I_C)$$

Na przykład jeżeli  $I = 7e^{j45^\circ}$  A,  $R = 120\ \Omega$ ,  $L = 0,25$  H,  $C = 330\ \mu\text{F}$  i  $\omega = 100$  rad/s, to reaktancje i susceptancje wynoszą:

$$B_C = \omega C = 100 \cdot 330 \cdot 10^{-6} = 0,033 \text{ [S]}$$

$$X_C = \frac{1}{B_C} = 30,3\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 100 \cdot 0,25 = 25 \text{ [\Omega]}$$

$$B_L = \frac{1}{X_L} = 0,04 \text{ S}$$

a prądy mają natężenia:

$$I_R = \frac{\frac{1}{-j0,04 + j0,033}}{120 + \frac{1}{-j0,04 + j0,033}} 7e^{j45^\circ} = \frac{j142,86}{120 + j142,86} 7e^{j45^\circ} = 0,46 + j5,34 \text{ [A]}$$

$$I_L + I_C = \frac{120}{120 + \frac{1}{-j0,04 + j0,033}} 7e^{j45^\circ} = \frac{120}{120 + j142,86} 7e^{j45^\circ} = 4,49 - j0,39 \text{ [A]}$$

$$I_L = \frac{-j30,3}{j25 - j30,3} (4,49 - j0,39) = 25,67 - j2,23 \text{ [A]}$$

$$I_C = \frac{j25}{j25 - j30,3} (4,49 - j0,39) = -21,18 + j1,84 \text{ [A]}$$

□

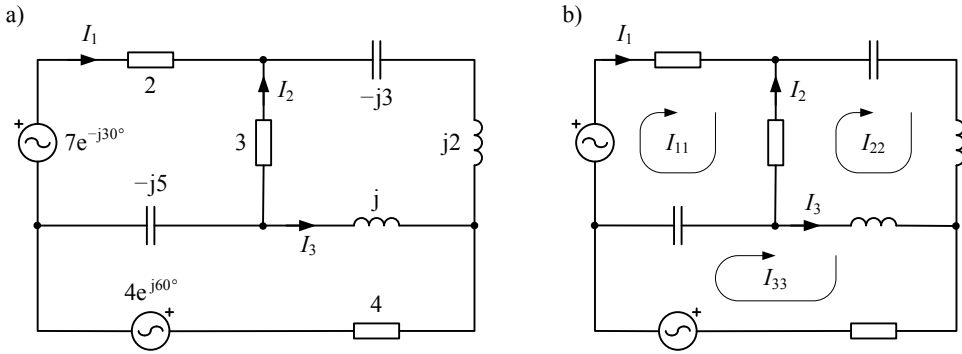
## 5.9 Metoda prądów oczkowych

Istota metody prądów oczkowych nie zależy od tego, czy analizowany jest obwód prądu stałego czy zmiennego. W obydwu przypadkach podstawę podejścia stanowi napięciowe prawo Kirchhoffa.

Zatem rozpatrując układy zasilane przebiegami sinusoidalnymi, należy postępować zasadniczo według procedury opisanej w podrozdziale 2.4 w odniesieniu do obwodów prądu zmiennego. W równaniach występują tylko impedancje zamiast rezystancji, a prądy i napięcia są przedstawiane za pomocą liczb zespolonych. Różnice te unaocznia poniższy przykład.

**Przykład 5.13**

Wykorzystując metodę prądów oczkowych, obliczyć natężenia  $I_1$ ,  $I_2$  oraz  $I_3$  w obwodzie pokazanym na rys. 5.22a.



Rysunek 5.22: Schemat do przykładu 5.13

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy, że prądy oczkowe płyną tak, jak na rys. 5.22b. Odpowiedni układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2+3-j5 & -3 & -(-j5) \\ -3 & 3-j3+j2+j & -j \\ -(-j5) & -j & 4-j5+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{-j30^\circ} \\ 0 \\ -4e^{j60^\circ} \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} 5-j5 & -3 & j5 \\ -3 & 3 & -j \\ j5 & -j & 4-j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{-j30^\circ} \\ 0 \\ -4e^{j60^\circ} \end{bmatrix}$$

a jego rozwiązaniem są:

$$\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,03-j0,21 \\ 1,45-j0,04 \\ 0,51-j1,27 \end{bmatrix} \text{ A}$$

Szukane prądy mają zatem natężenia:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 1,03 - j0,21 \text{ A} \\ I_2 &= I_{22} - I_{11} = 0,42 + j0,17 \text{ A} \\ I_3 &= I_{33} - I_{22} = -0,94 - j1,23 \text{ A} \end{aligned}$$

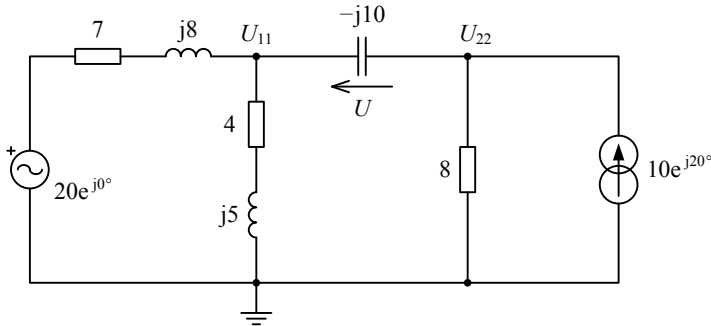
□

## 5.10 Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych analizy obwodów prądu zmiennego w zasadzie nie różni się od swojego odpowiednika przeznaczonego do analizy obwodów prądu stałego (zob. podrozdział 2.5), gdyż tak samo opiera się na prądowym prawie Kirchhoffa. W równaniach tej metody występują jednak admitancje zamiast konduktancji, a wszystkie wielkości są przedstawiane za pomocą liczb zespolonych.

### Przykład 5.14

Metodą potencjałów węzłowych wyznaczyć napięcie  $U$  w obwodzie z rys. 5.23.



Rysunek 5.23: Schemat do przykładu 5.14

### Rozwiązanie

Metoda węzłowa wymaga skonstruowania i rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7+j8} + \frac{1}{4+j5} + \frac{1}{-j10} & -\frac{1}{-j10} \\ -\frac{1}{-j10} & \frac{1}{-j10} + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7+j8} \cdot 20 \\ 10e^{j20^\circ} \end{bmatrix}$$

Jego rozwiązanie stanowią potencjały:

$$U_{11} = 1,33 + j22,46 \text{ V} \quad U_{22} = 48,75 - j10,57 \text{ V}$$

których różnicą jest:

$$\square \quad U = U_{11} - U_{22} = -47,42 + j33,03 \text{ V}$$

## 5.11 Zasada superpozycji

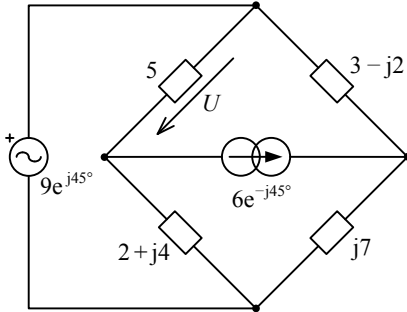
Tak samo jak w przypadku obwodów prądu stałego, zasada superpozycji obowiązuje w układach, które są zasilanych źródłami prądu i napięcia sinusoidalnego, pod warunkiem, że wszystkie elementy są liniowe.



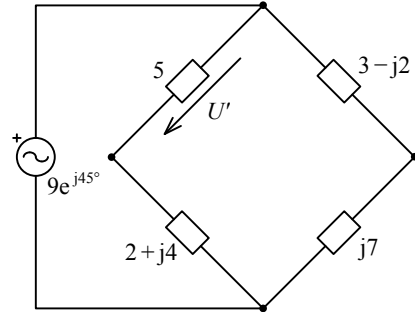
**Przykład 5.15**

Obliczyć napięcie na rezystorze  $5 \Omega$  w obwodzie z rys. 5.24a.

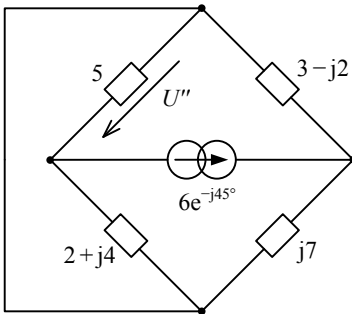
a)



b)



c)



Rysunek 5.24: Schemat do przykładu 5.15

**Rozwiązanie**

Najpierw rozpatrujemy obwód z rys. 5.24b, by ustalić efekt oddziaływania źródła napięcia:

$$U' = -\frac{5}{5 + (2 + j4)} 9e^{j45^\circ} = -\frac{45e^{j45^\circ}}{7 + j4} = -5,38 - j1,47 \text{ [V]}$$

Następnie przyjmujemy, że włączone jest tylko źródło prądu i wyznaczamy:

$$U'' = -\frac{5 \cdot (2 + j4)}{5 + (2 + j4)} 6e^{-j45^\circ} = -\frac{10 + j20}{7 + j4} 6e^{-j45^\circ} = -16,32 + j3,26 \text{ [V]}$$

na podstawie rys. 5.24c. Szukane napięcie uzyskujemy, sumując powyższe wyniki:

$$U = U' + U'' = -5,38 - j1,47 - 16,32 + j3,26 = -21,7 + j1,79 \text{ [V]}$$

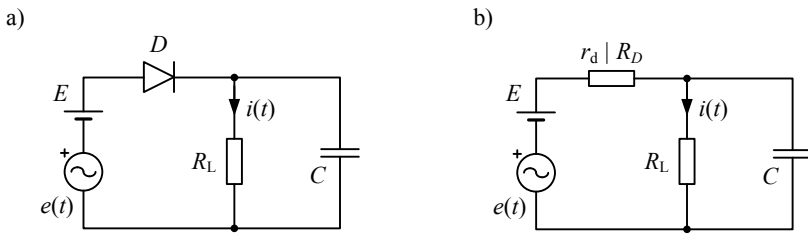
□

Zasadę superpozycji można też wykorzystać do analizowania sieci, w których koegzystują źródła napięcia i prądu stałego oraz zmiennego. W szczególności jest ona przydatna w rozpatrywaniu układów zawierających diody, tranzystory itp. Choć wymienione przyrządy elektroniczne są nieliniowe, w pewnych sytuacjach można zastępować je liniowymi modelami, w których współdziałają źródła napięcia stałego i sinusoidalnego.

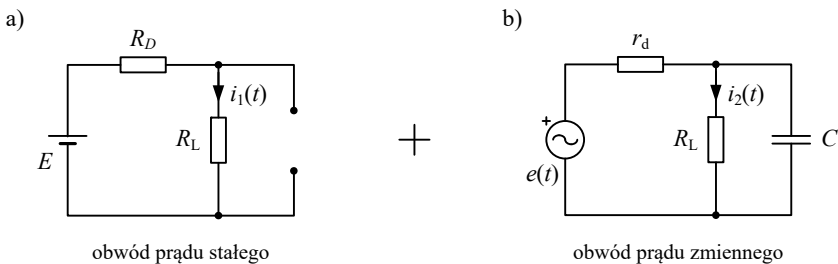
**Przykład 5.16**

Dioda została włączona do układu pokazanego na rys. 5.25a. Jest ona elementem nieliniowym, ale gdy przewodzi, można reprezentować ją za pomocą liniowego układu zastępczego z rys. 5.25b. Można mianowicie przyjąć, że w obwodzie prądu stałego przewodząca dioda zachowuje się jak rezystor  $R_D$ , a w obwodzie prądu zmiennego — jak opornik  $r_d \ll R_D$ .

Taki model, wraz z zasadą superpozycji, pozwala sprawnie obliczyć prąd obciążenia,  $i(t)$ . Zamiast oryginalnej sieci należy rozpatrzyć dwa prostsze obwody, które pokazano na rys. 5.26.



Rysunek 5.25: Liniowy model przewodzącej diody:  $R_D$  dla prądu stałego i  $r_d$  dla prądu zmiennego



Rysunek 5.26: Pomocnicze schematy obwodów prądu stałego i zmiennego do przykładu 5.16

W obwodzie prądu stałego łatwo wyznaczyć

$$i_1(t) = \frac{E}{R_D + R_L}$$

Obliczenia, które dotyczą obwodu prądu zmiennego, są bardziej skomplikowane:

$$I_2 = \frac{U_{\text{rms}}}{R_L}$$

gdzie:

$$U_{\text{rms}} = E_{\text{rms}} - r_d I_d$$

zaś

$$I_d = \frac{E_{\text{rms}}}{r_d + \frac{R_L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_L - j\frac{1}{\omega C}}}$$

przy założeniu, że  $E_{\text{rms}}$  jest wartością skuteczną napięcia  $e(t)$ .

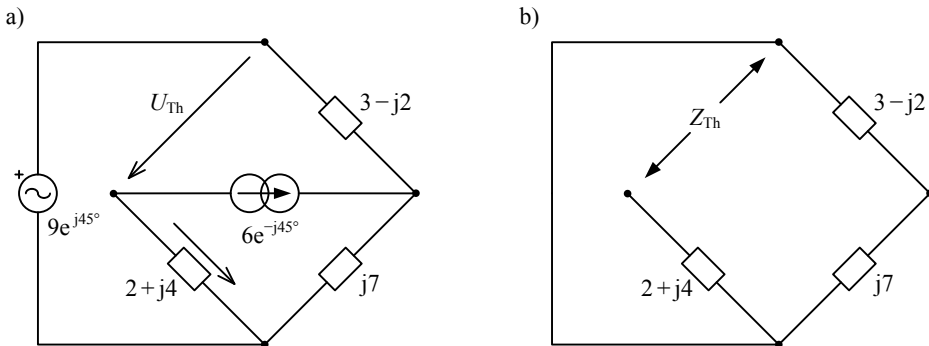
□

## 5.12 Twierdzenie Thevenina

Twierdzenie Thevenina jest równie praktyczne w analizie obwodów prądu zmiennego, co w analizie obwodów prądu stałego. Zamiast rezystancji Thevenina rozpatrywana jest impedancja zastępcza.

### Przykład 5.17

Powtórnie obliczyć napięcie na rezystorze  $5 \Omega$  w obwodzie z rys. 5.24a, stosując twierdzenie Thevenina. Sposób rozwiązania i wynik porównać z przykładem 5.15.



Rysunek 5.27: Schematy do przykładu 5.17

**Rozwiązanie**

Korzystając z rys. 5.27, obliczamy napięcie Thevenina:

$$U_{Th} = -9e^{j45^\circ} - (2 + j4) \cdot 6e^{-j45^\circ} = -31,82 - j14,85 \text{ [V]}$$

i impedancję zastępczą:

$$Z_{Th} = 2 + j4 \Omega$$

Na tej podstawie możemy określić szukane napięcie:

$$U = \frac{5}{5 + Z_{Th}} U_{Th} = \frac{5 \cdot (-31,82 - j14,85)}{7 + j4} = -21,7 + j1,79 \text{ [V]}$$

□

**5.13 Twierdzenie Nortona**

Tak jak dualne do niego twierdzenie Thevenina, twierdzenie Nortona obowiązuje zarówno w obwodach prądu zmiennego, jak i stałego. Zastępcza impedancja Nortona jest równa  $Z_{Th}$ , zaś prąd Nortona jest prądem zwarcia w miejscu badanego elementu. Wyjaśnia to poniższy przykład.

**Przykład 5.18**

Jeszcze raz obliczyć napięcie na rezystorze  $5 \Omega$  w obwodzie z rys. 5.24a, stosując twierdzenie Nortona. Odnieść wynik i sposób rozwiązania do dwóch poprzednich przykładów, które dotyczyły tego samego obwodu.

**Rozwiązanie**

Impedancję Thevenina,

$$Z_{Th} = 2 + j4 \Omega$$

bierzemy z przykładu poprzedniego, gdzie wyznaczono ją na podstawie rys. 5.27b.

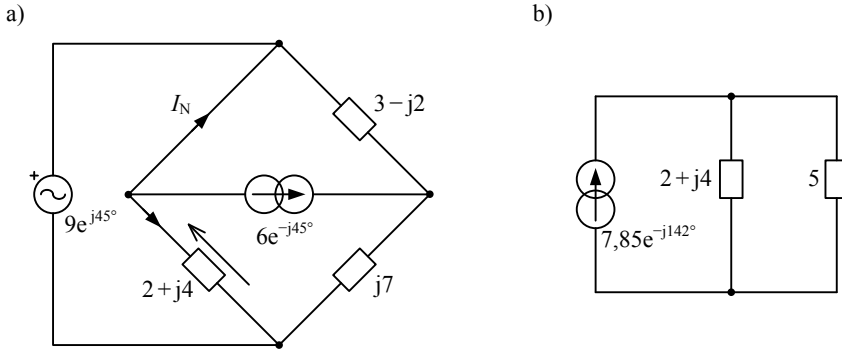
Rozpatrując rys. 5.28a, obliczamy natężenie prądu Nortona:

$$\begin{aligned} I_N &= - \left( 6e^{-j45^\circ} + \frac{9e^{j45^\circ}}{2 + j4} \right) = - (4,24 - j4,24 + 1,91 - j0,64) \\ &= -6,15 + j4,88 = 7,85e^{j142^\circ} \text{ [A]} \end{aligned}$$

Zastępczy obwód Nortona pokazano na rys. 5.28b. Natężenie prądu, który płynie przez rezystor  $5 \Omega$ , można łatwo wyznaczyć ze wzoru na dzielnik prądu i wykorzystać do obliczenia szukanego napięcia na podstawie prawa Ohma:

$$U = 5 \cdot \frac{(2 + j4)}{5 + (2 + j4)} I_N = \frac{10 + j20}{7 + j4} 7,85e^{j142^\circ} = -21,7 + j1,79 \text{ [V]}$$

□

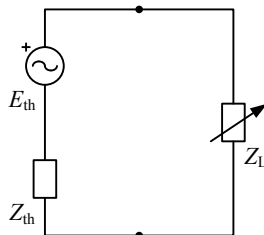


Rysunek 5.28: Schematy do przykładu 5.18

### 5.14 Twierdzenie o mocy maksymalnej

W obwodzie prądu stałego maksymalna moc jest dostarczana do obciążenia, którego rezystancja  $R_L$  jest równa rezystancji Thevenina  $R_{Th}$ . W obwodzie prądu zmiennego sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż trzeba rozpatrywać impedancje zamiast rezystancji.

Rysunek 5.29 przedstawia obciążenie  $Z_L$  dołączone do układu zastępczego złożonego z napięcia i impedancji Thevenina,  $E_{Th}$  i  $Z_{Th}$ . Takim prostym, ogólnym schematem można opisać każdy, dowolnie skomplikowany obwód prądu zmiennego. Nadaje się on nawet do analizowania rzeczywistych urządzeń, takich jak wzmacniacz akustyczny z głośnikiem czy nadajnik radiowy z anteną, w których ważne jest dopasowanie obciążenia do źródła sygnału.



Rysunek 5.29: Dopasowanie obciążenia impedancyjnego do źródła napięcia zmiennego

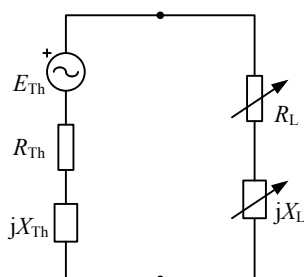
Zakładając, że  $Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}$ , a  $Z_L = R_L + jX_L$ , można rozważać następujące warianty obciążenia  $Z_L$ , do którego ma zostać dostarczona maksymalna moc:

- (i)  $Z_L = R_L + jX_L$  z regulowaną rezystancją  $R_L$  i regulowaną reaktancją  $X_L$  (rys. 5.30).

Do takiego obciążenia maksymalna moc jest dostarczana wtedy, kiedy

$$Z_L = \overline{Z_{Th}}$$

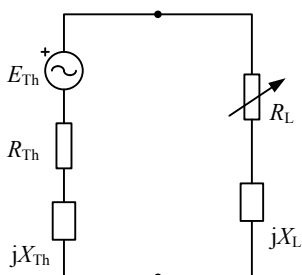
czyli  $R_L = R_{Th}$  i  $X_L = -X_{Th}$ .



Rysunek 5.30: Obciążenie z regulowanym oporem  $R_L$  i regulowaną reaktancją  $X_L$

- (ii)  $Z_L = R_L + jX_L$  z regulowaną rezystancją  $R_L$  a ustaloną reaktancją  $X_L$  (rys. 5.31).

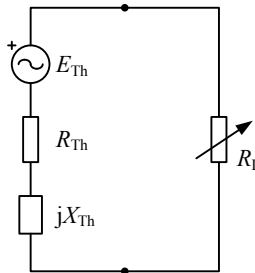
W takim obwodzie maksymalna moc jest dostarczana do  $R_L$  wtedy, kiedy  $R_L = |Z_{Th} + jX_L|$ , czyli  $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_{Th} + X_L)^2}$ .



Rysunek 5.31: Obciążenie z regulowanym oporem  $R_L$  a ustaloną reaktancją  $X_L$

(iii)  $Z_L = R_L$ , inaczej  $X_L = 0$ , czyli obciążenie jest czysto rezystancyjne (rys. 5.32).

Do takiego obciążenia największa moc jest dostarczana wtedy, kiedy  $R_L = |Z_{Th}|$ , czyli  $R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + X_{Th}^2}$ .



Rysunek 5.32: Obciążenie czysto rezystancyjne, o zerowej reaktancji ( $X_L = 0$ )

(iv)  $Z_L = R_L + jX_L$  o ustalonym porzeczce  $R_L$  i regulowanej reaktancji  $X_L$ .

Aby dostarczyć największą moc do  $R_L$ , trzeba wyeliminować wpływ reaktancji na prąd płynący w obwodzie, czyli należy ustawić  $X_L = -X_{Th}$ , podobnie jak w przypadku (i).

### Przykład 5.19

Obliczyć maksymalną moc, którą można dostarczyć do impedancji obciążenia w obwodzie z rys. 5.33a.

### Rozwiązanie

Najpierw określamy parametry obwodu zastępczego. Impedancję Thevenina obliczamy, korzystając z rys. 5.33b:

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{(20 + j10) \cdot 30}{(20 + j10) + 30} + \frac{(10 + j20) \cdot (-j10)}{(10 + j20) + (-j10)} \\ &= 12,69 + j3,46 + 5 - j15 = 17,69 - j11,54 [\Omega] \end{aligned}$$

a napięcie Thevenina wyznaczamy na podstawie rys. 5.33c:

$$\begin{aligned} U_{Th} = U_{ab} &= -U_1 + U_2 = -\frac{(20 + j10)}{(20 + j10) + 30} 20e^{j0^\circ} + \frac{(10 + j20)}{(10 + j20) + (-j10)} 20e^{j0^\circ} \\ &= (-0,42 - j0,12 + 1,5 + j0,5) \cdot 20 = 21,54 + j7,69 = 22,87e^{j20^\circ} [V] \end{aligned}$$

Wobec tego maksymalna moc

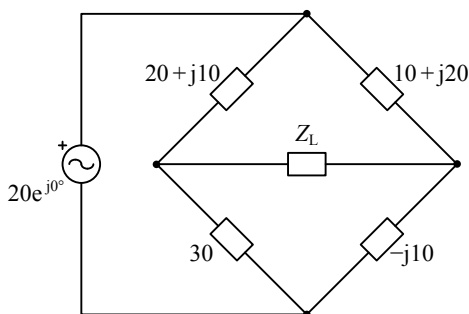
$$P_{\max} = \frac{|U_{\text{Th}}|^2}{4R_{\text{Th}}} = \frac{22,87^2}{4 \cdot 17,69} = 7,39 \text{ [W]}$$

jest dostarczana do obciążenia, gdy

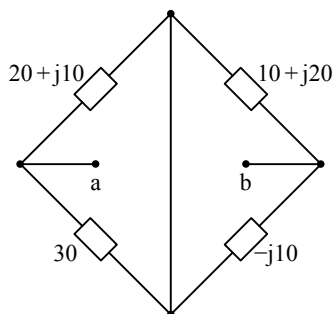
$$Z_L = \overline{Z_{\text{Th}}} = 17,69 + j11,54 \Omega$$

□

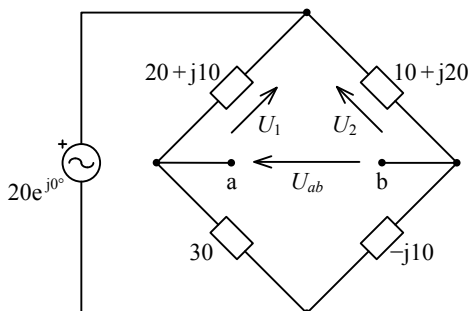
a)



b)



c)



Rysunek 5.33: Schematy do przykładu 5.19

### Przykład 5.20

Jaka powinna być impedancja  $Z_L$  w obwodzie z rys. 5.34a, aby maksymalna moc była dostarczana do obciążenia?

### Rozwiązanie

Z rysunku 5.34b wynika, że:

$$Z_{\text{Th}} = \frac{10 \cdot (4 - j4)}{10 + (4 - j4)} - j5 + j20 + 10 = 3,40 - j1,89 + j15 + 10 = 13,40 + j13,11 \text{ [\Omega]}$$



Zatem maksymalna moc jest dostarczana do

$$Z_L = \overline{Z_{Th}} = 13,40 - j13,11 \Omega$$

Do obliczenia maksymalnej mocy potrzebne jest napięcie Thevenina, które można wyznaczyć na podstawie rys. 5.34c:

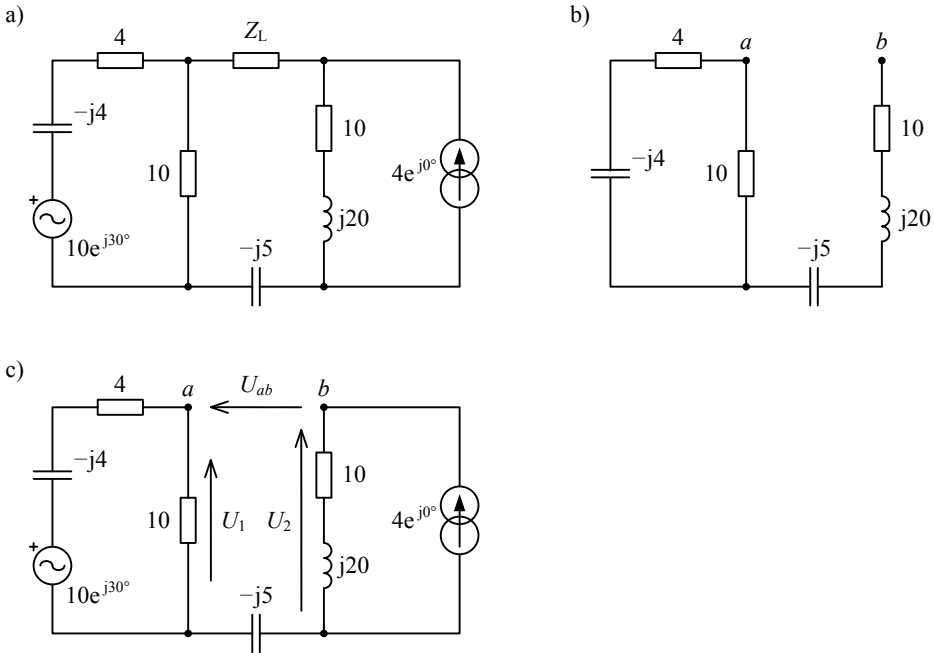
$$U_{Th} = U_{ab} = U_1 + 0 - U_2 = \frac{10}{-j4 + 4 + 10} 10e^{j30^\circ} + (10 + j20) 4e^{j0^\circ} =$$

$$= 4,78 + j4,94 + 40 + j80 = 44,78 + j84,94 = 96,02e^{j62^\circ} \text{ [V]}$$

Znając napięcie, zapisujemy finalny wzór:

$$P_{max} = \frac{|U_{Th}|^2}{4R_{Th}} = \frac{96,02^2}{4 \cdot 13,4} = 172 \text{ [W]}$$

□



Rysunek 5.34: Schematy do przykładu 5.20

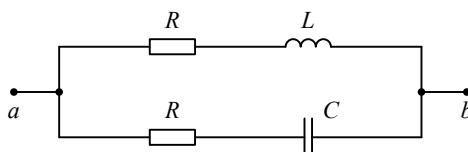
## 5.15 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 5.15.1 Pytania

#### Pytanie Q5.1

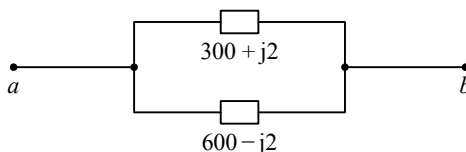
Udowodnić, że po dołączeniu zacisków  $a$  i  $b$  do obwodu prądu zmiennego o dowolnej częstotliwości takiej, że  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , sieć z rys. 5.35 działałaby tak, jak gdyby składała się z pojedynczego opornika.



Rysunek 5.35: Schemat do pytania Q5.1

#### Pytanie Q5.2

Dla równoległego połączenia z rys. 5.36 podać przybliżoną wartość impedancji zastępczej  $Z_{ab}$  i uzasadnić rezultat.



Rysunek 5.36: Schemat do pytania Q5.2

#### Odpowiedź

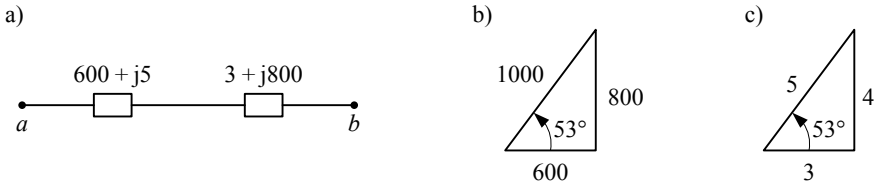
Za wynik uznajemy

$$Z_{ab} = \frac{300 \cdot 600}{300 + 600} = 200 [\Omega]$$

czyli rezystancję zastępczą równoległego połączenia oporników  $300\Omega$  i  $600\Omega$ . Reaktancje możemy zaniedbać, gdyż są znacznie mniejsze od rezystancji.

**Pytanie Q5.3**

Dla układu z rys. 5.37a podać przybliżoną wartość impedancji zastępczej  $Z_{ab}$  i uzasadnić wynik.



Rysunek 5.37: Schemat i wykresy do pytania Q5.3

**Odpowiedź**

Ponieważ składowe obydwu impedancji różnią się znacząco,  $500 \gg 5$  a  $800 \gg 3$ , uzasadnione jest przyjęcie następującego przybliżenia (zob. Q1.3):

$$Z_{ab} \approx 600 + j800 \Omega$$

Można też podać tę impedancję w postaci biegunowej:

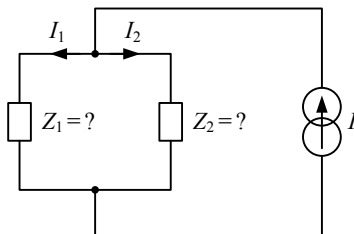
$$Z_{ab} = 1000e^{j53^\circ} \Omega$$

opierając się na podobieństwie trójkątów, które pokazano na rys. 5.37b i 5.37c.

**5.15.2 Problemy rozwiązane**

**Problem P5.1**

Obliczyć impedancje  $Z_1$  i  $Z_2$  w obwodzie z rys. 5.38, znając natężenia prądów:  $I_1 = 0,2A$  oraz  $I = 0,6e^{j30^\circ} A$ .



Rysunek 5.38: Schemat do problemu P5.1

**Rozwiązanie**

Na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa

$$I_2 = I - I_1 = 0,2 - 0,6e^{j30^\circ} = 0,2 - (0,52 + j0,3) = -0,32 - j0,3 \text{ [A]}$$

Ponieważ impedancje są połączone równolegle,

$$I_1 \cdot Z_1 = I_2 \cdot Z_2$$

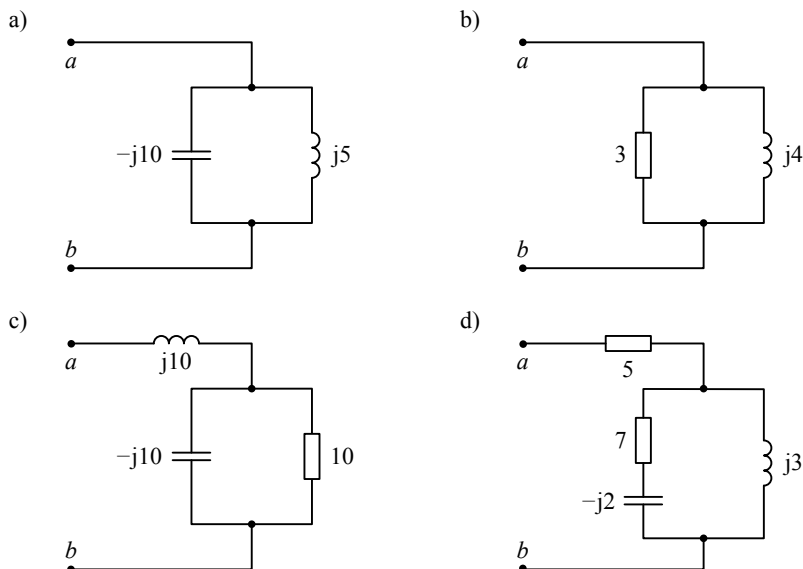
czyli

$$Z_1 = \frac{I_2}{I_1} \cdot Z_2 = \frac{-0,32 - j0,3}{0,2} \cdot Z_2 = (-1,6 - j1,5) \cdot Z_2$$

Wobec tego dopuszczalne są jakiekolwiek umiarkowane wartości impedancji, które spełniają warunek  $\frac{Z_1}{Z_2} = -1,6 - j1,5$ .

**Problem P5.2**

Wyznaczyć impedancje zastępcze układów z rys. 5.39.



Rysunek 5.39: Schematy do problemu P5.2

**Rozwiązanie**

a)

$$Z_{ab} = \frac{(-j10) \cdot (j5)}{-j10 + j5} = \frac{50}{-j5} = j10 [\Omega]$$

b)

$$Z_{ab} = \frac{3 \cdot (j4)}{3 + j4} = \frac{12e^{j90^\circ}}{5e^{j53^\circ}} = 2,4e^{j37^\circ} = 1,92 + j1,44 [\Omega]$$

c)

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= j10 + \frac{10 \cdot (-j10)}{10 - j10} = j10 + \frac{100e^{-j90^\circ}}{14,14e^{-j45^\circ}} \\ &= j10 + 7,07e^{-j45^\circ} = j10 + 5 - j5 = 5 + j5 [\Omega] \end{aligned}$$

d)

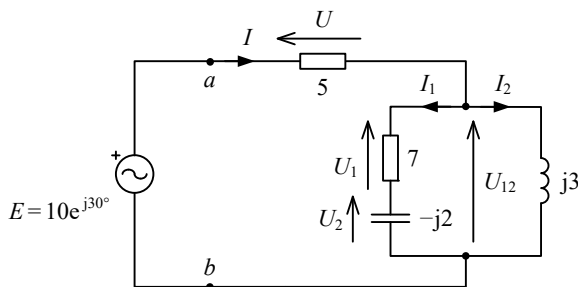
$$\begin{aligned} Z_{ab} &= 5 + \frac{j3 \cdot (7 - j2)}{j3 + (7 - j2)} = 5 + \frac{6 + j21}{7 + j} = 5 + \frac{21,84e^{j74^\circ}}{7,07e^{j8^\circ}} \\ &= 5 + 3,09e^{j66^\circ} = 6,26 + j2,82 [\Omega] \end{aligned}$$

**Problem P5.3**

Obliczyć napięcia i natężenia prądów, które wystąpiłyby w układach z rys. 5.39 po włączeniu źródła napięcia  $E = 10e^{j30^\circ}$  V między węzły  $a$  i  $b$ .

**Rozwiązanie**

Zadanie jest stosunkowo proste i pozwala przećwiczyć stosowanie prawa Ohma oraz praw Kirchhoffa w obwodach prądu zmiennego. Dlatego zajmijmy się tylko najtrudniejszym przypadkiem, czyli układem z rys. 5.39d. W tym celu rozpatrzmy obwód z rys. 5.40.



Rysunek 5.40: Schemat do problemu P5.3

Po wyznaczeniu impedancji

$$Z_{ab} = 5 + \frac{(7-j2)(j3)}{7-j2+j3} = 5 + \frac{6+j21}{7+j} = 5 + 1,26 + j2,82 = 6,26 + j2,82 [\Omega]$$

obliczamy natężenie prądu

$$I = \frac{E}{Z_{ab}} = \frac{10e^{j30^\circ}}{6,26 + j2,82} = 1,45 + j0,15 [\text{A}]$$

w gałęzi ze źródłem, napięcia

$$U = 5 \cdot I = 5 \cdot (1,45 + j0,15) = 7,25 + j0,73 [\text{V}]$$

$$U_{12} = E - U = 10e^{j30^\circ} - (7,25 + j0,73) = 1,41 + j4,27 [\text{V}]$$

oraz natężenia prądów

$$I_2 = \frac{U_{12}}{j3} = \frac{1,41 + j4,27}{j3} = 1,42 - j0,47 [\text{A}]$$

$$I_1 = I - I_2 = (1,45 + j0,15) - (1,42 - j0,47) = 0,03 + j0,62 [\text{A}]$$

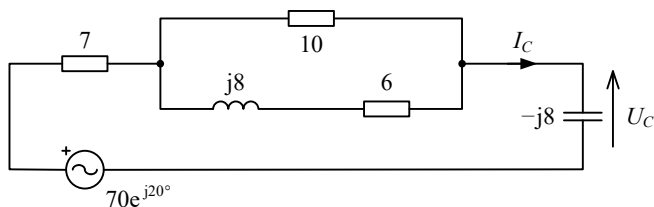
W końcu wyznaczamy

$$U_1 = I_1 \cdot 7 = (0,03 + j0,62) \cdot 7 = 0,21 + j4,34 [\text{V}]$$

$$U_2 = I_1 \cdot (-j2) = (0,03 + j0,62) \cdot (-j2) = 1,24 - j0,06 [\text{V}]$$

### Problem P5.4

Obliczyć prąd i napięcie, które zaznaczono w obwodzie z rys. 5.41.



Rysunek 5.41: Schemat do problemu P5.4

**Rozwiązanie**

Najpierw obliczamy impedancję zastępczą:

$$\begin{aligned} Z &= 7 - j8 + \frac{10 \cdot (6 + j8)}{10 + 6 + j8} = 7 - j8 + \frac{60 + j80}{16 + j8} \\ &= 7 - j8 + \frac{15 + j20}{4 + j2} \cdot \frac{4 - j2}{4 - j2} = 7 - j8 + \frac{60 - j30 + j80 + 40}{16 + 4} \\ &= 7 - j8 + \frac{100 + j50}{20} = 7 - j8 + 5 + j2,5 = 12 - j5,5 = 13,2e^{-j24,6^\circ} [\Omega] \end{aligned}$$

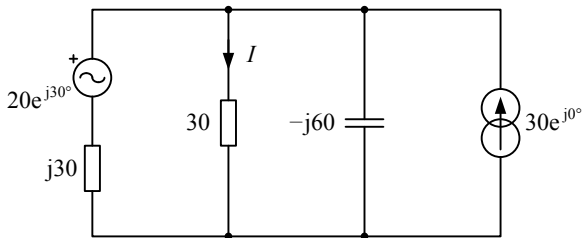
a następnie wyznaczamy prąd oraz napięcie, korzystając z prawa Ohma:

$$I_C = \frac{70e^{j20^\circ}}{13,2e^{-j24,6^\circ}} = 5,3e^{j44,6^\circ} [\text{A}]$$

$$U_C = -j8 \cdot 5,3e^{j44,6^\circ} = 42,4e^{-j45,4^\circ} [\text{V}]$$

**Problem P5.5**

Wykorzystując zasadę superpozycji i twierdzenie Thevenina, obliczyć natężenie prądu, który płynie przez rezystor  $30\Omega$  w obwodzie z rys. 5.42.



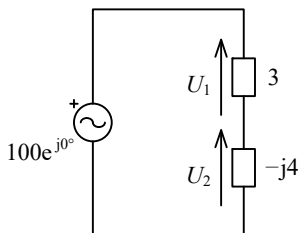
Rysunek 5.42: Schemat do problemu P5.5

**Wskazówka**

Należy wzorować się na przykładach 5.15 i 5.17.  $I = 27,14e^{j25^\circ}$  A.

**Problem P5.6**

Wykorzystując wzór na dzielnik napięcia, określić spadki napięć na elementach pasywnych w obwodzie z rys. 5.43.



Rysunek 5.43: Schemat do problemu P5.6

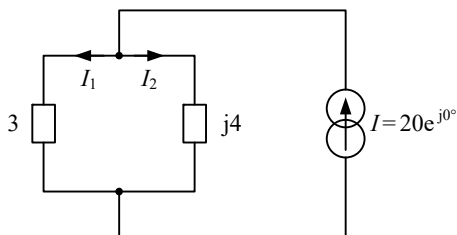
**Rozwiązanie**

$$U_1 = \frac{3}{3 - j4} \cdot 100e^{j0^\circ} = (0,36 + j0,48) \cdot 100 = 36 + j48 \text{ [V]}$$

$$U_2 = E - U_1 = 100 - (36 + j48) = 64 - j48 \text{ [V]}$$

**Problem P5.7**

Wykorzystując wzór na dzielnik prądu, obliczyć  $I_1$  i  $I_2$  w obwodzie z rys. 5.44.



Rysunek 5.44: Schemat do problemu P5.7

**Rozwiązanie**

Regułę dzielnika wykorzystujemy do obliczenia natężenia jednego prądu:

$$I_2 = \frac{3}{3 + j4} \cdot 20e^{j0^\circ} = (0,36 - j0,48) \cdot 20 = 7,2 - j9,6 \text{ [A]}$$

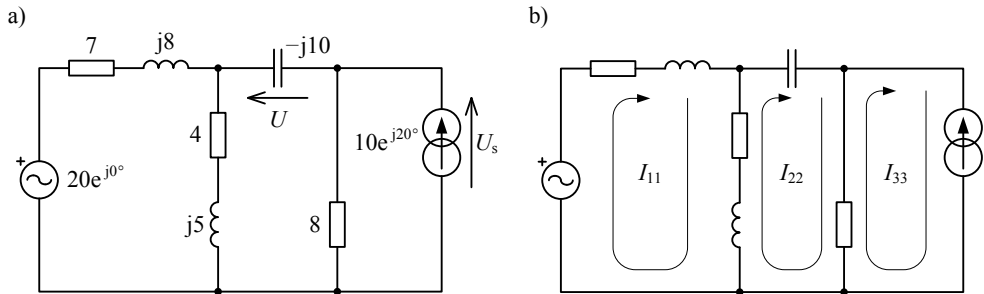
zaś natężenie drugiego wyznaczamy na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa:

$$I_1 = I - I_2 = 20 - (7,2 - j9,6) = 12,8 + j9,6 \text{ [A]}$$



**Problem P5.8**

Stosując metodę prądów oczkowych, określić napięcie  $U$  w obwodzie z rys. 5.45a. Porównać obliczenia i wynik z przykładem 5.14, który dotyczył tego samego układu.



Rysunek 5.45: Schematy do problemu P5.8

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy, że prądy oczkowe płyną tak jak na rys. 5.45b, i założmy, że na źródle prądu jest napięcie  $U_s$ . Odpowiedni układ równań ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} (7 + j8) + (4 + j5) & -(4 + j5) & 0 \\ -(4 + j5) & (4 + j5) + (-j10) + 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ U_s \end{bmatrix}$$

Ponieważ  $I_{33} = -10e^{j20^\circ}$  A jest określone prądem źródłowym, trzecie równanie jest zbędne. Zaniedbujemy je, ale w pozostałym układzie dwóch równań uwzględniamy oddziaływanie  $I_{33}$ :

$$\begin{bmatrix} (7 + j8) + (4 + j5) & -(4 + j5) \\ -(4 + j5) & (4 + j5) + (-j10) + 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix} (-10e^{j20^\circ})$$

Rozwiązując uproszczony układ

$$\begin{bmatrix} (11 + j13) & (-4 - j5) \\ (-4 - j5) & (12 - j5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -80e^{j20^\circ} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy:

$$I_{11} = -0,43 - j2,71 = 2,74e^{-j99^\circ} \text{ [A]}$$

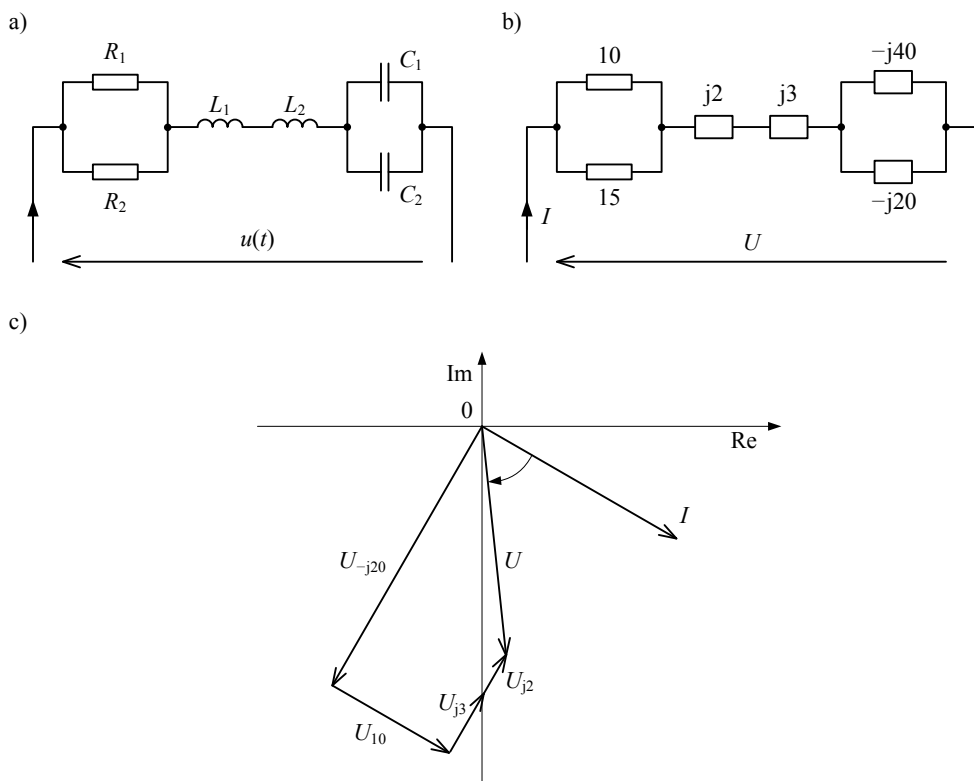
$$I_{22} = -3,3 - j4,74 = 5,78e^{-j125^\circ} \text{ [A]}$$

Szukane napięcie jest równe:

$$U = -j10 \cdot I_{22} = -j10 \cdot (-3,3 - j4,74) = -47,4 + j33 \text{ [V]}$$

### Problem P5.9

Obliczyć wszystkie reaktancje, prądy i napięcia w obwodzie z rys. 5.46a, a następnie narysować odpowiedni wykres wektorowy. Dane są:  $R_2 = 15 \Omega$ ,  $L_1 = 0,02 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,03 \text{ H}$ ,  $C_1 = 250 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 500 \mu\text{F}$  oraz  $i(t) = 60 \sin(100\pi t - \frac{\pi}{6}) \text{ A}$



Rysunek 5.46: Schematy i wykres wektorowy do problemu P5.9

**Rozwiązanie**

Po obliczeniu reaktancji możemy narysować równoważny obwód, który pokazano na rys. 5.46b. Na jego podstawie obliczamy prądy i napięcia:

$$U = I \cdot ((10 \parallel 15) + j2 + j3 + ((-j40) \parallel (-j20))) = 60e^{-j30^\circ} \cdot (6 + j5 - j13,33)$$

$$= 60e^{-j30^\circ} \cdot 10,27e^{-j54^\circ} = 616,2e^{-j84^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_{j2} = I \cdot j2 = 60e^{-j30^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ} = 120e^{j60^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_{j3} = I \cdot j3 = 60e^{-j30^\circ} \cdot 3e^{j90^\circ} = 180e^{j60^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_{10} = U_{15} = \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} \cdot 60e^{-j30^\circ} = 360e^{-j30^\circ} \text{ [V]}$$

$$I_{10} = \frac{U_{10}}{10} = 36e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

$$I_{15} = \frac{U_{15}}{15} = 24e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

$$U_{-j40} = U_{-j20} = \frac{(-j20) \cdot (-j40)}{-j20 - j40} = 13,33e^{-j90^\circ} \cdot 60e^{-j30^\circ} = 800e^{-j120^\circ} \text{ [V]}$$

$$I_{-j20} = \frac{U_{-j20}}{-j20} = \frac{800e^{-j120^\circ}}{20e^{-j90^\circ}} = 40e^{-j30^\circ} \text{ [A]}$$

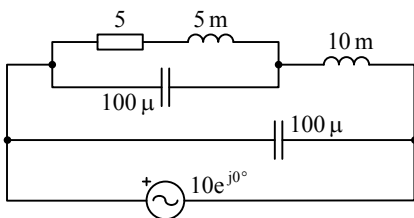
$$I_{-j40} = \frac{U_{-j40}}{-j40} = \frac{800e^{-j120^\circ}}{40e^{-j90^\circ}} = 20e^{-j30^\circ} \text{ [A]}$$

Odpowiedni wykres wektorowy został pokazany na rys. 5.46c.

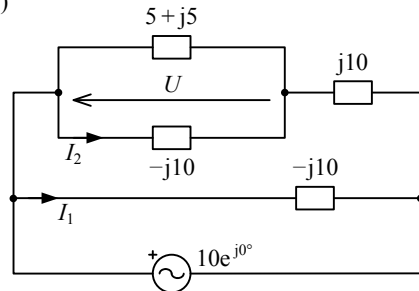
**Problem P5.10**

Obliczyć natężenia prądów, które płyną przez kondensatory w obwodzie z rys. 5.47a. Należy przyjąć, że  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$ .

a)



b)



Rysunek 5.47: Schematy do problemu P5.10

**Rozwiązanie**

Po obliczeniu reaktancji schemat obwodu można przerysować w postaci, którą pokazano na rys. 5.47b. Natężenie prądu w kondensatorze połączonym równolegle ze źródłem jest określone bezpośrednio prawem Ohma:

$$I_1 = \frac{10}{-j10} = j \text{ [A]}$$

Następnie obliczamy napięcie na drugim kondensatorze:

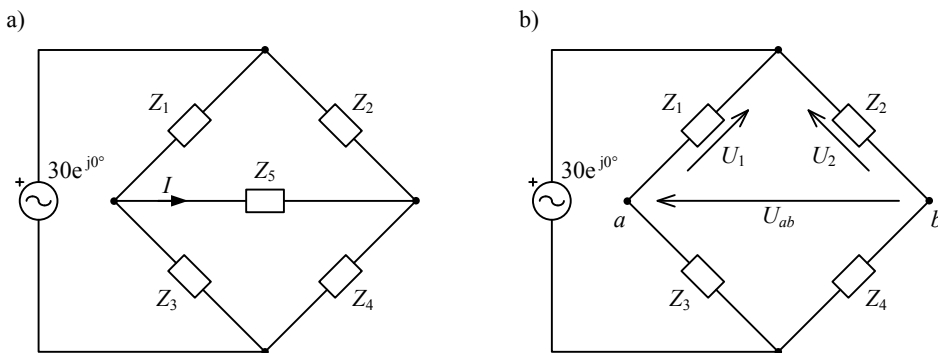
$$U = \frac{((5 + j5) \parallel (-j10))}{((5 + j5) \parallel (-j10)) + j10} \cdot 10 = \frac{10}{10 + j10} \cdot 10 = 5 - j5 \text{ [V]}$$

i płynący przez niego prąd:

$$I_2 = \frac{U}{-j10} = \frac{5 - j5}{-j10} = 0,5 + j0,5 \text{ [A]}$$

**Problem P5.11**

Obliczyć prąd  $I$  w układzie z rys. 5.48a, wiedząc, że  $Z_1 = Z_3 = 30\Omega$ , a  $Z_2 = Z_4 = Z_5 = 10\Omega$ .



Rysunek 5.48: Schematy do problemu P5.11

**Rozwiązanie**

Ponieważ mamy wyznaczyć tylko jeden prąd, celowe jest użycie metody Thevenina. Napięcie Thevenina wyznaczamy w obwodzie z rys. 5.48b. Stwierdzamy, że jest ono zerowe, gdyż określa je różnica dwóch równych napięć:

$$U_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} E = \frac{E}{2} \quad \text{i} \quad U_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_4} E = \frac{E}{2}$$

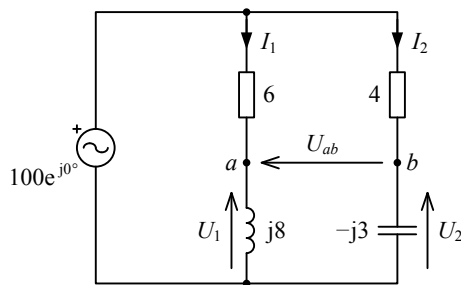
czyli:

$$U_{Th} = U_{ab} = U_2 - U_1 = 0V$$

Wobec tego prąd  $I$  też jest zerowy, niezależnie od rezystancji w zastępczym obwodzie Thevenina.

### Problem P5.12

Określić różnicę potencjałów między węzłami  $a$  i  $b$  w obwodzie z rys. 5.49.



Rysunek 5.49: Schemat do problemu P5.12

### Rozwiązanie

Jest to nieskomplikowany obwód szeregowo-równoległy z jednym źródłem napięcia zmiennego. Do rozwiązania prowadzą następujące obliczenia:

$$I_1 = \frac{100e^{j0^\circ}}{6 + j8} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10e^{j53,1^\circ}} = 10e^{-j53,1^\circ} \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{100e^{j0^\circ}}{4 - j3} = \frac{100e^{j0^\circ}}{5e^{-j36,9^\circ}} = 20e^{j36,9^\circ} \text{ [A]}$$

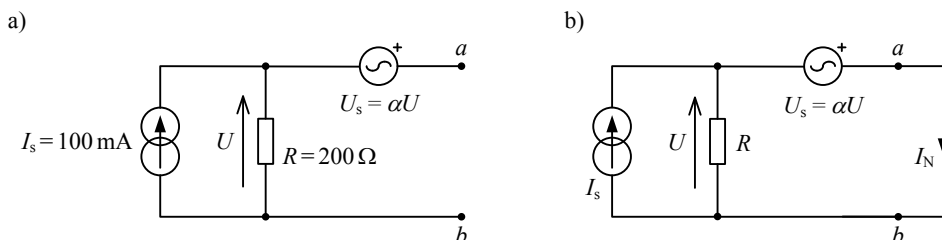
$$U_1 = j8 \cdot I_1 = 8e^{j90^\circ} \cdot 10e^{-j53,1^\circ} = 80e^{j36,9^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_2 = -j3 \cdot I_2 = 3e^{-j90^\circ} \cdot 20e^{j36,9^\circ} = 60e^{-j53,1^\circ} \text{ [V]}$$

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_1 - U_2 = 80e^{j36,9^\circ} - 60e^{-j53,1^\circ} = \\ &= 64 + j48 - 36 + j48 = 28 + j96 = 100e^{j73,7^\circ} \text{ [V]} \end{aligned}$$

**Problem P5.13**

Ustalić  $U_{Th}$  i  $Z_{Th}$  charakteryzujące układ z rys. 5.50a, wiedząc, że  $\alpha = 0,4$ .



Rysunek 5.50: Schematy do problemu P5.13

**Rozwiązanie**

Obwód zawiera źródło zależne, którego napięcie  $U_s$  jest proporcjonalne do napięcia  $U$ . Źródła takie omówiono w podrozdziale 4.3, a uwaga 4.2 stanowi wskazówkę odnośnie do analizy obwodów, które je zawierają.

Rozpatrując bilans napięć w oczku obejmującym zaciski  $a$  i  $b$ , otrzymujemy:

$$U_{Th} = U_{ab} = U_s + U = (\alpha + 1)U$$

Ponieważ cały prąd źródła płynie przez  $R$ ,

$$U = I_s R$$

Z połączenia powyższych równań wynika, że

$$U_{Th} = (\alpha + 1) I_s R = (0,4 + 1) \cdot 0,1 \cdot 200 = 28 \text{ [V]}$$

Aby określić szukaną impedancję, najpierw rozpatrujemy obwód z rys. 5.50, na podstawie którego obliczamy prąd Nortona:

$$I_N = I_s + \frac{U}{R}$$

ale

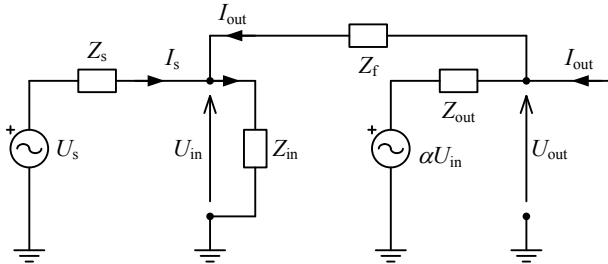
$$U = -U_s = -\alpha U \quad \Rightarrow \quad U = 0 \text{ V}$$

czyli  $I_N = I_s$ , a

$$Z_{Th} = \frac{U_{Th}}{I_N} = \frac{U_{Th}}{I_s} = (\alpha + 1) R = 280 \text{ [\Omega]}$$

**Problem P5.14**

W obwodzie z rys. 5.51 określić związek między  $U_{in}$  i  $U_s$ , wiedząc, że  $Z_{in} = 10^{10} \Omega$ ,  $Z_{out} = 1 \Omega$ , a współczynnik  $\alpha$  ma nieskończenie wielką wartość.



Rysunek 5.51: Schemat do problemu P5.14

**Rozwiązanie**

Jeżeli impedancja  $Z_{in}$  jest wielka, dąży do nieskończoności, to prąd  $I_{in} = I_s + I_{out}$  jest bardzo mały, niemal zerowy. Dlatego  $I_s + I_{out} = 0$ , czyli  $I_s = -I_{out}$ . Wobec tego napięcie  $U_{in}$  jest znikome i można przyjąć, że  $U_{in} \approx 0$ , a potencjał w punkcie  $a$  jest równy zerowemu potencjałowi punktu  $b$ , który jest uziemiony. Mówi się, że  $a$  jest punktem „masy pozornej”. Napięcie  $U_s$  można zatem utożsamić ze spadkiem napięcia na  $Z_s$ , przy czym  $U_s$  jest równe napięciu  $U_{out}$ , które z kolei jest takie samo jak spadek na  $Z_f$ . Prawo Ohma pozwala obliczyć  $I_s$  i  $I_{out}$ , a następnie zapisać tożsamość:

$$\frac{U_s}{Z_s} = -\frac{U_{out}}{Z_f}$$

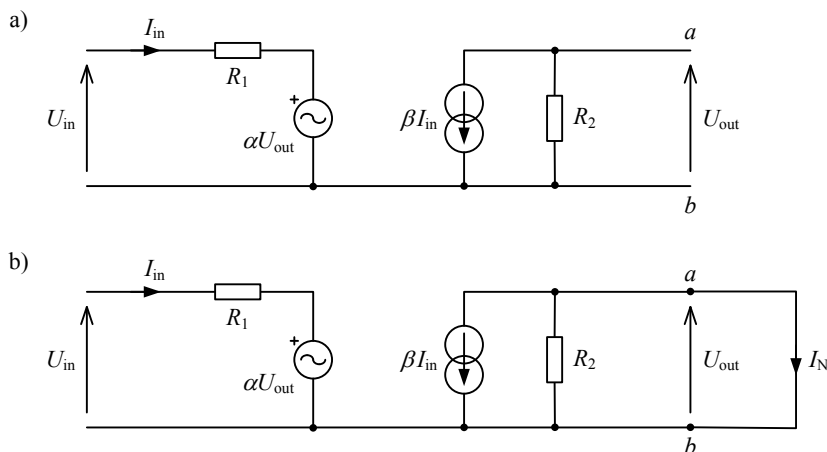
Zatem

$$\frac{U_{out}}{U_s} = -\frac{Z_f}{Z_s}$$

Rozpatrywany układ jest wykorzystywany jako obwód zastępczy przyrządu elektronicznego, który jest nazywany wzmacniaczem operacyjnym i został omówiony w rozdziale 10. Parametr  $\alpha$  jest nazywany współczynnikiem wzmocnienia, gdyż pokazuje jak modyfikowana jest amplituda sygnału wejściowego w trakcie przenoszenia go na wyjście.

**Problem P5.15**

Określić  $U_{Th}$  i  $Z_{Th}$  charakteryzujące wyjście (węzły  $a$  i  $b$ ) obwodu z rys. 5.52a. Ustalić natężenie prądu  $I_{in}$  płynącego, gdy do wyjścia dołączone jest obciążenie o nieskończenie wielkiej rezystancji. Należy wzorować się na rozwiązaniu problemu P5.13.



Rysunek 5.52: Schematy do problemu P5.15

**Rozwiązanie**

Rozpoczynamy od obliczenia napięcia Thevenina, które jest równe wyjściowemu:

$$U_{Th} = U_{out} = -\beta I_{in} R_2$$

czyli

$$I_{in} = -\frac{U_{Th}}{R_2 \beta}$$

Rozpatrując obwód wejściowy, natężenie tego samego prądu można określić innym wyrażeniem:

$$I_{in} = \frac{U_{in} - \alpha U_{Th}}{R_1}$$

Łącząc uzyskane rezultaty, uzależnimy napięcie Thevenina od wejściowego:

$$-\frac{U_{Th}}{R_2 \beta} = \frac{U_{in} - \alpha U_{Th}}{R_1}$$

$$-R_1 U_{Th} = R_2 \beta U_{in} - R_2 \beta \alpha U_{Th}$$

$$(R_2 \beta \alpha - R_1) U_{Th} = R_2 \beta U_{in}$$

$$U_{Th} = \frac{R_2 \beta U_{in}}{R_2 \beta \alpha - R_1}$$

Przy założeniu, że rezystancja obciążenia jest dużo większa od  $R_2$ , w związku z czym praktycznie nie płynie przez nią prąd, wzór ten pozwala przedstawić szukany prąd



jako funkcję napięcia wejściowego  $U_{\text{in}}$ :

$$I_{\text{in}} = -\frac{U_{\text{Th}}}{R_2\beta} = -\frac{U_{\text{in}}}{R_2\beta\alpha - R_1}$$

Następnie, rozpatrując obwód ze zwartymi zaciskami  $a$  i  $b$ , tak jak na rys. 5.52b, wyznaczamy natężenie prądu Nortona:

$$I_{\text{N}} = -\beta I_{\text{in}} = -\beta \frac{U_{\text{in}}}{R_1}$$

Znając parametry źródeł zastępczych, obliczamy szukaną impedancję:

$$Z_{\text{Th}} = \frac{U_{\text{Th}}}{I_{\text{N}}} = \frac{\beta U_{\text{in}}}{R_2\beta\alpha - R_1} \cdot \left( -\frac{R_1}{\beta U_{\text{in}}} \right) = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2\beta\alpha}$$

### Problem P5.16

Powtórnie wykonać polecenie z przykładu 5.13, stosując metodę potencjałów węzłowych.

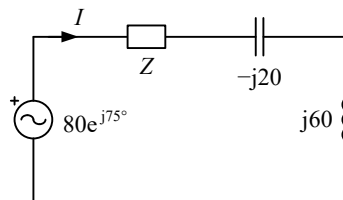
### Wskazówka

Należy wzorować się na przykładzie 5.14.

## 5.15.3 Quiz

### Quiz 5.1

W obwodzie z rys. 5.53 obliczyć impedancję  $Z$ , wiedząc, że  $I = 500e^{j30^\circ}$  A.



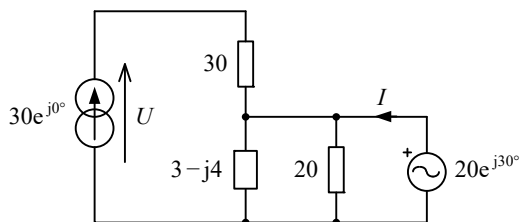
Rysunek 5.53: Schemat do quizu 5.1

### Wskazówka

Należy zapisać wzór na impedancję zastępczą, która jest pewną funkcją niewiadomej  $Z$ . Przyrównując tę funkcję do  $U/I$ , można uzyskać proste równanie, którego rozwiązaniem jest szukana impedancja.

**Quiz 5.2**

Nie używając kalkulatora, obliczyć napięcie i prąd, które zostały zaznaczone w obwodzie z rys. 5.54.



Rysunek 5.54: Schemat do quizu 5.2

**Rozwiązanie**

$$U = 30e^{j0^\circ} \cdot 30 + 20e^{j30^\circ} = (917,32 + j10) \text{ [V]}$$

$$I = \left( \frac{20e^{j30^\circ}}{3-j4} + \frac{20e^{j30^\circ}}{20} \right) - 30e^{j0^\circ} = (-28,64 + j4,47) \text{ [A]}$$

---



## Rozdział 6

# Rezonans

### Wprowadzenie

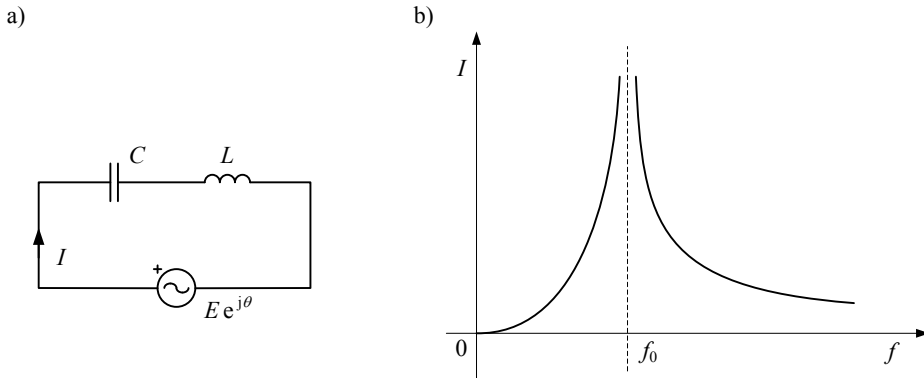
Rezonans elektryczny jest zjawiskiem bardzo ważnym w teorii obwodów, które występuje, pod pewnymi warunkami, w obwodach prądu zmiennego zawierających indukcyjność  $L$  oraz pojemność  $C$ . Przy wzroście częstotliwości reaktancje indukcyjne zwiększają się, a pojemnościowe maleją i odwrotnie, więc istnieje specyficzna dla danego połączenia  $RLC$  częstotliwość, dla której jego zastępcza reaktancja indukcyjna jest równa pojemnościowej, tak że eliminują one wzajemnie swoje oddziaływanie na resztę układu. Wypadkowa impedancja połączenia jest wtedy czysto rezystancyjna, tak jakby nie było w nim pojemności ani indukcyjności.

W kolejnych podrozdziałach rozpatrywane są najbardziej elementarne i praktyczne, szeregowe i równoległe obwody rezonansowe, układy przestrajane oraz podstawowe zastosowanie rezonansu, czyli filtry elektryczne.

## 6.1 Rezonans szeregowy: rezonans napięcie

### 6.1.1 Istota rezonansu napięcie

Przed szczegółowym omówieniem bardziej skomplikowanych obwodów wyjaśnijmy istotę zjawiska rezonansu na prostym przykładzie. Weźmy pod uwagę pokazany na rys. 6.1a obwód, w którym do połączenia szeregowego  $L$  i  $C$  doprowadzono ze źródła sinusoidalne napięcie o zmieniającej się częstotliwości  $f$ .



Rysunek 6.1: Rezonans w połączeniu szeregowym LC

W obwodzie tym płynie prąd<sup>1</sup>

$$I = \frac{E e^{i\theta}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{E}{|X_L - X_C|} e^{j(\theta - \varphi)} \quad (6.1)$$

którego natężenie pośrednio zależy od częstotliwości źródła. Zmieniając ją, można bowiem regulować reaktancje cewki oraz kondensatora.

