B. CHODOWICKI

RZUTY PROSTOKĄTNE

DLA II KL. LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO
WYDZIAŁU HUMANISTYCZNEGO
i PRZYRODNICZEGO

KSIĄŻNICA-ATLAS * LWÓW-WARSZAWA

B. CHODOWICKI

RZUTY PROSTOKĄTNE

DLA II KLASY LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO
WYDZIAŁU HUMANISTYCZNEGO i PRZYRODNICZEGO

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOSI zł 1,60

KSIĄŻNICA-ATLAS * LWÓW-WARSZAWA
1939

Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego
pismem Ministerstwa W. R. i O. P. z 4 marca 1939
nr II Pr. — 15 821/38.

2994

WYDAWCA: KSIĄŻNICA-ATLAS S. A., ZJEDN. ZAKŁADY KARTOGRAF. i WYDAWNICZE TNSW.
LWÓW, CZARNIECKIEGO 12 — ODDZIAŁ: WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

ODBITO W ZAKŁADACH GRAF. S. A. KSIĄŻNICA-ATLAS, LWÓW, GEN. ROZWADOWSKIEGO 20

D IX

Wstęp

Powtórzenie wiadomości o własnościach rzutu równoległego, połączone z przypomnieniem potrzebnych twierdzeń ze stereometrii.

§ 1. Własność rzutu równoległego.

1. W poprzednim kursie nauki geometrii nauczyliśmy się odwzorowywać na płaszczyźnie utwory przestrzenne za pomocą rzutu równoległego.

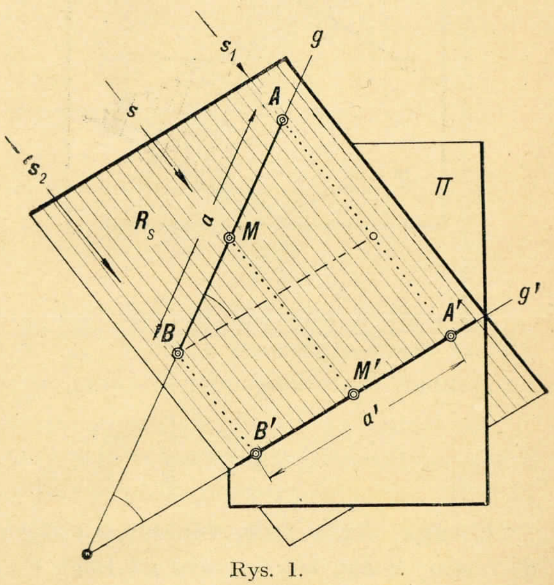
Oto są główne własności tego rzutu:

a) Własność I. *Rzut równoległy linii prostej na dowolną płaszczyznę jest linią prostą.*

Oznaczmy płaszczyznę, na którą rzutujemy przez π, daną prostą przez g, kierunek rzutów przez s. (Rys. 1).

Aby otrzymać rzut prostej g, należy poprowadzić przez poszczególne jej punkty proste s_1, s_2, s_3, ... równolegle do kierunku rzutu s i wyznaczyć punkty, w których te proste przebijają rzutnię π.

Proste rzutujące s_1, s_2, s_3, ... wypełniają płaszczyznę rzutującą R_s; na krawędzi g' tej płaszczyzny z rzutnią znajdują się zatem rzuty poszczególnych punktów danej prostej g. A ponieważ wiemy, że krawędzią dwóch płasz-



Rys. 1.

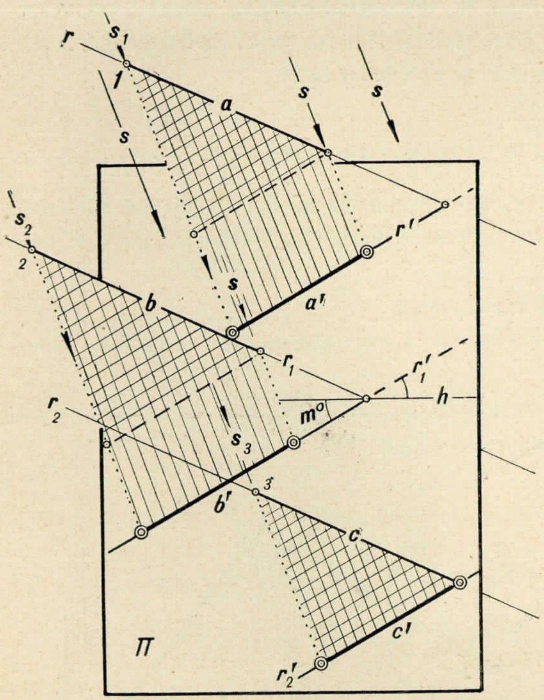
czyzn jest linia prosta, przeto przekonywamy się, że istotnie rzut równoległy linii prostej jest linią prostą.

Z powyższej własności korzystamy przy kreśleniu rzutu równoległego linii prostej i odcinka:

Przyjmujemy na prostej dwa dowolne punkty, np. A i B, wyznaczymy ich rzuty A' i B' i łączymy je linią prostą; odcinek $A'B'$ jest rzutem odcinka AB, linia prosta $A'B'$ jest rzutem linii prostej AB.

Udowodnij przy pomocy rysunku 1 następującą

Własność II. *Jeżeli punkt M dzieli odcinek AB w stosunku n, to jego rzut M' dzieli rzut $A'B'$ w tym samym stosunku n.*



Rys. 2.

b) Własność III. *Jeżeli proste r, r_1, r_2, ... są w przestrzeni do siebie równoległe, to ich rzuty równoległe są również do siebie równoległe; stosunki odcinków równoległych do ich rzutów równoległych są równe.* (Rys. 2).

Jeżeli weźmiemy pod uwagę płaszczyzny rzutujące poszczególne dane proste, to zauważymy, że są one do siebie równoległe; ich przeto krawędzie r', r_1', r_2', ... z rzutnią muszą być, jak wiemy ze stereometrii, również do siebie równoległe, a to są właśnie rzuty danych prostych.

Na danych prostych równoległych przyjęto odcinki a, b, c, ..., ich zaś rzuty oznaczono a', b', c', ... Z trójkątów podobnych, które na rysunku zakreskowano podwójnie, wynika:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \cdots = q.$$

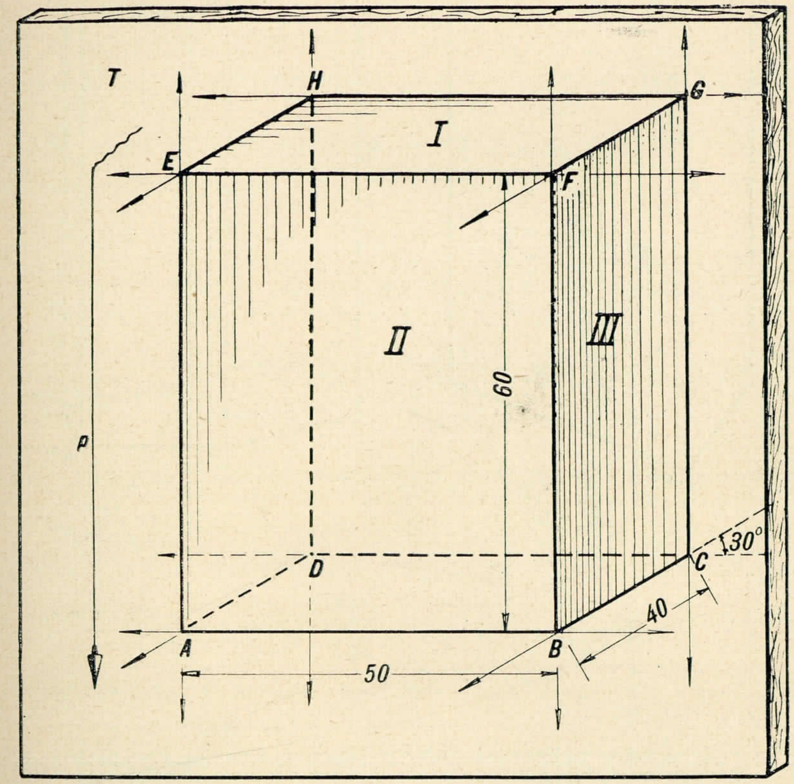
Uwaga. *Jeżeli proste równoległe r, r_1, r_2, ...* (Rys. 2) *są prostopadłe do rzutni, to kąt, który tworzą ich rzuty r', r_1', r_2', ... z linią poziomą h, nazywamy, jak wiadomo, skręceniem rzutu równoległego*; kąt ten oznaczać będziemy literą m^0. Zazwyczaj przyjmujemy:

$$m^0 = 30^0,\ 45^0,\ 60^0.$$

Stosunek odcinków prostopadłych względem rzutni do ich rzutów nazywamy, jak wiadomo, skróceniem rzutu równoległego; oznaczać go będziemy literą q. Zazwyczaj przyjmujemy:

$$q = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ 1.$$

c) Własność IV. *Jeżeli figura płaska jest równoległa do rzutni, to jej rzut równoległy jest figurą do niej przystającą.*



Rys. 3.

1) Weźmy pod uwagę np. prostopadłościan o krawędziach 40, 50 i 60 mm i ustawmy go tak, aby jego tylna ściana przylegała do płaszczyzny tablicy, krawędzie zaś boczne miały położenie pionowe. (Rys. 3).

Przyjąwszy płaszczyznę tablicy za rzutnię wykreślmy rzut równoległy prostopadłościanu.

P' i poprowadźmy na płaszczyźnie π dowolną prostą g_x przechodzącą przez P'.

Zakładamy więc, że $p \perp g$ i $p \perp g_1$;

twierdzimy, że $p \perp g_x$.

Dowód. Przyjmijmy na prostej p dwa punkty P i P_1 równo oddalone od punktu P', a nadto dwa punkty Q i R na prostych g i g_1.

Z założeń wynika, że proste g i g_1 są wysokościami trójkątów PQP_1 i PRP_1 i przechodzą przez środek ich wspólnej podstawy PP_1; trójkąty te są więc równoramienne, z czego wynika równość odcinków:

$$PR = P_1 R;$$
$$PQ = P_1 Q,$$

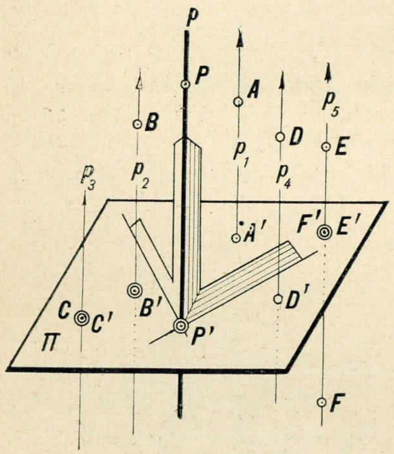
a w następstwie tego przystawanie trójkątów PQR i $P_1 QR$.

Oznaczmy punkt przecięcia się wspólnej podstawy tych trójkątów QR z prostą g_x przez X; jeżeli X połączymy z punktami P i P_1, otrzymamy dwa równe odcinki PX i P_1X.

Trójkąt PXP_1 jest więc równoramienny, a prosta g_x, łącząca w nim wierzchołek X ze środkiem podstawy P', jest jego wysokością, z czego wynika, że:

$$g_x \perp p.$$

Udowodniliśmy zatem, że prosta p jest prostopadła do wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie π, a przechodzących przez jej punkt przebicia P'.



Rys. 6.

Jeżeli jednak prosta p jest prostopadła do prostej g_x, to jest prostopadła do wszystkich prostych równoległych do g_x.

Prosta p jest zatem prostopadła do każdej prostej na płaszczyźnie π, jest więc p r o s t ą p r o s t o p a d ł ą do płaszczyzny π.

Nawzajem, płaszczyznę π nazywamy p ł a s z c z y z n ą p r o s t o p a d ł ą do prostej p.

Wniosek. *Wspólne ramię p dwóch kątów prostych, których dwa inne ramiona leżą na płaszczyźnie π, jest prostopadłe do tej płaszczyzny.*

Na tym polega budowanie prostopadłej do płaszczyzny przy pomocy dwu węgielnic lub dwu ekierek, jak to widzimy na rys. 6.

Zbuduj w ten sposób prostopadłą do płaszczyzny zeszytu, ściany itp.!

4. Udowodnij samodzielnie następujące twierdzenia:

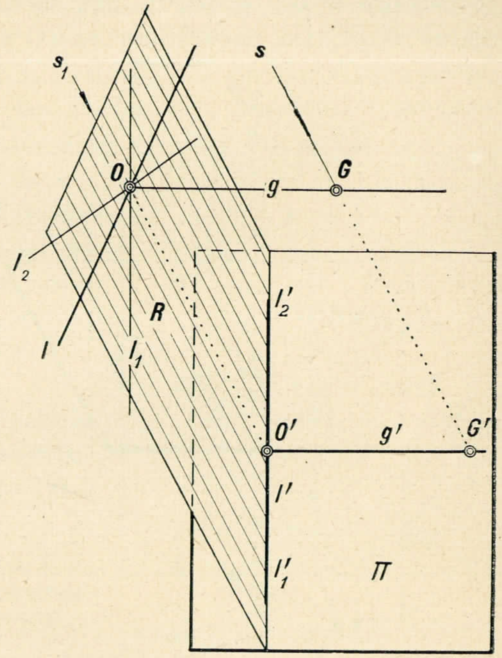
Twierdzenie II. *Przez każdy punkt na płaszczyźnie lub zewnątrz płaszczyzny można poprowadzić tylko jedną prostą prostopadłą do tej płaszczyzny.*

Twierdzenie III. *Wszystkie proste prostopadłe do tej samej płaszczyzny są do siebie równoległe.* (Rys. 6).

Twierdzenie IV. *Przez każdy punkt na prostej lub zewnątrz prostej można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.*

Uwaga. *Rzut równoległy nazywamy u k o ś n y m, jeżeli kierunek rzutu jest do rzutni ukośny, p r o s t o k ą t n y m (prostopadłym), jeżeli kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni.* (Zob. rys. 6!).

5. Twierdzenie V. *Rzut prostokątny kąta prostego na płaszczyznę π jest kątem prostym, jeżeli przynajmniej jedno z jego ramion jest równoległe do tej płaszczyzny.* (Rys. 7).



Rys. 7.

Dowód. Oznaczmy ramię równoległe do płaszczyzny π przez g. Jego rzut prostokątny g' na tę płaszczyznę wyznaczymy, jeżeli wyznaczymy rzuty prostokątne dwóch jego punktów, np. wierzchołka O i dowolnego punktu G; a więc jeżeli poprowadzimy przez te punkty dwie proste s i s_1 prostopadłe do płaszczyzny π, a tym samym prostopadłe do ramienia g.

Rzut prostokątny l' drugiego ramienia l możemy wyznaczyć jako krawędź płaszczyzny R, poprowadzonej przez l prostopadle do płaszczyzny π.

Płaszczyzna R przechodzi jednak przez prostą s_1 prostopadłą do ramienia g. Ramię g jest więc prostopadłe do dwóch prostych l i s_1 leżących na płaszczyźnie R, jest zatem — według twierdzenia I, art. 3. — prostopadłe do wszystkich prostych leżących na płaszczyźnie R, a więc i do rzutu l'.

Jeżeli ramię g jest prostopadłe do rzutu l', to do tego rzutu jest prostopadła każda prosta równoległa do g, a więc i rzut g'.

Rzuty g' i l' tworzą zatem ze sobą kąt prosty.

