RACHUNEK MACIERZOWY

Podręcznik dla studentów studiów licencjackich i inżynierskich

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik} \quad \left(\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj} \right).$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot D_{11} + 1 \cdot D_{21} + 0 \cdot D_{31} + 3 \cdot D_{41}.$$

Marta Jarocka
Justyna Kozłowska
Beata Madras-Kobus
Anna Olszewska

Politechnika Białostocka
Białystok 2020

RACHUNEK MACIERZOWY

Podręcznik dla studentów
studiów licencjackich i inżynierskich

Marta Jarocka
Justyna Kozłowska
Beata Madras-Kobus
Anna Olszewska

Politechnika Białostocka

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2020

Recenzenci:
dr hab. Jarosław Morchało, prof. PP
dr hab. Ewa Schmeidel, prof. UwB

Redaktor naukowy dyscypliny nauki o zarządzaniu i jakości:
prof. dr hab. inż. Joanicjusz Nazarko

Redaktor wydawnictwa:
Katarzyna Duniewska

Redakcja techniczna, skład, grafika i okładka:
Marcin Dominów

ISBN 978-83-66391-55-0 (eBook)
DOI: 10.24427/978-83-66391-55-0

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
tel.: 85 746 91 37
www.pb.edu.pl

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Niniejszy podręcznik powstał z myślą o studentach Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej kształcących się na kierunkach: logistyka, zarządzanie, zarządzanie i inżynieria produkcji, zarządzanie i inżynieria usług oraz inżynieria meblarstwa. Może on również służyć innym młodym adeptom matematyki – studentom studiów licencjackich i inżynierskich, którzy poznają tajniki rachunku macierzowego. Książka zawiera bowiem podstawowe treści, które są zgodne z obowiązującym programem przedmiotu matematyka na wielu kierunkach studiów.

Podręcznik składa się z siedmiu rozdziałów. W pierwszym przedstawiono definicję macierzy oraz jej rodzaje. W kolejnym rozdziale omówiono działania oraz operacje elementarne, które mogą być wykonywane na macierzach. Rozdział trzeci został poświęcony wyznacznikom macierzy oraz metodom ich wyznaczania. W rozdziale czwartym zaprezentowano zagadnienia związane z macierzą odwrotną. Rozdział piąty dotyczy układów równań liniowych, z naciskiem na zastosowanie rachunku macierzowego przy poszukiwaniu ich rozwiązań. Dwa ostatnie rozdziały zawierają materiał powtórzeniowy przed egzaminem w formie testu jednokrotnego wyboru oraz zadań do samodzielnego rozwiązania. Każdy z rozdziałów podręcznika (oprócz pierwszego, zawierającego głównie definicje, i dwóch ostatnich – powtórzeniowych) zawiera wiele przykładów ze szczegółowym opisem ich rozwiązania oraz zadania do samodzielnej pracy wraz z odpowiedziami.

Podręcznik został napisany przez nauczycieli akademickich, którzy od wielu lat kształcą studentów podlaskich wyższych uczelni, w tym Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej, w zakresie matematyki i jej zastosowań w naukach ekonomicznych i technicznych. Podręcznik ten jest częścią zaplanowanej serii obejmującej swym zakresem całość materiału z matematyki wykładanego na pierwszym roku wielu studiów technicznych i ekonomicznych.

Życzymy miłej pracy z podręcznikiem.

Autorki

1. DEFINICJA I RODZAJE MACIERZY

1.1. Definicja macierzy

Definicja

Macierzą rzeczywistą[1] **wymiaru $\boldsymbol{m \times n}$** nazywamy prostokątną tablicę, której elementami są liczby rzeczywiste, ustawione w m wierszach i n kolumnach[2].

Macierz zapisujemy w nawiasach kwadratowych[3]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array}$$

j-ta kolumna

Element macierzy **A** znajdujący się na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny oznaczamy a_{ij}.

Macierze oznaczamy dużymi, pogrubionymi literami, np. **A**, **B**, **X**. Przy zapisie ich nazw możemy także podać wymiar macierzy (np.: $\mathbf{A}_{\boldsymbol{m\times n}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{2\times 3}}$, $\mathbf{X}_{\mathbf{10\times 5}}$).

Definicja

Wymiar macierzy jest definiowany liczbą wierszy i kolumn. Macierz **A**, która posiada m wierszy i n kolumn, zapisujemy $\mathbf{A}_{\boldsymbol{m\times n}}$ lub $\mathbf{A} = [a_{\mathrm{ij}}]_{m\times n}$ i czytamy, że macierz **A** jest wymiaru m na n.

Określając wymiar macierzy, na pierwszym miejscu podajemy liczbę wierszy, a na drugim – liczbę kolumn:

[1] Istnieją również macierze zespolone, które w tym podręczniku nie będą rozważane.

[2] Przytoczona definicja liczbowa macierzy nie jest jedyną w matematyce. Istnieją też inne, jak chociażby definicja funkcyjna macierzy (patrz: Mierzyńska, Perło, Roszkowska 2003).

[3] Macierze można także zapisywać w nawiasach okrągłych, jednak na potrzeby niniejszego opracowania przyjęta została forma nawiasu kwadratowego.

wymiar macierzy $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ (czytamy m na n)

liczba wierszy liczba kolumn

Na przykład: macierz wymiaru 3×4 posiada trzy wiersze i cztery kolumny.

W takim sam sposób określamy położenie elementu a_{ij} w macierzy:

element macierzy $\boldsymbol{a_{ij}}$

numer wiersza numer kolumny

Na przykład: element a_{23} znajduje się w drugim wierszu i trzeciej kolumnie macierzy.

Przykład 1.1

Określ wymiary podanych poniżej macierzy:

a) $\mathbf{A} = [2]$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Macierz $\mathbf{A}$ składa się z jednego elementu, więc posiada tylko jedną kolumnę i jeden wiersz, zatem jej wymiar to 1×1,

b) Macierz $\mathbf{B}$ posiada trzy wiersze i dwie kolumny, więc jej wymiar zapiszemy jako 3×2,

c) Macierz $\mathbf{C}$ tworzą trzy wiersze i trzy kolumny, więc jej wymiar to 3×3.

☺

1.2. Rodzaje macierzy

Definicja

Macierzą zerową wymiaru $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ nazywamy macierz o wymiarach $m \times n$, której wszystkie elementy wynoszą 0, czyli:

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,m\}\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}}} a_{ij} = 0.$$

Macierze zerowe oznaczamy $\mathbf{0}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ lub $\mathbf{0}$.

Przykładami macierzy zerowych są następujące macierze:

$$\mathbf{0}_{1\times1} = [0], \qquad \mathbf{0}_{2\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą kwadratową stopnia $\boldsymbol{n}$ nazywamy macierz, której liczba wierszy równa jest liczbie kolumn, czyli gdy $m = n$.

W macierzy kwadratowej liczba n definiuje **stopień** (wymiar) tej macierzy, gdyż jest jednocześnie liczbą wierszy i kolumn.

Jeżeli macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest wymiaru 3×3, to powiemy, że jest ona macierzą stopnia trzeciego i oznaczymy jako $\mathbf{A}_3$. Przykładami macierzy kwadratowych, odpowiednio stopnia pierwszego, drugiego i czwartego, są następujące macierze:

$$\mathbf{A}_1 = [-2], \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 0{,}5 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicja

W macierzy kwadratowej elementy a_{ii}, gdzie $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, czyli elementy które mają ten sam numer wiersza i kolumny, tworzą **główną przekątną macierzy**.

Przykład macierzy z zaznaczoną główną przekątną został przedstawiony poniżej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 0{,}5 \\ 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

główna
przekątna macierzy

Definicja

Macierzą trójkątną dolną stopnia $n \geq 2$ nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy znajdujące się nad główną przekątną są równe 0.

Poniżej podane zostały przykłady macierzy trójkątnych dolnych:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą trójkątną górną stopnia $n \geq 2$ nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy znajdujące się pod główną przekątną są równe 0.

Poniżej podane zostały przykłady macierzy trójkątnych górnych:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 10 & 11 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą diagonalną stopnia n nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy nieznajdujące się na głównej przekątnej są równe 0, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Poniżej podane zostały przykłady macierzy diagonalnych:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą jednostkową stopnia $\boldsymbol{n}$ nazywamy macierz kwadratową, której elementy na głównej przekątnej są równe 1, czyli $a_{ii} = 1$, zaś pozostałe są równe 0, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$.

Macierze jednostkowe stopnia n oznaczamy $\mathbf{I}_n$ lub $\mathbf{I}$.

Poniżej podane zostały przykłady macierzy jednostkowych:

$$\mathbf{I}_1 = [1], \qquad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą symetryczną $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ nazywamy macierz kwadratową, której elementy spełniają warunek: $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$.

Poniżej podane zostały przykłady macierzy symetrycznych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -2 \\ 0 & -2 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierzą transponowaną do macierzy $\mathbf{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ wymiaru $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ nazywamy macierz $\mathbf{B} = [\boldsymbol{b_{ji}}]$ wymiaru $n \times m$, która powstaje przez zamianę jej wierszy na kolumny (kolumn na wiersze), czyli:

$$\bigwedge_{\substack{j \in \{1,2,\dots,n\} \\ i \in \{1,2,\dots,m\}}} b_{ji} = a_{ij}.$$

Transponowanie macierzy $\mathbf{A}$ polega zatem na zamianie jej wierszy na kolumny (i odwrotnie – kolumn na wiersze). Liczba kolumn (wierszy) macierzy transponowanej $\mathbf{B}$ jest równa liczbie wierszy (kolumn) macierzy $\mathbf{A}$.

Macierz transponowaną do macierzy $\mathbf{A}$ oznaczamy $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$.

Przykład 1.2

Dokonaj transpozycji poniższych macierzy:

a) $\mathbf{A} = [-5]$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}3 & 3 \\ \sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2\sqrt{7} \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) $\mathbf{A} = [-5]$, $\mathbf{A}^T = [-5]$,

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0{,}3 & 3 \\ \sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}3 & \sqrt{2} \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2\sqrt{7} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}^T = [\,1 \quad 3 \quad -1 \quad 2\sqrt{7}\,]$.

☺

2. DZIAŁANIA I OPERACJE ELEMENTARNE NA MACIERZACH

2.1. Równość, dodawanie i odejmowanie macierzy

Definicja

Niech dane będą dwie macierze: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ oraz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, gdzie $i \in \{1,2,\dots,m\}$ i $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Macierz A jest równa macierzy B wtedy i tylko wtedy, gdy obie macierze są tego samego wymiaru oraz elementy tych macierzy znajdujące się na odpowiadających sobie miejscach są sobie równe, czyli:

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{1,2,\dots,m\}\\ j\in\{1,2,\dots,n\}}} a_{ij} = b_{ij}.$$

Przykładem równych macierzy mogą być podane poniżej macierze **A** i **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Macierze te są takiego samego wymiaru (2×2), a odpowiadające sobie elementy tych macierzy są równe. Zatem macierz **A** jest równa macierzy **B**.

Przykładem różnych macierzy mogą być podane poniżej macierze **C** i **D**:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obie macierze mają takie same wymiary, ale ich elementy znajdujące się w trzecim wierszu i drugiej kolumnie są różne. Zatem macierze **C** i **D** nie są macierzami równymi.

Definicja

Niech dane będą dwie macierze, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, gdzie $i \in \{1,2,\dots,m\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, o takim samym wymiarze $(m \times n)$.

Sumą macierzy A i B (piszemy $\mathbf{A} + \mathbf{B}$) nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ o wymiarze $m \times n$, taką, że:

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{1,2,\dots,m\}\\ j\in\{1,2,\dots,n\}}} c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Sumę macierzy **A i B** tworzymy w następujący sposób:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

Uwaga: dodawać można wyłącznie macierze, które mają takie same wymiary.

Przykład 2.1

Wyznacz sumę $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ dla podanych poniżej macierzy:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+4 & 0+1\\ 1+(-1) & 5+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 7\end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 8\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-1)\\ 3+3\\ -1+8\\ 2+(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 6\\ 7\\ -1\end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 5 & 0\\ 1 & 6 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2 & 0\\ 5 & 4 & 8 & 0\\ 2 & 9 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 8\end{bmatrix}$.

☺

Definicja

Niech dane będą dwie macierze, $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ i $\mathbf{B}=[b_{ij}]$, gdzie $i\in\{1,2,\dots,m\}$, $j\in\{1,2,\dots,n\}$, o takim samym wymiarze $(m\times n)$.

Różnicą macierzy A i B (piszemy $\mathbf{A}-\mathbf{B}$) nazywamy macierz $\mathbf{C}=[c_{ij}]$ o wymiarze $m\times n$, taką, że:

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{1,2,\dots,m\}\\ j\in\{1,2,\dots,n\}}} c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

Różnicę macierzy **A i B** tworzymy w następujący sposób:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn}\end{bmatrix}=$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Uwaga: odejmować można wyłącznie macierze, które mają takie same wymiary.

Przykład 2.2

Wyznacz różnicę $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ dla podanych poniżej macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = [-1 \quad 0 \quad 1]$, $\mathbf{B} = [2 \quad 2 \quad -1]$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-4 & 0-1 \\ 1-(-1) & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = [-1 \quad 0 \quad 1] - [2 \quad 2 \quad -1] = [-1-2 \quad 0-2 \quad 1-(-1)] =$
$= [-3 \quad -2 \quad 2]$,

c) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -2 \\ 0 & 6 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$.

☺

2.2. Mnożenie macierzy

Definicja

Niech dana będzie macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ oraz dowolna liczba rzeczywista k. **Iloczynem macierzy A i liczby *k* (skalar)** nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ o wymiarze $m \times n$, taką, że:

$$\bigwedge_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,m\}\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}}} c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Iloczyn macierzy **A** i liczby rzeczywistej k tworzymy w następujący sposób:

$$k \cdot \mathbf{A} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \ldots & k \cdot a_{1j} & \ldots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \ldots & k \cdot a_{2j} & \ldots & k \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \ldots & k \cdot a_{ij} & \ldots & k \cdot a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \ldots & k \cdot a_{mj} & \ldots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2j} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ij} & \ldots & c_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mj} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Uwaga: mnożąc macierz przez liczbę, mnożymy każdy element macierzy przez tę liczbę.

Przykład 2.3

Wyznacz iloczyn podanych poniżej macierzy przez liczbę k:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\quad k = 3$,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad k = -2$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad k = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie:

a) $k \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 0 & -15 \end{bmatrix}$,

b) $k \cdot \mathbf{A} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 3 \\ -2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$,

c) $k \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

☺

Definicja

Niech dane będą dwie macierze: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ wymiaru $m \times n$ oraz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times k$. Iloczynem macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy wyznaczone są następującym wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

dla $i \in \{1,2, \dots, m\}, j \in \{1,2, \dots, n\}$, co zapisujemy: $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ lub $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

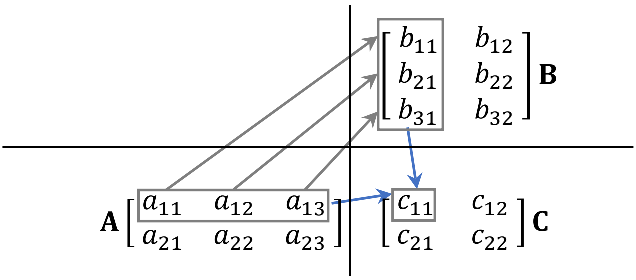
Element c_{ij} macierzy $\mathbf{C}$ obliczamy, sumując odpowiednie iloczyny elementów i-tego wiersza macierzy $\mathbf{A}$ oraz j-tej kolumny macierzy $\mathbf{B}$. Poniżej przedstawiono przykład wyznaczania iloczynu dwóch macierzy:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+a_{13}\cdot b_{32}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

Iloczyn macierzy **A** i **B** można również wyznaczać, korzystając z poniższego schematu zapisu macierzy:



Pierwszą macierz **A** umieszczamy w lewym dolnym rogu pomocniczego układu, zaś macierz drugą **B** – w prawym górnym rogu. Wynik iloczynu **A · B**, czyli macierz **C**, uzyskamy w prawym dolnym rogu układu. Element c_{11} znajduje się na przecięciu pierwszego wiersza macierzy **A** oraz pierwszej kolumny macierzy **B**, będzie zatem sumą iloczynów elementów pierwszego wiersza macierzy **A** oraz pierwszej kolumny macierzy **B**. Analogicznie postępujemy w odniesieniu do kolejnych elementów macierzy **C**, czyli element c_{12}, który znajduje się na przecięciu pierwszego wiersza macierzy **A** oraz drugiej kolumny macierzy **B**, wyznaczamy jako sumę iloczynów elementów pierwszego wiersza macierzy **A** oraz drugiej kolumny macierzy B. W ten sam sposób wyznaczamy pozostałe elementy macierzy **C**.

Uwaga: mnożenie macierzy **A · B** jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn pierwszej macierzy jest równa liczbie wierszy drugiej macierzy (czyli drugi wymiar macierzy **A** jest taki sam jak pierwszy wymiar macierzy **B**). Kiedy zapisujemy obok siebie wymiary macierzy **A** i **B**, ich wewnętrzne wymiary w tym zapisie muszą być takie same. Ponadto macierz **C** będzie miała tyle wierszy co pierwsza macierz (**A**) **i** kolumn tyle co druga macierz (**B**), czyli wymiar macierzy **C** tworzy zewnętrzne wymiary zapisanych obok siebie wymiarów macierzy **A** i **B**, co przedstawiono poniżej:

wewnętrzne wymiary muszą być równe

$$\underset{\mathbf{A}}{m \times n} \qquad \underset{\mathbf{B}}{n \times k}$$

$$\underset{\mathbf{C}}{m \times k}$$

Przykład 2.4

Sprawdź, czy można wyznaczyć iloczyn macierzy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Jeśli tak, wykonaj mnożenie macierzy.