W szczególności można sprawić, że  $X_L = X_C$ . Taka sytuacja występuje wtedy, kiedy częstotliwość źródła jest równa częstotliwości rezonansowej

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.2)$$

która wynika z prostego wyprowadzenia:

$$X_L = X_C \quad \leftrightarrow \quad \underbrace{\omega_0 L}_{X_L} = \frac{1}{\underbrace{\omega_0 C}_{X_C}}$$

czyli:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \leftrightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Jeżeli indukcyjność  $L$  jest określona w henrach [H], a pojemność  $C$  — w faradach [F], to jednostką częstotliwości  $f_0$  jest herc [Hz].

<sup>1</sup> Przypomnijmy, że jeżeli nie powiedziano inaczej, to  $E$  oznacza wartość skuteczną ( $E_{\text{rms}}$ ). To samo dotyczy  $I$  oraz  $I_{\text{rms}}$ .

Podczas rezonansu cewka i kondensator działają zgodnie ze swoimi właściwościami, ale  $Z = 0\Omega$ , czyli ich wypadkowy wpływ na źródło jest taki, jakby zniknęły i zostały zastąpione zwarcie.

Podczas rezonansu napięcia na kondensatorze i cewce są równe co do wartości bezwzględnej, ale różnią się znakiem. Znoszą się więc, tak że ich suma jest zerowa. Z tego powodu rezonans szeregowy jest nazywany rezonansem napięć.

Rezonans można spożytkować, ale czasem bywa niepożądany. W rozpatrywanym obwodzie wystąpienie rezonansu skutkowałoby nieskończeniem wielkim natężeniem prądu,  $I \rightarrow \infty$ , gdyż napięcie źródłowe byłoby doprowadzone do zerowej impedancji.

Ogólną zależność natężenia prądu od częstotliwości zilustrowano na rys. 6.1b. W rzeczywistym układzie już dla częstotliwości zbliżonej do rezonansowej nastąpiłoby przeciążenie źródła bądź termiczne uszkodzenie połączenia lub elementu.

Rezonans wiąże się też z ryzykiem przebicia izolacji w kondensatorze lub cewce wskutek występowania na nich dużych napięć. W rozpatrywanym obwodzie na obydwu elementach byłby nieskończenie wielki spadek napięcia, wynikający z przepływu prądu o nieskończonym natężeniu. W rzeczywistych układach niedopuszczalne napięcie może występować przy umiarkowanym natężeniu prądu płynącego przez element o dużej reaktancji.

### 6.1.2 Rezonans w szeregowym połączeniu $RLC$

Połączenie  $LC$  jest nieprecyzyjnym modelem praktycznych obwodów rezonansowych, gdyż rzeczywista cewka charakteryzuje się pewną rezystancją. Ta rezystancja powoduje, że impedancja jest niezerowa podczas rezonansu.

Aby to wyjaśnić, rozpatrzmy rezonans w szeregowym połączeniu  $RLC$ , które pokazano na rys. 6.2a. Wypadkowa impedancja

$$Z = R + j(X_L - X_C) \quad (6.3)$$

zaś przesunięcie fazowe między wypadkowym prądem a napięciem zasilającym

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$$

Jeżeli  $X_L = X_C$ , to

$$Z = Z_{\min} = R$$

czyli  $Z$  osiąga minimum podczas rezonansu, zaś

$$I = I_{\max} = \frac{E}{R} \quad (6.4)$$

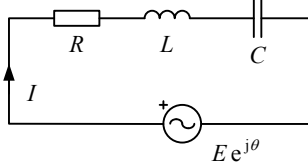
ma maksymalne możliwe natężenie i jest w fazie z napięciem zasilającym, gdyż

$$\varphi = 0$$

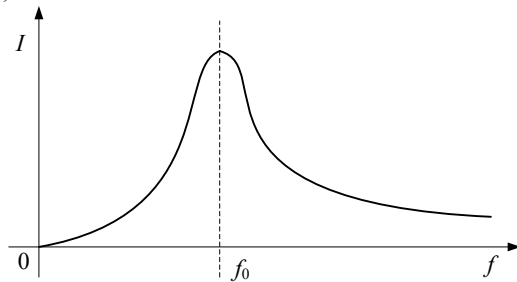
Ogólnie natężenie prądu zależy od częstotliwości napięcia zasilającego układ w sposób zilustrowany na rys. 6.2b.

Jeżeli  $R$  reprezentuje opór cewki, to jest ono raczej małe, czyli niekoniecznie ogranicza natężenie prądu na tyle, by zapobiec uszkodzeniom obwodu wskutek wystąpienia rezonansu.

a)



b)



Rysunek 6.2: Rezonans w połączeniu szeregowym  $RLC$

### 6.1.3 Wykresy wektorowe

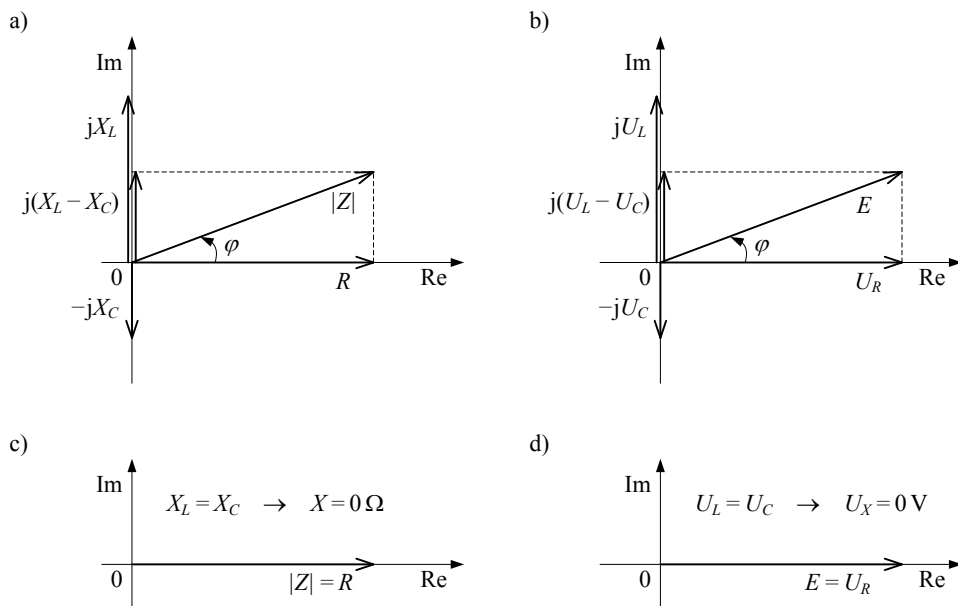
Ponieważ wielkości elektryczne w obwodzie rezonansowym przedstawiamy za pomocą liczb zespolonych, celowe jest sporządzenie odpowiednich wykresów wektorowych, które przedstawiono na rys. 6.3. Podczas rezonansu wektory impedancji i wypadkowego napięcia są skierowane w szczególny sposób, wzdłuż osi poziomej.

### 6.1.4 Wykresy częstotliwościowe

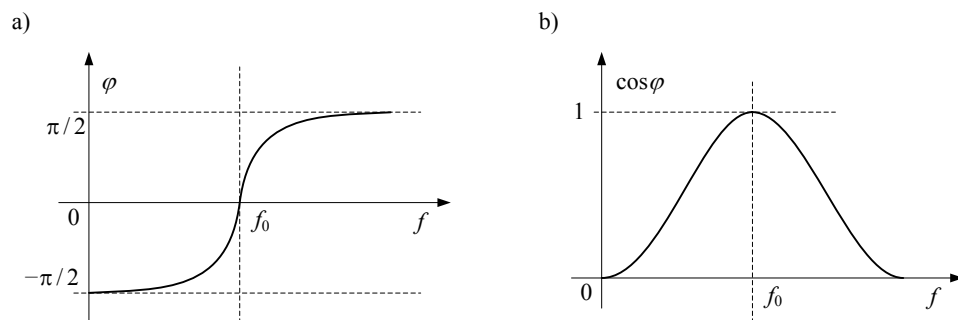
Gdy działanie układu zależy od częstotliwości, zwykle interesujący jest nie tylko sam rezonans, ale też ogólna zmienność wielkości elektrycznych w funkcji częstotliwości. W celu graficznego przedstawienia sposobu, w jaki zmienia się stan obwodu, powszechnie stosowane są tzw. krzywe rezonansowe, czyli wykresy, które obrazują przebiegi  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $|Z|$ ,  $I$  i  $\varphi$  w częstotliwości.

Przykładowe krzywe rezonansowe widnieją na rys. 6.4 i 6.5. Zostały one sporządzone na podstawie wartości zawartych w tabeli 6.1, które obliczono dla wybranych częstotliwości  $0 < f < \infty$  przy założeniu, że  $R = 100\Omega$ ,  $L = 1\text{mH}$ ,  $C = 1\mu\text{F}$  i  $E = 10\text{V}$ . Wartości tych jest niewiele, ale mając charakterystyczne punkty, ciągłe wykresy można narysować, stosując interpolację.

Wykresy  $\varphi$  i  $\cos \varphi$  zostały pokazane na rys. 6.4. Przesunięcie fazowe  $\varphi$  jest monotoniczną funkcją częstotliwości, która przyjmuje wartości z ograniczonego zakresu od  $-\pi/2$  do  $\pi/2$ . Gdy zachodzi rezonans, prąd i napięcie są w fazie (zerowe przesunięcie fazowe), a współczynnik mocy ( $\cos \varphi$ ) jest równy jedności.

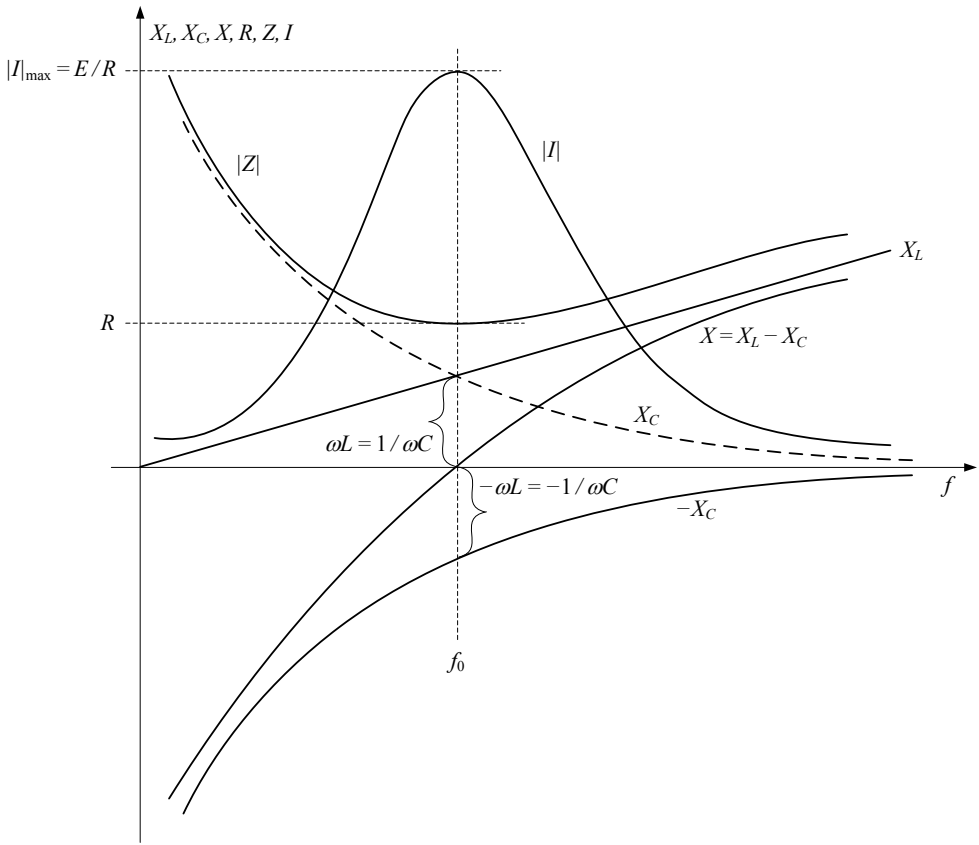


Rysunek 6.3: Wykresy wektorowe impedancji i napięć: (a) i (b) ogólne oraz (c) i (d) podczas rezonansu — przy założeniu, że kąt fazowy prądu jest zerowy



Rysunek 6.4: Wykresy ilustrujące zależność przesunięcia fazowego i współczynnika mocy,  $\varphi$  i  $\cos \varphi$ , od częstotliwości





Rysunek 6.5: Wykresy charakteryzujące rezonans szeregowy

Tablica 6.1: Wielkości elektryczne w obwodzie RLC jako funkcje częstotliwości

$f$ [Hz]	$X_L = \omega L$ [ $\Omega$ ]	$X_C = \frac{1}{\omega C}$ [ $\Omega$ ]	$X$ [ $\Omega$ ]	$ Z $ [ $\Omega$ ]	$\varphi$ [rad]	$I$ [A]	$U_L$ [V]	$U_C$ [V]	$U$ [V]
1	0,01	$159 \cdot 10^3$	$-159 \cdot 10^3$	$159 \cdot 10^3$	-1,57	0	0	10	10
10	0,06	$16 \cdot 10^3$	$-16 \cdot 10^3$	$16 \cdot 10^3$	-1,56	0	0	10	10
$10^2$	0,63	1591,55	-1590,92	1594,06	-1,51	0,01	0	9,98	9,99
$10^3$	6,28	159,15	-152,87	182,67	-0,99	0,05	0,34	8,71	9,06
$5 \cdot 10^3$	31,42	31,83	-0,42	100,00	0,00	0,10	3,14	3,18	6,32
$10^4$	62,83	15,92	46,92	110,46	0,44	0,09	5,69	1,44	7,13
$10^5$	628,32	1,59	626,73	634,65	1,41	0,02	9,9	0,03	9,93
$10^6$	6283,2	0,16	6283,03	6283,82	1,55	0	10	0	10

### 6.1.5 Podsumowanie

Rysunki 6.4 i 6.5 unaczyniają, że podczas rezonansu, czyli dla częstotliwości  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  (określonej wyłącznie pojemnościami i indukcyjnościami występującymi w danym obwodzie):

1. Natężenie prądu, który płynie w obwodzie, przyjmuje wartość maksymalną, czyli  $\frac{E}{R}$ .
2. Spadki napięcia na  $L$  i  $C$  (rys. 6.3) mają takie same, duże amplitudy:

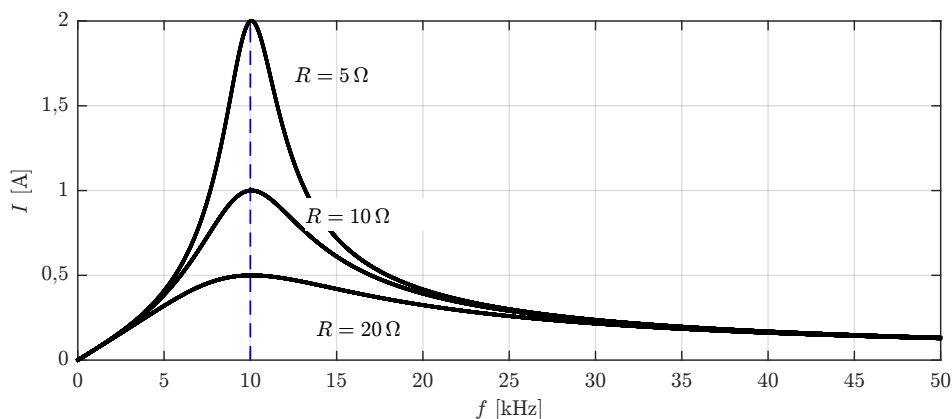
$$|U_L| = X_L I_{\max} = |U_C| = X_C I_{\max} \quad (6.5)$$

3. Napięcia na indukcyjności i pojemności są zwrócone przeciwnie,  $jU_L = -jU_C$ , więc znoszą się wzajemnie, tak że całe napięcie źródłowe odkłada się na  $R$ :

$$U_R = E$$

4. Prąd jest w fazie z napięciem zasilającym,  $\varphi = 0$ , więc współczynnik mocy jest równy jedności.

Im bardziej częstotliwość odbiega od  $f_0$ , tym większe od  $R$  jest  $|Z|$ , a obwód zachowuje się tak, jakby były w nim tylko elementy  $R$  i  $C$  lub  $R$  i  $L$ . W szczególności dla częstotliwości niższych od rezonansowej,  $f < f_0$ ,  $Z$  ma charakter pojemnościowy, ponieważ  $X_C > X_L$ , a  $I$  wyprzedza  $E$  w fazie, gdyż  $-90^\circ < \varphi < 0$ . Dla częstotliwości wyższych od rezonansowej,  $f > f_0$ ,  $Z$  ma charakter indukcyjny,  $X_L > X_C$ , a prąd opóźnia się względem napięcia, gdyż  $0 < \varphi < +90^\circ$ .



Rysunek 6.6: Wpływ modyfikacji  $R$  na wykres natężenia prądu w funkcji częstotliwości

## 6.2 Interpretacja charakterystyk częstotliwościowych

### 6.2.1 Wpływ rezystancji $R$ na wykresy częstotliwościowe

Z powyższych rozważań wynika, że maksymalne natężenie prądu, które występuje podczas rezonansu, zależy tylko od wartości  $R$ , gdy  $E$  jest ustalone. Im mniejsza jest rezystancja  $R$ , tym większy prąd. Rysunek 6.6 pokazuje wykresy prądu w funkcji częstotliwości dla różnych wartości  $R$ . Warto porównać go do rys. 6.1b, na którym przedstawiono wykres dla  $R = 0 \Omega$ .

#### Przykład 6.1

Dla obwodu z rys. 6.2a obliczyć częstotliwość rezonansową, spadki napięcia na  $R$ ,  $L$  i  $C$  oraz maksymalne natężenie prądu. Dane są:  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 250 \mu\text{H}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $E = 10\text{V}$  oraz  $\theta = 0^\circ$ .

#### Rozwiązanie

Częstotliwość rezonansowa

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{63245,55}{2 \cdot 3,14} = 10070,95 \text{ [Hz]}$$

ponieważ

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{250 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}} = 63245,55 \text{ [rad/s]}$$

Podczas rezonansu napięcie na rezystorze jest równe napięciu źródła, więc prąd ma maksymalne natężenie:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10}{10} = 1 \text{ [A]}$$

a napięcia na elementach reaktancyjnych przyjmują następujące wartości:

$$U_L = I \cdot jX_L = I \cdot j\omega_0 L = 1 \cdot j \cdot 63245,55 \cdot 250 \cdot 10^{-6} = 15,81e^{j90^\circ} \text{ [V]}$$

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = -U_L = 15,81e^{-j90^\circ} \text{ V}$$

□

### 6.2.2 Dobroć szeregowego obwodu rezonansowego

Z przykładu 6.1 widać, że podczas rezonansu  $U_L$  i  $U_C$  mogą być wielokrotnie wyższe od  $E$ . Oznacza to, że rezonans wiąże się z powiększaniem napięcia i magazynowaniem dużej energii elektromagnetycznej w  $L$ , a elektrostatycznej w  $C$ . Powiększenie napięcia określa dobroć obwodu rezonansowego:

$$Q = \frac{U_L}{E} = \frac{U_C}{E} \tag{6.6}$$

Podczas rezonansu  $U_L = \omega_0 L I_{\max}$ ,  $U_C = \frac{1}{\omega_0 C} I_{\max}$  i  $E = Z I_{\max} = R I_{\max}$ , zatem

$$Q = \frac{\omega_0 L I_{\max}}{R I_{\max}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \text{i} \quad Q = \frac{\frac{1}{\omega_0 C} I_{\max}}{R I_{\max}} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (6.7)$$

Podstawiając  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  do (6.7), otrzymujemy praktyczny wzór:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.8)$$

Rzeczywiste obwody rezonansowe zwykle charakteryzują się  $Q \geq 10$ .

### 6.2.3 Współczynnik tłumienia a selektywność cewki

W niektórych zastosowaniach rozpatruje się odwrotność dobroci

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 C R \quad (6.9)$$

Jest ona nazywana współczynnikiem tłumienia albo po prostu tłumieniem.

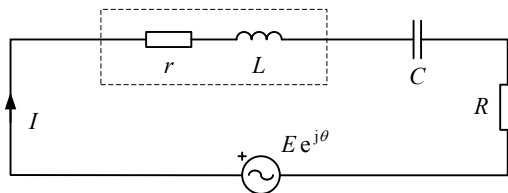
W praktyce współczynnik dobroci nie służy tylko do oceniania, jak bardzo powiększane jest napięcie. Stanowi on też często miarę jakości cewki rzeczywistej, w sensie siły wpływu rezystancji na działanie elementu. Mówi się wtedy o dobroci cewki i określa ją wzorem:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} \quad (6.10)$$

gdzie  $L$  oznacza indukcyjność, a  $r$  rezystancję cewki. Cewkę o wysokiej dobroci charakteryzuje duża indukcyjność, a mała rezystancja.

#### Przykład 6.2

Obliczyć dobroć cewki rzeczywistej, która jest połączona szeregowo z  $R$  i  $C$  w obwodzie rezonansowym z rys. 6.7. Określić też dobroć całego obwodu i porównać z dobrocią cewki. Dane są:  $r = 5 \Omega$ ,  $L = 30 \text{ mH}$ ,  $C = 25 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \Omega$  oraz  $E = 10 \text{ V}$ .



Rysunek 6.7: Schemat do przykładu 6.2

**Rozwiązanie**

W rozpatrywanym obwodzie rezonans występuje dla

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,03 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{7,5 \cdot 10^{-7}}} = \frac{1}{8,66 \cdot 10^{-4}} \\ &= 1154,7 \text{ [rad/s]}\end{aligned}$$

Współczynniki dobroci wynoszą natomiast

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r + R} = \frac{1154,7 \cdot 0,03}{5 + 100} = \frac{34,64}{105} = 0,33$$

i

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1154,7 \cdot 0,03}{5} = \frac{34,64}{5} = 6,93$$

więc dobroć cewki jest 21 razy większa od dobroci całego obwodu.

□

**6.2.4 Częstotliwości graniczne i szerokość pasma**

Ponieważ moc rozpraszana w rezystancji jest proporcjonalna do kwadratu prądu, to podczas rezonansu, gdy prąd przyjmuje maksymalne natężenie  $I_{\max}$ , moc też jest maksymalna:

$$P_{\max} = RI_{\max}^2$$

W związku z tym selektywność obwodu rezonansowego można wygodnie określać, podając częstotliwości graniczne, dla których moc maleje do połowy swojej wartości maksymalnej, a natężenie prądu zmniejsza się odpowiednio do  $\frac{1}{\sqrt{2}} I_{\max}$ .

Jeżeli oznaczymy moc równą połowie mocy maksymalnej przez  $P_{\text{hp}}$ , to

$$P_{\text{hp}} = \frac{1}{2} P_{\max} = \frac{1}{2} RI_{\max}^2 = R \left( \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad (6.11)$$

lub inaczej

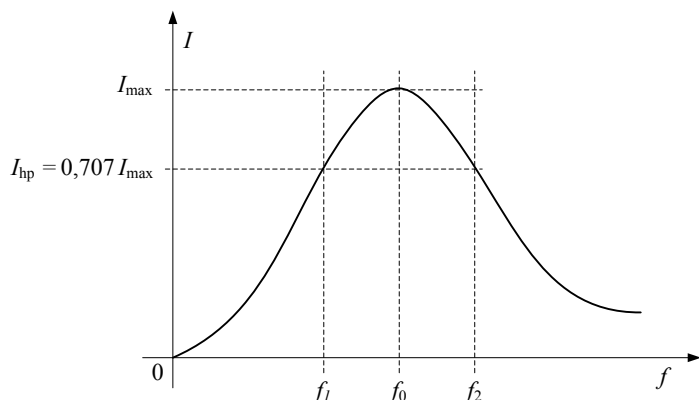
$$P_{\text{hp}} = RI_{\text{hp}}^2 \quad (6.12)$$

gdzie

$$I_{\text{hp}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = 0,707 I_{\max} \approx 70\% I_{\max} \quad (6.13)$$

Na wykresie z rys. 6.8, który przedstawia natężenie prądu w funkcji częstotliwości, punkty na poziomie  $I_{\text{hp}}$  wyznaczają dwie częstotliwości graniczne:  $f_1$  i  $f_2$ , pierwszą niższą, a drugą wyższą od  $f_0$ . Oddzielają one pasmo przepustowe, czyli

zakres częstotliwości, które są przepuszczane z wejścia obwodu na jego wyjście, od pasma zaporowego, czyli zakresu częstotliwości blokowanych (tłumionych). Z innego punktu widzenia są to częstotliwości, dla których stosunek natężenia prądu do jego wartości maksymalnej zmniejsza się do  $-3\text{ dB}^2$ .



Rysunek 6.8: Krzywa selektywności z zaznaczonymi punktami, w których moc maleje do połowy wartości maksymalnej

Różnica między częstotliwościami granicznymi:

$$W_B = f_2 - f_1 \quad (6.14)$$

jest nazywana szerokością pasma (ang. *bandwidth*) obwodu rezonansowego. Alternatywnie można określić ją wzorem:

$$W_B = \frac{f_0}{Q} \quad (6.15)$$

który jest często stosowany w praktyce.

<sup>2</sup> Decybel (dB) jest praktyczną jednostką do względnej oceny wielkości elektrycznych, zwykle napięcia lub prądu. Zamiast rozpatrywać wielkość bezpośrednio, bierze się pod uwagę dwudziestokrotność logarytmu dziesiętnego ze stosunku tej wielkości do ustalonego poziomu odniesienia. Jeżeli interesuje nas  $I$ , a rolę poziomu odniesienia spełnia  $I_{\max}$ , to bierzemy  $20 \log_{10} \frac{I}{I_{\max}}$ . Wyrażenie to jest równe zero, gdy  $I = I_{\max}$ , a  $20 \log_{10} \frac{I_{\text{hp}}}{I_{\max}} = 20 \log_{10} 0,707 = -3\text{ dB}$ . Wykorzystanie skali logarytmicznej ułatwia analizowanie wielkości, których wartości mogą zmieniać się znacząco, o rzędy wielkości.

**Dowód**

Natężenie prądu, który płynie w szeregowym obwodzie  $RLC$  zasilanym ze źródła napięcia o wartości skutecznej  $E$  i pulsacji  $\omega$ , jest określone wyrażeniem:

$$I = \frac{Ee^{j\theta}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (6.16)$$

Skuteczną wartość natężenia można zatem opisać wzorem:

$$I_{\text{rms}} = \frac{E_{\text{rms}}}{|R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})|} \quad (6.17)$$

który można sprowadzić do następującej postaci:

$$I = \frac{\frac{E}{R}}{|1 + j(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR})|} = \frac{\frac{E}{R}}{|1 + j(\frac{\omega_0 L}{R} \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 CR} \frac{\omega_0}{\omega})|} \quad (6.18)$$

Ponieważ  $\frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = Q$ ,  $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ , a iloraz  $E/R$  określa natężenie prądu podczas rezonansu, czyli  $I_{\text{max}}$ , powyższą zależność można zapisać w bardziej zwartej postaci:

$$I = \frac{I_{\text{max}}}{|1 + jQ(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f})|} \quad (6.19)$$

Biorąc pod uwagę tylko częstotliwości graniczne, dla których  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{\text{max}}$ , wyrażenie można dalej uprościć:

$$\left|1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)\right| = \sqrt{2} \quad (6.20)$$

czyli

$$\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} = \sqrt{2}$$

skąd

$$\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right) = \mp \frac{1}{Q}$$

i ostatecznie

$$Qf^2 \pm f_0 f - Qf_0^2 = 0 \quad (6.21)$$

Rozwiązanie tego równania kwadratowego z niewiadomą  $f$  ma ogólną postać:

$$f = \frac{-(\pm f_0) \mp \sqrt{(\pm f_0)^2 - 4Q(-Qf_0^2)}}{2Q} \quad (6.22)$$

Pierwiastki ujemne zanedbujemy, gdyż nie można ich sensownie zinterpretować, rozpatrując częstotliwości. Użyteczne są dwie pozostałe wartości:

$$f_1 = -\frac{f_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{f_0}{2Q}\right)^2 + 1} \quad (\text{częstotliwość dolna})$$

oraz

$$f_2 = +\frac{f_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{f_0}{2Q}\right)^2 + 1} \quad (\text{częstotliwość górna})$$

których różnica

$$f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$

czyli jest określona wyrażeniem pokrywającym się ze wzorem (6.15), tj.  $W_B = \frac{f_0}{Q}$ , który należało udowodnić.

■

Należy zauważyć, że w (6.15) może występować  $\omega$  zamiast  $f$ :

$$W_B = \frac{\omega_0}{2\pi Q} \quad (6.23)$$

a na podstawie (6.7) i (6.23) można skonstruować kolejny praktyczny wzór:

$$W_B = \frac{R}{2\pi L} \quad (6.24)$$

### 6.2.5 Dobroć a szerokość pasma

Ze wzoru (6.15) wynika, że dla ustalonej częstotliwości rezonansowej  $f_0$  szerokość pasma  $W_B$  jest odwrotnie proporcjonalna do dobroci  $Q$ , czyli

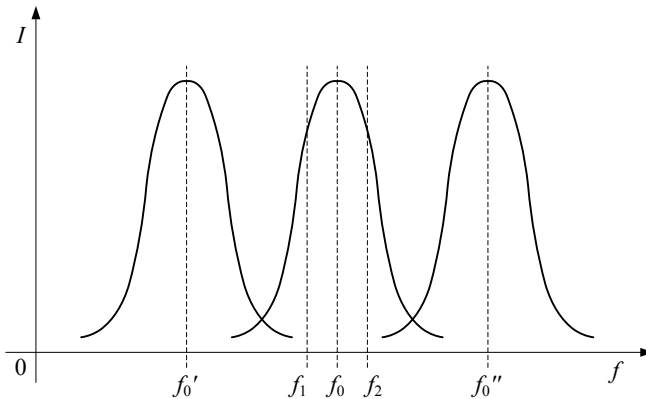
$$Q \cdot W_B = \text{const.} \quad (6.25)$$

Ten ważny związek potwierdzają wykresy z rys. 6.6. Krzywa rezonansowa o największej dobroci charakteryzuje się najmniejszą szerokością pasma.

### 6.2.6 Przestrzajanie obwodu rezonansowego

W niektórych zastosowaniach potrzebne są obwody rezonansowe, które można przestrajać w pewnym zakresie. Obwód przestrajany nie jest scharakteryzowany jedną ustaloną częstotliwością rezonansową  $f_0$ , tylko pozwala ją modyfikować od  $f'_0$  do  $f''_0$ , co zilustrowano na rys. 6.9. Przestrzajanie polega na dostosowywaniu wartości  $L$  lub  $C$ , albo obydwu tych parametrów.





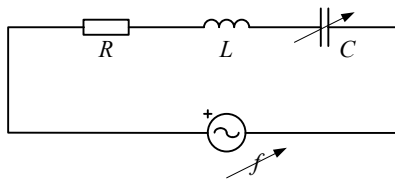
Rysunek 6.9: Wpływ przestrajania na charakterystykę częstotliwościową obwodu

Aby zależność (6.15) obowiązywała podczas przestrajania obwodu, szerokość pasma albo dobroć musi zmieniać się razem z częstotliwością rezonansową. W praktycznych obwodach  $W_B$  pozostaje stałe, tak że tylko  $Q$  zmienia się odpowiednio do  $f_0$  (przypomnijmy, że  $Q = \frac{2\pi f_0 L}{R}$ ).

Należy podkreślić, że zakres przestrajania,  $f_0'' - f_0'$  na rys. 6.9, nie ma nic wspólnego z szerokością pasma  $W_B$ . Ogólnie rzecz biorąc,  $W_B = f_2 - f_1 \neq f_0'' - f_0'$ .

### Przykład 6.3

W szeregowym obwodzie rezonansowym  $RLC$  z rys. 6.10 pojemność jest zmieniana w zakresie  $5 \dots 450 \text{ pF}$ , aby przestroić go w zakresie częstotliwości  $2,3 \dots 21,9 \text{ MHz}$ . Wiedząc, że  $R = 10 \Omega$ , obliczyć indukcyjność, dobroć oraz szerokość pasma i omówić otrzymane rezultaty.



Rysunek 6.10: Schemat do przykładu 6.3

**Rozwiązanie**

W przypadku ustalonej indukcyjności  $L$  częstotliwość rezonansowa jest proporcjonalna do  $\frac{1}{\sqrt{C}}$ . Zwiększenie pojemności powoduje zmniejszenie częstotliwości i odwrotnie. Wobec tego  $C_{\min} = 5 \text{ pF}$  odpowiada  $f_{0\max} = 21,9 \text{ MHz}$ , a  $C_{\max} = 450 \text{ pF}$  odpowiada  $f_{0\min} = 2,3 \text{ MHz}$ . Zatem indukcyjność  $L$  można wyznaczyć albo na podstawie  $C_{\min}$  i  $f_{0\max}$ , albo  $C_{\max}$  i  $f_{0\min}$ :

$$L = \frac{1}{(2\pi f_{0\max})^2 C_{\min}} = \frac{1}{(2\pi f_{0\min})^2 C_{\max}} = 10,6 \mu\text{H}$$

Następnie obliczamy skrajne wartości dobroci:

$$Q_{\min} = \frac{2\pi f_{0\min} L}{R} = 15,31$$

$$Q_{\max} = \frac{2\pi f_{0\max} L}{R} = 145,78$$

i szerokość pasma

$$W_B = \frac{f_{0\min}}{Q_{\min}} = \frac{f_{0\max}}{Q_{\max}} = 150 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma jest stała na całym zakresie zmienności częstotliwości rezonansowej, zgodnie z oczekiwaniami. Ten sam rezultat można uzyskać na podstawie równania (6.24), znając tylko  $R$  i  $L$ :

$$W_B = \frac{R}{2\pi L} = 150 \text{ kHz}$$

□

W praktyce przestrajane obwody rezonansowe znacznie częściej mają strukturę równoległą.

**6.3 Rezonans równoległy: rezonans prądów**

Rezonans równoległy najlepiej objaśnić na podstawie prostego obwodu z rys. 6.11. Do takiej postaci można sprowadzać rzeczywiste, bardziej skomplikowane układy, takie jak na rys. 6.13, którym poświęcono podrozdział 6.5.

Równoległe połączenie  $RLC$  najwygodniej jest opisywać za pomocą admitancji:

$$Y = G + jB = G + j(B_C - B_L) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (6.26)$$

Prąd płynący przez źródło napięcia  $E$ ,

$$I = YE = \left[G + j(B_C - B_L)\right] E = GE + jB_C E - jB_L E$$

jest wypadkową prądów w elementach pasywnych:

$$I = I_R + I_C + I_L$$

gdzie

$$I_R = GE = \frac{E}{R}$$

jest w fazie z  $E$ ,

$$I_C = jB_C E = j\omega CE$$

wyprzedza  $E$  o  $90^\circ$ , a

$$I_L = -jB_L E = -j\frac{E}{\omega L}$$

opóźnia się względem  $E$  o  $90^\circ$ , co ilustrują wykresy z rys. 6.11e i 6.11f. Przesunięcie fazowe między prądem a napięciem jest określone wzorem:

$$\varphi = \arctg \frac{B_C - B_L}{G} \quad (6.27)$$

Podczas rezonansu równoległego  $Y = G$  i  $B = 0$ , czyli:

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

i

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

zatem zjawisko to występuje dla częstotliwości

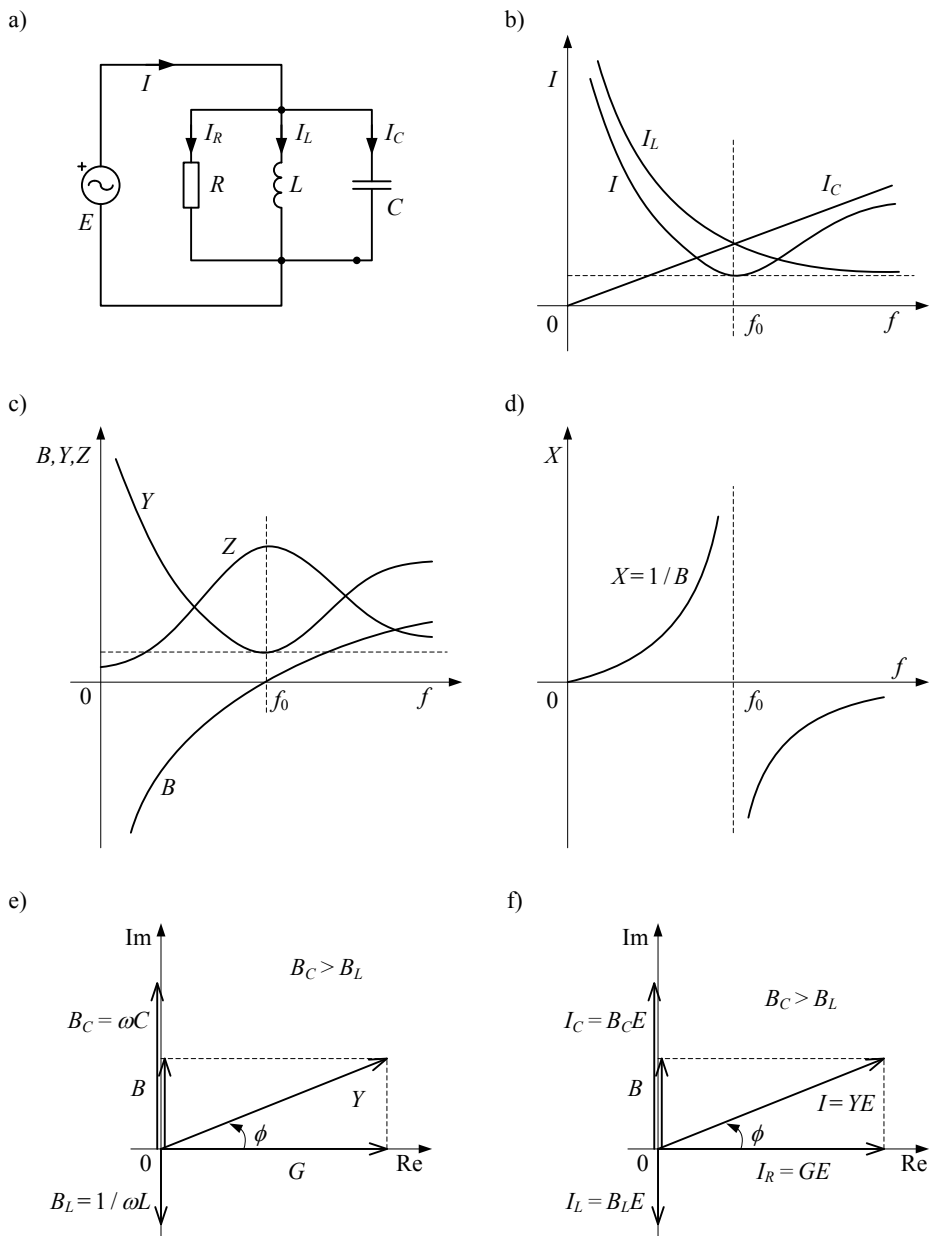
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (6.28)$$

określonej tak samo, jak w przypadku rezonansu szeregowego.

Natężenie prądu  $I_R = GE$ , czyli nie zależy od  $\omega_0$ , zaś natężenia  $I_C$  i  $I_L$  zależą od częstotliwości i podczas rezonansu są następujące:

$$I_C = jB_C E = j\omega_0 C E = j\frac{\omega_0 C}{G} I \quad = \quad I_L = -jB_L E = -j\frac{1}{\omega_0 L} E = -j\frac{1}{\omega_0 L G} I$$

czyli równe co do wartości bezwzględnej, ale przeciwne. Zatem rezonans równoległy polega na wzajemnym znoszeniu się prądów cewki i kondensatora. Układ w stanie rezonansu zachowuje się tak, jakby obejmował tylko rezystancję.



Rysunek 6.11: Równoległy obwód rezonansowy oraz odpowiednie wykresy częstotliwościowe i wektorowe

### 6.3.1 Dobroć równoległego obwodu rezonansowego

Dobroć  $Q_p$  równoległego obwodu rezonansowego jest określona powiększeniem napięcia prądu w elementach reaktancyjnych:

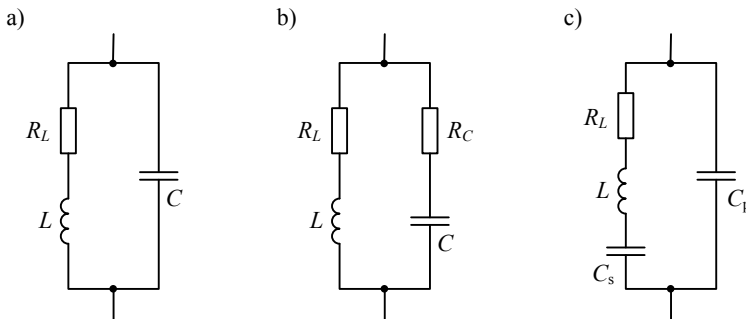
$$Q_p = \frac{|I_C|}{|I|} = \frac{\omega_0 C}{G} \quad \text{lub} \quad Q_p = \frac{|I_L|}{|I|} = \frac{1}{\omega_0 L G} \quad (6.29)$$

Prąd cyrkulujący pomiędzy  $L$  i  $C$  jest bowiem zwykle wielokrotnie większy od prądu, który dopływa ze źródła zasilania do obwodu rezonansowego.

## 6.4 Praktyczne układy rezonansowe

Rezonans może występować w układach bardziej skomplikowanych niż połączenie  $RLC$  szeregowe oraz równoległe. W jedno lub drugie połączenie można jednak przekształcić dowolną kombinację elementów  $RLC$  stanowiącą dwójnik, czyli posiadającą dwa zaciski o charakterze wyprowadzeń zewnętrznych, które pozwalają dołączyć ją do źródła napięcia lub bardziej złożonej sieci aktywnej. Przekształcenie danej kombinacji  $RLC$  w połączenie szeregowe lub równoległe stanowi podstawę do ustalenia jej częstotliwości rezonansowych.

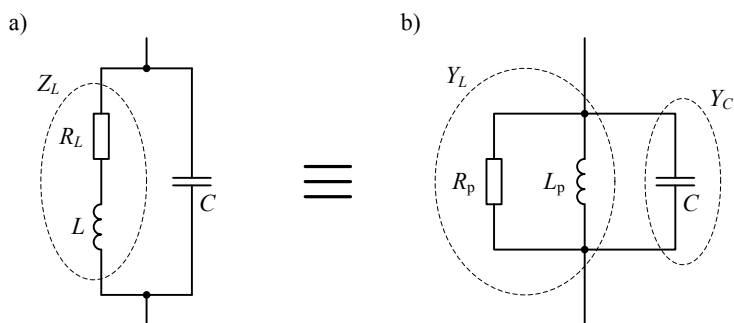
Rysunek 6.12 przedstawia trzy układy  $RLC$ , które są często stosowane w praktyce. W każdym może zachodzić rezonans równoległy, a w trzecim — także rezonans szeregowy. Odpowiednie sposoby określenia częstotliwości rezonansowych zostały przedstawione w kolejnych podrozdziałach.



Rysunek 6.12: Praktyczne układy rezonansowe

#### 6.4.1 Układ z rysunku 6.12a

Układ z rys. 6.12a można przekształcić w równoważny równoległy obwód rezonansowy, który omówiono w podrozdziale 6.3. W tym celu należy zastąpić szeregowe połączenie  $R_L L$  równoległym, tak jak pokazano na rys. 6.13.



Rysunek 6.13: Przekształcenie obwodu z rys. 6.12a w równoległy układ zastępczy

Impedancji szeregowego połączenia  $R_L L$ , która jest określona wzorem:

$$Z_L = R_L + j\omega L$$

odpowiada admittance:

$$Y_L = \frac{1}{R_L + j\omega L} \cdot \frac{R_L - j\omega L}{R_L - j\omega L} = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} L^2 \equiv G - jB_L$$

gdzie:

$$G = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_p}$$

i

$$B_L = \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{\omega L_p}$$

Wypadkowa admittance nowego obwodu obejmuje dodatkowo susceptancję kondensatora:

$$Y = Y_L + Y_C = (G - jB_L) + jB_C = G - j(B_L - B_C) \quad (6.30)$$

gdzie  $Y_C = jB_C = j\omega C$ .

Zastępczy układ  $R_p L_p C$  można analizować, bezpośrednio wykorzystując rezultaty przedstawione w podrozdziale 6.3. Podczas rezonansu ( $\omega = \omega_0$ ) susceptancja ( $B_L - B_C$ ) powinna być równa zero, czyli

$$B_L = B_C$$

skąd:

$$\frac{\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} = \omega_0 C \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2}}$$

Wobec tego częstotliwość rezonansowa wynosi

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_L^2}{L^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}} \quad (6.31)$$

przy czym spełnienie warunku  $R_L < \sqrt{\frac{L}{C}}$  zapewnia, że  $f_0$  jest liczbą rzeczywistą, czyli rozwiązanie ma sens fizyczny. Należy też zauważyć, że wzór (6.31) redukuje się do równania (6.28), gdy  $R_L = 0$ .

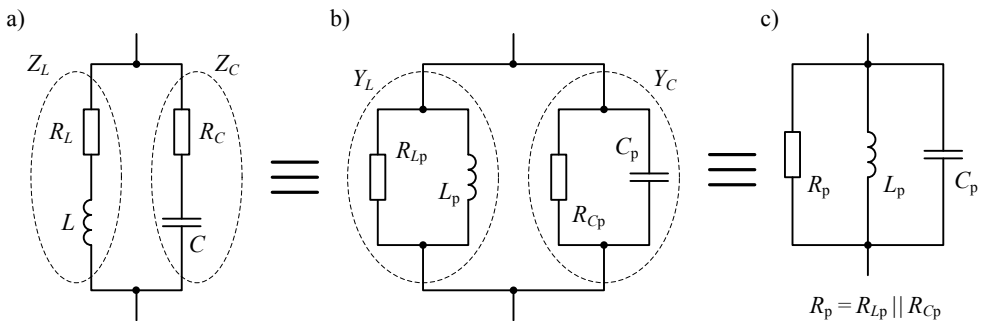
### 6.4.2 Układ z rysunku 6.12b

Obwód rezonansowy z rys. 6.12b zawiera dodatkową rezystancję  $R_C$  w szeregu z  $C$ . Tak jak w przypadku połączenia z rys. 6.12a, dążymy do uzyskania prostego równoległego obwodu rezonansowego. Tym razem jednak trzeba przekształcić w połączenie równoległe nie tylko gałąź  $R_L L$  o impedancji  $Z_L$ , ale także gałąź  $R_C C$  o impedancji  $Z_C$ :

$$Z_L = R_L + j\omega L \quad \Rightarrow \quad Y_L = \frac{1}{R_L + j\omega L} = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z_C = R_C - j \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad Y_C = \frac{1}{R_C - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Odpowiednie przekształcenia układów objaśnia rys. 6.14.



Rysunek 6.14: Przekształcenie obwodu z rys. 6.12b w równoległy układ zastępczy

Zatem wypadkowa admitancja jest określona wzorem:

$$Y = Y_L + Y_C = G + jB = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j\frac{1}{\omega C}}$$

Podczas rezonansu tworząca ją susceptancja jest zerowa. Sytuację taką można rozpatrzyć na dwa sposoby. Przede wszystkim po określeniu bezpośredniego wzoru na część urojoną  $Y$  można sprawdzić, kiedy jest ona równa zero. Łatwiej jest jednak wyznaczyć  $Y_L$  i  $Y_C$ , a następnie określić warunek wzajemnego kasowania się ich części urojonych. Mianowicie,

$$Y_L = G_L - jB_L$$

gdzie  $G_L = \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}$  a  $B_L = \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}$ , zaś

$$Y_C = G_C + jB_C$$

gdzie  $G_C = \frac{R_C}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$  a  $B_C = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ .

Podczas rezonansu  $B = 0$  i  $\omega = \omega_0$ , więc można zapisać równanie:

$$B = -B_L + B_C = \frac{-\omega_0 L}{R_L^2 + \omega_0^2 L^2} + \frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}} = 0$$

którego rozwiązaniem jest:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R_L^2 C}{LC(L - R_C^2 C)}}$$

czyli:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L - R_L^2 C}{L - R_C^2 C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_L^2}{\frac{L}{C} - R_C^2}} \quad (6.32)$$

Sensowne rozwiązanie, czyli rzeczywistą wartość  $f_0$ , można uzyskać tylko wtedy, gdy parametry elementów spełniają następujące warunki:

$$R_L^2 < \frac{L}{C} \quad \text{i} \quad R_C^2 < \frac{L}{C}$$

inaczej:

$$R_L < \sqrt{L/C} \quad \text{i} \quad R_C < \sqrt{L/C}$$



Należy zauważyć, że równość  $R_C = \sqrt{L/C}$  jest niedopuszczalna, gdyż oznacza niewykonalne dzielenie przez zero. Równość  $R_L = \sqrt{L/C}$  odpowiada natomiast zerowej częstotliwości rezonansowej, czyli obwodowi prądu stałego, w którym cewka stanowi zwarcie, a kondensator — przerwę. Jeżeli  $R_L = R_C = 0$ , to wzór (6.32) pokrywa się z równaniem (6.28).

### 6.4.3 Układ z rysunku 6.12c

Obwód rezonansowy z rys. 6.12c jest szczególnie ciekawy. Charakteryzują go dwie częstotliwości rezonansowe, gdyż może w nim występować zarówno rezonans równoległy (zob. problem P6.3), jak i szeregowy.

Układ ma duże znaczenie praktyczne jako ogólny obwód zastępczy, w który można przekształcić dowolne połączenie elementów  $R$ ,  $L$  i  $C$ . Ponadto układ stanowi elektryczny model rezonatora kwarcowego, czyli elementu elektromechanicznego, który jest powszechnie stosowany w elektronice.

### 6.4.4 Rezonator kwarcowy

Działanie rezonatora kwarcowego opiera się na zjawisku piezoelektrycznym, które polega na przemianie energii mechanicznej (drgania płytki krystalicznej) w elektryczną. Rezonans mechaniczny przekłada się przy tym bezpośrednio na rezonans elektryczny, tak że element może być postrzegany jako obwód rezonansowy o dużej dobroci (od  $10^4$  do  $10^5$ ), którą trudno uzyskać, stosując cewki i kondensatory. Z tego powodu rezonatory kwarcowe są stosowane w bardziej zaawansowanych urządzeniach, w których wymagane są mała stratność i wysoka selektywność obwodu rezonansowego przy niewrażliwości na temperaturę.

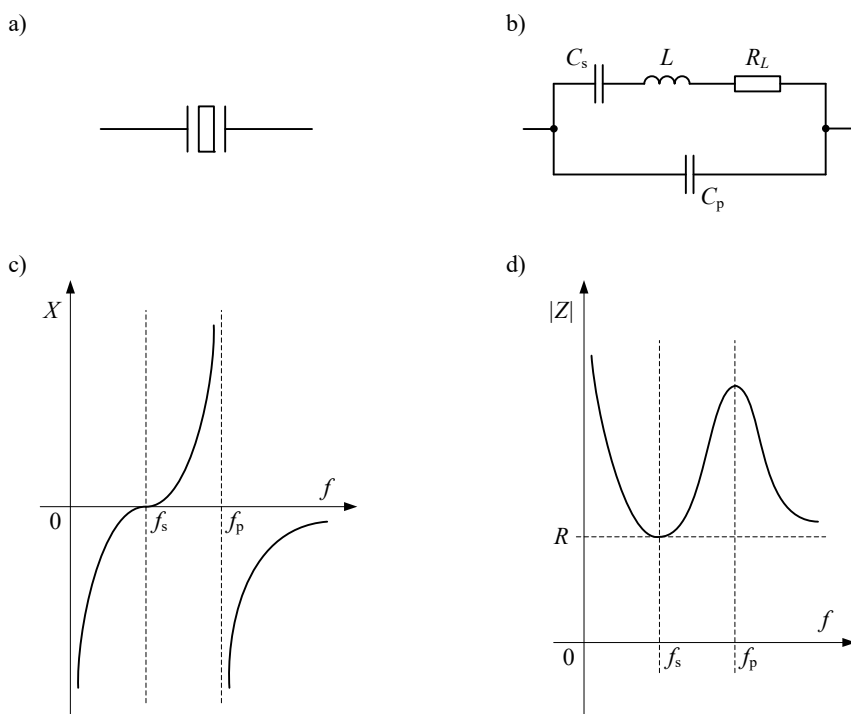
Rysunek 6.15b pokazuje elektryczny układ zastępczy rezonatora. Obecność gałęzi z szeregowym połączeniem  $R_L LC_s$  decyduje o możliwości wystąpienia rezonansu szeregowego dla częstotliwości  $f_s$ , gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C_s} \quad (6.33)$$

Odmierna natura charakteryzuje rezonans równoległy, który zachodzi dla wyższej częstotliwości  $f_p$ , gdy wypadkowa reaktancja indukcyjna szeregowego połączenia  $R_L LC_s$  rezonuje z reaktancją  $C_p$ , czyli

$$\frac{1}{\omega C_p} = \text{Im}(R_L LC_s) \quad (6.34)$$

Rysunki 6.15c i 6.15d pokazują zmiany reaktancji i impedancji zastępczej rezonatora w funkcji częstotliwości  $f$ . Wartości bezwzględne obydwu wielkości są małe dla  $f_s$ , a bardzo duże dla  $f_p$ . Konkretnie wzory na częstotliwości  $f_s$  i  $f_p$  można poznać, rozwiązując problemy P6.2 i P6.3.

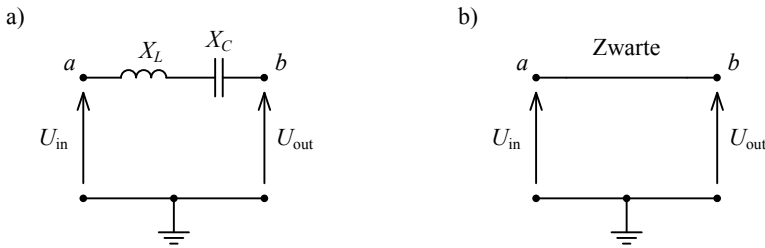


Rysunek 6.15: Rezonator kwarcowy: (a) symbol graficzny, (b) elektryczny układ zastępczy, (c) i (d) wykresy częstotliwościowe

## 6.5 Filtry elektryczne jako praktyczne zastosowanie rezonansu

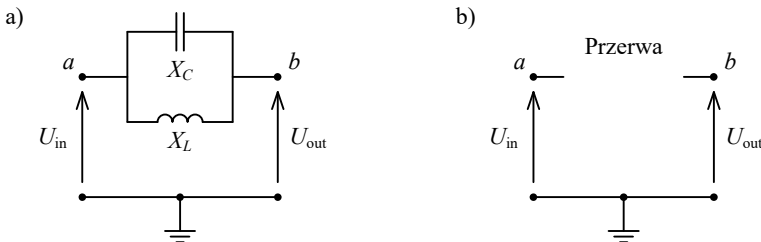
Fakt, że połączenie  $LC$  zachowuje się jak zwarcie podczas rezonansu szeregowego (rys. 6.16) lub jako rozwarcie podczas rezonansu równoległego (rys. 6.17), stanowi podstawę działania filtrów elektrycznych. Układy te znajdują wiele zastosowań w urządzeniach elektronicznych, takich jak odbiorniki radiowe, telewizyjne i satelitarne. Filtr przepuszcza sygnały z pewnego zakresu (pasma) częstotliwości, a tłumi sygnały, których częstotliwości leżą poza pasmem przepustowym.

Filtr z rys. 6.16a, którego działanie można opisać charakterystyką z rys. 6.8, blokuje częstotliwości niższe od  $f_1$  i wyższe od  $f_2$ . Przepuszczane są sygnały wejściowe o częstotliwościach z zakresu szerokości pasma, co wynika z tego, że dla częstotliwości rezonansowej i w jej otoczeniu (częstotliwości należące do pasma) wyjście jest zwarte z wejściem i przejmuje sygnał w całości (rys. 6.16b). Takie filtry są określane mianem pasmowoprzepustowych.



Rysunek 6.16: Pasmowoprzepustowy filtr rezonansowy: (a) schemat i (b) układ zastępczy podczas rezonansu

Analogicznie obwód rezonansowy z rys. 6.17a można utożsamiać z filtrem równoległym. Podczas rezonansu połączenie  $LC$  reprezentuje sobą przerwę, tak jak na rys. 6.17b, nie dopuszczając do przechodzenia sygnału wejściowego na wyjście, dopóki częstotliwość nie wykroczy poza pasmo (otoczenie częstotliwości rezonansowej). Z tego powodu filtry takie noszą nazwę pasmowozaporowych.



Rysunek 6.17: Pasmowozaporowy filtr rezonansowy: (a) schemat i (b) układ zastępczy podczas rezonansu

Znane są różne sposoby realizowania filtrów elektrycznych z wykorzystaniem rezonansu szeregowego i równoległego w obwodach  $LC$ . Obwód rezonansowy może np. zostać połączony równolegle z wyjściem i wtedy rezonans szeregowy wiąże się z tłumieniem sygnału wejściowego, a rezonans równoległy — z przepuszczaniem (zob. problem P6.7).

## 6.6 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 6.6.1 Pytania

#### Pytanie Q6.1

Narysować wykresy analogiczne do tych z rys. 6.6, przyjmując, że  $R$  jest stałe, a  $L / C$  zmienia się.

#### Wskazówka

Wykresy powinny być podobne do tych z rys. 6.6, ale wszystkie muszą mieć taką samą wartość maksymalną, która występuje przy częstotliwości rezonansowej.

---

#### Pytanie Q6.2

Wyprowadzić wyrażenia określające  $R_p$  i  $L_p$  w obwodzie z rys. 6.13b.

#### Odpowiedź

$$R_p = \frac{1}{G} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{R_L} \quad \text{zaś} \quad X_p = \frac{1}{B_L} = \omega L_p = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}$$

---

#### Pytanie Q6.3

Wyznaczyć częstotliwość rezonansową  $f_0$  równoległego obwodu z rys. 6.11a, rozpatrując równoważne szeregowe połączenie  $RLC$ .

---

#### Pytanie Q6.4

Określić  $R_p$  w obwodzie z rys. 6.13b, wiedząc, że  $\omega L \gg R_L$ . Należy odnieść się do odpowiedzi na pytanie Q6.2.

---

#### Pytanie Q6.5

Określić  $Q$  i  $W_B$  oraz związek między nimi w obwodzie z rys. 6.12b. Należy wykorzystać wyniki z podrozdziału 6.4.2, który dotyczy analizy tego samego układu.

#### Wskazówka

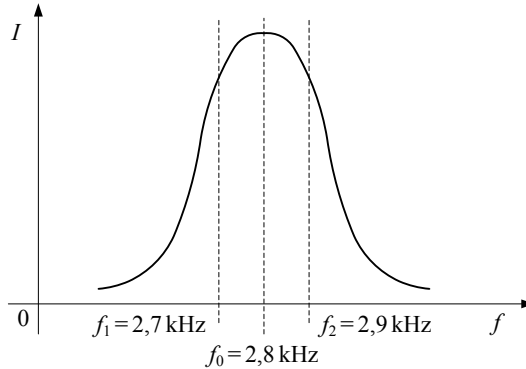
Należy wykazać, że  $W_B = \frac{G}{2\pi C_p}$ .

---

## 6.6.2 Problemy rozwiązane

### Problem P6.1

Obliczyć  $L$ ,  $R$ ,  $Q$  i  $W_B$  w szeregowym obwodzie  $RLC$ , którego krzywa rezonansowa ma kształt pokazany na rys. 6.18, a  $C = 0,1 \mu\text{F}$ .



Rysunek 6.18: Wykres do problemu P6.1

### Rozwiązanie

Wzór (6.2) na częstotliwość rezonansową wykorzystujemy do obliczenia indukcyjności:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 2800^2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 33 \text{ [mH]}$$

Po ustaleniu szerokości pasma:

$$W_B = 2900 - 2700 = 200 \text{ [Hz]}$$

i dobroci:

$$Q = \frac{f_0}{W_B} = \frac{2800}{200} = 14$$

można wyznaczyć rezystancję

$$Q = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow R = \frac{\omega_0 L}{Q} = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2800 \cdot 0,033}{14} = 41 \text{ [\Omega]}$$

**Problem P6.2**

Wyprowadzić wyrażenie na częstotliwość rezonansu szeregowego w elektrycznym układzie zastępczym oscylatora kwarcowego z rys. 6.15b.

**Wskazówka**

Po określeniu impedancji zastępczych gałęzi:

$$Z_1 = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_s}\right)$$

i

$$Z_2 = -j\frac{1}{\omega C_s}$$

można zapisać wzór na impedancję zastępczą całego układu:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = R + jX$$

Podczas rezonansu  $X = 0$ , co stanowi podstawę do wyprowadzenia równania określającego szukaną częstotliwość.

---

**Problem P6.3**

Wyznaczyć częstotliwość rezonansu równoległego w układzie zastępczym oscylatora kwarcowego z rys. 6.14b.

**Wskazówka**

Należy określić admitancje obydwu gałęzi, a następnie dodać je w celu uzyskania zastępczej admitancji obwodu, której część urojona powinna być równa zero przy rezonansie. Pierwsza gałąź obwodu zawiera trzy elementy i dlatego:

$$Z_1 = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_s}\right) \quad \Rightarrow \quad Y_1 = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_s}\right)}$$

przy czym  $\omega L > \frac{1}{\omega C_s}$  zapewnia, że gałąź ma charakter indukcyjny. W drugiej gałęzi jest tylko jeden element, kondensator, więc

$$Y_2 = j\omega C_p$$

Wypadkowa admitancja stanowi sumę:

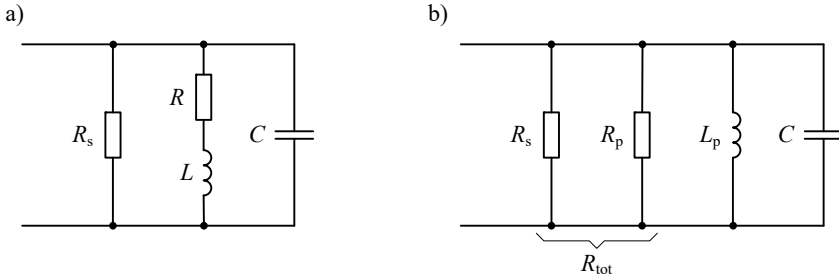
$$Y = Y_1 + Y_2 = G + jB = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_s}\right)} + j\omega C_p$$

Podczas rezonansu susceptancja  $B = 0$ , co pozwala zapisać równanie z niewiadomą  $f$ , którego rozwiązanie daje wzór na szukaną częstotliwość rezonansową.

---

**Problem P6.4**

Wyznaczyć  $Q_s$ ,  $R_{tot}$ ,  $C$ ,  $Q_p$  i  $W_B$  dla równoległego obwodu rezonansowego z rys. 6.19a. Dane są:  $\omega_0 = 2500 \text{ krad/s}$ ,  $R_s = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 10 \Omega$  oraz  $L = 10 \text{ mH}$ .



Rysunek 6.19: Schematy do problemu P6.4

**Rozwiązanie**

Gałąź zawierającą szereg  $RL$  przekształcamy do równoważnego układu równoległego, który pokazano na rys. 6.19b. W zmodyfikowanym obwodzie

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{\omega L_p}$$

czyli:

$$R_p = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R} = \frac{10^2 + (2,5 \cdot 10^6)^2 10^{-3 \cdot 2}}{10} = 625 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

$$L_p = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L} = \frac{10^2 + (2,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3})^2}{(2,5 \cdot 10^6)^2} \cdot 10^{-3} = 0,001 \text{ [H]}$$

Zatem:

$$C = \frac{1}{L_p \cdot \omega^2} = \frac{1}{10^{-3} \cdot (2,5 \cdot 10^6)^2} = 160 \text{ [pF]}$$

$$R_{tot} = R_s \parallel R_p = \frac{40 \cdot 625}{40 + 625} = 38 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

$$Q_s = \frac{\omega L}{R} = 2,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} / 10 = 250$$

$$Q_p = \frac{R_{tot}}{\omega L_p} = \frac{38000}{2,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}} = 15,2$$

$$W_B = \frac{\omega}{Q_p} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{15,2} = 164,47 \cdot \text{[krad/s]} \quad \equiv \quad 26,19 \text{ [kHz]}$$

**Problem P6.5**

Dla szeregowego obwodu z rys. 6.2a obliczyć częstotliwość rezonansową  $f_0$ , współczynnik dobroci  $Q_s$ , współczynnik tłumienia  $d$ , szerokość pasma  $W_B$  i częstotliwości graniczne. Dane są:  $R = 100\ \Omega$ ,  $L = 0,5\ \text{H}$ ,  $C = 0,4\ \mu\text{F}$  oraz  $E = 100e^{j0^\circ}\ \text{V}$ .

**Rozwiązanie**

Najpierw wyznaczamy częstotliwość rezonansową:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}}} = 356\ \text{[Hz]}$$

a następnie obliczamy pozostałe wielkości:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = 11,2$$

$$d = \frac{1}{Q} = 0,089$$

$$W_B = \frac{f_0}{Q} = 32\ \text{Hz}$$

$$f_1 = f_0 - \frac{W_B}{2} = 356 - \frac{32}{2} = 340\ \text{[Hz]}$$

$$f_2 = f_0 + \frac{W_B}{2} = 356 + \frac{32}{2} = 372\ \text{[Hz]}$$

---

**Problem P6.6**

W obwodzie z P6.5 obliczyć  $I, U_R, U_C$  i  $U_L$  podczas rezonansu oraz moc dla częstotliwości granicznych.

**Odpowiedź**

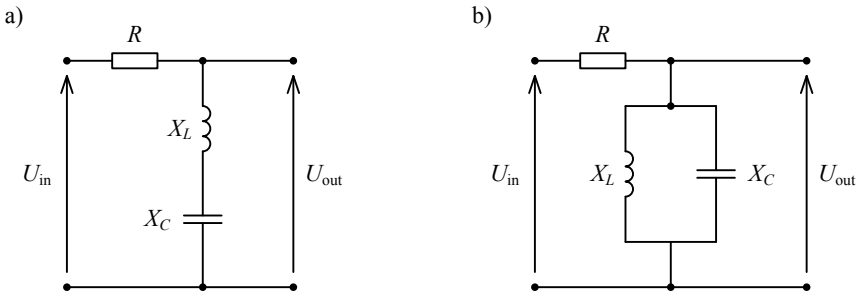
$I = 1e^{j0^\circ}\ \text{A}$ ,  $U_R = 100e^{j0^\circ}\ \text{V}$ ,  $U_L = 1118e^{j90^\circ}\ \text{V}$ ,  $U_C = 1118e^{-j90^\circ}\ \text{V}$ , a  $P_{hp} = 50\ \text{W}$ .

---

**Problem P6.7**

Opierając się na dyskusji z podrozdziału 6.5 dotyczącej filtrów elektrycznych, omówić działanie układów pokazanych na rys. 6.20. Jak modyfikowane są sinusoidalne sygnały wejściowe o różnych częstotliwościach: równej częstotliwości rezonansowej, większej i mniejszej? Co otrzymujemy na wyjściu w odpowiedzi na stałe napięcie na wejściu? Naszkicować krzywe rezonansowe, wzorując się na rys. 6.5.





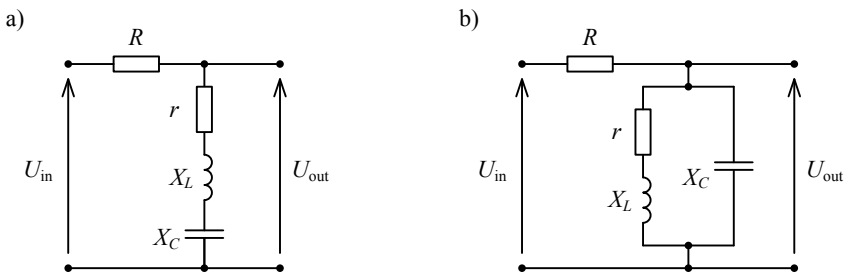
Rysunek 6.20: Schematy do problemu P6.7

**Wskazówka**

Podczas rezonansu szeregowe połączenie  $LC$  zachowuje się tak, jakby zwarcie było w jego miejscu, więc napięcie na wyjściu jest zerowe. Równoległy obwód  $LC$  zachowuje się natomiast tak, jakby była przerwa, czyli napięcie wyjściowe jest równe wejściowemu pomniejszonemu o spadek na  $R$ .