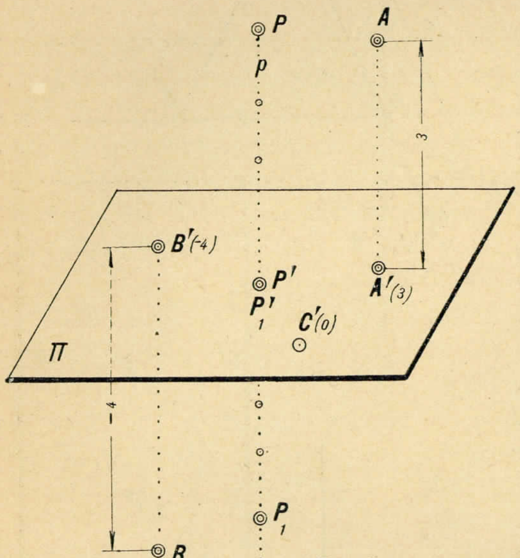
Rozdział I.

Rzuty prostokątne na jedną płaszczyznę. [Rzuty cechowane]

§ 1. Rzut i cecha punktu

[Poziomnica, plan poziomnicowy, mapa topograficzna].

6. a) Szczególny przypadek rzutu równoległego zachodzi, jak to poznaliśmy w art. 4, wtedy, gdy kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni. Rzut taki nazwaliśmy rzutem prostokątnym.



Rys. 8.

Jeżeli więc płaszczyzna π jest rzutnią (rys. 8), P zaś dowolnym punktem w przestrzeni, to chcąc wyznaczyć rzut prostokątny punktu P prowadzimy przez niego prostą prostopadłą do π.

Oznaczmy tę prostopadłą przez p; nazywać ją będziemy prostą rzutującą punkt P.

Punkt P' (czytaj: P z kreską), *w którym rzutująca* p *przebija rzutnię* π, *jest rzutem prostokątnym punktu* P *na tę rzutnię.*

Przyjmuj różne punkty powyżej rzutni, poniżej, na rzutni, i wyznaczaj ich rzuty prostokątne! (Por. rys. 6!).

Ponieważ przez dany punkt można poprowadzić tylko jedną prostopadłą do danej płaszczyzny (zob. twierdzenie II, art. 4), przeto przekonywamy się:

Dla każdego punktu znajdującego się zewnątrz płaszczyzny lub na płaszczyźnie da się wyznaczyć jednoznacznie jego rzut prostokątny na tę płaszczyznę.

Czyli:

Każdemu punktowi zewnątrz płaszczyzny lub na płaszczyźnie odpowiada na tej płaszczyźnie jeden tylko rzut prostokątny.

b) Przy pomocy rysunku 6 i 8 spostrzegamy, że z prostokątnym rzutem P' schodzą się rzuty prostokątne wszystkich punktów znajdujących się na rzutującej p.

A zatem:

1) *Każdemu punktowi, np.* F' *rys. 6, przyjętemu na rzutni* π *za rzut prostokątny jakiegoś punktu w przestrzeni, odpowiada niezliczona ilość punktów, których rzuty prostokątne na rzutnię* π *schodzą się z* F'; *punkty te znajdują się na prostopadłej do rzutni, zbudowanej w* F'.

2) *Sam rzut prostokątny punktu nie określa jeszcze położenia tego punktu w przestrzeni.*

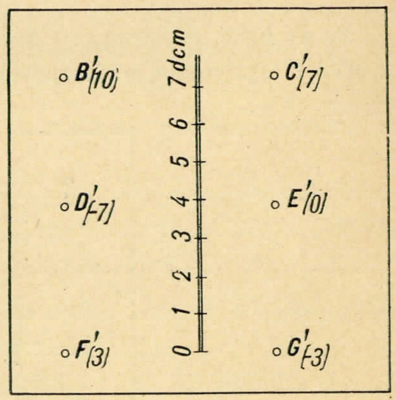
Położenie punktu w przestrzeni będzie dokładnie określone, jeśli oprócz jego rzutu prostokątnego będzie dana jego odległość od rzutni.

Liczbę wymiarową odległości punktu od rzutni nazywamy cechą punktu.

Punkt ma cechę „+", jeżeli znajduje się po tej samej stronie rzutni, co nasze oko; ma cechę „—", jeżeli znajduje się po przeciwnej stronie rzutni; ma cechę 0, jeżeli leży na rzutni.

Cechę punktu umieszczamy na rysunku po prawej stronie jego rzutu prostokątnego, ujmując ją w nawias i opuszczając miano długości (zob. rys. 8 i 9), które zaznaczamy jednak zwykle na skali (podziałce) rysunku. (Zob. rys. 9!).

Rzut prostokątny punktu, zaopatrzony w powyższy sposób w cechę, nazywa się rzutem cechowanym punktu.



Rys. 9.

Na rys. 9 są dane rzuty cechowane kilku punktów. Wyznacz ich położenie w przestrzeni, przyjmując płaszczyznę rysunku za rzutnię!

Uwaga. *Jeśli rzutnia* π *ma położenie poziome, nazywamy ją płaszczyzną porównawczą.* Za płaszczyznę porównawczą w geografii przyjmujemy poziom morza. Cechy dodatnie punktów oznaczają wtedy ich wysokości geograficzne, cechy ujemne ich głębokości geograficzne.

7. *Powierzchnię ziemi wraz z jej wklęsłościami i wyniosłościami nazywamy powierzchnią topograficzną.*

Weźmy pod uwagę powierzchnię topograficzną pewnej okolicy i pomyślmy sobie, że przecinamy ją płaszczyznami poziomymi, odległymi od płaszczyzny porównawczej, np. o 100 m, 110 m, 120 m, 130 m itd. Otrzymamy na powierzchni topograficznej linie poziomów 100 m, 110 m, 120 m, 130 m, ... które łączą na niej punkty, mające wysokości 100 m, 110 m, 120 m, 130 m.

Linie te nazywają się w geografii poziomnicami, także warstwicami.

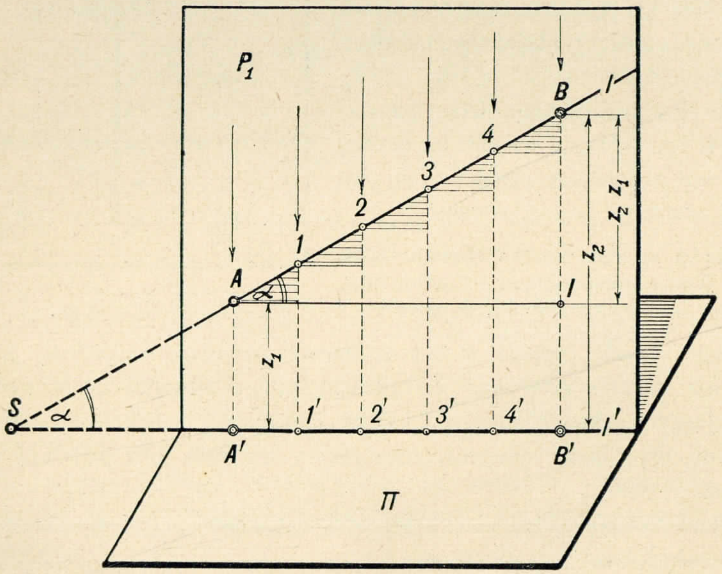
Rzut prostokątny poziomnic pewnej okolicy (kraju) na dowolną płaszczyznę poziomą nosi nazwę planu poziomnicowego.

Plan poziomnicowy rysuje się w pewnej skali, a poziomnice zaznacza się liczbami dodatnimi lub ujemnymi, stosownie do tego, czy łączą punkty położone powyżej, czy poniżej poziomu morza. (Zob. rys. 12!).

Plan poziomnicowy nazywa się mapą topograficzną, jeśli jest zaopatrzony w różne szczegóły, jak drogi komunikacyjne, lasy, łąki, rzeki itp.

§ 2. Rzut prostej i odcinka. Ślad prostej. Kąt nachylenia prostej do rzutni. Twierdzenie o długości rzutu odcinka.

8. a) Rzut prostokątny dowolnej prostej l na rzutnię π (Rys. 10) możemy wyznaczyć w dwojaki sposób (Por. własność I w art. 1 i uwagę w art. 4!):



Rys. 10.

1) *prowadzimy przez prostą l płaszczyznę rzutującą P_1 prostopadle do rzutni π i wyznaczamy krawędź l', wzdłuż której ta płaszczyzna przecina rzutnię*;

albo:

2) *przyjmujemy na prostej l dowolne dwa punkty A i B, wyznaczamy ich rzuty prostokątne A' i B' i łączymy je linią prostą l'.*

Prosta $A'B'$ jest rzutem prostokątnym prostej AB, odcinek $A'B'$ jest rzutem prostokątnym odcinka AB.

b) Przy pomocy rysunku 10 przekonywamy się:

1) *Jest niezliczona ilość prostych l, tak samo niezliczona ilość odcinków AB, których rzuty prostokątne nakrywają się z prostą l', względnie z odcinkiem $A'B'$, przyjętymi na rzutni π. Proste l i odcinki AB wypełniają płaszczyznę rzutującą P_1.*

2) *Położenie w przestrzeni prostej l, jak również dowolnego odcinka leżącego na niej, np. AB, będzie dokładnie określone, jeśli na jej rzucie prostokątnym l' będą dane rzuty cechowane dwóch jej dowolnych punktów, np. A i B.*

Prostokątny rzut prostej, zaopatrzony rzutami cechowanymi dwóch jej punktów, nazywamy *rzutem cechowanym tej prostej*. Jeżeli cechy punktów A i B, leżących na prostej l, oznaczymy ogólnie z_1 i z_2, to rzut cechowany prostej AB oznaczymy $A'(z_1)B'(z_2)$.

c) Udowodnij samodzielnie przy pomocy rysunku 10 następujące twierdzenie:

Jeżeli punkty 1, 2, 3, 4, ... dzielą w przestrzeni odcinek AB na n równych części, to rzuty prostokątne tych punktów 1', 2', 3', 4', ... dzielą na tyleż równych części rzut prostokątny odcinka $A'B'$.

9. a) Punkt S, w którym prosta l przebija rzutnię π (Rys. 10), nazywamy śladem prostej l na tej rzutni.

Przez ślad prostej przechodzi, jak widzimy, rzut tej prostej. *Kąt α, który tworzy prosta l ze swoim rzutem prostokątnym na płaszczyznę π, nazywamy kątem nachylenia prostej l do tej płaszczyzny.*

Przy pomocy rysunku 10. przekonywamy się:

Kąt nachylenia do rzutni π jakiegokolwiek odcinka na prostej l jest równy kątowi nachylenia tej prostej do rzutni.

I odwrotnie:

Kąt nachylenia prostej l do rzutni π jest równocześnie kątem nachylenia do tejże rzutni każdego odcinka na prostej l.

b) Weźmy pod uwagę na rysunku 10. trójkąt prostokątny ABI. Kąt α przy wierzchołku A jest równy kątowi nachylenia do rzutni odcinka AB, przyprostokątna zaś AI równa jest długości rzutu $A'B'$. Z trygonometrii wiadomo, że:

$$\frac{AI}{AB} = \cos \alpha.$$

Wprowadzając zaś za AI odcinek $A'B'$, otrzymamy:

$$\frac{A'B'}{AB} = \cos\alpha, \text{ stąd zaś:}$$

A zatem:

$$1)\ A'B' = AB \cdot \cos\alpha; \qquad 2)\ AB = \frac{A'B'}{\cos\alpha}$$

1) *Jeżeli jest dana długość odcinka AB, to mnożąc ją przez cosinus kąta nachylenia odcinka do rzutni otrzymamy długość jego rzutu $A'B'$.*

2) *Jeżeli zaś jest dana długość rzutu $A'B'$, to dzieląc ją przez cosinus kąta nachylenia odcinka do rzutni otrzymamy długość tego odcinka AB.*

Uwaga. *Prostokątny rzut odcinka nie zmienia swej długości, jeżeli nie zmienia się kąt nachylenia odcinka do rzutni.*

A zatem długość rzutu odcinka pozostaje stałą podczas ruchu odcinka:

1) *postępowego po stałej prostej;* *

2) *obrotowego dokoła prostej prostopadłej do rzutni;* *

3) *śrubowego dokoła prostej prostopadłej do rzutni.* *

c) *Stosunek różnicy cech punktów końcowych jakiegokolwiek odcinka, leżącego na prostej l, do długości rzutu prostokątnego tego odcinka, nazywamy spadkiem prostej l względem rzutni.*

Oznaczając spadek linii prostej l literą t otrzymujemy z trójkąta prostokątnego $A\,I\,B$ (rys. 10):

$$t = \frac{z_2 - z_1}{A'B'} = tg\,\alpha$$

To znaczy:

Spadek linii prostej względem rzutni równa się tangensowi kąta nachylenia tej prostej do rzutni.

10. Zagadnienia.

Przykład 1.

Dany jest rzut cechowany linii prostej l za pomocą rzutów cechowanych dwóch jej punktów A' (3,5) *i B'* (9,2) (Rys. 11).

Mamy wyznaczyć:

1) *Ślad prostej l i jej kąt nachylenia do rzutni;*

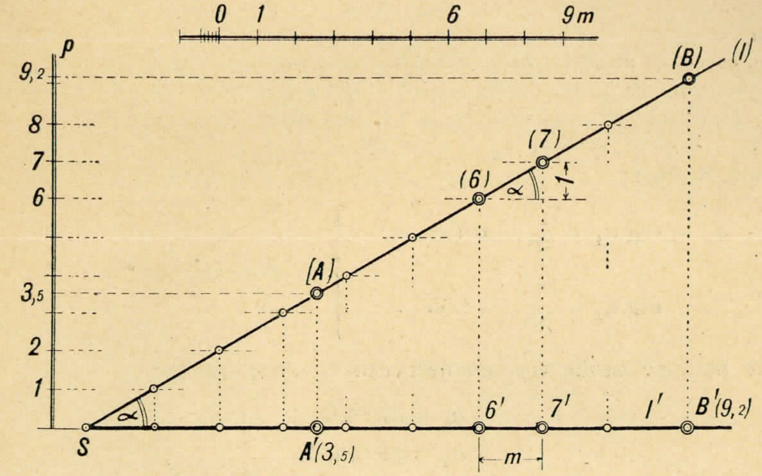
2) *prawdziwą wielkość odcinka AB;*

3) *rzuty takich punktów tej prostej, których cechy są po sobie następującymi liczbami całkowitymi.*

Rozwiązanie. 1) Przyjąwszy za rzutnię płaszczyznę rysunku obróćmy dokoła rzutu l' płaszczyznę rzutującą prostą l tak, aby się zjednoczyła z rzutnią. (Płaszczyzna rzutująca P_1 jest przedstawiona na rys. 10!). Po takim zjednoczeniu odległości punktów A i B od rzutni będą odcinkami prostopadłymi do rzutu l'.

* Zademonstrować taki ruch odcinka.

Jeżeli więc w rzutach A' i B' wykreślimy prostopadłe do l' i na tych prostopadłych odłożymy odcinki $A'(A)$ i $B'(B)$ równe cechom 3,5 i 9,2 punktów A i B, to prosta (l) łącząca punkty (A) i (B) przetnie rzut l' w punkcie S i utworzy z tym rzutem kąt α.



Rys. 11.

Punkt S jest szukanym śladem prostej 1, kąt zaś α jest szukanym kątem nachylenia tej prostej do rzutni; odcinek (A) (B) jest równy odcinkowi AB w przestrzeni.

2) Wykreślmy dowolną prostą p prostopadłą do rzutu l' i odłóżmy na niej od punktu przecięcia się z l' odcinki równe jednej, dwom, trzem, ... przyjętym na podziałce (skali) jednostkom długości.

Jeśli przez końce tych odcinków poprowadzimy proste równoległe do rzutu l', to przetną one prostą (l) w punktach, których cechy wynoszą 1, 2, 3, 4, ... przyjętych jednostek długości.

Wykreśl rzuty prostokątne tych punktów!

Uwaga. *Niechaj punkty A i B, dane za pomocą swoich rzutów cechowanych* na rys. 11, *wyobrażają punkty terenu.*

Za średni spadek drogi między tymi punktami przyjmujemy stosunek różnicy poziomów (cech) tych punktów do długości rzutu drogi.