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Macierz **A** jest wymiaru 2×2, a macierz **B** wymiaru 2×2. Macierz **A** ma zatem tyle samo kolumn co **B** wierszy (wewnętrzne wymiary są sobie równe), zatem można wyznaczyć iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Wynikiem iloczynu będzie macierz wymiaru 2×2:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ można również wyznaczyć, korzystając z pomocniczego układu:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 4 & & & 1 \\ -1 & & & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Macierz **A** ma wymiar 4×2, zaś macierz **B** wymiar 4×2. Macierz **A** ma zatem 2 kolumny, zaś **B** 4 wiersze. Wymiary (wewnętrzne) nie są sobie równe, zatem nie można wyznaczyć iloczynu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

c) Macierz **A** jest wymiaru 1×4, zaś macierz **B** wymiaru 4×2. Macierz **A** ma zatem tyle samo kolumn co macierz **B** wierszy (wewnętrzne wymiary są sobie równe), zatem można wyznaczyć iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Wynikiem iloczynu będzie macierz wymiaru 1×2.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 5 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 12 & -17 \end{bmatrix}.$$

☺

Definicja

Niech dana będzie macierz kwadratowa $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ stopnia n.

***k*-tą potęgą macierzy A** ($k \in \boldsymbol{N}$) nazywamy macierz $\mathbf{A}^k$, która jest iloczynem k macierzy **A**, czyli:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ razy}} \text{ oraz } \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}.$$

Uwaga: potęgować można tylko macierze kwadratowe.

Przykład 2.5

Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Oblicz $\mathbf{A}^3$.

Rozwiązanie:

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na początku wymnażamy dwie pierwsze macierze, a następnie wynik iloczynu przemnażamy przez macierz trzecią. Zatem:

$$\mathbf{A}^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

☺

2.3. Własności działań na macierzach

Własności dodawania macierzy

Niech będą dane dwie macierze **A** i **B** takiego samego wymiaru oraz dwie liczby rzeczywiste k i s. Wówczas:

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (przemienność dodawania),
2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ (łączność dodawania),
3) $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$,
4) $\mathbf{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$,
5) $k\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\cdot\mathbf{A}+k\cdot\mathbf{B}$,
6) $(k+s)\cdot\mathbf{A}=k\cdot\mathbf{A}+s\cdot\mathbf{A}$,
7) $(k\cdot s)\cdot\mathbf{A}=k\cdot(s\cdot\mathbf{A})$.

Przykład 2.6

Dane są dwie macierze, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, oraz liczba $k=-3$. Sprawdź, czy zachodzi równość: $k\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\cdot\mathbf{A}+k\cdot\mathbf{B}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy lewą stronę równania:

$$L=k\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=-3\cdot\left(\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=-3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -3 & -3\end{bmatrix}.$$

Obliczamy prawą stronę równania:

$$P=k\cdot\mathbf{A}+k\cdot\mathbf{B}=-3\cdot\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{bmatrix}+(-3)\cdot\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & 12\\ -6 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -12\\ 3 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -3 & -3\end{bmatrix}.$$

Ponieważ $L=P$, równanie jest prawdziwe.

☺

Własności mnożenia macierzy

Niech dane będą trzy macierze, **A**, **B** i **C**, oraz liczba rzeczywista k. Wówczas (o ile działania są wykonalne):

1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ (rozdzielność dodawania względem mnożenia),

2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ (rozdzielność dodawania względem mnożenia),

3) $\mathbf{A}\cdot(k\cdot\mathbf{B})=(k\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}=k\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$,

4) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ (łączność mnożenia),

5) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}=\mathbf{I}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Uwaga: mnożenie macierzy nie jest przemienne, czyli $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. Aby to sprawdzić, przeanalizujmy poniższy przykład.

Przykład 2.7

Dane są dwie macierze: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$. Wyznacz iloczyny $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

Rozwiązanie:

Wynikiem iloczynu $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ będzie macierz wymiaru 1×1:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=[7],$$

zaś wynikiem iloczynu $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ będzie macierz wymiaru 3×3:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}.$$

A zatem $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

☺

Własności operacji transponowania

Niech będą dane dwie macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ oraz liczba rzeczywista k. Wówczas (o ile działania są wykonalne):

1) $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{T}=\mathbf{A}$,

2) $(k\cdot\mathbf{A})^{T}=k\cdot\mathbf{A}^{T}$,

3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{T}=\mathbf{A}^{T}+\mathbf{B}^{T}$,

4) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{T}=\mathbf{B}^{T}\cdot\mathbf{A}^{T}$.

Przykład 2.8

Dane są dwie macierze: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sprawdź, czy zachodzi równość:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

Rozwiązanie:

Obliczamy lewą stronę równania:

$$L = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy prawą stronę równania:

$$P = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $L = P$, równanie jest prawdziwe.

☺

2.4. Operacje elementarne na macierzach

Definicja

Operacjami elementarnymi na wierszach (kolumnach) macierzy nazywamy następujące operacje:

1) pomnożenie wszystkich elementów danego wiersza (kolumny) macierzy przez liczbę rzeczywistą różną od zera,
2) przestawienie dwóch wierszy (kolumn) macierzy,
3) dodanie do wszystkich elementów wiersza (kolumny) odpowiednich elementów innego wiersza (kolumny) pomnożonych przez liczbę rzeczywistą różną od zera.

Macierze otrzymane z danej macierzy w wyniku operacji elementarnych nazywamy **macierzami równoważnymi** (i oznaczamy symbolem $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ lub $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$).

Wykonywanie operacji elementarnych na wierszach (kolumnach) macierzy warto zapisywać, aby można było łatwo prześledzić proces przekształcania macierzy. Przykładowo, pomnożenie całego wiersza pierwszego macierzy przez $\frac{1}{2}$ zapiszemy jako $\frac{1}{2} \cdot w_1$, lub po prostu $\frac{w_1}{2}$. Taką operację elementarną na macierzy oraz jej wynik zapisujemy następująco:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix} \overset{\frac{w_1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Natomiast odjęcie elementów wiersza pierwszego pomnożonego przez $\frac{1}{2}$ od elementów wiersza drugiego zapiszemy następująco:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix} w_2 - \frac{1}{2} w_1 \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - \frac{a_{11}}{2} & a_{22} - \frac{a_{12}}{2} & a_{23} - \frac{a_{13}}{2} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Operacje elementarne są najczęściej wykorzystywane do obliczania wyznaczników macierzy (rozdział 3.2.2), wyznaczania macierzy odwrotnej (rozdział 4.2.3) oraz rozwiązywania układów równań (rozdział 5.3.3).

Przykład 2.9

Wykonaj następujące operacje elementarne na macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$:

a) przestaw wiersz pierwszy z trzecim,

b) pomnóż wiersz czwarty przez liczbę -4,

c) do drugiego wiersza dodaj wiersz trzeci,

d) od wiersza pierwszego odejmij wiersz drugi pomnożony przez 2,

e) do drugiej kolumny dodaj kolumnę pierwszą pomnożoną przez (-3).

Rozwiązanie:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ \updownarrow \\ w_3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ w_1 \cdot (-4) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 \cdot (-4) & 4 \cdot (-4) & 2 \cdot (-4) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -16 & -8 \end{bmatrix},$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ w_2 + w_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 + (-1) & 0 + (-2) & 2 + 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

d) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 - 2w_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot (-4) & 2 - 2 \cdot 0 & -3 - 2 \cdot 2 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 9 & 2 & -7 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

e) $$\underset{k_2 + (-3)k_1}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 + (-3) \cdot 1 & -3 \\ -4 & 0 + (-3) \cdot (-4) & 2 \\ -1 & -2 + (-3) \cdot (-1) & 2 \\ 0 & 4 + (-3) \cdot 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

☺

2.5. Zadania

1) Dane są macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$. Wyznacz $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^T+\mathbf{A}^T$:

   a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -5\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,

   b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 5 & -2\\ -1 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$,

   c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -4 & 0\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0{,}5 & -0{,}3 & 2{,}6 & 4\end{bmatrix}$.

2) Oblicz iloczyny $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ poniższych par macierzy (o ile jest to możliwe):

   a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -5 & 2\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$,

   b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 0 & 4\\ 7 & 6 & 5\end{bmatrix}$,

   c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\\ 1 & 3\\ -3 & -1\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

3) Dane są macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$:

   $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Sprawdź, czy prawdziwe są poniższe działania:

   a) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$, $\quad$ b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$,

   c) $\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}$, $\quad$ d) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T=\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{B}^T$.

4) Dane są macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ oraz liczba $k=2$:

   $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$.

Wykonaj poniższe działania:

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-k\cdot\mathbf{B}^{T}+\mathbf{A}^{T}$, b) $k\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{T}-\mathbf{A}^{T}\cdot\mathbf{B}$.

5) Dane są macierze **A**, **B**, **C i** macierz jednostkowa stopnia drugiego $\mathbf{I_2}$ oraz liczba $k=-2$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Wykonaj poniższe działania:

a) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}-k\cdot\mathbf{A}^{T}$, b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{C}^{T}+k\cdot\mathbf{I}$.

6) Znajdź rozwiązania podanych układów macierzowych:

a) $\mathbf{X}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}=5\cdot\mathbf{I}_3$, b) $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

Wskazówka: na początku ustal wymiar macierzy **X**.

7) Oblicz $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A^3}$, $\mathbf{A}^4$ oraz $\mathbf{A}^5$:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

8) Oblicz:

a) $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}^3$, b) $\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}^2$.

9) Korzystając z definicji równości macierzy, rozwiąż poniższe równanie (znajdź x i y):

$$\begin{bmatrix}x & -2 & y\\ x+y & 0 & 1+x\\ y+1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x-y & -x\\ 0 & x+y & y-1\\ y+1 & 1 & y\end{bmatrix}.$$

10) Wykonaj następujące operacje elementarne na macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$:

a) zamień pierwszą kolumnę z kolumną trzecią,

b) do wiersza drugiego dodaj wiersz pierwszy,

c) od trzeciego wiersza odejmij wiersz pierwszy pomnożony przez 3.

Odpowiedzi

1)

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -7\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 0\\ 0 & 6\\ -2 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 4\\ 2 & 0\\ -4 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 0 & -2\\ 3 & 0 & 6 & -1\end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=[2{,}5 \quad -1{,}3 \quad -1{,}4 \quad 4]$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}=[1{,}5 \quad -0{,}7 \quad -6{,}6 \quad -4]$,

$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2{,}5\\ -1{,}3\\ -1{,}4\\ 4\end{bmatrix}$.

2)

a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=[-1]$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -5 & 2\\ -4 & 2 & -10 & 4\\ -2 & 1 & -5 & 2\\ -4 & 2 & -10 & 4\end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ – niewykonalne, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5\\ 8\\ 19\end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 4 & -5\\ 10 & 2 & 6 & -4\\ 16 & 3 & 11 & -5\\ -8 & -1 & -9 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 4 & 23\end{bmatrix}$.

3)

a) prawdziwe, b) prawdziwe, c) prawdziwe, d) nieprawdziwe.

4)

a) $\begin{bmatrix}2 & 7\\ -7 & 7\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}5 & -6\\ 7 & 4\end{bmatrix}$.

5)

a) $\begin{bmatrix}6 & 8\\ 2 & -9\\ 0 & 13\end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -4 & 9\end{bmatrix}$.

6)

a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7)

a) $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8)

a) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$.

9)

$x = -1, y = 1$.

10)

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

3. WYZNACZNIK MACIERZY

3.1. Definicja wyznacznika

Definicja

Każdej macierzy kwadratowej (o wymiarze $n \times n$) postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

przyporządkowana jest liczba rzeczywista nazywana **wyznacznikiem macierzy**, którą oznaczamy symbolem $\det \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ lub w formie rozwiniętej

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Różni się ona od zapisu macierzy prostymi nawiasami.

Oznaczenie **det** stanowi skrót od łacińskiego słowa *determinare*, stąd też wyznacznik nazywany jest również *determinantem* danej macierzy. W odniesieniu do wyznaczników, podobnie jak w przypadku macierzy, możemy mówić o: stopniu wyznacznika, wierszu czy kolumnie wyznacznika oraz o elementach wyznacznika.

Powyższa definicja nie jest jedyną funkcjonującą w matematyce definicją wyznacznika. Jednak na potrzeby opanowania podstawowych zagadnień rachunku macierzowego znajomość powyższej uznajemy za wystarczającą.

Uwaga: należy pamiętać, że wyznaczniki charakteryzują jedynie macierze kwadratowe. Nie istnieją wyznaczniki dla macierzy prostokątnych, o wymiarach $n \times m$, gdzie $n \neq m$. Nie należy też mylić macierzy z wyznacznikami macierzy – są to zupełnie różne obiekty matematyczne, co ma odzwierciedlenie w ich zapisie – nawiasy kwadratowe lub ewentualnie okrągłe stosujemy dla macierzy, a nawiasy proste (kreski pionowe) dla wyznaczników.

Przykład 3.1

Dla poniższych macierzy zapisz wyznacznik i określ jego stopień, liczbę wierszy, kolumn oraz elementów:

a) $\mathbf{A} = [a_{11}]$,

b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ pierwszego stopnia zapiszemy: $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \det[a_{11}] = |a_{11}|$. Wyraz a_{11} jest jedynym elementem wyznacznika $|\mathbf{A}|$, ma on więc jedną kolumnę i jeden wiersz.

b) Wyznacznik macierzy $\mathbf{B}$ drugiego stopnia należy zapisać następująco:

$$|\mathbf{B}| = \det \mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik $|\mathbf{B}|$ ma cztery elementy – $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ – oraz dwa wiersze i dwie kolumny.

c) Wyznacznik macierzy $\mathbf{C}$ zapiszemy następująco:

$$|\mathbf{C}| = \det \mathbf{C} = \det \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

i jest to wyznacznik n-tego stopnia, który ma n kolumn i n wierszy oraz n^2 elementów.

☺

Definicja

Macierz kwadratową $\mathbf{A}$ nazywamy **macierzą osobliwą**, jeżeli jej wyznacznik jest równy zero ($\det \mathbf{A} = 0$).

Jeżeli wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ jest różny od zera ($\det \mathbf{A} \neq 0$), to macierz nazywamy **nieosobliwą**.

Wyznaczniki mają wiele zastosowań w matematyce – przykładowo przy rozwiązywaniu układów równań liniowych (wzory Cramera), poszukiwaniu macierzy odwrotnej do danej macierzy kwadratowej, obliczaniu objętości brył, zamianie zmiennych w całkach wielokrotnych czy sprawdzaniu ekstremum funkcji (kryterium Sylvestera).

3.2. Metody obliczania wyznaczników

Metoda obliczania wyznacznika uzależniona jest od stopnia macierzy, dla której go wyznaczamy. Najprostszym zadaniem jest znalezienie wyznacznika macierzy pierwszego stopnia ($n = 1$). Stanowi go jedyny element macierzy, czyli:

$$\det [a_{11}] = a_{11}.$$

Uwaga: należy uważnie stosować zapis $\det \mathbf{A} = |a_{11}|$, gdyż może on być mylony z wartością bezwzględną. Przykładowo, jeżeli $\mathbf{A} = [-2]$, to jej wyznacznik wynosi: $\det \mathbf{A} = \det[-2] = -2$, podczas gdy wartość bezwzględna z liczby –2 wynosi 2, co zapisujemy symbolicznie: $|-2| = 2$.

Dla macierzy drugiego stopnia ($n = 2$) oraz macierzy trzeciego stopnia ($n = 3$) wyznaczniki oblicza się, korzystając z określonych formuł. Natomiast dla macierzy stopnia czwartego i wyższych ($n \geq 4$) wyznaczniki oblicza się, stosując rozwinięcie Laplace'a[4]. Obliczanie wyznaczników wyższych stopni ułatwia też sprowadzenie macierzy do postaci macierzy trójkątnej lub uzyskanie jak największej liczby zer w wybranej kolumnie (wierszu) z wykorzystaniem operacji elementarnych. Poniżej omówione zostaną wszystkie wspomniane metody.

3.2.1. Wyznaczniki macierzy drugiego stopnia

Przy obliczaniu wyznacznika macierzy stopnia drugiego ($n = 2$) postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

stosujemy formułę:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.1}$$

[4] Rozwinięcie Laplace'a możemy także stosować dla macierzy stopnia drugiego i trzeciego, ale w praktyce rzadko się je do takich postaci wykorzystuje. W przypadku macierzy stopnia drugiego i trzeciego wyznacznik oblicza się znacznie szybciej za pomocą innych metod niż przy wykorzystaniu rozwinięcia Laplace'a.

Powyższy zapis oznacza, że mnożymy elementy znajdujące się na głównej przekątnej i od wyniku odejmujemy iloczyn elementów znajdujących się na drugiej przekątnej wyznacznika.

Przykład 3.2

Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy:

a) $\mathbf{A} = [2]$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{E} = [\ln 3]$.

Rozwiązanie:

a) $\det \mathbf{A} = \det[2] = 2$,

b) $\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -3$,

c) $\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = 4 - 14 = -10$,

d) $\det \mathbf{D} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

e) $\det \mathbf{E} = |\ln 3| = \ln 3$.