**Problem P6.8**

Jak zmieniłoby się działanie i charakterystyki układów z rys. 6.20, których dotyczy problem P6.7, po przekształceniu ich do postaci pokazanej na rys. 6.21? Cewka idealna została zastąpiona uproszczonym schematem cewki rzeczywistej: połączeniem szeregowym indukcyjności  $L$  i rezystancji  $r$ .



Rysunek 6.21: Schematy do problemu P6.8

**Wskazówka**

Nie można prosto stwierdzić, że występuje zwarcie lub rozwarcie w miejscu obwodu rezonansowego. Trzeba rozpatrzyć jego impedancję i rezystancję zastępczą.

**Problem P6.9**

Udowodnić, że w obwodach z rys. 6.14:

$$R_{Lp} = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{R_L}$$

$$R_{Cp} = \frac{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}{R_C}$$

$$L_p = \frac{R_L^2 + \omega^2 L^2}{\omega^2 L}$$

$$C_p = \frac{\frac{1}{\omega^2 C}}{R_C^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

---

**Problem P6.10**

Określić wzór na  $Q$  obwodu z rys. 6.14, wykorzystując rozwiązanie problemu P6.9, który dotyczy tego samego układu.

**Wskazówka**

Z definicji  $Q = \frac{X_{Cp}}{G} = \frac{1}{X_{Lp}G}$ , gdzie  $G = \frac{1}{R_p} = G_L + G_C$ .

---

**6.6.3 Quiz****Quiz 6.1**

Prąd w szeregowym obwodzie  $RLC$  przyjmuje maksymalne natężenie 2 A. Obliczyć pojemność  $C$  i spadki napięć na wszystkich elementach obwodu, wiedząc, że  $L = 80 \mu\text{H}$ ,  $R = 300 \Omega$ , a współczynnik dobroci wynosi 50.

---



## Rozdział 7

# Stany nieustalone

### Wprowadzenie

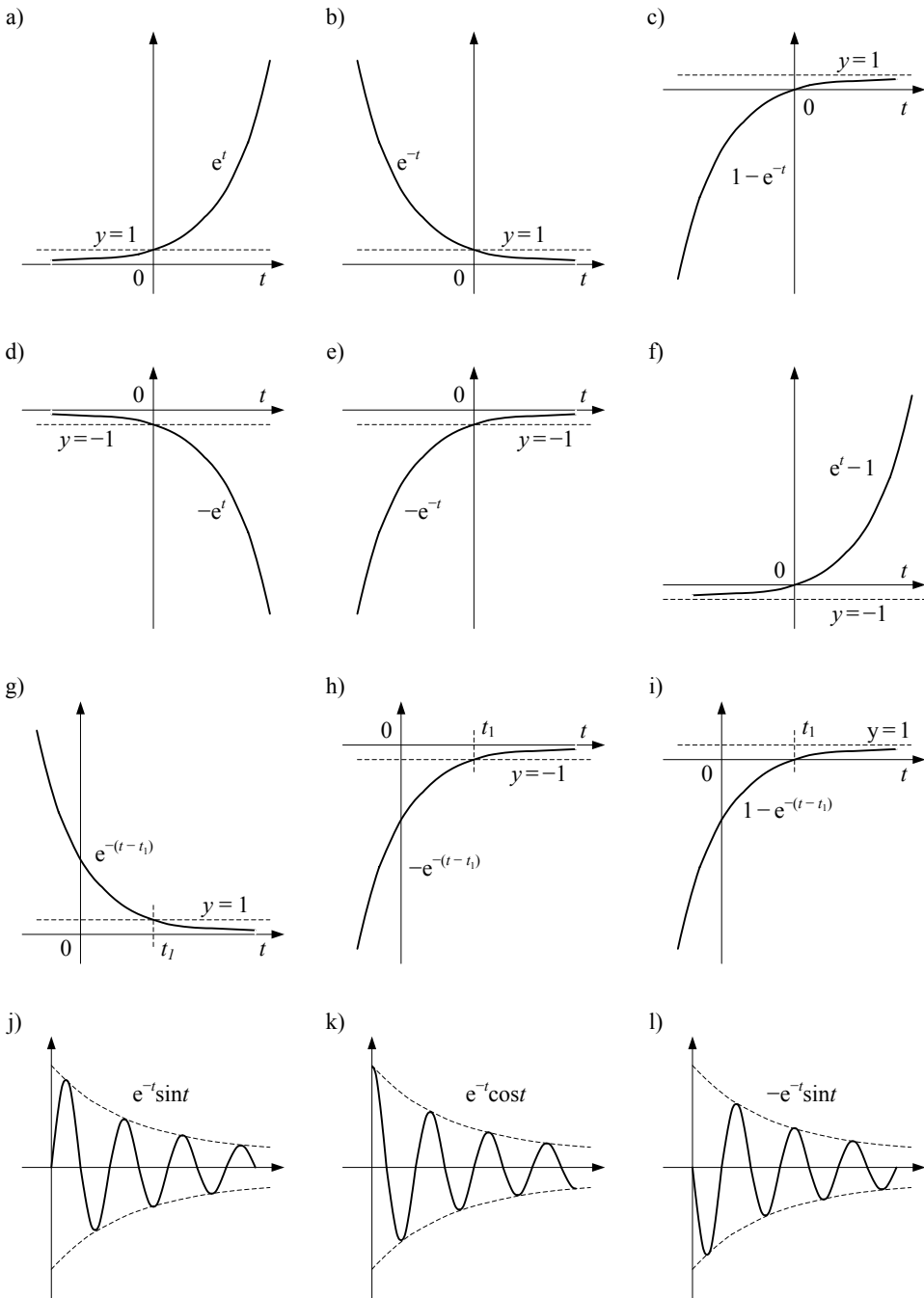
W poprzednich rozdziałach przyjmowano, że rozpatrywane obwody są w stanie ustalonym. Założenie takie oznacza, że elementy układu mają ustalone parametry i są trwale połączone od długiego czasu (teoretycznie nieskończonego).

Niniejszy rozdział został poświęcony stanom nieustalonym, które występują w obwodach zawierających  $L$ ,  $C$  lub jedno i drugie, oprócz  $R$ , kiedy układ nagle zmienia strukturę:

- pewien element zostaje dołączony do obwodu lub usunięty z niego,
- pewne fragmenty układu zostaną połączone lub rozłączone,
- zwiększy się lub zmniejszy napięcie albo prąd źródła.

Wskutek takich modyfikacji obwodu następują przemiany energii zmagazynowanej w cewkach lub kondensatorach. W odróżnieniu od zmiany połączeń, przekazanie energii między elementem reaktancyjnym a pozostałą częścią obwodu nie może nastąpić natychmiast. Wykluczają to właściwości elementów  $L$  i  $C$ , gdyż prąd w cewce ani napięcie na kondensatorze nie mogą zmienić się w sposób nieciągły. Dlatego pojawia się reakcja obwodu, zwana stanem nieustalonym, na którą nie mają wpływu źródła zasilające, choć jest ona ukierunkowana na osiągnięcie ustalonych wartości prądów i napięć określonych parametrami i sposobem połączenia źródeł oraz elementów pasywnych.

Obwody w stanie nieustalonym będziemy analizować głównie w dziedzinie czasu, stosując metodę klasyczną. Dla porównania pokazane zostaną jednak przykłady wykorzystania transformacji Laplace'a, która ułatwia analizę, umożliwiając przekształcenie wielkości elektrycznych z dziedziny czasu do wygodniejszej dziedziny częstotliwości zespolonej.



Rysunek 7.1: Funkcje wykładnicze użyteczne w analizowaniu stanów nieustalonych

## 7.1 Istota stanu nieustalonego a funkcje wykładnicze

Stan nieustalony jest zjawiskiem ściśle związanym z magazynowaniem energii w kondensatorach i cewkach oraz jej odzyskiwaniem. W obwodach  $RC$  ma on charakter elektrostatyczny (energia pola elektrycznego), a w obwodach  $RL$  — elektromagnetyczny (energia pola magnetycznego). W obwodach zawierających elementy  $L$  oraz  $C$  stan nieustalony jest związany tak ze zjawiskami elektrostatycznymi, jak i magnetycznymi.

Stan nieustalony polega na występowaniu przejściowych (ang. *transient*) składowych prądów i napięć. Takie składowe zanikają z czasem, będąc wykładniczo zależne od niego. Rysunek 7.1 pokazuje funkcje o charakterze wykładniczym, które są wykorzystywane do opisywania stanów nieustalonych.

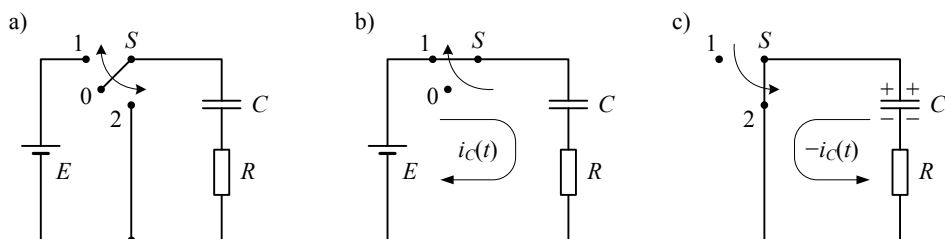
## 7.2 Szeregowe połączenie $RC$

### 7.2.1 Uwagi ogólne

Stany nieustalone związane z działaniem kondensatora omówimy, opierając się na układzie z rys. 7.2a. Układ zawiera przełącznik  $S$ , który pozwala ustanawiać trzy obwody pracy kondensatora.

Gdy  $S$  jest w pozycji 0, tak jak na rys. 7.2a, nie ma żadnego zamkniętego oczka, więc prąd nie może płynąć w gałęzi z  $C$ . Kondensator jest stanie spoczynku i utrzymuje w sobie ładunek, który znajdował się tam w momencie ustawienia przełącznika na pozycję 0. Załóżmy, że ładunek jest zerowy, co ułatwi nam rozważania.

Gdy  $S$  jest w pozycji 1, tak jak na rys. 7.2b, kondensator może ładować się ze źródła napięcia  $E$ . Prąd płynie, dopóki kondensator nie zostanie naładowany, przy czym jego natężenie zmniejsza się w miarę zwiększania się ładunku i napięcia na  $C$ . Zatem prąd jest przejściowy i związany ze stanem nieustalonym. Początkowe natężenie prądu jest ograniczone ilorazem napięcia  $E$  i rezystancji  $R$ .



Rysunek 7.2: Stan nieustalony w szeregowym połączeniu  $RC$ : (a) układ spoczynkowy, (b) obwód ładowania  $C$  ze źródła i (c) obwód rozładowania  $C$  przez  $R$

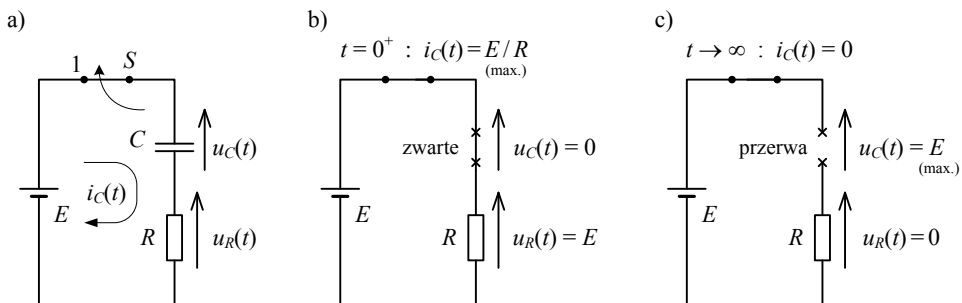
Gdy  $S$  jest w pozycji 2, tak jak na rys. 7.2c, kondensator może rozładowywać się. Dopóki na kondensatorze jest ładunek, prąd płynie przez opornik  $R$ , który zamienia energię elektryczną w ciepło rozpraszane do otoczenia. Natężenie prądu maleje, gdyż ładunki opuszczają kondensator i zmniejsza się napięcie między jego okładkami. Podobnie jak przy ładowaniu, mamy do czynienia z prądem przejściowym i stanem nieustalonym.

Rozpatrując stany nieustalone w szeregowym połączeniu  $RC$ , będziemy wykorzystywać równania i informacje związane z działaniem kondensatora, które zostały przedstawione w podrozdziale 1.3.

## 7.2.2 Ładowanie kondensatora

Rozpatrzmy spoczynkowy układ z rys. 7.2a. Załóżmy, że w przedziale czasu  $-\infty < t < 0^-$  przełącznik  $S$  był w pozycji 0, a  $q_C(t)$ ,  $u_C(t)$  i  $i_C(t)$  były zerowe. W chwili  $t = 0^+$  przełącznik  $S$  zostaje przestawiony w pozycję 1, co powoduje zmianę topologii obwodu na tę z rys. 7.3a. Wskutek ładowania się kondensatora występuje stan nieustalony, podczas którego układ zastępczy przechodzi od postaci pokazanej na rys. 7.3a do postaci z rys. 7.3c. Interesuje nas sposób, w jaki zmieniają się prąd, ładunek i napięcia.

Wzory na składowe przejściowe prądu  $i_C(t)$ , ładunku  $q_C(t)$  i napięcia  $u_C(t)$  można wyprowadzić różnymi sposobami. W przypadku tak prostego obwodu sprawdzi się metoda klasyczna, polegająca na bezpośrednim przekształcaniu równań różniczkowych.



Rysunek 7.3: Stan nieustalony wynikający z dołączenia szeregu  $RC$  do źródła napięcia stałego: (a) schemat obwodu, (b) schemat zastępczy na początku stanu nieustalonego i (c) schemat zastępczy po zakończeniu stanu nieustalonego

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa:

$$E = u_R(t) + u_C(t) = Ri_C(t) + u_C(t) = R \left[ C \frac{du_C(t)}{dt} \right] + u_C(t) \quad (7.1)$$

czyli:

$$\frac{E - u_C(t)}{RC} = \frac{du_C(t)}{dt}$$

lub inaczej:

$$\frac{du_C(t)}{E - u_C(t)} = \frac{1}{RC} dt \quad (7.2)$$

Całkując obydwie strony, uzyskujemy:

$$\int \frac{du_C(t)}{E - u_C(t)} = \int \frac{1}{RC} dt + K$$

czyli:

$$-\ln(E - u_C(t)) = \frac{t}{RC} + K$$

oraz

$$E - u_C(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} e^K$$

a ostatecznie:

$$u_C(t) = E - e^K e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Wzór można doprecyzować, uwzględniając przyjęte założenie, że  $u_C(t) = 0$  (zwarcie w miejscu  $C$ ) dla  $t = 0^+$ . Z takich warunków początkowych wynika, że  $e^K = E$ , czyli  $u_C(t) = E - Ee^{-\frac{1}{RC}t}$ . Podstawiając  $\lambda = RC$ , otrzymujemy finalną postać pierwszej z szukanych zależności:

$$u_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (7.3)$$

Znając napięcie na kondensatorze, można wyznaczyć ładunek zgromadzony w tym elemencie:

$$q_C(t) = Cu_C(t) = CE \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (7.4)$$

Na tej podstawie, wykorzystując definicję prądu, uzyskujemy wzór na natężenie:

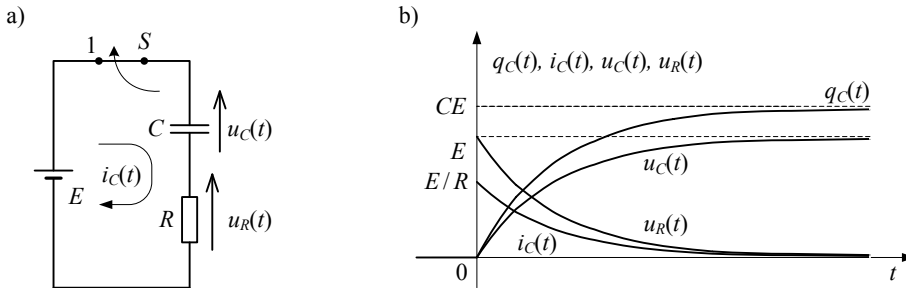
$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (7.5)$$



Równania opisują przebiegi, które zostały pokazane razem na rys. 7.4b. Z wykresu widać, że  $u_C(t)$  i  $q_C(t)$  rosną wykładniczo, dążąc asymptotycznie do wartości ustalonych, czyli odpowiednio  $E$  i  $CE$ , podczas gdy  $i_C(t)$  maleje do zera:

$$\left. \begin{array}{l} u_C(t) \rightarrow E \\ q_C(t) \rightarrow CE \\ i_C(t) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ dla } t \rightarrow \infty$$

Wyniki są zgodne z tym, co zostało powiedziane w podrozdziale 2.6 o działaniu kondensatora w obwodzie prądu stałego. Równanie (7.5) oraz rys. 7.4b potwierdzają, że w stanie ustalonym ( $t \rightarrow \infty$ ) prąd nie płynie w gałęzi z kondensatorem.



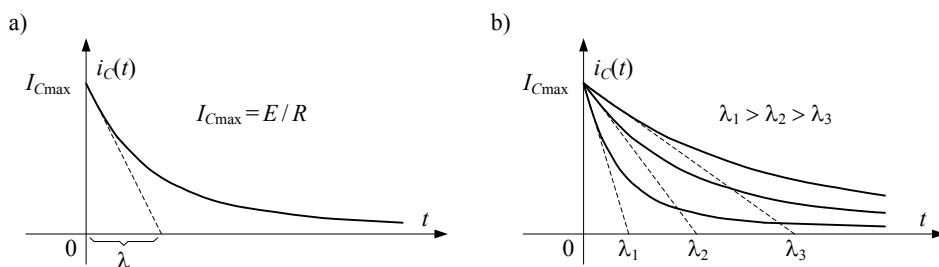
Rysunek 7.4: Stan nieustalony wynikający z dołączenia szeregu  $RC$  do źródła napięcia stałego: (a) schemat obwodu i (b) przebiegi wielkości elektrycznych

### 7.2.3 Stała czasowa

Czas i szybkość ładowania kondensatora zależą od jego pojemności oraz rezystancji, która ogranicza natężenie prądu ładowania. Zamiast podawać wartości tych dwóch parametrów, układ  $RC$  można scharakteryzować pod względem szybkości przemijania stanu nieustalonego jednym współczynnikiem,  $\lambda = RC$ , który jest nazywany stałą czasową i określony w sekundach.

Stała mówi, w jakim czasie prąd w gałęzi  $RC$  osiągnąłby natężenie odpowiadające stanowi ustalonemu, gdyby jego natężenie zmieniało się liniowo. Stałą czasową można określić geometrycznie, punktem przecięcia osi czasu i stycznej do krzywej natężenia prądu w punkcie przecięcia tej krzywej z osią natężenia. Zostało to objaśnione na rys. 7.5a.

Rysunek 7.5b ilustruje natomiast wpływ  $\lambda$  na kształt przebiegu prądu ładowania. Większa stała czasowa odpowiada przebiegowi opadającemu bardziej stromo.



Rysunek 7.5: Graficzna interpretacja stałej czasowej i wpływu jej zmian na przebieg prądu

Stałą czasową można wykorzystywać do estymowania czasu, po upływie którego można powiedzieć, że stan nieustalony się zakończył. W praktyce przyjmuje się, że stan ustalony zostaje osiągnięty po upływie  $t = 5\lambda \dots 10\lambda$  sekund.

Tak samo określona i interpretowana stała czasowa charakteryzuje przebieg rozładowania kondensatora, co zostanie pokazane w podrozdziale 7.2.4.

Stałą czasową można też charakteryzować układy  $RL$ , w których cewka jest elementem odpowiadającym za wystąpienie stanu nieustalonego, a jej indukcyjność wpływa na czas jego trwania. Stała jest inaczej definiowana,  $\lambda = L / R$ , ale jej jednostka i interpretacja pozostają takie same jak w przypadku kondensatora.

## 7.2.4 Rozładowanie kondensatora

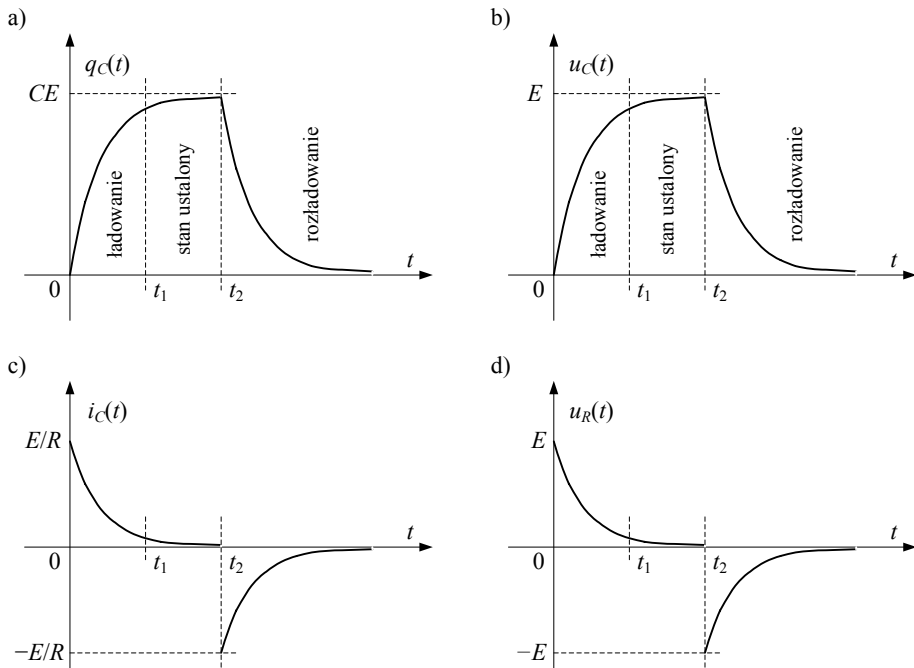
Załóżmy, że obwód z rys. 7.2b w przybliżeniu osiągnął stan ustalony w chwili  $t = t_1$  i pozostawał w tym stanie do momentu  $t = t_2 \gg t_1$ , w którym przełącznik  $S$  został przestawiony w pozycję 2. Topologia układu przyjmuje postać z rys. 7.2c, tak że w pełni naładowany kondensator zaczyna rozładowywać się, powodując przepływ prądu przez  $R$ .

Ładunek zakumulowany w  $C$  zmniejsza się od  $Q = CE$  do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ , zgodnie z następującym równaniem:

$$q_C(t) = CEe^{-\frac{t-t_2}{\lambda}} \quad (7.6)$$

Na podstawie tej zależności można wyprowadzić wzory na  $u_C(t)$ ,  $i_C(t)$  i  $u_R(t)$ , co jest przedmiotem problemu P7.2.

Odpowiednie przebiegi widnieją na rys. 7.6 jako fragmenty związane z rozładowaniem. Zostały one poprzedzone krzywymi związanymi ładowaniem i osiągnięciem stanu ustalonego, by umożliwić porównanie przebiegów.



Rysunek 7.6: Przebiegi związane z ładowaniem i rozładowaniem kondensatora

## 7.3 Szeregowe połączenie $RL$

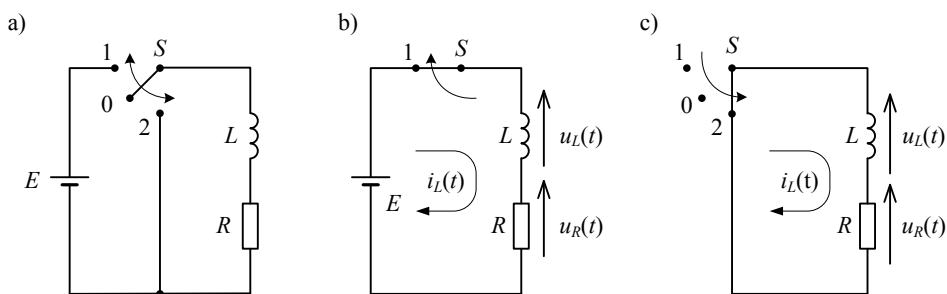
### 7.3.1 Dołączenie szeregowego połączenia $RL$ do źródła napięcia stałego

Stany nieustalone wynikające z działania cewki można rozpatrywać, wykorzystując układy z rys. 7.7. Schemat i sposób postępowania są bardzo podobne do tych, które dotyczyły stanów nieustalonych związanych z kondensatorem.

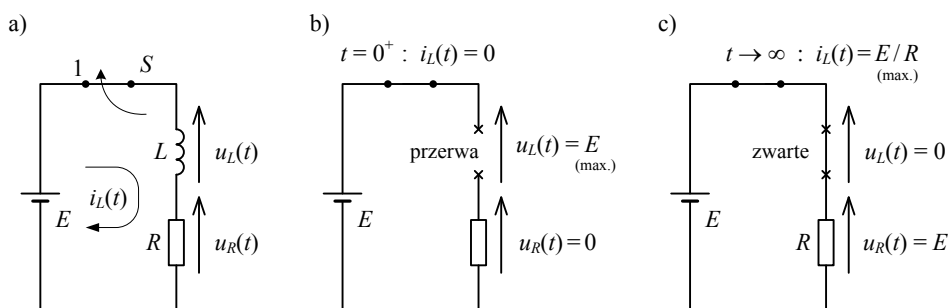
Założmy, że w układzie z rys. 7.7a przełącznik  $S$  pozostawał w pozycji 0 dla  $t < 0$ , a w chwili  $t = 0^+$  zostaje przełączony w pozycję 1, tak że zaczyna działać obwód o topologii pokazanej na rys. 7.7b.

Początkowe działanie obwodu można reprezentować układem zastępczym z rys. 7.8b. Gdy  $t = 0^+$ , cewka  $L$  silnie przeciwdziała przepływowi prądu, zachowując się tak, jakby w jej miejscu była przerwa, więc  $i_L(t) = 0$ , zaś  $u_L(t) = E = \max$ .

Z czasem reakcja indukcyjności słabnie i działanie obwodu przybliża układ zastępczy z rys. 7.8c. W stanie ustalonym  $L$  zachowuje się tak, jakby w jej miejscu było zwarcie, więc  $i_L(t) = E/R = \max$ , a  $u_L(t) = 0$ .



Rysunek 7.7: Stan nieustalony w szeregowym połączeniu  $RL$ : (a) układ eksperymentalny, (b) obwód dołączenia  $RL$  do źródła napięcia stałego i (c) zamknięty obwód  $RL$



Rysunek 7.8: Stan nieustalony wynikający z dołączenia  $RL$  do źródła napięcia stałego: (a) schemat obwodu, (b) schemat zastępczy na początku stanu nieustalonego i (c) schemat zastępczy po zakończeniu stanu nieustalonego

Natężenie prądu przejściowego zmienia się według zależności

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \quad (7.7)$$

a napięcie na cewce — według

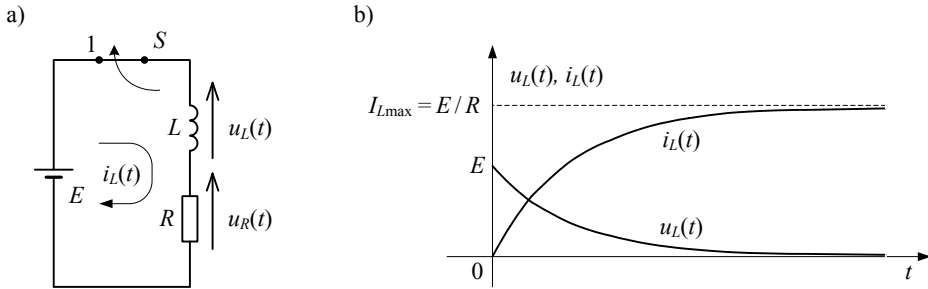
$$u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (7.8)$$

Odpowiednie przebiegi napięcia i natężenia prądu cewki widnieją na rys. 7.9b.

Wprowadzenie równań (7.7) i (7.8) jest przedmiotem problemu P7.9 i opiera się na wyrażeniu całkowym

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$$

które jest równoważne wzorowi (1.26).



Rysunek 7.9: Stan nieustalony wynikający z dołączenia  $RL$  do źródła napięcia stałego: (a) schemat obwodu i (b) przebiegi wielkości elektrycznych

### 7.3.2 Zamknięcie obwodu $RL$ przy niezerowym warunku początkowym

Załóżmy, że obwód z rys. 7.7b w przybliżeniu osiągnął stan ustalony w chwili  $t_1$ , a następnie pozostawał w tym stanie do momentu  $t_2 \gg t_1$ , w którym przełącznik  $S$  zostaje przestawiony z pozycji 1 na 2. Obwód przyjmuje postać z rys. 7.7c i wchodzi w stan nieustalony, gdyż cewka stara się podtrzymać napięcie, które występowało na niej wskutek działania źródła  $E$ , i powoduje przepływ przejściowego prądu przez opornik  $R$ .

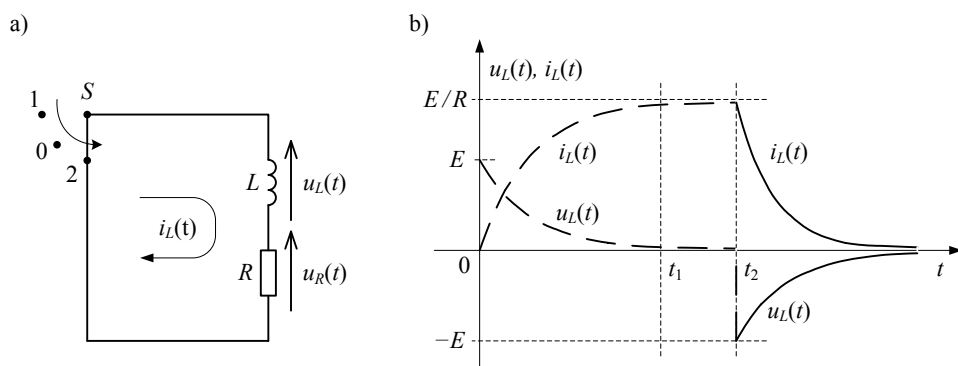
Natężenie prądu i napięcie na cewce zmieniają się w sposób pokazany na rys. 7.10b linią ciągłą. Chodzi o fragmenty odpowiadające przedziałowi czasu  $t > t_2$ , w którym przebiegi są określone wyrażeniami

$$i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t-t_2}{\lambda}} \tag{7.9}$$

oraz

$$u_L(t) = -E e^{-\frac{t-t_2}{\lambda}} \tag{7.10}$$

Znak minus poprzedzający  $E$  we wzorze (7.10) wskazuje, że przejściowe napięcie na cewce ma zwrot przeciwny do prądu.



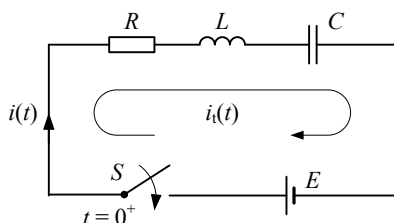
Rysunek 7.10: Stan nieustalony wynikający z zamknięcia szeregowego połączenia  $RL$  przy niezerowym warunku początkowym: (a) schemat obwodu i (b) przebiegi

## 7.4 Porównanie obwodów $RL$ i $RC$ pod względem stanów nieustalonych

Uzyskane rezultaty zostały zestawione w tabeli 7.1. Pozwala ona porównać przebiegi przejściowych składowych prądów i napięć w obwodzie o charakterze elektrostatycznym ( $RC$ ) z przebiegami w obwodzie o charakterze magnetycznym ( $RL$ ).

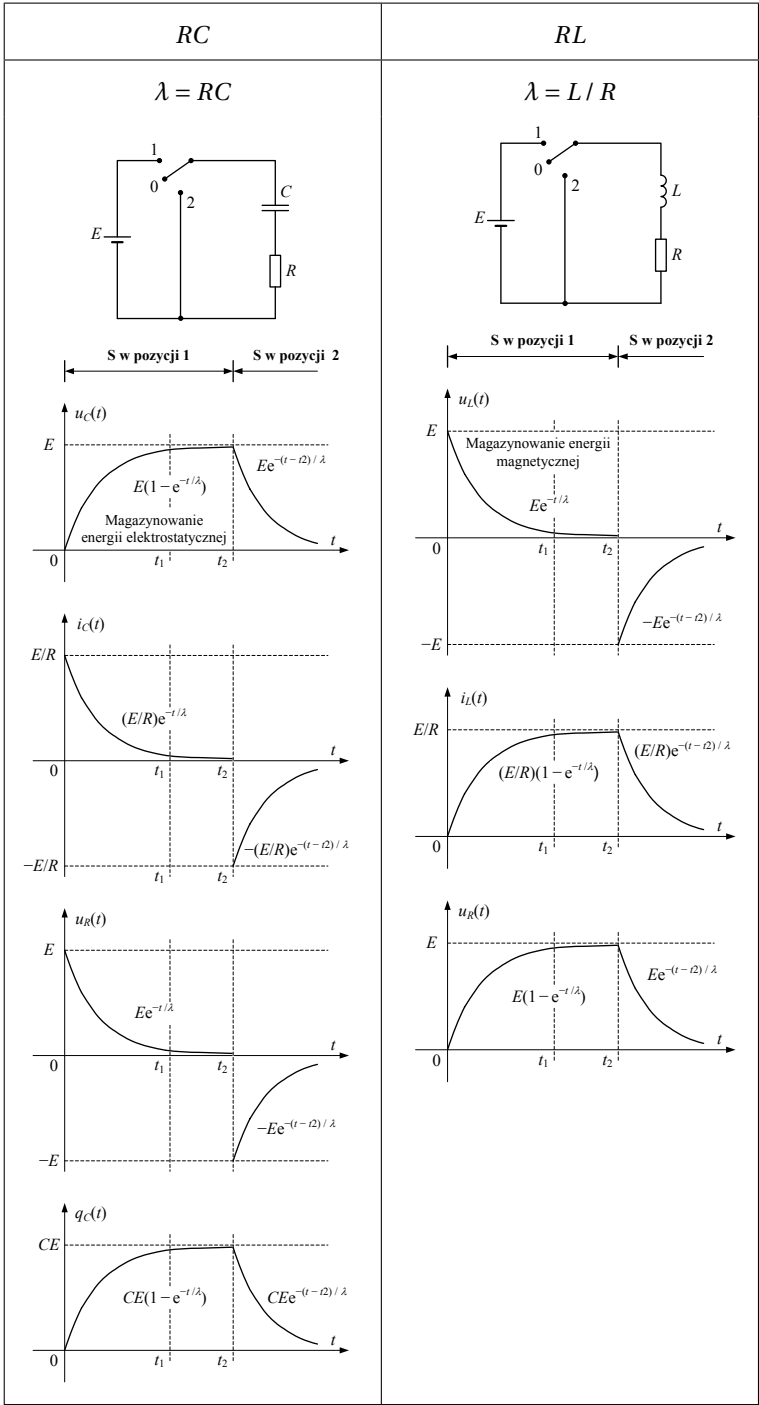
## 7.5 Stan nieustalony w szeregowym połączeniu $RLC$

Zmiana topologii obwodu, który zawiera indukcyjność  $L$  oraz pojemność  $C$ , powoduje wystąpienie stanu przejściowego o charakterze mieszanym: jednocześnie elektrostatycznym i magnetycznym. Przebieg zmian prądu, napięcia i ładunku zależy od wartości  $R$ ,  $L$  i  $C$ .



Rysunek 7.11: Stan nieustalony w szeregowym połączeniu  $RLC$

Tablica 7.1: Stany nieustalone w szeregowych połączeniach RC i RL



Wyjaśnijmy to na przykładzie obwodu  $RLC$  z rys. 7.11, zakładając, że włącznik  $S$  został zamknięty w chwili  $t = 0^+$ . Ustalona składowa prądu jest wtedy zerowa,  $i_s(t) = 0A$ , gdyż kondensator w obwodzie prądu stałego zachowuje się tak, jakby w jego miejscu była przerwa. Płynie jednak przejściowy prąd  $i_t(t)$  związany z ładowaniem kondensatora ze źródła  $E$ , czyli

$$i(t) = 0 + i_t(t) \quad (7.11)$$

zaś

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) \\ u_L(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \\ u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{q(t)}{C} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Zgodnie z napięciowym prawem Kirchhoffa suma napięć w obwodzie jest równa zeru<sup>1</sup>:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) - E = 0$$

czyli

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = E \quad (7.13)$$

Różniczkując to równanie względem  $t$ , uzyskuje się:

$$R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = 0$$

lub inaczej:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (7.14)$$

Wyrażenie to przedstawia sobą liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Ogólne rozwiązanie takiego równania ma postać:

$$i(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t} \quad (7.15)$$

gdzie  $K_1$  i  $K_2$  są stałymi, których wartości zależą od konkretnych warunków początkowych (brzegowych), zaś współczynniki  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  decydują o charakterze stanu nieustalonego i są określone wyrażeniami:

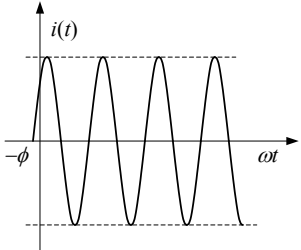
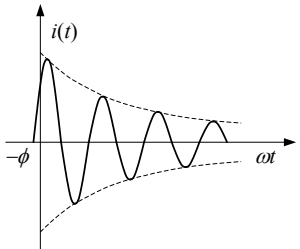
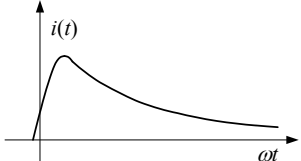
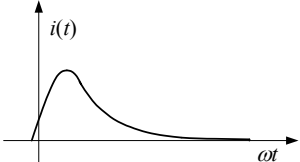
$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (7.16)$$

<sup>1</sup> Jeżeli  $E = 0$ , czyli nie ma źródła, z którego energia byłaby dostarczana do obwodu, to stan nieustalony nie wystąpi.



a więc zależą od parametrów elementów układu. Można rozróżnić cztery możliwe przypadki zachowania się obwodu, które zostały scharakteryzowane w tabeli 7.2.

Tablica 7.2: Możliwe warianty stanu nieustalonego w szeregowym połączeniu RLC

<p>Bezstratność (brak tłumienia)</p> <p><math>R = 0</math></p> $\alpha_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{-1}{LC}} = \mp j\omega C$ $i(t) = K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t} = I_m \sin(\omega t + \varphi)$	
<p>Niewielkie straty (przytłumianie)</p> $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\beta \pm j\omega$ $i(t) = I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$	
<p>Duże straty (tłumienie bez oscylacji)</p> $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ $\alpha_{1,2} = -\beta \pm \omega$ $i(t) = e^{-\beta t} (A \cosh \gamma t + B \sinh \gamma t)$	
<p>Tłumienie krytyczne</p> $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{R}{2L}$ $i(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\beta t}$	

## 7.6 Stany nieustalone w obwodach prądu zmiennego

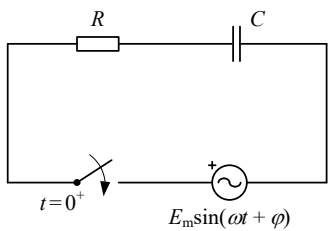
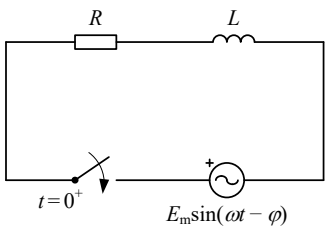
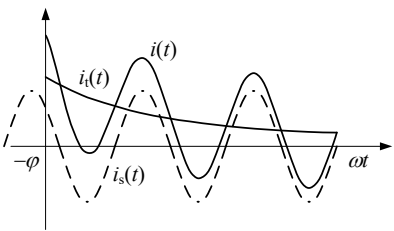
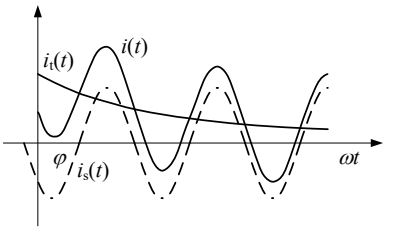
Reguły, które rządzą stanami nieustalonymi w obwodach prądu zmiennego, są takie same jak w przypadku obwodów prądu stałego. Chociaż ustalone składowe prądów i napięć są przebiegami sinusoidalnymi, składowe przejściowe pozostają takie same jak w układach rozpatrywanych do tej pory, gdyż nie zależą one od natury źródeł, które zasilają obwód.

Prąd w gałęzi obwodu zawsze można opisywać sumą

$$i(t) = i_t(t) + i_s(t) \tag{7.17}$$

czyli uważać go za złożenie składowej ustalonej,  $i_s(t)$ , którą wymuszają źródła, oraz przejściowej,  $i_t(t)$ , którą oblicza się tak jak w poprzednich podrozdziałach.

Tablica 7.3: Stany nieustalone w szeregowych połączeniach  $RC$  oraz  $RL$  i źródeł napięcia sinusoidalnego

$RC$	$RL$
 <p style="text-align: center;"><math>E_m \sin(\omega t + \varphi)</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>E_m \sin(\omega t - \varphi)</math></p>
	
$i_s(t) = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}} \sin(\omega t + \theta - \varphi)$ $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega CR}$ $i_t(t) = Ke^{-\frac{t}{\lambda}}$ $i(t) = Ke^{-\frac{t}{\lambda}} + \frac{E_m}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}} \sin(\omega t + \theta - \varphi)$	$i_s(t) = \frac{E_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin(\omega t + \theta - \varphi)$ $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$ $i_t(t) = Ke^{-\frac{t}{\lambda}}$ $i(t) = Ke^{-\frac{t}{\lambda}} + \frac{E_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}} \sin(\omega t + \theta - \varphi)$

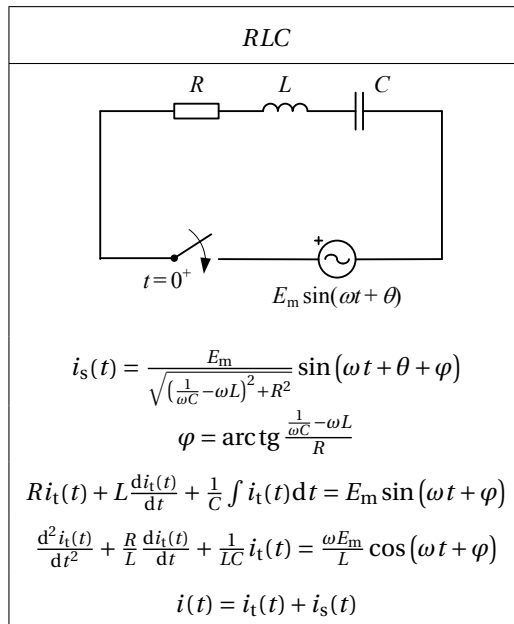
Ta reguła oraz rezultaty uzyskane dotychczas wystarczają do wyprowadzenia zależności, które opisują stany nieustalone w elementarnych obwodach prądu sinusoidalnego. Otrzymane w ten sposób wzory przedstawiono w tabeli 7.3 (połączenia  $RL$  i  $RC$ ) oraz w tabeli 7.4 (połączenie  $RLC$ ). W połączeniu szeregowym  $RLC$ , które jest zasilane napięciem sinusoidalnym (tabela 7.4), składowa przejściowa prądu  $i_t(t)$  jest określona wyrażeniem, które wynika z wnioskowania analogicznego do rozważań przeprowadzonych dla przypadku źródła napięcia stałego.

Zależnie od wartości  $R$ ,  $L$  i  $C$  oraz relacji pomiędzy nimi, składowa przejściowa przyjmuje jedną z czterech postaci:

1.  $R = 0 \quad \rightarrow \quad i_t(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$
2.  $\frac{R^2}{4I_m^2} < \frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad i_t(t) = I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$
3.  $\frac{R^2}{4I_m^2} > \frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad i_t(t) = e^{-\beta t} (A \cosh \gamma t + B \sinh \gamma t)$
4.  $\frac{R^2}{4I_m^2} = \frac{1}{LC} \quad \rightarrow \quad i_t(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\beta t}$

Czytelnikowi pozostawiamy naszkicowanie odpowiednich wykresów (zob. problem P7.13).

Tablica 7.4: Stan nieustalony w szeregowym połączeniu  $RLC$  i źródła napięcia sinusoidalnego



## 7.7 Przekształcenie Laplace'a jako podstawa operatorowej metody analizy obwodów

### 7.7.1 Wprowadzenie

W poprzednich podrozdziałach stany nieustalone analizowano tzw. metodą klasyczną, która wymaga rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych. W niniejszym podrozdziale przedstawiono podstawy alternatywnej metody operatorowej, która opiera się na przekształceniu (transformacji) Laplace'a<sup>2</sup>. Podejście polega na przekonwertowaniu wszystkich wielkości w badanym obwodzie z dziedziny czasu do dziedziny zespolonej częstotliwości, wyznaczeniu poszukiwanych prądów i napięć w nowej dziedzinie, a następnie przekształceniu wyników z powrotem w funkcje czasu.

Transformacja wymaga wysiłku, ale w zamian upraszcza analizę układów z niesinusoidalnymi sygnałami wejściowymi. Pozwala ona zastąpić równania różniczkowe równaniami algebraicznymi, które łatwiej rozwiązać, przy czym w naturalny sposób uwzględnione są warunki początkowe. Ponadto wynikiem wyprowadzeń jest pełna odpowiedź układu, która obejmuje składową spoczynkową i wymuszoną.

### 7.7.2 Unilateralna transformacja Laplace'a

Unilateralne (jednostronne) przekształcenie Laplace'a funkcji  $x(t)$  rzeczywistego parametru  $t$  jest zdefiniowane następująco:

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\tau} x(t)e^{-st} dt \quad (7.18)$$

gdzie

$$s = \sigma + j\omega \quad (7.19)$$

jest zmienną zespoloną.

W większości zastosowań  $t$  jest utożsamiane z czasem, a  $s$  — z częstotliwością. Jednostki tych wielkości należy dobrać tak, żeby wykładnik potęgi w  $e^{-st}$  był bezwymiarowy. Zatem przyjęcie sekundy za jednostkę  $t$  implikuje, że jednostką  $s$  jest  $[s^{-1}]$ , czyli [Hz]. Symbol  $0^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (0 - \varepsilon)$  reprezentuje chwilę poprzedzającą moment  $t = 0$ , który jest objęty całkowaniem, co pozwala analizować funkcje nieciągłe dla  $t = 0$ . Należy też zauważyć, że  $X(s)$  jest funkcją określoną na dwuwymiarowej płaszczyźnie zespolonej, tzw. płaszczyźnie  $s$ , chociaż  $x(t)$  jest funkcją jednej zmiennej,

<sup>2</sup> Pierre Simon Laplace (1749–1827) — francuski matematyk i astronom, transformację przedstawił w 1779.

W odróżnieniu od ogólniejszej transformacji bilateralnej (dwustronnej), w której przedział całkowania nie jest ograniczony, omawiane przekształcenie można stosować tylko do systemów przyczynowych, czyli takich, w których zmiany sygnałów wyjściowych (odpowiedź) nie mogą wyprzedzać w czasie odpowiednich zmian sygnałów wejściowych (wzbudzenia). Ponieważ takimi systemami są rzeczywiste układy elektryczne, to ograniczenie nie ma większego znaczenia w praktyce i określenie „unilateralna” jest zwykle pomijane.

Dla niektórych funkcji całka nie zbiega do skończonej wartości, czyli transformacja nie istnieje, zaś dla innych całka zbiega, czyli transformacja jest określona tylko dla pewnego zbioru wartości  $s$ , który nazywamy obszarem zbieżności (ang. *region of convergence*: ROC). Dlatego wyznaczenie przekształcenia Laplace'a obejmuje nie tylko analityczne wyrażenie  $X(s)$ , ale także ustalenie ograniczeń na  $s$ , przy których wyprowadzony wynik obowiązuje.

### Przykład 7.1

Obliczyć unilateralne transformaty Laplace'a przyczynowych funkcji  $x_1(t) = u(t)$ ,  $x_2(t) = e^{-at} u(t)$  oraz  $x_3(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$ , gdzie

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

jest skokiem jednostkowym.

### Rozwiązanie

W przypadku pierwszej funkcji

$$X_1(s) = \int_{-0}^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

przy czym całka oraz transformata są określone dla  $\operatorname{Re}\{s\} > 0$ , ponieważ takie ograniczenie zapewnia, że w górnej granicy całkowania  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ . W dolnej granicy nie ma problemu ze zbieżnością, bo zawsze  $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-st} = 1$ . Ustalone ograniczenie wyznacza zatem obszar zbieżności.

W drugim przypadku

$$X_2(s) = \int_{-0}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

z obszarem zbieżności  $\operatorname{Re}\{s\} > -\operatorname{Re}\{a\}$ , bo wtedy  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s+a)t} = 0$

Trzecia funkcja sprawia więcej trudności, bo trzeba rozwinąć sinus w kompozycję zespolonych funkcji wykładniczych:

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Wtedy

$$X_3(s) = \frac{1}{2j} \int_0^- \infty (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^- \infty e^{-(s-j\omega_0)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^- \infty e^{-(s+j\omega_0)t} dt$$

i na podstawie wyniku uzyskanego dla funkcji wykładniczej  $x_2(t)$

$$X_3(s) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

pod warunkiem, że  $\text{Re}\{s \pm j\omega_0\} > 0$ , czyli  $\text{Re}\{s\} > 0$ .

□

Mnożąc funkcję poddawaną przekształceniu przez skok jednostkowy można zapewnić, że  $x(t) = 0$  dla  $t < 0$ , czyli transformacja bilateralna jest równoważna unilateralnej.

Dla niektórych funkcji transformata bilateralna jest określona tym samym wzorem co unilateralna, ale różni się obszarem zbieżności.

### Przykład 7.2

Określić i porównać bilateralne transformaty Laplace'a następujących funkcji:  $x_1(t) = e^{-at} u(t)$  oraz  $x_2(t) = -e^{-at} u(-t)$ , gdzie  $a$  jest liczbą rzeczywistą.

### Rozwiązanie

Na podstawie poprzedniego przykładu

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

dla  $\text{Re}\{s\} > -a$ .

Transformatę drugiej funkcji opisuje ten sam wzór:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a}$$

ale obszar zbieżności jest inny, mianowicie  $\text{Re}\{s\} < -a$ .

□

Nie jest łatwo obliczyć transformatę, a szczególnie odwrócić przekształcenie Laplace'a, na podstawie definicji, ponieważ trzeba opanować analizę zmiennej zespolonej. Jednak w praktyce zwykle można wykorzystać gotowe wyniki z tablic matematycznych, które przedstawiają wzory podstawowych funkcji i odpowiednich transformat. W tabeli 7.5 zamieszczono przypadki najbardziej przydatne w naszych rozważaniach.

Jeżeli rozpatrywana funkcja jest złożona i nie można bezpośrednio wykorzystać stabilizowanych wyników, to należy zastanowić się, czy któryś z nich nie staje się użyteczny po połączeniu z pewną właściwością transformacji. Aby wyznaczyć przekształcenie odwrotne, często trzeba rozkładać skomplikowane wyrażenie, które przedstawia transformację, na sumę prostszych wyrażeń, np. zawierających dwumiany w mianownikach.

Tablica 7.5: Transformaty Laplace'a wybranych funkcji

Lp.	Funkcja	Transformata Laplace'a	Obszar zbieżności
1	$x(t) = \delta(t)$ impuls jednostkowy	$X(s) = 1$	cała płaszczyzna $s$
2	$(t) = u(t)$ skok jednostkowy	$X(s) = \frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
3	$x(t) = e^{-at}$	$X(s) = \frac{1}{a+s}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
4	$x(t) = t$	$X(s) = \frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
5	$x(t) = te^{-at}$	$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
6	$x(t) = \sin(\omega_0 t + \phi)$	$X(s) = \frac{s \sin \phi + \omega_0 \cos \phi}{\omega_0^2 + s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
7	$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$	$X(s) = \frac{s \cos \phi - \omega_0 \sin \phi}{\omega_0^2 + s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
8	$x(t) = e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$X(s) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + (a+s)^2}$	$\text{Re}(s) > -\text{Re}(a)$
9	$x(t) = \sinh(\omega_0 t)$	$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
10	$x(t) = \cosh(\omega_0 t)$	$X(s) = \frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$	$\text{Re}(s) > 0$

### 7.7.3 Właściwości przekształcenia Laplace'a

W obszarze zbieżności transformacja Laplace'a jest przekształceniem jednoznacznym, bo funkcję czasu odpowiadającą zadanej transformacji można odtworzyć, wykorzystując wzór na odwrotne przekształcenie Laplace'a:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} dt \quad (7.20)$$

gdzie  $c$  jest dowolnym punktem w obszarze zbieżności. Funkcja i jej transformata stanowią zatem alternatywne, ale w pełni równoważne reprezentacje tej samej informacji:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad (7.21)$$

tworząc tzw. parę Laplace'a.

Transformacja Laplace'a jest przekształceniem liniowym — jeżeli

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$$

zaś

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$$

to

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s) \quad (7.22)$$

Po przekształceniu całkowanie i różniczkowanie funkcji zostają zastąpione odpowiednio dzieleniem i mnożeniem przez  $s$ :

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s} \quad (7.23)$$

a

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) \quad (7.24)$$

Przesunięcie w jednej dziedzinie odpowiada mnożeniu w drugiej dziedzinie:

$$x(t - \Delta t) \xleftrightarrow{L} e^{-s\Delta t} X(s) \quad (7.25)$$

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0) \quad (7.26)$$

Jeżeli przebieg jest okresowy:

$$x(t) = x_T(t) + x_T(t - T) + x_T(t - 2T) + \dots \quad (7.27)$$

gdzie  $x_T(t) = 0$  dla  $0 < t < T$ , to

$$X(s) = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (7.28)$$

czyli wyznaczenie jego przekształcenia Laplace'a sprowadza się do ustalenia transformaty funkcji opisującej pojedynczy okres.

Transformację Laplace'a charakteryzuje wiele innych ciekawych właściwości, które opisano w książkach [12] i [18]. Przedstawione wyżej fakty wystarczają jednak do zaprezentowania jej praktycznej użyteczności w analizie stanów nieustalonych.



### 7.7.4 Wykorzystanie przekształcenia Laplace'a do analizowania obwodów RLC

Transformacja Laplace'a jest powszechnie wykorzystywana do analizowania obwodów z elementami RLC, ponieważ stosując ją, można uniknąć rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych. Przekształcając wszystkie wielkości elektryczne do dziedzin  $s$ , uzyskuje się reprezentację układu, która jest znacznie przystępniejsza od równań w dziedzinie czasu. W szczególności pochodne przechodzą w wyrażenia algebraiczne, co widać na przykładzie transformat napięcia i prądu cewki:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (7.29)$$

$$i_L(t) \xleftrightarrow{L} I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-) \quad (7.30)$$

oraz kondensatora:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^-) \quad (7.31)$$

$$u_C(t) \xleftrightarrow{L} U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_C(0^-) \quad (7.32)$$

które łatwo wyznaczyć na podstawie (7.24). Korzystne jest także to, że transformaty uwzględniają warunki początkowe.

W przypadku rezystancji nie ma dużej różnicy między opisami elementu w dwóch dziedzinach

$$u(t) = Ri(t) \xleftrightarrow{L} U(s) = RI(s) \quad (7.33)$$

co jest swego rodzaju dowodem, że przekształcenie nie komplikuje tego, co jest proste już w dziedzinie czasu.

W dziedzinie  $s$  można reprezentować także impedancję, która jest definiowana jako iloraz transformaty napięcia i transformaty prądu przy zerowych warunkach początkowych. W przypadku cewki

$$Z_L(s) = sL \quad (7.34)$$

dla kondensatora

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (7.35)$$

a w przypadku rezystora

$$Z_R(s) = R \quad (7.36)$$

Rozpatrując transformaty zamiast zmian wielkości elektrycznych w czasie, łatwiej prowadzić obliczenia, ale można wyznaczyć tylko transformatę poszukiwanej wielkości. Dlatego finalnym krokiem w analizie obwodu z użyciem transformacji Laplace'a jest przekształcenie wyniku z dziedziny  $s$  w funkcję czasu.

### Przykład 7.3

Wykorzystując transformację Laplace'a, wyznaczyć przebieg prądu, który płynie w szeregowym połączeniu  $RC$  po dołączeniu do jego zacisków źródła napięcia stałego  $E$ . Następnie porównać wyprowadzenia z zamieszczonymi w podrozdziale 7.2.

### Rozwiązanie

Dołączenie źródła powoduje skokową, z 0 na  $E$ , zmianę napięcia  $u_{RC}(t)$  na zaciskach połączenia  $RC$ , czyli:

$$u_{RC}(t) = Eu(t) \quad \xleftrightarrow{L} \quad U_{RC}(s) = \frac{E}{s}$$

Ponieważ

$$U_{RC}(s) = Z(s)I_C(s)$$

gdzie

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC}$$

to

$$I_C(s) = \frac{U_{RC}(s)}{Z(s)} = \frac{E}{s(R + \frac{1}{sC})} = \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Aby uzyskać wyrażenie na zmiany natężenia prądu w czasie, nie trzeba obliczać transformaty odwrotnej na podstawie definicji. Wystarczy zauważyć, że prawy czynnik końcowego iloczynu pasuje do transformaty z wiersza 3 tabeli 7.5. Odpowiednią funkcję można wykorzystać jako podstawę ostatecznego wyniku, tylko trzeba ją nieznacznie skorygować:

$$i_C(t) = L^{-1}\{I_C(s)\} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

□

Analizując obwody, zwykle nie trzeba zastanawiać się, czy funkcja posiada transformatę albo czy obszar zbieżności jest ograniczony. W typowych układach wielkości elektryczne dają się przekształcać z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości  $s$  i z powrotem. Niemniej jednak obliczenie transformacji odwrotnej, której wykonalność jest pewna, może być trudne i wymagać pomysłowości oraz spostrzegawczości.

**Przykład 7.4**

Wykorzystując transformację Laplace'a, wyznaczyć prąd, który płynie w szeregowym połączeniu  $RLC$  po domknięciu obwodu źródłem napięcia stałego  $E$ . Porównać wyprowadzenia z zamieszczonymi w podrozdziale 7.5.

**Rozwiązanie**

Postępujemy tak jak w przykładzie 7.3, ale tym razem

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

a

$$I(s) = \frac{E}{s(R + sL + \frac{1}{sC})} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Transformacja odwrotna nie jest jednoznacznie określona. Konieczne jest rozpatrzenie trzech przypadków, którym odpowiadają różne wyniki końcowe:

1. Jeżeli

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

to

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s + \alpha)^2 + \omega_r^2$$

gdzie  $\alpha = \frac{R}{2L}$  i  $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$ . Wtedy

$$I(s) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega_r^2}$$

i wykorzystując wiersz 8 tabeli 7.5, otrzymujemy:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_r L} e^{-\alpha t} \sin \omega_r t$$

2. Jeżeli

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

to

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s + \alpha)^2$$

czyli

$$I(s) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

i możemy bezpośrednio wykorzystać wiersz 5 tabeli 7.5, uzyskując:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}$$

3. Jeżeli

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$$

to

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = (s + \alpha)^2 - \omega_l^2$$

gdzie  $\omega_l = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}}$ .

Wtedy

$$I(s) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{(s + \alpha)^2 - \omega_l^2}$$

i wykorzystując wiersz 9 tabeli 7.5 oraz wzór (7.11) na przesunięcie w dziedzinie  $s$ , otrzymujemy:

$$i(t) = \frac{E}{\omega_l L} e^{-\alpha t} \sinh \omega_l t$$

□

## 7.8 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 7.8.1 Pytania

#### Pytanie Q7.1

Wyjaśnić, dlaczego stan nieustalony nie występuje w obwodzie czysto rezystancyjnym?

#### Wskazówka

Oporniki nie mogą magazynować energii — jest ona w nich tracona. Zatem w obwodzie rezystancyjnym nie ma elementu, który pełniłby funkcję źródła generującego składowe przejściowe prądów i napięć.

---

**Pytanie Q7.2**

Wykazać, że wzór

$$u_R(t) = Ee^{-\frac{t}{\lambda}}$$

opisuje składową przejściową napięcia na oporniku w obwodzie z rys. 7.4a.

**Wskazówka**Ponieważ kondensator i rezystor są połączone szeregowo, płynie przez nie ten sam prąd  $i_C(t)$ . Wiedząc to, wykorzystujemy prawo Ohma:  $u_R(t) = Ri_C(t)$ .

---

**7.8.2 Problemy rozwiązane****Problem P7.1**Wykazać, że  $u_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}})$  w obwodzie z rys. 7.8a.**Wskazówka**Pamiętając, że  $u_R(t) = Ri_L(t)$ , należy wykorzystać rozwiązanie problemu P7.9.

---

**Problem P7.2**Wprowadzić wyrażenia, które opisują  $u_C(t)$ ,  $i_C(t)$  i  $u_R(t)$  w obwodzie z rys. 7.2c.**Rozwiązanie**

Należy wykorzystać równania

$$u_C(t) = \frac{q_C(t)}{C}$$

oraz

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt}$$

do powiązania ładunku określonego równaniem (7.6) z napięciem i prądem kondensatora. Napięcie na rezystorze można natomiast określić na podstawie prawa Ohma, czyli  $u_R(t) = Ri_C(t)$ . W ten sposób uzyskujemy następujące tożsamości:

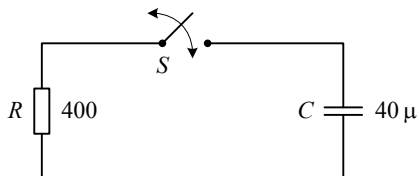
$$u_C(t) = \frac{q_C(t)}{C} = Ee^{-(t-t_2)/\lambda}$$

$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R}e^{-(t-t_2)/\lambda}$$

$$u_R(t) = Ri_C(t) = -Ee^{-(t-t_2)/\lambda}$$

**Problem P7.3**

W obwodzie z rys. 7.12 wyłącznik  $S$  został zamknięty w chwili  $t = 0^+$ . Naskicować przebiegi prądu i ładunku, wiedząc, że  $u_C(t) = 100\text{V}$  dla  $t < 0$ .



Rysunek 7.12: Schemat do problemu P7.3

**Rozwiązanie**

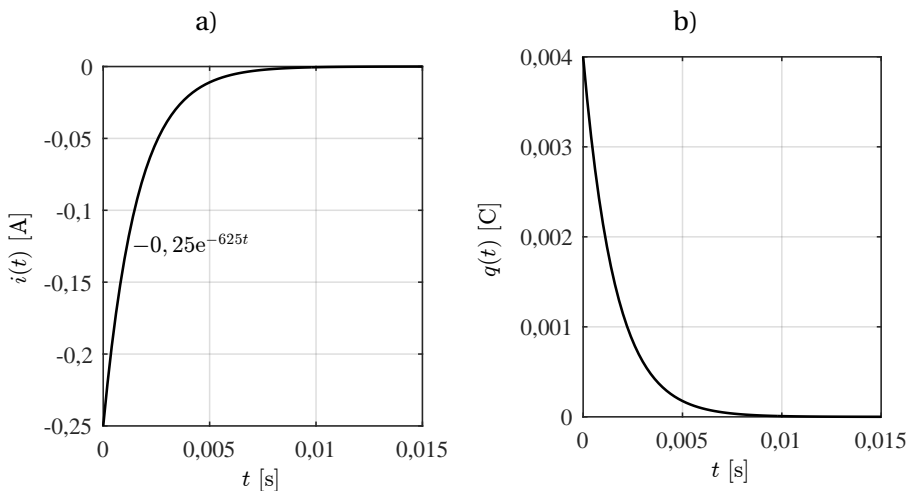
Składową przejściową prądu, która jest związana z rozładowaniem kondensatora, opisuje wzór:

$$i(t) = -\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = -0,25e^{-625t} \text{ [A]}$$

zaś ładunek wyznaczamy z zależności:

$$q(t) = Cu(t) = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 100e^{-62,5t} = 0,004e^{-62,5t} \text{ [C]}$$

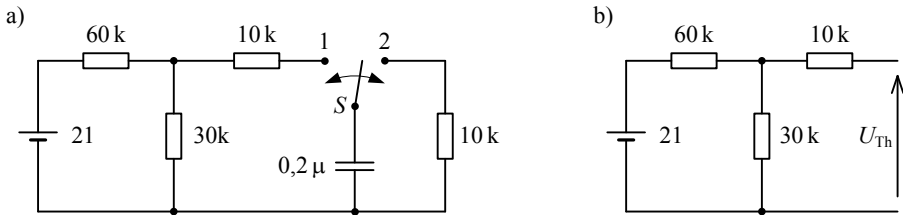
Uzyskane wzory opisują wykresy pokazane na rys. 7.13.



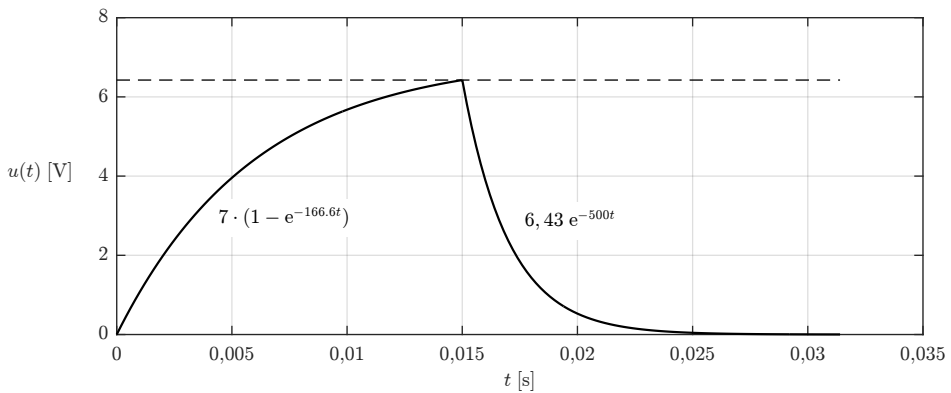
Rysunek 7.13: Przebiegi do problemu P7.3

**Problem P7.4**

W obwodzie z rys. 7.14a przełącznik S został przestawiony w pozycję 1, gdy  $t = 0^+$ , a następnie, gdy  $t = 15 \text{ ms}$ , w pozycję 2. Wyznaczyć  $u_C(t)$  dla  $0^+ < t < \pi$  i zilustrować wynik wykresem.



Rysunek 7.14: Schematy do problemu P7.4



Rysunek 7.15: Przebieg do problemu P7.4

**Rozwiązanie**

Podczas ładowania kondensatora napięcie na nim jest określone wyrażeniem:

$$u_C(t) = U_{Th} \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_{Th}C}} \right)$$

gdzie:

$$U_{Th} = \frac{21}{90 \cdot 10^3} \cdot 30 \cdot 10^3 = 7 \text{ [V]}$$

$$R_{Th} = \frac{60 \cdot 30}{90} + 10 = 30 \text{ [k}\Omega\text{]}$$

Wielkości te opisują źródło zastępcze, które jest równoważne części obwodu pokazanej na rys. 7.14b. Rezystancja tego źródła określa stałą czasową obwodu ładowania kondensatora:

$$\frac{1}{R_{Th}C} = -166,7 \text{ s}$$

Wobec tego podczas ładowania kondensatora (przełącznik  $S$  w pozycji 1)

$$u_C(t) = 7(1 - e^{-166,6t}) \text{ V}$$

po 15 ms ładowania

$$u_C(0,015) = 6,43 \text{ V}$$

a podczas rozładowania kondensatora (przełącznik  $S$  w pozycji 2)

$$u_C(t) = 6,43e^{-500t} \text{ V}$$

Odpowiedni przebieg pokazano na rys. 7.15.