Przykład 2.

Dany jest na figurze a) rys. 12 *plan poziomnicowy pewnej okolicy w skali 1 : 1000.*

Mamy obliczyć:

1) *Kąty α_1 i α_2, pod którymi widzimy punkt P ze stanowisk R i R_1, znajdujących się na tym samym poziomie.*

2) *Odległość punktu P od stanowisk R i R_1.*

Wskazówki. 1) Mierzymy dokładnie na planie poziomnicowym długości rzutów prostokątnych odcinków PR i PR_1 i znajdujemy np.:

$$P'R' = 7{,}5 \text{ mm}; \quad P'R'_1 = 15{,}5 \text{ mm}.$$

Rzeczywistą długość tych rzutów otrzymamy, jeżeli ich długości na planie pomnożymy przez 1000; a więc $P'R'$ w naturze $= 7{,}5$ m, zaś $P'R_1' =$ $= 15{,}5$ m. Punkt P ma cechę $z_2 = 140$ m, punkty zaś R i R_1 mają równą cechę $z_1 = 130$ m, a więc $z_2 - z_1 = \mathbf{10}$ m.

Mamy zatem:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} \alpha_1 &= \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75 \\ \operatorname{ctg} \alpha_2 &= \frac{15{,}5}{10} = 1{,}55 \end{aligned}\right| \quad \text{Por. rys. 10!}$$

Przy pomocy tablic trygonometrycznych znajdujemy:

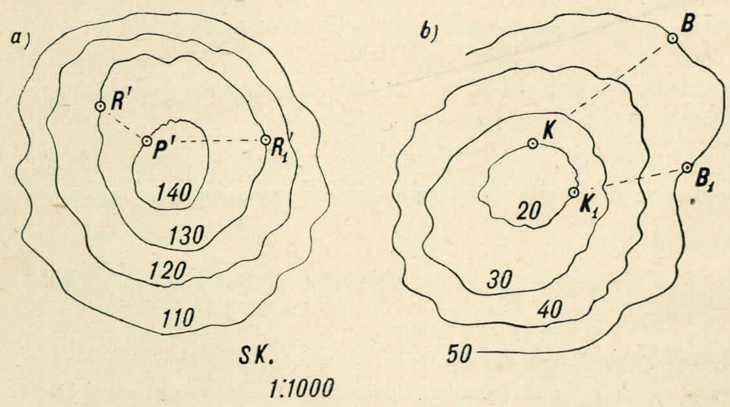
$$\alpha_1 = 53^0\,8{,}8'$$
$$\alpha_2 = 32^0\,49{,}7'.$$

2) Długości odcinków PR i PR_1 obliczymy przy pomocy równania 2) z art. 9 ust. b):

$$PR = \frac{7{,}5 \text{ m}}{\cos\alpha_1}; \quad PR_1 = \frac{15{,}5 \text{ m}}{\cos\alpha_2}.$$

Przykład 3.

Na planie poziomnicowym — rys. 12 b) — *prowadzą ze stanowiska K do stanowiska B_1 dwa gościńce — przez miejscowość B i przez miejscowość K_1.*



Rys. 12.

Obliczyć:

1) *Spadki napotykane na obu gościńcach*; [Por. uwagę w przykładzie 1!];

2) *długości obu gościńców.*

Wskazówki. 1) Z planu poznajemy, że gościńce KK_1 i BB_1 są poziome, a więc ich spadek wynosi 0; chodzi zatem tylko o spadki gościńców KB i K_1B_1, a te obliczymy jak w ust. c) art. 9.

2) Długości gościńców poziomych otrzymamy, jeżeli ich długości na mapie pomnożymy przez 1000 (Skala!).

Długości gościńców pochyłych obliczymy jak w przykładzie 2).

Uwaga. *W praktyce nie uwzględniamy mniejszych pochyłości, zwłaszcza na znacznych odległościach.*

11. Ćwiczenia.

1) Przyjmując płaszczyznę zeszytu za rzutnię, wykreśl rzut odcinka $a = 5$ cm, którego kąt nachylenia wynosi $\alpha = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0, 80^0, 90^0$!

Oblicz rachunkiem długość rzutu i porównaj go z wynikiem otrzymanym za pomocą konstrukcji!

Oblicz spadek tego odcinka!

2) Długość rzutu odcinka $a' = 4$ cm, cosinus jego kąta nachylenia do rzutni wynosi: $\cos\alpha = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

Wyznaczyć długość odcinka: a) konstrukcyjnie, b) rachunkiem.

Obliczyć spadek odcinka.

3) a) Dany jest rzut cechowany odcinka $A'(3)\ B'(8) = 5$.

Wyznaczyć konstrukcyjnie i rachunkiem długość odcinka. Obliczyć i wykreślić kąt nachylenia.

b) Przeprowadzić te same ćwiczenia dla $A'(3)\ B'(-8) = 5$.

4) Rzut odcinka $A'(1{,}2)\ B'(6{,}6) = 6{,}6$.

a) Wyznaczyć konstrukcyjnie ślad prostej AB i kąt jej nachylenia do rzutni.

b) Obliczyć kąt nachylenia i spadek prostej AB.

c) Wyznaczyć konstrukcyjnie i obliczyć rachunkiem długość odcinka AB.

5) Oblicz spadek Wisły między jej źródłem a Krakowem i Krakowem a Warszawą! Por. uwagę w przykładzie 1 art. 10!

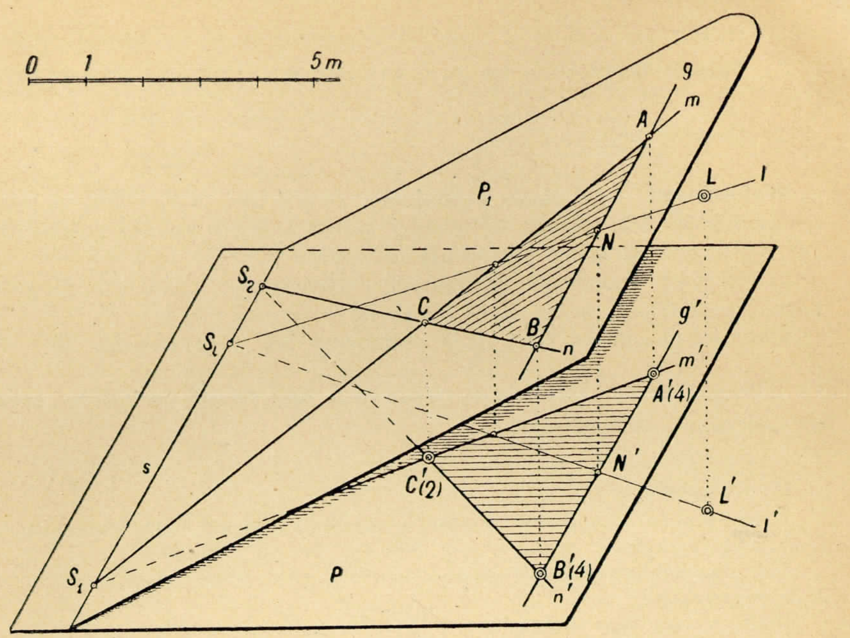
§ 3. Punkty i proste na płaszczyźnie.

Ślad płaszczyzny. Kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni. Twierdzenie o polu rzutu figury płaskiej.

12 a.) Wiemy ze stereometrii, że *płaszczyzna jest wyznaczona przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej.*

Z pewnika tego i z artykułu 6 b) wynika, że:

Położenie płaszczyzny w przestrzeni jest dokładnie określone, jeśli są dane rzuty cechowane trzech jej punktów, np. $A'(4)$, $B'(4)$ i $C'(2)$. (Rys. 13).



Rys. 13.

Przy pomocy bowiem danych rzutów cechowanych trzech punktów możemy wyznaczyć położenia tych punktów w przestrzeni, a następnie poprowadzić przez nie tylko jedną płaszczyznę P_1.

b) Wiemy również ze stereometrii, że *jeśli prosta ma dwa punkty wspólne z płaszczyzną, to ma wtedy wszystkie punkty wspólne z tą płaszczyzną.*

O takiej prostej mówimy, że l e ż y na płaszczyźnie, o płaszczyźnie, że p r z e c h o d z i przez prostą.

Weźmy pod uwagę na rysunku 13 proste m i n, łączące punkty A, B z punktem C płaszczyzny P_1, a więc leżące na tej płaszczyźnie. Punkty S i S_1 przecięcia się tych prostych z ich rzutami m' i n' są, jak wiemy z ust. 9 a), śladami tych prostych, tj. ich punktami przebicia się z rzutnią P.

Prosta s łącząca punkty S i S_1 leży zatem i na płaszczyźnie P_1 i na rzutni P, jest więc ich wspólną krawędzią.

Prostą s, wzdłuż której dowolna płaszczyzna P_1 przecina rzutnię P, nazywamy ś l a d e m płaszczyzny P_1.

Przy pomocy rysunku 13. przekonywamy się, że:

1) *Jeżeli prosta leży na płaszczyźnie, to jej ślad leży na śladzie tej płaszczyzny.*

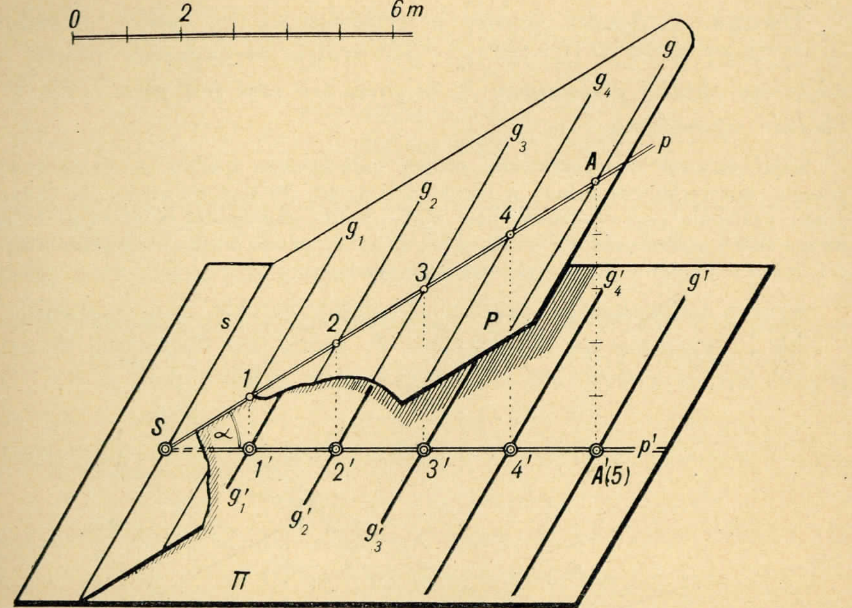
I na odwrót:

2) *Jeżeli płaszczyzna przechodzi przez prostą, to jej ślad przechodzi przez ślad tej prostej.*

3) *Jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie jest równoległa do rzutni* (jak np. prosta g łącząca punkty A i B o równych cechach), *to i prosta sama, i jej rzut prostokątny są równoległe do śladu tej płaszczyzny.*

Uwaga. *Punkt leży na płaszczyźnie, jeśli leży na prostej, leżącej na tej płaszczyźnie.*

Chcąc więc przyjąć na płaszczyźnie P_1 (Rys. 13) dowolny punkt L, przyjmujemy najpierw na niej dowolną prostą l za pomocą dwóch dowolnych punktów, np. punktu N na prostej g i śladu S_l na śladzie s.



Rys. 14.

13. a) Przyjmijmy, że płaszczyznę P (rys. 14) wyznacza jej ślad s i dowolny jej punkt A, dany za pomocą rzutu cechowanego $A'(5)$.

Spomiędzy niezliczonej ilości prostych na płaszczyźnie P, które przechodzą przez jej punkt A, dwie z nich zasługują na szczególną uwagę: *prosta g równoległa do śladu s i prosta p prostopadła do tegoż śladu.*

Na prostej g leżą wszystkie punkty płaszczyzny P, których cechy są równe cesze 5 punktu A. Można ją uważać za krawędź płaszczyzny danej, z płaszczyzną przechodzącą przez A równolegle do rzutni.

Prostą g nazywamy prostą poziomnicową lub prostą poziomą płaszczyzny P, gdy rzutnia ma położenie poziome.

Druga prosta p tworzy ze swoim rzutem prostokątnym p' kąt α, który jest miarą *kąta nachylenia płaszczyzny* P do rzutni, czyli kąta dwuściennego, utworzonego przez płaszczyzny P i π.

Prostą p nazywamy *prostą największego spadku* płaszczyzny p; po niej spłynęłaby z punktu A woda, gdyby rzutnia była pozioma a płaszczyzna P płaszczyzną terenu.

Prosta p tworzy z prostą g kąt prosty, którego jedno ramię jest równoległe do rzutni, z czego wynika, *że rzuty prostokątne prostych poziomych i prostych największego spadku tej samej płaszczyzny przecinają się pod kątem prostym.* (Zob. twierdz. V, art. 5!).

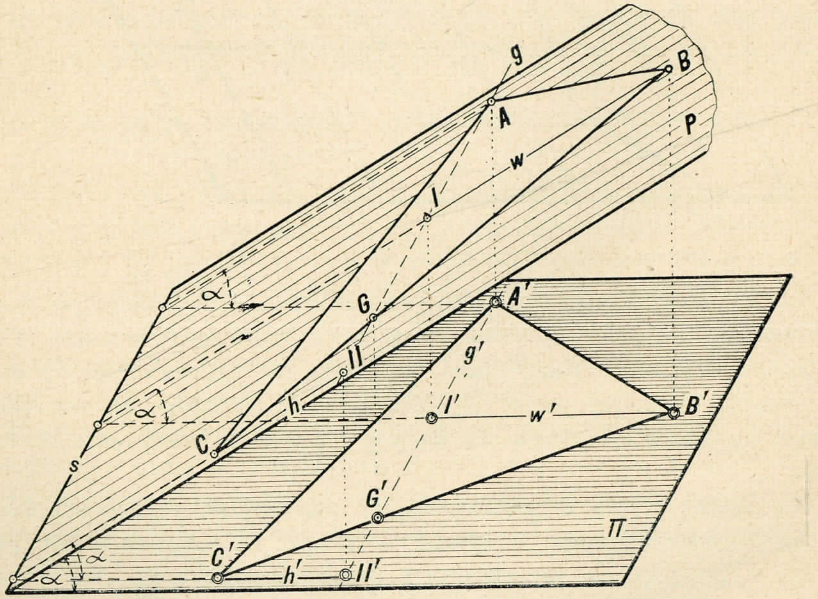
Uwaga. 1) *Spadek prostej p przyjmujemy za spadek płaszczyzny.*

2) *Jeśli* $p' = A'(z_1)\ B'(z_2)$ *jest rzutem cechowanym prostej największego spadku płaszczyzny P, to przez ten rzut jest płaszczyzna P dokładnie wyznaczona.*

Mając bowiem rzut cechowany prostej największego spadku p, wyznaczymy za pomocą konstrukcji wskazane w przykładzie 1. art. 10 ślad tej prostej S. (Rys. 11). Jeżeli następnie poprowadzimy przez ślad S prostą prostopadłą do rzutu p', to otrzymamy ślad s płaszczyzny P. Płaszczyzna P będzie przeto wyznaczona przez swój ślad s i jeden z punktów prostej największego spadku.

Prostą największego spadku rysujemy zwykle linią podwójną.

b) Przyjmijmy na płaszczyźnie P, która jest nachylona do rzutni π pod kątem α (rys. 15), dowolny trójkąt ABC o polu f.



Rys. 15.

Wyznaczmy rzut prostokątny tego trójkąta $A'\,B'\,C'$ i oznaczmy jego pole przez f'.