☺

3.2.2. Wyznaczniki macierzy trzeciego stopnia

Do obliczania wyznacznika macierzy stopnia trzeciego ($n = 3$) stosujemy **schemat Sarrusa**. Polega on na „rozszerzeniu” wyznacznika poprzez dopisanie za trzecią kolumną wyznacznika kolumny pierwszej i drugiej (sposób 1) lub poprzez dopisanie wiersza pierwszego i drugiego poniżej wyznacznika (sposób 2). Dzięki temu zabiegowi łatwo zapamiętać, które elementy macierzy należy wymnożyć oraz z jakim znakiem zapisać wynik mnożenia, by prawidłowo zsumować odpowiednie iloczyny pozwalające obliczyć wyznacznik.

Sposób 1

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & - & - & - \\
\multicolumn{3}{c}{\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|} & \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} = \\
 & & + & + & +
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{3.2.a}$$

Licząc wyznacznik, dopisujemy z prawej strony dwie pierwsze kolumny w kolejności ich występowania w macierzy. Następnie wymnażamy po 3 elementy wyznacznika po przekątnej (szare ciągłe linie), rozpoczynając od pierwszego wiersza i głównej przekątnej macierzy, kierując się w stronę prawego dolnego (południowo-wschodniego) rogu wyznacznika. Te iloczyny sumujemy. Następnie kolejne trzy iloczyny otrzymujemy, mnożąc pozostałe przekątne (szare przerywane linie), rozpoczynając od dolnego wiersza i kierując się w prawy górny (północno-wschodni) róg wyznacznika. Sumę tych trzech iloczynów należy odjąć od sumy pierwszych trzech iloczynów lub też każdy iloczyn po prostu zapisać z minusem, tak jak zostało to przedstawione powyżej.

Sposób 2

$$
\begin{array}{cccc}
 & \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| & \begin{array}{c} \\ = \\ + \end{array} \\
\begin{array}{c} - \\ - \end{array} & \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array}
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \tag{3.2.b}$$

Poniżej wyznacznika dopisujemy dwa pierwsze wiersze w kolejności ich występowania w macierzy. W pierwszym kroku mnożymy elementy oznaczone po przekątnych szarą ciągłą linią (skierowane od lewej strony w prawy dolny róg) i zapisujemy je z plusem (dodajemy). Następnie mnożymy elementy wyznacznika według szarych przerywanych linii (przekątne skierowane od lewej strony w prawy góry róg wyznacznika) i te zapisujemy ze zmienionym znakiem (odejmujemy).

Naturalnie obie formy zapisu dają ten sam wynik, w praktyce więc wystarczy przyswoić i wybrać jedną formę zapisu, którą czytelnik uzna za dogodniejszą.

Przykład 3.3

Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Dla macierzy **A** obliczamy wyznacznik według schematu Sarrusa, korzystając z pierwszego sposobu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{matrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 0\cdot 1\cdot(-2) +$$

$$+(-1)\cdot 2\cdot 0 - (-2)\cdot 3\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 0 = 9 - 6 = 3.$$

b) Wyznacznik macierzy **B** wyznaczymy drugim sposobem:

$$\begin{matrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{matrix} \end{matrix} = 3\cdot 4\cdot(-4) + 1\cdot(-3)\cdot 5 + 2\cdot(-2)\cdot(-1) -$$

$$-2\cdot 4\cdot 5 - 3\cdot(-3)\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot(-4) =$$

$$= -48 - 15 + 4 - 40 - 9 - 8 = -116.$$

☺

Wyznacznik macierzy trzeciego stopnia łatwiej jest obliczyć, najpierw doprowadzając macierz do postaci macierzy trójkątnej. Wyznacznik macierzy trójkątnej (zarówno górnej, jak i dolnej) jest równy iloczynowi wyrazów na jej przekątnej, ponieważ wszystkie pozostałe iloczyny zawierać będą przynajmniej jedno zero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{matrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot 0 +$$

$$+a_{13}\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot a_{22}\cdot a_{13} - 0\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot 0\cdot a_{12} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Jest on więc bardzo łatwy do skalkulowania. Każdą macierz można sprowadzić do macierzy trójkątnej za pomocą **operacji elementarnych**[5].

[5] Operacje elementarne zostały omówione w rozdziale 2.5.

Uwaga: operacje elementarne mają następujący wpływ na wyznacznik:

- Dodanie wielokrotności jednego wiersza do innego wiersza **nie zmienia** wartości wyznacznika.
- Dodanie wielokrotności jednej kolumny do innej kolumny **nie zmienia** wartości wyznacznika.
- Pomnożenie wiersza przez liczbę oznacza **pomnożenie wyznacznika** przez tę liczbę.
- Pomnożenie kolumny przez liczbę oznacza **pomnożenie wyznacznika** przez tę liczbę.
- Zamiana miejscami dwóch wierszy **zmienia znak** wyznacznika na przeciwny.
- Zamiana miejscami dwóch kolumn **zmienia znak** wyznacznika na przeciwny.

Przykład 3.4

Oblicz wyznacznik macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że macierz **A** byłaby macierzą trójkątną górną, gdyby nie element a_{21}, który jest różny od zera. Można dokonać przekształcenia macierzy za pomocą operacji elementarnej polegającej na odjęciu od każdego elementu wiersza drugiego odpowiednich elementów wiersza pierwszego (możemy to zapisać jako przekształcenie: $w_2 - w_1$), co nie zmieni wartości wyznacznika. Zatem:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{w_2 - w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Otrzymaliśmy wyznacznik macierzy trójkątnej górnej, dla której wystarczy przemnożyć elementy znajdujące się na głównej przekątnej, by obliczyć wyznacznik. Iloczyn ten wynosi 3, więc wyznacznik macierzy **A** też wynosi 3.

☺

Przykład 3.5

Oblicz wyznacznik macierzy $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że zamieniając miejscami wiersz 1 i 2, a następnie odejmując od wszystkich elementów trzeciej kolumny elementy kolumny pierwszej, otrzymamy macierz trójkątną dolną, co znacząco ułatwi obliczenie wyznacznika. Należy przy tym pamiętać, że pierwsza z operacji elementarnych (czyli zamiana wierszy miejscami) powoduje zmianę znaku wyznacznika na przeciwny. Mamy zatem:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Kolejna operacja elementarna (czyli odjęcie elementów kolumny pierwszej od elementów kolumny trzeciej) nie zmienia obecnego znaku wyznacznika. Mamy więc:

$$\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{k_3 - k_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Otrzymaliśmy wyznacznik trzeciego stopnia macierzy trójkątnej dolnej. Zatem wymnażając elementy głównej przekątnej, otrzymujemy jej wyznacznik (liczba 8). Musimy dodatkowo uwzględnić znak stojący przed wyznacznikiem (wynikającym w poprzedniego przekształcenia), co prowadzi do następującego rezultatu:

$$\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$

☺

W celu uproszczenia obliczeń wyznaczników (zwłaszcza wyższych rzędów) można wykonać dowolną liczbę operacji elementarnych.

3.2.3. Wyznaczniki wyższych stopni

Aby znaleźć wyznaczniki macierzy wyższych rzędów ($n \geq 4$), wykorzystujemy rozwinięcie Laplace'a. Podstawą wzoru Laplace'a są dopełnienia algebraiczne elementów macierzy oraz minory, które objaśnimy w pierwszej kolejności.

Definicja

Minorem (podwyznacznikiem) stopnia $\boldsymbol{k}$ danej macierzy (danego wyznacznika) nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k otrzymany z danej macierzy (wyznacznika) poprzez wykreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn.

W szczególności **minorem $\boldsymbol{M_{ij}}$** danej macierzy kwadratowej (danego wyznacznika) stopnia n nazywamy wyznacznik powstały z tej macierzy (wyznacznika) w wyniku skreślenia i-tego wiersza i j-tej kolumny, $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$.

Przykład 3.6

Oblicz minor M_{12} macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

Minor M_{12} elementu a_{12} powyższej macierzy to wyznacznik powstały po wykreśleniu z niej pierwszego wiersza i drugiej kolumny:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zatem minor ten przyjmuje wartość:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4.$$

☺

Definicja

Dopełnienie algebraiczne $\boldsymbol{D_{ij}}$ elementu $\boldsymbol{a_{ij}}$ macierzy **A** stanowi iloczyn współczynnika $(-1)^{i+j}$ i minora M_{ij} powstałego w wyniku wykreślenia i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy **A**, czyli:

$$D_{\boldsymbol{ij}} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{3.3}$$

Dla każdej macierzy kwadratowej o wymiarach $n \times n$ możliwe jest obliczenie n^2 dopełnień algebraicznych, które składają się na macierz dopełnień algebraicznych.

Przykład 3.7

Oblicz dopełnienie algebraiczne elementu a_{23} macierzy $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

Element a_{23} powyższej macierzy to liczba -3. Dopełnienie algebraiczne D_{23} macierzy obliczymy ze wzoru 3.3, podstawiając $i = 2$ oraz $j = 3$, czyli:

$$D_{\mathbf{23}} = (-1)^{2+3} M_{23},$$

gdzie minor M_{23} to wyznacznik macierzy powstałej po wykreśleniu drugiego wiersza oraz trzeciej kolumny:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ czyli wyznacznik podmacierzy: } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Stąd: $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1.$

Ostatecznie:

$$D_{\mathbf{23}} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \cdot (-1) = 1.$$

☺

Twierdzenie Laplace'a

Niech **A** będzie macierzą kwadratową stopnia n, gdzie $n \geq 2$. Wyznacznik macierzy **A** równy jest sumie wszystkich iloczynów każdego elementu dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) i odpowiadającego temu elementowi dopełnienia algebraicznego:

$$\det\mathbf{A} = \ a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + a_{i3}D_{i3} \ldots + a_{in}D_{in} \text{ dla } i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$(\det\mathbf{A} = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2i} + a_{3j}D_{3j} \ldots + a_{nj}D_{nj} \text{ dla } j \in \{1,2,\ldots,n\}),$$

czyli:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}D_{ik} \left(\det\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}D_{kj} \right). \tag{3.4}$$

Powyższą równość nazywamy **rozwinięciem Laplace'a** względem i-tego wiersza (j-tej kolumny).

Rozwinięcie Laplace'a określa ogólną postać wyznacznika macierzy kwadratowej **A** o dowolnym wymiarze, w tym również wyznacznika drugiego i trzeciego stopnia.

Przykład 3.8

Oblicz wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, stosując rozwinięcie Laplace'a według pierwszej kolumny.

Rozwiązanie:

Zapiszmy rozwinięcie Laplace'a dla zadanej macierzy według elementów pierwszej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot D_{11} + 1 \cdot D_{21} + 0 \cdot D_{31} + 3 \cdot D_{41}.$$

Element a_{11} oraz a_{31} wynoszą 0, zatem wyzerują iloczyn pierwszy i trzeci. Niezerowe pozostają iloczyny drugi i czwarty. Stosując wzór 3.3 dla dopełnień D_{21} oraz D_{41}, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot D_{21} + 3 \cdot D_{41} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot M_{21} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \cdot M_{41} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Na tym etapie możemy policzyć wartość minorów M_{21} oraz M_{41} ze wzorów 3.2a lub 3.2b albo wykorzystać jeszcze raz rozwinięcie Laplace'a. W tym przykładzie zastosujemy wzory 3.2 i policzymy wyznaczniki trzeciego stopnia:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 =$$

$$= 10 - 9 + 2 + 5 - 6 - 6 = -4.$$

$$M_{41} = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right. =$$

$$= 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= -12 + 5 + 4 - 9 = -12.$$

Zatem:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot (-1) \cdot (-12) = 4 + 36 = 40.$$

☺

Przykład 3.9

Oblicz wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie:

Tym razem w zadaniu nie narzucono kolumny ani wiersza, według których należy zastosować rozwinięcie Laplace'a do obliczenia wyznacznika. Możemy wyboru dokonać samodzielnie. Najlepszym rozwiązaniem jest wybór takiej kolumny (wiersza), który ma najwięcej zer, by jak najwięcej iloczynów we wzorze Laplace'a było zerowych. Możemy też z wykorzystaniem operacji elementarnych doprowadzić macierz do takiej postaci, by wybrany wiersz lub kolumna miały więcej zer niż macierz wyjściowa. W powyższej macierzy możemy do pierwszego wiersza dodać wiersz drugi i w ten sposób w kolumnie drugiej wszystkie elementy poza a_{22} będą zerowe:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_1 + w_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Kiedy stosujemy rozwinięcie Laplace'a według drugiej kolumny, wszystkie iloczyny poza tym zawierającym element a_{22} są zerowe:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot D_{12} + (-3) \cdot D_{22} + 0 \cdot D_{32} + 0 \cdot D_{42} = (-3) \cdot D_{22} = (-3) \cdot (-1)^{2+2} M_{22} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Następnie, jak w poprzednim przykładzie, mamy dwie opcje. Możemy wyznacznik trzeciego stopnia policzyć ze wzorów 3.2 lub rozwinąć minor M_{22} według dowolnego wiersza lub kolumny ze wzoru 3.4. W tym przykładzie zastosujemy dla minora M_{22} raz jeszcze rozwinięcie Laplace'a według trzeciej kolumny, zapisując wersję ostateczną wzoru (tzn. minory stopnia drugiego przedstawimy w postaci gotowych wyznaczników), pomijając elementy zerowe:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot \left(5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (-3) \cdot \big(5 \cdot (-5) + (-2) \cdot (4 - 10)\big) = (-3) \cdot (-25 + 12) = 39.$$

☺

3.3. Własności wyznaczników

1) Transponowanie macierzy nie wpływa na wartość jej wyznacznika, czyli wyznacznik macierzy równy jest wyznacznikowi macierzy transponowanej: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.
2) Przestawienie dwóch kolumn (wierszy) w macierzy $\mathbf{A}$ nie zmienia wartości wyznacznika, lecz powoduje zmianę jego znaku, a zatem:

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{vmatrix}.$$

Analogicznie:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

3) Wspólny czynnik wszystkich elementów danego wiersza (danej kolumny) można wynieść przed znak wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & \cdots & k \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & k \cdot a_{2j} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & \cdots & k \cdot a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \right).$$

4) Wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie, jeżeli do dowolnego wiersza (dowolnej kolumny) dodamy odpowiadające mu elementy innego wiersza (innej kolumny) pomnożone przez dowolną liczbę różną od zera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} + k \cdot a_{j1} \quad a_{i2} + k \cdot a_{j2} \quad \cdots \quad a_{in} + k \cdot a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

5) Wyznacznik macierzy, w której co najmniej jeden wiersz lub jedna kolumna składa się z samych zer, jest równy zeru.

6) Wyznacznik macierzy trójkątnej (w tym w szczególności macierzy diagonalnej) równy jest iloczynowi elementów leżących na głównej przekątnej (elementów diagonalnych):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

– macierz trójkątna górna[6],

[6] Analogicznie zapisać można wyznacznik dla macierzy trójkątnej dolnej.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

– macierz diagonalna.

7) Wyznacznik macierzy jednostkowej dowolnego stopnia jest równy 1 ($\det \mathbf{I} = 1$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

8) Wyznacznik macierzy, w której co najmniej jeden wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (kolumn), jest równy zeru. W szczególności:
   - wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych wierszach (kolumnach) jest równy zeru,
   - wyznacznik macierzy o dwóch proporcjonalnych wierszach (kolumnach) jest równy zeru.

9) Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia jest równy iloczynowi wyznaczników tych macierzy, czyli:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

10) Wyznacznik macierzy odwrotnej[7] do macierzy **A** jest równy odwrotności wyznacznika macierzy **A**:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

Przykład 3.10

Oblicz wyznaczniki poniższych macierzy:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$,

[7] Zagadnienie macierzy odwrotnej omówiono w rozdziale 4 podręcznika.

c) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, d) $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 15 & 1\\ 3 & 9 & 3\end{bmatrix}$,

e) $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -3 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że w macierzy **A** ostatnia kolumna jest wielokrotnością liczby 3. Można ją więc wyłączyć przed znak wyznacznika. Dodatkowo można za pomocą przekształceń elementarnych uprościć nieco obliczenie wyznacznika, odejmując od elementów wiersza drugiego odpowiednie elementy wiersza trzeciego ($w_2 - w_3$):

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 6 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 3\end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix} w_2 - w_3 = 3\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 4 & 3\end{matrix} =$$

$$= 3\cdot(0+0+6-0-3-0) = 3\cdot 3 = 9.$$

b) Zauważmy, że macierz **B** jest to transpozycja macierzy **A,** czyli:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Na podstawie własności wyznaczników mamy więc:

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{A} = 9.$$

c) Macierz **C** jest macierzą diagonalną, zatem jej wyznacznik jest równy iloczynowi elementów leżących na przekątnej, więc:

$$\det \mathbf{C} = 1\cdot 3\cdot(-1)\cdot 2 = -6.$$

d) Wyznacznik macierzy **D** nie wymaga obliczeń. Wystarczy zauważyć, że kolumna druga jest wielokrotnością pierwszej ($k_2 = 3k_1$). Zatem wyznacznik tej macierzy wynosi 0 (na podstawie własności wyznaczników numer 8).

e) Z własności wyznaczników $\det \mathbf{E} = 0$, gdyż macierz **E** zawiera kolumnę zerową.

☺

3.4. Rząd macierzy

Definicja

Macierz A jest rzędu *r*, jeżeli istnieje przynajmniej jeden niezerowy minor stopnia ***r*** utworzony z elementów tej macierzy, a wszystkie minory stopnia większego niż ***r*** (jeżeli istnieją) mają wartość zero.

Rzędem macierzy A nazywamy zatem najwyższy stopień różnych od zera minorów tej macierzy.

Rząd macierzy **A** oznaczamy symbolem $\mathrm{r}(\mathbf{A})$, $\mathrm{rz}(\mathbf{A})$ lub $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$.