### Problem P7.5

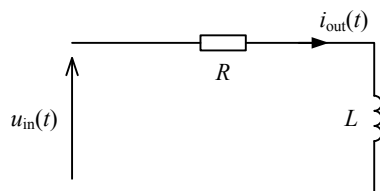
Określić prąd, ładunek i napięcie kondensatora w obwodzie z rys. 7.2a. Należy przyjąć, że przełącznik  $S$  był w pozycji 1 od  $0^+$  do  $t_1 = 10 \text{ ms}$ , a potem został przestawiony w pozycję 2. Dane są:  $R = 30 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,5 \mu\text{F}$  i  $E = 6 \text{ V}$ .

### Wskazówka

Rozwiązanie sprowadza się do podstawienia podanych wartości do równań, które opisują przebiegi związane z ładowaniem i rozładowaniem kondensatora, wyprowadzonych w podrozdziale 7.2.

### Problem P7.6

Naszkicować przebieg prądu  $i_{out}(t)$  w obwodzie z rys. 7.16 dla każdego z przebiegów napięcia wejściowego  $u_{in}(t)$ , które pokazano na rys. 7.17.

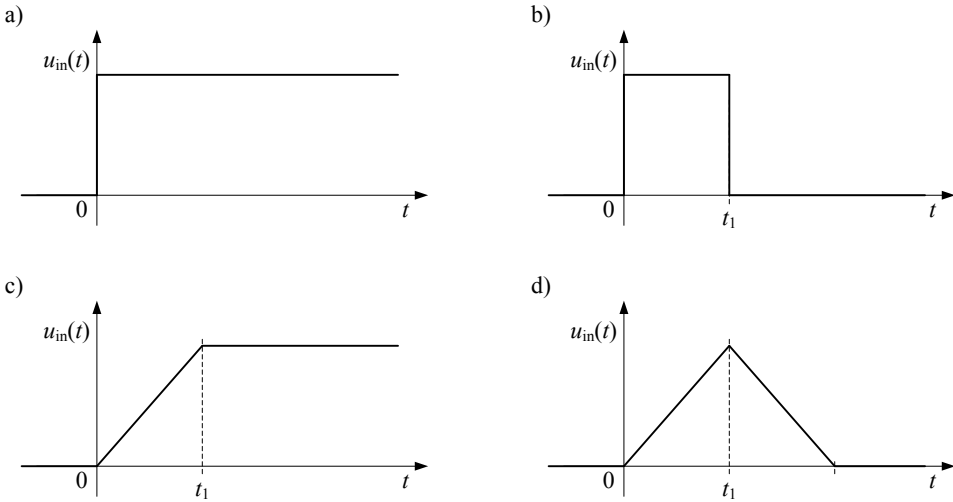


Rysunek 7.16: Schemat do problemu P7.6

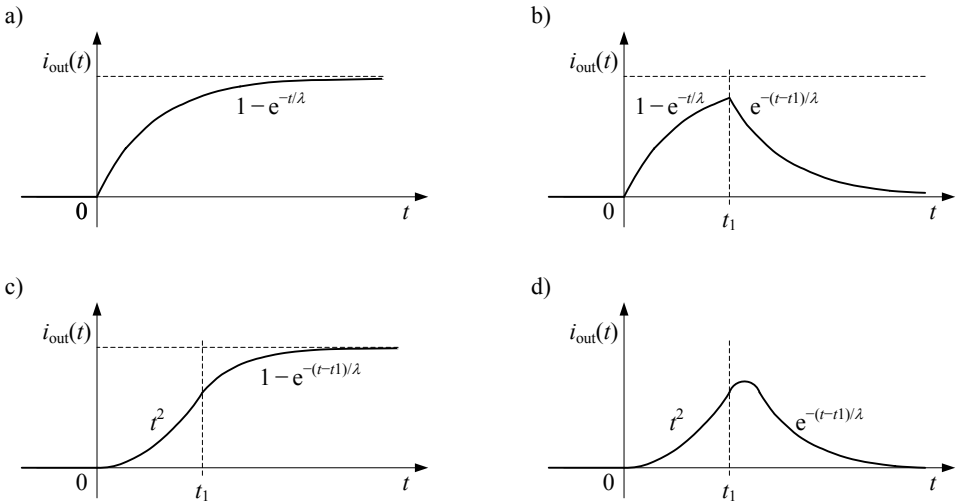


**Rozwiązanie**

Odpowiednie przebiegi prądu wyjściowego pokazano na rys. 7.18.



Rysunek 7.17: Przebiegi napięcia wejściowego do problemu P7.6



Rysunek 7.18: Przebiegi natężenia prądu do problemu P7.6

**Problem P7.7**

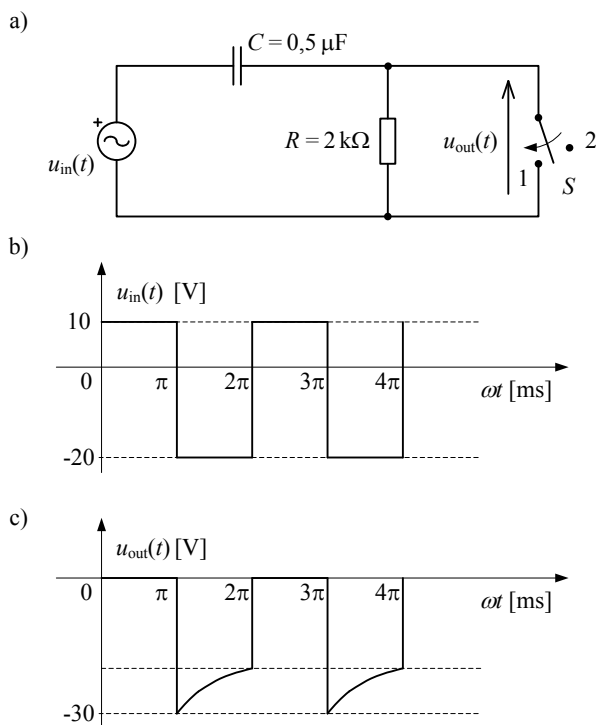
Wyprowadzić wzory (7.9) i (7.10).

**Wskazówka**

Należy przyjąć, że  $\lambda = t - t_2$ , co umożliwi zastosowanie procedury podobnej do tej, która posłużyła do rozwiązania problemu P7.9.

**Problem P7.8**

W obwodzie z rys. 7.19a wyłącznik  $S$  jest na przemian zamykany (pozycja 1) i otwierany (pozycja 2) w chwilach, dla których  $\omega t$  jest całkowitą wielokrotnością  $\pi$ , poczynając od  $\omega t = 0^+$ . Napięcie wejściowe ma przebieg pokazany na rys. 7.19b. Zapisać wzór na napięcie wyjściowe  $u_{\text{out}}(t)$  i naszkicować odpowiedni przebieg dla  $0^+ < \omega t < 4\pi$ .



Rysunek 7.19: Przebiegi do problemu P7.8

**Rozwiązanie**

Napięcie wyjściowe ma przebieg pokazany na rys. 7.19c. Wyprowadzenie odpowiedniego wzoru pozostawiamy czytelnikowi.

**Problem P7.9**

Wyprowadzić wzory, które określają przebiegi  $i_L(t)$  i  $u_L(t)$  w obwodzie z rys. 7.8a.

**Rozwiązanie**

Napięciowe prawo Kirchhoffa pozwala zapisać bilans napięć:

$$Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = E$$

Równanie to rozwiązujemy względem prądu  $i_L(t)$ , wzorując się na rozwiązaniu równania (7.2) względem  $u_C(t)$ . Otrzymujemy:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = I_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

gdzie  $I_{\max} = E/R$  jest maksymalnym możliwym natężeniem prądu, a  $\lambda = L/R$  jest stałą czasową obwodu. Należy zauważyć, że  $i_L(t) = 0$ , gdy  $t = 0$ , a  $i_L(t) \rightarrow E/R$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Zatem

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = Ee^{-\frac{t}{\lambda}}$$

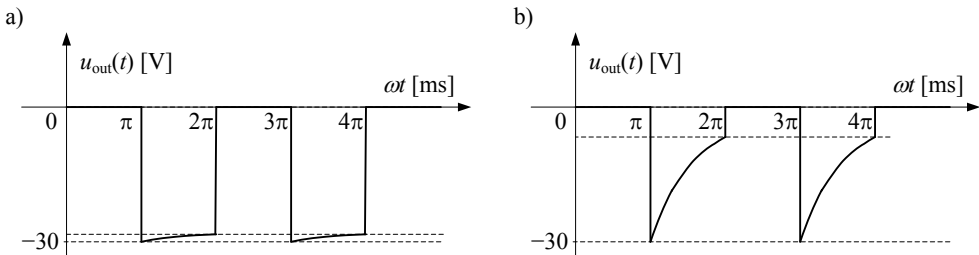
czyli  $u_L(t) = E$ , gdy  $t = 0$ , zaś  $u_L(t) \rightarrow 0$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ .

**Problem P7.10**

Powtórnie wykonać zadanie z problemu P7.8 po zmianie parametrów elementów na (a)  $R = 200 \text{ k}\Omega$  i  $C = 10 \mu\text{F}$  oraz (b)  $R = 2 \text{ k}\Omega$  i  $C = 10 \text{ pF}$ .

**Rozwiązanie**

Odpowiednie przebiegi pokazano na rys. 7.20.



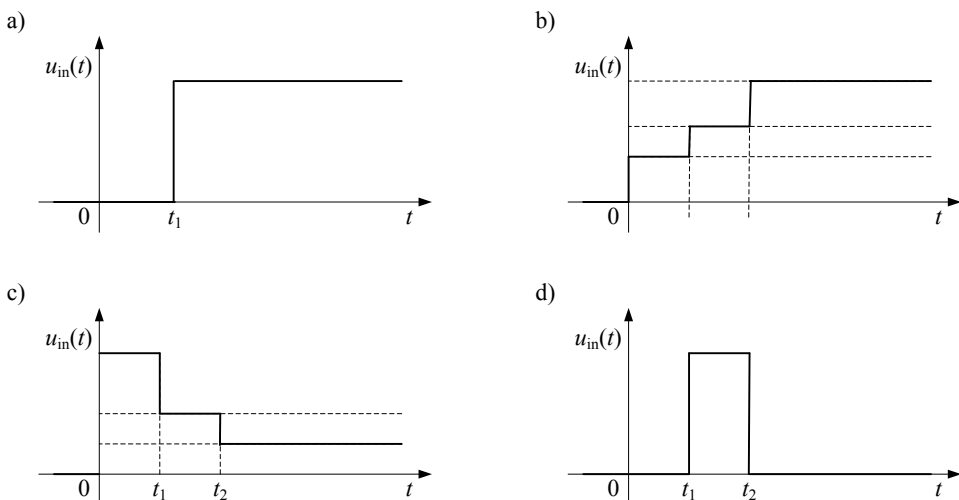
Rysunek 7.20: Przebiegi do problemu P7.10

**Problem P7.11**

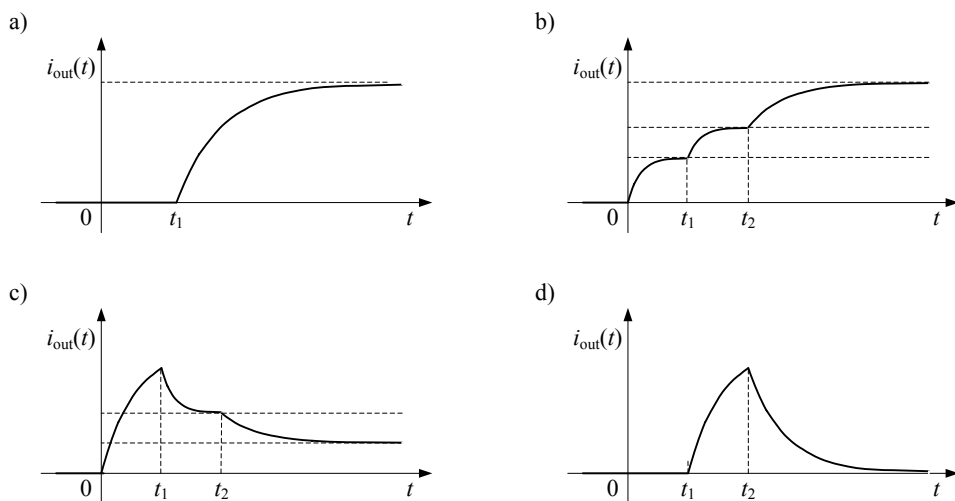
Naszkicować przebieg prądu  $i_{\text{out}}(t)$  w obwodzie z rys. 7.16 dla każdego z przebiegów napięcia wejściowego  $u_{\text{in}}(t)$ , które pokazano na rys. 7.21. Następnie porównać przebiegi z rozpatrywanymi w problemie P7.6.

**Rozwiązanie**

Odpowiednie przebiegi prądu wyjściowego pokazano na rys. 7.22.



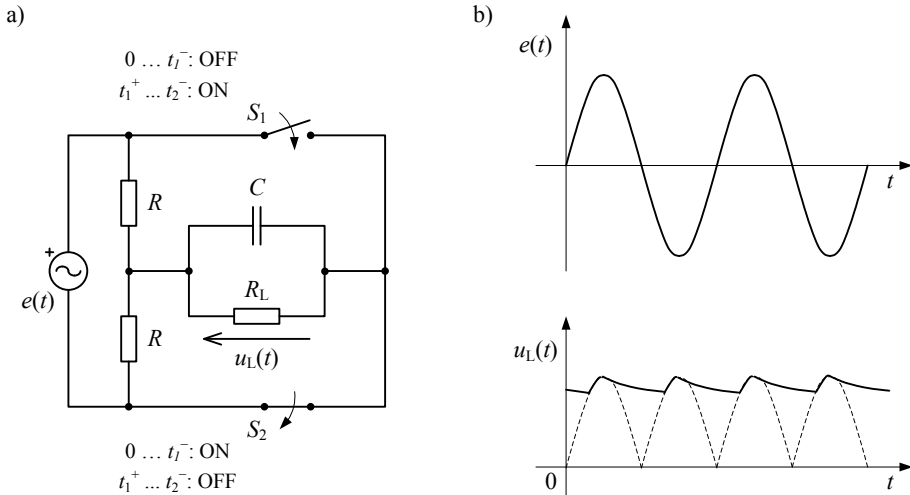
Rysunek 7.21: Przebiegi napięcia wejściowego do problemu P7.11



Rysunek 7.22: Przebiegi natężenia prądu do problemu P7.11

**Problem P7.12**

W obwodzie, którego schemat widnieje na rys. 7.23a, wyłączniki  $S_1$  i  $S_2$  są na przemian zamykane (ON) i otwierane (OFF). Narysować przebieg napięcia wyjściowego  $u_L(t)$ , gdy napięcie wejściowe  $e(t) = E_m \sin \omega t V$ .



Rysunek 7.23: Schemat i przebiegi do problemu P7.12

**Rozwiązanie**

Przebiegi napięcia wejściowego i wyjściowego pokazano na rys. 7.23b.

**Problem P7.13**

Naszkicować przebiegi składowej przejściowej prądu  $i_t(t)$  opisane wzorami, które podano jako dopełnienie tabeli 7.4.

**Wskazówka**

Można wspomóc się podręcznikiem do analizy matematycznej lub wykorzystać wykresy podane w tabeli 7.2 dla analogicznego obwodu prądu stałego.

**Problem P7.14**

Wykorzystując transformację Laplace'a, wyznaczyć prąd płynący w szeregowym połączeniu  $RL$  po dołączeniu źródła napięcia stałego  $E$  do wolnych zacisków elementów. Wynik i sposób jego uzyskania porównać z wyprowadzeniami w przykładzie 7.3.

**Rozwiązanie**

Postępujemy analogicznie jak w przykładzie 7.3, ale tym razem

$$Z(s) = R + sL$$

a więc

$$I_L(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{E}{s(R + sL)} = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

Aby przekształcić to wyrażenie do dziedziny czasu, należy wykorzystać pozycję 3 tabeli 7.5 oraz wzór (7.23) na transformatę całki. Szukane rozwiązanie ma postać:

$$i_L(t) = L^{-1}\{I_L(s)\} = \frac{E}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}t} dt = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

**Problem P7.15**

Obliczyć unilateralne transformaty Laplace'a funkcji  $x_1(t) = tu(t)$  oraz  $x_2(t) = \sinh(\omega_0 t) u(t)$ .

**Rozwiązanie**

Transformata pierwszej funkcji jest określona następująco:

$$X_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} tu(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left. \frac{te^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \left. \frac{te^{-st}}{(-s)^2} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

z obszarem zbieżności  $\text{Re}\{s\} > 0$ .

W drugim przypadku wykorzystujemy tożsamość

$$\sinh \omega_0 = \frac{e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}}{2}$$

i postępujemy podobnie jak w przykładzie 7.1, w odniesieniu do funkcji sinus. Dekomponujemy całkę

$$X_2(s) = \frac{1}{2} \int_{0^-}^{\infty} (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s-\omega_0)t} dt - \frac{1}{2} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+\omega_0)t} dt$$

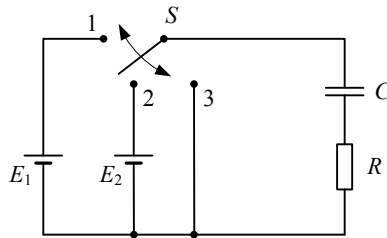
i wykorzystujemy wzór na transformatę funkcji wykładniczej:

$$X_2(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - \omega_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + \omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$$

### 7.8.3 Quiz

#### Quiz 7.1

W obwodzie pokazanym na rys. 7.24  $E_2 > E_1$ ,  $R$  jest rzędu  $k\Omega$ , a  $C$  — rzędu  $\mu F$ . W chwili  $t = 0^+$  przełącznik  $S$  przestawiono w pozycję 1. Pozostawał on w niej przez 10 ms, aż przestawiono go w pozycję 2. Po kolejnych 10 ms przełącznik został przestawiony w pozycję 3, a po godzinie powrócił do pozycji 1. Cały ten cykl wielokrotnie powtarzano. Naszkicować przebiegi prądu i napięć w gałęzi  $RC$  oraz ładunku w kondensatorze.



Rysunek 7.24: Schemat do quizu 7.1

---

## Rozdział 8

# Diody półprzewodnikowe

### Wprowadzenie

Wynalezienie elementów półprzewodnikowych oraz opracowanie układów scalonych są uważane za milowe kroki w rozwoju informatyki, techniki cyfrowej i elektroniki. Nowe komponenty wyparły układy elektromechaniczne i lampowe z większości zastosowań, pozwalając zminiaturyzować urządzenia, zmniejszyć zużycie energii, poprawić niezawodność i szybkość działania, a także uzyskać większą funkcjonalność. Niniejszy rozdział przedstawia diodę, czyli najprostszy element półprzewodnikowy<sup>1</sup>, który znajduje wiele praktycznych zastosowań i stanowi punkt wyjścia do rozpatrywania tranzystorów.

### 8.1 Półprzewodniki

Przewodnictwo substancji zależy od tego, czy występują w niej wolne nośniki ładunku. W metalach, będących dobrymi przewodnikami, atomy tworzą strukturę krystaliczną, wskutek czego ich zewnętrzne elektrony zostają oswobodzone. Doprowadzając napięcie, można wprowadzić te elektrony w uporządkowany ruch, który będzie przepływem prądu. W dielektrykach wszystkie elektrony zewnętrzne są silnie uwikłane w kowalentne wiązania międzyatomowe, tak że nie ma swobodnych nośników, które mogłyby się przemieszczać pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

Półprzewodniki są podobne do dielektryków — same z siebie nie oswobadzają nośników, ale pod wpływem promieniowania różnego typu, szczególnie cieplnego, elektrony mogą opuszczać wiązania i przechodzić między nimi, pozostawiając luki. Luki te są nazywane dziurami i można je postrzegać jako swobodne nośniki ładunku dodatniego.

---

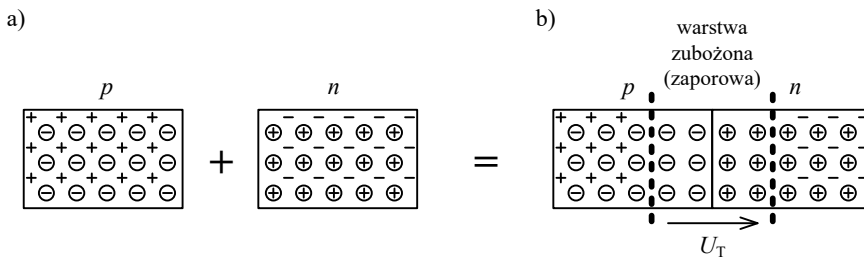
<sup>1</sup> Zanim wynaleziono półprzewodniki, diody konstruowano w formie lamp elektronowych.



W czystym półprzewodniku jest tyle samo dziur, ile elektronów swobodnych, ale równowagę można zachwiać, wprowadzając domieszkę atomów innego pierwiastka. Domieszka wprowadzająca nadmiarowe wolne elektrony jest nazywana donorem. Wynikiem jej zastosowania jest półprzewodnik typu  $n$ , w którym elektrony są nośnikami większościowymi, a dziury — mniejszościowymi. Wskutek domieszkowania akceptorem pojawiają się niekompletne wiązania, tak że liczba dziur przekracza liczbę elektronów. Otrzymywany jest półprzewodnik typu  $p$ . Najpopularniejszymi półprzewodnikami są krzem i german. Jako donor typowo stosowany jest fosfor, a jako akceptor — bor.

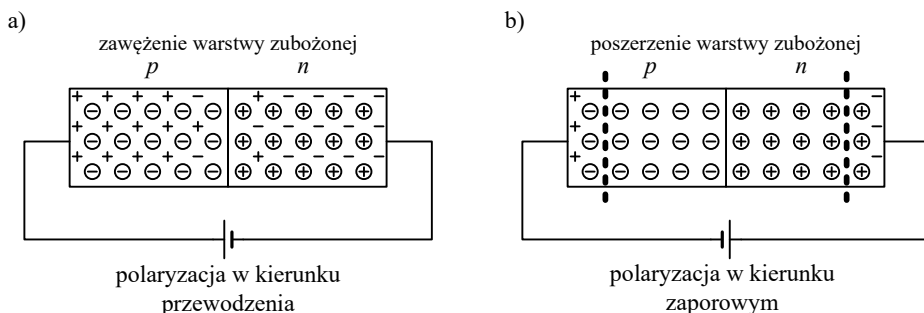
## 8.2 Złącze półprzewodnikowe $pn$

Po zestawieniu półprzewodników  $p$  i  $n$ , tak jak na rys. 8.1, w pobliżu złącza następuje rekombinacja swobodnych elektronów i dziur. Powstaje warstwa zubożona, gdzie nie ma swobodnych nośników ładunku, a sieć krystaliczna zawiera tylko jony dodatnie lub ujemne, zależnie od typu półprzewodnika. Pomiedzy dwoma obszarami nieruchomych ładunków, które pozostały niezneutralizowane, wytwarza się pole elektryczne. Pole to przeciwdziała przechodzeniu przez złącze wolnych nośników z pozostałych obszarów półprzewodników, ograniczając zasięg rekombinacji. Dlatego po osiągnięciu przez warstwę zubożoną pewnej szerokości, złącze osiąga stan równowagi z ustaloną różnicą potencjałów, która stanowi barierę dla przepływu prądu.



Rysunek 8.1: Działanie złącza  $pn$  (ładunki nieruchome otoczono okręgami)

Aby wymusić ruch ładunków, trzeba wytworzyć zewnętrzne pole elektryczne, które skompensuje barierę potencjału. Uzyskuje się to, polaryzując półprzewodnik w kierunku przewodzenia, czyli doprowadzając napięcie tak, jak na rys. 8.2a. Odwrotne przyłączenie źródła, czyli polaryzacja w kierunku zaporowym, wzmacnia działanie izolacyjne złącza, rozszerzając warstwę zubożoną, co zilustrowano na rys. 8.2b. Nawet przy polaryzacji zaporowej możliwy jest przepływ niewielkiego prądu wstecznego opartego na parach elektron-dziura, które zawsze, choć w małej liczbie, powstają pod wpływem temperatury lub promieniowania.

Rysunek 8.2: Wpływ polaryzacji na złącze  $pn$ 

### 8.3 Dioda prostownicza

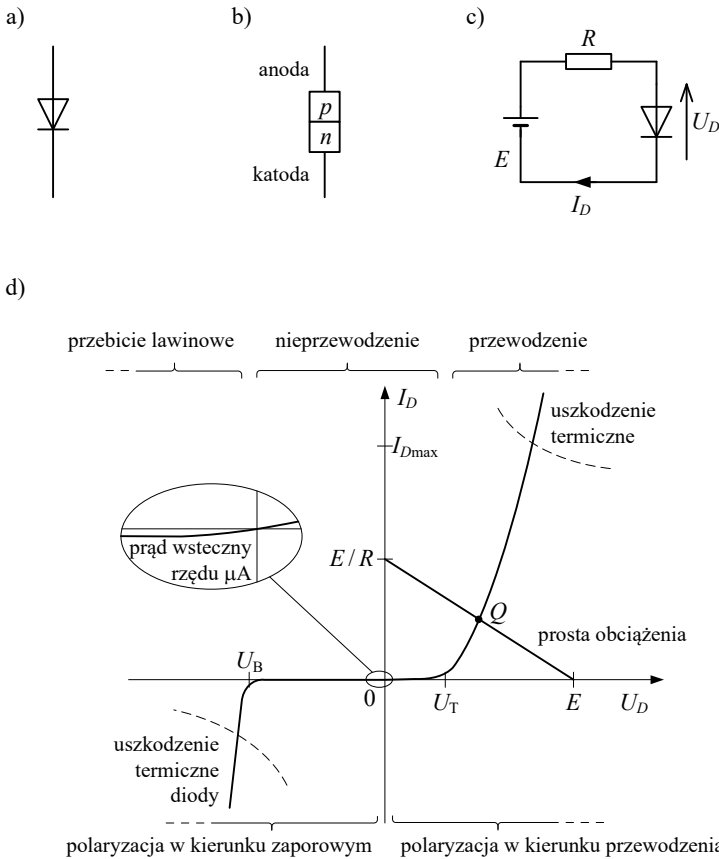
Dioda prostownicza jest elementem półprzewodnikowym, którego działanie opiera się na bezpośrednim wykorzystaniu właściwości złącza  $pn$ . Jednak rozpatrując diodę, zwykle nie mówi się o tworzących ją półprzewodnikach, tylko rozróżnia się jej zaciski (elektrody): anodę i katodę. Polaryzację złącza należy utożsamiać z polaryzacją elementu.

Symbol, strukturę, podstawowy układ polaryzacji oraz charakterystykę prądowo-napięciową diody pokazano na rys. 8.3. Zawsze należy przyjmować zwrot prądu przeciwny do zwrotu napięcia, gdyż dioda jest elementem biernym — jednak w odróżnieniu od idealnych  $RLC$  jest elementem nieliniowym (zob. podrozdział 1.11).

Gdy dioda przewodzi, to mała (ułamek  $V$ ) zmiana napięcia na jej zaciskach powoduje dużą (dziesiątki  $mA$ ) zmianę prądu. Aby element tak działał, musi zostać spolaryzowany w kierunku przewodzenia, czyli potencjał anody musi być większy od potencjału katody, a dodatkowo różnica potencjałów nie może być mniejsza od progowego napięcia  $U_T$ .

Dla pozostałego zakresu napięć prąd w gałęzi z diodą jest znikomy ( $\mu A$ ), czyli element nie przewodzi, tak jakby w odpowiednim miejscu obwodu była przerwa. Dioda nie przewodzi w szczególności wtedy, gdy jest spolaryzowana w kierunku zaporowym, ale istnieje wartość napięcia wstecznego, rzędu setek  $V$ , po przekroczeniu której następuje gwałtowny wzrost prądu, tzw. przebicie lawinowe diody. Zwykle element zostaje wtedy uszkodzony, tracąc nieodwracalnie swoje właściwości w efekcie wzrostu temperatury.

Napięcie progowe zależy od typu diody oraz materiału, z którego jest ona wykonana. Dla diod krzemowych, stosowanych najczęściej,  $U_T = 0,6 \dots 0,7 V$ , a dla diod germanowych  $U_T = 0,2 \dots 0,3 V$ . Jeżeli w obwodzie występują napięcia rzędu dziesiątek i setek  $V$ , to można założyć, że napięcie progowe jest pomijalnie małe, równe zero, gdyż nie wpłynie to znacząco na wyniki analizy.



Rysunek 8.3: Dioda prostownicza: (a) symbol, (b) struktura, (c) podstawowy układ polaryzacji i (d) charakterystyka prądowo-napięciowa

Prąd i napięcie na zaciskach diody określają jej punkt pracy (ang. *quiescent point*), który jest oznaczany symbolem  $Q$  — skrótem od terminu w języku angielskim. Punkt pracy jest ulokowany na przecięciu charakterystyki elementu i tzw. prostej obciążenia, która reprezentuje pozostałą część obwodu. Zmiany napięcia lub rezystancji powodują przesunięcie punktu pracy na charakterystyce.

Graficzną metodę wyznaczania punktu pracy zilustrowano na rys. 8.3d dla układu z rys. 8.3c. Bardziej skomplikowane obwody można sprowadzić do takiej prostej postaci, traktując diodę jako obciążenie i określając układ zastępczy Thevenina, który odpowiada pozostałym elementom (zob. podrozdział 3.3).

Zależność między wielkościami elektrycznymi w diodzie, która jest spolaryzowana w kierunku przewodzenia, można przybliżyć następującym wzorem:

$$I_D = I_{\text{sat}} (e^{U_D / \varphi_T} - 1) \tag{8.1}$$

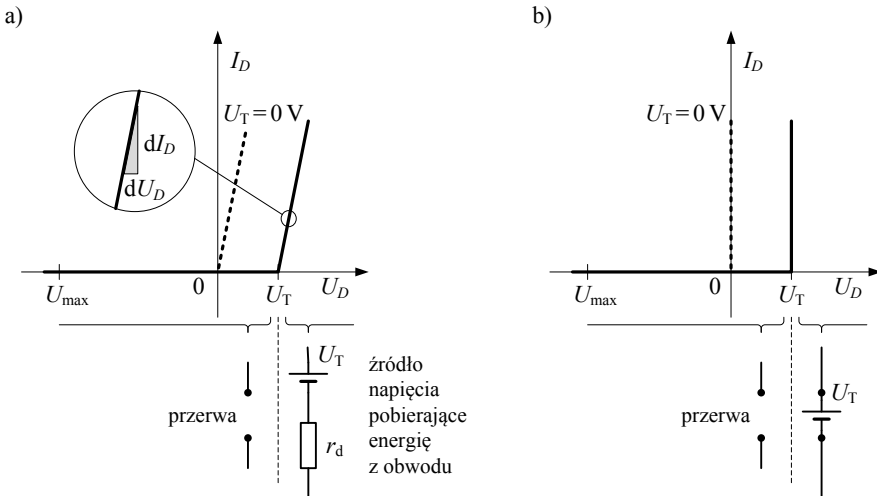
gdzie  $\varphi_T = \frac{kT}{q}$  jest tzw. potencjałem elektrokinetycznym,  $k$  symbolizuje stałą Boltzmann,  $T$  oznacza temperaturę w kelwinach, a  $q$  — ładunek elektronu. Prąd nasycenia diody,  $I_{\text{sat}}$ , zależy od sposobu jej wykonania i ma natężenie rzędu  $10^{-15} \dots 10^{-10}$  A. Dla diody krzemowej o temperaturze pokojowej, tzn. gdy  $T \approx 300$  K,  $\varphi_T \approx 26$  mV.

W praktyce często dopuszczalne jest zastąpienie krzywoliniowej charakterystyki linią łamaną, co można zrobić na dwa sposoby, tak jak pokazano na rys. 8.4. Są to tzw. modele odcinkowo-liniowe, w których obszar przewodzenia jest reprezentowany linią nachyloną lub pionową.

W modelu z rys. 8.4a nachylenie jest określone rezystancją dynamiczną diody

$$r_d = \left. \frac{dU_D}{dI_D} \right|_{I_D=I_{DQ}, U_D=U_{DQ}} \tag{8.2}$$

którą należy wyznaczyć w punkcie pracy, zakładając, że  $dU_D$  jest niewielkie, rzędu kilku mV. Model taki jest stosowany do rozpatrywania diod w obwodach, w których wielkości elektryczne nieznacznie oscylują wokół składowych stałych.



Rysunek 8.4: Praktyczne uproszczenia prądowo-napięciowej charakterystyki diody prostowniczej

Jeżeli zmiany (sygnały) napięcia i prądu są znaczne, to można przyjmować, że na przewodzącej diodzie występuje napięcie progowe niezależnie od natężenia prądu, czyli  $r_d = 0\Omega$ . Odpowiednie przybliżenie charakterystyki prądowo-napięciowej elementu zostało pokazane na rys. 8.4b.

## 8.4 Dioda Zenera

Symbol, układ polaryzacji i charakterystykę diody Zenera pokazano na rys. 8.5. Gdy element zostaje spolaryzowany w kierunku przewodzenia, zachowuje się tak samo jak dioda prostownicza, co nie wzbudza zainteresowania. Jest on przeznaczony do pracy przy polaryzacji w kierunku zaporowym, bo wtedy wykazuje specyficzne właściwości: przebicie następuje już przy napięciu rzędu kilku-kilkudziesięciu woltów i jest odwracalne, o ile prąd wsteczny nie przekroczy maksymalnej dopuszczalnej wartości  $I_{Z,max}$ , rzędu kilku do kilkudziesięciu miliamperów. W zakresie pracy duże zmiany prądu odpowiadają małym wahaniom napięcia, co znajduje zastosowanie w stabilizatorach (zob. podrozdział 11.5). W związku z tym dioda Zenera jest nazywana diodą stabilizacyjną lub stabilistorem.

Napięcie stabilizacji jest ustalane podczas produkcji elementu. W diodach powszechnego użytku wynosi ono od kilku do kilkunastu woltów, przyjmując wartości ze standardowego ciągu: 3,3; 3,9; 4,7; 5,6; 7,2; 8,1 itd. [V]. Jeżeli potrzebna jest dioda o innym napięciu stabilizacji, to trzeba dobrać i połączyć szeregowo kilka standardowych elementów (zob. problem P8.16).

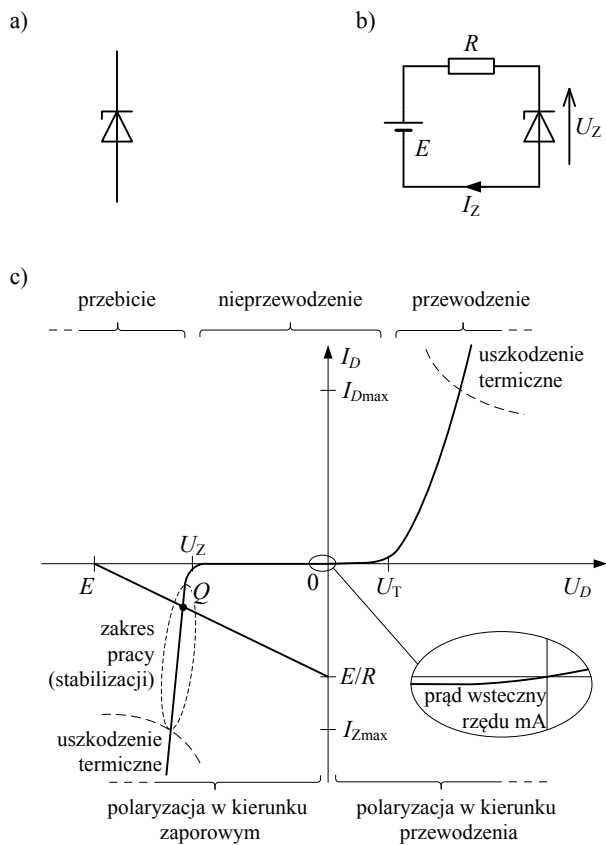
## 8.5 Inne rodzaje diod

### 8.5.1 Wprowadzenie

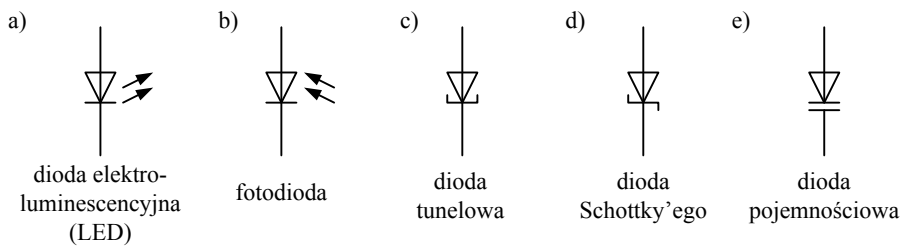
Łączenie dwóch materiałów o różnych typach przewodnictwa stanowi podstawę konstrukcji wielu różnych elementów elektronicznych. Właściwe domieszkowanie, zastąpienie jednego z półprzewodników metalem, czy specyficzna struktura złącza pozwalają uzyskać diody o ciekawych właściwościach, które znajdują praktyczne zastosowania. Poniżej krótko omawiamy wybrane odmiany diod, których symbole pokazano na rys. 8.6.

### 8.5.2 Dioda elektroluminescencyjna (LED)

W diodzie elektroluminescencyjnej LED (ang. *light-emitting diode*), która jest spolaryzowana w kierunku przewodzenia, przepływ prądu, a dokładniej rekombinacja elektronów i dziur, wywołuje emisję promieniowania: ultrafioletowego, podczerwonego lub światła widzialnego. Jest to tzw. zjawisko elektroluminescencji.



Rysunek 8.5: Dioda Zenera: (a) symbol, (b) podstawowy układ polaryzacji i (c) charakterystyka prądowo-napięciowa



Rysunek 8.6: Symbole wybranych diod

Diody LED mają charakterystyki podobne jak diody prostownicze, ale ich napięcia progowe są większe i zależą od koloru świecenia. Na przykład dla diod czerwonych  $U_T = 1,7 \dots 2\text{V}$ , a dla zielonych  $U_T = 2,1 \dots 3,6\text{V}$ . Maksymalne dopuszczalne napięcie wsteczne jest niskie, rzędu zaledwie kilku V, dlatego w urządzeniach element często jest zabezpieczony przed polaryzacją w kierunku zaporowym, poprzez połączenie go równoległe z przeciwnie skierowaną diodą prostowniczą. Zawsze trzeba ograniczać prąd przewodzenia diody LED, łącząc ją szeregowo z odpowiednio dobranym rezystorem.

Dawniej nie znano metod wytwarzania elementów, które świeciłyby na niebiesko lub biał<sup>2</sup>, co ograniczało obszar zastosowań diod LED. Przełom nastąpił dopiero w latach 90. XX wieku i od tego czasu elementy te zastępują żarówki i lampy jarzeniowe, oferując energooszczędność i większą niezawodność.

W szczególności diody LED są stosowane do konstruowania różnych wyświetlaczy i ekranów. Elementy świecące na biał<sup>2</sup> służą do podświetlania matryc ciekłokrystalicznych (ang. *liquid-crystal display*: LCD) w telewizorach i monitorach. Diody świecące w kolorach podstawowych stanowią natomiast podstawę zarówno niewielkich wyświetlaczy panelowych, które można zauważyć w urządzeniach pomiarowych, jak i olbrzymich ekranów-telebimów, które są wystawiane przy ulicach oraz na koncertach.

Ważnym obszarem zastosowania diod LED jest także przesyłanie informacji. Służą one jako alternatywne dla laserów źródło światła w telekomunikacji światłowodowej. Elementy wysyłające promieniowanie podczerwone, które nie emitują światła widzialnego, są natomiast powszechnie wykorzystywane w transmisji danych na niewielkie odległości, stanowiąc podstawę pilotów RTV i złącza IrDA.

### 8.5.3 Dioda Schottky'ego

Diody Schottky'ego wykorzystują złącza metal-półprzewodnik. Elementy te charakteryzuje czas przełączania krótszy niż w innych diodach, w których po zaniknięciu napięcia prąd przestaje płynąć ze znacznym opóźnieniem. Jest to użyteczne, gdy przetwarzane są sygnały o wielkich częstotliwościach, np. w demodulacji radiowej i zasilaczach impulsowych. Ponieważ napięcie progowe jest w nich mniejsze niż w diodach prostowniczych, wynosi około 0,2 V, diody Schottky'ego umożliwiają też konstruowanie precyzyjnych prostowników.

---

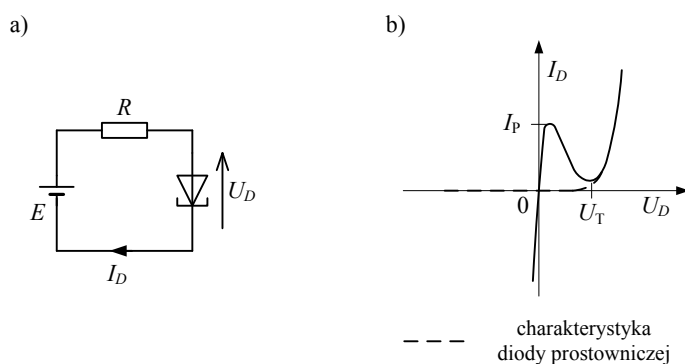
<sup>2</sup> Świecenie na biał<sup>2</sup> można uzyskać, pokrywając diodę LED, która świeci w pewnym kolorze, substancją konwertującą ten kolor w biel. Powszechnie stosuje się żółty fosfor do diody świecącej na niebiesko. Podejście takie wynika z tego, że dowolną barwę można przedstawić jako złożenie kolorów czerwonego (ang. *red*), zielonego (ang. *green*) i niebieskiego (ang. *blue*) — każdego w odpowiedniej proporcji. Na tej zasadzie opiera się addytywny model koloru, określany akronimem RGB, stanowiący podstawę działania ekranów LCD oraz kineskopów w dawnych telewizorach i monitorach. Biel oraz szarości o różnej intensywności powstają, gdy każda z barw podstawowych ma równy udział.

### 8.5.4 Dioda pojemnościowa

Złącze półprzewodnikowe spolaryzowane w kierunku zaporowym reprezentuje sobą pewną pojemność, która maleje ze wzrostem wartości bezwzględnej napięcia wstecznego. W diodach pojemnościowych (warikapach, waraktorach) specjalne domieszkowanie sprawia, że zmienność pojemności jest szczególnie duża, tak że mogą one pełnić rolę elektrycznie przestrajanych kondensatorów w obwodach wielkich częstotliwości, np. w odbiornikach RTV.

### 8.5.5 Dioda tunelowa

Przy polaryzacji w kierunku przewodzenia dioda tunelowa reprezentuje w pewnym zakresie napięć ujemną rezystancję: zwiększanie napięcia obniża natężenie prądu, co pokazuje rys. 8.7. Przy polaryzacji przeciwnej element nie wykazuje natomiast działania zaporowego. Tak specyficzne właściwości znajdują zastosowanie we wzmacniaczach i generatorach wielkiej częstotliwości oraz w szybkich układach przełączających i cyfrowych.



Rysunek 8.7: Dioda tunelowa: (a) układ polaryzacji oraz (b) typowy kształt charakterystyki prądowo-napięciowej

### 8.5.6 Fotodiody

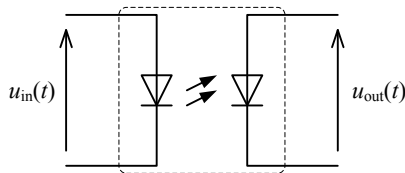
W fotodiodach prąd wsteczny jest proporcjonalny do intensywności światła padającego na złącze  $pn$ . Promieniowanie wywołuje fotojonizację: uderzając w półprzewodnik, fotony generują pary elektron-dziura, w związku z czym działanie zaporowe złącza jest osłabiane.

Oczywistym zastosowaniem fotodiod jest detekcja promieniowania, także niewidzialnego. W szczególności stanowią one podstawę matryc CCD (ang. *charge-coupled device*) do rejestrowania obrazu w aparatach i kamerach cyfrowych.



Współpracując z diodami LED, fotodiody umożliwiają też przekazywanie sygnału z jednego obwodu do drugiego za pośrednictwem fali świetlnej, bez ustanawiania między nimi połączenia elektrycznego. Celem tego może być przesyłanie danych na odległość, tak jak w przypadku pilota TV, ale nie tylko. Wykorzystując półprzewodnikowe elementy emitujące i wykrywające promieniowanie, opracowano bowiem pomysły i praktyczne rozwiązania służące poprawie bezpieczeństwa obsługi urządzeń elektrycznych.

Chodzi o optoizolator (transoptor), którego schemat widnieje na rys. 8.8. W tym układzie dioda LED konwertuje wejściowy sygnał elektryczny  $u_{in}(t)$  w światło o analogicznie zmieniającym się natężeniu. Promieniowanie pada na zamkniętą w tej samej obudowie fotodiode, która odtwarza przebieg elektryczny  $u_{out}(t) \approx u_{in}(t)$  w obwodzie dołączonym do wyjścia. Ze względu na nieliniowość diod układ zmienia kształt sygnały analogowe, ale doskonale nadaje się do przekazywania sygnałów cyfrowych. W szczególności optoizolator może separować system komputerowy od urządzenia, które ten system ma kontrolować, tak aby nie było połączenia, którym duże napięcie mogłoby przedostać się z tego urządzenia do układu mikroprocesorowego, gdzie spowodowałoby uszkodzenia lub zagrażało życiu operatora.



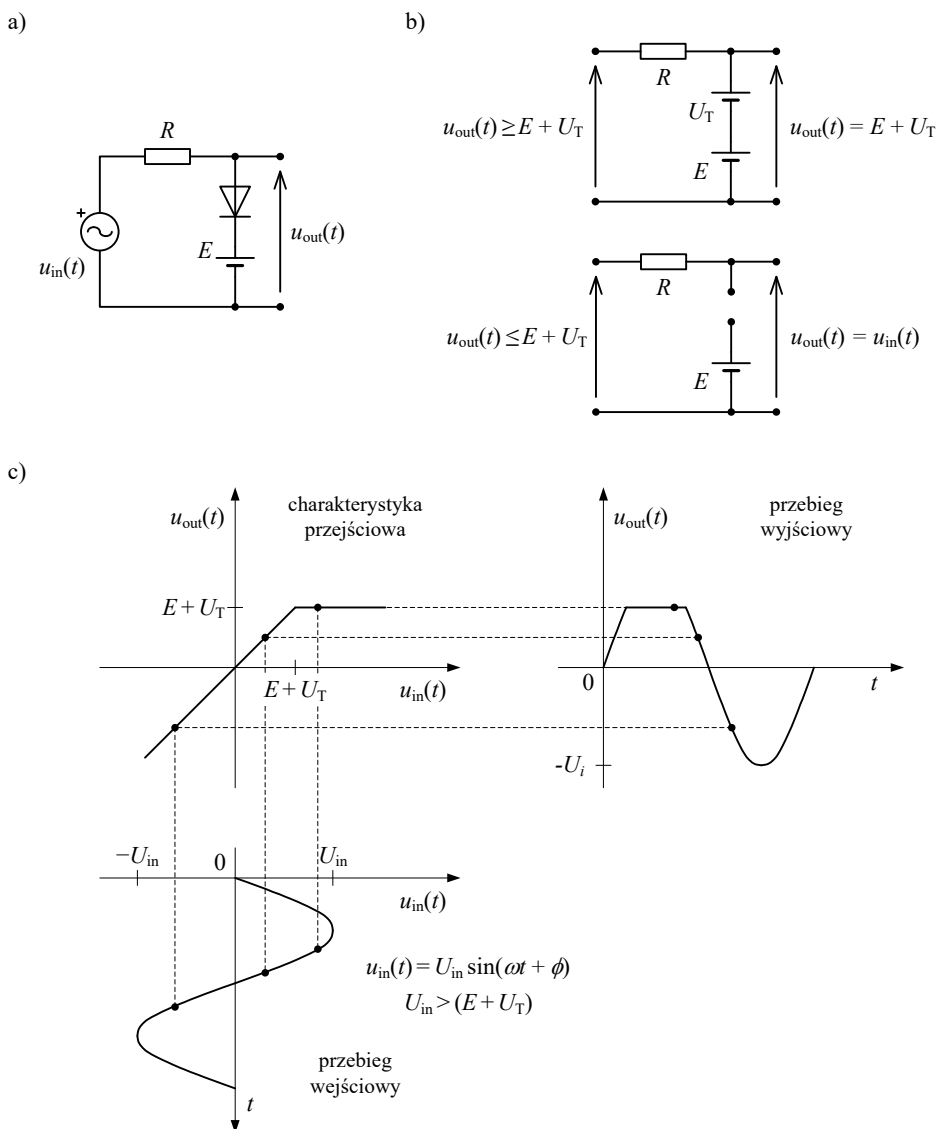
Rysunek 8.8: Optoizolator

## 8.6 Ograniczniki napięcia

Nieliniowość zależności między prądem a napięciem na diodzie pozwala wykorzystywać ten element do kształtowania przebiegów elektrycznych. Jedną z możliwych operacji jest ograniczanie (ang. *clipping*) napięcia, np. w celu zabezpieczenia obciążenia przed wystąpieniem zbyt dużej różnicy potencjałów.

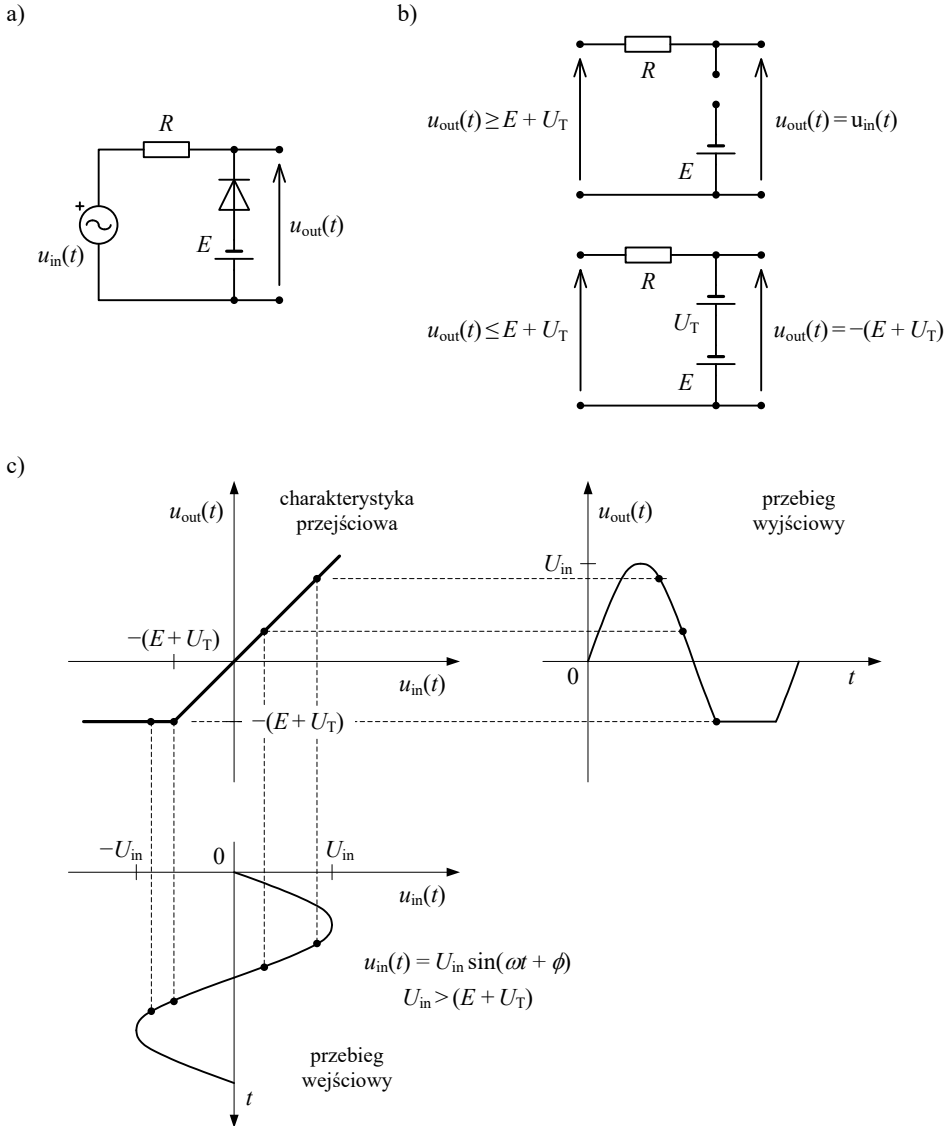
Szczególnym przypadkiem ograniczania jest prostowanie, które zostało omówione w podrozdziale 11.3, ponieważ jest ściśle związane z zasilaniem układów elektronicznych. Działanie ogranicznika można wygodnie opisywać charakterystyką przejściową, która przedstawia zależność między napięciem wejściowym a wyjściowym. Na przykład rys. 8.9 przedstawia schemat i charakterystykę układu z górnym ograniczeniem większym od napięcia progowego diody.

Rysunek 8.9 jednocześnie wyjaśnia graficzną metodę określania odpowiedzi układu na zadane wejście. Punkt po punkcie rzutujemy wykres przebiegu wejściowego na linię łamaną, która przedstawia charakterystykę. Druga współrzędna charakterystyki stanowi wartość wyjściową w danej chwili.



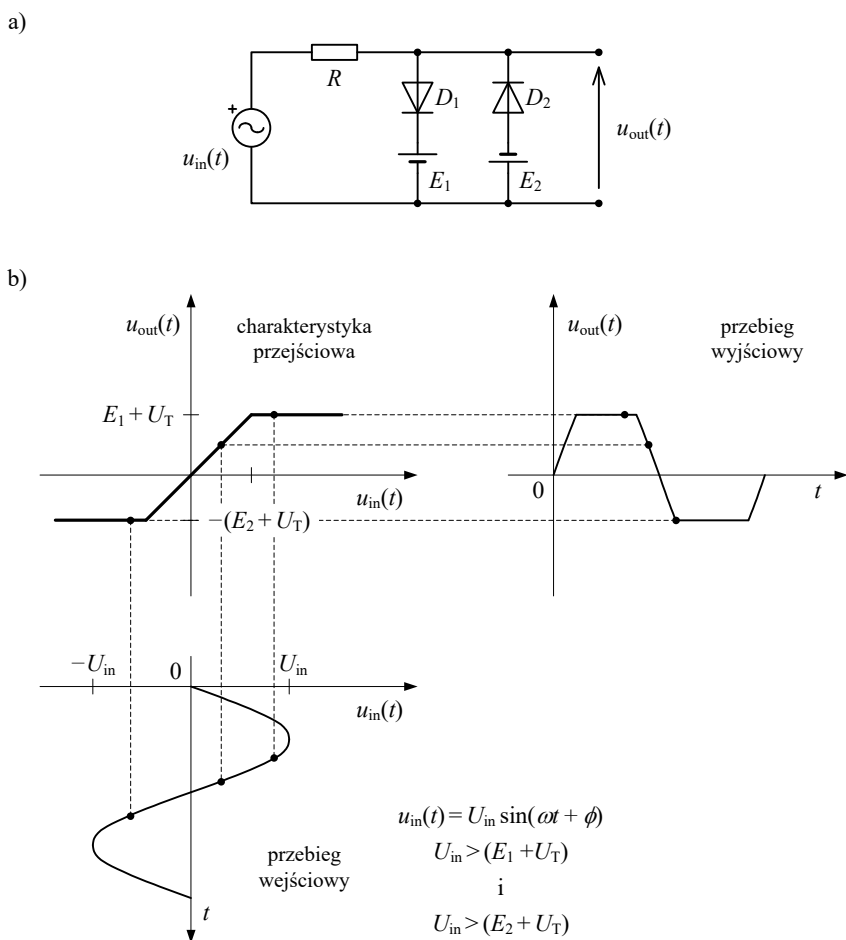
Rysunek 8.9: Ogranicznik napięcia z góry: (a) schemat i (b) objaśnienie zasady działania

Działanie ogranicznika zależy od sposobu połączenia elementów i od tego, które punkty obwodu stanowią zaciski wyjściowe. Na przykład odwrotnie włączając diodę i źródło w układzie z rys. 8.9, można zmienić znak poziomego ograniczania, co zostało objaśnione na rys. 8.10.



Rysunek 8.10: Ogranicznik napięcia z dołu: (a) schemat i (b) objaśnienie zasady działania

Ograniczniki można łączyć równolegle, co pozwala niezależnie ustalić dolny i górny poziom ograniczania. W układzie z rys. 8.11a dwa ograniczniki o różnych poziomach,  $E_1 \neq E_2$ , pracują naprzemiennie. Kiedy jeden ogranicza sygnał, to drugi jest wyłączony, gdyż odpowiednia dioda nie przewodzi.



Rysunek 8.11: Schemat i objaśnienie zasady działania ogranicznika obustronnego

Aby wyznaczyć charakterystykę układu ograniczającego, trzeba rozpatrzyć jego zachowanie dla różnych poziomów napięcia wyjściowego (zob. rys. 8.9b). Można to robić systematycznie, rozpatrując punkt po punkcie jeden okres przebiegu wejściowego, ale można też od razu określić krytyczny poziom napięcia, który powoduje przełączenie diody, i wywnioskować, jaki będzie jej stan dla pozostałych

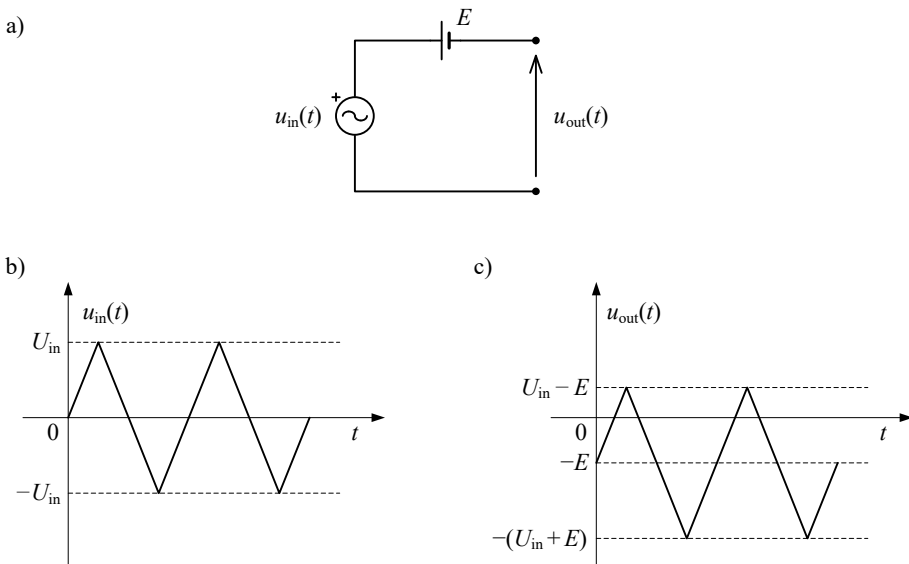
wartości napięcia wejściowego. Druga metoda wymaga intuicji oraz doświadczenia, więc początkujący nie powinni jej stosować. Zawsze należy pamiętać, że cały czas w obwodzie obowiązuje napięciowe prawo Kirchhoffa, czyli zachodzi bilans napięć.

Rozpatrując ogranicznik, zakłada się, że obciążenie dołączone do wyjścia nie wpływa na jego działanie: ma bardzo dużą rezystancję i nie pobiera prądu. Można to zapewnić, stosując odpowiednie układy pośredniczące, takie jak wtórniki (zob. podrozdział 9.2).

Dopuszczalne jest zastępowanie prawdziwej charakterystyki diody przybliżeniem, jeżeli łatwość analizy układu ograniczającego jest ważniejsza od dokładności jej wyników.

## 8.7 Układy przylegania

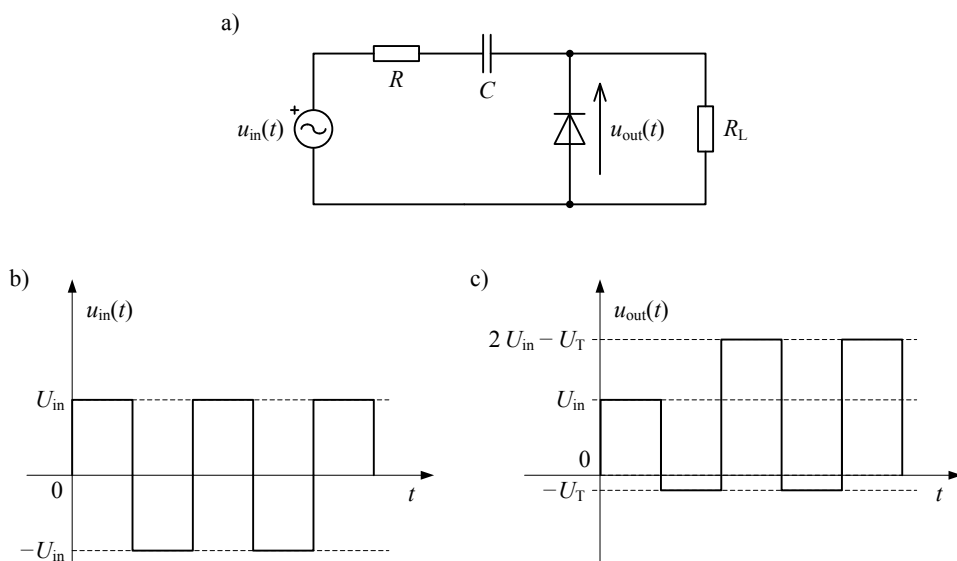
Oprócz ograniczania do operacji związanych z formowaniem przebiegu zalicza się przesuwanie go wzdłuż osi amplitudy, czyli modyfikowanie jego składowej stałej. Można to osiągnąć w sposób wyjaśniony na rys. 8.12 — łącząc źródło sygnału szeregowo ze źródłem napięcia stałego, które ustala przesunięcie. Działanie układu opiera się bezpośrednio na napięciowym prawie Kirchhoffa.



Rysunek 8.12: Układ przesuwały napięcie w dół

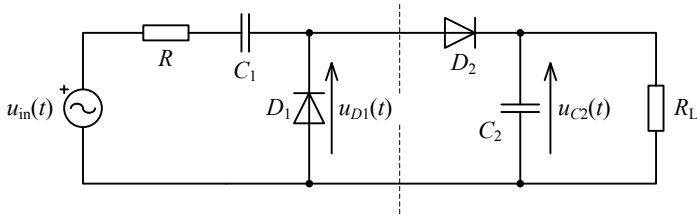
Szczególnym przypadkiem zmodyfikowania składowej stałej jest przyleganie (ang. *clamping*), czyli takie przesunięcie przebiegu, że skrajne wartości (dolne lub górne) pokrywają się z zerem. Do tego celu teoretycznie można wykorzystać układ przesuwały, w którym napięcie stałe jest równe amplitudzie sygnału. Jednak projektując układ, zwykle nie wiemy, jaka będzie amplituda sygnału, a nawet jeżeli ją znamy, to dobieranie odpowiedniego źródła napięcia jest kłopotliwe. Przyleganie można realizować efektywniej w prostszych układach, które wykorzystują diody i kondensatory zamiast źródeł.

Schemat układu przylegania pokazano na rys. 8.13. Na kondensatorze odkłada się napięcie, którego amplituda jest równa wartości szczytowej przebiegu wejściowego pomniejszonej o napięcie progowe diody. Jeżeli na wejściu występuje napięcie dodatnie, to dioda jest spolaryzowana zaporowo. Nie przewodząc, zachowuje się ona tak, jakby w jej miejscu była przerwa, czyli odkłada się na niej suma napięcia wejściowego i napięcia na kondensatorze. Kondensator rozładowuje się wtedy przez obciążenie, ale następuje to bardzo wolno, ponieważ rezystancja obciążenia jest duża. Ładowanie kondensatora następuje w półokresach, w których napięcie wejściowe jest ujemne i dioda przewodzi. Element ładuje się szybko, bo prąd jest ograniczony jedynie wartością rezystora  $R$  i maksymalnym prądem diody. Dlatego w praktyce można zakładać, że po pierwszym półokresie napięcie na kondensatorze jest cały czas równe wartości szczytowej z wejścia. Włączając diodę odwrotnie, można przesunąć przebieg w przeciwnym kierunku.



Rysunek 8.13: Układ przylegania z przesunięciem w górę

Układy przesuwające umożliwiają mierzenie wartości szczytowej napięcia zmiennego z użyciem woltomierza napięcia stałego. Są też one wykorzystywane do powielania napięcia. Na rys. 8.14 przedstawiony został schemat podwajacza napięcia, który powstaje z dołączenia detektora szczytowego (zob. problem P8.18) do wyjścia układu przesuwającego.



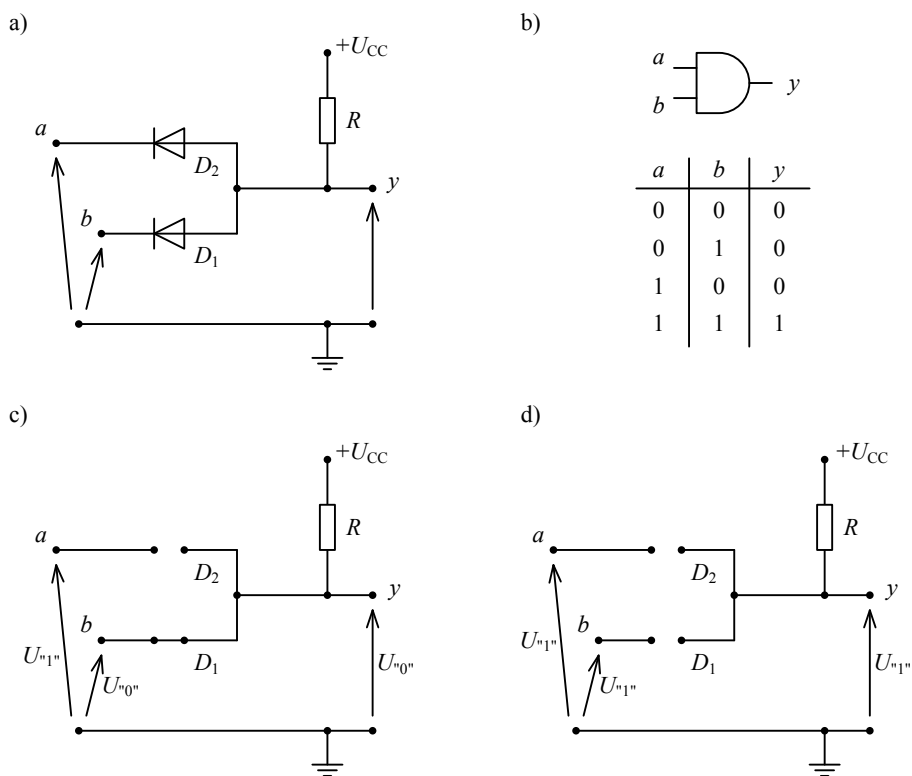
Rysunek 8.14: Podwajacz napięcia

## 8.8 Diodowe układy przełączające i bramki logiczne

Przechodzenie diody ze stanu nieprzewodzenia w przewodzenie można utożsamiać z jej przełączaniem pod wpływem napięcia wejściowego. Powiązanie stanów i odpowiednich poziomów napięcia z wartościami logicznymi „1” („prawda”) i „0” („fałsz”) pozwala wykorzystać układy diodowo-rezystorowe do realizowania prostych wyrażeń algebry Boole’a. W szczególności można opracować układy równoważne bramkom logicznym.

Rysunek 8.15 pokazuje układ, który spełnia rolę bramki AND przy założeniu, że zakres napięć  $0 \dots 1,5\text{V}$  odpowiada niskiemu poziomowi sygnału logicznego, „0”, zakres  $4,5 \dots 5\text{V}$  — poziomowi wysokiemu, „1”, a napięcie zasilające wynosi  $5\text{V}$ . Jeżeli niski poziom napięcia jest doprowadzony do przynajmniej jednego wejścia, to odpowiednia dioda przewodzi, tak że na wyjściu mamy sumę jej napięcia progowego i wartości wejściowej. Rezystor ogranicza wtedy prąd płynący przez element półprzewodnikowy. Jeżeli do obydwu wejść doprowadzone są napięcia zbliżone do zasilającego, to żadna z diod nie przewodzi i prawie całe napięcie zasilania pojawia się na wyjściu, pod warunkiem, że wyjście jest nieznacznie obciążone rezystancją znacznie większą od  $R$ .