Mamy udowodnić, że między polami f i f' zachodzi związek:

$$f' = f \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Dowód. Przez wierzchołek A poprowadźmy na płaszczyźnie P prostą poziomą g (równoległą do śladu s); prosta g przecina przeciwległy bok BC w punkcie G, trójkąt zaś dzieli na dwa trójkąty BAG i CAG o wspólnej podstawie AG.

Wysokości obu tych trójkątów leżą na prostych największego spadku, przechodzących przez wierzchołki B i C, są zatem nachylone do rzutni pod kątem α (Por. art. 9a i uwagę 1) art. 13a)!). Oznaczmy ich długości przez $w = BI$ i przez $h = CII$.

Pole trójkąta ABC możemy przeto przedstawić jako sumę pól trójkątów BAG i CAG:

$$\begin{aligned} 2f &= AG \cdot w + AG \cdot h \\ &= AG \cdot (w + h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2) \end{aligned}$$

Rzut prostej poziomej g' dzieli rzut trójkąta $A'\,B'\,C'$ również na dwa trójkąty $B'\,A'\,G'$ i $C'\,A'\,G'$ o wspólnej podstawie $A'\,G'$, która, jak widzimy z rysunku, jest równa podstawie AG.

Wysokość pierwszego z tych trójkątów $B'\,I' = BI \cdot \cos\alpha = w \cdot \cos\alpha$
,, drugiego ,, ,, ,, $C'\,II' = CII \cdot \cos\alpha = h \cdot \cos\alpha$

(Zob. art. 9, ust. b)!)

Pole zatem rzutu trójkąta $A'\,B'\,C'$ jest równe:

$$\begin{aligned} 2f' &= A'\,G' \cdot B'\,I' + A'\,G' \cdot C'\,II' \\ &= AG \cdot w \cdot \cos\alpha + AG \cdot h \cdot \cos\alpha \\ &= AG\,(w + h) \cdot \cos\alpha = 2f \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

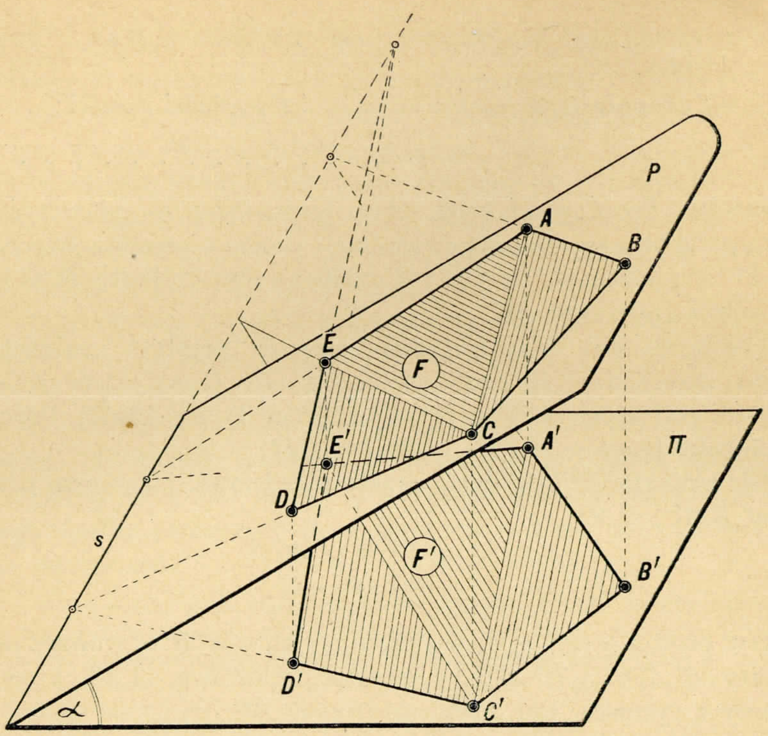
$$\text{Zatem } f' = f \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

c) Na rys. 16 przyjęto na płaszczyźnie P, nachylonej do rzutni π pod kątem α, dowolny wielokąt $ABCDE$ o polu F i wykreślono jego rzut prostokątny $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$, którego pole oznaczono przez F'!

Dzieląc wielokąt i jego rzut na trójkąty udowodnij samodzielnie, że równanie 1) z ust. b) jest słuszne dla rzutu jakiegokolwiek wielokąta płaskiego, to jest, że:

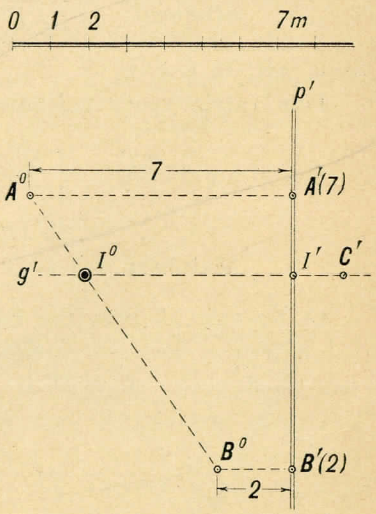
$$F' = F \cos\alpha.$$

Pole rzutu figury płaskiej jest równe polu samej figury, pomnożonemu przez cosinus kąta nachylenia jej płaszczyzny do rzutni.



Rys. 16.

14. Zagadnienia.



Rys. 17.

Przykład 1.

Dany jest rzut cechowany prostej największego spadku p płaszczyzny P i rzut prostokątny punktu C tej płaszczyzny. Wyznaczyć cechę punktu C. (Rys. 17).

Rozwiązanie. Przez punkt C przechodzi na płaszczyźnie P prosta pozioma g, prostopadła do prostej największego spadku p. Każdy punkt prostej g posiada tę samą cechę co punkt C, a więc również punkt I, w którym g przecina prostą p. Jeżeli zatem przez rzut C' poprowadzimy prostą g', prostopadłą do rzutu p', to prosta g' jest rzutem prostokątnym prostej g i przecina p' w rzucie prostokątnym I' punktu I. (Por. art. 13, ust. a) !).

Cechę punktu I znajdziemy przy pomocy trapezu rzutującego odcinek AB prostej p; rysujemy go na płaszczyźnie rysunku jako trapez prostokątny $A'B'B^0A^0$, obróciwszy jego płaszczyznę dokoła p' o kąt 90^0 (Por. zagadnienie 1, art. 10, rys. 11 !).

Odcinek w tym trapezie $I'I^0$ prostopadły do p' jest szukaną cechą punktu C.

Przykład 2.

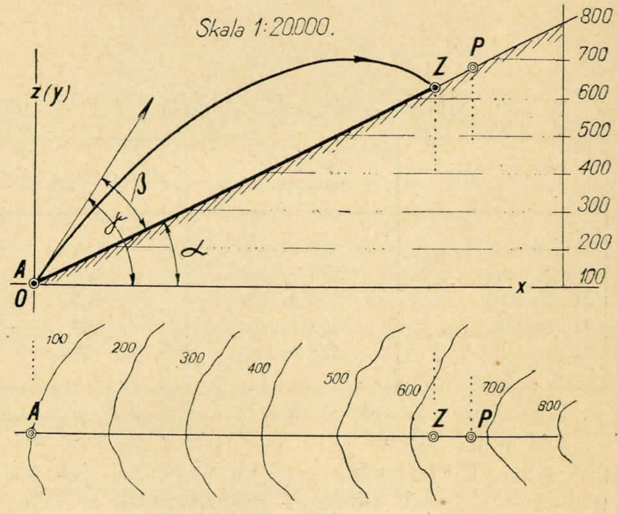
Wyznaczyć donośność strzału AZ moździerza piechoty na terenie spadzistym, mając do dyspozycji plan poziomnicowy oraz równanie, podług którego oblicza się tę donośność:

$$AZ = 2\frac{V_0^2 \sin\beta \cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\alpha}, \text{ w którym:}$$

V_0 jest szybkością (prędkością) początkową pocisku; przyjmijmy np. 200 m/sek.; β kątem nachylenia pocisku w punkcie wyjściowym do płaszczyzny terenu;

α kątem nachylenia płaszczyzny terenu do płaszczyzny poziomu;

g przyśpieszenie ziemskie.



Rys. 18.

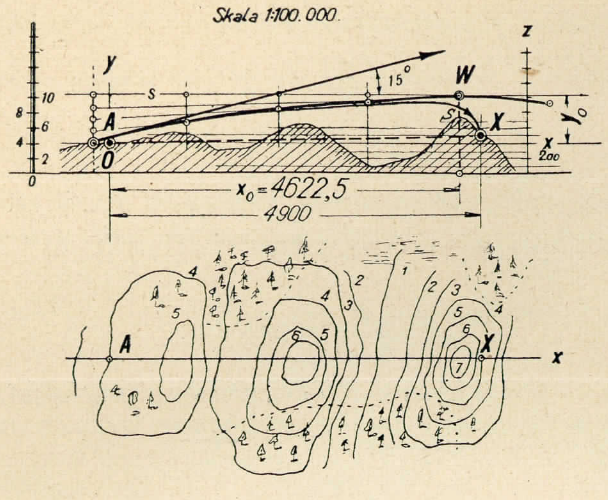
Wskazówka. Niechaj A oznacza nasze stanowisko w terenie, P cel strzału. (Rys. 18). Rysujemy przekrój terenu płaszczyzną pionową, przechodzącą przez linię AP, czyli tzw. profil terenu. Linia AP utworzy na tym profilu z linią poziomą x kąt α, który obliczymy, jak w przykładzie 2, art. 10.

Kąt β przyjmujemy tak, aby wyjście pocisku połowiło kąt między pionem z a linią AP, tj.:

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

wtedy bowiem dalekość rzutu AZ osiąga swoje maksimum.

Przykład 3. *Na podstawie podanego wykazu donośności strzału z pięciu różnych broni osądzić, której z nich należy użyć i przy jakim kącie podniesienia (elewacji), aby strzał jej trafił ze stanowiska A w stanowisko X na zboczu przeciwległej góry.*



Rys. 18a.

Do dyspozycji mamy mapę topograficzną w skali 1 : 100 000. (Rys. 18 a).

Rozwiązanie. 1) Najpierw wykreślamy profil przekroju terenu płaszczyzną pionową, przechodzącą przez linię AX i obliczamy rzut prostokątny odcinka AX, jak w przykładzie 3 w art. 10; a ponieważ spadek tego odcinka jest bardzo mały, przeto za jego długość przyjmujemy wprost długość rzutu.

W ten sposób obliczona długość $AX = 4900$ m.

Rodzaj broni	Szybkość początkowa	Kąt podniesienia	Donośność strzału w powietrzu
1) Karabin . . .	880 m/sek	$4^1/_2{}^0$	4 000 m
2) Haubica . . .	340 m/sek	15^0	9 800 m
3) Armata . . .	300 m/sek	15^0	12 700 m
4) Armata . . .	550 m/sek	30^0	10 700 m
5) Armata . . .	430 m/sek	15^0	4 880 m

Poznajemy, że należy użyć armaty ad 5) przy kącie podniesienia $\gamma = 15^0$.

2) Chodzi obecnie o to, czy pocisk nie zawadzi po drodze o szczyt drugiej góry. Ruch środka pocisku w próżni, jak wiadomo, jest ruchem wypadkowym dwóch ruchów: jednostajnego w kierunku poziomym, o szybkości $V_0 \cos\gamma$, i *jednostajnie opóźnionego* w kierunku pionowym, o szybkości $V_0 \sin\gamma$, jeżeli opuszcza lufę *z szybkością początkową* V_0, *pod kątem podniesienia* γ.

Gdyby zatem pocisk leciał w próżni, znalazłby się po t sekundach w miejscu, określonym współrzędnymi:

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos\gamma$$
$$y = V_0 \cdot t \cdot \sin\gamma - \tfrac{1}{2}\, gt^2,$$

gdzie g jest przyśpieszeniem ziemskim.

Rugując zaś z tych równań t, otrzymamy *równanie toru*, który zakreśliłby środek pocisku w próżni:

$$y = tg\,\gamma \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{V_0^2 \cos^2\gamma}\, x^2 = bx - ax^2 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

Jest to, jak wiadomo, równanie paraboli, której oś ma położenie pionowe, wierzchołek zaś W jest w miejscu, gdzie powyższa funkcja st. 2. ma maksimum, a więc w miejscu:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -\frac{b}{2a} = \frac{V_0^2 \sin 2\gamma}{2g} \\ y_0 &= -\frac{\triangle}{4a} = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\gamma \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

W powietrzu jednak środek pocisku zakreśla krzywą balistyczną, która przechodzi *w bliskości wierzchołka* paraboli ad 1).

Przyjmując więc w równaniu 2):

$V_0 = 430$ m/sek, $\gamma = 15^0$, $g = 10$ m, otrzymamy współrzędne wierzchołka W:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 4\,622{,}5 \text{ m} \\ y_0 &= 621 \text{ m} \end{aligned}\right\} \text{, z których poznajemy, że } W$$

znajduje się o 321 m wyżej od szczytu góry S, ponad który ma przelecieć pocisk.

*Przyjmujemy zatem, że pocisk nie zawadzi o ten szczyt i wybuchnie w bliskości miejsca X.**

Ćwiczenie.

Dane są rzuty cechowane trzech punktów płaszczyzny P_1: $A'(1)$, $B'(4)$, $C'(8{,}3)$.

Mamy wyznaczyć: a) *ślad płaszczyzny* P_1; b) *prostą największego spadku;* c) *kąt nachylenia płaszczyzny* P_1 *do rzutni;* d) *rzeczywistą wielkość trójkąta* ABC.

Wskazówki ad a). Należy wyznaczyć ślady prostych AB i BC, jak w art. 10. Prosta łącząca te ślady jest śladem płaszczyzny P_1.

Ad b) i c). Rzut prostej największego spadku otrzymamy, jeżeli przez jeden z rzutów danych punktów, np. przez B' (4), poprowadzimy prostopadłą do wykreślonego śladu płaszczyzny; kąt nachylenia prostej największego spadku, który jest również kątem nachylenia płaszczyzny, znajdziemy jak w art. 10.

Ad d). Rzeczywistą wielkość trójkąta ABC otrzymamy, jeżeli wyznaczymy rzeczywiste wielkości jego boków! (Por. art. 10, przykład 1!)

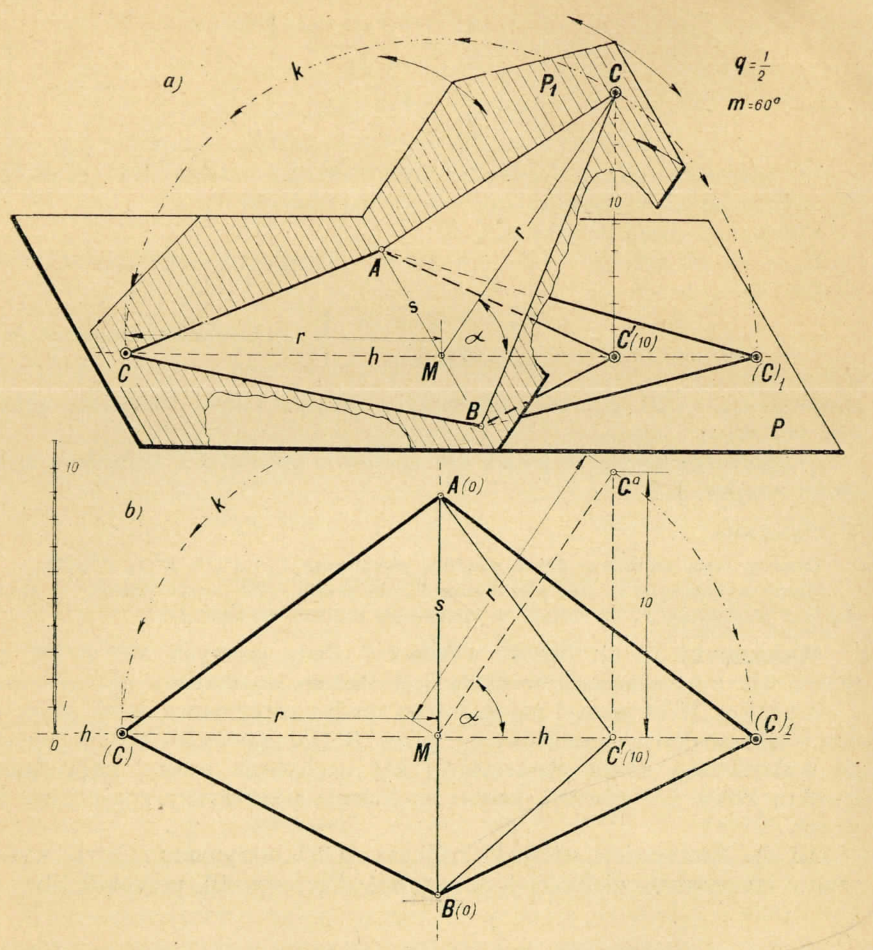
§ 4. Kład płaszczyzny i jego zastosowanie.