Dla dowolnej niezerowej macierzy **A** zachodzi $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \geq 1$, ponieważ każdy niezerowy element macierzy **A** jest jednocześnie wyznacznikiem stopnia 1.

Rząd macierzy **A** można wyznaczyć dla każdej macierzy stopnia $m \times n$, przy czym spełniona jest następująca nierówność:

$$0 \leq \mathrm{rz}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}.$$

Powyższa nierówność wynika z faktu, że wyznaczniki liczymy tylko dla macierzy kwadratowych.

Na przykład rząd macierzy wymiaru 2×4 może być równy maksymalnie 2 (gdyż minor takiej macierzy jest maksymalnie wymiaru 2×2).

Metoda wyznaczania rzędu macierzy za pomocą wyznaczników

Metoda wyznaczania rzędu macierzy **A** za pomocą wyznaczników polega na sprawdzaniu wartości wyznaczników (minorów), zaczynając do wyznaczników macierzy kwadratowej o najwyższym możliwym stopniu. Załóżmy, że dana jest macierz **A** jest wymiaru $m \times n$. Najwyższy stopień jej minora (wyznacznika) może wynieść $\min\{m, n\}$. Jeśli jego wartość jest różna od 0, wówczas rząd macierzy **A** wynosi $\min\{m, n\}$, jeśli zaś jest równa 0, obliczamy pozostałe wyznaczniki stopnia $\min\{m, n\}$. Jeśli wszystkie wyznaczniki stopnia $\min\{m, n\}$ są równe 0, wówczas sprawdzamy wartości wyznaczników o jeden stopień niższych, czyli $\min\{m, n\} - 1$. Jeśli wartość jednego z nich będzie różna od 0, określamy rząd macierzy, czyli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \min\{m, n\} - 1$. W przeciwnym wypadku sprawdzamy kolejne wyznaczniki. Procedurę powtarzamy do tej pory, aż otrzymamy wyznacznik różny od 0. Jego stopień określa rząd macierzy.

Przykład 3.11

Wyznacz rząd macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

Macierz **A** nie jest macierzą kwadratową. Aby wyznaczyć rząd macierzy musimy wśród jej elementów znaleźć największą macierz (inaczej podmacierz, minor macierzy) kwadratową, której wyznacznik jest różny od 0. W tym przykładzie największą macierzą będzie macierz o wymiarze 2×2, więc sprawdzamy wartości wyznaczników macierzy o wymiarze 2×2, czyli $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. Jeśli co najmniej jedna z nich będzie różna od 0, wówczas rząd macierzy wyniesie 2. Liczymy pierwszy wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Powyższy wyznacznik jest różny od 0, zatem rząd macierzy wynosi 2 ($\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = 2$).

Uwaga: jeżeli znajdziemy wyznacznik różny od zera, to nie musimy sprawdzać pozostałych wyznaczników.

☺

Przykład 3.12

Wyznacz rząd macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

W tym przypadku macierz **A** jest macierzą kwadratową, więc zaczynamy od wyliczenia jej wyznacznika. Stosując metodę Sarrusa, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Ponieważ $\det \mathbf{A} = 0$, rząd macierzy nie jest równy 3. W kolejnym kroku szukamy podmacierzy o jeden stopień mniejszej od 3, czyli stopnia 2, i sprawdzamy ich wyznaczniki. Jednym z minorów macierzy **A** jest $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Zatem $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = 2$.

☺

Metoda wyznaczania rzędu macierzy za pomocą operacji elementarnych

Kolejna metoda wyznaczania rzędu macierzy bazuje na operacjach elementarnych. Aby ją zrozumieć, należy zapoznać się z poniższymi własnościami, które wynikają z własności wyznaczników.

Twierdzenie

Rząd macierzy **A** nie zmienia się w wyniku zastosowania następujących przekształceń elementarnych macierzy:

- transpozycji macierzy **A**,
- pomnożenia dowolnego wiersza (kolumny) macierzy przez dowolną liczbę różną od 0,
- dodania do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę różną od 0,
- przestawienia wierszy (kolumn),
- skreślenia lub dodania zerowego wiersza (kolumny).

Każdą macierz **A** o wymiarach $m \times n$ można – za pomocą powyższych operacji elementarnych – przekształcić w macierz postaci **kanonicznej** (**bazowej**):

macierz jednostkowa stopnia $k \leq \{m, n\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{O}' & \boldsymbol{O}'' \end{bmatrix}$$

macierz o dowolnych elementach

macierze zerowe

W zależności od stopnia podmacierzy jednostkowej $\boldsymbol{I}_k$ postać kanoniczna może przyjąć różne postacie:

1. Jeśli stopień podmacierzy $\boldsymbol{I}_k$ będzie równy liczbie wierszy macierzy **A**, czyli $k = m$ wówczas postać kanoniczna macierzy **A** przyjmie postać: $[\,\mathbf{I}_k \mid \mathbf{R}\,]$.
2. Jeśli stopień podmacierzy $\boldsymbol{I}_k$ będzie równy liczbie kolumn macierzy **A**, czyli $k = n$ wówczas postać kanoniczna macierzy **A** przyjmie postać: $\left[\frac{\boldsymbol{I}_k}{\boldsymbol{O}'}\right]$.

3. Jeśli stopień podmacierzy $\mathbf{I}_k$ będzie równy liczbie wierszy i kolumn macierzy $\mathbf{A}$, czyli $k = m = n$, wówczas postać kanoniczna macierzy $\mathbf{A}$ przyjmie postać: $[\mathbf{I}_k]$.

Twierdzenie

Stopień podmacierzy jednostkowej $\mathbf{I}_k$ macierzy $\mathbf{A}$ postaci kanonicznej (bazowej) jest równy rzędowi macierzy $\mathbf{A}$.

Korzystając z powyższego twierdzenia, można wyznaczyć rząd macierzy. W tym celu sprowadzamy ją do postaci kanonicznej i sprawdzamy stopień podmacierzy jednostkowej $\boldsymbol{I}_k$. Będzie on równy rzędowi macierzy.

Przykład 3.13

Korzystając z operacji elementarnych, wyznacz rząd macierzy

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Macierz $\mathbf{A}$ sprowadzamy do postaci kanonicznej:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ w_2+w_1 \\ \\ w_4-w_1 \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{array}{l} w_1+w_2 \\ \\ w_3-w_2 \\ w_4-w_2 \end{array}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stopień podmacierzy jednostkowej $\boldsymbol{I}_k$ jest równy 2, zatem $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = 2$.

☺

Własności rzędu macierzy:

1) Rząd macierzy zerowej jest równy 0.
2) Rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n.

3) Rząd macierzy $\mathbf{A}^T$ jest równy rzędowi macierzy $\mathbf{A}$.
4) Rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy.
5) Jeśli dowolny wiersz (kolumnę) macierzy pomnożymy przez stałą różną od zera i dodamy do innego wiersza (kolumny), to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.
6) Jeśli zamienimy dwa wiersze (kolumny) między sobą miejscami, to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.
7) Jeśli wykreślimy wiersz (kolumnę) złożony z samych zer, to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.

3.5. Zadania

1) Oblicz wyznaczniki macierzy:

a) $[3]$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 75 & -20 & 9 \\ -42 & 6 & -3 \\ 0 & 10 & 2 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Oblicz wyznacznik macierzy korzystając z rozwinięcia Laplace'a:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ 10 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Oblicz wyznacznik iloczynu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ poniższych macierzy:

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

4) Na podstawie własności wyznaczników (bez wyliczeń) określ wartości wyznaczników poniższych macierzy.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 3 & 2 \\ 12 & 0 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5) Określ rząd poniższych macierzy:

a) $[2]$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, h) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

6) Sprawdź, czy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ prawdziwe jest równanie:

$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Odpowiedzi:

1) a) 3, b) –1, c) –11, d) –39, e) –2310, f) 0.

2) a) –20, b) 1, c) 8, d) 0, e) 44.

3) –180.

4) a) –9, b) 1, c) 0, d) 0, e) 6, f) 0.

5) a) 1, b) 1, c) 2, d) 3, e) 2, f) 3, g) 2, h) 1.

6) Tak, ponieważ $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T = 13$.

4. MACIERZ ODWROTNA

4.1. Definicja macierzy odwrotnej

Definicja

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy macierz oznaczoną przez $\mathbf{A}^{-1}$, która spełnia następujący warunek:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_{n}. \tag{4.1}$$

Jeśli macierz **A** posiada macierz odwrotną, wówczas nazywamy ją **macierzą odwracalną**.

Przykład 4.1

Przykłady macierzy **A** i macierzy do niej odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$:

1) $\mathbf{A}=[2]$ i $\mathbf{A}^{-1}=\left[\frac{1}{2}\right]$, bo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=[2]\cdot\left[\frac{1}{2}\right]=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\left[\frac{1}{2}\right]\cdot[2]=[1]=\mathbf{I}_1$,

2) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ i $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}$,

bo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -4 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=$

$=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -4 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_2$,

3) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ i $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

bo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3.$$

☺

Twierdzenie

Macierz kwadratowa **A** jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą nieosobliwą, czyli gdy $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

Uwaga: Macierze odwrotne istnieją tylko dla macierzy kwadratowych, których wyznacznik jest różny od zera.

Przykład 4.2

Sprawdź, czy poniższe macierze są odwracalne:

a) $[2]$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & -11 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie:

a) Tak, ponieważ macierz jest kwadratowa oraz jej wyznacznik jest różny od zera (jest macierzą nieosobliwą), gdyż $|2| = 2$.

b) Tak, ponieważ macierz jest kwadratowa oraz jej wyznacznik jest różny od zera (jest macierzą nieosobliwą), gdyż $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10$.

c) Nie, gdyż – pomimo tego, że jest kwadratowa – jej wyznacznik jest równy 0 (jest macierzą osobliwą), $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

d) Tak, ponieważ macierz jest kwadratowa oraz jej wyznacznik jest różny od zera (jest macierzą nieosobliwą), gdyż $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

e) Nie, gdyż macierz nie jest kwadratowa.

☺

4.2. Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

Poniżej zostaną zaprezentowane 3 metody wyznaczania macierzy odwrotnej:

1) Metoda wyznaczania macierzy odwrotnej z definicji.
2) Metoda wyznaczania macierzy odwrotnej za pomocą wyznaczników.
3) Metoda Gaussa-Jordana (z wykorzystaniem operacji elementarnych).

4.2.1. Wyznaczanie macierzy odwrotnej z definicji

Niech dana będzie kwadratowa macierz $\mathbf{A}$ stopnia n i $\det \mathbf{A} \neq 0$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Korzystając z definicji macierzy odwrotnej, z której wynika, że $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, wyznaczymy jej macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

Macierz $\mathbf{A}^{-1}$ jest również stopnia n (ma tyle samo wierszy i kolumn co macierz $\mathbf{A}$) postaci:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając macierz $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A}^{-1}$ do wzoru 4.1, otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyliczając iloczyn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ (lewą stronę równania), a następnie porównując poszczególne elementy macierzy będącej wynikiem tego iloczynu do odpowiadających im elementów macierzy jednostkowej, otrzymamy układ równań postaci:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \text{ dla } i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

przy czym δ_{ij} (delta Kroneckera) przyjmuje wartość 1 dla $i = j$ oraz wartość 0 dla $i \neq j$.

Rozwiązanie uzyskanego układu równań pozwala na znalezienie niewiadomych x_{kj}, które są elementami szukanej macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$.

Przykład 4.3

Wyznacz macierz odwrotną do $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, korzystając z definicji macierzy odwrotnej.

Rozwiązanie:

Zanim zaczniemy wyznaczać macierz odwrotną, należy sprawdzić, czy jest ona odwracalna.

Sprawdzamy, czy macierz **A** jest macierzą nieosobliwą, czyli liczymy jej wyznacznik:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-3) = 4 - 6 = -2.$$

Wyznacznik macierzy **A** jest różny od zera, zatem można przejść do wyznaczania macierzy odwrotnej.

Zakładamy, że szukana macierz odwrotna jest macierzą kwadratową stopnia drugiego, czyli przyjmie postać $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$. Dokonujemy podstawienia do wzoru 4.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po wymnożeniu macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{-1}$ otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x_{11} - 2x_{21} & x_{12} - 2x_{22} \\ -3x_{11} + 4x_{21} & -3x_{12} + 4x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie porównujemy poszczególne elementy powyższych macierzy i uzyskujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{11} - 2x_{21} = 1 \\ -3x_{11} + 4x_{21} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_{12} - 2x_{22} = 0 \\ -3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy elementy macierzy odwrotnej:

$$\begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{21} = -\dfrac{3}{2} \\ x_{12} = -1 \\ x_{22} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A zatem macierz odwrotna do macierzy **A** ma postać:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Po wyznaczeniu macierzy odwrotnej warto sprawdzić poprawność wyliczeń. Aby to zrobić, należy obliczyć iloczyn macierz **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ oraz sprawdzić, czy uzyskamy w ten sposób macierz jednostkową.

Dokonujemy sprawdzenia:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

W wyniku wymnożenia macierzy **A** i $\mathbf{A}^{-1}$ uzyskaliśmy macierz jednostkową, czyli możemy być pewni, że macierz odwrotna została wyznaczona poprawnie.

☺

4.2.2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą wyznaczników

Twierdzenie

Jeżeli macierz kwadratowa **A** jest macierzą nieosobliwą, to istnieje do niej macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$, przy czym:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{D}^{\mathrm{T}}, \tag{4.2}$$

gdzie:

D – macierz, której elementami są dopełnienia algebraiczne elementów macierzy **A** (macierz dopełnień algebraicznych).

Macierz $\mathbf{A}^{\mathrm{d}} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ nazywamy macierzą dołączoną.

Macierz dołączona, będąca transpozycją macierzy dopełnień algebraicznych, przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{d}} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że dopełnienia te wyznaczamy ze wzoru 3.3:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ dla } i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

gdzie M_{ij} jest minorem macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$, czyli wyznacznikiem macierzy stopnia $n - 1$ powstałej z macierzy $\mathbf{A}$ przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład 4.4

Znajdź macierz odwrotną do $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ za pomocą wyznaczników.

Rozwiązanie:

Na początku sprawdzamy, czy macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa. Liczymy więc jej wyznacznik:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -69 \neq 0.$$

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ jest różny od zera, więc możemy przejść do wyznaczania macierzy odwrotnej. Wykorzystamy wzór 4.2.

W związku z tym, że macierz $\mathbf{A}$ jest stopnia trzeciego, macierz dopełnień algebraicznych przyjmie postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

W celu wyznaczenia elementów macierzy $\mathbf{D}$ skorzystamy ze wzoru 3.3.

Poniżej przedstawiono sposób wyznaczenia poszczególnych elementów macierzy dopełnień **D**:

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -15,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 26,$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9,$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Uzupełniając macierz **D** uzyskanymi powyżej wartościami, otrzymujemy macierz dopełnień algebraicznych:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -15 \\ 26 & -5 & -9 \\ 2 & -11 & -6 \end{bmatrix}.$$

W kolejnym kroku dokonujemy transpozycji macierzy **D**, czyli wyznaczamy macierz dołączoną:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & 26 & 2 \\ 7 & -5 & -11 \\ -15 & -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Na koniec do wzoru $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ podstawiamy wartość wyznacznika macierzy **A** raz macierz dołączoną i wyznaczamy macierz odwrotną:

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{69}\begin{bmatrix} 5 & 26 & 2 \\ 7 & -5 & -11 \\ -15 & -9 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{69} & -\frac{26}{69} & -\frac{2}{69} \\ -\frac{7}{69} & \frac{5}{69} & \frac{11}{69} \\ \frac{15}{69} & \frac{9}{69} & \frac{6}{69} \end{bmatrix}.$$

☺

Powyżej został zaprezentowany przykład wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy stopnia trzeciego. W taki sam sposób możemy odwracać także macierze stopnia drugiego, z tym że w ich przypadku możemy wyznaczyć wzór, który nam to ułatwi.

Dana jest następująca macierz kwadratowa stopnia drugiego:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

która jest macierzą nieosobliwą, czyli $\det\mathbf{A} = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$.

Wówczas macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$ wyznacza się w następujący sposób:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot d & (-1)^{1+2} \cdot c \\ (-1)^{2+1} \cdot b & (-1)^{2+2} \cdot a \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Zatem możemy zapisać następujący wzór na macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Przykład 4.5

Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Wyznacz jej macierz odwrotną, korzystając ze wzoru 4.3.

Rozwiązanie:

Obliczamy wyznacznik macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 4 + 6 = 10.$$

Stosując wzór 4.3, wyznaczamy macierz odwrotną do macierzy **A**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

☺

4.2.3. Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą operacji elementarnych

Metoda wyznaczania macierzy odwrotnej z wykorzystaniem wyznaczników jest rekomendowana do liczenia macierzy odwrotnych stopnia co najwyżej czwartego. Dla macierzy wyższych stopni pracochłonne jest bowiem wyznaczanie minorów (wyznaczników).

Macierz odwrotną do macierzy **A** można również wyznaczyć metodą przekształceń elementarnych, zwaną algorytmem Gaussa. Procedura polega na sprowadzeniu macierzy blokowej $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ do postaci $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$ wyłącznie za pomocą operacji elementarnych na wierszach:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \underbrace{\sim \ \dots \ \sim}_{\text{operacje elementarne na wierszach}} [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}].$$

W pierwszym etapie omawianej metody budujemy macierz blokową składającą się z macierzy **A** oraz macierzy jednostkowej **I** tego samego stopnia co macierz **A**. Istotna jest tu kolejność ustawienia tych macierzy. Wyjściowa macierz przyjmuje zatem postać $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$, czyli:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

Następnie macierz **A** przekształcamy do macierzy jednostkowej **I**, wykonując następujące operacje elementarne na jej wierszach:

- zamianę dwóch dowolnych wierszy między sobą,
- mnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera,
- dodanie do elementów dowolnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę różną od zera.