Realizacja bramki OR w logice diodowo-rezystorowej jest tematem problemu P8.20. Podejście to sprawdza się w praktyce, gdy potrzebna jest pojedyncza bramka, ale nie nadaje się do realizacji bardziej skomplikowanych układów cyfrowych. Przede wszystkim dlatego, że z diod i rezystorów nie można zbudować bramki NOT, a funkcje AND i OR nie wystarczają do zrealizowania dowolnej funkcji logicznej. Z drugiej strony utrudnione jest kaskadowe łączenie bramek, bo spadki napięcia na diodach z kolejnych stopni zacierają różnicę między wysokim a niskim poziomem logicznym (zob. problem P8.20).



Rysunek 8.15: Bramka AND w logice diodowo-rezystorowej

## 8.9 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 8.9.1 Problemy rozwiązane

#### Problem P8.1

Zapoznać się z kartami katalogowymi różnych diod. Należy zwrócić uwagę na zakres zamieszczonych danych, różnorodność wykorzystanych środków przekazu informacji oraz zwięzłość i uporządkowaną strukturę dokumentów.



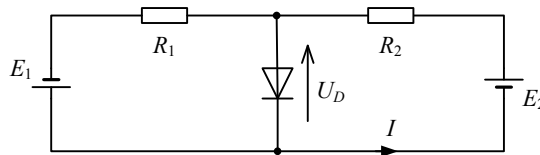
### Wskazówka

Karty katalogowe można łatwo znaleźć w internecie, w szczególności na internetowych stronach producentów i sprzedawców elementów elektronicznych. Pomocna będzie wyszukiwarka internetowa, której należy podać słowa kluczowe, takie jak „datasheet”, „diode”, „junction”, „LED” czy „Zener”. Ten sam element może być produkowany przez różne firmy i być różnie, choć zwykle podobnie, oznaczany. Jednocześnie ten sam producent może dostarczać różne wersje elementu, które różnią się obudową lub parametrami granicznymi. Na przykład wersja do zastosowań militarnych może różnić się od tej do powszechnego użytku poszerzonym zakresem temperatur pracy.

Wskutek globalizacji karty katalogowe są publikowane najczęściej tylko w języku angielskim, którego znajomość jest niezbędna dla współczesnego inżyniera informatyka, elektronika itp., warunkując dostęp do najbardziej aktualnych i wiarygodnych źródeł informacji.

### Problem P8.2

Określić punkt pracy diody w układzie pokazanym na rys. 8.16. Należy przyjąć, że dioda stanowi rozwarcie, gdy  $U_D < 0$ , a zwarcie, gdy  $U_D \geq 0$ . Dane są:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $E_1 = 2 \text{ V}$  oraz  $E_2 = 5 \text{ V}$ .



Rysunek 8.16: Schemat do problemu P8.2

### Odpowiedź

Układ należy sprowadzić do podstawowego układu polaryzacji z jednym rezystorem i jednym źródłem. Ich parametry ustalamy za pomocą twierdzenia Thevenina, traktując diodę jako obciążenie szukanego obwodu zastępczego. Najpierw określamy napięcie źródła zastępczego:

$$U_{\text{Th}} = E_2 - R_2 I = E_2 - R_2 \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = 5 - 4 \frac{2 + 5}{1 + 4} = 5 - 5,6 = -0,6 \text{ [V]}$$

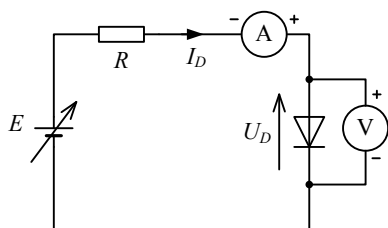
Znak minus wskazuje, że dioda jest spolaryzowana zaporowo, czyli nie płynie przez nią prąd. Odkłada się na niej całe napięcie  $U_{\text{Th}}$ , niezależnie od wartości  $R_{\text{Th}}$ , więc można pominąć obliczanie rezystancji zastępczej.

**Problem P8.3**

Zaproponować układ do pomiaru prądowo-napięciowej charakterystyki diody i opisać sposób jego wykorzystania. Pomiar parametrów granicznych wykracza poza obszar naszych zainteresowań.

**Odpowiedź**

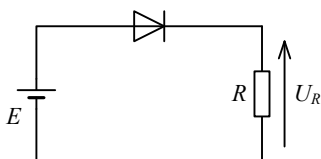
Najprościej jest mierzyć charakterystykę metodą „punkt po punkcie”, wykorzystując układ pokazany na rys. 8.17. Za pomocą zasilacza regulowanego stopniowo zmieniamy napięcie zasilające, co wpływa na prąd i napięcie na zaciskach diody, i mierzymy wielkości elektryczne za pomocą amperomierza i woltomierza. Zebrane dane wyznaczają punkty, przez które prowadzimy krzywą. Im więcej zbadanych ustawień zasilacza, tym więcej punktów i dokładniejszy wykres. Rezystor powinien być dobrany odpowiednio do maksymalnego napięcia zasilającego, tak by ograniczyć prąd w obwodzie do kilkudziesięciu miliamperów i zabezpieczyć diodę przed uszkodzeniem.



Rysunek 8.17: Schemat do problemu P8.3

**Problem P8.4**

Obliczyć prąd i napięcie  $U_R$  w układzie przedstawionym na rys. 8.18. Wiadomo, że  $R = 10\Omega$ , zaś napięcie zasilania,  $E$ , może przyjmować wartości 1, 2, 5, 10 i 20 V.



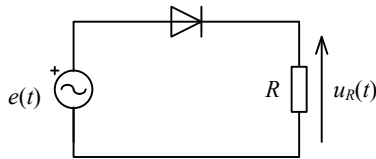
Rysunek 8.18: Schemat do problemu P8.4

**Problem P8.5**

Powtórnie wykonać polecenie z problemu P8.4 po zastąpieniu pojedynczej diody szeregowym połączeniem 2, 3 i 4 diody.

**Problem P8.6**

Narysować przebieg napięcia  $u_R(t)$  w układzie pokazanym na rys. 8.19, wiedząc, że  $R = 20\Omega$ , zaś  $e(t) = 10 \sin \omega t \text{ V}$ .



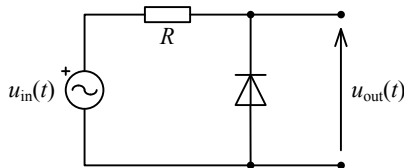
Rysunek 8.19: Schemat do problemu P8.6

**Wskazówka**

Jest to prostownik jednołówkowy, który zostanie dokładnie omówiony w podrozdziale 11.3.

**Problem P8.7**

Wyjaśnić działanie układu pokazanego na rys. 8.20. Narysować charakterystykę przejściową i przykładowe przebiegi.



Rysunek 8.20: Schemat do problemu P8.7

**Odpowiedź**

Jest to ogranicznik z dolnym ograniczeniem równym napięciu progowemu diody. Wykazanie tego z użyciem wykresów pozostawiamy czytelnikowi, który może wzorować się na treści podrozdziału 8.6.

**Problem P8.8**

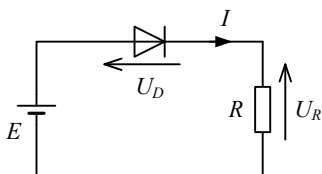
Powtórnie wykonać polecenie z problemu P8.7 po włączeniu diody odwrotnie.

**Odpowiedź**

Wskutek przełączenia elementu powstaje ogranicznik napięcia z góry, na poziomie równym progowemu napięciu diody.

**Problem P8.9**

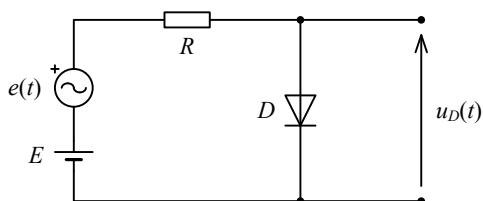
Obliczyć  $U_D$ ,  $U_R$ ,  $I$  oraz rezystancję statyczną diody w układzie pokazanym na rys. 8.21. Dane są:  $R = 10\text{k}\Omega$ ,  $r_r = 30\Omega$  oraz  $E = 20\text{V}$ .



Rysunek 8.21: Schemat do problemu P8.9

**Problem P8.10**

Określić przebieg  $u_D(t)$  w układzie pokazanym na rysunku 8.22. Dane są:  $R = 200\Omega$ ,  $e(t) = 13\sin\omega t\text{ mV}$  oraz  $E = 5\text{V}$ .



Rysunek 8.22: Schemat do problemu P8.10

**Wskazówka**

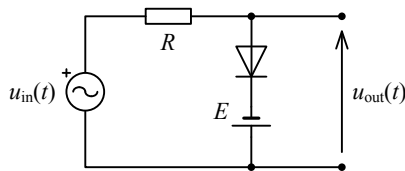
Należy zwrócić uwagę na różnicę między jednostkami  $e(t)$  i  $E$ .

**Problem P8.11**

Jak zmieni się działanie ograniczników z rys. 8.9 i 8.10 wskutek odwrotnego włączenia diody albo źródła? Dla każdego przypadku narysować charakterystykę przejściową i wynik ograniczania sygnału sinusoidalnego.

**Problem P8.12**

Na jakiej zasadzie działa ogranicznik przedstawiony na rys. 8.23? Jak zmieni się działanie układu wskutek odwrotnego włączenia diody i źródła?



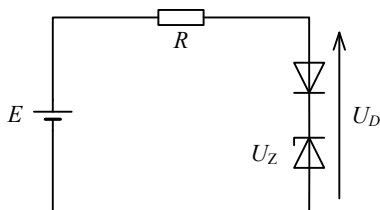
Rysunek 8.23: Schemat do problemu P8.12

**Wskazówka**

Jest to ogranicznik napięcia z góry. Poziom ograniczania jest określony różnicą progowego napięcia diody oraz  $E$ .

**Problem P8.13**

Omówić działanie diod Zenera w układzie pokazanym na rysunku 8.24. Podać wartość napięcia  $U_D$  i obliczyć natężenie prądu, który płynie w obwodzie. Dane są:  $R = 10\Omega$ ,  $E = 20V$ ,  $U_Z = 5V$  oraz  $U_T = 0,7V$ .



Rysunek 8.24: Schemat do problemu P8.13

**Problem P8.14**

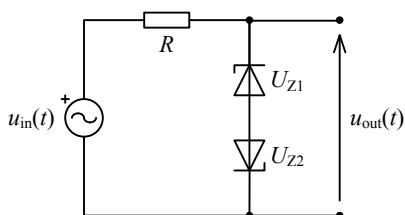
Określić przebieg napięcia na rezystorze w dwóch wybranych ogranicznikach.

**Wskazówka**

Należy wykorzystać napięciowe prawo Kirchhoffa, które obowiązuje w odniesieniu do napięć stałych oraz zmiennych. Na jego podstawie stwierdzamy, że wystarcza odjąć napięcie wyjściowe od wejściowego.

**Problem P8.15**

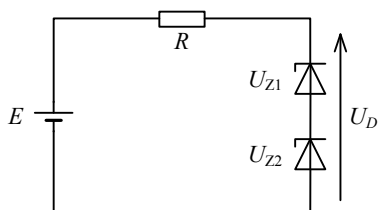
Narysować przebieg napięcia na wyjściu układu z rys. 8.25, przyjmując, że na wejściu jest sygnał sinusoidalny o amplitudzie 10V. Do czego można wykorzystać ten układ w przypadku, gdy amplituda napięcia wejściowego jest znacznie większa od napięcia stabilizacji  $U_Z$ ? Dane są:  $R = 10\Omega$ ,  $U_{Z1} = 5V$  oraz  $U_{Z2} = 7V$ .



Rysunek 8.25: Schemat do problemu P8.15

**Problem P8.16**

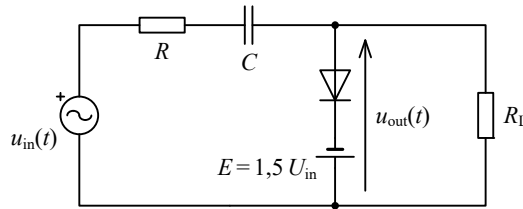
Objasnić działanie diod stabilizacyjnych w układzie pokazanym na rysunku 8.26. Podać wartość napięcia  $U_D$  i obliczyć natężenie prądu, który płynie w obwodzie. Dane są:  $R = 10\Omega$ ,  $E = 20V$ ,  $U_{Z1} = 5V$  oraz  $U_{Z2} = 7V$ .



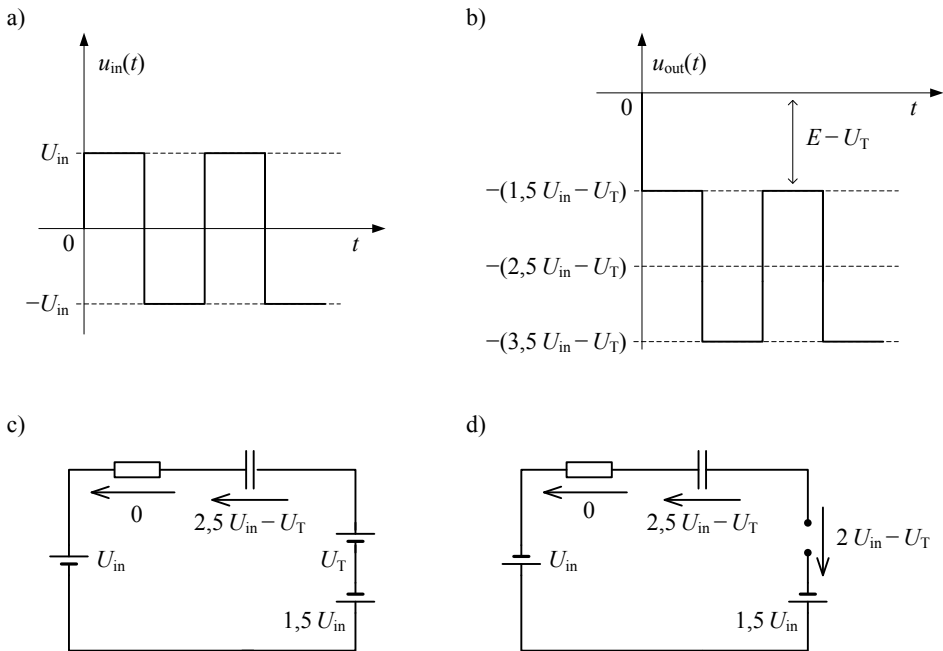
Rysunek 8.26: Schemat do problemu P8.16

**Problem P8.17**

Omówić działanie układu przesuwającego napięcie, który pokazano na rys. 8.27. Jak zmienia się przebieg wyjściowy po odwróceniu zacisków diody i/lub źródła? Należy rozpatrzyć wszystkie możliwe konfiguracje.



Rysunek 8.27: Schemat do problemu P8.17



Rysunek 8.28: Wykresy i schematy do rozwiązania problemu P8.17

**Wskazówka**

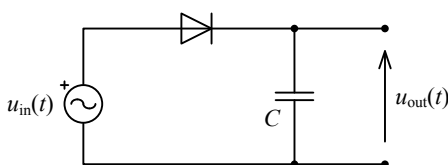
Źródło napięcia stałego powoduje dodatkowe przesunięcie przebiegu wzdłuż osi amplitudy, co ilustrują wykresy z rys. 8.28.

Analiza układu obejmuje określenie rozkładu napięć na elementach w dwóch przypadkach: (i) dioda przewodzi, a naładowany kondensator uniemożliwia przepływ prądu (rys. 8.28c), oraz (ii) dioda działa zaporowo, uniemożliwiając rozładowanie kondensatora (rys. 8.28d). Warto zauważyć, że na kondensatorze występuje napięcie większe od obydwu napięć źródłowych.

---

**Problem P8.18**

Jaka jest zasada działania układu pokazanego na rys. 8.29? Do czego można go wykorzystać?



Rysunek 8.29: Schemat do problemu P8.18

**Wskazówka**

Jest to detektor szczytowy. Na wyjściu rejestruje on maksymalną wartość sygnału wejściowego pod warunkiem, że obciążenie ma dużą rezystancję, co uniemożliwia rozładowanie kondensatora.

---

**Problem P8.19**

Jak wygląda przebieg na wyjściu i charakterystyka przejściowa ogranicznika z rys. 8.11, gdy (i) źródła mają równe wartości oraz (ii) w miejscu jednego ze źródeł jest zwarcie?

---

**Problem P8.20**

Jakie napięcie wystąpi na wyjściu szeregowego połączenia 7 bramek AND, takich jak na rys. 8.15a, gdy wejście układu zostanie zwarte do zera? Należy przyjąć, że napięcie progowe diody wynosi  $0,7\text{ V}$ .

**Wskazówka**

Chociaż iloczyn zer logicznych powinien wynieść „0”, napięcie wyjściowe będzie odpowiadało „1”, gdyż zostanie określone 7-krotnością napięcia progowego.

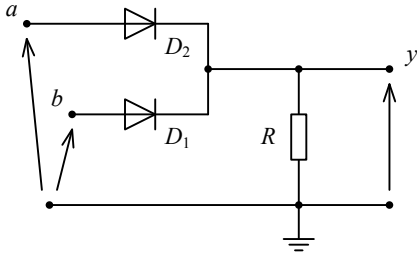
---



**Problem P8.21**

Objasnić działanie bramki, której schemat pokazano na rys. 8.30. Jest to bramka OR w logice diodowo-rezystorowej.

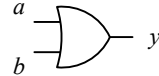
a)



b)

$a$	$b$	$y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

c)

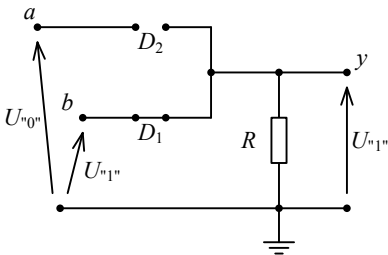


Rysunek 8.30: Bramka OR w logice diodowo-rezystorowej: (a) schemat, (b) tablica prawdy oraz (c) symbol

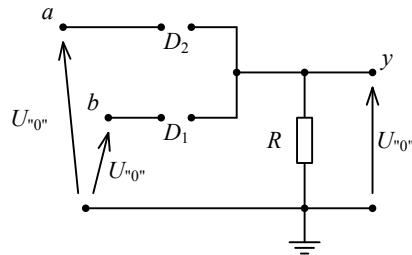
**Wskazówka**

Na rys. 8.31 objaśniono działanie układu dla dwóch z czterech możliwych kombinacji napięć wejściowych. Rozpatrzenie dwóch pozostałych przypadków pozostawiamy czytelnikowi.

a)



b)



Rysunek 8.31: Zasada działania bramki OR z rys. 8.30a.

## Rozdział 9

# Tranzystory i ich zastosowania

### Wprowadzenie

Chociaż dioda jest bardzo użytecznym elementem, nie pozwala ona kontrolować jednego sygnału elektrycznego innym. Funkcję tę, stanowiącą podstawę działania wzmacniaczy, generatorów i szybkich układów przełączających, oferuje tranzystor. Wynalazła go w 1948 roku trójka naukowców: W. Shockley, J. Bardeen i W. Brattain, których osiągnięcie zostało wyróżnione już w kilka lat później, w 1956, Nagrodą Nobla z fizyki.

Tranzystor jest elementem z trzema wyprowadzeniami, w którym rezystancja między dwoma zaciskami zależy od sygnału doprowadzonego do trzeciej elektrody. Stąd pochodzi nazwa elementu, która jest skrótem od *transfer resistor*. W porównaniu do próżniowych lamp elektronowych, które dawniej stosowano w wyżej wymienionych układach, tranzystor jest znacznie mniejszy i potrzebuje mniej energii do działania.

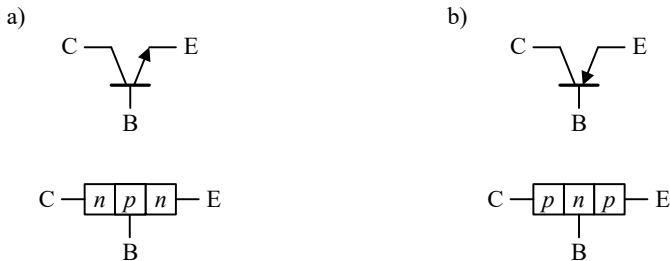
W niniejszym rozdziale wyjaśniono działanie tranzystorów bipolarnych i unipolarnych oraz najważniejszych układów, w których są one wykorzystywane, zarówno analogowych, jak i cyfrowych.

## 9.1 Tranzystory bipolarne

### 9.1.1 Budowa i działanie

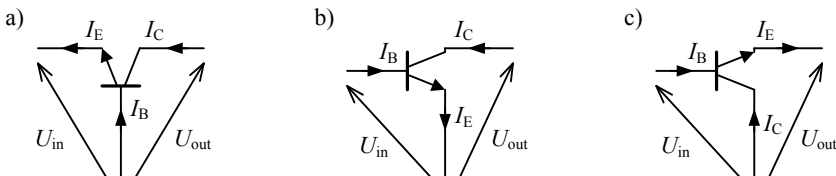
Tranzystor bipolarny składa się z trzech warstw półprzewodnika, które tworzą dwa złącza *pn* zestawione przeciwstawnie, tak jakby dwie diody miały wspólną anodę lub katodę. Do każdej warstwy półprzewodnika jest przyłączony oddzielny zacisk tranzystora. Element posiada zatem trzy wyprowadzenia, których nazwy opisują pełnione funkcje: kolektor (ang. *collector*: C), emiter (ang. *emitter*: E) i bazę (ang. *base*: B).

Ponieważ złącza półprzewodnikowe można zestawić na dwa sposoby, rozróżniane są tranzystory *npn* i *pnp*, których symbole i struktury wewnętrzne zostały pokazane na rys. 9.1. Typ tranzystora decyduje o zwrotach prądów i napięć polaryzujących, które są potrzebne do wprowadzenia go w określony stan po włączeniu do układu. Typ elementu nie wpływa jednak na wartości tych wielkości ani na zasadę działania i ogólne właściwości tranzystora. Dlatego w dalszych rozważaniach skupimy się na tranzystorach *npn*, które można uważać za łatwiejsze do analizowania, ponieważ w odpowiednich układach polaryzacji nie występują ujemne potencjały.



Rysunek 9.1: Symbol i budowa tranzystora bipolarnego typu (a) *npn* i (b) *pnp*

Gdy tranzystor jest włączony do obwodu, jedna para końcówek pełni funkcję wejścia, a druga — wyjścia. Obie pary mają wspólny zacisk, którym może być każda z elektrod. Użyteczne są trzy sposoby włączenia elementu do obwodu, nazywane konfiguracjami lub układami pracy, które zilustrowano na rys. 9.2. Zależnie od sposobu włączenia tranzystora uzyskuje się układy o odmiennych właściwościach, ale w każdym przypadku tranzystor działa tak samo.



Rysunek 9.2: Możliwe sposoby włączenia tranzystora *npn* do obwodu: (a) „wspólna baza”, (b) „wspólny emiter” i (c) „wspólny kolektor”

Analizując tranzystory *npn*, przyjmuje się, że prądy bazy i kolektora wpływają do elementu, a prąd emitera wypływa. W tranzystorze *pnp* prądy są skierowane przeciwnie. Zawsze zachodzi bilans prądów:

$$I_E = I_B + I_C \quad (9.1)$$

Kluczową właściwością tranzystora jest to, że prądy kolektora i emitera zależą od znacznie mniejszego prądu bazy, co jest interpretowane jako wzmacnianie prądu. W uproszczeniu wzmacniające działanie tranzystora można opisać proporcjonalnością prostą

$$\frac{I_C}{I_B} = \beta \quad (9.2)$$

gdzie  $\beta$  jest nazywane współczynnikiem wzmocnienia prądowego i dla dobrego tranzystora przyjmuje dużą wartość — kilkadziesiąt do kilkuset. Różnica między natężeniami prądów sięga więc dwóch rzędów wielkości.

Natężenia prądów kolektora i emitera są zbliżone, czyli nie ma wzmacniania z perspektywy odpowiednich zacisków. Związek między tymi prądami opisuje się z użyciem innego współczynnika:

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} \quad (9.3)$$

ale można łatwo wykazać (zob. problem P9.2), że współczynniki są bezpośrednio powiązane w następujący sposób:

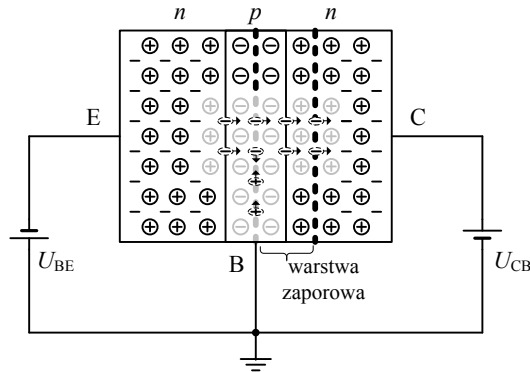
$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (9.4)$$

co oznacza, że typowo  $\alpha \approx 1$ .

Rysunek 9.3 wyjaśnia zjawiska zachodzące wewnątrz tranzystora *npn* w stanie aktywnym. Złącze baza-emiter jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia, natomiast złącze baza-kolektor — w kierunku zaporowym. Choć w drugim złączu tworzy się warstwa zubożona, to płynie tam znaczny prąd wsteczny, bliski prądowi emitera. Opiera się on na ruchu elektronów, które pod wpływem różnicy potencjałów między emiterem a bazą są wstrzykiwane z obszaru *n* do *p*, dyfundują do warstwy zubożonej, a stamtąd są wyciągane do kolektora, którego potencjał jest wyższy od potencjału bazy.

Prąd bazy opiera się na dziurach, które wypełniają się wstrzykniętymi elektronami, co nazywa się rekombinacją. Odpowiednio domieszkując półprzewodnik *n* w emiterze i zwężając warstwę półprzewodnika typu *p* w bazie, można spowodować, że rekombinacja zachodzi dużo rzadziej niż dyfuzja elektronów do obszaru zubożonego, który otacza złącze baza-kolektor. Dlatego prąd bazy jest znacznie mniejszy od prądu kolektora. Nie jest on bynajmniej efektem ubocznym omawianych zjawisk, bo ilość dziur wprowadzanych do bazy zależy od zewnętrznego obwodu polaryzu-

jącego, a jednocześnie silnie wpływają one na intensywność strumienia elektronów przechodzących z emitera do kolektora. Nieznaczne zmniejszenie liczby dziur w bazie istotnie zwiększa tam kumulację elektronów oczekujących na przejście, czyli niezrównoważonego ładunku ujemnego, który hamuje wstrzykiwanie kolejnych elektronów z emitera. Dlatego zarówno prąd emitera, jak i kolektora zależą od prądu bazy, a nie odwrotnie.



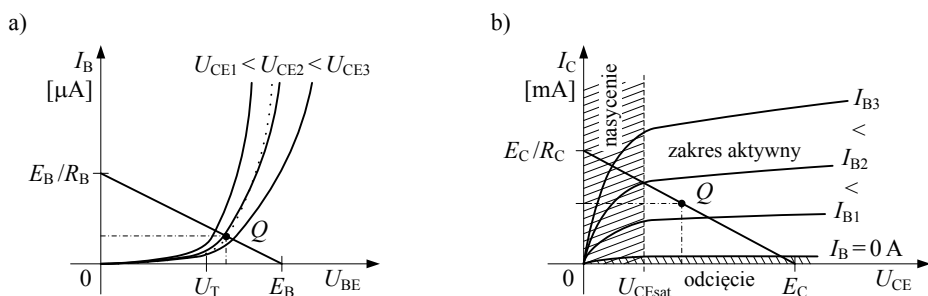
Rysunek 9.3: Zasada działania tranzystora bipolarnego typu *npn*

### 9.1.2 Punkt pracy i polaryzacja

W odróżnieniu od diody do opisanego tranzystora potrzebne są przynajmniej dwie rodziny charakterystyk. Jedna powinna przedstawiać wielkości elektryczne w obwodzie wejściowym, druga — w wyjściowym. Sposób włączenia tranzystora do obwodu decyduje, które napięcia i prądy pełnią funkcję zmiennych niezależnych, a które stanowią parametry. Parametry reprezentują związki między wielkościami w obwodzie wejściowym i wyjściowym. Dysponując wymienionymi dwiema rodzinami charakterystyk, można wyznaczyć pozostałe: przejściową i zwrotną, które zwykle są pomijane w kartach katalogowych.

Za podstawowy można uważać zestaw charakterystyk wejściowych i wyjściowych dla konfiguracji „wspólny emiter”, pokazany na rys. 9.4. Pierwsza rodzina wykresów opisuje działanie złącza baza-emiter, które funkcjonuje podobnie jak dioda, ale na nachylenie krzywej w obszarze przewodzenia wpływa niezależne napięcie kolektor-emiter. Druga rodzina linii przedstawia związek między prądem kolektora a napięciem  $U_{CE}$ , który zależy od natężenia prądu bazy.

Pod pojęciem punktu pracy tranzystora rozumiemy pełne zestawienie wartości składowych stałych prądów i napięć na zaciskach tranzystora. Wystarczy jednak podanie trzech wielkości, najczęściej  $I_B$ ,  $I_C$  i  $U_{CE}$ , gdyż znając je, można wyznaczyć prąd emitera i pozostałe napięcia między elektrodami.



Rysunek 9.4: Charakterystyki tranzystora bipolarnego *npn* w konfiguracji „wspólny emiter”: (a) wejściowa i (b) wyjściowa

Tablica 9.1: Stan tranzystora *npn* jako efekt polaryzacji złącz baza-emiter i baza-kolektor

Stan	Polaryzacja baza-emiter	Polaryzacja baza-kolektor
Nasycenia	przewodzenie	przewodzenie
Zatkania	zaporowa	zaporowa
Aktywny	przewodzenie	zaporowa
Odwrotny-aktywny	zaporowa	przewodzenie

Tranzystor może znajdować się w jednym z czterech stanów, ponieważ są w nim dwa złącza półprzewodnikowe, które niezależnie można polaryzować w kierunku przewodzenia lub zaporowym. Tabela 9.1 przedstawia zależność stanu elementu od sposobu polaryzowania złącz.

Jeżeli obydwa złącza są spolaryzowane w kierunku przewodzenia, to tranzystor jest w stanie nasycenia, a gdy są one spolaryzowane zaporowo, element znajduje się w stanie odcięcia (zatkania). Przełączanie tranzystora między tymi skrajnie różnymi stanami jest wykorzystywane w technice cyfrowej, co zostanie dokładniej omówione w podrozdziale 9.4.

W układach analogowych kluczową rolę odgrywa stan aktywny, który występuje wtedy, kiedy złącze baza-emiter jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia, a złącze baza-kolektor — w kierunku zaporowym. Tranzystor wykazuje wtedy właściwości wzmacniające.

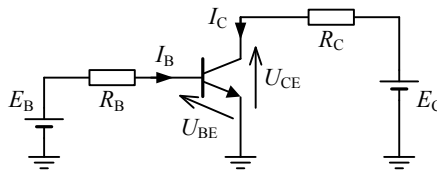
Odwroćenie polaryzacji złącz wprowadza element w tzw. odwrotny stan aktywny, w którym również obserwuje się wzmacnianie, ale znacznie słabsze niż w stanie aktywnym. Dlatego odwrotny stan aktywny nie jest wykorzystywany w praktyce i bywa tylko następstwem pomylenia emitera z kolektorem. Choć symetria zestawień półprzewodników na rys. 9.1 sugeruje, że te elektrody są równoważne, to w rzeczywistych elementach różnią się one domieszkowaniem, co poprawia działanie tranzystora przy jednej konfiguracji napięć kosztem drugiej.

Na charakterystykach obszary aktywny i nasycenia odgranicza specyficzna wartość napięcia kolektor-emiter,  $U_{CEsat}$ , typowo  $0,2 \dots 0,35$  V. Obszar zatkania jest natomiast wyznaczony zerowym prądem bazy, któremu odpowiada minimalne natężenie prądu kolektora.

Za ulokowanie punktu pracy  $Q$  tranzystora w wybranym miejscu charakterystyki odpowiada układ zasilania i polaryzacji, który może przyjmować różne formy. Rysunek 9.5 pokazuje układ, który można uważać za najprostszy, w którym obowiązują następujące równania:

$$\begin{cases} E_B = R_B I_B + U_{BE} \\ E_C = R_C I_C + U_{CE} \end{cases} \quad (9.5)$$

Znając charakterystyki tranzystora, prądy i napięcia na jego zaciskach można wyznaczyć metodą graficzną, której istotę wyjaśnia rys. 9.4. Proste obciążenia, określone napięciami zasilania i rezystancjami w obwodach bazy i kolektora na rys. 9.5, wskazują położenia punktu pracy, które dopuszczają obwód polaryzacji. Charakterystyki tranzystora wyznaczają natomiast ograniczenia na położenie punktu pracy, które wynikają z parametrów danego elementu półprzewodnikowego. Przecięcia prostej z krzywymi na jednym wykresie wyznaczają punkty na drugiej charakterystyce. Punkty te tworzą krzywą (na rysunku zaznaczoną linią kropkową), której przecięcie z odpowiednią prostą obciążenia stanowi poszukiwany punkt pracy.

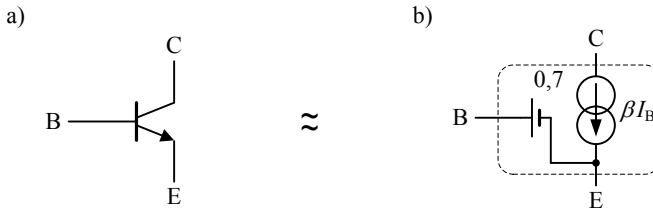


Rysunek 9.5: Podstawowy układ polaryzacji tranzystora bipolarnego *npn* w konfiguracji WE

### 9.1.3 Obliczeniowe modele tranzystora

Analityczne i komputerowe metody analizowania układów z tranzystorami opierają się na różnego rodzaju modelach matematycznych tego elementu. Modele dokładniejsze wymagają bardziej skomplikowanych obliczeń.

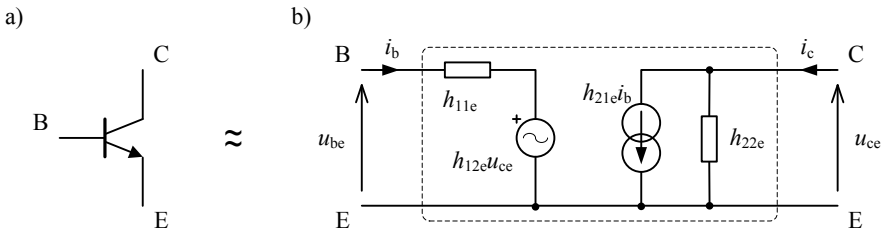
Jeżeli mamy obwód prądu stałego z tranzystorem w stanie aktywnym, to można przyjąć, że złącze baza-emiter zachowuje się tak jak przewodząca idealna dioda o napięciu progowym  $0,7$  V, zaś między kolektorem a emiterem jest źródło prądu o natężeniu  $\beta I_B$ . Ten najprostszy model zilustrowano na rys. 9.6.



Rysunek 9.6: Prosty model tranzystora w stanie aktywnym stosowany do analizowania obwodów polaryzacji

Inne sytuacje wymagają podejść bardziej złożonych. W szczególności wtedy, kiedy interesuje nas oddziaływanie tranzystora w stanie aktywnym na niewielkie sygnały zmienne, możemy zastąpić go modelem małosygnałowym<sup>1</sup>, pokazanym na rys. 9.7. Opiera się on na hybrydowej reprezentacji czwórnik, z którym utożsamiamy tranzystor. Ponieważ analiza czwórników wykracza poza zakres niniejszej książki, podajemy jedynie relacje między wielkościami elektrycznymi w omawianym obwodzie zastępczym:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{be} = h_{11e} i_b + h_{12e} u_{ce} \\ i_c = h_{21e} i_b + h_{22e} u_{ce} \end{array} \right\}. \quad (9.6)$$



Rysunek 9.7: Prosty model tranzystora stosowany do analizowania składowych zmiennych przy niewielkich napięciach wejściowych

Tak proste modele można stosować tylko pod warunkiem, że dopuszczalne jest oddzielenie analizowania układu polaryzacji (składowych stałych) od rozpatrywania składowych zmiennych. Najpierw trzeba ustalić punkt pracy tranzystora

<sup>1</sup> Za małe należy uważać sygnały, które są znacznie mniejsze od prądów oraz napięć polaryzujących tranzystor i powodują nieznaczne przesunięcia punktu pracy po charakterystyce prądowo-napięciowej elementu, tak że można zakładać jej liniowość w wykorzystywanym zakresie. Na przykład jeżeli napięcia polaryzacji są rzędu kilku V, to małym można zwykle nazywać napięcie nieprzekraczające kilkunastu mV.



dla zadanych napięć polaryzujących, wykorzystując pierwszy model. Następnie drugi model jest rozpatrywany w diametralnie odmiennym układzie — po wyłączeniu źródeł napięcia i prądu stałego, tak jak przy obliczaniu rezystancji zastępczej Thevenina (zob. podrozdział 3.3). Kondensatory należy rozpatrywać odpowiednio do rodzaju wzbudzenia: w pierwszym przypadku trzeba przyjmować, że w miejscu kondensatora jest przerwa, a w drugim, że jest zwarcie.

## 9.2 Wzmacniacze

### 9.2.1 Ogólna charakterystyka układów wzmacniających

Wzmacniaczem nazywamy układ, który zwiększa moc sygnału bez zmiany jego kształtu. Energia prądu stałego dostarczana ze źródła zasilającego wzmacniacz jest przekształcana w energię sygnału wyjściowego, którego przebieg jest określony sygnałem z wejścia.

Wzmacnianie sygnału jest potrzebne w wielu sytuacjach. Na przykład mikrofon, przetwarzając drgania mechaniczne w elektryczne, wytwarza napięcie rzędu ułamków mV, które jest za słabe do rejestrowania czy przesyłania. Z kolei głośnik, pełniący funkcję odwrotną, musi być sterowany sygnałem jeszcze silniejszym niż potrzebny do wymienionych operacji. Wreszcie transmisja zarówno radiowa, jak i przewodowa, wiąże się z osłabieniem sygnału, które należy kompensować. Dlatego wzmacniacze wchodzi w skład większości urządzeń elektronicznych, nie wyłączając cyfrowych.

Rozróżnia się wzmacniacze napięcia, prądu i mocy, stałych i zmiennych, sinusoidalnych i impulsowych. Każde zastosowanie wymaga dedykowanego schematu i odpowiednich metod projektowych. Zawsze jednak sercem wzmacniacza jest przynajmniej jeden element czynny, najczęściej tranzystor<sup>2</sup>.

Symbol wzmacniacza pokazano na rys. 9.8. Podstawowym parametrem układu jest wzmocnienie napięciowe, czyli stosunek amplitud napięcia wejściowego do wyjściowego:

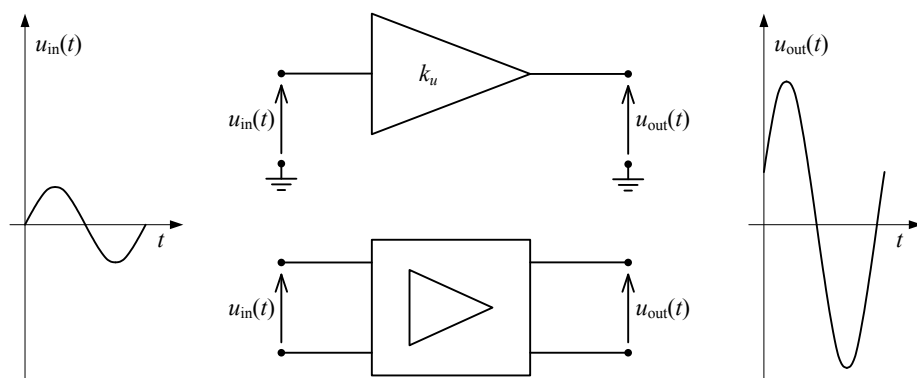
$$k_u = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} \quad (9.7)$$

Ponieważ wzmocnienie może zmieniać się w szerokim zakresie, o kilka rzędów wielkości, często przedstawia się je w decybelach:

$$k_u = 20 \log_{10} \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} \text{ [dB]} \quad (9.8)$$

czyli na skali logarytmicznej, którą wprowadzono w rozdziale 6, omawiając dobroć i selektywność obwodu rezonansowego.

<sup>2</sup> Pierwotnie wzmacniacze budowano z użyciem lamp elektronowych, ale obecnie te przyrządy są stosowane tylko w szczególnych przypadkach, takich jak np. nadajniki radiowe o dużej mocy.



Rysunek 9.8: Symbole wzmacniacza

Ubočnym efektem wzmacniania jest zwykle przesuwanie sygnału w fazie. Często spotyka się wzmacniacze tranzystorowe odwracające fazę, czyli wprowadzające przesunięcie o  $180^\circ$ .

W niektórych zastosowaniach istotne może być wzmocnienie mocy :

$$k_p = 10 \log_{10} \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \text{ [dB]} \quad (9.9)$$

Współczynnik, przez który mnożony jest logarytm, jest dwukrotnie mniejszy jak w (9.8), gdyż moc jest proporcjonalna do kwadratu napięcia, a podniesienie wielkości do kwadratu odpowiada podwojeniu logarytmu.

Impedancja wejściowa reprezentuje obciążenie, jakie wzmacniacz stanowi dla źródła sygnału. Impedancja wyjściowa wzmacniacza określa natomiast optymalne obciążenie, którego podłączenie do wyjścia zapewnia dopasowanie mocy (zob. podrozdział 5.14).

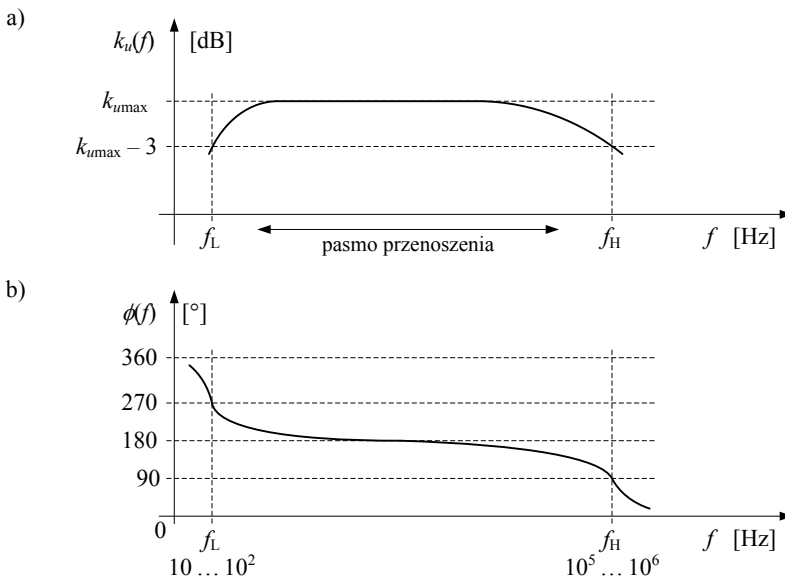
Rzeczywiste układy wzmacniają maksymalnie i bez zniekształceń tylko sygnały złożone z komponentów sinusoidalnych o częstotliwościach z ograniczonego zakresu, nazywanego pasmem przenoszenia wzmacniacza. Składowe o częstotliwościach zbyt małych i zbyt dużych są wzmacniane słabiej albo wzmacniacz przesuwają je w fazie tak, że przebieg wyjściowy jest zniekształcony w porównaniu do wejściowego. Spowodowane jest to niedoskonałością elementów elektrycznych i elektronicznych, a dokładniej występowaniem pasożytniczych pojemności i indukcyjności. Dlatego można zauważyć analogię między analizą częstotliwościową wzmacniaczy i obwodów rezonansowych (zob. rozdział 6).

Zmiany działania wzmacniacza w funkcji częstotliwości sygnału wejściowego przedstawia się za pomocą charakterystyki częstotliwościowej, która składa się z dwóch części. Na jednej, zwanej charakterystyką amplitudową, przedstawiane są

zmiany wzmocnienia,  $k_u$ , a na drugiej, zwanej charakterystyką fazową, — zmiany przesunięcia fazowego,  $\phi$ , które układ powoduje w sygnale sinusoidalnym o danej częstotliwości. Czasem wygodnie jest rozpatrywać te wielkości łącznie, traktując je jako moduł i argument zespolonej funkcji częstotliwości.

Typowe kształty charakterystyk wzmacniacza pokazano na rys. 9.9. Zawsze można rozróżnić na nich pasmo przenoszenia oraz pozostały zakres częstotliwości nazywany pasmem tłumienia. Pasmo przenoszenia jest określone częstotliwościami granicznymi, dla których wzmocnienie napięciowe zmniejsza się o 3 dB, czyli  $\sqrt{2}$  razy w porównaniu do swojej wartości maksymalnej. Z innego punktu widzenia na granicy pasma przenoszenia moc sygnału wyjściowego spada do połowy swojej wartości maksymalnej (zob. podrozdział 6.2.4). W paśmie przenoszenia przesunięcie fazowe powinno być stałe, ale praktyczne układy spełniają to wymaganie tylko w przybliżeniu.

Wykresy takie jak na rys. 9.9 są najczęściej sporządzane z użyciem logarytmicznej skali osi częstotliwości. Taką reprezentację charakterystyki częstotliwościowej nazywa się wykresami Bodego<sup>3</sup>. Skala logarytmiczna pozwala przybliżyć krzywe odcinkami prostych o asymptotycznym charakterze.

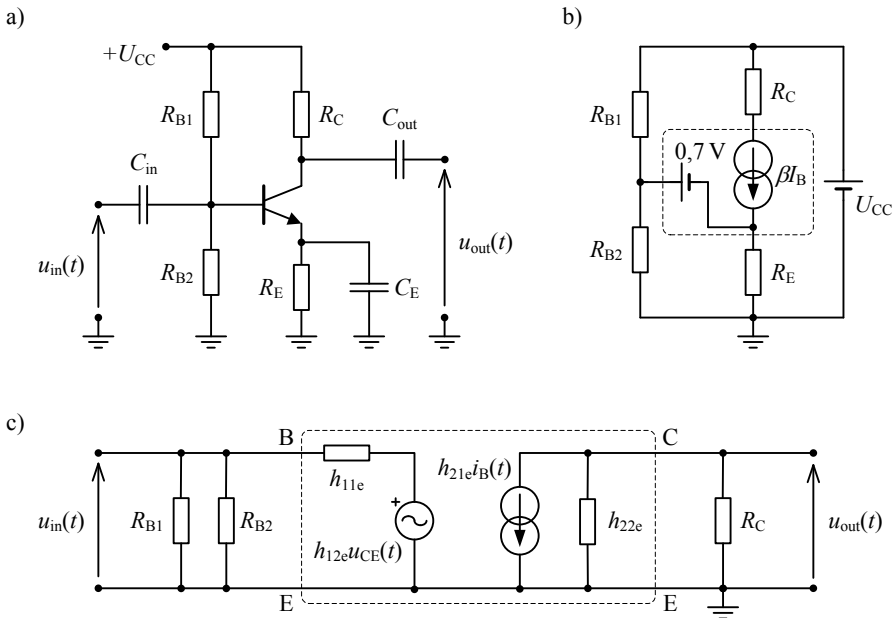


Rysunek 9.9: Typowy ogólny kształt amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej wzmacniacza

<sup>3</sup> Hendrik Wade Bode (1905–1982) — inżynier Bell Laboratories; nie wynalazł wykresów nazwanych jego imieniem, ale spopularyzował je, badając za ich pomocą wzmacniacze ze sprzężeniami zwrotnymi.

### 9.2.2 Zasada działania wzmacniacza

Działanie wzmacniaczy tranzystorowych wyjaśnijmy na przykładzie prostego układu z rys. 9.10a, w którym tranzystor pracuje w konfiguracji „wspólny emiter”. Na uwagę zasługuje obecność kondensatorów, które powodują, że dla napięć stałych układ zachowuje się zupełnie inaczej niż dla sygnałów zmiennych z pasma przenoszenia. Zgodnie z postulatami przedstawionymi w podrozdziale 9.1 możemy te dwa przypadki rozpatrywać oddzielnie, wykorzystując odmienne uproszczone modele elementu półprzewodnikowego.



Rysunek 9.10: Schematy wzmacniacza z tranzystorem w układzie „wspólny emiter”: (a) oryginalny, (b) dla składowej stałej i (c) dla składowych zmiennych napięć

Aby przeanalizować oddziaływanie napięć (składowych) stałych, należy rozpatryć układ polaryzacji z rys. 9.10b. Powstaje on z rys. 9.10a w wyniku zastąpienia tranzystora modelem z rys. 9.6, a kondensatorów — przerwami. Zadaniem  $C_{in}$  i  $C_{out}$  jest odseparowanie stałych prądów i napięć od źródła sygnału wejściowego i od obciążenia wzmacniacza.

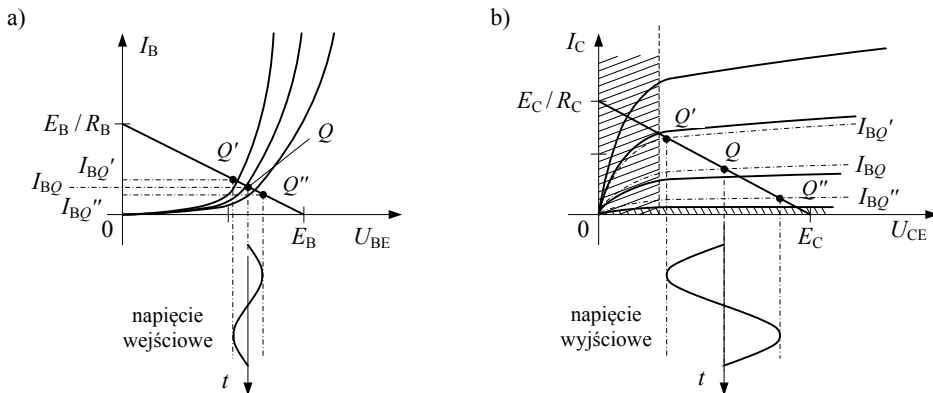
Rozpatrując składowe zmienne napięcia, tranzystor zastępujemy modelem z rys. 9.7, przy czym

$$\begin{aligned} h_{11e} &= r_{be} & h_{12e} &\rightarrow 0 \\ h_{21e} &\rightarrow \beta & h_{22e} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9.10)$$

i przyjmujemy, że kondensatory i źródło zasilające reprezentują sobą zwarcia. W wyniku tych działań otrzymujemy układ z rys. 9.10c, który może wyglądać zaskakująco dla niektórych czytelników. Rezystory  $R_{B1}$  i  $R_{B2}$  są dołączone równolegle do wejścia, zaś  $R_C$  — równolegle do wyjścia. Rezystancja emitera w ogóle nie oddziałuje na składowe zmienne, gdyż kondensator  $C_E$  dezaktywuje  $R_E$ , zwierając zaciski tego rezystora dla składowych zmiennych napięć. Natomiast dla składowej stałej napięcia kondensator stanowi przerwę, a rezystor realizuje sprzężenie zwrotne (zob. podrozdział 9.6).

Układ polaryzacji ustala spoczynkowy punkt pracy, w którym tranzystor znajduje się wtedy, gdy jest zerowe napięcie na wejściu wzmacniacza. Oscylacje sygnału wejściowego wywołują zmiany napięć i prądów tego elementu, czyli chwilowe odchylenia punktu pracy od położenia bazowego. Chociaż sygnał rzędu miliwoltów, oddziałując na złącze baza-emiter, powoduje nieznaczne zmiany prądu bazy, to tranzystor przekształca je w wielokrotnie większe zmiany prądu kolektora i napięcia kolektor-emiter, które określa napięcie wyjściowe. W kontekście charakterystyk ilustruje to rys. 9.11.

Doprowadzenie napięcia wejściowego o zbyt dużej amplitudzie skutkuje przesterowaniem wzmacniacza. Punkt pracy wykracza wtedy poza obszar aktywny, więc sygnał wyjściowy jest zniekształcony.



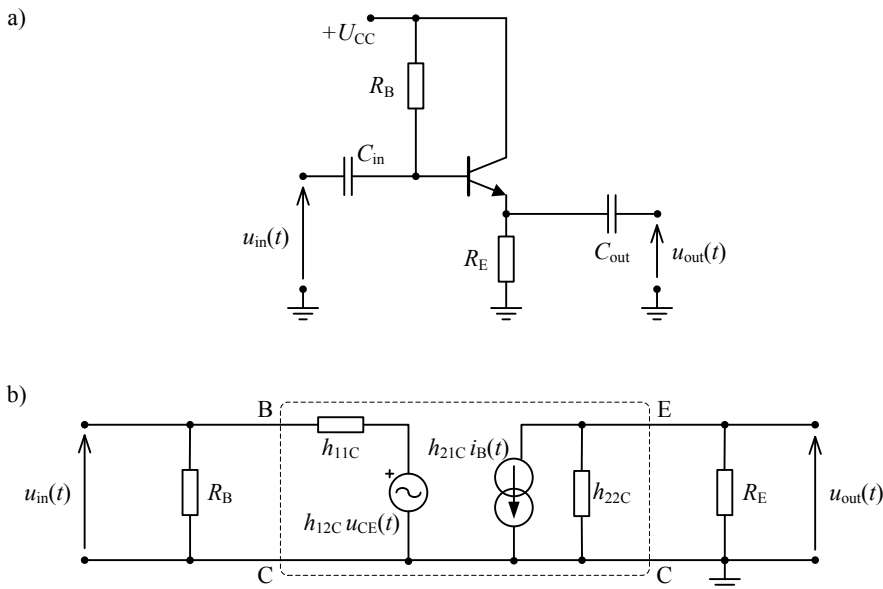
Rysunek 9.11: Wzmacnianie sygnału w użyciu tranzystora bipolarnego

### 9.2.3 Wtórnik emiterowy

Za szczególną odmianę wzmacniacza można uważać wtórnik emiterowy, który zwiększa natężenie prądu, nieznacznie zmniejszając napięcie, zgodnie z następującymi parametrami hybrydowymi:

$$\begin{aligned} h_{11c} &\rightarrow r_{be} & h_{12c} &\rightarrow 1 \\ h_{21c} &\rightarrow -(\beta + 1) & h_{22c} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

Schemat układu widnieje na rys. 9.12a, zaś rys. 9.12b pokazuje odpowiedni schemat zastępczy dla składowych zmiennych, który uzyskano metodą omówioną w podrozdziale 9.2.2. Narysowanie i rozpatrzenie układu zastępczego dla napięć stałych pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.



Rysunek 9.12: Wtórnik emiterowy: (a) schemat oryginalny i (b) schemat zastępczy dla składowych zmiennych

We wtórniku tranzystor pracuje w konfiguracji „wspólny kolektor”, ale trudno to wywnioskować bezpośrednio na podstawie rys. 9.12a. Schemat zastępczy z rys. 9.12b pokazuje wyraźniej, że kolektor stanowi elektrodę wspólną dla wejścia i wyjścia, gdyż elektroda ta zostaje zwarta do masy po wyłączeniu zasilania na potrzeby analizowania składowych zmiennych.

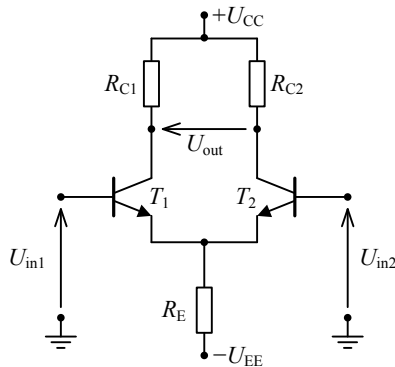
Podobnie jak w przypadku konfiguracji „wspólny emiter” rezystor  $R_E$  realizuje sprzężenie zwrotne, ale we wtórniku jest ono znacznie silniejsze: całe napięcie wyjściowe powraca na wejście, gdyż sygnał wyjściowy jest pobierany z emitera. Zatem wzmocnienie napięciowe jest bliskie jedności, zawsze nieco mniejsze.

Z kolei wzmocnienie prądowe jest duże, bliskie  $\beta$ , czyli impedancja obciążenia decyduje o impedancji wejściowej wtórnika, która jest  $\beta$  razy większa. Dlatego wtórnik jest powszechnie stosowany jako układ buforowy, który wstawia się między źródło sygnału a wzmacniacz, którego nieduża impedancja wejściowa stanowiłaby dla tego źródła zbyt duże obciążenie.

### 9.2.4 Wzmacniacz różnicowy

Proste układy tranzystorowe można łączyć na różne sposoby. W szczególności zestawiając w szereg kilka wzmacniaczy, uzyskuje się wypadkowe wzmocnienie równe iloczynowi wzmocnień poszczególnych stopni. We wzmacniaczu przeciwobnym dwa tranzystory współpracują w ten sposób, że jeden odpowiada za wzmacnianie dodatniej części przebiegu wejściowego, a drugi — za wzmacnianie części ujemnej, co daje dużą sprawność energetyczną układu. Rozwinięciem tej koncepcji jest wzmacniacz z tranzystorami komplementarnymi (przeciwstawnymi), którego dotyczy zadanie P9.4.

Wzmacniacz różnicowy powstaje ze sprzęgnięcia dwóch jednakowych stopni wzmacniających w konfiguracji „wspólny emiter” za pośrednictwem wspólnego obwodu emiterowego, tak jak na rys. 9.13. Za napięcie wyjściowe brana jest różnica potencjałów kolektorów, która jest proporcjonalna do różnicy napięć wejściowych. Proporcjonalność wynika z tego, że przy ustalonym potencjale bazy jednego tranzystora zmiana potencjału bazy drugiego tranzystora powoduje przesunięcie punktów pracy elementów półprzewodnikowych w przeciwnych kierunkach.



Rysunek 9.13: Schemat wzmacniacza różnicowego

Gdy potencjał bazy tranzystora zostaje zwiększony, to rosną też natężenia prądów elektrod. W szczególności zwiększa się prąd kolektora, co powoduje zmniejszenie potencjału tej elektrody. Jeżeli opór  $R_E$  jest duży w porównaniu do rezystancji złącza baza-emiter, to zmiana potencjału bazy nie wpływa znacząco na spadek napięcia na tym rezystorze, a więc i na sumę prądów emiterów. Dlatego prądy emitera i kolektora drugiego tranzystora zmniejszają się, a potencjał kolektora rośnie.

Zmniejszanie potencjału bazy powoduje odwrócenie zmian wielkości elektrycznych. Jeżeli potencjały baz są modyfikowane tak, że jeden rośnie tyle, ile drugi maleje, to zmiany napięć na kolektorach są dwukrotnie silniejsze. Jeżeli natomiast bazy są sterowane tym samym sygnałem, tak że ich potencjały pozostają równe pomimo modyfikacji, to potencjały kolektorów zmieniają się jednakowo i ich różnica jest zerowa niezależnie od napięcia wejściowego.

Dokładność działania układu zależy od stałości sumy prądów emiterów. W precyzyjnych wzmacniaczach różnicowych miejsce rezystora  $R_E$  zajmuje źródło prądu (zob. zadanie P9.10).

Wzmacniając różnicę sygnałów doprowadzonych do jego wejść, wzmacniacz różnicowy tłumi ich wspólne składowe. Jest to przydatne, ponieważ w praktyce często zdarza się, że użyteczny sygnał musi być wydzielany z sygnału obejmującego dodatkowo silną składową stałą i zakłócenia.

Wzmacniacz różnicowy stanowi podstawę bardzo użytecznej klasy analogowych układów scalonych — wzmacniaczy operacyjnych — które omówiono w rozdziale 10. Na układzie tym opiera się też technologia cyfrowa ECL (ang. *emitter coupled logic*), charakteryzująca się szybkim działaniem.

## 9.3 Tranzystory unipolarne

### 9.3.1 Informacje ogólne

Tranzystory unipolarne, inaczej nazywane polowymi lub tranzystorami z efektem polowym (ang. *field-effect transistor*: FET), różnią się od bipolarnych tym, że przewodzą, wykorzystując nośniki większościowe, którymi mogą być dziury albo elektrony. Inną różnicą jest taka, że tranzystor unipolarny jest sterowany wyłącznie napięciowo. Pole elektryczne o natężeniu zależnym od potencjału elektrody sterującej, bramki (ang. *gate*: G), reguluje liczbę nośników, czyli przewodnictwo, w półprzewodnikowym kanale łączącym dwie pozostałe elektrody: źródło (ang. *source*: S) i dren (ang. *drain*: D). W niektórych modelach tranzystorów źródło może pełnić rolę drenu i vice versa.

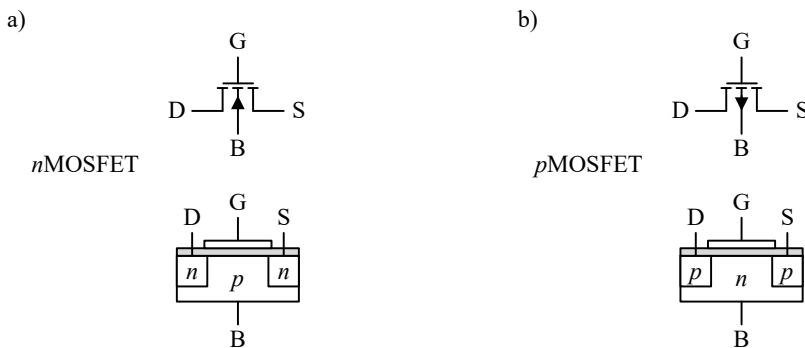
Istnieją dwa główne typy tranzystorów polowych: złączowe (ang. *junction field-effect transistor*: JFET) i z izolowaną bramką (ang. *isolated gate field-effect transistor*: IGFET). Ze względu na ich strukturę, w której występuje metal, tlenek i półprzewodnik, elementy z drugiej grupy są też określane skrótami MOSFET (ang. *metal-oxide semiconductor field-effect transistor*) lub po prostu MOS.



### 9.3.2 Tranzystory unipolarne z izolowaną bramką (MOSFET)

Tranzystory unipolarne z izolowaną bramką mają szczególne znaczenie w informatyce, gdyż stanowią podstawę cyfrowych układów scalonych wielkiej skali integracji (ang. *very large scale integration: VLSI*).

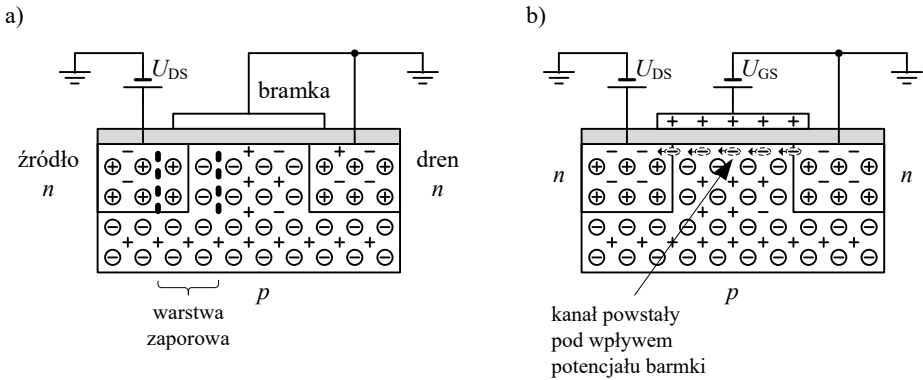
Jak pokazano na rys. 9.14, podstawę tranzystora unipolarnego MOS stanowi podłoże (ang. *base: B*) z jednego typu półprzewodnika, w którym osadzone są obszary drenu D i źródła S. Są one wykonane z półprzewodnika o innym typie przewodnictwa i połączone z zewnętrznymi wyprowadzeniami. Na podłożu jest umieszczona warstwa izolacyjna z dwutlenku krzemu, na której znajduje się obszar bramki G z metalu lub półprzewodnika, połączony z trzecim zewnętrznym wyprowadzeniem. Dielektryk zapewnia, że nie ma kontaktu elektrycznego między bramką a źródłem i drenem.



Rysunek 9.14: Symbol i budowa tranzystora unipolarnego MOS z kanałem typu (a)  $n$  i (b)  $p$

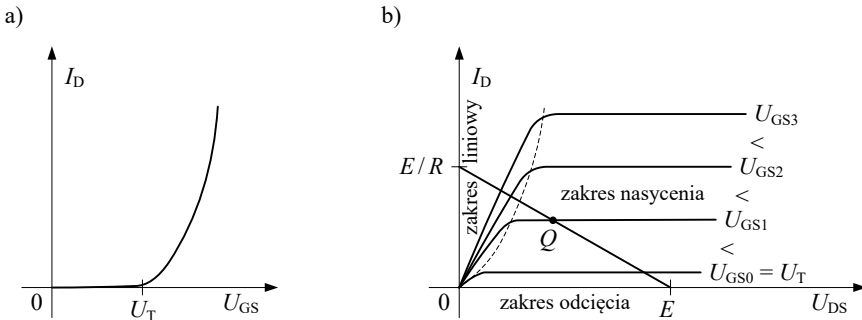
Działanie tranzystora MOSFET objaśniono na rys. 9.15. Gdy napięcie bramki jest zerowe, złącze dren-źródło można traktować jako szeregowe połączenie dwóch diod, z których jedna jest spolaryzowana zaporowo, więc blokuje przepływ prądu. Doprowadzenie do bramki potencjału różnego od zera powoduje w podłożu pod nią (i pod izolacją) kumulację nośników ładunku, których typ jest określony znakiem tego potencjału względem podłoża. Dodatnie napięcie przyciąga elektrony z podłoża w pobliże bramki, a ujemne odpycha je, co odpowiada utworzeniu warstwy dziur. Im napięcie większe, tym grubsza warstwa nośników.

Wpływ tej tzw. wzbogaconej warstwy nośników, generowanej napięciem bramki, na przewodnictwo między źródłem a drenem zależy od typów półprzewodników. Dla podłoża typu  $p$  ujemne napięcie, powodujące kumulację dziur, pogłębia zaporową polaryzację jednego ze złączy  $pn$ . Napięcie dodatnie na bramce, które przyciąga elektrony między dren i źródło, powoduje utworzenie tzw. kanału, którym ładunki mogą przepłynąć między elektrodami. Im większe napięcie, tym szerszy kanał i lepsze przewodnictwo między drenem a źródłem.



Rysunek 9.15: Zasada działania tranzystora unipolarnego MOS z kanałem typu  $p$

Rysunek 9.16 przedstawia typowe charakterystyki tranzystora MOSFET. Należy podkreślić, że tranzystor unipolarny jest sterowany bezprądowo: w obwodach bramka-dren i bramka-źródło prąd nigdy nie płynie. Chociaż bramka decyduje o przewodnictwie między drenem a źródłem, to do wymuszenia przepływu prądu w kanale potrzebna jest różnica potencjałów między tymi elektrodami, która nie musi być związana z napięciem bramki. Od napięcia bramki zależy jedynie wartość progowa napięcia dren-źródło, po osiągnięciu której tranzystor wchodzi w stan nasycenia. Natężenie prądu utrzymuje się wtedy na ustalonym poziomie pomimo dalszego zwiększania różnicy potencjałów, bo osiągnięto maksymalną przepustowość kanału określoną polaryzacją bramki.