15. a) Weźmy pod uwagę trójkąt ABC, opierający się bokiem AB o rzutnię P, od której wierzchołek C jest odległy o 10 przyjętych jednostek długości. [Rys. 19 a)]. Kąt nachylenia do rzutni płaszczyzny trójkąta P_1 oznaczono przez α, jej ślad przez s, rzut cechowany wierzchołka C przez $C'(10)$.

Poprowadźmy następnie przez wierzchołek C prostą największego spadku płaszczyzny P_1 i oznaczmy jej punkt przecięcia się ze śladem s przez M. Prosta h łącząca punkt M z rzutem C' jest rzutem prostokątnym prostej CM, jest przeto prostopadła do śladu s, tj.

$C'M \equiv h \perp s$. [Zob. art. 13 ust. a)!].

* Bliższe objaśnienia do przykładu 2. i 3. znajdzie uczeń w artykułach 9—28 książki: Dr Tadeusz Felsztyn, Balistyka. Książnica-Atlas. 1939. Biblioteka Przysposobienia Wojskowego. Z. 1.



Rys. 19.

Jeśli płaszczyznę P_1 obrócimy dokoła śladu s o kąt $(180-\alpha)$ lub α, to zjednoczy się ona z rzutnią, a punkt C, zakreślając w przestrzeni łuk koła k o promieniu $r = CM$ i środku M, padnie na prostą h.

Te położenia punktu C na rzutni oznaczać będziemy przy pierwszym zjednoczeniu przez (C), przy drugim przez $(C)_1$.

Oba te położenia punktu (C) i (C_1) mają równą odległość od śladu s, a mianowicie równą promieniowi r, który jest przeciwprostokątną prostokątnego trójkąta $CC'M$.

Jedną przyprostokątną trójkąta $CC'M$ jest odległość rzutu C' od śladu s, tj. odcinek $C'M$, drugą zaś przyprostokątną jest odległość punktu C w przestrzeni od rzutni, tj. odcinek CC', czyli cecha punktu C.

Podczas obrotu płaszczyzny P_1 nie zmieniają swego położenia punkty śladu s, np. wierzchołki A i B; dlatego łącząc wierzchołki A i B z punktem (C) lub $(C)_1$, otrzymamy trójkąt $(C)AB$, względnie $(C)_1\,AB$, z którym się nakrywa trójkąt ABC, jeżeli jego płaszczyznę P_1 obrócimy o kąt $(180-\alpha)$, względnie o kąt α.

Zjednoczenie w powyższy sposób płaszczyzny P_1 z rzutnią nazywamy **k ł a d e m** płaszczyzny P_1 na tę rzutnię.

Punkt (C), wzgl. $(C)_1$ nazywamy k ł a d e m p u n k t u C;
prostą $A(C)$, wzgl. $A(C)_1$ nazywamy k ł a d e m p r o s t e j AC;
trójkąt $(C)AB$, wzgl. $(C)_1\,AB$ nazywamy k ł a d e m t r ó j k ą t a ABC.

b) Mając więc dany rzut cechowany powyższego trójkąta $A(0)$ $B(0)$ $C'(10)$ [Rys. 19 b)], wykreślimy jego kład na rzutnię w następujący sposób:

1) Z rzutu C' kreślimy prostopadłą h do śladu s płaszczyzny, który w danym przypadku jest prostą $A(0)$ $B(0)$.

2) Budujemy trójkąt prostokątny $MC'C^0$, w którym jedną przyprostokątną jest odległość rzutu C' od s, drugą zaś cecha punktu C.

3) Przeciwprostokątną trójkąta $MC'C^0$ zakreślamy z punktu M łuk koła k, który przecina prostą h w punktach (C) i $(C)_1$; punkty te są kładami punktu C.

4) Przez połączenie kładu (C), względnie $(C)_1$, z punktami $A(0)$ i $B(0)$, których kłady są w nich samych, otrzymujemy kład (C) $A(0)$ $B(0)$, względnie $(C)_1\,A(0)$ $B(0)$ trójkąta ABC.

Uwaga. *Kąt ostry α przy wierzchołku M w trójkącie $MC'C^0$ jest kątem nachylenia płaszczyzny danego trójkąta ABC do rzutni.*

c) Rysunek 19 a) poucza równocześnie, *jak wykreśla się rzut C' punktu C, jeżeli jest dany kład (C) punktu C i kąt nachylenia płaszczyzny P_1.* Postępujemy wtedy następująco:

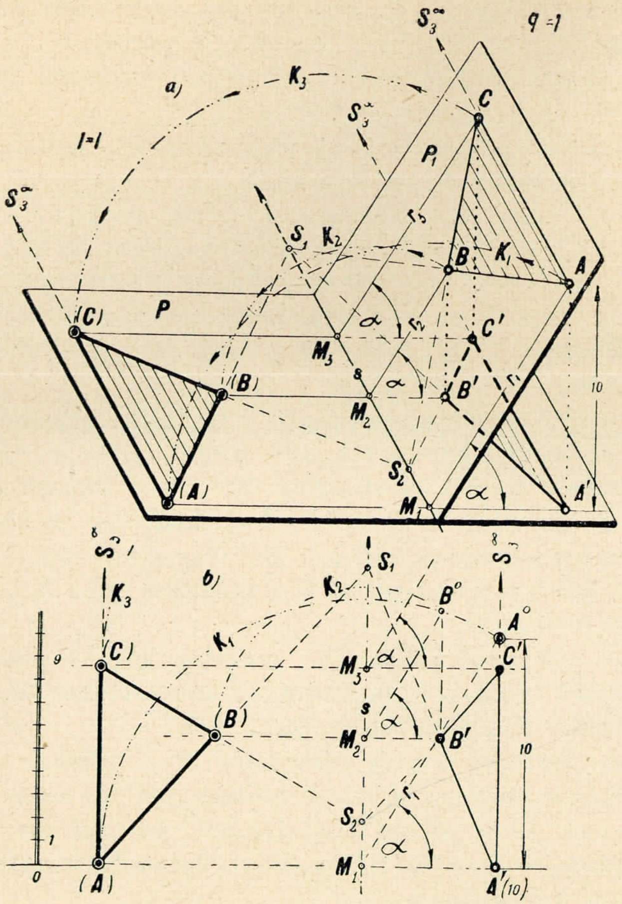
Przez (C) kreślimy prostą h prostopadłą do śladu s płaszczyzny i oznaczamy punkt przecięcia się prostych h i s przez M. Przy prostej h budujemy kąt α tak, aby jego wierzchołek schodził się z punktem M.

Jeżeli przetniemy drugie ramię kąta α łukiem k, zakreślonym z punktu M promieniem równym odcinkowi $M(C)$, to otrzymamy punkt C^0. Kreśląc zaś z C^0 prostopadłą do prostej h otrzymamy w przecięciu się tych prostych rzut C'.

Cechę punktu C otrzymamy, jeżeli zmierzymy odcinek $C^0\,C'$.

16. Zadania.

Przykład 1. *Dany jest rzut prostokątny trójkąta ABC* (Rys. 20). *leżącego na płaszczyźnie P_1, wyznaczonej przez jej ślad s i rzut cechowany $A'(10)$ jednego jej punktu. Wyznaczyć rzeczywistą wielkość i kształt trójkąta ABC.*



Rys. 20.

Rozwiązanie. Rzeczywistą wielkość trójkąta otrzymamy, jeżeli wykreślimy jego kład na rzutnię.

Kład wierzchołka A, którego cecha jest dana, wykreślamy tak, jak kład punktu C w art. 15, rys. 19.

Kład wierzchołka B moglibyśmy wykreślić przy pomocy trójkąta $M_2\,B^0\,B'$, podobnego do trójkąta $M_1\,A^0\,A'$; dokładniejsza jednak jest konstrukcja przy pomocy kładu boku AB.

Kład boku AB otrzymamy, jeżeli jego rzut $A'\,B'$ przedłużymy do przecięcia się ze śladem s, a następnie punkt przecięcia się S_1 połączymy z kładem (A). Punkt S_1 jest bowiem śladem prostej AB (por. art. 12 b) !), jego więc kład leży w nim samym (por. art. 15 a) !).

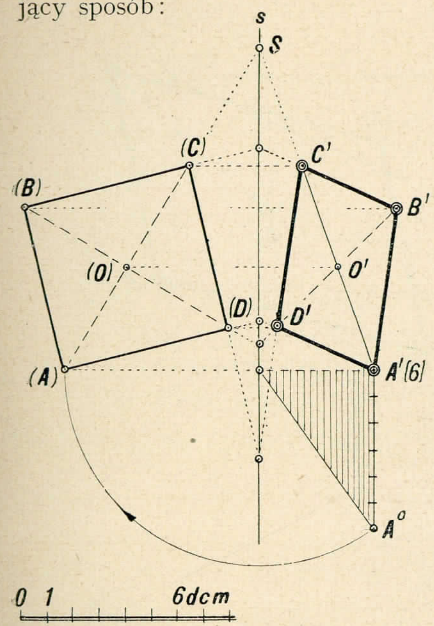
Kład (B) wierzchołka B znajduje się zatem na kładzie $S_1\,(A)$ boku AB i na prostopadłej do śladu s, poprowadzonej przez B', a więc w punkcie przecięcia się tych prostych.

W podobny sposób wykreślamy kład (C) wierzchołka C przy pomocy kładu boku BC.

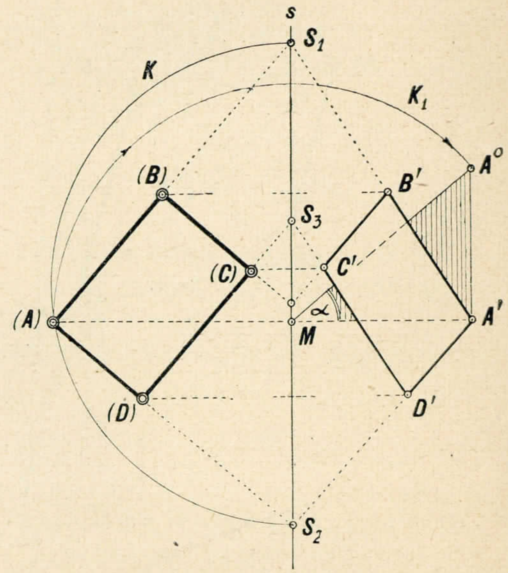
Uwaga. 1) *Jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie* P_1 *jest równoległa do śladu* s *tej płaszczyzny* [np. bok AC na rys. 20 a)], *to również rzut tej prostej i jej kład są równoległe do śladu* s [np. rzut $A'\,C'$ i kład $(A)\,(C)$. Por. art. 13, rys. 14 !].

Przykład 2. *Dana jest płaszczyzna, wyznaczona przez swój ślad* s *i rzut cechowany* $A'(6)$ *jednego jej punktu. Wykreślić rzut kwadratu leżącego na tej płaszczyźnie, jeżeli odcinek* $A'(6)C'$ *jest rzutem przekątnej tego kwadratu.* (Rys. 21).

Rozwiązanie. Wyznaczmy kład (A) punktu A i połączmy ten kład z punktem S, w którym rzut $A'\,C'$ przecina ślad s płaszczyzny kwadratu. Prosta $(A)\,S$ jest kładem przekątnej kwadratu (Dlaczego?). Długość tej przekątnej otrzymamy, jeżeli wyznaczymy kład (C) punktu C. Na przekątnej $(A)\,(C)$ kreślimy kwadrat, którego rzut wyznaczymy w następujący sposób:



Rys. 21.



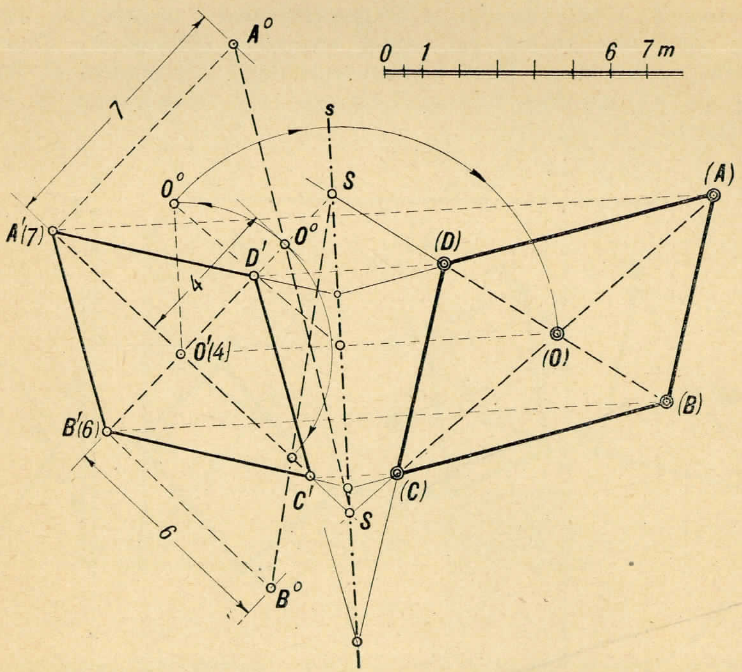
Rys. 22.

Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie (O); rzut O' tego punktu znajduje się na rzucie przekątnej $A'\,C'$ i na prostej, poprowadzonej przez (O) prostopadle do śladu s. Rzut przekątnej $(B)\,(D)$ przechodzi przez swój ślad i rzut O'; na tym rzucie i na prostopadłych do śladu s, poprowadzonych przez wierzchołki (B) i (D) znajdują się rzuty B' i D'.

Przykład 3. *Dany jest ślad* s *płaszczyzny* P_1 *i równoległobok* $A'\,B'\,C'\,D'$. *Jaki kąt nachylenia musi mieć płaszczyzna* P_1, *aby równoległobok* $A'\,B'\,C'\,D'$ *był rzutem prostokąta leżącego na płaszczyźnie* P_1? (Rys. 22).

Rozwiązanie. Oznaczmy punkty, w których boki przyległe $A'B'$ i $A'D'$ przecinają ślad s, przez S_1 i S_2. Na odcinku $S_1 S_2$ jako na średnicy zakreślmy koło K. Prosta, wykreślona przez A' prostopadle do śladu s, przecina to koło w punkcie (A), który możemy przyjąć za kład wierzchołka prostokąta.

Oznaczmy przez M punkt, w którym prosta A' (A) przecina ślad s. Jeżeli zbudujemy trójkąt prostokątny $MA'A^0$, w którym jedną przyprostokątną jest odcinek $A'M$, przeciwprostokątną zaś odcinek $(A) M = r$, to kąt ostry w tym trójkącie przy wierzchołku M jest szukanym kątem nachylenia płaszczyzny prostokąta do rzutni.



Rys. 23.

Przykład 4. *Wyznaczyć rzeczywistą wielkość równoległoboku, którego rzut prostokątny A' B' C' D' jest rombem, jeżeli są podane cechy wierzchołków A i B i środka O.* (Rys. 23).