Procedurę przekształcania macierzy **A** w macierz **I** rozpoczynamy od sprowadzenia pierwszej kolumny macierzy **A** do postaci pierwszej kolumny macierzy jednostkowej. Jeśli element $a_{11} \neq 0$, wiersze $w_1, w_2, \dots, w_n$ przekształcamy kolejno w wiersze $w_1', w_2', \dots, w_n'$ według wzorów:

$$w_1' = \frac{w_1}{a_{11}},$$

$$w_2' = w_2 - a_{21} w_1',$$

$$\dots$$

$$w_n' = w_n - a_{n1} w_1'.$$

Jeśli zaś $a_{11} = 0$, wówczas przestawiamy wiersze macierzy tak, aby element a_{11} był różny od zera. Następnie stosujemy powyższe wzory.

Kolejne kolumny macierzy **A** przekształcamy w analogiczny sposób jak przy przekształceniu kolumny pierwszej (każdy element $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$ sprowadzamy do 1, a następnie „zerujemy" pozostałe elementy j-tej kolumny, $j = 1, 2, \dots, n$). Gdy macierz blokowa przyjmie postać $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A^{-1}}]$, za kreską otrzymujemy macierz $\mathbf{A^{-1}}$. Zatem po przekształceniach otrzymamy macierz blokową postaci:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right],$$

co umożliwia zapisanie macierzy odwrotnej:

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Analogiczne postępowanie można także wykonać, zapisując macierz jednostkową **I** poniżej macierzy **A**. Wówczas, wykonując operacje elementarne wyłącznie na kolumnach, przekształcamy macierz **A** w macierz jednostkową **I**, a dopisana macierz jednostkowa staje się macierzą odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

Przykład 4.6

Wyznacz macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, korzystając z operacji elementarnych.

Rozwiązanie:

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ jest różny od zera ($\det \mathbf{A}^{-1}=-1$), więc możemy przystąpić do odwracania macierzy. Wyznaczanie macierzy odwrotnej z wykorzystaniem algorytmu Gaussa rozpoczynamy od budowy macierzy blokowej postaci $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$:

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{A}}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{I}}\right].$$

Przekształcenia zaczynamy od lewego górnego rogu macierzy, gdzie w miejsce $a_{11}=2$ chcemy uzyskać wartość 1. W tym celu wiersz pierwszy pomnożymy przez $\frac{1}{2}$, czyli wykonamy przekształcenie: $\frac{1}{2}w_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

W kolejnym kroku w pierwszej kolumnie pod wartością 1 chcemy uzyskać zera (wówczas pierwsza kolumna przyjmie postać pierwszej kolumny macierzy jednostkowej). Dlatego wykonujemy trzy operacje elementarne na wierszach: w_2-w_1, w_3-w_1 oraz w_4+w_1:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

W podobny sposób uzyskamy kolumnę drugą. Rozpoczynamy od miejsca, w którym chcemy uzyskać wartość 1, czyli od elementu, który znajduje się w drugim wierszu i drugiej kolumnie. Wiersz drugi mnożymy przez odwrotność ułamka $\frac{3}{2}$, czyli wykonujemy przekształcenie $\frac{2}{3}w_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Następnie „zerujemy" pozostałe elementy drugiej kolumny. W tym celu wykonujemy następujące operacje elementarne na wierszach: $w_1 - \frac{1}{2}w_2, w_3 + \frac{3}{2}w_2$ oraz $w_4 - \frac{1}{2}w_2$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Przechodzimy do kolumny trzeciej i z wykorzystaniem operacji elementarnych na wierszach doprowadzamy ją do postaci kolumny z macierzy jednostkowej. Ponieważ w trzecim wierszu i trzeciej kolumnie znajduje się już wartość 1, wystarczy tylko „wyzerować" pozostałe elementy tej kolumny. Zatem wykonujemy następujące działania: $w_1 + \frac{1}{3}w_3$, $w_2 - \frac{2}{3}w_3$ oraz $w_4 - \frac{2}{3}w_3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right].$$

Przechodzimy do kolumny czwartej (ostatniej) i postępujemy w analogiczny sposób jak w przypadku pierwszych trzech kolumn. Na przecięciu czwartego wiersza i czwartej kolumny chcemy uzyskać wartość 1, zatem wiersz czwarty mnożymy przez -3, czyli przekształcamy w następujących sposób: $-3w_4$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right].$$

Ostatnim krokiem do uzyskania macierzy odwrotnej jest „wyzerowanie” pozostałych elementów czwartej kolumny, co uzyskamy, wykonując następujące operacje elementarne na wierszach macierzy: $w_1 - \frac{2}{3}w_4$, $w_2 + \frac{1}{3}w_4$ oraz $w_3 - 2w_4$:

$$\left[\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\mathbf{I}}\right|\left.\underbrace{\begin{array}{rrrr} 3 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & -3 & 6 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \end{array}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right].$$

Zatem macierzą odwrotną do macierzy **A** jest macierz:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & -3 & 6 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

☺

Przeanalizujmy poniższy przykład, w którym zaprezentowano sposób zapisu kolejno wykonywanych obliczeń.

Przykład 4.7

Znajdź macierz odwrotną do macierzy **A**, wykorzystując metodę operacji elementarnych:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Wyznacznik macierzy **A** jest różny od zera ($\det \mathbf{A} = -10$), więc możemy przystąpić do odwracania macierzy:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 - 2w_1 \\ w_3 + w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}w_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} w_1+w_2 \\ \\ w_3-2w_2 \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{5}w_3 \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]\begin{array}{l} w_1-2w_3 \\ w_2-2w_3 \\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{-\frac{3}{5}\quad \frac{1}{5}}_{\mathbf{A}^{-1}} & & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Zatem macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$ jest macierz:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

☺

4.3. Własności macierzy odwrotnych

Twierdzenie

Dane są dwie nieosobliwe macierze kwadratowe $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ stopnia n oraz liczba rzeczywista $k \neq 0$. Wówczas:

1) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$,

2) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}$,

3) $(\mathbf{A}^{-1})^{T}=(\mathbf{A}^{T})^{-1}$,

4) $\det(\mathbf{A}^{-1})=(\det\mathbf{A})^{-1}$,

5) $(k\cdot\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{k}\cdot(\mathbf{A}^{-1})$,

6) $(\mathbf{A}^{n})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{n}$.

Przykład 4.8

Sprawdź, czy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ prawdziwe jest równanie: $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$.

Rozwiązanie:

W celu sprawdzenia prawdziwości równania należy obliczyć jego prawą i lewą stronę oraz sprawdzić, czy są one sobie równe. Zacznijmy od wyliczenia prawej strony równania, czyli $\frac{1}{\det \mathbf{A}}$. Policzymy najpierw wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = -1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) = -3.$$

Zatem prawa strona równania wynosi: $P = \frac{1}{\det \mathbf{A}} = -\frac{1}{3}$.

Chcąc obliczyć lewą stronę równania, należy wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$. Macierz jest stopnia drugiego, więc skorzystamy ze wzoru na macierz odwrotną stopnia drugiego:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Podstawiając odpowiednie wartości do powyższego wzoru, otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Liczymy następnie wyznacznik macierzy $\mathbf{A}^{-1}$, który stanowi lewą stronę równania:

$$L = \det(\mathbf{A}^{-1}) = -1 \cdot \tfrac{1}{3} - 0 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) = -\tfrac{1}{3}.$$

Zatem $L = P$, czyli równanie $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$ dla podanej macierzy jest prawdziwe.

☺

4.4. Zadania

1) Wyznacz macierz odwrotną za pomocą definicji (o ile istnieje):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$.

2) Wyznacz macierz odwrotną, korzystając ze wzoru 4.3 na macierz odwrotną stopnia drugiego (o ile istnieje):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3) Znajdź macierz odwrotną metodą wyznacznikową (o ile istnieje):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Znajdź macierz odwrotną, korzystając z operacji elementarnych (o ile istnieje):

a) $\mathbf{A} = [5]$, b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$,

g) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, h) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

5) Wykonaj działania:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}$, b) $[2 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$.

6) Sprawdź, czy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ prawdziwe jest równanie $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

7) Sprawdź, czy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $k = 2$ prawdziwe jest równanie $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}(\mathbf{A}^{-1})$.

Odpowiedzi:

1)

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{150} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$.

c) macierz odwrotna do $\mathbf{C}$ nie istnieje, ponieważ $\det \mathbf{C} = 0$

2)

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3)

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$,

c) macierz odwrotna do $\mathbf{C}$ nie istnieje, ponieważ $\det \mathbf{C} = 0$,

d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4)

a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, e) macierz odwrotna do $\mathbf{E}$ nie istnieje, ponieważ $\det \mathbf{E} = 0$,

f) $\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

g) macierz odwrotna do $\mathbf{G}$ nie istnieje, ponieważ $\det \mathbf{G} = 0$,

h) $\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

5)

a) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, b) $[2 \quad 3 \quad 4]$.

6)

Tak, ponieważ $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

7)

Tak, ponieważ $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}(\mathbf{A}^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

5. UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

5.1. Definicja i rodzaje układów równań liniowych

Definicja

Równaniem liniowym o n niewiadomych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy równanie postaci:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, (n = 1,2, \dots).$$

Układem $\boldsymbol{m}$ równań liniowych o $\boldsymbol{n}$ niewiadomych $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n}$ nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie: $a_{ij}, b_i \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ oraz $n, m \in \boldsymbol{N}$.

Rozwiązaniem układu m równań liniowych nazywamy n elementowy zbiór wartości niewiadomych

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n,$$

które spełniają ten układ.

Układ równań liniowych (5.1) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Powyższe macierze nazywamy:

A – macierzą główną (podstawową) układu (czyli macierzą współczynników przy niewiadomych),

X – macierzą niewiadomych,

B – macierzą wyrazów wolnych.

Można spotkać również notację **X** – wektor niewiadomych oraz **B** – wektor wyrazów wolnych. Zatem układ m równań liniowych o n niewiadomych (5.1) można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu można zapisać w postaci macierzowej, czyli:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix},$$

lub jako układ liczb spełniających jednocześnie warunki (równania) układu, czyli:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \quad \dots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

Definicja

Macierzą rozszerzoną układu równań liniowych $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ nazywamy macierz **U** powstałą z macierzy **A** przez dopisanie do niej kolumny z macierzy wyrazów wolnych **B**:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}].$$

Zapisanie układu równań w postaci macierzowej pozwala na wykorzystanie działań na macierzach oraz charakterystyk i własności macierzy do szukania rozwiązań układu równań liniowych. Operacje elementarne wykonywane na wierszach macierzy rozszerzonej **U** i na równaniach układu równań są równoważne.

Przykład 5.1

Poniższe układy równań zapisz w postaci macierzowej:

a) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + \frac{5}{2}z - 7 = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2x - \frac{1}{2}y + 6z - 1 = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Dla danego układu trzech równań z trzema niewiadomymi macierz główna przyjmuje postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Układ ma trzy niewiadome, więc macierz niewiadomych ma postać: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

zaś macierz wyrazów wolnych: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Zatem układ ten w postaci macierzowej można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b) Zauważmy, że jest to układ czterech równań z czterema niewiadomymi, choć nie w każdym równaniu występują wszystkie cztery niewiadome. Oznacza to, że niektóre współczynniki w macierzy głównej układu są zerowe. Przykładowo w równaniu pierwszym występują niewiadome x_1, x_2, x_4, co oznacza, że niewiadoma x_3 występuje tu ze współczynnikiem 0. Zatem macierz główna układu wygląda następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Niewiadomych mamy cztery, więc macierz niewiadomych ma postać: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,

zaś macierz wyrazów wolnych: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

W zapisie macierzowym układ ma więc postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) Ostatni przykład przedstawia układ czterech równań z trzema niewiadomymi x, y, z. Przy czym zwróćmy uwagę, że równania zapisano nieco inaczej niż w układzie (5.1). Z definicji wynika, iż niewiadome zapisujemy po lewej stronie równań, a wiadome po prawej. Przepiszmy więc dany tutaj układ zgodnie z definicją, przenosząc wyrazy wolne na prawą stronę równań:

$$\begin{cases} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + \frac{5}{2}z = 7 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2x - \frac{1}{2}y + 6z = 1 \end{cases}$$

Postać macierzowa tego układu jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

☺

Przykład 5.2

Zapisz macierze rozszerzone układów równań z przykładu 5.1.

Odpowiedzi:

a) $\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right]$,

b) $\mathbf{U} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$,

c) $\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & \frac{5}{2} & 7 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 6 & 1 \end{array}\right]$. ☺

Dla każdego układu równań liniowych zachodzi dokładnie jeden z poniższych przypadków:

1) Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie – wówczas nazywamy go **układem oznaczonym** lub **niezależnym**.
2) Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań – wówczas nazywa się go **układem nieoznaczonym** lub zależnym.
3) Układ nie ma rozwiązań – wówczas jest to **układ sprzeczny**.

Dwa układy równań liniowych nazywamy **równoważnymi**, jeżeli każde rozwiązanie pierwszego układu równań jest też rozwiązaniem układu drugiego i odwrotnie, a każde rozwiązanie drugiego układu równań jest też rozwiązaniem układu pierwszego.

Definicja

Układ równań liniowych postaci (5.1) nazywamy **jednorodnym**, jeżeli:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq m} b_i = 0.$$

Układ ten możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

gdzie **A** jest macierzą główną układu wymiaru $m \times n$, natomiast **0** jest macierzą zerową wymiaru $m \times 1$.

Przykładowo poniższy układ równań jest układem równań jednorodnym:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Każdy układ jednorodny z n niewiadomymi, bez względu na liczbę równań, ma przynajmniej jedno rozwiązanie i jest to **rozwiązanie zerowe**, czyli: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$.

Jeżeli rozważany układ ma przynajmniej jeden wyraz wolny różny od zera, to taki układ równań nazywamy **niejednorodnym**.

5.2. Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Niech będzie dany układ równań liniowych postaci (5.1), określony wzorem macierzowym $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, czyli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

którego macierzą rozszerzoną jest macierz:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}].$$

Układ równań liniowych (5.1) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy głównej układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej układu, czyli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U})$.

Przy tym układ równań liniowych (5.1) ma **dokładnie jedno rozwiązanie** (układ oznaczony) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$ (gdzie n – liczba niewiadomych).

Ponadto układ równań liniowych (5.1) ma **nieskończenie wiele rozwiązań** zależnych od $n - r$ parametrów (układ nieoznaczony) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r < n$ (gdzie n – liczba niewiadomych).

Jeżeli rząd macierzy współczynników przy niewiadomych nie jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej układu, czyli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rz}(\mathbf{U})$, to dany układ równań jest **układem sprzecznym**.

Z twierdzenia **Kroneckera-Capellego** wynika też, że dla układu równań liniowych jednorodnych zachodzi: $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U})$.

Przykład 5.3

Określ liczbę rozwiązań układów równań:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Dany układ jest układem trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi, zatem $m = n = 3$. W postaci macierzowej układ można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

zaś macierz rozszerzona tego układu ma postać:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right].$$

Zauważmy, że druga i czwarta kolumna macierzy $\mathbf{U}$ są takie same, zatem $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U})$, gdyż:

$$\underset{k_4 - k_2}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Aby określić liczbę rozwiązań należy więc tylko sprawdzić rząd macierzy $\mathbf{A}$. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że badany układ nie jest sprzeczny, gdyż macierze **A** i **U** są tego samego rzędu. Zostają więc dwie opcje: (1) analizowany układ jest oznaczony, czyli ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = n$, gdzie n jest liczbą niewiadomych lub też (2) jest on nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) < n$. Sprawdzamy zatem rząd macierzy **A**.

Zauważmy, że macierz **A** ma dwie identyczne kolumny: pierwszą i trzecią. Stąd wniosek, że jest to macierz rzędu niższego niż 3, czyli niższego niż n. Zatem z twierdzenia Kroneckera-Capellego wynika, że badany układ jest nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań.

b) W kolejnym przykładzie mamy dany układ czterech równań ($m = 4$) z trzema niewiadomymi ($n = 3$), dla którego zapiszemy od razu macierz rozszerzoną:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right].$$

Sprawdźmy rząd macierzy **U** metodą wyznacznikową (macierz **U** jest kwadratowa). Wykorzystamy rozwinięcie Laplace'a według trzeciej kolumny (pomijając element zerowy):

$$\det \mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Wykorzystując następnie metodę Sarrusa dla wyliczenia wyznaczników stopnia trzeciego[8], otrzymujemy: $\det \mathbf{U} = 0$, a więc rząd macierzy **U** jest mniejszy niż 4.

Weźmy teraz dowolny minor macierzy **U**:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 1 - 4 + 2 = 3.$$

Ponieważ otrzymany wyznacznik jest różny od zera, rząd macierzy **U** wynosi 3.

[8] Szczegółowe wyliczenia metodą Sarrusa pozostawiamy czytelnikowi.

Zapiszmy teraz macierz główną **A** analizowanego układu, która ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Macierz **A** nie jest macierzą kwadratową, więc wyznaczenie jej rzędu sprowadza się do znalezienia największej kwadratowej podmacierzy (minora macierzy), której wyznacznik jest różny od 0. Zwróćmy uwagę, że może to być dokładnie ten sam minor, który wybraliśmy dla macierzy **U**. Jest on różny od zera, więc $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = 3$ i jednocześnie $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$. Na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego wnioskujemy, że badany układ jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie.