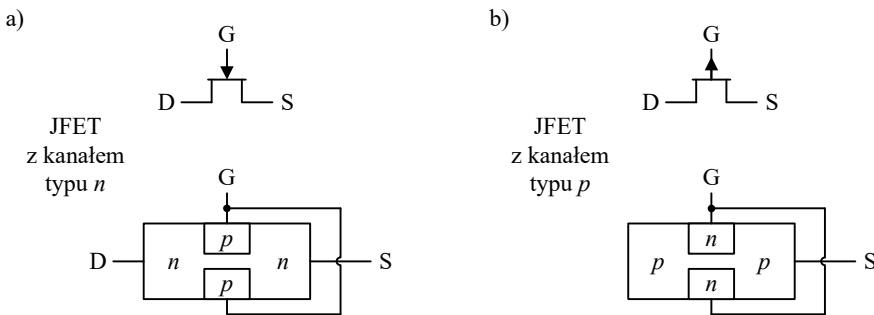


Rysunek 9.16: Charakterystyki tranzystora unipolarnego MOS z kanałem typu  $p$ : (a) przejściowa i (b) wyjściowa

Tranzystory unipolarne MOS są wrażliwe na ładunki elektrostatyczne. Warstwa tlenku izolująca bramkę od kanału jest cienka, ma grubość rzędu ułamka mikrometra, więc charakteryzuje się stosunkowo niedużym napięciem przebicia, od 100 do 200V. Tymczasem na ciele człowieka mogą gromadzić się ładunki w taki sposób, że powstaje różnica potencjałów sięgająca kilkunastu kilowoltów. Chociaż pojemność elektryczna ciała jest niewielka i jej rozładowanie następuje błyskawicznie, to związany z tym impuls prądowy wystarcza, by tranzystor MOS został uszkodzony wskutek zaledwie dotknięcia jego zacisku. Dlatego monterzy urządzeń z takimi elementami nakładają specjalne bransolety uziemiające. Innym rozwiązaniem jest umieszczenie na wejściach i wyjściach układu MOS diodowych układów zabezpieczających. Należy zauważyć, że ten problem zwykle nie występuje w układach bipolarnych, które są niewrażliwe na krótkotrwałe przebicia.

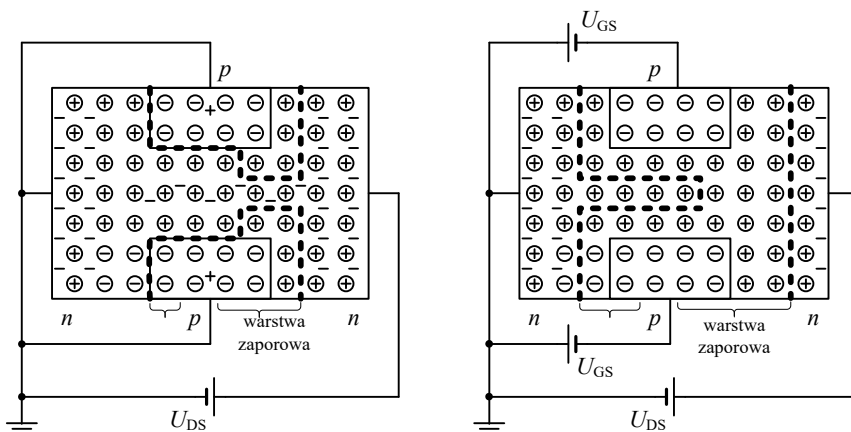
### 9.3.3 Tranzystory unipolarne złączowe (JFET)

W złączowych tranzystorach unipolarnych źródło i dren są przyłączone do tego samego obszaru półprzewodnika. Z kolei bramka jest przyłączona do dwóch obszarów półprzewodnika innego typu, które z dwóch stron stykają się z obszarem kanału. Pokazano to na rys. 9.17.



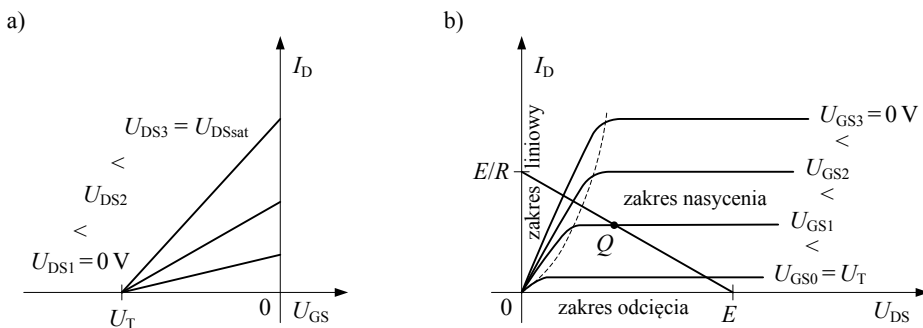
Rysunek 9.17: Symbol i budowa tranzystora unipolarnego JFET: (a) z kanałem typu *n* i (b) z kanałem typu *p*

Działanie elementu wyjaśnia rys. 9.18. W pobliżu styku półprzewodników istnieją warstwy zubożone, ale są one na tyle wąskie, że kanał ze źródła do drenu jest otwarty nawet przy zerowym napięciu bramki. Do wymuszenia przepływu ładunku potrzeba jedynie różnicy potencjałów między elektrodami, które polaryzują kanał. Różnica ta „ściąga” warstwy w kierunku drenu, ale zasadniczo nie wpływa na ich szerokość.

Rysunek 9.18: Zasada działania tranzystora unipolarnego JFET z kanałem typu  $n$ 

Pojawienie się na bramce ujemnego potencjału powoduje poszerzenie warstw, tak że kanał zawęża się i ruch ładunków ze źródła do drenu jest hamowany. Im silniejsza jest polaryzacja bramki, tym warstwy są szersze, a kanał — węższy. Dla pewnego progowego potencjału bramki warstwy są tak szerokie, że stykają się, odcinając dren od źródła.

Typowe charakterystyki tranzystora JFET zostały pokazane na rys. 9.19. Tak jak w przypadku MOSFET, prąd wyjściowy jest sterowany małym napięciem wejściowym, przy czym praktycznie nie ma przepływu prądu w bramce.

Rysunek 9.19: Charakterystyki tranzystora unipolarnego JFET z kanałem typu  $n$ : (a) przejściowa i (b) wyjściowa

## 9.4 Tranzystory a wytwarzanie układów logicznych

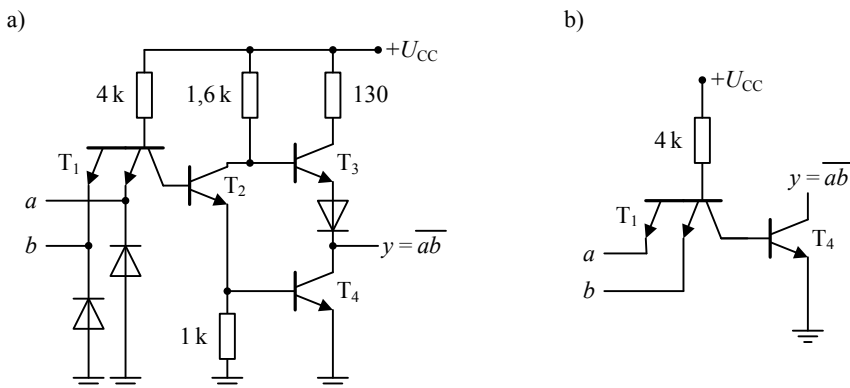
### 9.4.1 Ogólna zasada reprezentowania informacji z użyciem tranzystora

Tranzystor w stanie nasycenia można utożsamiać z przełącznikiem zamkniętym, a w stanie odcięcia — z otwartym. Zatem element pozwala reprezentować jeden bit informacji. Na podstawie tej obserwacji opracowano kilka technologii wytwarzania układów logicznych z użyciem tranzystorów bipolarnych i unipolarnych.

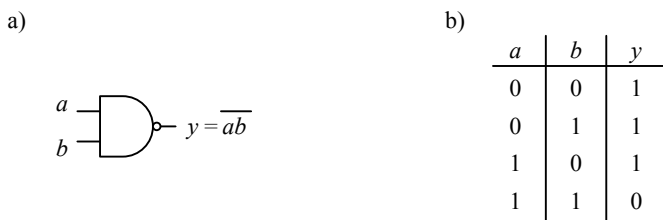
### 9.4.2 Realizowanie bramek logicznych za pomocą tranzystorów bipolarnych

Najbardziej znanym sposobem wykorzystania tranzystorów bipolarnych do realizowania bramek jest technologia TTL (ang. *transistor-transistor logic*), na której opierała się dawniej popularna rodzina układów scalonych serii 74xx [17].

Rysunek 9.20a pokazuje schemat podstawowej bramki NAND w technologii TTL, która realizuje funkcję logiczną opisaną symbolem i tablicą z rys. 9.21. Głównym elementem układu jest tranzystor wieloemiterowy  $T_1$ , równoważny dwóm tranzystorom, których bazy i kolektory są połączone. Dokonuje się tego na poziomie układu scalonego, co zmniejsza powierzchnię zajęta przez taki tranzystor i zwiększa szybkość działania. Tranzystor  $T_2$  pracuje w konfiguracji „wspólny emiter” jako wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym. Tranzystory  $T_3$  i  $T_4$  odpowiadają za wytworzenie standardowych poziomów napięcia wyjściowego i dopasowanie impedancji. Dioda przy wyjściu zwiększa próg napięcia, którego przekroczenie jest potrzebne do przewodzenia  $T_3$ . Pozostałe dwie diody zabezpieczają bramkę przed ujemnymi napięciami wejściowymi o dużej wartości bezwzględnej.



Rysunek 9.20: Bramka NAND w logice tranzystorowo-tranzystorowej TTL: (a) schemat rzeczywisty i (b) uproszczony



Rysunek 9.21: Bramka NAND: (a) symbol i (b) tablica prawdy

Jeżeli na obydwu emiterach  $T_1$  jest napięcie powyżej 2V, które odpowiada logicznej „1”, to łączy baza-emiter są spolaryzowane zaporowo, a złącze baza-kolektor przewodzi, utrzymując  $T_2$  w stanie nasycenia. Tranzystor  $T_3$  jest wyłączony, a  $T_4$  — włączony, co oznacza, że na wyjściu jest niewielkie napięcie, które odpowiada logicznemu „0”. Jeżeli zaś napięcie mniejsze od 2V doprowadzono do choćby jednego emitera  $T_1$ , to odpowiednie złącze baza-emiter przewodzi, co oznacza wprowadzenie tranzystorów  $T_2$  oraz  $T_4$  w stan odcięcia. Tranzystor  $T_3$  jest włączony, więc na wyjściu jest napięcie z zakresu utożsamianego z logiczną „1”.

Dla niektórych czytelników bardziej zrozumiałą może być uproszczony schemat z rys. 9.20b, stosowany do realizowania bramek wewnątrz układu scalonego, które nie są bezpośrednio podłączone do jego wyjść.

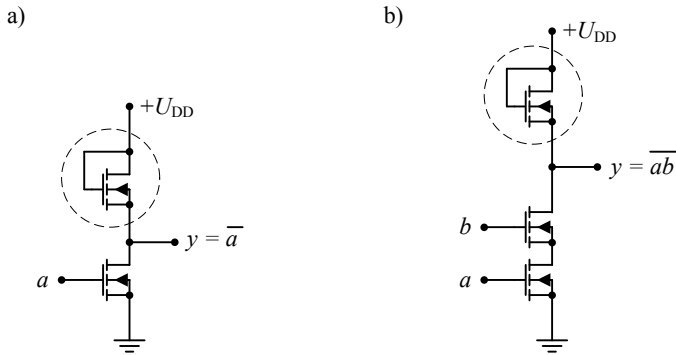
Technologia TTL umożliwia wytwarzanie nie tylko bramek cyfrowych, ale także złożonych bloków funkcjonalnych, takich jak przerzutniki, liczniki, rejestry, a nawet układy arytmetyczne i pamięci. Istnieją odmiany tej technologii charakteryzujące się przyspieszonym działaniem lub zmniejszonym poborem mocy.

Jednakże tylko technologie, które wykorzystują tranzystory unipolarne, pozwalają radykalnie rozwiązać problem nadmiernego rozpraszania energii, co jest konieczne w układach wysokiej skali integracji, takich jak mikroprocesory i pamięci o dużej pojemności.

### 9.4.3 Realizowanie bramek logicznych za pomocą tranzystorów unipolarnych

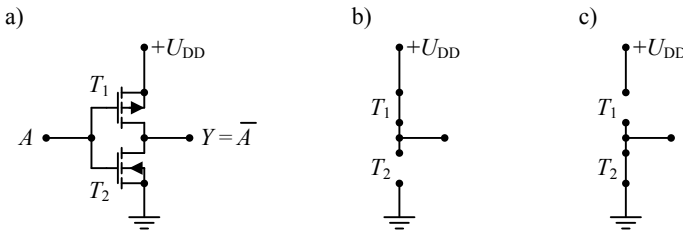
Najprostsze koncepcyjnie są bramki pokazane na rys. 9.22, w których wykorzystuje się tranzystory unipolarne jednego typu. Zasada działania układów staje się oczywista po wyjaśnieniu tego, że elementy otoczone linią kreskową pełnią funkcję aktywnego obciążenia pozostałej części obwodu, gdzie tranzystory działają jako klucze.

Takie podejście umożliwia uzyskanie najwyższej skali integracji, ale wynikowe układy scalone są powolne w porównaniu do rozwiązań z tranzystorami bipolarnymi. Kompromis między upakowaniem a szybkością działania uzyskuje się, wytwarzając tranzystory w komplementarnych parach, w tzw. technologii CMOS (ang. *complementary MOS*) [5].



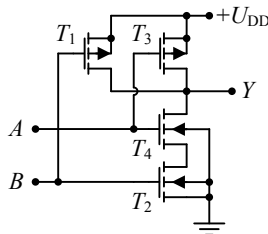
Rysunek 9.22: Bramki w technologii nMOS: (a) NOT i (b) NAND

Bramka NOT w technologii CMOS powstaje z zestawienia tranzystorów nMOS i pMOS w sposób pokazany na rys. 9.23.



Rysunek 9.23: Bramka NOT w technologii CMOS

Bramkę NAND otrzymujemy, zestawiając dwa inwertery w sposób pokazany na rys. 9.24. Jeden inwerter obejmuje tranzystory  $T_1$  i  $T_2$ , a drugi —  $T_3$  i  $T_4$ . Stan niski na wyjściu oznacza, że tranzystory  $T_2$  i  $T_4$  są włączone, a  $T_1$  i  $T_3$  — wyłączone.



Rysunek 9.24: Bramka NAND w technologii CMOS

## 9.4.4 Pobór energii a przełączanie bramki

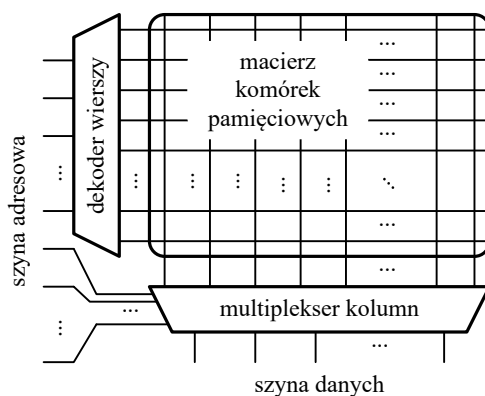
Oprócz upakowania elementów i szybkości działania, ważnym parametrem scalonych układów cyfrowych jest pobór mocy. Jeżeli jest on duży, to chip należy chronić przed uszkodzeniem w wyniku przegrzania, więc może być potrzebny system chłodzący, którego stosowanie bywa kłopotliwe. Dodatkowo duże zapotrzebowanie na energię może wykluczać wykorzystanie układu w urządzeniach przenośnych z zasilaniem bateryjnym.

Pod tym względem najlepsza jest technologia CMOS, gdyż bramka pobiera prąd tylko podczas przełączania. W szczególności w inwerterze, który zmienił stan, zawsze jeden z tranzystorów blokuje przepływ prądu, ale podczas samej zmiany pojawia się impuls prądowy, któremu towarzyszy rozpraszanie energii. Im więcej przełączeń, tym więcej ciepła się pojawia. Dlatego procesory, w których wydajność obliczeniowa opiera się na szybkim taktowaniu, muszą być chłodzone.

## 9.5 Tranzystory w wytwarzaniu pamięci

### 9.5.1 Ogólna struktura układów pamięciowych

Układy pamięciowe mają na ogół strukturę taką jak pokazana na rys. 9.25. Jej podstawowym elementem jest macierz komórek pamięciowych, z których każda jest skojarzona z parą doprowadzeń zwanych liniami. Jedna linia odpowiada za uaktywnienie komórki, a właściwie za uaktywnienie całego ich rzędu, w którym znajdują się te zawierające słowo do odczytu lub zapisu. Bity składowane w komórkach są przekazywane na wyjście lub ustawiane za pośrednictwem linii kolumn. Wyboru odpowiednich linii z całej dostępnej puli dokonuje multiplexer sterowany częścią sygnałów z szyny adresowej. Pozostałe bity adresu stanowią wejście dla dekodera wierszy, który ustawia wysoki stan logiczny na tylko jednej linii rzędu.



Rysunek 9.25: Ogólna struktura układu pamięciowego



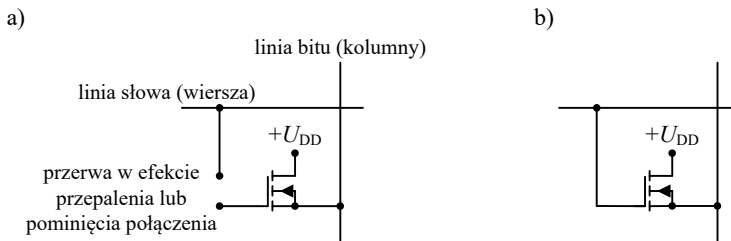
Na rysunku pominięto bloki mniej istotne z naszego punktu widzenia. Są to wzmacniacze odczytu, bufory danych i adresu, a także moduł sterujący, który odpowiada za uaktywnianie układu pamięciowego i jego przełączanie między trybem zapisu a odczytu, odpowiednio do sygnałów z szyny kontrolno-sterującej systemu komputerowego.

Dokładne omówienie działania układów pamięciowych i technologii ich wytwarzania można znaleźć w książkach na temat techniki cyfrowej, np. w [7], dlatego dalej przedstawiamy tylko fakty niezbędne do wyjaśnienia roli tranzystorów.

### 9.5.2 Pamięci stałe

Pamięci stałe, ROM (ang. *read-only memory*), umożliwiają tylko odczyt danych, które wcześniej zapisano podczas produkcji lub programowania. W pierwszym przypadku zapis polega na pominięciu pewnych elementów lub połączeń, kiedy układ scalony jest wytwarzany. W drugim przypadku powstaje układ z pełną macrycą komórek pamięciowych, których stany można potem zmienić, poddając układ odpowiednim wymuszeniom elektrycznym. Napięcia większe niż podczas normalnej pracy i długotrwały przepływ prądu mogą powodować przepalenie połączeń albo tylko zmieniać rozkład ładunku w półprzewodniku. Dlatego niektóre układy można programować tylko raz, a inne wielokrotnie.

Rysunek 9.26 pokazuje schematy komórek pamięci ROM w technologii MOS, które przechowują bity o różnych wartościach. W obydwu przypadkach tranzystor pełni funkcję klucza między linią bitu a źródłem napięcia reprezentującego poziom logiczny „1”. W komórce przechowującej „0” bramka tranzystora „wisi” niepodłączona, tak że klucz jest otwarty i napięcie źródłowe nie może przedostać się na linię bitu, na której utrzymuje się zerowy potencjał niezależnie od stanu linii słowa. Składowanie bitu „1” polega na podłączeniu bramki do linii wiersza, której uaktywnienie powoduje zamknięcie klucza, czyli przekazanie potencjału źródła na linię bitu.



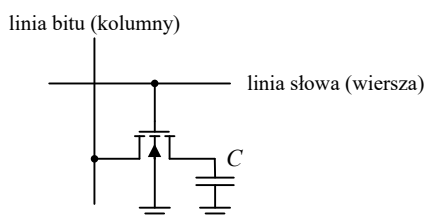
Rysunek 9.26: Komórki pamięci ROM reprezentujące bity (a) „0” i (b) „1”

### 9.5.3 Pamięci o dostępie swobodnym

W pamięci o dostępie swobodnym, RAM (ang. *random-access memory*), można zapisywać i odczytywać dane podczas działania systemu komputerowego. Po wyłączeniu urządzenia informacja przepada. Pamięci takie konstruuje się jako dynamiczne lub statyczne.

### 9.5.4 Pamięci dynamiczne

Rysunek 9.27 objaśnia budowę komórki pamięci dynamicznej — DRAM (ang. *dynamic random-access memory*). Składa się ona z kondensatora podłączonego do linii bitu za pośrednictwem klucza tranzystorowego, który jest sterowany linią wiersza. Naładowany kondensator reprezentuje logiczną „1”, zaś brak ładunku oznacza „0”. Wykorzystując tak prostą strukturę, można produkować pamięciowe układy scalone o dużym stopniu upakowania, które są tańsze i pojemniejsze od opisywanych dalej pamięci statycznych.



Rysunek 9.27: Komórka pamięci dynamicznej w technologii nMOS

Aby zapisać informację do komórki pamięci DRAM, napięcie na linii bitu jest ustawiane stosownie do wartości bitu. Następnie uaktywniona zostaje linia wiersza, w wyniku czego tranzystor przewodzi, doprowadzając napięcie z linii bitu (kolumny) do kondensatora, który ładuje się lub rozładowuje.

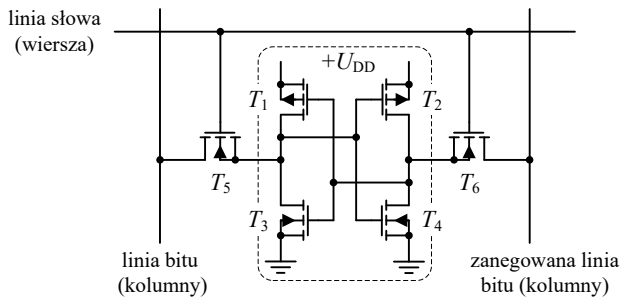
W trakcie odczytu informacji uaktywnienie linii wiersza i włączenie tranzystora powoduje, że potencjał z okładki kondensatora pojawia się na linii bitu. Specjalny wzmacniacz odczytu (ang. *sense amplifier*) porównuje ten potencjał z napięciem progowym i na tej podstawie określa, czy komórka przechowuje „1” czy „0”. Odczyt powoduje rozładowanie kondensatora, tak że informacja zostaje utracona. Z tego powodu po odczytaniu jest ona zapisywana z powrotem do komórki.

W przeciwieństwie do stanu „0”, stan „1” jest nietrwały, gdyż kondensator ma pewną upływność i z czasem się rozładowuje. Konieczne jest cykliczne (z częstotliwością rzędu 100 Hz) odświeżanie zawartości DRAM, polegające na sukcesywnym odczytywaniu kolejnych rzędów komórek bez wystawiania bitów na szynę danych. Zajmuje się tym zwykle specjalny moduł wbudowany w układ pamięci. Dodatkowo odświeżenie rzędu następuje przy każdym dostępie do danych.

### 9.5.5 Pamięci statyczne

Rysunek 9.28 pokazuje schemat komórki pamięci statycznej SRAM (ang. *static random-access memory*) w technologii CMOS. Układ obejmuje połączone krzyżowo dwa inwertery: pierwszy złożony z tranzystorów  $T_1$  i  $T_3$ , a drugi — z  $T_2$  i  $T_4$ . Formują one przerzutnik zatraskowy (ang. *latch*), który może przechowywać 1 bit informacji. Przerzutnik jest przyłączony do dwóch komplementarnych linii bitu za pośrednictwem tranzystorów  $T_5$  i  $T_6$ , które pełnią funkcję kluczy uaktywnianych sygnałem z linii wiersza.

Składowanie „1” wymaga utrzymania wyjścia pierwszego inwertera w stanie wysokim, a drugiego — w niskim. W przypadku „0” jest odwrotnie. Zapisanie bitu polega na wymuszeniu pożądanej konfiguracji napięć na liniach bitu i chwilowego włączenia tranzystorów kluczujących. Po przełączeniu sprzężone inwertery same podtrzymują osiągnięty stan.



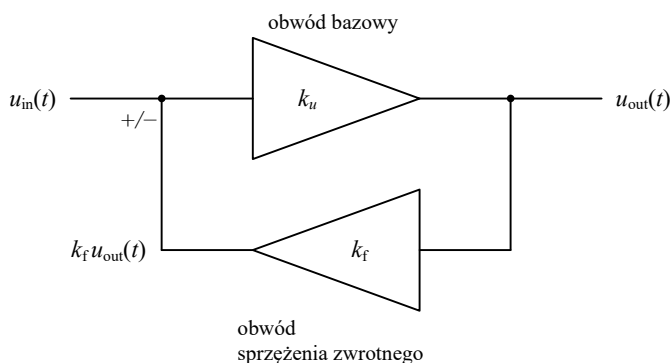
Rysunek 9.28: Schemat komórki pamięci SRAM w technologii CMOS

Zaletą pamięci SRAM jest to, że pobiera ona bardzo mało energii. Prąd płynie bowiem w komórce tylko wtedy, kiedy następuje dostęp do jej zawartości. W stanie spoczynkowym w każdym inwerterze jeden tranzystor jest zatkany, tak że nie ma ścieżki, którą prąd płynąłby od źródła zasilania do masy. Nie ma więc potrzeby odświeżania komórek, a dodatkowo sprzężenie zwrotne między inwerterami sprawia, że odczyt i zapis przebiegają szybciej niż w przypadku składowania bitu jako ładunku w kondensatorze.

Ponieważ komórkę tworzy aż sześć tranzystorów, pamięci SRAM nie można tak efektywnie upakować w układ scalony, jak pamięci DRAM. Dlatego jest ona droższa, a wytwarzane chipy mają mniejszą pojemność.

## 9.6 Sprzężenie zwrotne

Sprzężenie zwrotne (ang. *feedback*) polega na tym, że sygnał wyjściowy danego systemu oddziałuje na jego wejście, tak jak pokazano na rys. 9.29, co znacząco zmienia właściwości układu w porównaniu do konfiguracji bez sprzężenia.



Rysunek 9.29: Schemat wyjaśniający istotę sprzężenia zwrotnego

Obwód sprzężenia zwrotnego może modyfikować amplitudę i fazę przenieszonego sygnału, a dodatkowo zmiany te mogą zależeć od częstotliwości. Jeżeli sygnał wejściowy i sygnał zwrotny są w fazie, to obwód bazowy przetwarza ich sumę i mówimy, że sprzężenie zwrotne jest dodatnie. Jeżeli przesunięcie fazowe między sygnałami wynosi  $180^\circ$ , czyli mają one przeciwne znaki, to na wejściu obwodu bazowego jest różnica sygnałów i sprzężenie zwrotne jest nazywane ujemnym.

Z jednej strony sprzężenie może mieć charakter pasożytniczy, będąc efektem niedoskonałości elementów czy przenikania się pól elektromagnetycznych z różnych części obwodu. Aby uniknąć szkodliwego sprzężenia, trzeba prowadzić ścieżki w specjalny sposób, ekranować fragmenty urządzeń lub dołączać dodatkowe elementy odsprężające.

Z drugiej strony sprzężenie zwrotne może być jednak ustanawiane celowo, tak aby poprawić lub zmodyfikować w pożądanym sposób działanie układu w porównaniu do przypadku otwartej pętli sprzężenia. W szczególności objęcie wzmacniacza ujemnym sprzężeniem zwrotnym daje następujące korzyści:

- zmniejszenie wrażliwości wzmocnienia na nieznaczne zmiany parametrów elementów obwodu, które wynikają z ich starzenia się, wahań temperatury czy zastąpienia uszkodzonego egzemplarza nowym;
- uniezależnienie odpowiedzi systemu od charakterystyk użytych elementów aktywnych, co zmniejsza zniekształcenia;
- poszerzenie pasma przenoszenia, dzięki czemu wzmacniane są sygnały o częstotliwościach z szerszego zakresu;

- umożliwienie regulowania impedancji wejściowej i wyjściowej, czyli dopasowywania pod tym względem współpracujących układów.

Korzyści uzyskuje się za cenę zmniejszenia wzmocnienia i wprowadzenia ryzyka przechodzenia sprzężenia zwrotnego z ujemnego w dodatnie. Dodatkowo sprzężenie powoduje, że wzmacniacz wzbudza się, czyli przestaje realizować swoje zadanie, a zaczyna wytwarzać oscylujące napięcie wyjściowe, którego przebieg nie ma związku z tym na wejściu. Zjawisko to zwykle jest niepożądane, ale znajduje zastosowanie, stanowiąc podstawę działania generatorów.

## 9.7 Generatory

Generator jest układem, który przetwarza energię prądu stałego w energię prądu zmiennego. Pierwsza jest pobierana ze źródła zasilającego układ, a drugą przenosi sygnał wyjściowy z generatora do jego obciążenia. W uproszczeniu można powiedzieć, że generator samorzutnie wytwarza sygnał elektryczny, którego wartość zmienia się w czasie. Zaciski służące do podłączenia zasilania nie powinny być utożsamiane z wejściem, którego generator zasadniczo nie posiada<sup>4</sup>.

### 9.7.1 Generatory sinusoidalne

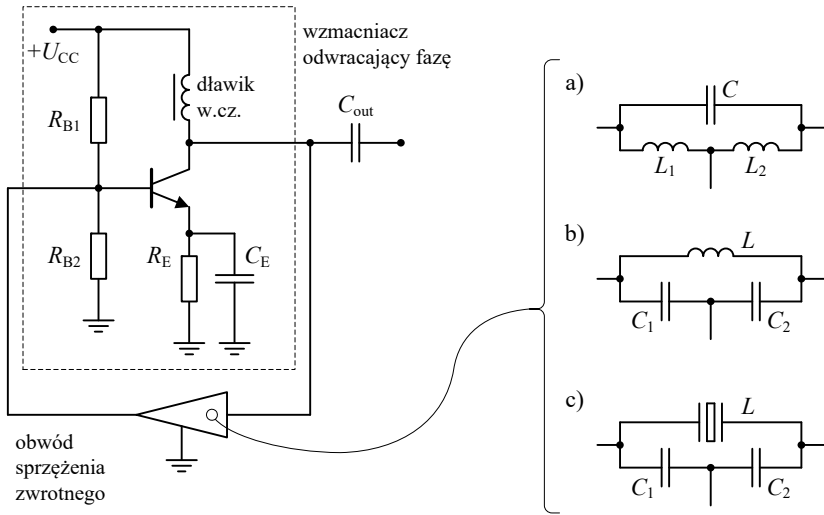
W technice analogowej największe znaczenie praktyczne mają generatory napięcia sinusoidalnego, gdyż takie przebiegi stanowią podstawę modelowania i analizy wszelkich sygnałów. Teoria szeregów Fouriera mówi bowiem, że każdy sygnał okresowy można przedstawić jako złożenie składowych sinusoidalnych o odpowiednich amplitudach, częstotliwościach i przesunięciach fazowych [11].

Jak wspomniano wcześniej, przebieg sinusoidalny można wygenerować, obejmując wzmacniacz pętlą dodatniego sprzężenia zwrotnego, w wyniku czego powstaje układ niestabilny z cyklicznie zmieniającym się napięciem wyjściowym. Odpowiedni schemat pokazano na rys. 9.30.

Aby wystąpiły oscylacje, obwód sprzężenia zwrotnego musi spełniać jednocześnie dwa warunki dla przebiegu sinusoidalnego o pożądanej częstotliwości. Po pierwsze sygnały na wejściu i wyjściu wzmacniacza muszą być w fazie, co jest równoważne wymaganiu, by sprzężenie było dodatnie. Po drugie iloczyn współczynników wzmocnienia wzmacniacza i sprzężenia zwrotnego musi być równy jedności. Wymagania te służą zapewnieniu, że tylko jedna ze składowych sinusoidalnych, które mogłyby być wzmocniane, jest podtrzymywana, podczas gdy pozostałe są tłumione.

---

<sup>4</sup> Istnieją generatory z wyzwaniem, które wytwarzają sygnał tylko przez pewien czas po zainicjowaniu z zewnątrz, po czym wracają do stanu spoczynkowego.



Rysunek 9.30: Schematy generatorów (a) Hartleya, (b) Colpittsa i (c) Pierce’a

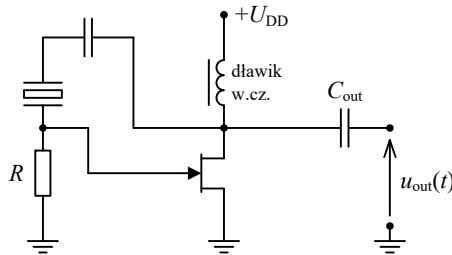
Warunki amplitudy i fazy można spełnić, opierając sprzężenie zwrotne na obwodzie rezonansowym LC. Znane są różne sposoby odpowiedniego połączenia kondensatorów i cewek, odróżniające typy generatorów. Na rys. 9.30a–c pokazano obwody rezonansowe, które można wstawić do schematu z lewej strony tego samego rysunku, w miejsce obwodu sprzężenia zwrotnego, uzyskując generatory Hartleya (z dzieloną indukcyjnością), Colpittsa (z dzieloną pojemnością) i Pierce’a (z rezonatorem kwarcowym, pełniącym funkcję indukcyjności o dużej dobroci). W każdym z układów częstotliwość oscylacji jest równa częstotliwości rezonansu równoległego w zastępczym obwodzie LC.

Należy wyjaśnić, że podział pojemności/indukcyjności umożliwi spełnienie warunku amplitudy, określając współczynnik wzmocnienia sprzężenia zwrotnego. Aby spełnić warunek fazy, obwód rezonansowy wprowadza przesunięcie fazowe o  $180^\circ$ , które dopełnia takie samo przesunięcie we wzmacniaczu odwracającym. Sumaryczne przesunięcie jest więc równe  $360^\circ$ , czyli tak jakby go nie było, co jest tożsame ze zgodnością fazy sygnałów na wejściu i wyjściu wzmacniacza.

Dodatkowa cewka z rdzeniem, tzw. dławik wysokiej częstotliwości (w.c.z.), ogranicza składową zmienną, która przedostaje się z wyjścia do obwodu polaryzacji. Dławik nie wchodzi w skład obwodu rezonansowego, więc nie wpływa na częstotliwość generowanego przebiegu.

Inna kategoria generatorów sinusoidalnych wykorzystuje obwód  $RC$  do zapewnienia, że warunek fazy jest spełniony dla tylko jednej częstotliwości. Przykład układu tego typu rozpatrzono w podrozdziale 10.10.

Generatory mogą opierać się na różnych wzmacniaczach, także na układach z tranzystorami unipolarnymi. Przykład takiego generatora pokazano na rys. 9.31.



Rysunek 9.31: Schemat generatora Pierce'a z tranzystorem JFET

### 9.7.2 Generatory impulsów prostokątnych

W technice cyfrowej i automatyce podstawowe znaczenie mają sygnały impulsowe i przebiegi prostokątne. Generatory takich sygnałów są nazywane przerzutnikami astabilnymi lub multiwibratorami.

Na rys. 9.32 pokazano schemat symetrycznego multiwibratora astabilnego [13], w którym następuje cykliczne przełączanie tranzystorów. Kiedy jeden jest zatkany, drugi jest w stanie nasycenia i odwrotnie. Okres generowanego przebiegu jest określony sumą czasu trwania impulsu  $t_i$  i czasu przerwy  $t_p$ :  $T = t_i + t_p$ . Czasy te można niezależnie regulować, bo zależą one od parametrów różnych elementów:

$$t_i \approx \ln 2 R_{B1} C_1 \quad (9.12)$$

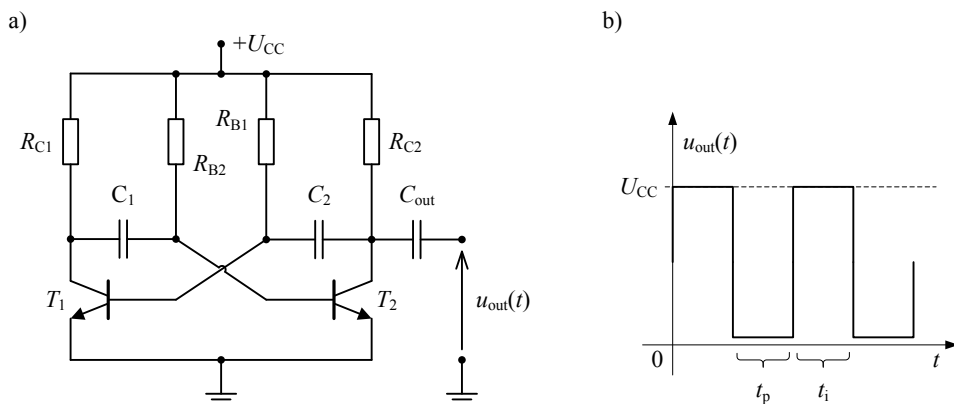
zaś

$$t_p \approx \ln 2 R_{B2} C_2 \quad (9.13)$$

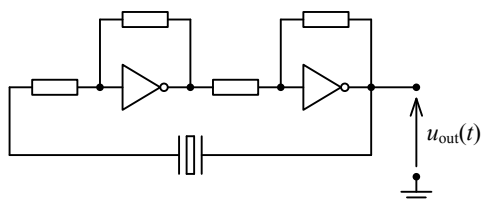
W urządzeniach ze scalonymi układami cyfrowymi przydatne są generatory wykorzystujące bramki logiczne zamiast elementów analogowych, których obecność zaburzałaby spójność obwodu. Rozwiązania tego typu pozwalają też zagospodarować bramki, które pozostałyby niewykorzystane.

Schemat multiwibratora z bramkami NOT pokazano na rys. 9.33. Inwertery pełnią w nim funkcje liniowych wzmacniaczy szerokopasmowych. Przekształcenie bramki we wzmacniacz, tzw. linearyzacja, polega na sprzężeniu jej wejścia z wyjściem za pośrednictwem rezystora. Wzmacniacze są połączone kaskadowo i objęte

główną pętlą sprzężenia zwrotnego, którą stanowi rezonator kwarcowy. Rezonator ustala częstotliwość generowanego przebiegu impulsowego.



Rysunek 9.32: Multiwibrator astabilny: schemat i przebieg generowanego napięcia



Rysunek 9.33: Schemat multiwibratora z bramkami NOT

## 9.8 Pytania, problemy i quiz

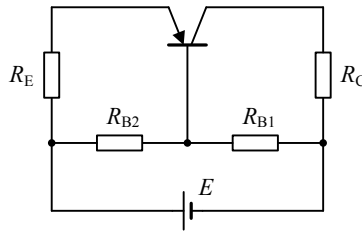
Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 9.8.1 Problemy rozwiązane

#### Problem P9.1

W jakiej konfiguracji pracuje tranzystor w układzie z rys. 9.34?





Rysunek 9.34: Schemat do problemu P9.1

**Wskazówka**

Chociaż mogłoby się wydawać inaczej, nie jest to konfiguracja „wspólna baza”.

**Problem P9.2**

Udowodnić związek (9.4) między współczynnikami  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Rozwiązanie**

Zależności (9.2) i (9.3) pozwalają wyrazić prądy bazy i emitera jako funkcje prądu kolektora:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} \qquad I_E = \frac{I_C}{\alpha}$$

Podstawiając te wyrażenia do (9.1), otrzymujemy alternatywną postać równania na bilans prądów:

$$\frac{I_C}{\alpha} = \frac{I_C}{\beta} + I_C$$

z której można wyeliminować  $I_C$ . Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} = \frac{1 + \beta}{\beta}$$

którego odwrotność

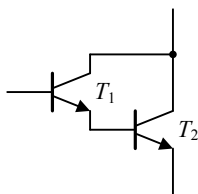
$$\alpha = \frac{\beta}{1 + \beta}$$

zwięźle opisuje związek współczynników.

Te same operacje dałyby wyrażenie (9.4), gdybyśmy poprzedzili je przeniesieniem  $I_C$  na lewą stronę równania opisującego bilans napięć.

**Problem P9.3**

Co to jest układ Darlingtona (super-alfa)? Jakie są jego właściwości?



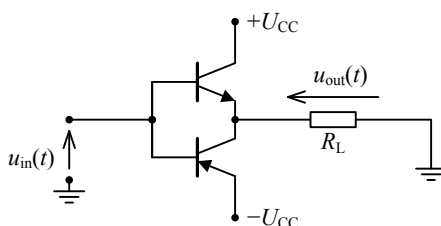
Rysunek 9.35: Układ Darlingtona

**Odpowiedź**

Układ Darlingtona tworzą dwa tranzystory połączone w sposób pokazany na rys. 9.35. Tranzystor  $T_1$  pełni rolę wtórnika emiterowego, natomiast  $T_2$  działa jako wzmacniacz w układzie „wspólny emiter”. Prąd wpływający do bazy drugiego tranzystora jest wynikiem wzmocnienia prądu wejściowego o  $\beta_1$  i jest wzmacniany o  $\beta_2$ . Dlatego układ można utożsamiać z pojedynczym tranzystorem o współczynniku  $\beta = \beta_1 \beta_2$  i dużej rezystancji wejściowej.

**Problem P9.4**

Wyjaśnić zasadę działania wzmacniacza z tranzystorami przeciwstawnymi, którego schemat pokazano na rys. 9.36.



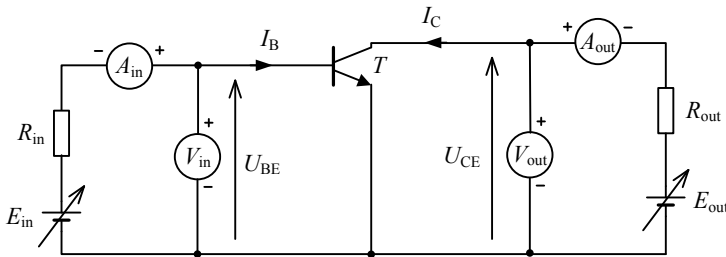
Rysunek 9.36: Schemat do problemu P9.4

**Problem P9.5**

Zaproponować układ do pomiaru charakterystyk tranzystora i opisać sposób jego wykorzystania. Należy założyć, że dostępne są: dwa zasilacze regulowane, dwa amperomierze, dwa woltomierze oraz nieograniczona pula rezystorów. Pomiar parametrów granicznych wykracza poza zakres naszych zainteresowań.

**Odpowiedź**

Podobnie jak w przypadku diody, najprościej jest mierzyć charakterystyki metodą „punkt po punkcie”. Trzeba jednak dużo więcej wysiłku, a odpowiedni układ jest bardziej skomplikowany, co widać na rys. 9.37. Mamy bowiem dwa oddzielne obwody zasilająco-pomiarowe: wejściowy i wyjściowy.



Rysunek 9.37: Układ do mierzenia charakterystyk tranzystora bipolarnego

Rezystory ograniczają prądy płynące przez tranzystor do kilku... kilkadziesiąt mA, zabezpieczając w ten sposób element przed uszkodzeniem. Dwa zasilacze dostarczają niezależnych napięć polaryzujących bazę i kolektor. Jednym amperomierzem mierzymy  $I_B$ , zaś drugim —  $I_C$ . Podobnie, jednym woltmierzem mierzymy  $U_{BE}$ , a drugim —  $U_{CE}$ . Lepiej jest włączyć cztery przyrządy na stałe, niż przełączać jeden miernik uniwersalny z miejsca na miejsce.

Założymy, że chcemy zmierzyć charakterystykę wejściową

$$I_B = f(U_{BE})|_{U_{CE}=\text{const.}}$$

Za pomocą zasilacza  $E_{in}$  zmieniamy stopniowo napięcie zasilające obwód baza-emiter, co wpływa na wszystkie prądy i napięcia. W związku z tym po każdej zmianie drugim zasilaczem korygujemy napięcie zasilające obwód kolektor-emiter, tak aby napięcie  $U_{CE}$  wróciło do ustalonej wartości. Wpłynie to nieco na  $I_B$  i  $U_{BE}$ , które zmieniły się już wcześniej pod wpływem  $E_{in}$ , ale ich pomiar powinien skutkować określeniem nowego punktu charakterystyki, który nie pokrywa się z wyznaczonymi wcześniej.

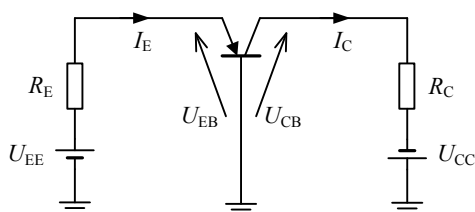
Charakterystykę wyjściową mierzymy w analogiczny sposób, opierając się na wzorze:

$$I_C = f(U_{CE})|_{I_B = \text{const.}}$$

Po kilku cyklach czynności nabieramy biegłości i działamy automatycznie. Zawsze należy jednak zastanawiać się nad uzyskiwanymi wynikami i aktualnym stanem pracy tranzystora. Jeżeli np. widać, że tranzystor jest nasycony lub odcięty i dalsze pomiary nie wnoszą nic nowego, to trzeba przejść do nowej krzywej, zmieniając ustaloną wartość parametru niezależnego.

### Problem P9.6

Obliczyć napięcia  $U_{EB}$  oraz  $U_{CB}$  i prądy  $I_B$  oraz  $I_C$  w układzie pokazanym na rys. 9.38. Należy przyjąć, że  $\alpha = 0,99$ ,  $R_E = 5\text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 2,5\text{ k}\Omega$ , zaś  $U_{EE} = U_{CC} = 10\text{ V}$



Rysunek 9.38: Schemat do problemu P9.6

### Rozwiązanie

Z napięciowego prawa Kirchhoffa wynikają następujące równania:

$$U_{CC} = R_C I_C - U_{CB}$$

oraz

$$U_{EE} = R_E I_E + \underbrace{0,7}_{U_{EB}}$$

gdyż  $U_{EB} = U_T$  w przypadku złącza przewodzącego. Z drugiego równania wyznaczamy

$$I_E = \frac{U_{EE} - 0,7}{R_E} = \frac{10 - 0,7}{5 \cdot 10^3} = 1,86 \text{ [mA]}$$

oraz

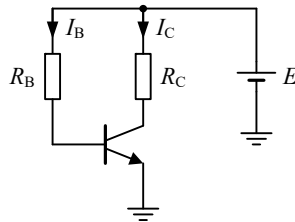
$$I_C = \alpha I_B = 1,84 \text{ mA}$$

Po podstawieniu tego wyniku do pierwszego równania możemy wyznaczyć

$$U_{CB} = R_C I_C - U_{CC} = 1,84 \cdot 2,5 - 10 = -5,4 \text{ [V]}$$

**Problem P9.7**

Dla układu pokazanego na rys. 9.39 wyznaczyć punkt pracy tranzystora i zinterpretować wyniki. Należy przyjąć, że  $R_B = 2,26\text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 226\ \Omega$ ,  $E = 12\text{ V}$  i  $\beta = 100$ .



Rysunek 9.39: Schemat do problemu P9.7

**Rozwiązanie**

Zakładamy, że tranzystor znajduje się w stanie aktywnym, czyli obowiązują następujące równania:

$$E = R_B I_B + \underbrace{0,7}_{U_{BE}}$$

ponieważ  $U_{BE} = U_T$  dla przewodzącego złącza, oraz

$$E = R_C I_C + U_{CE}$$

Z pierwszego wyznaczamy

$$I_B = \frac{E - 0,7}{R_B} = \frac{12 - 0,7}{2,26 \cdot 10^3} = 5\text{ [mA]}$$

i obliczamy

$$I_C = \beta I_B = 0,5\text{ A}$$

Podstawienie tego wyniku do drugiego równania daje

$$U_{CE} = E - R_C I_C = 12 - 226 \cdot 0,5 = \underbrace{-101\text{ [V]}}_{\text{Sprzeczność!}}$$

czyli błędem było założenie, że tranzystor jest w stanie aktywnym i wzmacnia prąd. Specyficzna kombinacja wartości sprawia, że mamy tu do czynienia z elementem w stanie nasycenia. Przyjmujemy więc

$$U_{CE} = U_{CEsat} = 0,3\text{ V}$$

i na podstawie drugiego równania wyznaczamy

$$I_C = \frac{E - U_{CEsat}}{R_C} = \frac{12 - 0,3}{226} = 0,052 \text{ [A]}$$

Wyniki są niesprzeczne z poprawionym założeniem, czyli uzyskaliśmy właściwe rozwiązanie.

### Problem P9.8

Powtórnie wykonać polecenia z problemu P9.7 po zmianie rezystancji  $R_B = 2,26 \text{ M}\Omega$ . Porównać nowe wyniki z otrzymanymi poprzednio.

### Rozwiązanie

Rozpoczynając analizę tak samo jak poprzednio, otrzymujemy:

$$I_B = \frac{E - 0,7}{R_B} = \frac{12 - 0,7}{2,26 \cdot 10^6} = 5 \text{ } [\mu\text{A}]$$

oraz

$$I_C = \beta I_B = 0,5 \text{ mA}$$

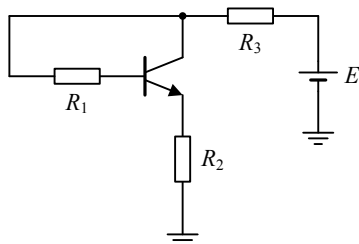
Następnie obliczamy

$$U_{CE} = E - R_C I_C = 12 - 226 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 11,9 \text{ [V]}$$

Zmniejszenie prądu bazy spowodowało zatem przesunięcie punktu pracy tranzystora do obszaru aktywnego.

### Problem P9.9

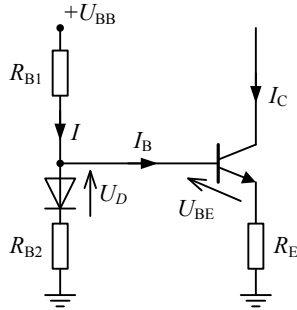
Obliczyć punkt pracy tranzystora w układzie z rys. 9.40. Jeżeli element nie jest w stanie aktywnym, to jak należy zmienić parametry pozostałych elementów, żeby ten stan został osiągnięty? Dane są:  $R_1 = 2,26 \text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 226 \Omega$  i  $E = 12 \text{ V}$ .



Rysunek 9.40: Schemat do problemu P9.9

**Problem P9.10**

Obliczyć natężenie prądu  $I_C$  w układzie z rys. 9.41. Jak zmieni się prąd po zastąpieniu  $R_E$  i  $R_{B2}$  zwarciami?



Rysunek 9.41: Schemat do problemu P9.10

**Rozwiązanie**

W gałęziach z  $R_{B1}$  i  $R_{B2}$  zachodzi następujący bilans napięć:

$$U_{BB} = R_{B1}I + U_D + R_{B2}(I - I_B)$$

a jednocześnie

$$U_{BB} = R_{B1}I + U_{BE} + R_E \underbrace{(I_C + I_B)}_{I_E}$$

Zakładając, że dioda i złącze baza-emiter tranzystora mają te same właściwości i są spolaryzowane w kierunku przewodzenia, można przyjąć, że  $U_D = U_{BE}$  zaś  $I_B$  jest znikome w porównaniu do pozostałych prądów. Wtedy z pierwszego równania otrzymujemy:

$$I = \frac{U_{BB} - U_D}{R_{B1} + R_{B2}}$$

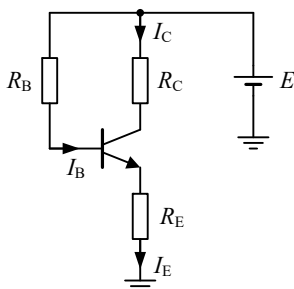
zaś z odjęcia równań stronami wynika, że:

$$R_{B2}I = R_E I_C \quad \Rightarrow \quad I_C = \frac{R_{B2}}{R_E} I$$

Szukany prąd  $I_C$  jest określony tylko parametrami elementów widocznych na schemacie, nie zależy natomiast od elementów dołączonych do kolektora. Układ oddziałuje na obciążenie kolektora jak źródło prądowe. W szczególności jeżeli  $R_{B2} = R_E$  (włączając przypadek zwarcie w miejscach tych rezystorów), to  $I_C = I$ . Można powiedzieć, że układ „odbija” prąd, dlatego jest nazywany „zwierciadłem prądowym”.

**Problem P9.11**

Wyznaczyć punkt pracy tranzystora w układzie z rys. 9.42. Dane są:  $\beta = 100$ ,  $R_B = 2,26 \text{ M}\Omega$ ,  $R_C = 226 \Omega$ ,  $R_E = 200 \Omega$  i  $E = 12 \text{ V}$ .



Rysunek 9.42: Schemat do problemu P9.11

**Rozwiązanie**

W rozpatrywanym układzie

$$E = R_B I_B + \underbrace{U_{BE}}_{0,7V} + R_E I_E$$

Wiedząc ponadto, że  $I_E = (1 + \beta) I_B$ , możemy obliczyć

$$I_B = \frac{E - 0,7}{R_B + (1 + \beta) R_E} = \frac{12 - 0,7}{2,26 \cdot 10^6 + 101 \cdot 200} = 4,96 [\mu\text{A}]$$

oraz

$$I_C = \beta I_B = 0,496 \text{ mA}$$

W połączeniu z równaniem

$$E = R_C I_C + U_{CE} + I_E R_E$$

które opisuje bilans napięć w oczku obejmującym kolektor i emiter, wyniki te pozwalają obliczyć

$$U_{CE} = E - R_C \beta I_B - R_E (1 + \beta) I_B = 11,79 \text{ V}$$

Uzyskane natężenia prądów  $I_B$  i  $I_C$  oraz napięcie  $U_{CE}$  świadczą o tym, że tranzystor jest w stanie odcięcia.



**Problem P9.12**

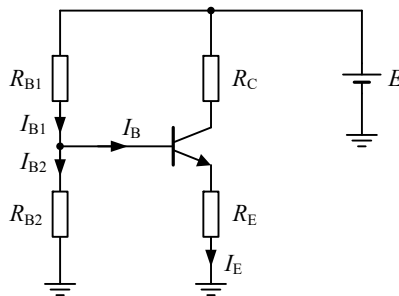
Które rezystancje w obwodzie z zadania P9.11 należy zmienić i jak, żeby oddalić punkt pracy tranzystora od obszaru odcięcia?

**Wskazówka**

O takim, a nie innym położeniu punktu pracy decyduje przede wszystkim znikomy prąd bazy, czyli rezystancja  $R_B$  jest zbyt duża.

**Problem P9.13**

Obliczyć punkt pracy tranzystora w układzie z rys. 9.43. Dane są:  $\beta = 100$ ,  $R_{B1} = R_{B2} = 2,26\text{ M}\Omega$ ,  $R_C = 226\Omega$ ,  $R_E = 200\Omega$  i  $E = 12\text{ V}$ .



Rysunek 9.43: Schemat do problemu P9.13

**Rozwiązanie**

Rozpoczynamy od zapisania bilansu napięć dla oczka obejmującego źródło oraz rezystory  $R_{B1}$  i  $R_{B2}$ :

$$E = R_{B1} I_{B1} + R_{B2} I_{B2}$$

Następnie rozpatrujemy bilans napięć w oczku, które obejmuje złącze baza-emiter oraz oporniki  $R_{B2}$  i  $R_E$ :

$$R_{B2} I_{B2} = \underbrace{0,7}_{U_{BE}} + R_E I_E$$

Możemy też opisać zależności między prądami:  $I_B = I_{B1} - I_{B2}$ , a  $I_E = (1 + \beta) I_B$ .

Łącząc równania, eliminujemy kolejne niewiadome:

$$E = R_{B1} (I_B + I_{B2}) + R_{B2} I_{B2}$$

$$I_{B2} = \frac{E - R_{B1} I_B}{R_{B1} + I_{B2}} = \frac{E}{R_{B1} + R_{B2}} - \frac{R_{B1}}{R_{B1} + R_{B2}} I_B$$

$$\frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} E - \frac{R_{B1} R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} I_B = 0,7 + R_E (1 + \beta) I_B$$

$$\frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} E - 0,7 = \left( (1 + \beta) R_E + \frac{R_{B1} R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \right) I_B$$

i ostatecznie otrzymujemy:

$$I_B = \frac{R_{B2} E - 0,7 (R_{B1} + R_{B2})}{(1 + \beta) R_E (R_{B1} + R_{B2}) + R_{B1} R_{B2}}$$

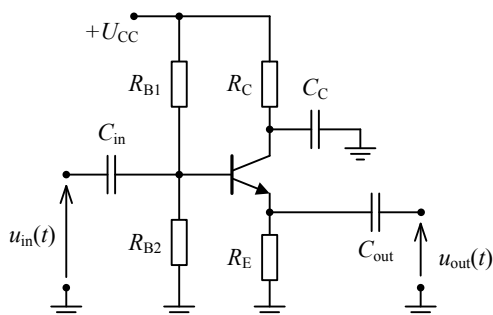
Znając prąd bazy, możemy łatwo obliczyć prądy kolektora i emitera, a potem napięcie między tymi elektrodami, na podstawie bilansu napięć:

$$E = R_C I_C + U_{CE} + R_E I_E$$

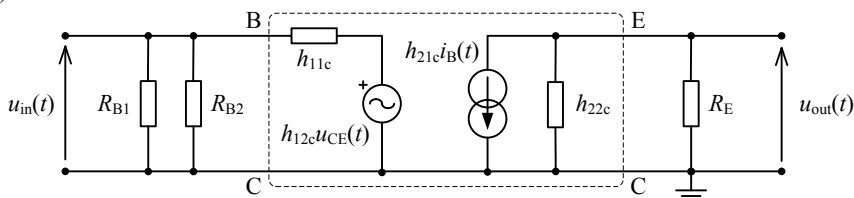
### Problem P9.14

Do jakiej kategorii wzmacniaczy zalicza się układ z rys. 9.44a?

a)



b)



Rysunek 9.44: Schematy do problemu P9.14

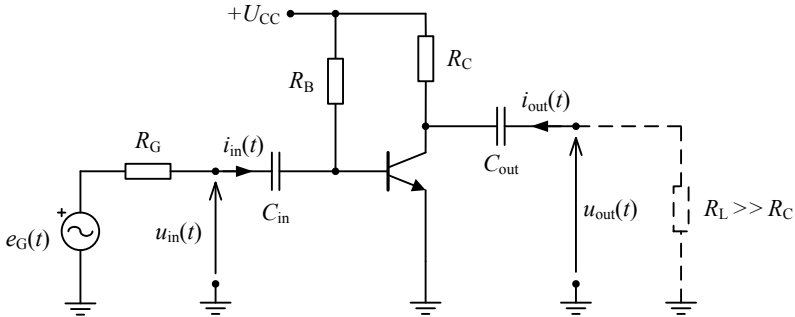
### Odpowiedź

Jest to wtórnik emiterowy, co widać szczególnie wyraźnie po narysowaniu małosygnalowego układu zastępczego dla składowych zmiennych, który pokazano na rys. 9.44b. Kondensator  $C_C$  odpowiada za zwieranie kolektora do masy i uczynienie go elektrodą wspólną dla wejścia i wyjścia.

**Problem P9.15**

Wykorzystując model małosygnałowy tranzystora, dla układu przedstawionego na rys. 9.45 wyprowadzić wzory na:

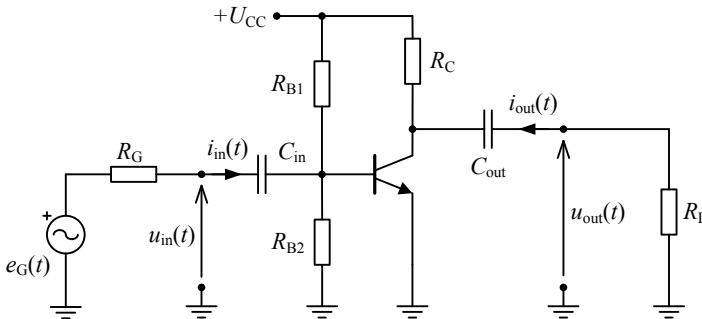
$$k_u = \frac{u_{out}}{u_{in}} \quad k_i = \frac{i_{out}}{i_{in}} \quad r_{in} = \frac{u_{in}}{i_{in}} \quad r_{out} = \frac{u_{out}}{i_{out}} \Big|_{e_G(t)=0}$$



Rysunek 9.45: Schemat do problemu P9.15

**Problem P9.16**

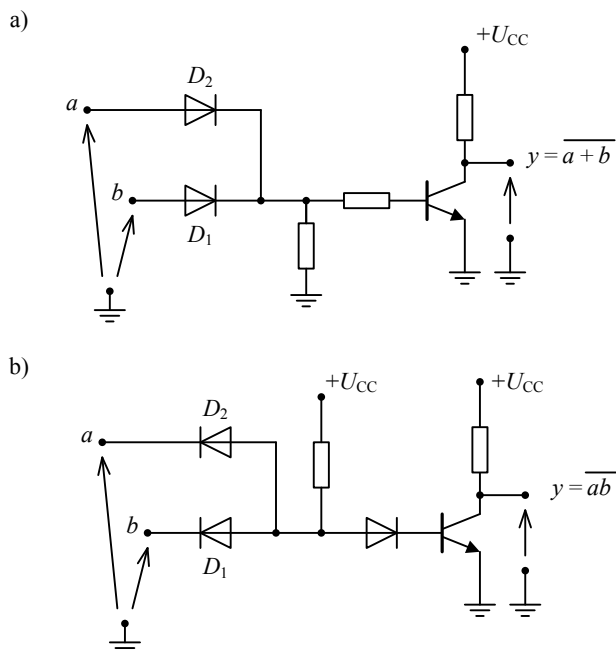
Powtórnie wykonać polecenia z problemu P9.15 dla układu z rys. 9.46.



Rysunek 9.46: Schemat do problemu P9.16

**Problem P9.17**

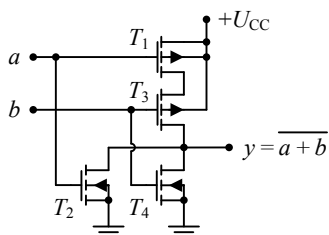
Objasnić działanie bramek NOR i NAND w technologii DTL (ang. *diode-transistor logic*), czyli logice diodowo-tranzystorowej, których schematy pokazano na rys. 9.47.



Rysunek 9.47: Schematy do problemu P9.17

**Problem P9.18**

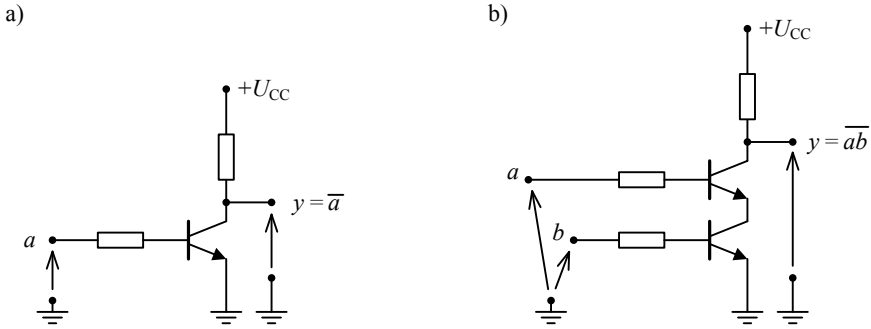
Omówić działanie układu, którego schemat pokazano na rys. 9.48. Jest to bramka NOR w technologii CMOS.



Rysunek 9.48: Bramka NOR w technologii CMOS

**Problem P9.19**

Objasnić działanie bramek w technologii RTL (ang. *resistor-transistor logic*), czyli logice rezystorowo-tranzystorowej, których schematy pokazano na rys. 9.49.

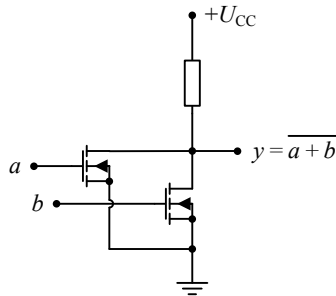


Rysunek 9.49: Schematy do problemu P9.19

---

**Problem P9.20**

Omówić działanie układu, którego schemat pokazano na rys. 9.50. Jest to bramka NOR w technologii nMOS.

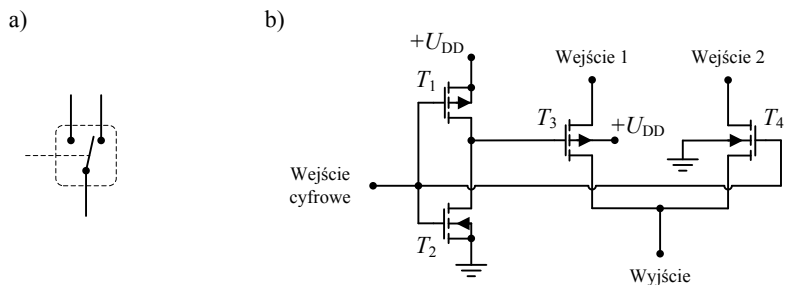


Rysunek 9.50: Schemat do problemu P9.20

---

**Problem P9.21**

Omówić działanie przełącznika w technologii CMOS, którego schemat pokazano na rys. 9.51.



Rysunek 9.51: Schemat do problemu P9.21: przełącznik sygnałów analogowych na podstawie sygnału cyfrowego

**Problem P9.22**

Przerysować schemat z rys. 9.32 w taki sposób, żeby było wyraźnie widać, że symetryczny multiwibrator astabilny powstaje z objęcia sprzężeniem zwrotnym wzmacniacza dwustopniowego.

**Wskazówka**

Jako źródło inspiracji można wykorzystać rys. 9.33.

**Problem P9.23**

Wykazać, że we wzmacniaczu, którego rezystancja wejściowa jest równa wyjściowej, zmiana wzmocnienia napięciowego o 20 dB odpowiada zmianie wzmocnienia mocy o 10 dB.

**Problem P9.24**

Jak zmienia się stosunek napięcia wyjściowego do wejściowego, gdy wzmocnienie napięciowe układu rośnie/maleje o 1, 3 i 10 dB?

**Problem P9.25**

Jak zmienia się wzmocnienie napięciowe układu w decybelach, gdy napięcie wyjściowe rośnie/maleje 10, 100 i 1000 razy?



## Rozdział 10

# Wzmacniacze operacyjne

### Wprowadzenie

Układy scalone są najczęściej utożsamiane z mikroprocesorami i pamięciami, tymczasem wiele z nich jest przeznaczonych do różnych innych celów. W szczególności miniaturyzowanie i integrowanie elementów obwodu w jednej obudowie nie jest stosowane wyłącznie w technice cyfrowej. Produkowana jest szeroka gama mniej lub bardziej specjalizowanych analogowych układów scalonych o zestandaryzowanych parametrach [10]. Po dołączeniu do takiego chipa względnie niewielu elementów dyskretnych otrzymuje się cały gotowy podzespół urządzenia RTV, AGD lub innego, który dawniej obejmowałby setki rezystorów, kondensatorów, cewek, diod i tranzystorów. Zatem układy scalone nie tylko pozwalają opracowywać małe i lekkie produkty elektroniczne, ale też ułatwiają i przyśpieszają ich projektowanie oraz wytwarzanie.

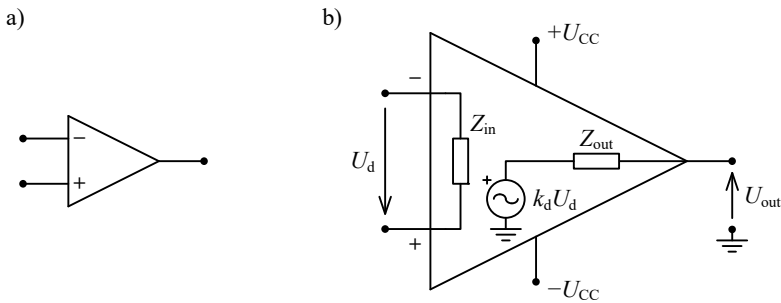
Tematem niniejszego rozdziału są wzmacniacze operacyjne, stanowiące rozwinięcie wzmacniacza różnicowego. Choć jest to najstarsza i najprostsza kategoria analogowych układów scalonych, to wciąż znajduje ona wiele praktycznych zastosowań. Jest też interesująca z punktu widzenia informatyka, gdyż pochodna wzmacniacza operacyjnego, komparator, służy za podstawę przetworników do przekształcania sygnałów analogowych w cyfrowe i odwrotnie, co jest konieczne w wielu zastosowaniach komputerów.

O wielkim znaczeniu wzmacniaczy operacyjnych świadczy to, że układ tego typu,  $\mu A714$ , który został opracowany w przez firmę Fairchild w 1968 roku, jest uznawany za jeden z kamieni milowych w dziejach elektroniki [16].