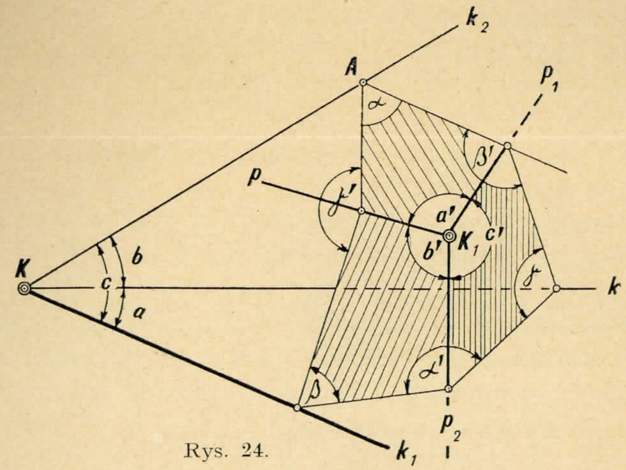
Wskazówka. Wyznaczasz ślady S przekątnych rombu, jak w przykładzie 1, art. 10, rys. 11.

Prosta s łącząca te ślady jest śladem płaszczyzny, na której leży równoległobok $ABCD$.

Dalej jak w przykładzie 1 niniejszego artykułu.

Zastosowanie kładu płaszczyzny do zagadnienia konstrukcji kąta trójściennego.

17. a) Weźmy pod uwagę trzy półproste k, k_1 i k_2 o wspólnym punkcie K i nie leżące w jednej płaszczyźnie. Tworzą one ze sobą trzy kąty wypukłe (mniejsze od 180^0), których pola ograniczają część przestrzeni, zwaną k ą t e m t r ó j ś c i e n n y m, krótko t r ó j ś c i a n e m. (Rys. 24).



Rys. 24.

Punkt K jest w i e r z c h o ł k i e m kąta trójściennego K $(k k_1 k_2)$ kąty $\sphericalangle (kk_1) = a$, $\sphericalangle (kk_2) = b$, $\sphericalangle (k_1 k_2) = c$ są jego k ą t a m i p ł a s k i m i, płaszczyzny tych kątów jego ś c i a n a m i.

Każde dwie ściany tworzą kąty dwuścienne, które oznaczamy:

przy krawędzi	k_2,	przeciwległej kątowi	a,	przez	α	Porówn. art. 13 rys. 14!
,,	k_1,	,,	b,	,,	β	
,,	k,	,,	c,	,,	γ	

Kąty α, β, γ nazywamy k ą t a m i d w u ś c i e n n y m i kąta trójściennego.

b) Przyjmijmy wewnątrz kąta trójściennego K $(kk_1 k_2)$ dowolny punkt K_1 i z tego punktu poprowadźmy:

półprostą	p	prostopadłą	do	ściany	$(k_1 k_2)$,
,,	p_1	,,	,,	,,	(kk_2),
,,	p_2	,,	,,	,,	(kk_1).

Półproste te tworzą drugi trójścian $K_1(pp_1 p_2)$, który nazywamy t r ó j ś c i a n e m b i e g u n o w y m do danego trójścianu K $(kk_1 k_2)$.

Weźmy pod uwagę jedną ze ścian kąta biegunowego, np. ścianę (pp_1). Krawędź jej p jako prostopadła do ściany $(k_1 k_2)$ jest równocześnie prostopadła do krawędzi k_2, leżącej na tej ścianie; również krawędź p_1 jest prostopadła do k_2, gdyż jest prostopadła do ściany (kk_2), na której również leży k_2.

Ściana (pp_1) jest zatem — w myśl twierdzenia I w art. 3 — prostopadła do krawędzi k_2 danego trójścianu; przecina przeto tę krawędź w wierzchołku A, ściany zaś $(k_2 k)$ i $(k_2 k_1)$ wzdłuż ramion kąta α, będącego miarą kąta dwuściennego, utworzonego przez te ściany.

W podobny sposób można wykazać, że:

1) ściana (pp_2) trójścianu biegunowego jest prostopadła do krawędzi k_1 trójścianu danego i przecina ściany $(k_1 k)$ i $(k_1 k_2)$ podług kąta β;

2) ściana zaś $(p_1 p_2)$ jest prostopadła do krawędzi k i przecina ściany (kk_1) i (kk_2) podług kąta γ.

W ten sposób powstają w przestrzeni trzy czworokąty (na rysunku zakreskowane) o wspólnym wierzchołku K_1, które mają po dwa kąty proste (wskaż je!).

Naprzeciw kątów dwuściennych α, β *i* γ *trójścianu* $K(kk_1 k_2)$ leżą w tych czworokątach *kąty płaskie* a', b' *i* c' *trójścianu biegunowego* K_1 $(pp_1 p_2)$. Na czworokątach tych spostrzegamy zatem, że:

$$\left.\begin{aligned} a' + \alpha &= 180 \\ b' + \beta &= 180 \\ c' + \gamma &= 180 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

To znaczy:

Każdy kąt płaski trójścianu biegunowego dopełnia do 180^0 *przeciwległy kąt dwuścienny trójścianu danego.*

c) Rozważane w ust. *b*) czworokąty są wycięte na ścianach trójścianu biegunowego przez ściany danego trójścianu.

Analogicznie — ściany trójścianu biegunowego wycinają na ścianach danego trójścianu czworokąty o wspólnym wierzchołku K, które mają również po dwa kąty proste (wskaż je!) *Naprzeciw kątów płaskich* a, b *i* c *danego trójścianu* leżą w tych czworokątach *kąty dwuścienne* α', β' *i* γ' *trójścianu biegunowego.* Mamy zatem:

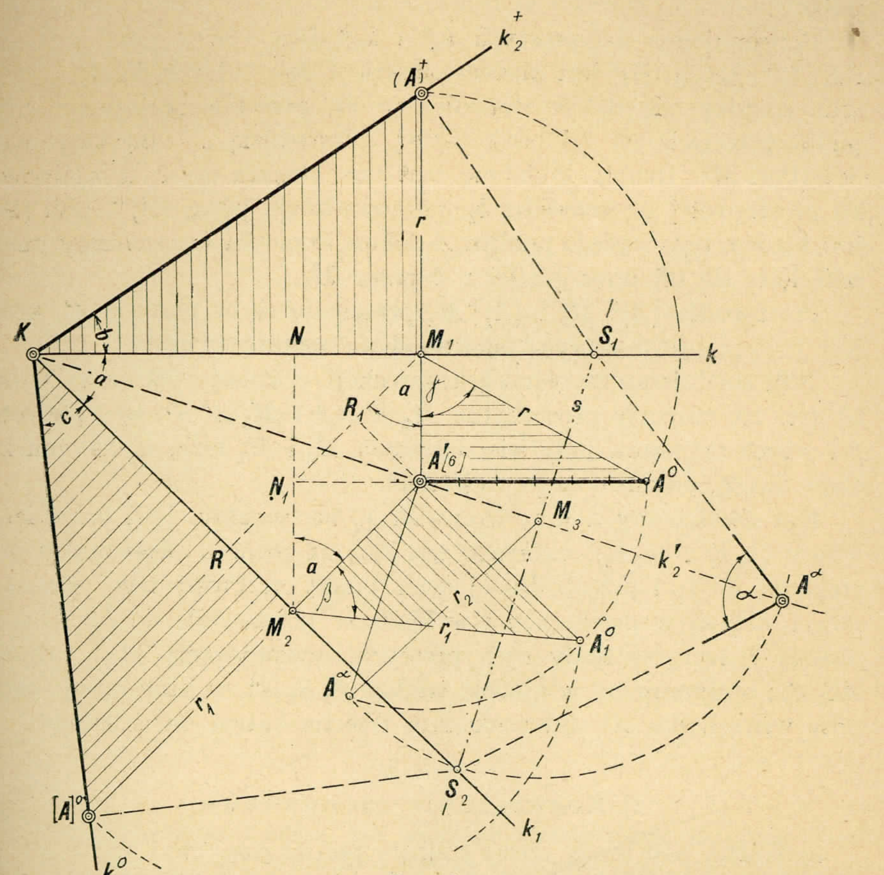
$$\left.\begin{aligned} a + \alpha' &= 180 \\ b + \beta' &= 180 \\ c + \gamma' &= 180 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Uwaga. *Jeżeli trójścian* K_1 (pp_1p_2) *jest trójścianem biegunowym do trójścianu* K $(kk_1 k_2)$, *to nawzajem trójścian* K $(kk_1 k_2)$ *jest trójścianem biegunowym do trójścianu* K_1 $(pp_1 p_2)$. (Dlaczego?).

18. Zagadnienie. *Dane są wszystkie trzy kąty płaskie* a, b *i* c *trójścianu* K $(kk_1 k_2)$ (Rys. 25); *mamy wyznaczyć wszystkie jego kąty dwuścienne*:

1) konstrukcyjnie;

2) rachunkowo.



Rys. 25.

1. Rozwiązanie konstrukcyjne.

Przyjmijmy ścianę (kk_1) za rzutnię i narysujmy na niej obok siebie wszystkie trzy dane kąty płaskie a, b, c; otrzymamy tzw. siatkę trójścianu. Ramię k_2^+ kąta b możemy uważać za kład krawędzi k_2 trójścianu, po wykonaniu przez ścianę (kk_2) obrotu dokoła krawędzi k o kąt $180 - \gamma$, podobnie ramię k_2^0 kąta c możemy uważać za kład tejże krawędzi k_2, po wykonaniu przez ścianę $(k_1 k_2)$ obrotu dokoła krawędzi k_1 o kąt $180 - \beta$. (Por. art. 15 a)!).

Jeżeli więc przyjmiemy w przestrzeni na krawędzi k_2 dowolny punkt A, np. o cesze 6, to przy pierwszym kładzie padnie on na prostą k_2^+ jako punkt $(A)^+$, przy drugim kładzie na prostą k_2^0 jako punkt $(A)^0$, tak że odcinek $K(A)^+ =$ odcinkowi $K(A)^0$.

A zatem kąty β i γ wyznaczymy konstrukcyjnie w sposób następujący:

Przyjmujemy na prostych k_2^0 i k_2^+ dwa równe odcinki $K(A)^0$ i $K(A)^+$. Jeżeli $(A)^0$ jest kładem punktu A dokoła krawędzi k_1, to jego rzut znajduje się na prostopadłej do k_1, przechodzącej przez $(A)^0$; punkt przecięcia się tej prostopadłej z krawędzią k_1 oznaczmy przez M_2 (Por. art. 15 b)!). Podobnie rzut tego punktu musi się znajdować na prostopadłej do krawędzi k_1, poprowadzonej przez $(A)^+$, jeśli $(A)^+$ jest kładem tego samego punktu A dokoła krawędzi k; oznaczmy punkt przecięcia się tej prostopadłej z k przez M_1.

Prostopadła $(A)^0\, M_2$ i $(A)^+ M_1$ przecinają się w punkcie A', który jest rzutem prostokątnym punktu A na rzutnię $(k\, k_1)$.

Jeśli zbudujemy za pomocą konstrukcji, o której była mowa w ust. b) art. 15, trójkąty prostokątne $M_2\, A'\, A_1^0$ i $M_1\, A'\, A^0$, to kąty ostre β i γ tych trójkątów przy wierzchołkach M_2 i M_1 będą szukanymi kątami dwuściennymi danego trójścianu.

Kąt dwuścienny α przy krawędzi k_2 otrzymamy, jeśli przetniemy ściany $(k_2\, k)$ i $(k_2\, k_1)$, tworzące ten kąt, za pomocą płaszczyzny prostopadłej do k_2 i przechodzącej przez punkt A. Proste tego przecięcia AS_1 i AS_2 są w przestrzeni i w kładach prostopadłe do k_2. Dokoła prostej s, łączącej ślady tych prostych, wykonywamy kład trójkąta $AS_1\, S_2$; otrzymujemy w kładzie trójkąt $S_1\, S_2\, A^a$, w którym kąt ostry przy wierzchołku A^a jest szukanym trzecim kątem dwuściennym.

2) Rozwiązanie rachunkowe.

a) Weźmy pod uwagę cztery trójkąty prostokątne, które są na rys. 25 zakreskowane. Jeżeli je obrócimy dokoła ich podstaw tak, aby się zeszły w przestrzeni ich wierzchołki $(A)^+$, A^0, A_1^0 i $(A)^0$ w jednym punkcie A, to ograniczą one ostrosłup czworościenny $AKM_1\, A'\, M_2\, K$ o podstawie $A'\, M_1\, KM_2$, do której dwie ściany są prostopadłe, jedna nachylona pod kątem β, a jedna pod kątem γ.

Zbudujmy na podstawie tego ostrosłupa trójkąt prostokątny $A'\, M_2\, N_1$ przez wykreślenie przez M_2 prostej $M_2\, N \perp k$, przez A' zaś prostej $A'N_1 \perp M_2 N$. Zapamiętawszy, że w trójkącie $A'\, M_2\, N_1$ kąt ostry $A'\, M_2\, N_1 = a$ (dlaczego?), przedstawmy ostrosłup w rzucie równoległym ukośnym na rys. 26, przyjmując na jego krawędziach k_2, k_1 i k odcinki $KA = KB = KC = 1$. Łuki zatem $\widehat{BC} = a$, $\widehat{AC} = b$, $\widehat{AB} = c$ są miarami łukowymi kątów płaskich a, b, c.

W ostrosłupie tym mamy zatem (Rys. 26):

$$A'\, N_1 = A'M_2 \cdot \sin a = AM_2 \cdot \cos\beta \cdot \sin a = AK \cdot \sin c \cdot \cos\beta \cdot \sin a =$$
$$= \sin c \cdot \sin a \cdot \cos\beta \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$KN = KM_2 \cdot \cos a = \cos c \cdot \cos a \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

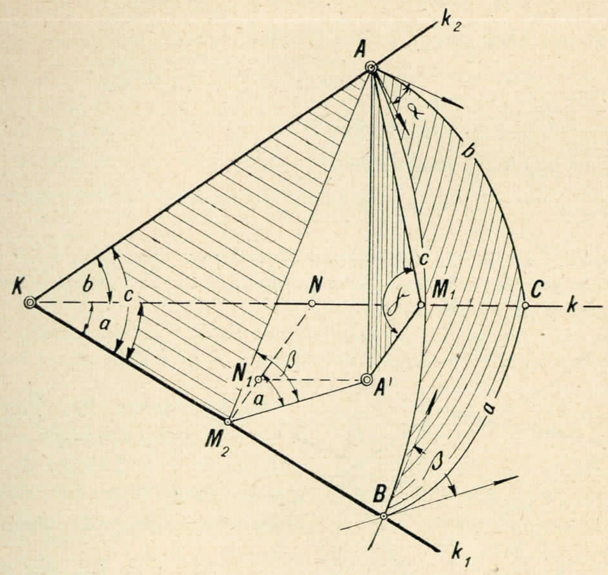
A ponieważ $KM_1 = KN + NM_1 = KN + A'N_1$
$= KA \cdot \cos b = \cos b,$

przeto po dodaniu równań 1) i 2), otrzymamy równanie:

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos\beta$$

W podobny sposób wyprowadzimy równania:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos\gamma \\ \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3)$$



Rys. 26.