☺

Twierdzenie Kroneckera-Capellego jest szczególnie przydatne przy rozważaniu liczby rozwiązań układów równań z parametrem.

Przykład 5.4

Wykorzystując twierdzenie Kroneckera-Capellego, określ liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - px_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - px_3 = 5 \end{cases}$$

w zależności od wartości rzeczywistego parametru p.

Rozwiązanie:

Macierz główna układu ma postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -p & 1 \\ 2 & 1 & -p \end{bmatrix},$$

zaś macierz uzupełniona:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -p & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -p & 5 \end{array}\right].$$

Macierz **U** nie jest kwadratowa, zatem jej rząd może być równy co najwyżej wymiarowi minora jej największej podmacierzy kwadratowej, czyli jest mniejszy bądź równy 3. Z twierdzenia Kroneckera-Capellego wiemy, że jeżeli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$, to układ będzie miał dokładnie jedno rozwiązanie. Czyli w naszym przykładzie jeżeli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = 3$, to układ ma jedno rozwiązanie. Zauważmy, że wystarczy by spełniony był warunek $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = 3$, a wtedy $\mathrm{rz}(\mathbf{U})$ również wyniesie 3, gdyż macierz $\mathbf{A}$ będzie stanowić podmacierz kwadratową stopnia trzeciego o niezerowym wyznaczniku. Aby rząd macierzy $\mathbf{A}$ wynosił 3, jej wyznacznik musi być różny od zera. Sprawdźmy zatem, dla jakich wartości parametru p zajdzie ten warunek, czyli kiedy $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Wykorzystując następnie metodę Sarrusa, wyznaczamy wyznacznik:

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -p & 1 \\ 2 & 1 & -p \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -p \\ 2 & 1 \end{matrix} = p^2 + 4 - 6 - 6p - 1 + 4p = p^2 - 2p - 3.$$

Wyznaczona wartość powinna być różna od zera ($\det \mathbf{A} \neq 0$), czyli $p^2 - 2p - 3 \neq 0$. Jest to równanie kwadratowe, którego wyróżnik $\Delta = 16$, a pierwiastki równania to: $p_1 = -1$ oraz $p_2 = 3$. W związku z tym możemy wnioskować, że dla tych wartości parametru p wyznacznik będzie wynosił 0, a rząd macierzy będzie niższy niż 3, czyli układ będzie nieoznaczony lub sprzeczny (która sytuacja zajdzie przy danych wartościach parametru, sprawdzimy za chwilę). Zaś dla wszystkich pozostałych wartości parametru p, tj. dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 3$, układ będzie oznaczony, czyli będzie miał dokładnie jedno rozwiązanie.

Sprawdźmy teraz sytuację, gdy $p = -1$. Wiemy już, że wtedy $\det \mathbf{A} = 0$, czyli rząd macierzy $\mathbf{A}$ jest mniejszy niż 3. Zaś macierz $\mathbf{U}$ przyjmuje postać:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right].$$

Dla macierzy $\mathbf{U}$ istnieje minor trzeciego stopnia o wartości różnej od zera:

$$\left|\begin{matrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 10 - 9 - 1 + 1 - 6 + 15 = 10,$$

a więc $\mathrm{rz}(\mathbf{U}) = 3 \neq \mathrm{rz}(\mathbf{A})$, czyli układ jest sprzeczny.

Dla $p = 3$ mamy również $\det \mathbf{A} = 0$, czyli $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) < 3$. Natomiast macierz $\mathbf{U}$ ma postać:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right].$$

Minor zbudowany z drugiej, trzeciej i czwartej kolumny jest niezerowy:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -34,$$

a więc i w tym przypadku $\mathrm{rz}(\mathbf{U}) = 3 \neq \mathrm{rz}(\mathbf{A})$, czyli również dla $p = 3$ układ jest sprzeczny.

Z powyższych rozważań wynika, że:

- układ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $p \neq -1$ i $p \neq 3$,
- układ nie ma rozwiązań dla $p = -1$ lub $p = 3$.

☺

5.3. Metody rozwiązywania układów równań

Poniżej przedstawione zostaną trzy metody rozwiązywania układów równań liniowych. Przy omawianiu wszystkich metod, pisząc o układzie równań liniowych, mamy na myśli układ postaci (5.1). Metodę rozwiązywania układu równań uzależniamy od liczby równań m oraz liczby niewiadomych n w taki sposób, że:

a) Jeżeli $m = n$, czyli mamy układ o takiej samej liczbie równań co niewiadomych i macierz główna układu $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową, to możemy szukać rozwiązania układu dowolną z poniższych metod,

b) jeżeli $m \neq n$, mamy układ równań, którego macierz główna nie jest macierzą kwadratową, więc szukamy rozwiązań takiego układu metodą eliminacji Gaussa lub Gaussa-Jordana.

5.3.1. Metoda wzorów Cramera

Definicja

Układ równań liniowych postaci (5.1) nazywamy **układem Cramera**, jeżeli ma n równań i n niewiadomych oraz wyznacznik macierzy głównej układu $\mathbf{A}$ jest różny od zera ($\det \mathbf{A} \neq 0$).

Przykład 5.5

Sprawdź, czy poniższe układy są układami równań liniowych Cramera:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \ -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -9x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \ -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + -x_3 = \ 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Liczba równań w podanym układzie jest równa liczbie niewiadomych ($n = 2$). Sprawdzamy więc drugi warunek, czyli określmy, czy wyznacznik macierzy głównej układu równań jest różny od zera:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Wyznacznik jest różny od zera, zatem układ jest układem Cramera.

b) Liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($n = 3$), więc wyznaczamy wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \ -9.$$

Wyznacznik jest różny od zera, zatem ten układ jest również układem Cramera.

c) Ponieważ liczba równań w analizowanym układzie jest różna od liczby niewiadomych, więc nie jest on układem Cramera.

d) Liczba równań jest równa liczbie niewiadomych ($n = 3$), więc wyznaczamy wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik jest równy zero, zatem analizowany układ nie spełnia drugiego warunku definicji, czyli nie jest układem Cramera.

☺

Przykład 5.6

Sprawdź, dla jakich wartości parametru p poniższy układ równań jest układem Cramera: $\begin{cases} px_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + px_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Macierz główna układu jest kwadratowa, zatem należy sprawdzić, kiedy jej wyznacznik jest różny od 0, ponieważ tylko wtedy układ będzie spełniał warunki przypisane dla układu Cramera. Stosując metodę Sarrusa, wyznaczamy wyznacznik macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & p & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} p & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & p \end{matrix} = 2p + 1 - p - 2 + p^2 - 1 = p^2 + p - 2.$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymane równanie kwadratowe ma dwa miejsca zerowe dla $p = -2$ oraz dla $p = 1$, czyli dla pozostałych liczb rzeczywistych wartość wyznacznika będzie różna od zera. Zatem analizowany układ jest układem Cramera wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq -2$ i $p \neq 1$.

☺

Twierdzenie Cramera

Jeżeli układ równań liniowych (5.1) określony wzorem macierzowym $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ jest układem Cramera, to ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$x_1 = \frac{\det \mathrm{A}_1}{\det \mathrm{A}}, x_2 = \frac{\det \mathrm{A}_2}{\det \mathrm{A}}, \dots, x_n = \frac{\det \mathrm{A}_n}{\det \mathrm{A}}, \tag{5.2}$$

gdzie $\det \mathbf{A}_j$ jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy **A** w wyniku zastąpienia j-tej kolumny (kolumny współczynników przy x_j) kolumną wyrazów wolnych z macierzy **B**.

Wzory powyższe nazywamy **wzorami Cramera** i za ich pomocą możemy też określić typ układu równań. I tak układ n równań z n niewiadomymi jest:

1) oznaczony, jeżeli $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2) nieoznaczony, jeżeli $\det \mathbf{A} = 0$ i jednocześnie dla każdego j $(1 \leq j \leq n)$ zachodzi: $\det \mathbf{A}_j = 0$,
3) sprzeczny, jeżeli $\det \mathbf{A} = 0$ i istnieje przynajmniej jedno j $(1 \leq j \leq n)$, dla którego: $\det \mathbf{A}_j \neq 0$.

Przykład 5.7

Stosując wzory Cramera, rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Pierwszym etapem rozwiązywania układu równań z wykorzystaniem wzorów Cramera jest sprawdzenie, czy jest to układ Cramera. W analizowanym przykładzie mamy do czynienia z układem trzech równań z trzema niewiadomymi, zatem sprawdzamy wyznacznik macierzy głównej układu:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Wyznacznik jest różny od zera, czyli badany układ jest układem Cramera. Obliczamy więc wyznaczniki wszystkich macierzy $\mathbf{A}_j$ dla $j \in \{1,2,3\}$, w których odpowiednio w kolumnie j wstawiamy wyrazy wolne układu.

Macierz wyrazów wolnych ma postać:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A}_1$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ poprzez wstawienie w miejscu kolumny pierwszej macierzy $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla tak utworzonej macierzy obliczamy wyznacznik:

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Analogicznie tworzymy macierze $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$ oraz obliczamy wyznaczniki tych macierzy:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Następnie ze wzorów Cramera wyliczamy rozwiązanie układu równań:

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Rozwiązaniem układu jest więc macierz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) W danym układzie równań mamy macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy wyznacznik macierzy współczynników układu równań:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Otrzymaliśmy $\det \mathbf{A} = 0$, a zatem nie możemy zastosować wzorów Cramera, bo układ albo jest nieoznaczony, albo sprzeczny. Aby to sprawdzić, musimy obliczyć wyznaczniki (przynajmniej jeden) dla macierzy $\mathbf{A}_j$. Sprawdźmy pierwszy wyznacznik:

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 9 + (-5) - 10 - (-18) - 0 = 12 \neq 0.$$

Ponieważ już pierwszy wyznacznik macierzy $\mathbf{A}_1$ okazał się różny od zera, układ jest sprzeczny.

☺

Przykład 5.8

Sprawdź, dla jakich wartości parametru p poniższy układ równań jest układem Cramera:

$$\begin{cases} px_1 + x_2 - x_3 = p \\ x_1 - x_2 + x_3 = -p \\ px_1 + px_2 = 1 \end{cases}$$

Rozwiąż go, korzystając ze wzorów Cramera.

Rozwiązanie:

W pierwszej kolejności sprawdzamy warunki, które powinien spełnić układ równań Cramera. Macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową. Obliczamy zatem jej wyznacznik[9]:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ p & p & 0 \end{vmatrix} = -p^2 - p = -p(p+1).$$

Wyznacznik ten będzie różny od zera dla $p \neq 0$ i $p \neq -1$. Jeżeli ten warunek zostanie spełniony, możemy wyliczyć wyznaczniki macierzy $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$, wstawiając w odpowiednie kolumny wyrazy wolne układu, tj. $[p \quad -p \quad 1]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} p & 1 & -1 \\ -p & -1 & 1 \\ 1 & p & 0 \end{bmatrix}, \det\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} p & 1 & -1 \\ -p & -1 & 1 \\ 1 & p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} p & p & -1 \\ 1 & -p & 1 \\ p & 1 & 0 \end{bmatrix}, \det\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} p & p & -1 \\ 1 & -p & 1 \\ p & 1 & 0 \end{vmatrix} = -p - 1,$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} p & 1 & p \\ 1 & -1 & -p \\ p & p & 1 \end{bmatrix}, \det\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} p & 1 & p \\ 1 & -1 & -p \\ p & p & 1 \end{vmatrix} = p^3 + p^2 - p - 1 =$$

$$= (p-1)(p+1)^2.$$

Stosując wzory Cramera, otrzymujemy więc rozwiązanie (przy założeniu, że $p \neq 0$ i $p \neq -1$):

$$x_1 = \frac{\det\mathbf{A}_1}{\det\mathbf{A}} = \frac{0}{-p(p+1)} = 0,$$

[9] Szczegółowe rozpisanie obliczeń wyznaczników pozostawiamy czytelnikowi.

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-p-1}{-p(p+1)} = \frac{-(p+1)}{-p(p+1)} = \frac{1}{p},$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{(p-1)(p+1)^2}{-p(p+1)} = \frac{(p-1)(p+1)}{-p} = -\frac{(p-1)(p+1)}{p} \; lub = -\frac{p^2-1}{p}.$$

Zatem rozwiązaniem układu, przy założeniu, że $p \neq 0$ i $p \neq -1$, jest:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{1}{p} \\ x_3 = -\dfrac{p^2-1}{p} \end{cases}$$

☺

5.3.2. Metoda macierzy odwrotnej

Jeżeli układ równań postaci (5.1) jest układem Cramera, to jego rozwiązanie możemy znaleźć, mnożąc lewostronnie obie strony równania przez $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \tag{5.3}$$

A zatem, by znaleźć rozwiązanie układu równań, należy wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy głównej układu równań i wymnożyć ją przez macierz wyrazów wolnych.

Przykład 5.9

Rozwiąż poniższy układ równań z wykorzystaniem macierzy odwrotnej do macierzy współczynników układu:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Aby zastosować metodę macierzy odwrotnej, układ musi spełniać warunki układu Cramera, czyli macierz $\mathbf{A}$ musi być macierzą kwadratową, a jej wyznacznik nie może być równy 0. W analizowanym przykładzie mamy następujące macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz **A** jest macierzą kwadratową, więc przystępujemy do wyliczenia wyznacznika:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Układ spełnia warunki układu Cramera, więc rozwiązania możemy poszukiwać ze wzoru 5.3:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

Rozpoczynamy więc od wyznaczenia macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ (ze wzoru 4.3):

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Rozpoczynamy rozwiązanie od zapisania układu w postaci macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Następnie sprawdzamy, jaka jest wartość wyznacznika głównego układu (możemy go wyznaczyć, bo macierz **A** jest macierzą kwadratową):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Wyznacznik jest różny od zera, czyli możemy wykorzystać metodę macierzy odwrotnej do znalezienia rozwiązania podanego układu równań. Z zastosowaniem dowolnej metody odwracania macierzy (tę część obliczeń pozostawiamy czytelnikowi) otrzymujemy macierz $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

☺

5.3.3. Metoda Gaussa oraz Gaussa-Jordana

Układ równań można też rozwiązać z wykorzystaniem operacji elementarnych (znanych czytelnikowi z poprzednich rozdziałów) na macierzy rozszerzonej **U**, doprowadzając ją do postaci, z której łatwo wyznaczyć bądź odczytać rozwiązanie.

Przypomnijmy, że macierzą rozszerzoną układu równań liniowych $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ nazywamy macierz **U** powstałą z macierzy **A** przez dopisanie do niej macierzy wyrazów wolnych **B**:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{B}].$$

W celu rozwiązania układu równań liniowych lub stwierdzenia, że jest on układem sprzecznym, należy za pomocą operacji elementarnych sprowadzić macierz rozszerzoną układu do jej postaci kanonicznej (bazowej)[10].

Na układzie równań liniowych można wykonać następujące operacje elementarne:

- pomnożyć obie strony dowolnego równania przez dowolną liczbę różną od zera,
- przestawić miejscami dwa dowolne równania tego układu,
- dodać stronami do dowolnego równania układu inne równanie tego układu pomnożone stronami przez liczbę różną od zera.

A zatem na macierzy **U** można wykonać następujące operacje elementarne:

- pomnożyć wiersz przez dowolną liczbę różną od zera,
- przestawić miejscami dwa dowolne wiersze macierzy,
- dodać do dowolnego wiersza kombinację liniową innych wierszy, czyli dodać lub odjąć inny wiersz pomnożony przez liczbę różną od zera.

Uwaga: rozwiązując układ równań liniowych na macierzy **U,** nie wykonujemy operacji elementarnych na kolumnach[11].

Metodę rozwiązywania układu równań nazywamy **metodą Gaussa**, jeśli doprowadzamy macierz **A** do postaci trójkątnej górnej, lub **metodą Gaussa-Jordana**, jeśli doprowadzamy macierz **A** do postaci diagonalnej, przy czym operacje wykonujemy

[10] Postać kanoniczna macierzy przedstawiona została w podrozdziale 5.2, dotyczącym rzędu macierzy.

[11] W pewnych przypadkach dopuszcza się zamianę kolumn miejscami, jednak taka operacja wiążę się z koniecznością odtworzenia w rozwiązaniu pierwotnej kolejności zmiennych, co może prowadzić do błędnych wyników, zatem na początkowym etapie zapoznawania się z rachunkiem macierzowym autorzy podręcznika zalecają bezpieczniejsze operacje, oparte tylko na wierszach macierzy **A**.

na macierzy rozszerzonej **U**. Metody te są szczególnie użyteczne przy układach z dużą liczbą niewiadomych i równań. Wówczas metoda wyznacznikowa czy macierzy odwrotnej są dość żmudne obliczeniowo. W przypadku układu, gdzie $m \neq n$ (czyli o różnej liczbie niewiadomych i równań) metody wzorów Cramera czy macierzy odwrotnej nie da się zastosować, gdyż nie są to układy Cramera (macierz **A** nie jest kwadratowa). Przykład takiego układu rozważymy w rozdziale 5.4.

Stosując metodę **eliminacji Gaussa**, za pomocą operacji elementarnych redukujemy macierz **U** do tzw. „postaci schodkowej" (trójkątnej), równoważnej macierzy wyjściowej **U**. Z otrzymanej postaci łatwo odczytać, czy i jakie są rozwiązania danego układu. Algorytm postępowania jest podobny do tego, który stosujemy przy odwracaniu macierzy. Sposób postępowania rozważymy na poniższym przykładzie.