## 10.1 Właściwości wzmacniaczy operacyjnych

Wzmacniacz operacyjny (ang. *operational amplifier*: opamp) jest oznaczany symbolem pokazanym na rys. 10.1. Układ ma dwa wejścia i jedno wyjście oraz dwa zaciski do podłączenia dodatniego i ujemnego bieguna zasilania. Rozróżnia się wejście nieodwracające i odwracające, oznaczane odpowiednio znakami + i -. Rzeczywisty wzmacniacz może posiadać dodatkowe wejścia do kompensacji jego charakterystyk. W rozważaniach teoretycznych zwykle pomija się zasilanie układu.



Rysunek 10.1: Wzmacniacz operacyjny: (a) symbol i (b) uproszczony schemat wewnętrzny

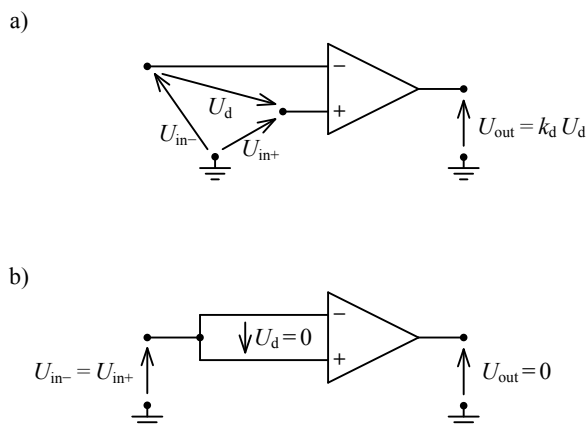
Napięcie na wyjściu wzmacniacza operacyjnego zależy od różnicy sygnałów wejściowych, a nie od ich konkretnych wartości:

$$U_{out} = k_d (U_{in+} - U_{in-}) = k_d U_d \quad (10.1)$$

gdzie  $U_d$  symbolizuje sygnał doprowadzony między wejścia układu, nazywany sygnałem różnicowym, zaś  $k_d$  jest współczynnikiem wzmocnienia takich sygnałów charakteryzującym dany wzmacniacz. Czytelnik powinien domyślać się, że sercem wzmacniacza operacyjnego jest wzmacniacz różnicowy.

Ponieważ zaciski wejściowe można postrzegać jako jedno wejście dla sygnału różnicowego, nie jest wymagane, by łączyć którekolwiek z nich było bezpośrednio połączone z masą układu.

Jeżeli do obydwu zacisków doprowadzony jest ten sam sygnał, to mówi się o sumacyjnym (współbieżnym, wspólnym) sygnale wejściowym. Na taki sygnał wzmacniacz powinien odpowiadać zerowym napięciem na wyjściu. Różnicę między sygnałem różnicowym a sumacyjnym wyjaśnia rys. 10.2.



Rysunek 10.2: Sygnał wejściowy wzmacniacza operacyjnego: (a) różnicowy i (b) sumacyjny

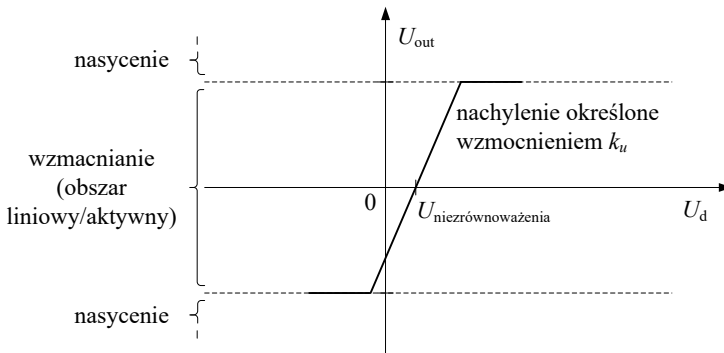
Idealny wzmacniacz operacyjny charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- Wzmocnienie różnicowych sygnałów wejściowych jest nieskończone, czyli  $k_d = \frac{U_{out}}{U_d} \rightarrow \infty$ , w praktyce  $k_d = 10^5 \dots 10^9$ .
- Różnica potencjałów między zaciskami wejściowymi wzmacniacza operacyjnego jest równa zero,  $U_d \rightarrow 0$ .
- Przez zaciski wejściowe wzmacniacza nie płyną prądy, gdyż impedancja wejściowa jest nieskończenie duża,  $Z_{in} \rightarrow \infty$ , w praktyce sięgająca  $1\text{ M}\Omega$ .
- Wzmocnienie sumy sygnałów wejściowych jest zerowe.
- Impedancja wyjściowa jest bardzo mała, w praktyce rzędu  $10\Omega$ .
- Napięcie niezrównoważenia (ang. *offset voltage*) jest zerowe.

Wymienione wymagania dotyczą wzmacniacza operacyjnego w układzie bez sprzężenia zwrotnego, ale decydują o właściwym jego działaniu w obwodzie ze sprzężeniem zwrotnym, do czego jest on z założenia przeznaczony. Obwód sprzężenia zwrotnego decyduje o własnościach wynikowego układu, w szczególności o realizowanej przezeń operacji, i pozwala uniezależnić jego charakterystyki, takie jak wzmocnienie, od stosunkowo niestabilnych parametrów wzmacniacza i kontrolować je zewnętrznymi (zwykle pasywnymi) elementami. Sprzężenie zwrotne koryguje niedoskonałości wzmacniacza: zmniejsza nieliniowość jego charakterystyk i niezrównoważenie oraz poszerza pasmo [10].

We wszystkich rozpatrywanych dalej układach będziemy zakładać, że mamy do czynienia z idealnym wzmacniaczem operacyjnym, chyba że zostanie wyraźnie powiedziane inaczej. W układach rzeczywistych wartości parametrów odbiegają od pożądanych, a napięcie wyjściowe może przyjmować wartości tylko ze skończonego zakresu, ograniczonego poziomami nasycenia, które zależą głównie od napięć zasilania. Ilustruje to charakterystyka przejściowa wzmacniacza operacyjnego, którą pokazano na rys. 10.3.

Na koniec warto wyjaśnić pochodzenie nazwy „operacyjny”. Otóż początkowo układy tego typu były stosowane niemal wyłącznie do przeprowadzania operacji matematycznych, w szczególności stanowiąc podstawę tzw. komputerów analogowych [2]. Pierwsze wzmacniacze operacyjne zostały opracowane w latach 40. XX wieku i były układami lampowymi. Szerokie stosowanie tych układów w elektronice rozpoczęło się w latach 60., kiedy nauczono się wytwarzać je w postaci monolitycznych układów scalonych, co pozwoliło obniżyć pobieraną moc, zmniejszyć wymiary geometryczne i obniżyć koszt produkcji.



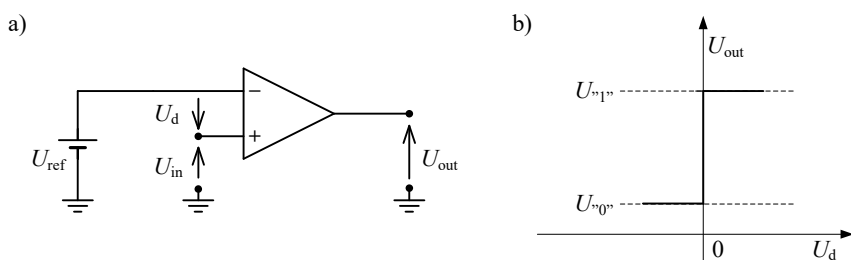
Rysunek 10.3: Charakterystyka przejściowa wzmacniacza operacyjnego

## 10.2 Komparatory

Układem bardzo podobnym do wzmacniacza operacyjnego jest komparator, którego zadaniem jest porównywanie napięć. Jedno z napięć ma zwykle charakter potencjału odniesienia. Chociaż komparator jest zasadniczo układem analogowym, na jego wyjściu znajduje się moduł, który przekształca wynik porównania w napięcie odpowiadające jednemu z dwóch poziomów logicznych w określonej technologii cyfrowej. Dzięki temu sygnał z wyjścia komparatora może być podawany bezpośrednio na wejścia układów cyfrowych.

Symbol komparatora i charakterystykę idealnego układu przedstawiono na rys. 10.4. W odróżnieniu od wzmacniacza operacyjnego, komparator powinien tylko przejściowo znajdować się w stanie aktywnym. Wystąpienie minimalnej różnicy między napięciami doprowadzonymi do zacisków wejściowych wystarcza do wprowadzenia układu w stan nasycenia, w którym napięcie wyjściowe przyjmuje poziom określony znakiem różnicy. Ponadto komparator jest przeznaczony do pracy bez sprzężenia zwrotnego.

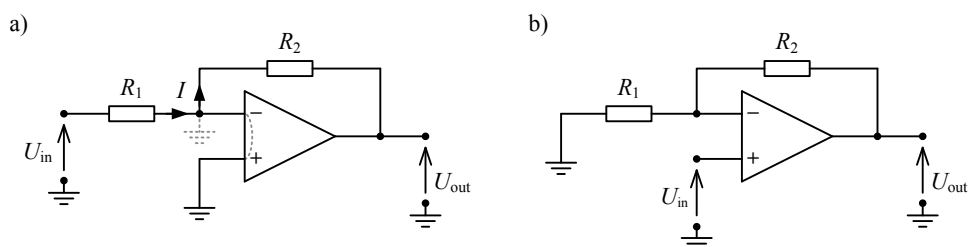
Pozwalając przekształcać sygnały ciągłe w dyskretne, w amplitudzie, komparator stanowi podstawę kilku rodzajów przetworników analogowo-cyfrowych, które są tematem podrozdziału 10.13.



Rysunek 10.4: Symbol komparatora i jego charakterystyka przejściowa

### 10.3 Podstawowe konfiguracje wzmacniające

Wzmacniacz operacyjny ze sprzężeniem zwrotnym może realizować funkcję wzmacniacza odwracającego lub nieodwracającego. Odpowiednie schematy pokazano na rys. 10.5.



Rysunek 10.5: Wzmacniacz operacyjny jako wzmacniacz napięcia: (a) odwracający i (b) nieodwracający

Analizując obwody ze wzmacniaczami operacyjnymi, opieramy się na założeniu, że różnicowe napięcie jest zerowe, czyli między wejściem odwracającym i nieodwracającym występuje tzw. zwarcie pozorne. Przyjmujemy mianowicie, że na obydwu zaciskach wejściowych jest ten sam potencjał, ale pamiętając, że do wzmacniacza nie wpływają prądy. Poprawność takich założeń wynika ze specyfiki wzmacniacza operacyjnego.

Wobec tego w układzie z rys. 10.5a połączenie wejścia nieodwracającego z masą sprawia, że potencjał zerowy występuje też na wejściu odwracającym. Można mówić o pojawieniu się tam „masy pozornej”. Z kolei nieskończona rezystancja wejściowa wzmacniacza, która wyklucza przepływ prądu przez jego zaciski wejściowe, powoduje, że ten sam prąd płynie w obydwu gałęziach z rezystorami. Jego natężenie jest związane prawem Ohma z napięciem wejściowym:

$$U_{\text{in}} = R_1 I \quad (10.2)$$

i wyjściowym:

$$U_{\text{out}} = -R_2 I \quad (10.3)$$

Wobec tego

$$U_{\text{out}} = -\frac{R_2}{R_1} U_{\text{in}} \quad (10.4)$$

czyli

$$k_u = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10.5)$$

Znak minus przy współczynniku wzmocnienia oznacza, że układ z rys. 10.5a odwraca fazę sygnału. Warto też zauważyć, że  $R_1$  określa impedancję wejściową wzmacniacza odwracającego.

Rozpatrzenie konfiguracji z rys. 10.5b pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie — zob. problem P10.6.

Zamiast rezystancji można rozpatrywać impedancje gałęzi i zakładać, że sygnały na wejściu i wyjściu są funkcjami czasu. Otrzymuje się wtedy wzory ogólniejsze, ale spójne z wyprowadzonym powyżej. W szczególności zastępując rezystory  $R_1$  i  $R_2$  obwodami  $RLC$  o impedancjach, odpowiednio  $Z_1$  i  $Z_2$ , uzyskujemy:

$$k_u = \frac{u_{\text{out}}(t)}{u_{\text{in}}(t)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (10.6)$$

określone liczbą zespoloną. Ponieważ impedancje zależą od częstotliwości sygnału wejściowego, wzmocnienie jest faktycznie zespoloną funkcją pulsacji:

$$k_u(\omega) = |k_u(\omega)| e^{j \arg k_u(\omega)} \quad (10.7)$$

czyli może przyjmować odmienne wartości dla sinusoidalnych (składowych) przebiegów wejściowych o różnych częstotliwościach.

Dogodnie jest rozpatrywać wzmocnienie przebiegu lub jego składowej w postaci biegunowej, w rozdzielaniu na moduł i kąt. Moduł mówi, jak zmienia się amplituda sinusoidy po przejściu przez wzmacniacz, zaś kąt określa jej przesunięcie fazowe spowodowane działaniem układu. Uzyskane wcześniej wyrażenie (10.5) stanowi szczególny przypadek (10.7),

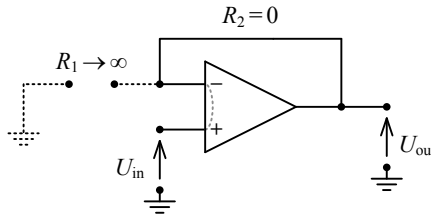
$$k_u(0) = \frac{R_2}{R_1} e^{j\pi} \quad (10.8)$$

opisując oddziaływanie wzmacniacza na składową stałą,  $\omega = 0$ .

Dobierając szczególne wartości  $R_1$  i  $R_2$  w schematach z rys. 10.5 lub zastępując oporniki elementami reaktancyjnymi, można uzyskać układy o specyficznych właściwościach.

## 10.4 Wtórnik napięciowy

Przykładem układu wynikającego ze zmodyfikowania wzmacniacza nieodwracającego jest wtórnik napięciowy, którego schemat pokazano na rys. 10.6. Jego właściwości i zakres zastosowań są podobne jak w przypadku wtórnika emiterowego, o którym była mowa w podrozdziale 9.2.3.



Rysunek 10.6: Wtórnik napięciowy ze wzmacniaczem operacyjnym

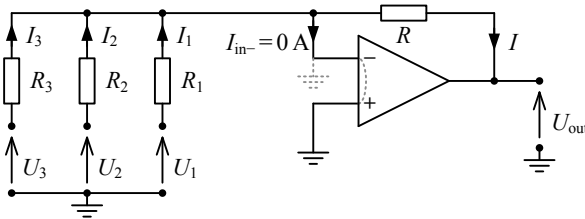
W szczególności jeżeli wzmacniacz operacyjny ma parametry zbliżone do idealnego, to napięcie wyjściowe jest prawie równe wejściowemu:

$$U_{out} \approx U_{in} \quad (10.9)$$

czyli nie ma wzmocniania. W zamian uzyskujemy bardzo dużą rezystancję wejściową, a małą wyjściową. W porównaniu z wtórnikami tranzystorowymi charakterystyki układu są bliższe pożądanym — nieskończonej impedancji wejściowej, zerowej impedancji wyjściowej i wzmocnieniu równemu jedności.

## 10.5 Układ sumujący

Wzmacniacze operacyjne pozwalają łączyć wzmacnianie sygnałów wejściowych z poddawaniem ich innym przekształceniom matematycznym. Jedną z możliwych operacji jest sumowanie sygnałów, które można realizować za pomocą układu pokazanego na rys. 10.7.



Rysunek 10.7: Schemat układu sumującego napięcia (wyznaczającego sumę ważoną)

Ponieważ do wzmacniacza nie wpływa prąd,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (10.10)$$

Ponadto między wejściami wzmacniacza występuje zwarcie pozorne, więc prądy wejściowe są określone prostymi wyrażeniami:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_3}{R_3}, \quad (10.11)$$

zaś

$$U_{\text{out}} = -RI \quad (10.12)$$

Łącząc wzory, otrzymujemy:

$$U_{\text{out}} = -R \left( \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \right) \quad (10.13)$$

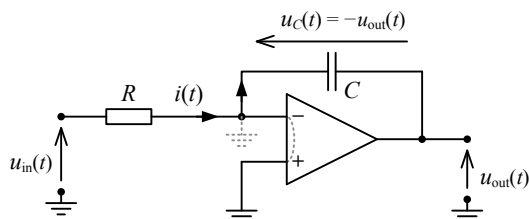
czyli na wyjściu jest ważona suma napięć wejściowych. Jeżeli  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ , to układ realizuje algebraiczne sumowanie napięć.

Sumowanie napięć jest wykorzystywane m.in. do miksowania sygnałów analogowych oraz do ich odtwarzania z reprezentacji cyfrowej (zob. podrozdział 10.13 na temat przetworników cyfrowo-analogowych).

Wzmacniacz operacyjny można wykorzystać także do odejmowania napięć. Ponieważ jest to raczej oczywiste w świetle dotychczasowych rozważań, odpowiedni układ przedstawiamy pośrednio, czyniąc go tematem problemu P10.12.

## 10.6 Układ całkujący

Układ całkujący, nazywany również integratorem, pokazano na rys. 10.8. Od wzmacniacza odwracającego różni się on tym, że w pętli sprzężenia zwrotnego włączony jest kondensator zamiast rezystora.



Rysunek 10.8: Schemat odwracającego układu całkującego

Ten sam prąd płynie przez  $R$  i  $C$ , zatem jego natężenie można opisać dwoma równaniami:

$$i(t) = \frac{u_{in}(t)}{R} \quad (10.14)$$

oraz

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -C \frac{du_{out}(t)}{dt} \quad (10.15)$$

Znak minus jest potrzebny, gdyż spadek napięcia na kondensatorze jest skierowany przeciwnie do napięcia wyjściowego  $u_{out}(t)$ .

Przyrównując prawe strony i całkując otrzymujemy:

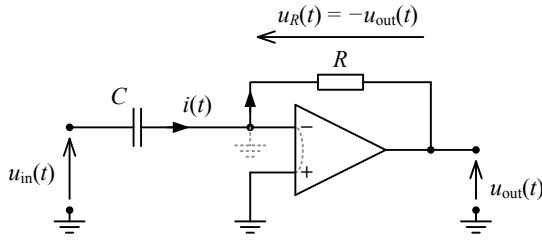
$$u_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t u_{in}(t) dt + u_{out}(0) \quad (10.16)$$

gdzie ostatni składnik jest początkowym napięciem na kondensatorze. Zależność dowodzi, że układ wykonuje całkowanie sygnału wejściowego połączone z jego odwróceniem i ewentualnie wzmocnieniem.

## 10.7 Układ różniczkujący

Zastępując miejscami  $R$  i  $C$  w układzie całkującym, uzyskuje się układ różniczkujący, którego schemat pokazano na rys. 10.9.





Rysunek 10.9: Schemat układu różniczkującego

Ponieważ

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = -\frac{u_{out}(t)}{R} \tag{10.17}$$

ale także

$$i(t) = C \frac{du_{in}(t)}{dt} \tag{10.18}$$

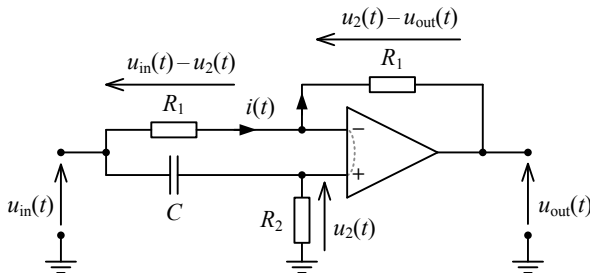
to

$$u_{out}(t) = -RC \frac{du_{in}(t)}{dt} \tag{10.19}$$

Napięcie wyjściowe jest pochodną wejściowego i stąd wynika nazwa układu.

## 10.8 Przesuwnik fazy

Przesuwnik fazy został pokazany na rys. 10.10. Ponieważ nie ma przepływu prądu na wejściach wzmacniacza, to można przyjąć, że  $C$  i  $R_2$  są połączone szeregowo i formują dzielnik napięcia wejściowego.



Rysunek 10.10: Schemat przesuwника fazy

Wskutek zwarcia pozornego napięcie na rezystorze

$$u_2(t) = \frac{R_2}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} u_{in}(t) = \frac{\omega CR_2}{\omega CR_2 - j} u_{in}(t) \quad (10.20)$$

określa nie tylko potencjał wejścia nieodwracającego wzmacniacza, ale także potencjał wejścia odwracającego. Dlatego na  $C$  i  $R_1$  dołączonym do wejścia jest ten sam spadek napięcia oraz

$$i(t) = \frac{u_{in}(t) - u_2(t)}{R_1} \quad (10.21)$$

Jednocześnie w pętli sprzężenia zwrotnego

$$i(t) = \frac{u_2(t) - u_{out}(t)}{R_1} \quad (10.22)$$

czyli

$$u_{in}(t) + u_{out}(t) = 2u_2(t) \quad (10.23)$$

Po podstawieniu (10.20) do (10.23):

$$u_{in}(t) + u_{out}(t) = 2 \frac{\omega CR_2}{\omega CR_2 - j} u_{in}(t) \quad (10.24)$$

możemy dokonać następujących przekształceń:

$$u_{out}(t) = \left( 2 \frac{\omega CR_2}{\omega CR_2 - j} - 1 \right) u_{in}(t) \quad (10.25)$$

oraz

$$\frac{u_{out}(t)}{u_{in}(t)} = \frac{\omega CR_2 + j}{\omega CR_2 - j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j\omega CR_2 - 1}{j\omega CR_2 + 1} \quad (10.26)$$

Zatem

$$k_u = -\frac{1 - j\omega CR_2}{1 + j\omega CR_2} = 1e^{j2\theta} \quad (10.27)$$

gdzie

$$\theta = \arctg \omega CR_2 \quad (10.28)$$

czyli układ nie zmienia amplitudy sygnału wejściowego, a tylko niejednakowo przesuwa w fazie wchodzące w jego skład komponenty sinusoidalne. W praktyce reguluje się  $R_2$ , aby uzyskać pożądane przesunięcie tylko składowej sinusoidalnej o określonej częstotliwości  $\omega$ .

## 10.9 Filtry aktywne

Zadaniem filtrów aktywnych jest wzmacnianie, a przynajmniej przepuszczanie, składowych sinusoidalnych sygnału, których częstotliwości zawierają się w ustalonym zakresie, nazywanym pasmem przenoszenia. Pozostałe składowe powinny być jak najsilniej tłumione.

Rysunek 10.11 pokazuje schemat najprostszego dolnoprzepustowego filtra aktywnego ze wzmacniaczem operacyjnym. Układ jest *de facto* wzmacniaczem odwracającym, w którym sprzężenie zwrotne opiera się na równoległym obwodzie  $RC$ . Występowanie masy pozornej pozwala zapisać następujące równania:

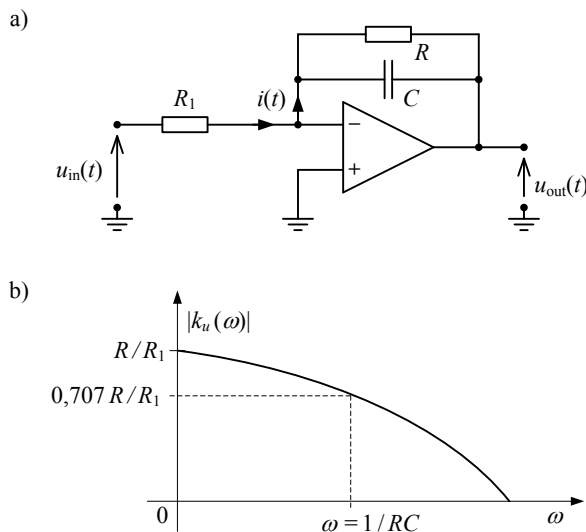
$$i(t) = \frac{u_{in}(t)}{R_1} \quad (10.29)$$

i

$$i(t) = -\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) u_{out}(t) \quad (10.30)$$

gdzie wyrażenie w nawiasach jest admitancją obwodu  $RC$ . Łącząc równania, otrzymujemy:

$$\frac{u_{out}(t)}{u_{in}(t)} = -\frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = -\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad (10.31)$$



Rysunek 10.11: Najprostszy dolnoprzepustowy filtr aktywny ze wzmacniaczem operacyjnym: (a) schemat i (b) charakterystyka amplitudowa

Zależność ta uzasadnia przebieg charakterystyki amplitudowej układu, która towarzyszy schematowi na rys. 10.11. Dla prądu stałego ( $\omega = 0$ ) układ jest równoważny wzmacniaczowi odwracającemu, bo kondensator zachowuje się tak, jakby w jego miejscu była przerwa. Im wyższa częstotliwość, tym lepiej kondensator przybliża zwarcie między masą pozorną a wyjściem układu. Wypadkowa impedancja pętli sprzężenia zwrotnego zmniejsza się względem wartości maksymalnej  $R$ , a wraz z nią maleje wzmocnienie.

Zastępując prosty obwód  $RC$  bardziej rozbudowanymi pętlami sprzężenia zwrotnego i stosując wzmacniacze wielostopniowe, można uzyskać filtr innego typu oraz poprawić selektywność częstotliwościową [10].

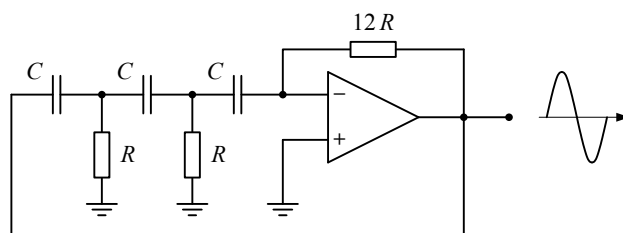
W porównaniu do pasywnych odpowiedników, których działanie opiera się na rezonansie w obwodzie  $RLC$  (zob. rozdział 6), zaletą filtrów aktywnych jest brak cewek, które są kosztowne i mają duże gabaryty w układach przeznaczonych do pracy w zakresie niskich częstotliwości.

## 10.10 Generatory

Wzmacniacze operacyjne mogą być wykorzystywane do konstruowania generatorów przebiegów sinusoidalnych. Przykład takiego układu pokazano na rys. 10.12. Elementy  $RC$  odpowiadają za spełnienie warunku fazy — dla częstotliwości

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}RC} \quad (10.32)$$

przesuwają one sygnał sprzężenia zwrotnego w fazie o  $180^\circ$ , dopełniając do  $360^\circ$  przesunięcie we wzmacniaczu odwracającym. Jednocześnie drabinka  $RC$  dokonuje podziału napięcia, który jest kompensowany przez odpowiedni dobór rezystora  $12R$  ustalającego wzmocnienie.



Rysunek 10.12: Schemat generatora sinusoidalnego opierającego się na wzmacniaczu operacyjnym i przesuwniku fazy  $RC$

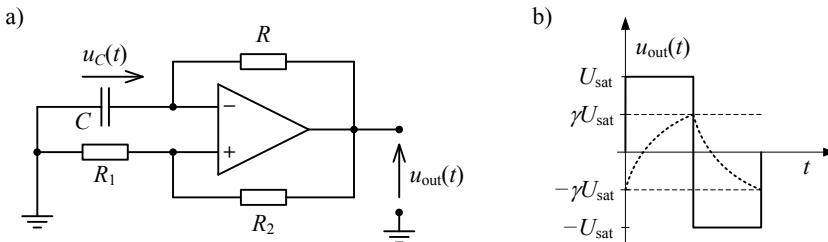
Dla porównania rys. 10.13 przedstawia schemat najprostszego generatora impulsów prostokątnych, którego sercem jest wzmacniacz operacyjny. Wzmacniacz jest przełączany między dolnym a górnym stanem nasycenia wskutek zmian napięcia na kondensatorze, którego przebieg został pokazany linią kreskową. Kiedy wyjście wzmacniacza przyjmuje górny poziom nasycenia, kondensator ładuje się przez rezystor  $R$ . Napięcie na nim narasta, aż przekroczy spadek na rezystorze  $R_1$ , będący efektem podziału napięcia wyjściowego w dzielniku obejmującym  $R_1$  i  $R_2$ . Wzmacniacz przechodzi wtedy w przeciwny stan nasycenia, co powoduje rozładowanie kondensatora, a następnie ładowanie do chwili osiągnięcia ujemnej wartości progowej, kiedy to zaczyna się nowy cykl przeładowania.

Częstotliwość oscylacji zależy od stałej czasowej  $RC$  oraz od stosunku rezystancji  $R_1$  i  $R_2$ :

$$f_0 = \frac{1}{2RC \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \quad (10.33)$$

gdzie

$$\gamma = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (10.34)$$



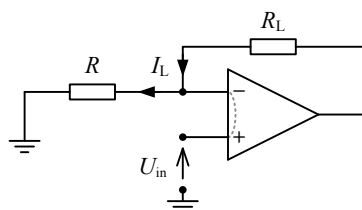
Rysunek 10.13: Generator impulsów opierający się na wzmacniaczu operacyjnym i przesuwniku fazy  $RC$

## 10.11 Przetwornik napięcie-prąd

Chociaż większość obwodów jest zasilana ze źródeł napięcia, to niektóre układy potrzebują źródła prądu. Przedmiotem zadania P9.10 była realizacja takiego źródła z użyciem tranzystora i diody, ale można też wykorzystać do tego celu wzmacniacz operacyjny.

Rysunek 10.14 pokazuje schemat źródła prądu, które działa na zasadzie konwersji napięcia w proporcjonalny prąd. Łatwo dowieść, że  $I_L = U_{in} / R$ , czyli prąd obciążenia nie zależy od obciążenia  $R_L$ .

Inne przetworniki napięcie-prąd są rozpatrywane w zadaniach P10.10 i P10.11.

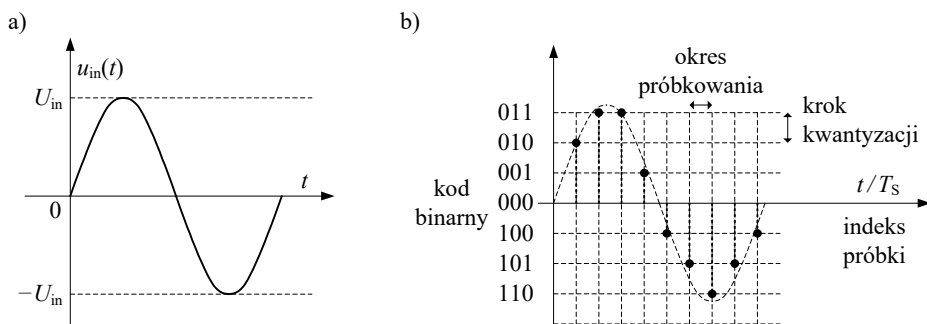


Rysunek 10.14: Przetwornik napięcie-prąd

## 10.12 Cyfrowe przetwarzanie sygnałów

W rzeczywistych układach zmiany napięcia i prądu są ciągłe w amplitudzie i w czasie, tak że dowolnie krótki odcinek przebiegu reprezentuje generalnie nieskończoną ilość informacji. Choć odpowiednio układy pozwalają przekształcać takie sygnały na różne sposoby, nawet wykonywać operacje tak wyszukane, jak całkowanie, to analogowe przetwarzanie ma szereg poważnych wad. Zmiana operacji wymaga zmodyfikowania układu, a w celu uzyskania wysokiej dokładności trzeba stosować precyzyjne elementy i specjalne obwody kompensacji i stabilizacji. Nawet jeżeli układ działa satysfakcjonująco na początku, to z czasem, wskutek starzenia się elementów, może wymagać kalibracji. Dodatkowo jeżeli łączonych jest kilka układów, każdy precyzyjny z osobna, to nawet znikome niedokładności mogą się kumulować, tak że wypadkowy obwód jest bezużyteczny.

Na szczęście w większości przypadków sygnał analogowy można zastąpić dyskretnym przybliżeniem, sygnałem cyfrowym, który obejmuje skończoną liczbę próbek w jednostce czasu, przy czym próbki mogą przyjmować tylko wartości ze skończonego zbioru. Różnice między sygnałem analogowym i cyfrowym ilustruje rys. 10.15.



Rysunek 10.15: Sygnał (a) analogowy (ciągły) i (b) cyfrowy (dyskretny)

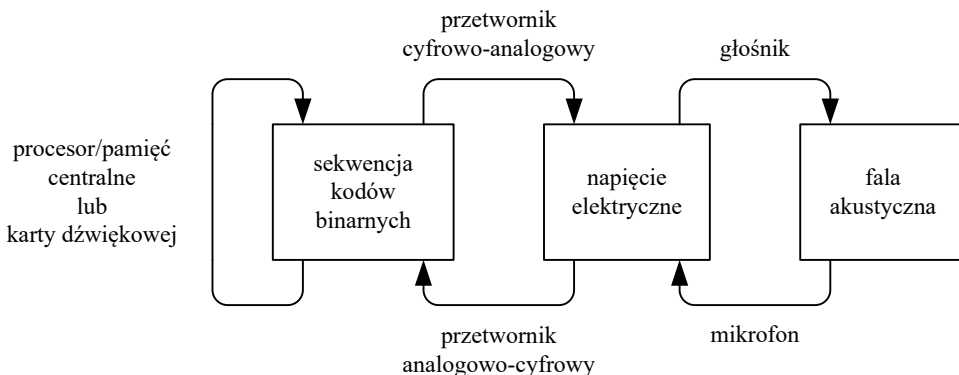
Chociaż za próbkami stoją wielkości fizyczne, to można zaniedbać szczegółową interpretację i po prostu utożsamiać próbki z abstrakcyjną sekwencją liczb. Przetwarzanie takich sekwencji można sprowadzić do operacji z użyciem uniwersalnego cyfrowego komputera, którego obwody działają na zasadzie przełączania, więc nie mają wymienionych wcześniej wad.

Odpowiednia dziedzina nauki i techniki nosi nazwę cyfrowego przetwarzania sygnałów (ang. *digital signal processing*: DSP) i zajmuje się ciekawymi oraz praktycznymi zagadnieniami, takimi jak kompresja audio/wideo, rozpoznawanie obrazów i mowy, synteza mowy oraz dźwiękowe efekty specjalne. Algorytmy DSP stanowią podstawę powszechnie używanych urządzeń multimedialnych: telefonów komórkowych, odtwarzaczy muzyki i wideo, telewizorów i in. Znajdują też zastosowania specjalistyczne, np. w analizie danych pomiarowych, medycznych oraz biometrycznych, często w połączeniu z automatycznym sterowaniem urządzeniami.

Niestety ta interesująca i aktualna tematyka wykracza poza ramy niniejszego podręcznika. Jednak czytelnik jest gorąco zachęcany do jej poznania, przy czym może posiłkować się szeregiem doskonałych książek, np. [20] i [8].

Dalej wyjaśniamy jedynie rolę wzmacniaczy i komparatorów w konwersji sygnałów z postaci analogowej do cyfrowej i odwrotnie. Pierwszą operację wykonują przetworniki analogowo-cyfrowe (A/C), a drugą — cyfrowo-analogowe (C/A). Obydwie klasy układów operują na napięciach i dlatego system przetwarzania musi być wyposażony w dodatkowe urządzenia, które przekształcają inne wielkości fizyczne, takie jak natężenie oświetlenia, drgania mechaniczne, temperaturę i in. w napięcie elektryczne i odwrotnie.

Na przykład mikrofon konwertuje dźwięk (drgania akustyczne) w napięcie, a głośnik wykonuje zadanie przeciwne. Ilustruje to rys. 10.16, na którym pokazano przemiany informacji zachodzące podczas obróbki audio z użyciem komputera.

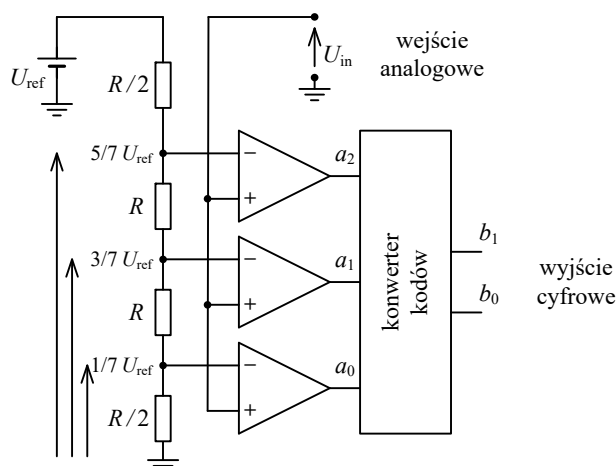


Rysunek 10.16: Przemiany informacji związane z cyfrowym przetwarzaniem dźwięku z użyciem komputera

### 10.13 Przetwornik analogowo-cyfrowy

Na rysunku 10.17 pokazano równoległy przetwornik analogowo-cyfrowy, którego działanie opiera się na bezpośrednim porównywaniu napięć. W przetworniku  $N$ -bitowym każdy z  $2^N - 1$  komparatorów porównuje napięcie wejściowe z innym poziomem odniesienia. Równoodległe poziomy odniesienia są wynikiem podziału napięcia odniesienia w szeregu jednakowych rezystorów. Zależnie od wartości napięcia wejściowego, mniej lub więcej komparatorów daje na swoich wyjściach jedynki. Konwerter kodów (koder) upakuje informację z wyjść komparatorów w  $N$ -bitowe słowo binarne.

Zaletą przedstawionego układu jest duża szybkość przetwarzania, ale potrzeba wielu komparatorów do uzyskania dużej rozdzielczości kwantyzacji. Znane są inne konstrukcje przetworników analogowo-cyfrowych, wykorzystujące mniej elementów, ale działające wolniej. Zainteresowanym czytelnikom polecamy specjalistyczne książki: [9] i [19].



Rysunek 10.17: 2-bitowy równoległy przetwornik analogowo-cyfrowy wykorzystujący  $2^2 - 1 = 3$  komparatory

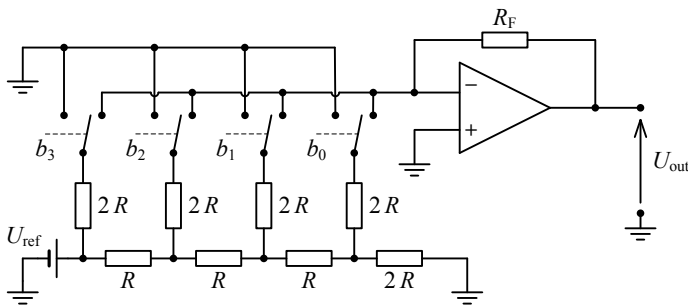
### 10.14 Przetwornik cyfrowo-analogowy

Podobnie jak w przypadku przetworników analogowo-cyfrowych, istnieje wiele różnych przetworników cyfrowo-analogowych, na których omówienie nie pozwala ograniczona objętość niniejszej książki. Do przybliżenia czytelnikowi tego obszaru zastosowań wzmacniaczy operacyjnych wystarcza jednak 4-bitowy układ z drabinką rezystancyjną, który pokazano na rys. 10.18.



Wzmacniacz pełni rolę sumatora napięć dostarczanych z tzw. drabinki  $R-2R$ . Obecność poszczególnych napięć w sumie jest uwarunkowana stanami odpowiednich przełączników<sup>1</sup>, które przełączają napięcia analogowe na podstawie sygnałów cyfrowych  $b_3 \dots b_0$ , reprezentujących 4 bity wejściowego słowa binarnego.

Specyficzne zestawienie rezystancji odpowiada za dwójkowe stopniowanie wartości napięć na przełącznikach. W każdym węźle część drabinki dołączona z prawej strony reprezentuje rezystancję  $2R$ , czyli taką, jaka jest w gałęzi dołączonej z góry. Zatem prąd płynący od strony źródła odniesienia jest dzielony na pół w każdym węźle. Rezystancja całej drabinki widziana ze źródła jest równa  $R$  i określa natężenie prądu wypływającego ze źródła.



Rysunek 10.18: 4-bitowy przetwornik cyfrowo-analogowy z drabinką rezystancyjną

## 10.15 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 10.15.1 Problemy rozwiązane

#### Problem P10.1

Korzystając z kart katalogowych dostępnych w internecie, zapoznać się z parametrami wzmacniacza operacyjnego  $\mu A714$ . Choć upłynęło 40 lat od skonstruowania tego układu, to wiele firm wciąż produkuje jego odpowiedniki.

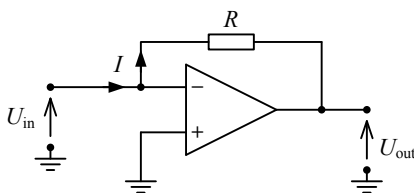
<sup>1</sup> Konstrukcja przełącznika sygnałów analogowych jest tematem zadania P9.21.

**Problem P10.2**

Czym różni się zwarcie pozorne od rzeczywistego?

**Problem P10.3**

Określić zależność między prądem a napięciem wyjściowym w układzie pokazanym na rys. 10.19.



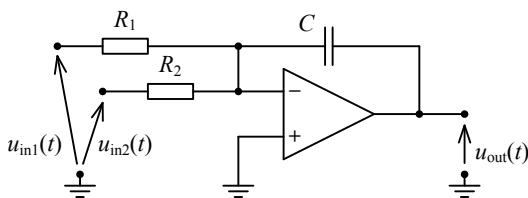
Rysunek 10.19: Schemat do problemu P10.3

**Odpowiedź**

Jest to przetwornik prąd-napięcie, gdyż  $U_{out} = -RI$ .

**Problem P10.4**

Wyprowadzić związek między napięciem wyjściowym a napięciami wejściowymi w układzie z rys. 10.20. Dane są:  $R_1 = 1\text{ M}\Omega$ ,  $R_2 = 0,1\text{ M}\Omega$  i  $C = 1\text{ }\mu\text{F}$ .



Rysunek 10.20: Schemat do problemu P10.4

**Odpowiedź**

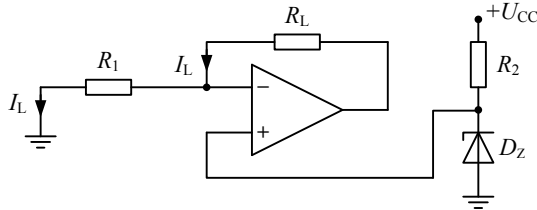
Jest to połączenie wzmacniacza sumującego z całkującym:

$$u_{out}(t) = - \int_0^t (u_{in1}(t) + 10u_{in2}(t)) dt$$

Wyprowadzenie wzoru pozostawiamy czytelnikowi.

**Problem P10.5**

Obliczyć natężenie prądu, który płynie przez obciążenie w układzie z rys. 10.21. Dane są:  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 100\ \Omega$ ,  $U_Z = 5,6\text{ V}$  i  $U_{CC} = 10\text{ V}$ .



Rysunek 10.21: Schemat do problemu P10.5

**Rozwiązanie**

Na diodzie Zenera i nieodwracającym wejściu wzmacniacza jest ustalone napięcie 5,6 V. Ze względu na właściwości wzmacniacza operacyjnego to samo napięcie musi występować także na jego drugim wejściu, a więc i na rezystorze  $R_1$ . Z prawa Ohma wynika, że  $I_L = U_Z / R_1 = 0,56\text{ mA}$ .

**Problem P10.6**

Dowieść, że wzmacniacz nieodwracający z rys. 10.5b charakteryzuje się współczynnikiem wzmocnienia

$$k_u = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

**Rozwiązanie**

Zwarcie pozorne<sup>2</sup> sprawia, że napięcie wejściowe występuje na wejściu odwracającym wzmacniacza operacyjnego. Wobec tego:

$$\begin{aligned} U_{\text{in}} &= R_1 I \\ U_{\text{out}} - U_{\text{in}} &= R_2 I \end{aligned}$$

a łącząc te równania, otrzymujemy:

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}} + R_2 I = U_{\text{in}} + R_2 \frac{U_{\text{in}}}{R_1}$$

czyli wzmocnienie jest zawsze większe od jedności i zależne od stosunku rezystancji. Impedancja wejściowa jest nieskończenie duża.

<sup>2</sup> Ponieważ potencjał wejścia odwracającego nie jest ustalony i nie musi być zerowy, nie ma podstaw, by mówić o masie pozornej, jak w przypadku wzmacniacza odwracającego z rys. 10.5a.

**Problem P10.7**

Jaką rezystancją wejściową i wyjściową charakteryzuje się wzmacniacz odwracający z rys. 10.5a?

**Rozwiązanie**

Rezystancja wejściowa jest określona ilorazem napięcia wejściowego i prądu, czyli

$$R_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{I} = R_1$$

Rezystancję wyjściową uzyskuje się, dzieląc napięcie wyjściowe przez prąd wyjściowy, o którym zakładamy, że wpływa do wzmacniacza:

$$R_{\text{out}} = \frac{U_{\text{out}}}{-I} = R_2$$

---

**Problem P10.8**

Jaką rezystancją wejściową i wyjściową charakteryzuje się wzmacniacz nieodwracający z rys. 10.5b?

**Odpowiedź**

Wejście układu jest jednocześnie wejściem wzmacniacza operacyjnego, czyli:

$$R_{\text{in}} = \frac{U_{\text{in}}}{0} = \infty$$

$$R_{\text{out}} = \frac{U_{\text{in}}}{I} = R_1 + R_2$$

---

**Problem P10.9**

We wzmacniaczu sumującym z rys. 10.7  $R_1 = 200\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 500\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = R = 1\text{M}\Omega$ ,  $U_1 = -2\text{V}$ ,  $U_2 = 3\text{V}$ , zaś  $U_3 = 1\text{V}$ . Jakie napięcie jest na wyjściu?

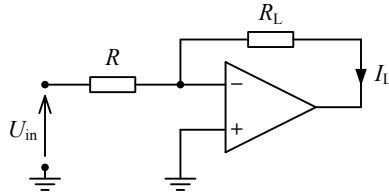
**Odpowiedź**

Na wyjściu występuje napięcie 3V. Dowiedzenie tego pozostawiamy czytelnikowi.

---

**Problem P10.10**

Określić zależność między prądem a napięciem wyjściowym w układzie pokazanym na rys. 10.22.



Rysunek 10.22: Schemat do problemu P10.10

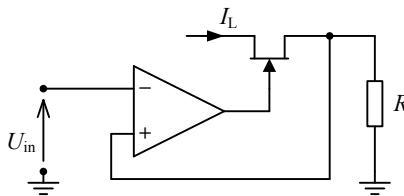
**Odpowiedź**

$I_L = U_{in} / R$ . Jest to alternatywna wersja przetwornika napięcie-prąd, który został przedstawiony w podrozdziale 10.11.

---

**Problem P10.11**

Do czego można wykorzystać układ z rys. 10.23?



Rysunek 10.23: Schemat do problemu P10.11

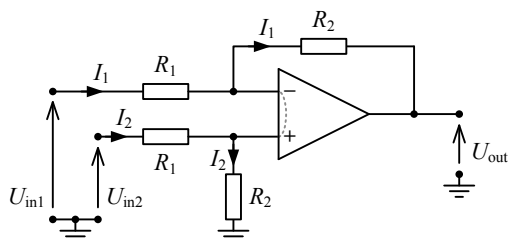
**Odpowiedź**

Jest to źródło prądowe, czyli przetwornik napięcie-prąd, gdyż  $I_L = U_{in} / R$  niezależnie od pominiętej części obwodu.

---

**Problem P10.12**

Wykazać, że układ z rys. 10.24 jest wzmacniaczem odejmującym analogowo.



Rysunek 10.24: Schemat do problemu P10.12

**Rozwiązanie**

Jeżeli prądy płyną jak pokazano na schemacie, to

$$U_1 = (R_1 + R_2) I_1 + U_{\text{out}}$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_{\text{in}}}{R_1 + R_2}$$

a

$$U_2 = (R_1 + R_2) I_2$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_1 + R_2}$$

Jednocześnie

$$U_{\text{out}} = R_2 I_2 - R_2 I_1 = R_2 (I_2 - I_1)$$

a po podstawieniu wyrażeń na natężenia prądów

$$U_{\text{out}} = R_2 \left( \frac{U_2}{R_1 + R_2} - \frac{U_1 - U_{\text{out}}}{R_1 + R_2} \right)$$

Zatem

$$(R_1 + R_2) U_{\text{in}} = R_2 (U_2 - U_1 + U_{\text{out}})$$

$$R_1 U_{\text{out}} = R_2 (U_2 - U_1)$$

i ostatecznie

$$U_{\text{out}} = \frac{R_2}{R_1} (U_2 - U_1)$$

czyli układ wzmacnia różnicę napięć wejściowych, przy czym współczynnik wzmocnienia jest określony ilorazem rezystancji.

**Problem P10.13**

Jakie napięcie pojawi się na wyjściu przetwornika cyfrowo-analogowego z rys. 10.18 po wprowadzeniu na wejście kombinacji bitów: a) 0001, b) 0010, c) 0110 i d) 1110?

---

**Problem P10.14**

Ile komparatorów potrzeba do zbudowania 4-, 8-, 12- i 16-bitowego przetwornika analogowo-cyfrowego o budowie równoległej, którą pokazano na rys. 10.17?

---

**Problem P10.15**

Jakie urządzenia są wykorzystywane do przetwarzania obrazu z użyciem komputera? Jak one działają?

**Wskazówka**

Chodzi o monitory, drukarki, kamery, aparaty i in. Internet zawiera mnóstwo materiałów na ich temat.

---

# Rozdział 11

## Zasilanie urządzeń elektronicznych

### Wprowadzenie

Do działania układy elektroniczne potrzebują stałych napięć zasilających, a produkcja i dystrybucja energii elektrycznej opiera się na obwodach prądu zmiennego. Dlatego urządzenia elektroniczne są wyposażane w zasilacze, które przekształcają napięcie sieciowe 230 V w niezbędny zestaw napięć stałych.

Zasilaczom mogą być stawiane różne wymagania. W niektórych sytuacjach wystarcza uzyskanie na wyjściu napięcia z grubsza przypominającego stałe, w innych istotna jest minimalizacja wahań amplitudy. Zawsze jest pożądana jak największa sprawność zasilacza, którego działanie powinno wiązać się ze stratami energii znacznie mniejszymi od mocy przekazywanej do zasilanych obwodów.

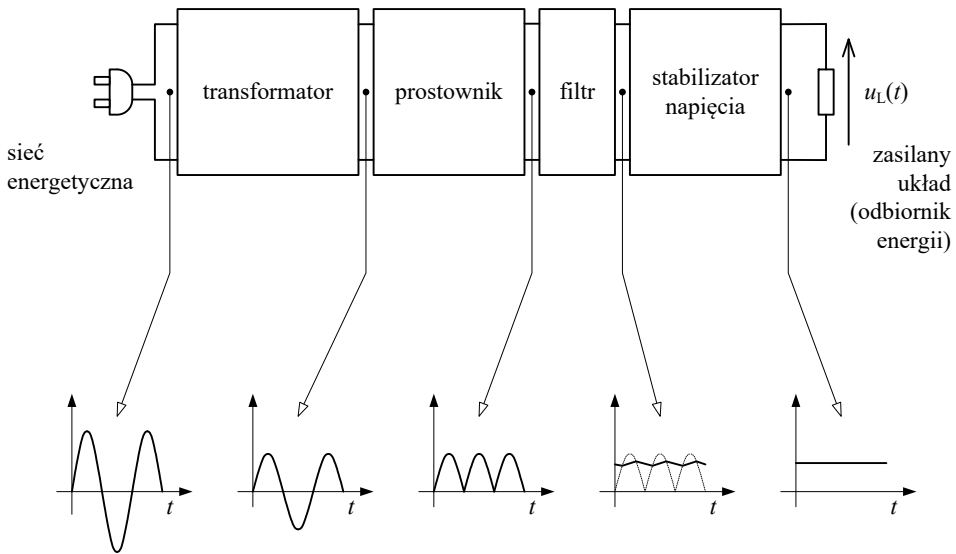
W niniejszym rozdziale przedstawiono ogólną strukturę zasilacza i omówiono bloki, które zwykle wchodzi w jego skład: transformator, prostownik, filtr i stabilizator. W przypadku tego ostatniego rozpatrzono podstawowe kategorie układów o działaniu ciągłym i przedstawiono zasadę działania zasilaczy impulsowych.

### 11.1 Ogólny schemat zasilacza

W typowym zasilaczu można wyróżnić szereg stopni, które kolejno przetwarzają napięcie, tak że coraz bardziej przybliża ono docelowe napięcie stałe. Taką strukturę zasilacza zilustrowano na rys. 11.1.

Transformator (ang. *transformer*) przekształca napięcie sieci w napięcie o poziomie odpowiednim do dalszej obróbki i separuje układy dołączone do jego wyjścia od sieci energetycznej. Kształt przebiegu napięcia nie ulega zmianie — na wyjściu transformatora nadal pozostaje sinusoidalny.





Rysunek 11.1: Ogólny schemat zasilacza

Prostownik (ang. *rectifier*) przekształca napięcie sinusoidalnie zmienne w przebieg, którego wartość chwilowa nadal oscyluje, ale cały czas ma ten sam znak, tak że średnia wartość jest niezerowa.

Tętnienia wstępnie redukuje filtr wygładzający, który przez część okresu magazynuje energię w elementach reaktancyjnych, by następnie zwrócić ją do obwodu, podtrzymując napięcie na wyjściu.

Zasilacz niestabilizowany obejmuje tylko transformator, prostownik i filtr. Choć napięcie na jego wyjściu ulega znacznym wahaniom, które dodatkowo zależą od obciążenia, to może ono nadawać się do zasilania niektórych mniej wymagających urządzeń, takich jak np. wentylatory czy silniczki w zabawkach.

Zasilacz stabilizowany powstaje z dołączenia między filtr a obciążenie układu stabilizacyjnego, który utrzymuje na wyjściu zadane napięcie niezależnie od zmian napięcia wejściowego, obciążenia i temperatury. Rozróżnia się stabilizatory o działaniu ciągłym i impulsowym. Zasilacze korzystające z tych drugich też są nazywane impulsowymi. Ze względu na dużą sprawność układy impulsowe są powszechnie wykorzystywane w sytuacji, gdy obciążenie pobiera dużą moc.

Warto zauważyć, że stabilizatory oraz prostowniki są układami nieliniowymi. Trudno jest zatem dokładanie scharakteryzować działanie zasilacza.

Sprawność zasilacza, albo danego jego stopnia, mówi, jak duże straty energii są związane z działaniem układu. Jest ona określona stosunkiem mocy  $P_{\text{out}}$ , którą zasilacz (stopień) oddaje do obciążenia (stopnia następnego), do mocy  $P_{\text{in}}$ , którą pobiera on ze źródła napięcia wejściowego (stopnia poprzedniego):

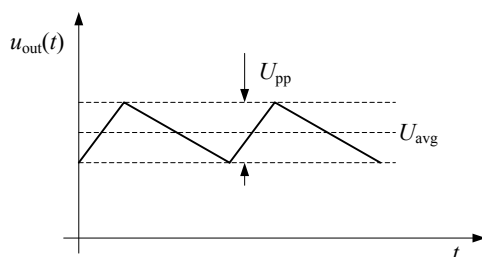
$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \quad (11.1)$$

Straty występują w każdym ze stopni zasilacza, ale zwykle są największe w stabilizatorach o działaniu ciągłym. Zostanie to wyjaśnione w kolejnych podrozdziałach, gdzie omawiamy dokładniej poszczególne komponenty zasilacza.

Jakość napięcia, które jest otrzymywane na wyjściu danego stopnia zasilacza, można oceniać względnie z użyciem współczynnika tętnień<sup>1</sup>

$$\tau = \frac{U_{\text{pp}}}{U_{\text{avg}}} \quad (11.2)$$

gdzie  $U_{\text{pp}}$  oznacza międzyszczytowe napięcie wyjściowe, a  $U_{\text{avg}}$  — średnią wartość napięcia, tak jak pokazano na rys. 11.2.



Rysunek 11.2: Napięcia wykorzystywane do obliczenia współczynnika tętnień

Oprócz dokładności, od stabilizatora może być oczekiwana duża szybkość działania, gdy ma on pracować z napięciem wejściowym lub obciążeniem mogącym zmieniać się raptownie i znacząco.

W niektórych zastosowaniach potrzebne są zasilacze, które utrzymują na wyjściu stałe natężenie prądu, dostosowując napięcie odpowiednio do obciążenia. Stabilizatory prądu wykraczają poza zakres niniejszej książki, niemniej w problemach P9.10 i P10.11 przedstawiono schematy źródeł prądu, które można wykorzystywać w tego typu układach.

<sup>1</sup> W literaturze można spotkać inną definicję współczynnika tętnień, która określa go stosunkiem wartości skutecznej składowych zmiennych napięcia wyjściowego do wartości średniej (składowa stała) tego samego napięcia.

Niektóre zasilacze pozwalają regulować napięcia wyjściowe. Mogą same mierzyć natężenie prądu oraz napięcie na wyjściu i wyświetlać wyniki pomiarów, aby ułatwić obsługę.

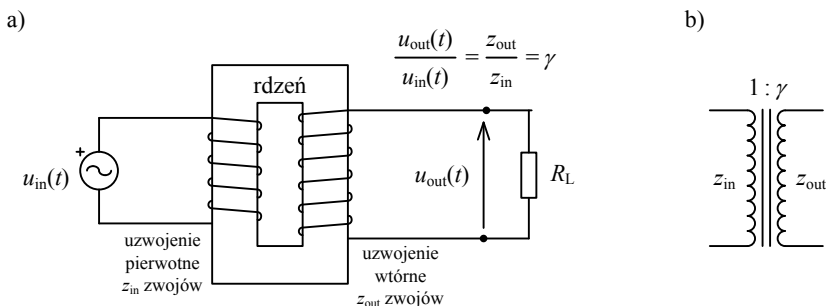
Układy zasilające mogą być zabezpieczone przed przegrzaniem, przed przeciążeniem prądowym oraz przed zwarcieniem na wyjściu. Innym ważnym problemem z zakresu ich projektowania jest tłumienie zakłóceń — zarówno przychodzących z sieci energetycznej, jak i emitowanych przez dane urządzenie.

Wszystkie te zagrożenia również wykraczają poza zakres niniejszego rozdziału, którego pozostałą część poświęcamy dokładniejszej charakterystyce bloków z rys. 11.1 i przedstawieniu zasady działania zasilaczy impulsowych.

Tę ostatnią klasę układów wynaleziono, ponieważ zasilacze konwencjonalne z zasady charakteryzują się małą sprawnością, rzędu 33 %, czyli 2/3 mocy pobieranej z sieci przez taki układ jest marnotrawione wskutek wydzielania ciepła na jego elementach, szczególnie na elemencie regulacyjnym stabilizatora. Równoważny zasilacz impulsowy oferuje sprawność rzędu 80 %.

## 11.2 Transformator

Zasadę działania i symbol transformatora przedstawiono na rys. 11.3. Transformator jest urządzeniem elektromagnetycznym, w którym uzwojenia (cewki, dwie lub więcej) są nawinięte na jednym rdzeniu, dzięki czemu występuje między nimi silne sprzężenie magnetyczne. Wymuszając zmiany prądu w jednym uzwojeniu, powoduje się indukowanie siły elektromotorycznej w pozostałych, do których jest podłączone obciążenie. Uzwojenie, do którego doprowadzono napięcie wejściowe, jest nazywane pierwotnym, a to, które zasila obciążenie, nosi nazwę wtórnego.



Rysunek 11.3: Transformator: (a) zasada działania i (b) symbol

Podstawowym zadaniem transformatora jest zmiana amplitudy napięcia z zachowaniem kształtu i mocy. W zasilaczach zwykle obniża on napięcie sieci elektroenergetycznej do poziomu odpowiedniego dla prostownika, ale są zastosowania, takie jak energetyka, zasilanie kineskopów w analogowych monitorach i TV, gdzie potrzebne jest zwiększanie amplitudy.

Modyfikowanie napięcia jest możliwe, ponieważ sprzężenie uzwojeń sprawia, że siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu wtórnym,  $u_{\text{out}}(t)$ , jest proporcjonalna do napięcia doprowadzonego do uzwojenia pierwotnego,  $u_{\text{in}}(t)$ . Współczynnik proporcjonalności jest określony stosunkiem liczb  $z_{\text{out}}$  i  $z_{\text{in}}$  zwojów w tych uzwojeniach:

$$\frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{z_{\text{out}}}{z_{\text{in}}} = \gamma \quad (11.3)$$

i nazywany przekładnią transformatora.

Odwrotna proporcjonalność zachodzi między natężeniami prądów, które płyną w uzwojeniach:

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{in}}} = \frac{1}{\gamma} \quad (11.4)$$

gdyż transformator powinien zachowywać energię

$$U_{\text{in}} I_{\text{in}} \approx U_{\text{out}} I_{\text{out}} \quad (11.5)$$

W praktyce straty mogą jednak sięgać 20...30%.

Bardzo ważną korzyścią ze stosowania transformatora jest galwaniczne oddzielenie sieci energetycznej od obwodu dołączonego do uzwojenia wtórnego. Nie ma połączenia, którym wysokie napięcie potencjalnie mogłoby przedostać się z sieci do zasilanego układu elektronicznego i porazić użytkownika.

Tym niemniej w wielu urządzeniach po otwarciu obudowy pojawia się ryzyko przypadkowego dotknięcia, np. wąskim śrubokrętem, do obwodu wysokonapięciowego. Z tego względu wszelkie naprawy urządzeń elektrycznych należy zlecać specjalistom, a operacje dozwolone użytkownikom, takie jak np. wymiana karty graficznej czy dysku w komputerze, najbezpieczniej jest wykonywać po wyciągnięciu wtyczki z gniazdka.

## 11.3 Prostowniki

### 11.3.1 Prostownik półokresowy

Najprostszym prostownikiem jest dioda włączona w szereg z obciążeniem, tak jak pokazano na rys. 11.4. Pełniąc funkcję specyficznego ogranicznika, doprowadza ona do obciążenia napięcie wyprostowane tylko wtedy, kiedy poziom tego napięcia przekracza napięcie progowe diody. Jeżeli napięcie progowe jest znacznie mniejsze od amplitudy napięcia prostowanego  $u(t) = U_m \sin \omega t$ , czyli  $U_T \ll U_m$ , to można

zaniedbać napięcie na diodzie i opisać spadek na obciążeniu następującym wyrażeniem:

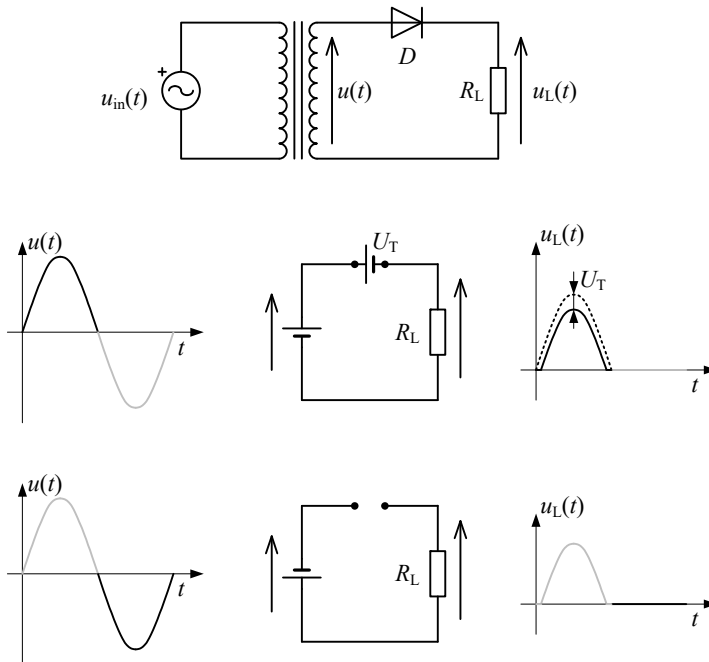
$$u_L(t) = \begin{cases} u(t) = U_m \sin \omega t, & \text{dla } 0 \leq \omega t < \pi \\ 0, & \text{dla } \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (11.6)$$

Ponieważ obciążenie jest zasilane tylko podczas połowy okresu przebiegu wejściowego, więc taki prostownik jest nazywany półokresowym, półfalowym lub jednopołówkowym.

Można wykazać (zob. problem P11.7), że wartość średnia (poziom składowej stałej) napięcia wyprostowanego jest określona wyrażeniem:

$$U_{Lavg} = \frac{U_m}{\pi} \approx 0,32U_m \quad (11.7)$$

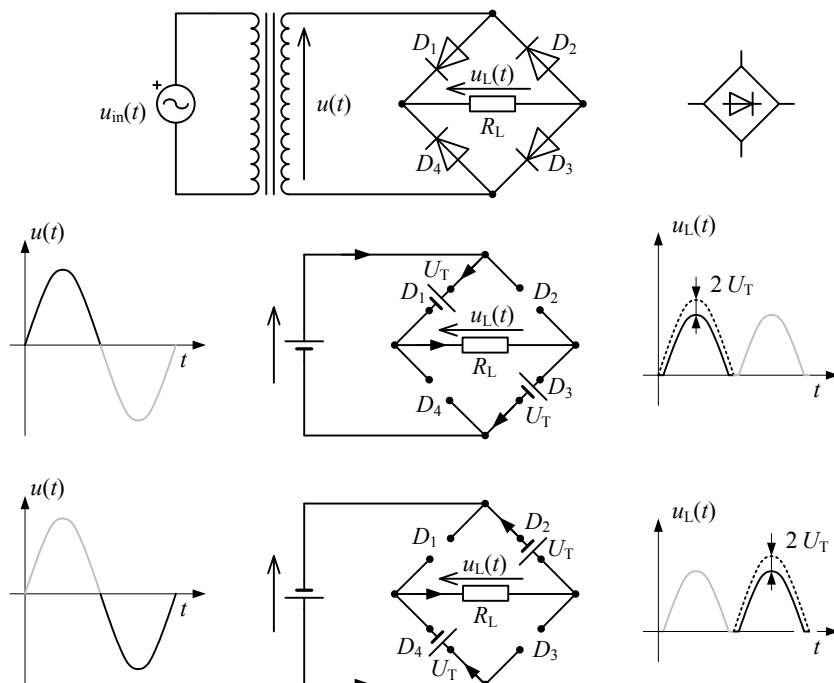
Warto też zauważyć, że maksymalne napięcie wsteczne na diodzie jest równe amplitudzie napięcia wejściowego.



Rysunek 11.4: Prostownik półokresowy

### 11.3.2 Mostkowy prostownik pełnokresowy

Wykorzystanie całego okresu napięcia wejściowego zapewniają prostowniki pełnokresowe, zwane także pełnofalowymi lub dwupołówkowymi. Najpowszechniej stosowanym układem z tej kategorii jest prostownik mostkowy, nazywany także układem Graetza, którego schemat i zasadę działania przedstawiono na rys. 11.5.



Rysunek 11.5: Mostkowy prostownik pełnokresowy

Układ różni się od prostownika jednopółkowego nie tylko efektywnością. Niezerowe napięcie jest doprowadzane do obciążenia dopiero wtedy, kiedy wartość bezwzględna przebiegu wejściowego przekracza podwojone napięcie progowe diody. W każdej połowie okresu dwie diody są bowiem spolaryzowane zaporowo, a pozostałe dwie — w kierunku przewodzenia i tworzą szereg z obciążeniem. Aby druga para diod przewodziła, na każdej musi wystąpić napięcie progowe.

Zakładając, tak samo jak w przypadku prostownika jednopółkowego, że  $U_T \ll U_m$ , wyprostowane napięcie można opisać wzorem:

$$u_L(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega t, & \text{dla } 0 \leq \omega t < \pi \\ -U_m \sin \omega t, & \text{dla } \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (11.8)$$

Zatem

$$U_{Lavg} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,64 U_m \quad (11.9)$$

czyli wartość średnia (poziom składowej stałej) napięcia wyprostowanego jest dwukrotnie większa niż w prostowniku półokresowym. Nie ma natomiast różnicy w maksymalnym napięciu wstecznym na diodzie, które jest równe amplitudzie przebiegu wejściowego.

Wytwarzane są gotowe prostowniki mostkowe, w których jedna obudowa mieści cztery diody połączone w odpowiedni sposób. Upraszcza to konstrukcję zasilacza, ale w przypadku uszkodzenia choćby jednej diody trzeba wymienić cały prostownik, więc naprawa jest droższa w porównaniu do układu opierającego się na czterech odrębnych diodach.