Równania powyższe noszą, jak wiadomo, nazwę twierdzenia cosinusów kątów płaskich trójścianu i służą do wyznaczenia rachunkiem kątów dwuściennych trójścianu, jeżeli są dane wszystkie jego kąty płaskie.

b) Przyjmijmy dla kątów płaskich danego trójścianu wartości:

$$\sphericalangle\,(kk_1) = a = 44^0;$$
$$\sphericalangle\,(kk_2) = b = 33^0;$$
$$\sphericalangle\,(k_1\, k_2) = c = 35^0.$$

Natenczas z równania 3) mamy:

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos 33^0 - \cos 44^0 \cdot \cos 55^0}{\sin 44^0 \cdot \sin 55^0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\cos 44^0 = \bar{1},8569\\ \log\cos 55^0 = \bar{1},7586\end{array}\right\} +$$

$$\log n \qquad = \bar{1},6155$$

$$n = \cos 44^0 \cdot \cos 55^0 = 0,413$$

$$\left.\begin{array}{r}\cos 33^0 = 0,839\\ \cos 44^0 \cos 55^0 \doteq 0,413\end{array}\right\} -$$

$$0,426$$

$$\log 0,426 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\bar{1},6294$$

$$\left.\begin{array}{l}\log\sin 44^0 = \bar{1},8418\\ \log\sin 55^0 = \bar{1},9134\end{array}\right\} + \quad \bar{1},7552$$

$$\log\cos\beta = \;.\;.\;.\;\bar{1},8742$$

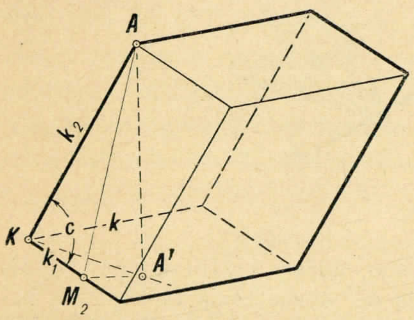
$$\beta = 41,5^0$$

W ten sam sposób znajdziesz:

$$\gamma = 94,4^0;\; \alpha = 57,8^0$$

19. Ćwiczenia. 1) *Oblicz objętość równoległościanu* (rys. 27), *jeżeli są dane wszystkie trzy jego kąty płaskie, schodzące się w jednym narożu K, i długości wszystkich trzech krawędzi schodzących się w tym narożu.*

Np. Niechaj kąty płaskie będą równe kątom płaskim z poprzedniego zadania, długości zaś krawędzi niechaj wynoszą: $k = 5$ dcm, $k_1 = 4$ dcm, $k_2 = 7$ dcm.



Rys. 27.

Wskazówka. Przyjmując za podstawę równoległościanu równoległobok o bokach $k = 5$ dcm i $k_1 = 4$ dcm, o kącie ostrym $\alpha = 44^0$, otrzymamy na obliczenie jego pola wzór:

$$P = kk_1 \sin \alpha$$

Wysokość równoległościanu

$$AA' = AM_2 \sin\beta = k_2 \sin c \sin\beta.$$

A zatem objętość

$$V = kk_1 k_2 \sin \alpha \sin c \sin \beta.$$

2) *Trójścian K* $(kk_1 k_2)$, *którego kąty dwuścienne* α, β *i* γ *i długości krawędzi* k, k_1 *i* k_2 *są dane, jest narożem równoległościanu.*

a) *Wyznaczyć konstrukcyjnie i rachunkiem jego kąty płaskie*; b) *obliczyć pole i objętość*, jeżeli:

$$\begin{array}{ll}\alpha = 45^0 55', & k = 2,5 \text{ m}\\ \beta = 80^0 10', & k_1 = 2,7 \text{ m}\\ \gamma = 82^0 23', & k_2 = 3,2 \text{ m.}\end{array}$$

Wskazówka. a) Chcąc wyznaczyć kąty płaskie a, b i c konstrukcyjnie, wyznaczymy przy pomocy równania 1) w art. 17 b) kąty płaskie a', b' i c'

trójścianu biegunowego K_1 $(pp_1 p_2)$, a następnie kąty jego dwuścienne α', β' i γ' — jak w art. 18.

Dopełnienia kątów α', β' i γ' do 180^0 są szukanymi — w myśl równań 2), art. 17 c) — kątami płaskimi a, b i c danego trójścianu.

b) Równania 3) z art. 18 odnoszą się również do trójścianu biegunowego K_1 $(pp_1 p_2)$ (zob. rys. 24), a więc:

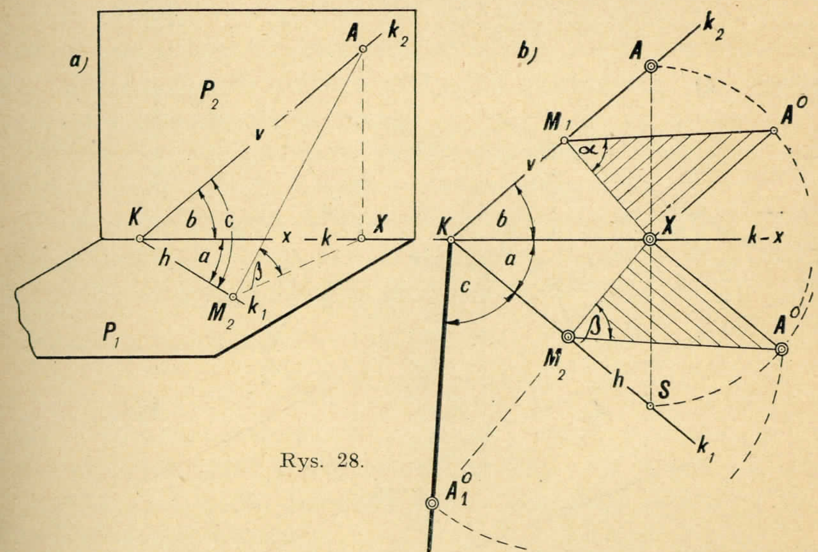
$$\begin{array}{l}\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cos \alpha'\\ \cos b' = \cos a' \cdot \cos c' + \sin a' \cdot \sin c' \cos \beta'\\ \cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cos \gamma'\end{array}$$

Jeżeli w powyższych równaniach wstawimy za a', b' i c' wartości z równań ad 1) art. 17 b), tj. wartości:

$$a' = 180 - \alpha;\quad b' = 180 - \beta;\quad c' = 180 - \gamma,$$

zaś za α', β' i γ' wartości z równań ad 2) art. 17 c), tj. wartości: $\alpha' = 180 - a$; $\beta' = 180 - b$; $\gamma' = 180 - c$, otrzymamy równania:

$$\left.\begin{array}{l}\cos \alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\\ \cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b\\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c\end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{III}$$



Rys. 28.

Równania te służą do obliczenia kątów płaskich trójścianu, jeżeli są dane wszystkie jego kąty dwuścienne — i noszą, jak wiadomo, nazwę *twierdzenia cosinusów kątów dwuściennych trójścianu.*

Przy pomocy tego twierdzenia obliczony kąt płaski

$$a = 42^0\, 39'\, 37''.$$

Itd.

3) *Dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny* P_1 *i* P_2 *o wspólnej krawędzi* k *przecinamy płaszczyzną trzecią* P. *Krawędź* k_1 *płaszczyzny* P *z płaszczyzną* P_1 *tworzy z krawędzią* k *kąt* a, *krawędź zaś* k_2 *płaszczyzn* P *i* P_2 *tworzy z* k *kąt* b. (Rys. 28 a).

Wyznaczyć konstrukcyjnie: a) kąty nachylenia α i β płaszczyzny P do płaszczyzn P_2 i P_1; 2) kąt c, zawarty między krawędziami k_1 i k_2. (Rys. 28 b)!).

4) *Trójścian K (kk_1k_2), o którym była mowa w poprzednim ćwiczeniu, przecięto płaszczyzną poprowadzoną przez punkt X na krawędzi k, prostopadle do krawędzi k_1; w ten sposób otrzymano klin AKM_2X.* (Rys. 28 a).

Przyjmując $a = 81^0\,1'$, $b = 92^0\,45'$, $KX = 5{,}6$ dcm *obliczyć*: 1) *kąty dwuścienne klina*; 2) *jego objętość i powierzchnię.*

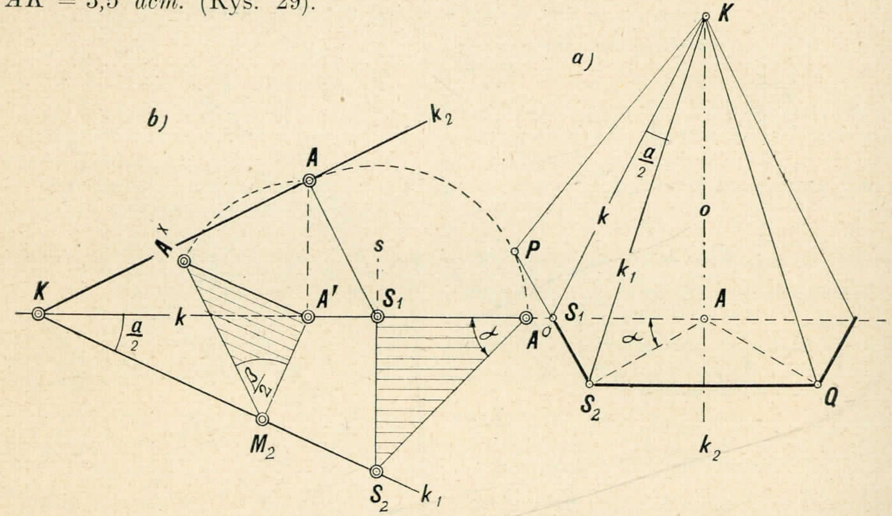
Wskazówka. Kąt płaski c obliczymy z równania 3) art. 18, jeżeli wprowadzimy w nim $\cos\gamma = \cos 90^0 = 0$; otrzymamy: $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

Mając a, b i c obliczamy kąty dwuścienne jak w art. 18. — 2) Itd. ($\sphericalangle\,\beta = 92^0\,43'$).

5) *W foremnym ostrosłupie n-ściennym jest dany kąt płaski α u wierzchołka K i wysokość AK.*

a) Wyznaczyć konstrukcyjnie i rachunkiem kąt dwuścienny przy krawędzi bocznej.

b) Obliczyć powierzchnię i objętość ostrosłupa, jeżeli $n = 5$, $\alpha = 30^0$, $AK = 3{,}5$ dcm. (Rys. 29).



Rys. 29.

Objaśnienie. Płaszczyzny dwusieczne kątów dwuściennych ostrosłupa przecinają się wzdłuż jednej prostej $O \equiv k_2$ i dzielą przestrzeń dokoła tej prostej na n równych dwuścianów, których więc kąty $2\alpha = \frac{360^0}{n}\cdot$ Jeżeli więc poprowadzimy przez prostą O płaszczyznę prostopadłą do ściany S_2KP, to utworzy ona z tą ścianą i płaszczyzną dwusieczną AKS_2 trójścian K (kk_1k_2), w którym znamy kąt płaski $(kk_1) = \frac{a}{2}$, kąt dwuścienny przy krawędzi $k = 90^0$ i kąt dwuścienny $\alpha = \frac{180^0}{n}$ przy krawędzi $k_2 \equiv 0$; szukamy kąta dwuściennego $\frac{\beta}{2}$ przy krawędzi k_1.

Konstrukcyjnie kąt $\frac{\beta}{2}$ wyznaczymy przy pomocy kładu. (Rys. 29 b).

Rachunkiem obliczymy $\frac{\beta}{2}$ przy pomocy równania III z ćwicz. 2):

$$\cos\alpha = -\cos\frac{\beta}{2}\cos\gamma + \sin\frac{\beta}{2}\sin\gamma\cos\frac{a}{2}, \quad \cos\gamma = \cos 90 = 0;$$

$$\text{stąd}\quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{180^0}{n}}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdyż $\frac{\beta}{2} < 90^0$.

Rozdział II.

Rzuty prostokątne na dwie rzutnie prostopadłe

20. W poprzednim rozdziale dowiedzieliśmy się, że sam rzut prostokątny utworu geometrycznego na jedną płaszczyznę nie wyznacza jeszcze tego utworu w przestrzeni.

Do wyznaczenia utworu w przestrzeni musiały być, prócz rzutu, podawane cechy poszczególnych punktów utworu.

Dowiemy się obecnie, że podawanie cech poszczególnych punktów można zastąpić przez rzut prostokątny tego utworu na drugą rzutnię, która ma położenie prostopadłe do pierwszej rzutni.

§ 1. Rzuty punktu.

21. Zrób sobie następujący przyrząd: wytnij z czarnej tektury, na której można pisać kredą, prostokąt długi np. 3 dcm, a szeroki 1,5 dcm! Połącz środki dłuższych boków prostokąta prostą x i wzdłuż tej prostej natnij tekturę!

Zegnij następnie tekturę wzdłuż prostej x tak, aby kwadraty, na które prosta x podzieliła prostokąt, tworzyły ze sobą kąt prosty, i utrwal je w tym położeniu za pomocą dwóch drucików!

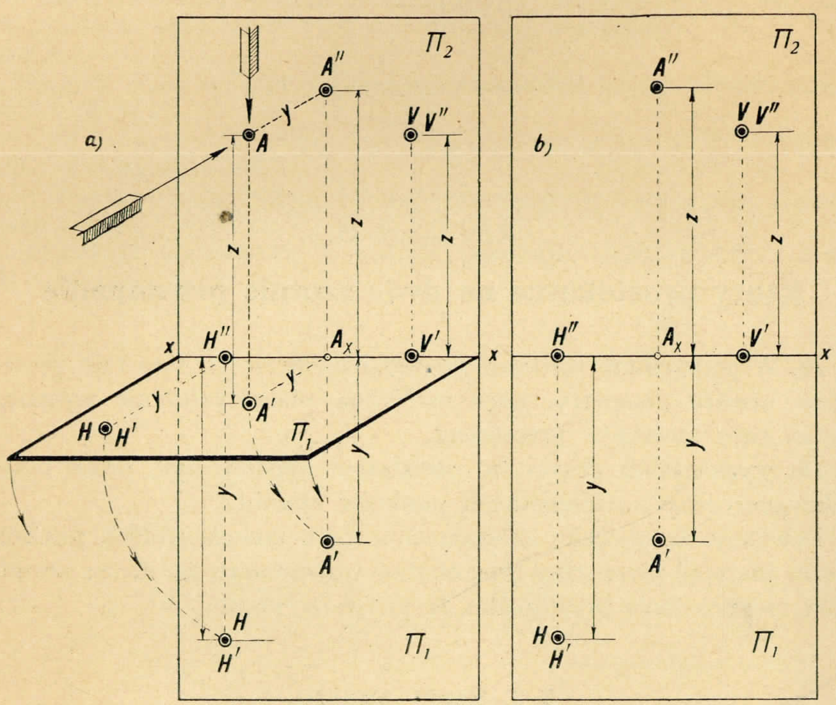
W tym położeniu będziemy brali te kwadraty za płaszczyzny rzutów. Płaszczyznę jednego kwadratu oznaczać będziemy literą π_1 i nazywać będziemy p i e r w s z ą r z u t n i ą; płaszczyznę drugiego kwadratu oznaczać będziemy literą π_2 i nazywać będziemy d r u g ą r z u t n i ą.

Zwykle płaszczyzny te trzymamy tak, że płaszczyzna π_1 ma położenie poziome, a płaszczyzna π_2 położenie pionowe. Płaszczyznę π_1

nazywamy wtedy **rzutnią poziomą**, płaszczyznę π_2 **rzutnią pionową**.

Krawędź przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_2 będziemy nazywali **osią** x (również **osią rzutów**).

22. a) Przyjmijmy w przestrzeni dowolny punkt A. (Rys. 30). Poprowadźmy przez punkt A prostą prostopadłą do pierwszej



Rys. 30.

rzutni π_1. Punkt, w którym ta prosta przebija rzutnię π_1, oznaczamy A', (czytaj: A z kreską!), a nazywamy **pierwszym** (**poziomym**) **rzutem** punktu A.

Poprowadźmy następnie przez punkt A drugą prostą prostopadłą do drugiej rzutni π_2. Jej punkt przebicia z tą rzutnią oznaczamy A'' (czytaj: A z dwiema kreskami!), a nazywamy **drugim** (**pionowym**) **rzutem** punktu A.

b) Wykreślmy na płaszczyźnie π_1 przez rzut A' prostopadłą do osi x. Punkt przecięcia się jej z tą osią oznaczmy A_x. Jeżeli następnie na płaszczyźnie π_2 przez rzut A'' wykreślimy prostopadłą do osi x, to prosta ta przejdzie również przez punkt A_x. (Dlaczego?).