Przykład 5.10

Rozwiąż poniższy układ metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od zapisu macierzy **U**:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Naszym celem jest uzyskanie zer pod przekątną, co należy osiągnąć, dokonując jedynie operacji na wierszach:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] w_2 + w_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right]_{w_3 + 2w_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right]_{w_3 - \frac{5}{2}w_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -\frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Ponieważ otrzymaliśmy „postać schodkową" macierzy, czyli macierz trójkątną górną, możemy ponownie przejść do postaci układu równań, który jest równoważny układowi początkowemu:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ \qquad\quad -5x_3 = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Wyznaczania rozwiązania dokonujemy w sposób iteracyjny, zaczynając od ostatniego równania. Wynika z niego, że $x_3 = \frac{9}{10}$. Możemy więc podstawić tę wartość do równania drugiego i wyznaczyć z niego x_2:

$$2x_2 + 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) = 3,$$

$$x_2 = -\frac{3}{10}.$$

Ostatecznie z pierwszego równania wyznaczamy x_1, mając już wyliczone pozostałe niewiadome:

$$-x_1 - \frac{3}{10} + 3 \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{2}{5}.$$

A więc rozwiązaniem układu są liczby:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_2 = -\frac{3}{10} \\ x_3 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

☺

Metoda Gaussa-Jordana jest bardziej czasochłonna, gdyż celem wykonywanych w niej operacji jest doprowadzenie macierzy **U** do postaci kanonicznej (bazowej) – a zatem takiej, w której w miejscu macierzy **A** będzie macierz jednostkowa, pod którą ewentualnie może wystąpić podmacierz zerowa. Jednak rozszerzenie operacji wykonywanych na macierzy **A** na macierz **U** pozwala wyznaczyć także rozwiązanie układu.

Sposób postępowania w algorytmie **Gaussa-Jordana** zaprezentowany został na poniższych przykładach.

Przykład 5.11

Rozwiąż układ równań metodą Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 22 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Rozpoczynamy od zapisania macierzy rozszerzoną układu:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 2 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right].$$

Tę macierz przekształcamy do postaci bazowej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 22 \\ 2 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right] w_2 - 2w_1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 1 & 18 \end{array}\right] w_3 - 3w_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] w_3 + 3w_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1) \cdot w_2 \\ \frac{1}{10} w_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] w_2 + 4w_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] w_1 - w_2 - w_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Przechodząc z zapisu macierzy rozszerzonej na układ równań, uzyskujemy rozwiązanie, które tworzy ostatnia kolumna:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

☺

Przykład 5.12

Rozwiąż układ równań metodą Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Macierz rozszerzona powyższego układu ma postać:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Zaczynamy od uzyskania jedynki dla elementu a_{11}, którą następnie wykorzystujemy do uzyskania zer dla pozostałych elementów pierwszej kolumny:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \frac{1}{2} w_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] w_2 - w_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ w_3 - 2w_2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right].$$

Po przekształceniu pierwszej kolumny przechodzimy do drugiego, a następnie trzeciego wiersza:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2} w_2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ w_3 + 3w_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\frac{4}{3} w_3 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right].$$

Otrzymaliśmy macierz trójkątną. W kolejnym kroku przekształcamy ją w macierz jednostkową:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ w_2 - \frac{3}{4} w_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} w_1 - \frac{1}{2} w_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \begin{matrix} w_1 - 3w_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right].$$

Po otrzymaniu postaci kanonicznej macierzy, możemy podać rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

☺

Metoda Gaussa-Jordana wymaga zazwyczaj więcej operacji niż metoda eliminacji Gaussa, a algorytm dość często sprowadza się do działań na ułamkach, jednak jej niewątpliwą zaletą jest możliwość szybkiego odczytania rozwiązania z otrzymanej ostatecznie macierzy oraz możliwość jej zastosowania w układach równań o różnej liczbie niewiadomych i równań.

5.4. Rozwiązania bazowe i ogólne układu

Metodą Gaussa-Jordana sprowadzamy macierz główną układu równań $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ do postaci bazowej (kanonicznej), otrzymując macierz równoważną, nazwijmy ją macierzą $\mathbf{A}_\mathrm{B}$, oraz nową macierz (wektor) wyrazów wolnych, nazwijmy ją $\mathbf{B}'$. Układ równań $\mathbf{A}_\mathrm{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}'$ jest równoważny do wyjściowego układu równań, a jego macierz rozszerzona ma postać:

$$\mathbf{U}' = [\mathbf{A}_\mathrm{B} \mid \mathbf{B}'].$$

Jeżeli rząd macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ jest równy liczbie niewiadomych, a ta jest równa liczbie równań, to układ równań jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie, które łatwo odczytujemy z macierzy $\mathbf{B}'$. Jeżeli w macierzy $\mathbf{U}'$ jest przynajmniej jeden lub więcej wierszy zerowych, to układ równań jest nieoznaczony, czyli ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeżeli natomiast w macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ przynajmniej jeden wiersz jest zerowy, a odpowiadający mu element wiersza w macierzy $\mathbf{B}'$ jest różny od zera, to układ równań jest sprzeczny i nie ma rozwiązań. W przypadku układu równań nieoznaczonego, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, możemy wyróżnić rozwiązanie ogólne oraz szczególne (bazowe) układu.

Definicja

Zmiennymi bazowymi nazywamy te niewiadome x_i, dla których element a_{ii} macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ ma wartość 1. **Zmiennymi niebazowymi**, inaczej swobodnymi, nazywamy te zmienne x_k, dla których element a_{kk} w macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ ma wartość 0.

Rozwiązaniem bazowym układu równań nazywamy takie rozwiązanie, w którym wszystkie zmienne niebazowe (swobodne) są równe zeru.

Rozwiązaniem ogólnym lub **postacią ogólną rozwiązania** układu równań nazywamy takie rozwiązanie, w którym wartość zmiennych bazowych uzależniona jest formułą matematyczną od wartości zmiennych niebazowych (swobodnych).

Zmienne niebazowe przyjmują w rozwiązaniu ogólnym postać parametru o dowolnej wartości rzeczywistej. Sposób identyfikacji typu układu równań, zmiennych bazowych i swobodnych oraz wyznaczania rozwiązań bazowych i ogólnych układu rozważymy na kilku poniższych przykładach.

Przykład 5.13

Rozwiąż metodą Gaussa-Jordana poniższe układy równań:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Zapiszmy macierz rozszerzoną danego układu równań:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Następnie z wykorzystaniem operacji elementarnych doprowadzamy podaną macierz do postaci kanonicznej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\frac{1}{3}w_1\\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ w_2-w_1\\ w_3-w_1\end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & -3 & -\frac{4}{3} & 3\\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & 2\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{3}w_2\\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -1\\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & 2\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ w_3-2w_2\end{array}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -1\\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 4\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{9}{2}w_3\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & \frac{4}{9} & -1\\ 0 & 0 & 1 & -18\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ w_2-\frac{4}{9}w_3\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \frac{1}{3} & -1\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -18\end{array}\right]\begin{array}{l}w_1-\frac{1}{3}w_3\\ \\ \\ \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -18\end{array}\right]\begin{array}{l}w_1-w_2\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -18\end{array}\right].$$

Doprowadziliśmy macierz **A** do postaci bazowej. Rząd macierzy wynosi 3, więc układ jest oznaczony i ma dokładnie jedno rozwiązanie, które można odczytać z ostatniej kolumny macierzy $\mathbf{U}'$ lub inaczej z nowej macierzy wyrazów wolnych $\mathbf{B}'$, równoważnej do wyjściowego układu równań:

$$\begin{cases}x_1 = -2\\ x_2 = 7\\ x_3 = -18\end{cases}$$

Jest to jedyne rozwiązanie tego układu równań.

b) Zapiszmy najpierw macierz rozszerzoną układu równań:

$$\mathbf{U}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right].$$

Następnie przeprowadzamy operacje elementarne, dążąc do otrzymania postaci kanonicznej macierzy:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ w_2-w_1\\ w_3-w_1\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 0 & 5 & 2 & -1\\ 0 & 10 & 4 & -2\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}w_2\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 10 & 4 & -2\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3-10w_2\end{array} \sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Właściwie już w tej chwili widać, że układ równań jest nieoznaczony – ostatni wiersz jest zerowy, a więc rząd macierzy $\mathbf{U'}$ będzie mniejszy niż 3. Możemy jeszcze wyzerować wartość powyżej elementu a_{22}:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -7 & -3 & 3\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l} w_1+7w_2\\ \\ \\ \end{array} \sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

Zapisujemy więc powyższą macierz w postaci następującego, równoważnego wyjściowemu, układu równań:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = \frac{8}{5}\\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 = -\frac{1}{5}\\ 0 = 0\end{cases}$$

Trzecie równanie jest zawsze prawdziwe dla każdej rzeczywistej wartości x_1, x_2, x_3, więc możemy je pominąć.

Dla zmiennej x_3 element a_{33} w macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ ma wartość 0, jest to zatem zmienna swobodna lub inaczej niebazowa. Pozostałe dwie zmienne, czyli x_1 i x_2, to zmienne bazowe, gdyż a_{11} i a_{22} w macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ mają wartość 1. Kolumny współczynników przy zmiennych x_1 i x_2 tworzą macierz jednostkową – wartości współczynników odpowiadających tym zmiennym są jedynkami w macierzy bazowej. Ich wartość zależy od wartości x_3. Możemy więc w tym momencie potraktować zmienną x_3 jako parametr rzeczywisty i przenieść na prawą stronę równań:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}x_3\\ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_3\\ x_3 \in \boldsymbol{R}\end{cases}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób postać ogólną rozwiązania. Można też wartości x_3 przypisać parametr $t \in \boldsymbol{R}$ i zapisać to rozwiązanie następująco:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}t\\ x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}t\\ x_3 = t,\ t \in \boldsymbol{R}\end{cases}$$

Zapisy te są równoważne i określają rozwiązanie ogólne. Gdybyśmy chcieli zapisać szczególne rozwiązania, to przypisujemy parametrowi t określoną wartość. Na przykład możemy przyjąć, że $t = 2$ i wówczas rozwiązaniem szczególnym układu będzie:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Przyjmując zaś $t = 0$, otrzymujemy szczegółowe rozwiązanie bazowe układu równań, które w tym przypadku przyjmie postać:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{5} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Jest to pierwsze rozwiązanie bazowe. Pozostałe rozwiązania bazowe tworzymy, przekształcając macierz rozszerzoną w taki sposób, żeby uzyskać jedynki przy innym zestawie zmiennych (czyli znajdując inny zestaw zmiennych bazowych). Pierwsze z takich rozwiązań powstanie, gdy macierz rozszerzoną, uzyskaną w poprzednim kroku, przekształcimy w taki sposób, aby jedynki znajdowały się przy elementach a_{11} (gdzie już mamy jedynkę) oraz a_{23}:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \frac{5}{2}w_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] w_1 \frac{1}{5} w_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zapisujemy więc powyższą macierz w postaci następującego, równoważnego wyjściowemu, układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Możemy więc potraktować zmienną x_2 jako parametr rzeczywisty i przenieść na prawą stronę równań (zmienne x_1 i x_3 są zmiennymi bazowymi):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \in R \end{cases}$$

Można też wartości x_2 przypisać parametr $t \in \boldsymbol{R}$ i zapisać to rozwiązanie następująco:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ x_2 = t, \ t \in \boldsymbol{R} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}t \end{cases}$$

Jeżeli przyjmiemy $t = -1$, wówczas rozwiązaniem szczególnym układu będzie:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Można zauważyć, że jest to identyczny wynik jak ten otrzymany w pierwszym rozwiązaniu szczególnym otrzymanym z pierwszej postaci ogólnej po wstawieniu $t = 2$.

W tym przypadku rozwiązanie bazowe tworzymy poprzez podstawienie $t = 0$ do rozwiązania ogólnego:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Jest to drugie rozwiązanie bazowe. Kolejne z rozwiązań bazowych powstanie, gdy macierz rozszerzoną przekształcimy w taki sposób, aby jedynki znajdowały się przy elementach a_{22} (gdzie już mamy jedynkę) oraz a_{23}:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 5w_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ w_2 + \frac{2}{5}w_1 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zapisujemy więc powyższą macierz w postaci następującego, równoważnego wyjściowemu, układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 \quad - x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Możemy więc w tym momencie potraktować zmienną x_1 jako parametr rzeczywisty i przenieść na prawą stronę równań (zmienne x_2 i x_3 są zmiennymi bazowymi):

$$\begin{cases} x_3 = -8 + 5x_1 \\ x_2 = 3 - 2x_1 \\ x_1 \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Można też wartości x_1 przypisać parametr $t \in \boldsymbol{R}$ i zapisać to rozwiązanie następująco:

$$\begin{cases} x_1 = t, \ t \in \boldsymbol{R} \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -8 + 5t \end{cases}$$

Jeżeli przyjmiemy $t = 2$, wówczas rozwiązaniem szczególnym układu będzie:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

które pokrywa się z poprzednio uzyskanym.

Trzecie rozwiązanie bazowe tworzymy poprzez podstawienie $t = 0$ do rozwiązania ogólnego:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -8 \end{cases}$$

c) Macierz rozszerzona układu równań ma postać:

$$\mathbf{U} = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -8 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Stosujemy następujące operacje elementarne, dążąc do postaci bazowej macierzy głównej układu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -8 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -w_1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & -10 & -4 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{10} w_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{10} \\ 0 & -5 & -2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ w_3 + 5w_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Na tym etapie kończymy przekształcanie macierzy, ponieważ w ostatnim wierszu mamy zera po lewej stronie „kreski" oddzielającej macierz układu od wektora wyrazów wolnych. Jest to macierz **U'** równoważna do macierzy **U**, reprezentująca układ równoważny do wyjściowego:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 = -\frac{7}{10} \\ 0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Jak widać, ostatnie równanie jest sprzeczne. Metoda Gaussa-Jordana pozwoliła określić typ układu – jest to układ równań sprzeczny, który nie ma rozwiązań.

☺

Metodę eliminacji Gaussa oraz Gaussa-Jordana stosujemy również dla układów, które mają różną liczbę równań i niewiadomych, czyli gdy $n \neq m$. Rozwiązanie takich układów równań zazwyczaj opiera się na znalezieniu postaci ogólnej oraz rozwiązań bazowych, ponieważ w takim przypadku nie mamy do czynienia z układem oznaczonym. Rozważmy poniższy przykład.

Przykład 5.14

Rozwiąż układ równań liniowych metodą operacji elementarnych:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Rozwiązywanie rozpoczynamy od zapisu w postaci macierzy rozszerzonej, którą przekształcamy za pomocą operacji elementarnych do postaci bazowej:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ w_2 - 7w_1 \\ w_3 - 2w_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 24 & -33 & 12 & 3 \\ 0 & 8 & -11 & 4 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{24}w_2 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 8 & -11 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 + 3w_2 \\ \\ w_3 - 8w_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{11}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zmienne bazowe są to zmienne, których współczynniki tworzą macierz jednostkową, czyli te, których współczynnik a_{ij} w macierzy $\mathbf{A}_\mathrm{B}$ wynosi 1. W analizowanym przykładzie są to elementy a_{11} i a_{22}, które odpowiadają zmiennym x_1 i x_2. Wówczas postać bazowa układu równań względem zmiennych x_1 i x_2 jest następująca:

$$\begin{cases} x_1 \quad -\frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{11}{8} \\ \quad x_2 - \frac{11}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Zmienne x_3 i x_4 to zmienne swobodne, które mogą przyjąć dowolną wartość rzeczywistą. Przypiszemy im odpowiednio parametry t_1 i t_2. Rozwiązanie ogólne układu przyjmuje wówczas postać:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{2}t_2 + \frac{11}{8} \\ x_2 = \frac{11}{8}t_1 - \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{8} \\ x_3 = t_1, \\ x_4 = t_2, \qquad t_1, t_2 \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

Rozwiązania szczególne bazowe otrzymujemy, przyjmując za wartości parametrów t_1 i t_2 zera. Otrzymujemy wówczas jedno z bazowych rozwiązań:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{8} \\ x_2 = \frac{1}{8} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

☺

Uogólniając, jeżeli zmienne niebazowe traktujemy jako parametry, to możemy otrzymać rozwiązanie ogólne układu równań. Ponieważ każdy układ r niewiadomych spośród n może być układem zmiennych bazowych, więc istnieje co najwyżej $\binom{n}{r}$ postaci ogólnych układu równań[12]

[12] Mowa tu o symbolu Newtona (kombinatoryka), który obliczamy według wzoru: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1r+1}t_1 - a'_{1r+2}t_2 - \cdots - a'_{1n}t_{n-r} \\ x_2 = b'_2 - a'_{2r+1}t_1 - a'_{2r+2}t_2 - \cdots - a'_{2n}t_{n-r} \\ \qquad\vdots \\ x_r = b'_r - a'_{rr+1}t_1 - a'_{rr+2}t_2 - \cdots - a'_{rn}t_{n-r} \\ \qquad x_{r+1} = t_1 \\ \qquad x_{r+2} = t_2 \\ \qquad\vdots \\ \qquad x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

przy czym $t_1, t_2, \dots, t_{n-r} \in \boldsymbol{R}$.