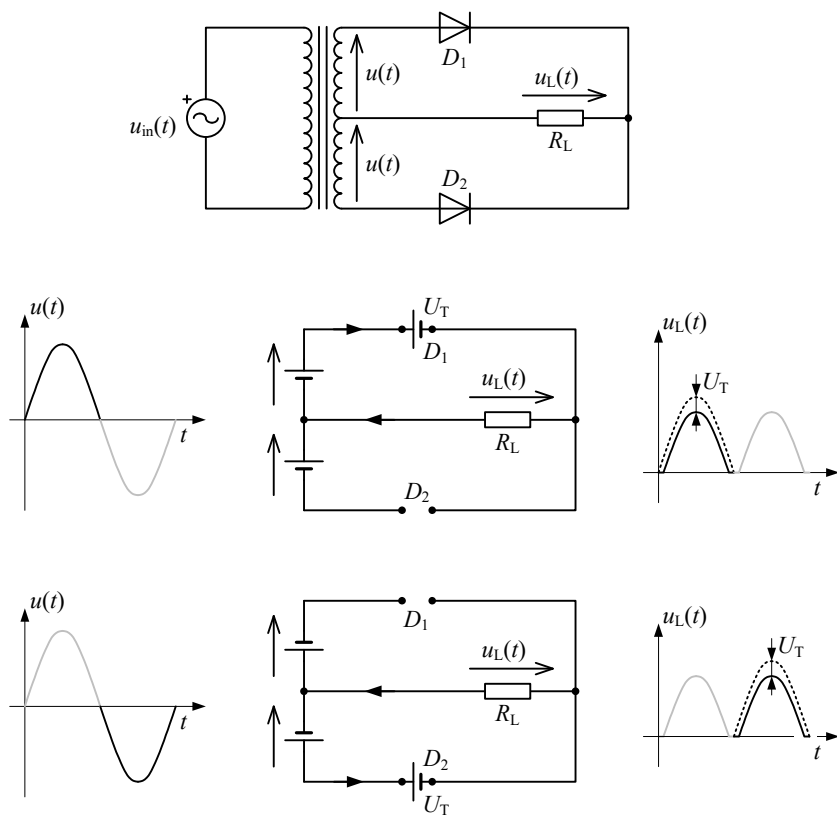
### 11.3.3 Prostownik pełnokresowy z transformatorem o dzielonym uzwojeniu

Prostowanie pełnokresowe można zrealizować, wykorzystując tylko dwie diody. Potrzebny jest do tego transformator z wtórnym uzwojeniem podzielonym na dwie części o równych liczbach zwojów. Dodatkowe wyprowadzenie, tzw. odczep, pomiędzy części uzwojenia wtórnego umożliwia podzielenie napięcia z wyjścia transformatora na dwie równe części, z których każda jest prostowana w odrębnym prostowniku półokresowym. Prostowniki naprzemiennie zasilają to samo obciążenie, gdyż diody są połączone w ten sposób, że w kolejnych półokresach jedna przewodzi, podczas gdy druga pozostaje spolaryzowana zaporowo. Odpowiedni układ i opisaną zasadę jego działania przedstawiono na rys. 11.6.

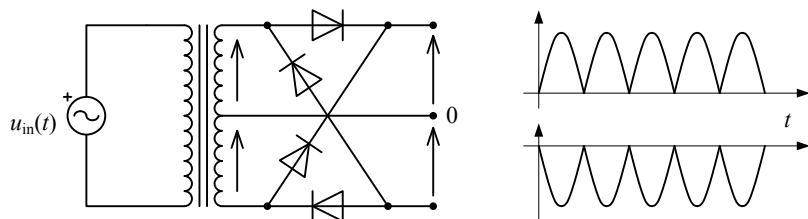
Wynik działania układu jest generalnie taki sam jak w prostowniku mostkowym. Różnica polega tylko na tym, że niezerowe napięcie jest doprowadzane do obciążenia wtedy, kiedy wartość bezwzględna przebiegu na wejściu przekracza napięcie progowe diody.

Wykorzystywanie tylko dwóch diod stanowiło zaletę układu w czasach, kiedy elementy półprzewodnikowe były drogie. Obecnie nie jest on jednak praktyczny. Wykonanie odczepu jest dosyć kłopotliwe i znacząco podnosi koszt transformatora. Inną wadą układu jest to, że maksymalny spadek napięcia na diodzie spolaryzowanej w kierunku zaporowym jest dwukrotnie większy od amplitudy napięcia na obciążeniu. Dlatego trzeba stosować diody droższe niż w prostowniku mostkowym, bo muszą one być bardziej odporne na przebicie.

Za użyteczne rozszerzenie omówionego prostownika można uważać układ z rys. 11.7, który stanowi podstawę zasilaczy wytwarzających parę napięć symetrycznych (o przeciwnych zwrotach). Jak pamiętamy z poprzednich rozdziałów, takiego zasilania potrzebują wzmacniacze operacyjne i wzmacniacze z tranzystorami komplementarnymi.



Rysunek 11.6: Prostownik pełnokresowy z transformatorem o dzielnym uzwojeniu



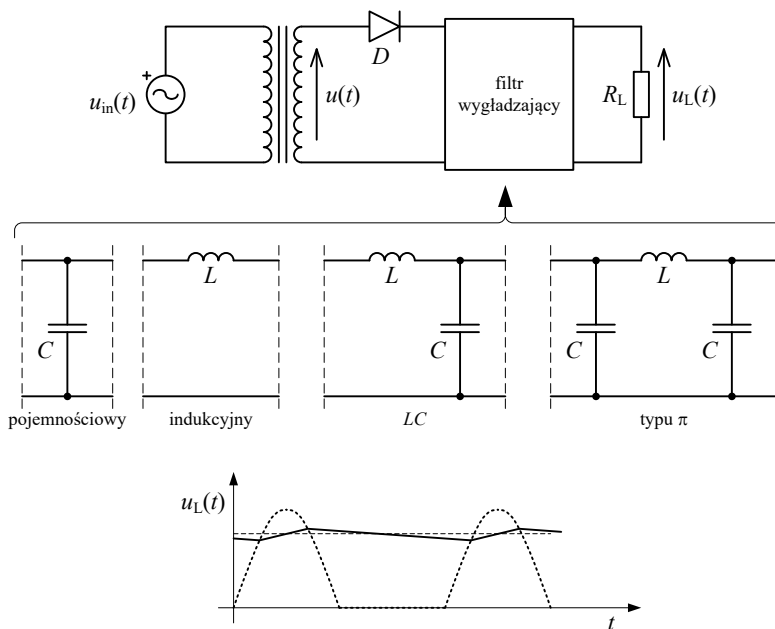
Rysunek 11.7: Dwa prostowniki pełnokresowe współdzielące jeden transformator z odczepem i dostarczające do obciążenia dwa symetryczne napięcia



## 11.4 Filtry wygładzające

Oscylacje napięcia na obciążeniu prostownika można zmniejszyć, wykorzystując zdolność elementów reaktancyjnych do gromadzenia energii i przeciwdziałania zmianom stanu obwodu elektrycznego (zob. rozdział 8 na temat stanów nieustalonych). Ponieważ zmniejszenie tętnień odpowiada stłumieniu udziału składowych zmiennych w przebiegu, mówi się o filtracji dolnoprzepustowej napięcia, a odpowiednie układy nazywa filtrami wygładzającymi.

Schematy najprostszych filtrów wygładzających pokazano na rys. 11.8. Choć właściwości i działanie elementów reaktancyjnych omówiono szczegółowo w innych podrozdziałach, to ich funkcjonowanie w kontekście zasilacza zasługuje na dodatkowy komentarz.



Rysunek 11.8: Typowe schematy filtrów wygładzających i efekt ich działania

Włączając kondensator równolegle do obciążenia prostownika, uzyskujemy pojemnościowy filtr wygładzający. Kiedy napięcie  $u(t)$  na wyjściu transformatora jest większe od napięcia na kondensatorze i rośnie, to dioda przewodzi, a kondensator ładuje się ze stałą czasową  $rC$ , gdzie  $r \ll R_L$  jest rezystancją przewodzącej diody. Kiedy  $u(t)$  maleje, to ładunek zmagazynowany w  $C$  podtrzymuje napięcie  $u_L(t) > u(t)$ . Dlatego w drugim przypadku dioda jest spolaryzowana zaporowo i kondensator rozładowuje się ze stałą czasową  $R_L C$ . Z innego punktu widzenia

można mówić, że kondensator zwiera szybkozmienne składowe tętnień do masy, ograniczając ich udział w spadku napięcia na obciążeniu.

Napięcie na obciążeniu jest tym bardziej zbliżone do stałego, im większa jest stała  $R_L C$ . Ponieważ konstruktor zasilacza nie ma wpływu na rezystancję obciążenia, może zminimalizować tętnienia tylko wstawiając kondensator o wielkiej pojemności, czyli duży, ciężki i kosztowny. Innym mankamentem filtrów pojemnościowych jest to, że podczas ładowania kondensatora występują chwilowe impulsy prądowe o natężeniu znacznie większym od wartości średniej.

Łącząc cewkę szeregowo z obciążeniem prostownika otrzymujemy filtr indukcyjny. Stanowiąc opór dla składowych zmiennych, tym większy, im większa ich częstotliwość, indukcyjność sprawia, że tylko część tętnień z napięcia wyprostowanego odkłada się na  $R_L$ . Z innego punktu widzenia siła elektromotoryczna indukcji przeciwdziała zmianom prądu.

W przeciwieństwie do pojemnościowych filtry indukcyjne tym lepiej wygładzają napięcie, im mniejsza jest rezystancja obciążenia. Do działania takiego układu potrzebna jest ciągłość prądu w cewce, dlatego stosuje się go zasadniczo tylko w prostownikach dwupołkowych.

Aby filtr skutecznie tłumił tętnienia, cewka musi charakteryzować się dużą indukcyjnością. Zatem najważniejsza wada tego rozwiązania jest podobna jak w przypadku filtrowania za pomocą samej pojemności: przeszkodą w wykorzystaniu układu może okazać się zbyt duża waga i wymiary potrzebnego elementu reaktancyjnego.

Ponadto filtr indukcyjny jest wrażliwy na zmiany obciążenia, szczególnie na jego odłączenie, gdy indukuje się duża siła elektromotoryczna, która dąży do podtrzymania prądu i może spowodować przebicie elementów i uszkodzenie układu. W niektórych sytuacjach problemem może być także dodatkowy spadek napięcia stałego na rezystancji uzwojenia cewki. Korzystną właściwością układu jest natomiast stała szerokość impulsów prądowych.

Zalety filtrów pojemnościowego i indukcyjnego można uzyskać w jednym układzie, tworząc bardziej złożone konfiguracje  $LC$ . Niestety, niezależnie od konstrukcji filtru, do skutecznego tłumienia tętnień potrzeba kondensatorów o dużej pojemności i cewek o dużej indukcyjności. Dodatkowo filtry z zasady nie mogą kompensować zmian napięcia wejściowego.

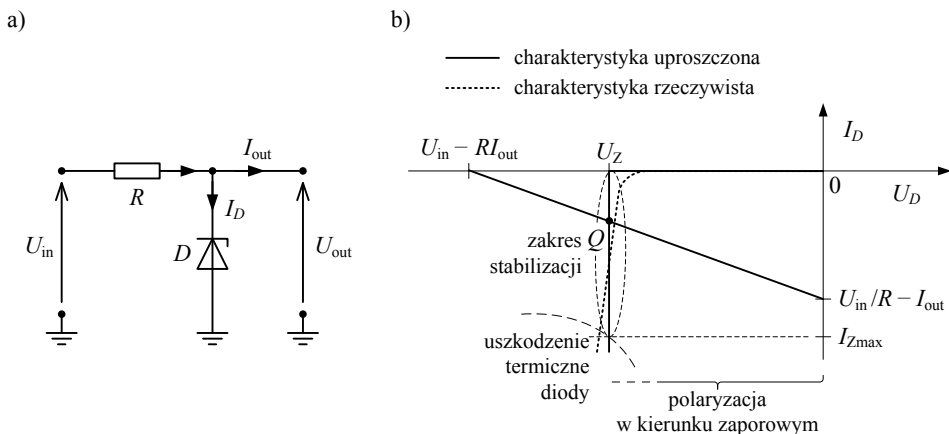
## 11.5 Stabilizatory o działaniu ciągłym

### 11.5.1 Dioda Zenera jako parametryczny stabilizator napięcia

Do stabilizacji napięcia można bezpośrednio wykorzystać specyficzne zachowanie diody Zenera spolaryzowanej w kierunku zaporowym, w układzie pokazanym na rys. 11.9a. Rysunek 11.9b pokazuje użyteczny fragment charakterystyki diody, nazywany zakresem stabilizacji, czyli odcinek prawie równoległy do osi prądu i od-

powiadający napięciu, które jest stałe w przybliżeniu. Dopóki punkt pracy diody pozostaje w tym zakresie, utrzymuje ona na swoich zaciskach napięcie Zenera, które jednocześnie występuje na równoległe dołączonym obciążeniu. Zmiany napięcia wejściowego lub rezystancji obciążenia powodują przesuwanie się punktu pracy. Dioda Zenera kompensuje je, regulując natężenie płynącego przez nią prądu. Graniczne wartości prądu diody wyznaczają zakres dopuszczalnych zmian napięcia wejściowego i rezystancji obciążenia.

Zaletą układu jest niewątpliwie prostota, ale jest ona okupiona licznymi mankamentami. Na rezystancji tracona jest duża moc i nie ma możliwości regulacji napięcia wyjściowego. Lepsze właściwości mają stabilizatory kompensacyjne, których działanie opiera się na sprzężeniu zwrotnym.



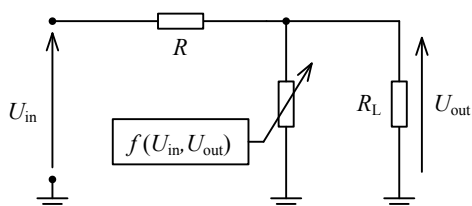
Rysunek 11.9: Dioda Zenera jako najprostszy stabilizator parametryczny

## 11.5.2 Równoległe stabilizatory kompensacyjne

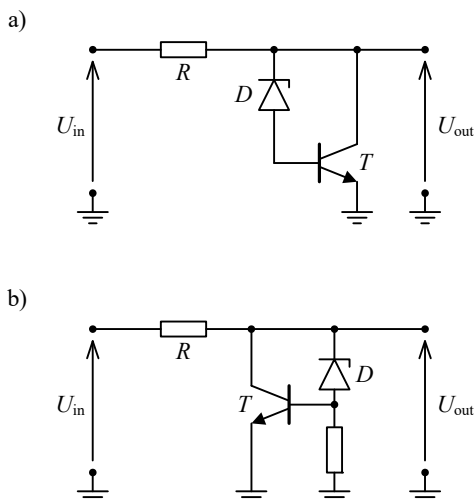
Ogólny schemat równoległego stabilizatora kompensacyjnego pokazano na rys. 11.10. Podobnie jak w przypadku układu z diodą Zenera, element regulacyjny ma wspólne zaciski z obciążeniem. Jego rezystancja jest funkcją napięcia wejściowego i wyjściowego, przy czym druga wielkość zależy od rezystancji. Dlatego właśnie mówimy sprzężeniu zwrotnym. Opiera się ono na ciągłym porównywaniu napięcia wyjściowego z napięciem odniesienia o dużej stałości. Sygnał różnicowy steruje elementem regulacyjnym.

Przykładem realizacji tej koncepcji jest układ z rys. 11.11a, w którym dioda reguluje napięcie bazy tranzystora, tak że przewodnictwo między kolektorem a emiternem zwiększa się, gdy napięcie wejściowe przekracza wartość progową  $U_Z + U_T$ . W ten sposób zadanie rozpraszania energii przerzucone jest z diody na tranzystor, który rozprasza najwięcej ciepła wtedy, kiedy prąd obciążenia jest najmniejszy.

Inny przykład równoległego stabilizatora kompensacyjnego pokazano na rys. 11.11b. Zwiększenie się napięcia na wyjściu skutkuje wzrostem potencjału bazy względem emitera, czyli zwiększają się natężenia prądów elektrod tranzystora. W efekcie wzrasta prąd płynący przez  $R$  oraz spadek napięcia na tym rezystorze, aż zmiana na wyjściu zostanie odwrócona.



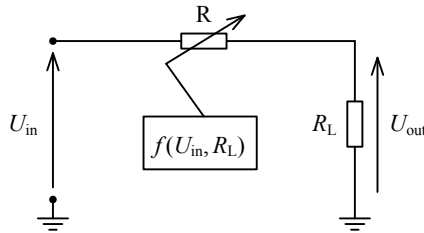
Rysunek 11.10: Zasada działania równoległych stabilizatorów kompensacyjnych



Rysunek 11.11: Równoległe stabilizatory kompensacyjne

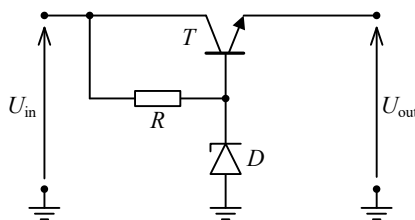
### 11.5.3 Szeregowe stabilizatory kompensacyjne

Napięcie można także stabilizować, łącząc element regulacyjny i obciążenie szeregowo, tak jak na rys. 11.12. Inaczej niż w stabilizatorze równoległym, ten sam prąd płynie przez element regulacyjny i obciążenie. Zmiana rezystancji elementu bezpośrednio wpływa na napięcie, które występuje na obciążeniu.



Rysunek 11.12: Zasada działania szeregowych stabilizatorów kompensacyjnych

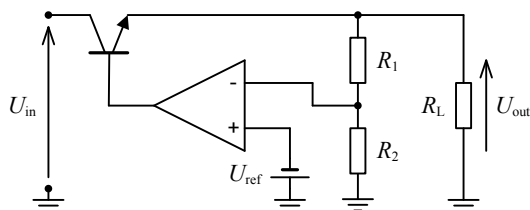
Przykładem praktycznej realizacji omawianego podejścia jest układ z rys. 11.13, w którym dioda Zenera steruje wtórnikiem emiterowym. Tranzystor pracuje w zakresie liniowym i nie powinien wchodzić ani w stan zatkania, ani nasycenia. Tranzystor pełni jednocześnie funkcje elementu regulacyjnego i układu porównującego. Inaczej niż w stabilizatorze z rys. 11.9, dioda stanowi źródło napięcia odniesienia. Ujemne sprzężenie zwrotne kontroluje przewodność między kolektorem a emiterem. Dioda jest zasilana napięciem wejściowym (niestabilizowanym). Jest to korzystniejsze wtedy, kiedy napięcie wyjściowe jest zbliżone do napięcia Zenera.



Rysunek 11.13: Wtórnikowy stabilizator szeregowy

W precyzyjniejszych układach do porównywania napięć stosowane są wzmacniacze operacyjne, które wzmacniają różnicę potencjałów. Część napięcia wyjściowego jest porównywana z napięciem odniesienia i sygnał różnicowy (po wzmocnieniu) reguluje rezystancję szeregową tranzystora dla składowych stałych. Schemat tego typu uwidocznił na rys. 11.14.

Założmy, że napięcie na obciążeniu zwiększa się wskutek wzrastania napięcia wejściowego lub rezystancji obciążenia. Proporcjonalnie rośnie potencjał na od-



Rysunek 11.14: Szeregowy stabilizator kompensacyjny ze wzmacniaczem operacyjnym

wracającym wejściu wzmacniacza, wynikający z podziału napięcia wyjściowego w dzielniku złożonym z rezystorów  $R_1$  i  $R_2$ . Napięcie odniesienia, które jest doprowadzone do drugiego wejścia wzmacniacza, pozostaje stałe, czyli zwiększa się sygnał różnicowy. Wzmacniacz jest odwracający, więc zwiększenie sygnału różnicowego na jego wejściu powoduje obniżenie potencjału na wyjściu, czyli również na bazie tranzystora. Taka zmiana napięcia polaryzującego złącze baza-emiter sprawia, że złącze kolektor-emiter przewodzi gorzej, stawia większy opór. Spadek napięcia na tym złączu rośnie, czyli zmniejsza się część napięcia wejściowego stanowiąca różnicę potencjałów na obciążeniu. Początkowa zmiana napięcia na obciążeniu zostaje skompensowana.

#### 11.5.4 Stabilizatory scalone

Na potrzeby zasilaczy rozwijane są dedykowane serie elementów półprzewodnikowych, w szczególności diody i tranzystory mocy, których parametry są dostosowane do regulowania napięć i prądów. Ponadto wytwarzane są kompletne stabilizatory scalone, które można podzielić na dwie kategorie. Pierwszą tworzą proste chipy o trzech zaciskach, takie jak rodzina  $\mu A78xx$ , do stosowania w roli lokalnych stabilizatorów małej mocy. Jeżeli potrzebna jest większa funkcjonalność, w szczególności możliwość regulowania napięcia stabilizowanego, to można stosować układy scalone takie jak  $\mu A723$ .

#### 11.5.5 Zastosowania stabilizatorów o działaniu ciągłym

Jak wyjaśniono w poprzednich podrozdziałach, stabilizatory o działaniu ciągłym utrzymują zadane napięcie na obciążeniu, odejmując od wejściowej różnicy potencjałów spadek napięcia na elemencie półprzewodnikowym o zmiennej przewodności. Obniżanie napięcia w taki sposób wiąże się z dużym marnotrawieniem energii, którą element regulacyjny wydziela jako ciepło. Ponadto nagrzewający się element trzeba chłodzić, wykorzystując radiatory i wentylatory, co zwiększa koszty i gabaryty urządzeń.

Pomimo swoich wad stabilizatory o działaniu ciągłym są powszechnie wykorzystywane w kilku, stosunkowo częstych, sytuacjach.

Po pierwsze, nieefektywność zasilacza nie jest zbyt istotnym problemem, gdy moc pobierana przez zasilane urządzenie jest niewielka lub gdy jest ono włączane sporadycznie. Poprawa sprawności zasilacza nie ma sensu, bo zamiast przynieść realne korzyści, doprowadzi do jego skomplikowania, zmniejszenia niezawodności, a także zwiększenia ceny.

Po drugie, stabilizatory o działaniu ciągłym nie generują wysokoczęstotliwościowych szumów, które mogłyby przedostawać się do zasilanego układu. Takie elektrycznie „ciche” źródła zasilania są wymagane w urządzeniach wrażliwych na szumy, takich jak wzmacniacze audio, odbiorniki radiowe czy precyzyjne urządzenia pomiarowe.

Wreszcie, omawiane układy stabilizacyjne doskonale spisują się w roli lokalnych stabilizatorów, gdy stałe napięcie o szczególnej wartości jest niezbędne do zasilania jedynie małego modułu z dużego urządzenia, przy czym potrzebna moc i dopuszczalne straty nie przekraczają kilku watów.

We wszystkich tych obszarach zastosowań zaletą stabilizatorów o działaniu ciągłym jest prostota, która z jednej strony przekłada się na niezawodność, a z drugiej — na łatwość projektowania i użycia. W niektórych sytuacjach cenna jest też możliwość prostej regulacji napięcia wyjściowego oraz mała bezwładność w reagowaniu na zmiany obciążenia i napięcia wejściowego.

## 11.6 Stabilizatory i zasilacze impulsowe

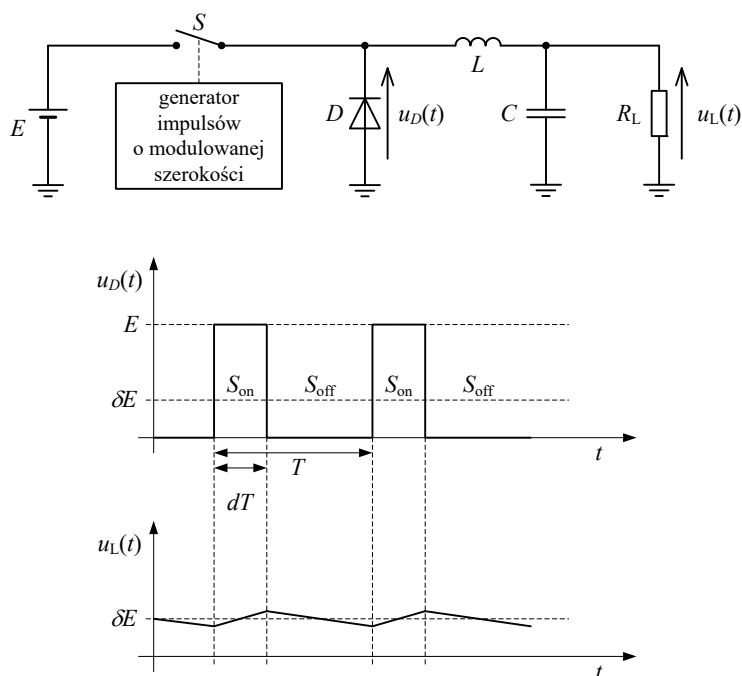
Problemy małej sprawności i dużych gabarytów nie dotyczą stabilizatorów impulsowych, które są obecnie powszechnie stosowane w zasilaczach dużej mocy, m.in. w zasilaczach do komputerów osobistych. Działanie takich stabilizatorów opiera się na spostrzeżeniu, że ustaloną wartość średnią napięcia na obciążeniu można uzyskać, przetwarzając napięcie stałe w odpowiednio ukształtowany ciąg impulsów, którego filtrowanie daje przebieg stabilizowany.

Ogólną zasadę stabilizacji impulsowej ilustruje rys. 11.15. Wejściowe napięcie  $E$  dochodzi do elektronicznego klucza  $S$ , który jest cyklicznie zamykany i otwierany, w wyniku czego na diodzie pojawia się ciąg impulsów:

$$u_D(t) = \begin{cases} E & \text{dla } 0 \leq t < \delta T \\ 0 & \text{dla } \delta T \leq t < T \end{cases} \quad (11.10)$$

gdzie  $\delta < 1$  jest nazywane współczynnikiem wypełnienia. Określając stosunek czasu  $\delta T$ , w którym klucz pozostaje zamknięty, do całego okresu  $T$ , współczynnik decyduje o wartości średniej  $u_D(t)$ , która jest równa  $\delta E$ , co można łatwo wykazać.

Regulując współczynnik wypełnienia można nie tylko zmieniać napięcie wyjściowe, ale także kompensować jego odchylenia spowodowane zmianami obciążenia lub wahaniami napięcia wejściowego.



Rysunek 11.15: Zasada działania stabilizatora impulsowego

Na rys. 11.15 symbol źródła napięcia stałego został umieszczony tylko dla uproszczenia. W praktycznych zasilaczach impulsowych punktem wyjściowym jest wyprostowany przebieg sinusoidalny.

Do przekształcenia impulsów w przebieg wolnozmienny wystarcza prosty filtr  $LC$ , za pośrednictwem którego obciążenie jest dołączane do diody. Zadaniem diody jest domykanie obwodu  $R_L L$  w momentach bezpośrednio po otwarciu klucza, tak aby napięcie, które indukuje się na cewce w odpowiedzi na gwałtowną zmianę prądu, zasilalo wtedy obciążenie.

Skuteczność filtracji, a tym samym stabilizacji, można poprawić, zwiększając częstotliwość przełączania klucza. Ponadto przy wyższych częstotliwościach dobrze spisują się cewki o niewielkich indukcyjnościach i kondensatory o niewielkich pojemnościach, które są mniejsze, lżejsze i tańsze (bo łatwiejsze do wykonania) od elementów stosowanych w filtrach wygładzających do zasilaczy ze stabilizatorami o działaniu ciągłym.



W praktyce częstotliwości przełączania nie przekraczają jednak kilkunastu, kilkudziesięciu kHz, ponieważ za duże tempo sprawia, że straty energii na kluczu znacząco obniżają sprawność stabilizatora, a trudno jest skonstruować szybkie elementy półprzewodnikowe o dużej wydajności energetycznej.

Wysoka sprawność stabilizatorów impulsowych wynika z uniknięcia strat na elemencie regulacyjnym. Przez większość czasu klucz elektroniczny jest w stanie zwarcia albo rozwarcia, a wtedy zasadniczo nie jest wydzielane na nim ciepło. Znaczące straty mocy mają miejsce tylko w relatywnie krótkich chwilach przełączania. To, że pozostałe elementy stabilizatora nie są idealne, praktycznie nie ma wpływu na jego sprawność.

Chociaż zasada działania zasilacza impulsowego jest prosta, jej praktyczna realizacja stała się możliwa dopiero stosunkowo niedawno. Do sterowania kluczem, który jest prostym układem i zwykle ma formę pojedynczego tranzystora, potrzebny jest skomplikowany układ elektroniczny, który formuje impulsy o szerokości dynamicznie dostosowywanej do bieżącej wartości napięcia źródłowego i mocy pobieranej przez obciążenie. Do tego potrzebne jest sprzężenie zwrotne, zatem stabilizatory impulsowe stanowią odmianę kompensacyjnych.

Podobnie jak w przypadku stabilizatorów o działaniu ciągłym, istnieją specjalizowane układy scalone do zasilaczy impulsowych. Ich przykładem jest chip TDA 2640 do stosowania w zasilaczach odbiorników TV.

Dokładniejsza analiza zasilaczy impulsowych wykracza poza zakres niniejszej książki. Na koniec warto tylko zauważyć, że ich duża sprawność wiąże się niestety z poważnymi wadami. Stabilizatory impulsowe są skomplikowane i rozbudowane, a przez to mniej niezawodne od stabilizatorów o działaniu ciągłym. Ponadto przełączanie klucza wiąże się z generowaniem wysokoczęstotliwościowych zakłóceń, których obecność wyklucza stosowanie takich stabilizatorów np. w precyzyjnych urządzeniach pomiarowych.

## 11.7 Zasilanie bateryjne

### 11.7.1 Wprowadzenie

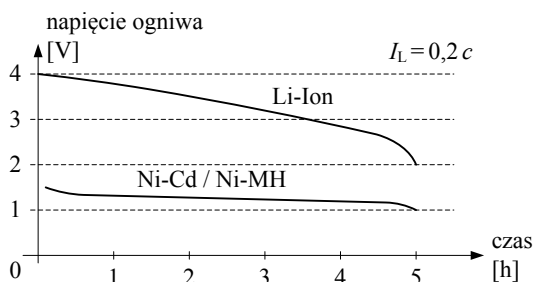
Zasilanie bateryjne umożliwia korzystanie z urządzeń elektronicznych w miejscach, gdzie nie ma sieci energetycznej. Nawet tam, gdzie sieć jest dostępna, takie zasilanie w połączeniu z bezprzewodową transmisją sygnału może znacząco poprawiać komfort użytkowania np. telefonu stacjonarnego czy słuchawek.

W zasilaniu bateryjnym funkcję źródeł energii pełnią najczęściej ogniwa elektrochemiczne<sup>2</sup> i do nich ograniczymy dalszą dyskusję. Dostarczana przez nie energia

---

<sup>2</sup> Oprócz ogniw elektrochemicznych produkowane są ogniwa fotowoltaiczne (baterie słoneczne), termoelektryczne i jądrowe.

prądu stałego jest wynikiem reakcji chemicznych. Wskutek przepływu prądu między baterią a obciążeniem intensywność reakcji stopniowo zmniejsza się — bateria ulega wyładowaniu, którego objawem jest zmniejszanie się napięcia na jej zaciskach. Ilustruje to rys. 11.16. Dlatego urządzenia wrażliwe na poziom napięcia zasilającego muszą być zasilane z baterii za pośrednictwem stabilizatora.



Rysunek 11.16: Przebiegi wyładowania akumulatorów różnych typów

Pożądane jest, by urządzenie działało jak najdłużej, korzystając przy tym z jak najmniejszych i jak najlżejszych baterii. Postęp w tej dziedzinie opiera się na dwóch równolegle rozwijających się podejściach. Z jednej strony opracowywane są coraz to nowe technologie wytwarzania baterii, ale z drugiej, co jest równie ważne, wymyślane są elementy i układy elektroniczne o zmniejszonym poborze mocy. Przykładami rozwiązań z drugiej kategorii są systemy komputerowe, które śledzą aktywność użytkownika/programów i na tej podstawie wyłączają/włączają swoje komponenty, oraz technologia CMOS.

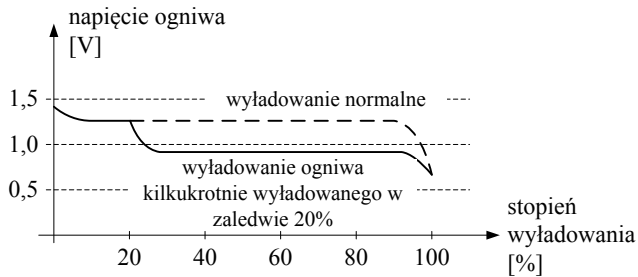
### 11.7.2 Baterie a akumulatory

Baterie składają się z ogniw, z których każde obejmuje dwie elektrody zanurzone w elektrolicie. Pierwiastki i związki chemiczne użyte do wykonania ogniw określają typ baterii i decydują o jej właściwościach oraz cenie. Każda technologia produkcji ogniw ma docelowy zakres zastosowań, np. baterie do sprzętu wojskowego muszą niezawodnie działać w skrajnie niskich i wysokich temperaturach.

Rozróżnia się baterie pierwotne i wtórne. W pierwotnych, które zwykle są nazywane po prostu bateriami, zachodzą reakcje nieodwracalne, tak że ogniwo staje się bezużyteczne po wyładowaniu. We wtórnych, które powszechnie są nazywane akumulatorami, reakcję chemiczną można cofnąć, ładując ogniwo, czyli wymuszając przepływ prądu w kierunku odwrotnym do tego podczas wyładowania. Kosztem dostarczenia energii z zewnątrz, za pośrednictwem specjalnego układu zwanego ładowarką, akumulator na powrót staje się źródłem elektrycznym.

Każdy cykl ładowanie-wyładowanie powoduje pewne zużycie elektrod i elektrolytu, tak że pojemność akumulatora stopniowo maleje. Po kilkuset cyklach baterię

trzeba wymienić. Dodatkowo niektóre typy akumulatorów wykazują efekt pamięci, który jest związany z kumulacją produktów niedokończonej reakcji chemicznej. Po kilku niepełnych wyładowaniach kolejne pełniejsze wyładowanie zachodzi przy napięciu znacznie niższym niż powinno, co zilustrowano na rys. 11.17.



Rysunek 11.17: Wpływ efektu pamięci na wyładowanie akumulatora

Nieużywane baterie i akumulatory ulegają tzw. samowyładowaniu, które jest szybsze w początkowym okresie po wytworzeniu/naładowaniu i w wyższej temperaturze otoczenia.

Podstawowym parametrem baterii jest napięcie nominalne, podawane na jej obudowie i osiągame przy wyładowaniu 50%. W przypadku akumulatorów drugą, równie ważną charakterystyką jest pojemność, mierzona w Ah i określająca natężenie prądu  $c$ , którego przepływ powoduje pełne wyładowanie baterii w ciągu godziny. Inne natężenia prądów ładowania i wyładowania podaje się zwykle jako wielokrotności  $c$ .

Maksymalny prąd obciążenia, jaki można uzyskać z baterii, jest ograniczony jej rezystancją wewnętrzną. Bateria reprezentuje bowiem źródło rzeczywiste, w którym napięcie dostarczone do obciążenia jest równe różnicy napięcia źródła idealnego i spadku napięcia na rezystancji wewnętrznej (zob. podrozdział 2.1). Za duży prąd obciążenia powoduje, że spadek napięcia jest znaczny i obniża różnicę potencjałów na zaciskach odbiornika energii do zbyt małej wartości.

Jeżeli potrzebne napięcie lub obciążalność prądowa są większe od oferowanych przez dany typ baterii, to można połączyć szeregowo lub równoległe kilka egzemplarzy (zob. problem P11.12).

Przepływ dużego prądu przez baterię powoduje jej nagrzewanie. Ponieważ w większości ogniw obudowa jest zamknięta, w efekcie rośnie ciśnienie w jej wnętrzu, co może doprowadzić do wybuchu. W związku z tym na obudowach baterii umieszczane są ostrzeżenia przed zwieraniem zacisków, zmianą polaryzacji i ładowaniem ogniw jednorazowego użytku. Niektóre konstrukcje są też wyposażone w wentyle bezpieczeństwa i układy zabezpieczające.

Działanie baterii zależy od temperatury otoczenia. W niskich temperaturach następuje spowolnienie reakcji chemicznej i zmniejszenie tak napięcia, jak i pojemności ogniwa. W wyższych temperaturach jest odwrotnie, a dodatkowo zwiększa się niebezpieczeństwo eksplozji i szybciej następuje samowyladowanie.

### 11.7.3 Właściwości najpopularniejszych typów baterii

Do zasilania drobnych urządzeń, takich jak latarki, piloty TV, radioodbiorniki itp., powszechnie stosuje się baterie salmiakowe (Leclanche) i alkaliczne (zasadowe). Jedne i drugie charakteryzują się takim samym napięciem ogniwa nieobciążonego, czyli 1,5V. Odróżnia je rodzaj elektrolitu i właściwości elektryczne (pojemność, okres przydatności do użycia), które są lepsze w przypadku drugiego typu ogniwa. Problemem, który utrudnia produkcję i decyduje o wyraźnie wyższej cenie baterii alkalicznych, jest jednak hermetyczne zamknięcie obudowy, której wewnątrz musi być chronione przed dostępem powietrza.

Zupełnie inny typ baterii jest wykorzystywany w komputerach PC do zasilania zegara czasu rzeczywistego i pamięci ustawień BIOS. Jest to bateria litowa o napięciu 3,5V i czasie życia od 5 do 10 lat.

W urządzeniach powszechnego użytku stosowane są trzy rodziny akumulatorów: nikielowo-kadmowe (ang. *nickel-cadmium*: Ni-Cd), nikielowo-wodorkowe (ang. *nickel-metal-hydride*: Ni-MH) i litowo-jonowe (ang. *lithium-ion*: Li-Ion).

Technologia Ni-Cd jest najstarsza. Baterie takie są najmniej pojemne, wykazują silny efekt pamięci i stanowią zagrożenie dla środowiska, ponieważ zawierają toksyczne substancje.

Akumulatory Ni-MH nie wykazują efektu pamięci, mają większą pojemność i są przyjazne środowisku. Największą ich zaletą jest jednak płaska charakterystyka rozładowania (zob. rys. 11.16), która pozwala efektywnie wykorzystywać w zasilaczach z takimi bateriami stabilizatory o działaniu ciągłym.

Akumulatory Li-Ion są dwukrotnie lżejsze od baterii Ni-Cd i NiMH o tej samej pojemności. Napięcie nominalne ogniwa tego typu wynosi 3,6V, czyli jest trzykrotnie większe od napięcia 1,2V, które charakteryzuje ogniwa dwóch ostatnich typów. Dodatkowo krzywa wyladowania jest nachylona (zob. rys. 11.16), odbiegając znacząco od idealnej, czyli płaskiej, co sprawia, że z bateriami litowo-jonowymi efektywnie współpracują tylko stabilizatory impulsowe. Innym problemem jest łatwość uszkodzenia takich akumulatorów. Najważniejszą ich wadą jest jednak wysoka cena.

Tempo samowyladowania jest rzędu 10% dla Li-ION, 20% dla NiCd i 30% dla NiMH na miesiąc w temperaturze 20°C.

### 11.7.4 Ładowanie akumulatorów

Nawet wtedy, kiedy baterie różnych typów mają takie samo napięcie nominalne i są zamknięte w jednakowych obudowach, każdy typ akumulatora wymaga specjalnej ładowarki. Użycie niewłaściwego urządzenia może spowodować uszkodzenie ogniwa. Konstrukcja akumulatora decyduje bowiem o zasadach, które rządzą procesem ładowania.

Możliwe są dwa podejścia do ładowania akumulatorów Ni-Cd i Ni-MH: szybkie (rzędu godziny) i wolne (rzędu kilkunastu godzin). W obydwu przypadkach ładowarka działa na zasadzie źródła prądowego, które wymusza w ogniwie przepływ prądu o ustalonym natężeniu.

Podczas ładowania wolnego natężenie prądu jest ograniczone tak, że nie ma niebezpieczeństwa uszkodzenia ogniwa, nawet wtedy, kiedy prąd płynie, choć akumulator został już naładowany. Bezpieczne natężenie wynosi od  $1/10c$  do  $1/3c$  dla Ni-Cd i od  $1/40c$  do  $1/10c$  dla Ni-MH. Zaletą takiego ładowania jest prostota ładowarki, która po prostu ma wymuszać stałą wartość prądu i nie musi monitorować stanu akumulatora.

Ładowanie szybkie polega na wymuszeniu przepływu prądu o maksymalnym dopuszczalnym natężeniu (rzędu od  $1c$  do  $1,2c$ ) i błyskawicznym zatrzymaniu go w momencie, kiedy akumulator wykazuje oznaki naładowania lub przegrzania i grozi eksplozją. Dlatego temperatura i napięcie baterii muszą być cały czas monitorowane specjalnym układem, który komplikuje ładowarkę i podnosi jej koszt.

Akumulatory litowo-jonowe są bardzo wrażliwe na przeładowanie. Wymuszanie prądu w naładowanym ogniwie powoduje nieodwracalną korozję elektrod i szybkie zmniejszenie jej pojemności do zera. Dlatego ładowarki do tego typu akumulatorów działają na zasadzie źródła napięcia stałego z ograniczeniem prądowym.

Ładowanie odbywa się w dwóch fazach. Najpierw ładowarka pozwala na przepływ prądu o maksymalnym natężeniu rzędu  $1c$ , który nie powoduje uszkodzenia ogniwa, szybko przekazując do akumulatora większą część (ok. 65%) przewidzianej energii. Potem, po stwierdzeniu, że ogniwo osiągnęło napięcie progowe 4,2 V, ładowarka dąży do utrzymania tej wartości, regulując odpowiednio prąd. W miarę przekazywania do akumulatora pozostałych 35% ładunku, natężenie prądu jest stopniowo zmniejszane do zera. Ponieważ spadek natężenia ma charakter wykładniczej funkcji czasu, druga faza jest dłuższa od pierwszej. Całkowity czas ładowania wynosi ok. dwóch godzin.

Przedstawione wyżej fakty dowodzą, że skonstruowanie ładowarki nie jest zadaniem banalnym. Dlatego oferowane są specjalne układy scalone, na podstawie których łatwiej opracować urządzenie odpowiednie do danego typu ogniwa. Na przykład firma Texas Instruments produkuje chipy LM3420 i LP3918 przeznaczone do obsługi akumulatorów Li-Ion, szczególnie w telefonach komórkowych.

## 11.8 Przetwornice napięcia stałego

Typowe baterie i akumulatory dostarczają niewielkich napięć, tymczasem do działania niektórych urządzeń, np. lamp błyskowych w cyfrowych aparatach fotograficznych, potrzebne są duże różnice potencjałów. W takich sytuacjach użyteczne są przetwornice napięcia stałego (ang. DC-DC converters), które przekształcają zasilającą je napięcie stałe w ustaloną, większą różnicę potencjałów. Układy takie działają w ten sposób, że stałe napięcie zasilania jest przekształcane w sygnał zmienny, którego amplituda jest następnie zwiększana za pomocą transformatora, a wynikowe napięcie jest prostowane, by ponownie pojawiła się ustalona różnica potencjałów. Podobnie jak w przypadku zasilaczy impulsowych, czytelników zainteresowanych szczegółami odsyłamy do specjalistycznej literatury [4].

## 11.9 Pytania, problemy i quiz

Jeśli nie powiedziano inaczej, w następujących problemach należy przyjmować, że impedancja, reaktancja i rezystancja są podawane w  $\Omega$ , pojemność w F, indukcyjność w H, napięcie w V, a prąd w A.

### 11.9.1 Problemy rozwiązane

#### Problem P11.1

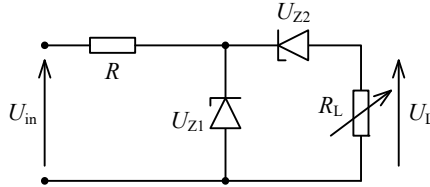
Jakie napięcie Zenera powinno charakteryzować diodę w stabilizatorze z rys. 11.13, żeby na obciążeniu występowało napięcie 4 V?

#### Odpowiedź

Ponieważ na obciążeniu ma być nieduże napięcie, musimy wziąć pod uwagę, że podczas normalnej pracy stabilizatora na złączu baza-emiter tranzystora występuje spadek napięcia, który wynosi 0,7 V i jest skierowany przeciwnie do napięcia na diodzie. Zatem napięcie Zenera musi być odpowiednio większe od wyjściowego, czyli równe 4,7 V.

**Problem P11.2**

Jaki spadek napięcia występuje na obciążeniu w układzie z rys. 11.18? Należy przyjąć, że napięcie wejściowe jest większe od każdego z napięć Zenera oraz że  $U_{Z1} > U_{Z2}$ .



Rysunek 11.18: Schemat do problemu P11.2

**Rozwiązanie**

Relacje między napięciami są takie, że obydwie diody pracują w zakresie stabilizacji i na każdej z nich jest spadek równy odpowiedniemu napięciu Zenera. Napięcie na obciążeniu obliczamy, zapisując bilans napięć w oczku z prawej strony:

$$U_{Z1} = U_{Z2} + U_L$$

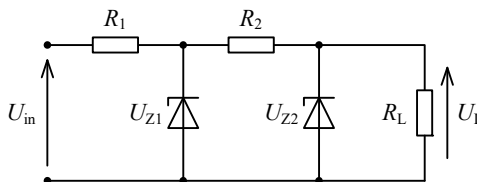
czyli:

$$U_L = U_{Z1} - U_{Z2}$$

Układ może być stosowany do stabilizowania małych (1...2V) i nietypowych napięć, gdy nie ma odpowiedniej standardowej diody.

**Problem P11.3**

Jaki spadek napięcia występuje na obciążeniu w układzie z rys. 11.19? Do czego można wykorzystać taki układ? Należy przyjąć, że napięcie wejściowe jest większe od każdego z napięć Zenera.



Rysunek 11.19: Schemat do problemu P11.3

**Odpowiedź**

Jeżeli  $U_{Z1} > U_{Z2}$ , to obydwie diody działają jako stabilizatory. Podobnie jak w ukła-

dzie z problemu P11.2, jedna odgrywa rolę stabilizatora wstępnego, który kompensuje zmiany napięcia wejściowego, a druga pełni funkcję stabilizatora zasadniczego, który kompensuje zmiany obciążenia. Na obciążeniu występuje

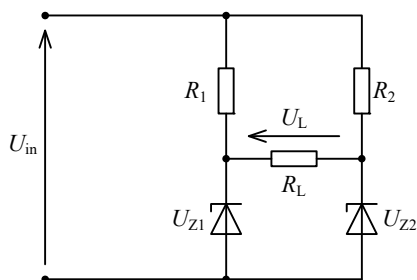
$$U_L = U_{Z2}$$

Jeżeli  $U_{Z1} < U_{Z2}$ , to tylko pierwsza dioda pracuje w zakresie stabilizacji. Napięcie dostarczane za jej pośrednictwem do reszty obwodu jest za małe, by wymusić przebiecie w drugiej diodzie, która wobec tego nie przewodzi. Napięcie na obciążeniu jest wynikiem podziału napięcia z pierwszej diody:

$$U_L = \frac{R_L}{R_2 + R_L} U_{Z1}$$

### Problem P11.4

Jaki spadek napięcia występuje na obciążeniu w układzie z rys. 11.20? Należy przyjąć, że napięcie wejściowe jest większe od każdego z napięć Zenera.



Rysunek 11.20: Schemat do problemu P11.4

### Rozwiązanie

Podobnie jak w układzie, którego dotyczył problem P11.2,

$$U_L = U_{Z1} - U_{Z2}$$

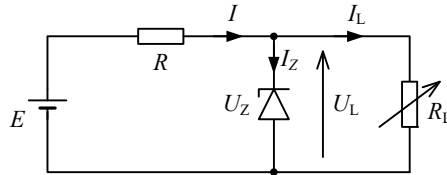
ale równanie obowiązuje niezależnie od relacji napięć Zenera.

Ponadto diody działają jako równorzędne stabilizatory, podczas gdy w układzie z problemu P11.2 pierwsza dioda kompensuje zmiany napięcia wejściowego, a druga kompensuje zmiany obciążenia.



**Problem P11.5**

Ustalić dopuszczalny zakres rezystancji obciążenia  $R_L$ , na którym stabilizator z rys. 11.21 jest w stanie utrzymać napięcie  $U_L = 10V$ . Określić odpowiedni zakres natężeń prądu  $I_L$  płynącego przez obciążenie. Należy przyjąć, że maksymalne natężenie prądu diody  $I_{Z\max} = 25\text{ mA}$ ,  $R = 400\Omega$ ,  $E = 40\text{ V}$ , zaś  $U_Z = 10\text{ V}$ .



Rysunek 11.21: Schemat do problemu P11.5

**Rozwiązanie**

W układzie zawsze obowiązuje bilans prądów:

$$I = I_Z + I_L$$

a napięcie na obciążeniu jest równe napięciu na diodzie:

$$U_L = U_D$$

Dopóki dioda pracuje w zakresie stabilizacji

$$U_L = U_D = U_Z$$

czyli

$$I_L = \frac{U_Z}{R_L}$$

Zakres stabilizacji wyznaczają dwa graniczne natężenia prądu diody. Minimalne, zerowe,

$$I_{Z\min} = 0\text{ A}$$

występuje wtedy, kiedy dioda nie wpływa na działanie pozostałych elementów, gdyż one same utrzymują na obciążeniu napięcie  $U_Z$ , dzięki specyficznej relacji między  $E$ ,  $R$  i  $R_L$ . W takiej sytuacji natężenie prądu obciążenia jest maksymalne:

$$I = I_{L\max} = \frac{E}{R + R_{L\min}}$$

a jednocześnie

$$I_{L\max} = \frac{U_Z}{R_{L\min}}$$

Łącząc powyższe formuły, możemy ustalić odpowiednią rezystancję obciążenia:

$$\begin{aligned}\frac{U_Z}{R_{L\min}} &= \frac{E}{R + R_{L\min}} \\ (E - U_Z) R_{L\min} &= U_Z R \\ R_{L\min} &= \frac{U_Z}{E - U_Z} R = \frac{10}{40 - 10} 100 = 33,3 [\Omega]\end{aligned}$$

Górne ograniczenie zakresu stabilizacji jest określone maksymalnym natężeniem,  $I_{Z\max}$ , które może przyjąć prąd płynący przez diodę, nie powodując jej uszkodzenia w wyniku wydzielania zbyt dużej mocy i przegrzania.

Ogólnie rzecz biorąc, prąd płynie przez diodę wtedy, kiedy przejmując odpowiednią część prądu wypływającego ze źródła, reguluje ona prąd w obciążeniu, tak aby spadek napięcia na nim był równy napięciu Zenera.

Dla ustalonej wartości napięcia źródłowego, prąd diody jest największy, gdy rezystancja obciążenia jest najmniejsza. Wtedy

$$I = I_{Z\max} + I_{L\min} = I_{Z\max} + \frac{U_Z}{R_{L\max}}$$

a jednocześnie

$$I = \frac{E - U_Z}{R}$$

Po połączeniu tych równań w

$$\frac{U_Z}{R_{L\max}} = \frac{E - U_Z}{R} - I_{Z\max}$$

wyznaczamy

$$R_{L\max} = \left( \frac{E - U_Z}{R} - I_{Z\max} \right)^{-1} U_Z = (0,075 - 0,025)^{-1} 10 = 200 [\Omega]$$

---

### Problem P11.6

Zapoznać się z kartą katalogową scalonego stabilizatora napięcia np.  $\mu A723$ . Należy zwrócić uwagę na to, że oprócz charakterystyk układu są podane typowe schematy jego użycia.

---

**Problem P11.7**

Udowodnić, że w prostowniku jednopółkowym i dwupółkowym średnie wartości napięcia na obciążeniu są takie, jak podano w podrozdziale 11.3.

**Wskazówka**

Wzór (4.41) stanowi definicję wartości średniej, zaś przykłady 4.15 i 4.16 pokazują, jak przeprowadzić obliczenia w przypadku prostowania sinusoidalnego sygnału o amplitudzie 1 V.

**Problem P11.8**

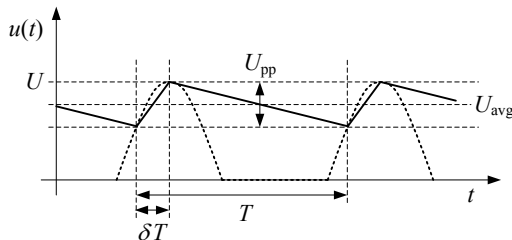
Wykazać słuszność wzorów na wartość średnią napięcia wyjściowego

$$U_{\text{avg}} = U_m - \frac{U_{\text{pp}}}{2}$$

oraz na wartość skuteczną tętnień

$$U_{\text{rms}} = \frac{U_{\text{pp}}}{\sqrt{3}}$$

dla pokazanej na rys. 11.22 aproksymacji przebiegu napięcia na wyjściu prostownika półkresowego z filtrem pojemnościowym.



Rysunek 11.22: Przebieg napięcia do problemu P11.8

**Rozwiązanie**

W celu ułatwienia analizy przedstawmy rozpatrywany sygnał jako sumę składowej stałej  $U$  i tętnień  $u_r(t)$ :

$$u(t) = U + u_r(t)$$

gdzie:

$$u_r(t) = \begin{cases} -U_{\text{pp}} + \frac{t}{\delta T} U_{\text{pp}} = u_1(t) & 0 \leq t \leq \delta T \\ -\frac{t - \delta T}{(1 - \delta)T} U_{\text{pp}} = u_2(t) & \delta T \leq t \leq T \end{cases}$$

Aby móc zastosować wzór na wartość średnią

$$U_{\text{avg}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left( \int_0^T U dt + \int_0^T u_r(t) dt \right) = U + \frac{1}{T} \int_0^T u_r(t) dt$$

obliczamy

$$\int_0^T u_r(t) dt = \int_0^{\delta T} u_1(t) dt + \int_{\delta T}^T u_2(t) dt$$

gdzie

$$\int_0^{\delta T} u_1(t) dt = \left[ \frac{U_{\text{pp}}}{2\delta T} t^2 - U_{\text{pp}} t \right]_0^{\delta T} = -\frac{\delta T}{2} U_{\text{pp}}$$

a

$$\begin{aligned} \int_{\delta T}^T u_2(t) dt &= \left[ -\frac{U_{\text{pp}}}{2(1-\delta)T} t^2 + \frac{\delta U_{\text{pp}}}{1-\delta} t \right]_{\delta T}^T \\ &= -\frac{U_{\text{pp}}}{2(1-\delta)} T + \frac{\delta U_{\text{pp}}}{1-\delta} T + \frac{U_{\text{pp}}}{2(1-\delta)} \delta^2 T - \frac{\delta U_{\text{pp}}}{1-\delta} \delta T \\ &= -\frac{(1-\delta^2) U_{\text{pp}} T}{2(1-\delta)} + \frac{\delta(1-\delta) U_{\text{pp}} T}{1-\delta} = \left( \delta - \frac{1+\delta}{2} \right) U_{\text{pp}} T = \frac{\delta-1}{2} U_{\text{pp}} T \end{aligned}$$

czyli

$$\int_0^T u_r(t) dt = -\frac{\delta T}{2} U_{\text{pp}} + \frac{\delta-1}{2} U_{\text{pp}} T = -\frac{1}{2} U_{\text{pp}} T$$

i

$$U_{\text{avg}} = U + \frac{1}{T} \left( \frac{1}{2} U_{\text{pp}} T \right) = U - \frac{U_{\text{pp}}}{2}$$

co było do udowodnienia.

Do obliczenia wartości skutecznej tętnień według wzoru

$$U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_r^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\delta T} u_1^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\delta T}^T u_2^2(t) dt}$$

potrzebne są kwadraty napięć:

$$u_1^2(t) = \frac{U_{pp}^2}{\delta^2 T^2} t^2 - 2 \frac{U_{pp}^2}{\delta T} t + U_{pp}^2$$

i

$$u_2^2(t) = \frac{U_{pp}^2}{(1-\delta)^2 T^2} t^2 - 2 \frac{\delta U_{pp}^2}{(1-\delta)^2 T} t + \frac{\delta^2 U_{pp}^2}{(1-\delta)^2}$$

oraz ich całki:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta T} u_1^2(t) dt &= \left[ \frac{U_{pp}^2}{3\delta^2 T^2} t^3 - \frac{U_{pp}^2}{\delta T} t^2 + U_{pp}^2 t \right]_0^{\delta T} \\ &= \frac{1}{3} U_{pp}^2 \delta T - U_{pp}^2 \delta T + U_{pp}^2 \delta T = \frac{1}{3} U_{pp}^2 \delta T \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_{\delta T}^T u_2^2(t) dt &= \left[ \frac{U_{pp}^2}{3(1-\delta)^2 T^2} t^3 - \frac{\delta U_{pp}^2}{(1-\delta)^2 T} t^2 + \frac{\delta^2 U_{pp}^2}{(1-\delta)^2} t \right]_{\delta T}^T \\ &= \frac{U_{pp}^2 T}{3(1-\delta)^2} - \frac{\delta U_{pp}^2 T}{(1-\delta)^2} + \frac{\delta^2 U_{pp}^2 T}{(1-\delta)^2} - \frac{U_{pp}^2}{3(1-\delta)^2} \delta^3 T + \frac{\delta^3 U_{pp}^2 T}{(1-\delta)^2} - \frac{\delta^3 U_{pp}^2 T}{(1-\delta)^2} \\ &= \frac{U_{pp}^2 T}{3(1-\delta)^2} (1-\delta^3) - \frac{(1-\delta) \delta U_{pp}^2 T}{(1-\delta)^2} \\ &= \frac{U_{pp}^2 T}{3(1-\delta)^2} (1-\delta)(1+\delta+\delta^2) - \frac{\delta U_{pp}^2 T}{1-\delta} \\ &= \frac{U_{pp}^2 T}{3(1-\delta)} (1+\delta+\delta^2) - \frac{\delta U_{pp}^2 T}{1-\delta} \\ &= \frac{1+\delta+\delta^2-3\delta}{3(1-\delta)} U_{pp}^2 T = \frac{(1-\delta)^2}{3(1-\delta)} U_{pp}^2 T = \frac{1}{3} (1-\delta) U_{pp}^2 T \end{aligned}$$

Na podstawie tych wyników uzyskujemy

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_t^2(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{3} U_{pp}^2 \delta T + \frac{1}{T} \frac{1}{3} (1-\delta) U_{pp}^2 T = \frac{1}{3} U_{pp}^2$$

i

$$U_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{3} U_{pp}^2} = \frac{U_{pp}}{\sqrt{3}}$$


---

**Problem P11.9**

Czy wyniki zadania P11.8 można wykorzystać do opisanie przebiegu na wyjściu prostownika pełnookresowego z filtrem indukcyjnym? Jeżeli nie, to należy wyprowadzić odpowiednie wzory.

---

**Problem P11.10**

Udowodnić, że wzór

$$U_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{DC}}}{4\sqrt{3}fC} \cdot \frac{U_{\text{DC}}}{U_{\text{m}}}$$

opisuje wartość skuteczną napięcia na wyjściu prostownika pełnookresowego.

---

**Problem P11.11**

Wyprowadzić uproszczony wzór

$$U_{\text{rms}} = \frac{6I_{\text{DC}}}{C}$$

na wartość skuteczną napięcia wyjściowego w prostowniku półokresowym. Należy przyjąć, że jednostką  $I_{\text{DC}}$  jest mA, a jednostką  $C$  —  $\mu\text{F}$ .

---

**Problem P11.12**

Załóżmy, że dostępne są dwa identyczne zasilacze stabilizowane, z których każdy dostarcza napięcie 1,5V i prąd o maksymalnym natężeniu 1A. Czy takie zasilacze można wykorzystać do zasilania urządzenia, które (i) potrzebuje napięcia 3V przy prądzie 0,3A albo (ii) napięcia 1,5V przy prądzie 1,5A?

**Odpowiedź**

W celu powiększenia napięcia zasilacze łączymy szeregowo, a w celu zwiększenia obciążalności prądowej — równolegle. Szeregowo można łączyć zasilacze, które dostarczają różne napięcia. Zasilacze łączone równolegle powinny dostarczać jednakowe, lub przynajmniej zbliżone, napięcia, bo inaczej tylko jeden z połączonych zasilaczy będzie dostarczał moc do obciążenia.

---



# Bibliografia

- [1] Aronhime, P. *The circuits and filters handbook*. W W.K. Chen, redaktor. CRC Press, Boca Raton, 2003. Rozdział Frequency Domain Methods.
- [2] Blum, J.J. *Introduction to Analog Computation*. Harcourt, Brace i World, New York, 1969.
- [3] Bolkowski, S. *Teoria obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa, 2001.
- [4] Ferenczi, O. *Zasilanie układów elektronicznych: zasilacze ze stabilizatorami o pracy ciągłej, przetwornice DC-DC*. WNT, Warszawa, 1988.
- [5] Gajewski, P. i Turczyński, J. *Cyfrowe układy scalone CMOS*. WKiŁ, Warszawa, 1990.
- [6] Kailath, T. *Linear systems*. Prentice-Hall, NJ, 1980.
- [7] Kalisz, J. *Podstawy elektroniki cyfrowej*. WKiŁ, Warszawa, 1993.
- [8] Karwowski, D. *Zrozumieć kompresję obrazu (Wersja 1.2)*. Poznań, 2019. URL: <https://www.zrozumieckompresje.pl>.
- [9] Łakomy, M. i Zabrodzki, J. *Scalone przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe*. PWN, Warszawa, 1992.
- [10] Nadachowski, M. i Kulka, Z. *Analogowe układy scalone*. WKiŁ, Warszawa, 1983.
- [11] Oppenheim, A.V. i Schafer, R.W. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. WKiŁ, Warszawa, 1979.
- [12] Osiowski, J. *Zarys rachunku operatorowego*. WNT, Warszawa, 1981.
- [13] Rusek, M. i Pasierbiński, J. *Elementy i układy elektroniczne w pytaniach i odpowiedziach*. WNT, Warszawa, 1991.
- [14] Saeed, K. *Calculus*. Telecotron International, Warszawa, 2000.
- [15] Saeed, K. *Lectures in Mathematics*. Al-Wudhooh Press, Bagdad, 1976.
- [16] Santo, B.R. 25 microchips that shook the world. *IEEE Spectrum*, (5), 2009.
- [17] Sasal, W. *Układy scalone serii UCA64/UCY74: parametry i zastosowania*. WKiŁ, Warszawa, 1990.



- [18] Świetlicka, A., Rybarczyk, A. i Jurkowlaniec, A. *Rachunek operatorowy. Metody rozwiązywania zadań*. PWN, Warszawa, 2012.
- [19] Van de Plassche, R. *Scalone przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe*. WKiŁ, Warszawa, 1997.
- [20] Zieliński, T.P. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*. WKiŁ, Warszawa, 2005.

# Bibliografia uzupełniająca

- Baitch T. *Electrical Technology*. Wiley, New York, 1971.
- Benningfield L.M. *Circuit and System Theory*. Wiley, New York, 1979.
- Bobrow L. *Elementary Linear Circuit Analysis*. Holt-Saunders International, Tokyo, 1980.
- Bolkowski S. i inni. *Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej*. WNT, Warszawa, 1985.
- Bolkowski S. *Elektrotechnika teoretyczna — teoria obwodów elektrycznych, t. I*. WNT, Warszawa, 1982.
- Bolkowski S. i Matusia R. *Podstawy elektrotechniki, t. I*. wyd. IV, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1972.
- Bolkowski S. i Matusia R. *Podstawy elektrotechniki, t. II*. wyd. III, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1968.
- Bolkowski S. i Matusia R. *Podstawy elektrotechniki, t. III*. wyd. IV, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1973.
- Bolkowski S. *Teoria obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa, 1995.
- Boylestad R. *Introductory Circuit Analysis*. Charles Merrill, Ohio, 1977.
- Bueche F. *Principles of Physics*. 4th ed., McGraw-Hill, Singapore, 1984.
- Carlson A.B. i Gisser D.G. *Electrical Engineering Concepts and Applications*. Addison-Wesley, New York, 1981.
- Cichowska Z. i Pasko M. *Zadania z elektrotechniki teoretycznej*. PWN, Warszawa, 1985.
- Cooper W.D. *Electronic Instrumentation and Measurement Techniques*. Prentice-Hall, New Jersey, 1978.

- Czoch R. i Suski M. *Zbiór zadań z obwodów elektrycznych z rozwiązaniami*. WPW, Wrocław, 1974.
- Desoer C. i Kuh E. *Basis Circuit Theory*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- Director S.W. i Rohrer R.A. *Introduction to System Theory*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- Edminister J. i Nahvi M. *Electric Circuits, Schaum's Outline Series*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- Halliday D. i Resnick R. *Physics, Parts 1 and 2*. 3d ed., John Wiley and Sons, New York, 1978.
- Hayt W., Kemmerly Jr. *Engineering Circuit Analysis*. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1978.
- Hilderbrandt A., Sołtysik W. i Zieliński A. *Teoria obwodów w zadaniach*. Wyd. II, WNT, Warszawa, 1977.
- Kailath T. *Linear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1980.
- Kasatkin K. i Perekalin M. *Basic Electrical Engineering*. Mir, Moscow, 1970.
- Kerchner R. i Corcoran G. *Alternating Current Circuits*. John Wiley and Sons, New York, 1960.
- Klonowicz Z. i Zurzycki Z. *Teoria obwodów, t. II*. PWN, Warszawa, 1983.
- Krakowski M. *Elektrotechnika teoretyczna, t. I*. PWN, Warszawa, 1980.
- Krakowski M. *Elektrotechnika teoretyczna: pole elektromagnetyczne, t. II*. PWN, Warszawa, 1980.
- Kurzawa S. *Liniowe obwody elektryczne*. PWN, Warszawa, 1971.
- Leach D. *Basic Electric Circuits*. Wiley, New York, 1976.
- Levinson N. i Redheffer R. *Complex Variables*. Holden-Day, San Francisco, 1970.
- Majerowska Z. *Elektrotechnika ogólna w zadaniach*. PWN, Warszawa, 1979.
- Markiewicz A. *Zbiór zadań z podstaw elektrotechniki*. WSiP, Warszawa, 1986.
- Mikołajuk K. i Trzaska Z. *Elektrotechnika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 1984.
- Morley A. i Hughes E. *Principles of Electricity In MKS Units*. Longman, 1961.

- O'Malley J.R. *Circuit Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1980.
- Osowski J. i Szabatin J. *Podstawy teorii obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa, 1998.
- Osowski J. i Szabatin J. *Podstawy teorii obwodów, t. II*. WNT, Warszawa, 1998.
- Osowski J. *Teoria obwodów, t. II*. WNT, Warszawa 1971.
- Papoulis A. *Circuits and Systems: A Modern Approach*. Holt-Saunders, Tokyo, 1980.
- Przedziecki F. *Elektrotechnika i elektronika*. PWN, Warszawa, 1986.
- Rajski Cz. *Teoria obwodów, t. I*. WNT, Warszawa, 1971.
- Saeed K. *Calculus: Analiza matematyczna z algebrą*. Telecotron International, Warszawa, 2000.
- Saeed K. *Lectures in Mathematics*. Al-Wudhouh, Baghdad, 1976.
- Skilling H.H. *Electrical Engineering Circuits*. 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 1965.
- Smith R. *Circuits, Derives and Systems*. 3rd ed., John Wiley and Sons, New York, 1976.
- Strang G. *Linear Algebra and Its Applications*. 2nd ed., Academic Press, New York, 1980.
- Suski M. *Teoria obwodów elektrycznych*. WPW, Wrocław, 1969.
- Temes G.C. i LaPatra J.W. *Introduction to Circuit Synthesis and Design*, McGraw-Hill, New Jersey, 1977.
- Theraja B.L. *A Text-Book of Electrical Technology*. S. Chand, New Delhi, 1972.
- Uruski M. i Wolski W. *Teoria obwodów, t. I i II*. WPW, Wrocław, 1976.
- Uruski M. i Wolski W. *Wybrane zagadnienia z teorii obwodów, t. I i II*. WPW, Wrocław, 1976.