Jeśli $n = r$, to wszystkie zmienne są zmiennymi bazowymi. Postać kanoniczna macierzy **U** jest następująca:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r \text{ wierszy,} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} (m-r) \text{ wierszy,} \end{array}$$

a układ równań posiada dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony):

$$x_1 = b'_1,\ x_2 = b'_2,\ \dots,\ x_r = b'_r.$$

5.5. Zadania

1) Zapisz układy równań w postaci macierzowej $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ oraz ich macierz rozszerzoną **U**:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} -2x_1 + x_3 = -5 \\ \sqrt{2}x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

2) Rozwiąż układy równań za pomocą macierzy odwrotnej:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 = -4 \\ x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 = 4 \\ -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$

3) Rozwiąż układy równań za pomocą wzorów Cramera:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

4) Podaj (bez rozwiązywania), ile rozwiązań mają poniższe układy (wskazówka: sprawdź wartości wyznaczników macierzy $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A}_j$):

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ -10x_1 - 5x_2 = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ -10x_1 - 5x_2 = -30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6 \\ -10x_1 - 4x_2 = -3 \end{cases}$

5) Korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capellego, określ liczbę rozwiązań poniższych układów równań:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -x + 4y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -8x + 12y = -24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 2z + s = 0 \\ x + y + 2z + s = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - y = 2 \\ 3x + y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases}$

6) Rozwiąż układy równań, wykorzystując metodę Gaussa lub Gaussa-Jordana:

a) $\begin{cases} -5x_1 + 15x_2 + 5x_3 - 10x_4 = 25 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + 2y = -2 \\ -6x - 8y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x + 2y = -2 \\ -6x - 10y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - z + s = -2 \\ x + 2y + 2s = 0 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 6y + 6z = 6 \end{cases}$

7) Określ liczbę rozwiązań w zależności od parametru p:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 2 \\ px_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ px_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + px_2 = 3 \end{cases}$

8) Sprawdź, dla jakich wartości parametru p poniższe układy są układami Cramera. Rozwiąż je z wykorzystaniem wzorów Cramera.

a) $\begin{cases} x + 3y - z = p \\ 2x + y - pz = 3 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y - pz = 1 \\ x + py + 2z = -2 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ px + y - z = 1 \\ -x + py = 3 \end{cases}$

Odpowiedzi:

1)

a) postać macierzowa: $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$,

postać rozszerzona: $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 9 \\ -3 & 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}$,

b) postać macierzowa: $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$,

postać rozszerzona: $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ \sqrt{2} & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

2)

a) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$,

b) $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 1, \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$

c) brak rozwiązania,

d) $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -14 \\ x_4 = -9 \end{cases}$

3)

a) $\begin{cases} x_1 = \frac{26}{9} \\ x_2 = \frac{2}{9} \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 = -72 \\ x_2 = 48 \\ x_3 = -80 \end{cases}$,

c) układ sprzeczny, brak rozwiązań, d) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

4)

a) brak rozwiązań, układ sprzeczny, bo $\det \mathbf{A} = 0$, zaś $\det \mathbf{A}_1 \neq 0$,

b) nieskończenie wiele rozwiązań, układ nieoznaczony, bo $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 = \det \mathbf{A}_2 = 0$,

c) jedno rozwiązanie, układ oznaczony, bo $\det \mathbf{A} \neq 0$.

5)

a) jedno rozwiązanie,

b) nieskończenie wiele rozwiązań,

c) nieskończenie wiele rozwiązań,

d) brak rozwiązań.

6)

a) $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}t_1 - 5t_2 \\ x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t_1 - t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$,

c) układ sprzeczny, brak rozwiązań,

d) $\begin{cases} x = \frac{6}{5} + \frac{2}{5}t \\ y = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}t \\ z = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}t \\ s = t \end{cases}$, e) $\begin{cases} x = 2 - 2t_1 - 2t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$

7)

a) $p \neq 2$ jedno rozwiązanie, $p = 2$ nieskończenie wiele rozwiązań,

b) $p \neq -1$ i $p \neq 0$ jedno rozwiązanie, $p = -1$ lub $p = 0$ brak rozwiązań.

8)

a) $p = 2$ układ równań sprzeczny, $p \neq 2$ układ Cramera, jedno rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2p^2 + 4p - 4}{p - 2} \\ y = p - 1 \\ z = \dfrac{-3p + 2}{p - 2} \end{cases}$$

b) $p = 0$ lub $p = -\frac{1}{3}$ układ równań sprzeczny, $p \neq -\frac{1}{3}$ i $p \neq 0$ układ Cramera, jedno rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2p + 2}{3p^2 + p} \\ y = \dfrac{-6p + 6}{3p^2 + p} \\ z = \dfrac{-1}{p} \end{cases}$$

c) $p = -1$ lub lub $p = 0$ układ równań sprzeczny, $p \neq -1$ i $p \neq 0$ układ Cramera, jedno rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{p + 1} \\ y = \dfrac{3p + 6}{p^2 + p} \\ z = \dfrac{2p^2 + 2p + 6}{p^2 + p} \end{cases}$$

6. POWTÓRZENIOWE PYTANIA TESTOWE

1) Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -8 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ma wymiar
   a) 2×2.
   b) 2×3.
   c) 3×2.
   d) 3×3.
2) Macierz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nazywamy
   a) macierzą diagonalną.
   b) macierzą zerową.
   c) macierzą jednostkową.
   d) macierzą transponowaną.
3) Macierz, której wszystkie elementy są równe 0, nazywamy
   a) macierzą diagonalną.
   b) macierzą zerową.
   c) macierzą jednostkową.
   d) macierzą transponowaną.
4) Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nazywamy
   a) macierzą diagonalną.
   b) macierzą zerową.
   c) macierzą jednostkową.
   d) macierzą transponowaną.
5) Macierz, której elementy znajdujące się na głównej przekątnej są równe 1, zaś pozostałe są równe 0, nazywamy
   a) macierzą diagonalną.
   b) macierzą zerową.
   c) macierzą jednostkową.

d) macierzą transponowaną.

6) Macierz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 12 & 5 \end{bmatrix}$ nazywamy

a) macierzą diagonalną.

b) macierzą zerową.

c) macierzą trójkątną górną.

d) macierzą trójkątną dolną.

7) Macierz kwadratową, w której wszystkie wyrazy znajdujące się powyżej głównej przekątnej są równe 0, nazywamy

a) macierzą diagonalną.

b) macierzą zerową.

c) macierzą trójkątną górną.

d) macierzą trójkątną dolną.

8) Macierz kwadratową, w której wszystkie wyrazy znajdujące się poniżej głównej przekątnej są równe 0, nazywamy

a) macierzą diagonalną.

b) macierzą zerową.

c) macierzą trójkątną górną.

d) macierzą trójkątną dolną.

9) Macierz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ nazywamy

a) macierzą diagonalną.

b) macierzą zerową.

c) macierzą trójkątną górną.

d) macierzą trójkątną dolną.

10) Macierz kwadratową, w której wszystkie wyrazy leżące powyżej i poniżej głównej przekątnej są równe 0, nazywamy

a) macierzą diagonalną.

b) macierzą zerową.

c) macierzą jednostkową.

d) macierzą transponowaną.

11) Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ nazywamy

a) macierzą symetryczną.

b) macierzą diagonalną.

c) macierzą odwrotną.

d) Żadna z odpowiedzi nie jest prawdziwa.

12) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Suma macierzy **A** i **B** wynosi

a) $\begin{bmatrix} 25 & 1 \\ 48 & 12 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$.

d) Działanie nie jest wykonalne.

13) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Iloczyn macierzy **A** i **B** wynosi

a) $\begin{bmatrix} 17 & 7 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$.

d) Działanie nie jest wykonalne.

14) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Wtedy

a) $\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

b) $\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_3$.

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_3 = \mathbf{A}$.

d) Działanie $\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{A}$ jest niewykonalne.

15) Poniżej podane są wymiary macierzy **A** oraz **B**. Dla których par macierzy można wykonać działanie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

a) $\mathbf{A}_{2\times3}$, $\mathbf{B}_{3\times5}$.

b) $\mathbf{A}_{2\times1}$, $\mathbf{B}_{2\times1}$.

c) $\mathbf{A}_{2\times3}$, $\mathbf{B}_{5\times3}$.

d) $\mathbf{A}_{3\times2}$, $\mathbf{B}_{5\times3}$.

16) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, wtedy $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$ wynosi

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

d) Nie istnieje.

17) $\left(\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}\right)^{\boldsymbol{T}}$ wynosi

a) $\mathbf{A}^{-\mathbf{1}}$.

b) $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$.

c) $\mathbf{A}$.

d) Nie istnieje.

18) Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Macierz $2\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$ jest równa

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$.

19) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Wtedy $\det \mathbf{A}$ wynosi

a) 3.

b) 9.

c) 0.

d) Nie istnieje.

20) Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Wtedy $\det \mathbf{A}$ wynosi

a) 3.

b) 9.

c) 0.

d) Nie istnieje.

21) $\det \mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$ wynosi

a) $\det \mathbf{A}$.

b) $\frac{1}{\det \mathbf{A}}$.

c) $-\det \mathbf{A}$.

d) To zależy od wartości elementów macierzy $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}}$.

22) Do operacji elementarnych na macierzach nie należy

a) dodanie do elementów dowolnego wiersza liczby różnej od zera.

b) mnożenie elementów dowolnego wiersza macierzy przez liczbę różną od zera.

c) przestawienie elementów wierszy macierzy.

d) dodanie do elementów wiersza elementów innego wiersza (kolumny) pomnożonych przez liczbę różną od zera.

23) Macierz odwrotna do macierzy $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ wynosi

a) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

d) Nie istnieje.

24) Macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierz

a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

d) Żadna z powyższych.

25) Czy istnieje macierz odwrotna do macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & x & 7 \end{bmatrix}$?

a) Nie.

b) Tak.

c) To zależy od x.

d) Żadna odpowiedź nie jest prawdziwa.

26) Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & a \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, gdy

a) $a \neq 0$.

b) $a = 0$.

c) $a \in \boldsymbol{R}$.

d) Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna.

27) Macierz $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ jest osobliwa, gdy

a) $a \neq 0$.

b) $a = 0$.

c) $a \in \boldsymbol{R}$.

d) Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna.

28) Wiadomo, że rząd macierzy **A** jest równy 0. Wtedy macierz **A** jest

a) macierzą osobliwą.

b) macierzą nieosobliwą.

c) macierzą jednostkową.

d) Żadna z odpowiedzi nie jest prawdziwa.

29) Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Rząd macierzy **A** wynosi

a) 2.

b) 1.

c) 3.

d) 4.

30) Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. Rząd macierzy **A** wynosi

a) 2.

b) 1.

c) 3.

d) 0.

31) Wiadomo, że rząd macierzy **A** jest równy 0. Wtedy macierz **A** jest

   a) macierzą zerową.

   b) macierzą jednostkową.

   c) macierzą diagonalną.

   d) Żadna z odpowiedzi nie jest prawdziwa.

32) Wiadomo, że rząd macierzy **A** jest równy 1. Wtedy macierz **A** jest

   a) macierzą zerową.

   b) macierzą jednostkową.

   c) macierzą diagonalną.

   d) Żadna z odpowiedzi nie jest prawdziwa.

33) Układ równań liniowych jednorodnych ma zawsze rozwiązania niezerowe, gdy

   a) liczba równań m jest mniejsza od liczby niewiadomych n.

   b) liczba równań m jest większa od liczby niewiadomych n.

   c) liczba równań m jest równa od liczby niewiadomych n.

   d) Żadne ze stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

34) Układ równań liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań (n-liczba niewiadomych), gdy

   a) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rz}(\mathbf{U})$.

   b) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$.

   c) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r < n$.

   d) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r > n$.

35) Układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie (n-liczba niewiadomych), gdy:

   a) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rz}(\mathbf{U})$.

   b) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$.

   c) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r < n$.

   d) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r > n$.

36) Układ równań liniowych jest sprzeczny (n-liczba niewiadomych), gdy

a) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{rz}(\mathbf{U})$.

b) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = n$.

c) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r < n$.

d) $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{U}) = r > n$.

37) Układ równań rozwiązano metodą operacji elementarnych. Rozwiązanie, które przedstawia układ nieoznaczony może mieć postać

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d) Żadna odpowiedź nie jest poprawna.

38) Układ równań rozwiązano metodą operacji elementarnych. Rozwiązanie, które przedstawia układ oznaczony może mieć postać

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d) Żadna odpowiedź nie jest poprawna.

39) Układ równań rozwiązano metodą operacji elementarnych. Rozwiązanie, które przedstawia układ sprzeczny może mieć postać

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d) Żadna odpowiedź nie jest poprawna.

40) Układ rownań $\begin{cases} 2x_1 + px_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ jest układem Cramera, gdy

a) $p = 0{,}5$.

b) $p \neq 0{,}5$.

c) $p = -0{,}5$.

d) $p \neq -0{,}5$.

7. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1) Wiedząc, że: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, wykonaj działania:

   a) $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}^{\boldsymbol{T}}$, b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

2) Wiedząc, że: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, wykonaj działania:

   a) $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} - 3\mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

3) Wiedząc, że: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, wykonaj działania:

   a) $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} - \mathbf{B}$, b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

4) Wiedząc, że: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$,

   wykonaj działania:

   a) $\mathbf{A}^{\boldsymbol{T}} + 2\mathbf{B}$, b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

5) Wykonaj działanie: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + 2\mathbf{B}^T$ dla poniższych macierzy:

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6) Wyznacz macierz $\boldsymbol{X} = \left(\mathbf{B}^{\boldsymbol{T}} - \boldsymbol{A}\right) \cdot \mathbf{C}$, gdzie:

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7) Wykonaj działanie $\mathbf{A}^{\mathbf{2}} - \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{I}$ dla poniższych macierzy:

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8) Dla powyższych macierzy wykonaj działania:

   a) $\det(\mathbf{A}^{\mathbf{2}})$,

   b) $\mathbf{A}^{\mathbf{3}} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{4}}$,

   c) $\det(\mathbf{5A} - \mathbf{4B})$.

9) Dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

oblicz:

a) minory: M_{13}, M_{21}, M_{34} M_{44},

b) dopełnienia algebraiczne: A_{11}, A_{14}, A_{24} A_{33}.

10) Oblicz wyznacznik z wykorzystaniem reguły Sarrusa: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

11) Oblicz wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

12) Dla macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oblicz wyznacznik macierzy powstałej po wykonaniu działania $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

13) Na podstawie własności wyznaczników określ wartości wyznaczników poniższych macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & -2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

14) Oblicz wyznacznik z wykorzystaniem operacji elementarnych:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

15) Oblicz wyznacznik stosując rozwiniecie Laplace'a: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

16) Wyznacz rząd poniższych macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17) Znajdź macierz odwrotną (jeśli istnieje) do macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

18) Sprawdź, czy dla poniższych macierzy istnieje macierz odwrotna:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

19) Sprawdź, czy dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ prawdziwe jest równanie: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det\mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$.

20) Dana jest macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz $\det(\mathbf{A}^{-1})$.

21) Znajdź macierz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

22) Wyznacz macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

23) Zapisz układy równań w postaci macierzowej **AX = B i** określ rząd macierzy współczynników **A**:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + 7z = 6 \\ x + y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x - 2y + 10z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ x - y + 4z = -1 \\ x - y + 5z = -2 \\ 2x - 2y + 10z = -1 \end{cases}$

24) Wskaż liczbę rozwiązań układów równań (wykorzystaj twierdzenie Kroneckera-Capellego):

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ x - y + 4z = -1 \\ x - y + 5z = -2 \\ 2y + 10z = -1 \end{cases}$

25) Rozwiąż układ równań, wykorzystując wzory Cramera:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

26) Rozwiąż układ równań (dowolną metodą):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

27) Rozwiąż układ równań, wykorzystując metodę Gaussa lub Gaussa-Jordana:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ x + y + 4z = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases}$

28) Rozwiąż układ równań, wykorzystując operacje elementarne:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 12 \\ -x + 3z = 8 \end{cases}$$

29) Rozwiąż układ równań, wykorzystując metodę macierzy odwrotnej:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4. \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

30) Wyznacz rozwiązanie ogólne oraz wszystkie rozwiązania bazowe poniższego układu równań:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ -x + y = 0 \\ x + 6y - z = 2 \end{cases}$$

LITERATURA

1) Antoniewicz R., Misztal A., Matematyka dla studentów ekonomii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
2) Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E., Matematyka, Politechnika Białostocka, Białystok 1998.
3) Batóg B., Bieszk-Stolorz B., Foryś I., Guzowska M., Helberlein K., Matematyka dla kierunków ekonomicznych. Teoria, przykłady, zadania, Difin 2016.
4) Bażańska T., Nykowska M., Matematyka w zadaniach dla wyższych zawodowych uczelni ekonomicznych, Oficyna Wydawnicza Branta, Warszawa 2007.
5) Białas S., Ćmiel A., Fitzke A., Matematyka dla studiów inżynierskich, cz. i Algebra i geometria, Wydawnictwa AGH, Kraków 2000.
6) Grzegorczyk J., Matematyka, Część 1, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
7) Gurgul H., Suder M., Matematyka dla kierunków ekonomicznych, Wolters Kluwer Polska, Warszawa 2012.
8) Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra Liniowa, Definicje, twierdzenia, wzory, GiS, Wrocław 2015.
9) Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra Liniowa, Przykłady i zadania, GiS, Wrocław 2017.
10) Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach 1, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
11) Matłoka M. (red.), Matematyka dla ekonomistów. Zbiór zadań, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2009.
12) Mierzyńska D., Perło N., Roszkowska E., Algebra liniowa z elementami zastosowań w ekonomii, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2003.
13) Ostoja-Ostaszewski A., Matematyka w ekonomii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
14) Piszczała J., Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2008.

15) Piszczała J., Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych. Ćwiczenia, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1997.
16) Sokołowska D., Dębkowska K., Matematyka dla studiujących nauki ekonomiczne, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania, Białystok 2008.
17) Stankiewicz W., Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, Cz. 1 A, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
18) Wrona W., Matematyka. Podstawowy wykład politechniczny. Część II, PWN, Warszawa 1969.

SKOROWIDZ

Politechnika
Białostocka