Punkty $A\,A''\,A_x\,A'$ tworzą w przestrzeni prostokąt, którego bok AA' jest odległością punktu A do pierwszej rzutni, bok zaś AA'' jest odległością tego punktu od drugiej rzutni; bok $A''\,A_x$ jest odległością drugiego rzutu od osi x, bok zaś $A'\,A_x$ jest odległością pierwszego rzutu od tejże osi. A ponieważ $AA' = A''\,A_x$, $AA'' = A'\,A_x$, przeto spostrzegamy następujące własności rzutów prostokątnych tego samego punktu na dwie prostopadłe do siebie rzutnie:

1) *Odległość pierwszego (poziomego) rzutu danego punktu od osi x równa się odległości tego punktu w przestrzeni od drugiej (pionowej) rzutni.*

2) *Odległość drugiego (pionowego) rzutu tego punktu od osi x równa się odległości tego punktu w przestrzeni od pierwszej (poziomej) rzutni.*

23. Uzyskawszy w ten sposób pierwszy rzut A' i drugi rzut A'' punktu A, obróć pierwszą rzutnię dokoła osi x o 90^0, aby utworzyła z drugą rzutnią pierwotny prostokąt. Powiadamy, że *sprowadziliśmy obie rzutnie do jednej płaszczyzny* (rysunkowej).

Podczas tego obrotu płaszczyzny π_1 odcinki $A'\,A_x$ i $A''\,A_x$ są ciągle prostopadłe do osi x w punkcie A_x. Pozostają one również prostopadłe i wtedy, gdy rzutnia π_1 utworzy z rzutnią π_2 jedną płaszczyznę. Odcinki te utworzą wtedy jedną prostą $A'\,A''$, prostopadłą w punkcie A_x do osi x.

Wynika z tego zatem następująca własność dwóch rzutów prostokątnych tego samego punktu:

Jeżeli sprowadzimy obie rzutnie do jednej płaszczyzny, to pierwszy i drugi rzut tego samego punktu znajdują się zawsze na jednej prostej, prostopadłej do osi rzutów x.

Sprowadzone na jedną płaszczyznę rzuty przenosimy w wymiarach naturalnych lub w skali pomniejszonej na płaszczyznę zeszytu lub na papier rysunkowy. (Rys. 30 b).

24. Odległość punktu od pierwszej rzutni nazywamy „**współrzędną** z“, odległość zaś od drugiej rzutni „**współrzędną** y“.

a) Przyjmij dowolny punkt H na płaszczyźnie π_1!
Gdzie będzie pierwszy rzut, a gdzie drugi rzut tego punktu?
Ile wynosi współrzędna z? Zmierz współrzędną y! Narysuj rzuty tego punktu po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny rysunkowej! (Rys. 30 b)).

Zauważasz zatem, że:

Jeżeli punkt leży na pierwszej rzutni, to jego pierwszy rzut znajduje się w nim samym, a drugi rzut na osi x.

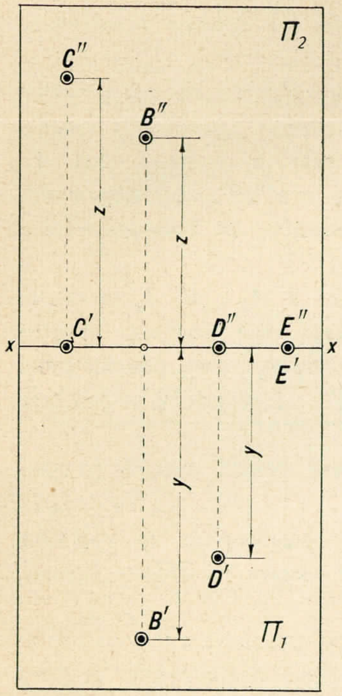
b) Przyjmij dowolny punkt V na drugiej rzutni!
Gdzie znajduje się drugi rzut, a gdzie pierwszy? Ile wynosi współrzędna y? Zmierz współrzędną z!

Zauważ zatem, że:

Jeżeli punkt leży na drugiej rzutni, to jego drugi rzut znajduje się w nim samym, a pierwszy na osi x.

Gdzie będą oba rzuty punktu, który leży na osi x?

25. Przyjmijmy na prostej prostopadłej do osi x (Rys. 31) dowolny punkt B' poniżej osi i dowolny punkt B'' powyżej osi i uważajmy te punkty za pierwszy i drugi rzut pewnego punktu B w przestrzeni.



Rys. 31.

Zachodzi pytanie, czy położenie punktu B będzie przez te rzuty dokładnie wyznaczone?

Celem wyznaczenia punktu B musimy postąpić odwrotnie niż przy wykreśleniu rzutów punktu, którego położenie w przestrzeni jest dane. A mianowicie:

Uważajmy część płaszczyzny rysunkowej poniżej osi x za pierwszą rzutnię π_1, drugą część płaszczyzny rysunkowej powyżej osi x za drugą rzutnię π_2.

Obróćmy płaszczyznę π_1 dokoła osi x tak, aby zajęła położenie prostopadłe do π_2. W rzucie B' zbudujmy prostopadłą do π_1, w rzucie B'' prostopadłą do π_2. Te proste przetną się w jednym punkcie B, który będzie punktem szukanym. Rzuty tego punktu na płaszczyzny π_1 i π_2 schodzą się z B' B''.

Zmierz odległość z punktu B od płaszczyzny π_1 i odległość y od płaszczyzny π_2!

Czy te odległości występują na rysunku? Jeżeli tak, to zmierz je wprost na rysunku!

Na rys. 31 są dane rzuty punktów C, D, E. Oznacz położenie tych punktów w przestrzeni i zmierz ich współrzędne!

A zatem przekonywamy się, że:

Położenie punktu w przestrzeni jest dokładnie wyznaczone, gdy znamy jego prostokątne rzuty na dwie do siebie prostopadłe płaszczyzny.

26. Ćwiczenia.

1) Współrzędne punktu B są: $y = 5$ cm, $z = 7$ cm. Wykreślić rzuty tego punktu.

Wskazówka. Narysujesz dowolną linię prostą, którą przyjmiesz za oś x. Na niej obierzesz dowolny punkt B_x i wykreślisz przez ten punkt prostopadłą do osi x. Na tej prostopadłej odmierzysz powyżej punktu B_x odcinek $B'' B_x = 7$ cm, poniżej $B' B_x = 5$ cm. Ten rysunek jest rozwiązaniem zadania.

2) Podobnie jak w poprzednim ćwiczeniu, wykreślić rzuty: a) punktu C ($y = 5$, $z = 0$); b) punktu D ($y = 0$, $z = 6$); c) punktu E($y = 0$, $z = 0$); d) punktu F ($y = 5$, $z = 5$) ($J = 1$ cm).

3) Niech płaszczyzna podłogi przedstawia rzutnię poziomą, płaszczyzna ściany rzutnię pionową.

Przyjmij punkt M, odległy od rzutni poziomej $1\frac{1}{2}$ m, od rzutni pionowej 2 m! Wskaż rzut poziomy M', rzut pionowy M'' tego punktu! Wykreśl te rzuty w zeszycie, w skali 1 : 100!

4) Odnieś do tych samych rzutni: naroża klasy (pokoju), ławki, katedry, pieca; zmierz współrzędne z i y tych punktów, oznacz ich rzuty poziome i pionowe, a następnie narysuj te rzuty w zeszycie w stosownej skali!

5) Punkt N zmienia swoje położenie w przestrzeni w ten sposób, że rzut poziomy N' pozostaje ten sam, zmienia się natomiast rzut pionowy.

Jaką linię w przestrzeni musi opisać punkt N, a jaką na rzutni pionowej rzut pionowy N''?

6) Punkt M zmienia swoje położenie w przestrzeni w ten sposób, że rzut pionowy M'' pozostaje ten sam, zmienia się tylko rzut poziomy.

Jaką linię opisuje punkt M, a jaką rzut poziomy M'?

7) Wyobraź sobie płaszczyznę równoległą do rzutni poziomej (podłoga) w odstępie 2 m. Na tej płaszczyźnie przyjmuj różne punkty i oznaczaj ich rzuty poziome i pionowe (pł. ściany)! Jakie będą współrzędne z wszystkich tych punktów? Na jakiej linii znajdować się będą ich rzuty pionowe?

Przedstaw rzuty tych punktów w stosownej skali w zeszycie!

8) Narysować rzuty punktów leżących na płaszczyźnie równoległej do rzutni pionowej w odstępie 5 cm.

§ 2. Rzuty odcinka i linii prostej.

27. a) Trzymajmy odcinek AB w dowolnym położeniu względem prostopadłych do siebie rzutni π_1 i π_2. (Rys. 32 a).

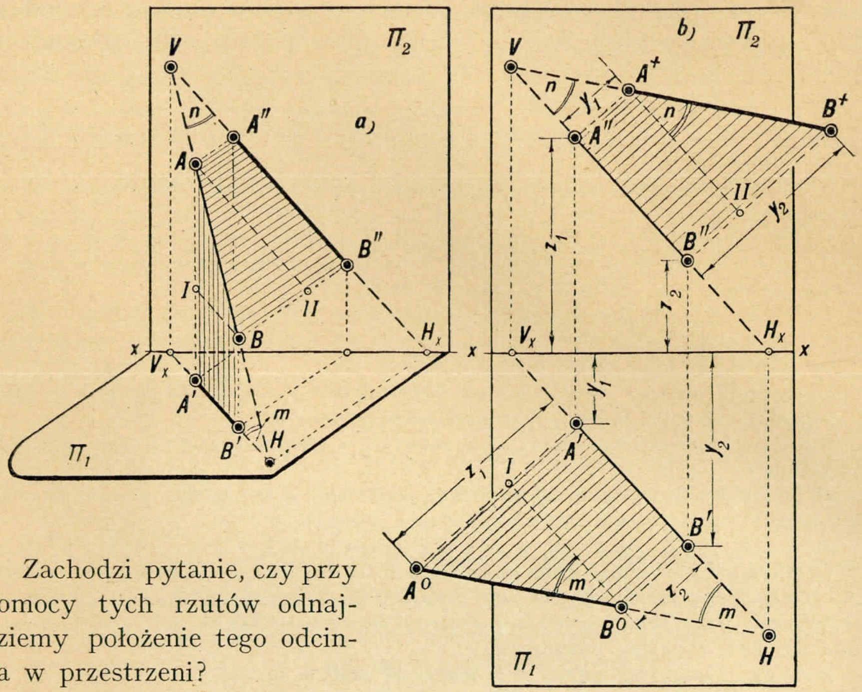
Wyznaczmy sposobem wskazanym w ust. a) art. 22 pierwszy i drugi rzut prostokątny A' i A'' punktu A, pierwszy i drugi rzut prostokątny B' i B'' punktu B, a następnie wykreślmy odcinek $A' B'$ łączący pierwsze rzuty obu punktów i odcinek $A'' B''$ łączący drugie rzuty tych punktów.

Odcinek $A' B'$ nazywamy pierwszym (poziomym) rzutem, odcinek zaś $A'' B''$ drugim (pionowym) rzutem odcinka AB.

Jeśli sprowadzimy obie rzutnie do jednej płaszczyzny rysunkowej, to pierwszy rzut $A' B'$ znajdować się będzie pod osią x, drugi rzut $A'' B''$ nad osią x. (Rys. 32 b).

Przedłużając rzuty $A' B'$ i $A'' B''$ poza ich punkty końcowe, otrzymamy pierwszy (poziomy) i drugi (pionowy) rzut linii prostej, wyznaczonej przez punkty A i B (Por. art. 8, ust. a!).

b) Przyjmijmy teraz, że na rysunku 32 b) są wykreślone rzuty prostokątne $A' B'$ i $A'' B''$ jakiegoś odcinka AB.



Rys. 32.

Zachodzi pytanie, czy przy pomocy tych rzutów odnajdziemy położenie tego odcinka w przestrzeni?

Odcinek AB jest dokładnie wyznaczony przez swe punkty końcowe A i B. Punkty zaś A i B są dokładnie wyznaczone przez swe rzuty A' i A'', B' i B''. (Por. art. 25!).

Obróćmy zatem dolną część π_1 płaszczyzny rysunkowej dokoła osi x o 90^0; zbudujmy następnie w A' i B' prostopadłe do π_1, zaś w A'' i B'' prostopadłe do π_2. Prostopadłe w A' i A'' przecinają się w szukanym punkcie A, prostopadłe zaś w B' i B'' przecinają się w szukanym punkcie B. (Rys. 32 a).

Odcinek AB, łączący punkty A i B w przestrzeni, jest odcinkiem szukanym.

A zatem:

Pierwszy i drugi rzut odcinka wyznaczają dokładnie położenie odcinka w przestrzeni.

28. Zagadnienie. *Dany jest pierwszy i drugi rzut odcinka AB* (Rys. 32 b), *wyznaczyć*:

1) *długość odcinka AB*; 2) *kąt jego nachylenia do pierwszej i drugiej rzutni*; 3) *pierwszy i drugi ślad prostej, wyznaczonej przez punkty A i B.* (Por. przykład 1, w art. 10!).

Rozwiązanie. 1) Na rysunku 32 a) spostrzegamy, że trapez $A'A\,BB'$, rzutujący odcinek AB na rzutnię π_1, ma podstawy AA' i BB' prostopadłe do π_1 i równe odległościom drugich rzutów A'' i B'' od osi x. Jeżeli zatem na rysunku 32 b) wykreślimy w rzutach A' i B' prostopadłe do prostej $A'B'$, a na tych prostopadłych odłożymy odcinki $A'A^0 = z_1$ i $B'B^0 = z_2$, równe odległościom drugich rzutów A'' i B'' od osi x, to otrzymamy trapez $A'A^0\,B^0B'$, który jest kładem na rzutnię π_1 trapezu $A'A\,BB'$.

Odcinek A^0B^0 jest równy odcinkowi AB w przestrzeni; kąt m przy wierzchołku B^0 w trójkącie prostokątnym $A^0\,B^0\,I$ jest kątem nachylenia odcinka AB do rzutni π_1.

Prosta A^0B^0 jest kładem na pierwszą rzutnię prostej AB; punkt przecięcia się kładu A^0B^0 z rzutem $A'B'$ jest punktem przebicia się prostej AB z pierwszą rzutnią; nazywamy go pierwszym śladem prostej AB i oznaczamy literą H. Kąt m, który tworzy kład A^0B^0 z rzutem $A'B'$ jest szukanym kątem nachylenia prostej AB do pierwszej rzutni.

2) W podobny sposób wyznaczono na rysunku 32 b) za pomocą kładu na drugą rzutnię trapezu rzutującego $A''ABB''$ (zob. rys. **32** a)!):

1) prawdziwą długość A^+B^+ odcinka AB;

2) kąt nachylenia n do drugiej rzutni odcinka AB i prostej AB;

3) punkt przebicia się prostej AB z drugą rzutnią, czyli drugi ślad V prostej AB.

Uwaga. 1) *Jeżeli drugi rzut danej prostej przecina oś x w punkcie H_x, to na prostej prostopadłej w tymże punkcie do osi x znajduje się pierwszy ślad H danej prostej.* [Zob. rys. 32 a) i b)! Porów. rzuty punktu H na rys. 30 b)!].

2) *Jeżeli pierwszy rzut danej prostej przecina oś x w punkcie V_x, to na prostej prostopadłej w tymże punkcie do osi x znajduje się drugi ślad V danej prostej.* [Zob. rys. 32 a) i b)! Porów. rzuty punktu V na ryc. 30 b!].

Z tych własności wynika konstrukcja śladów prostej, jeżeli są dane jej rzuty.

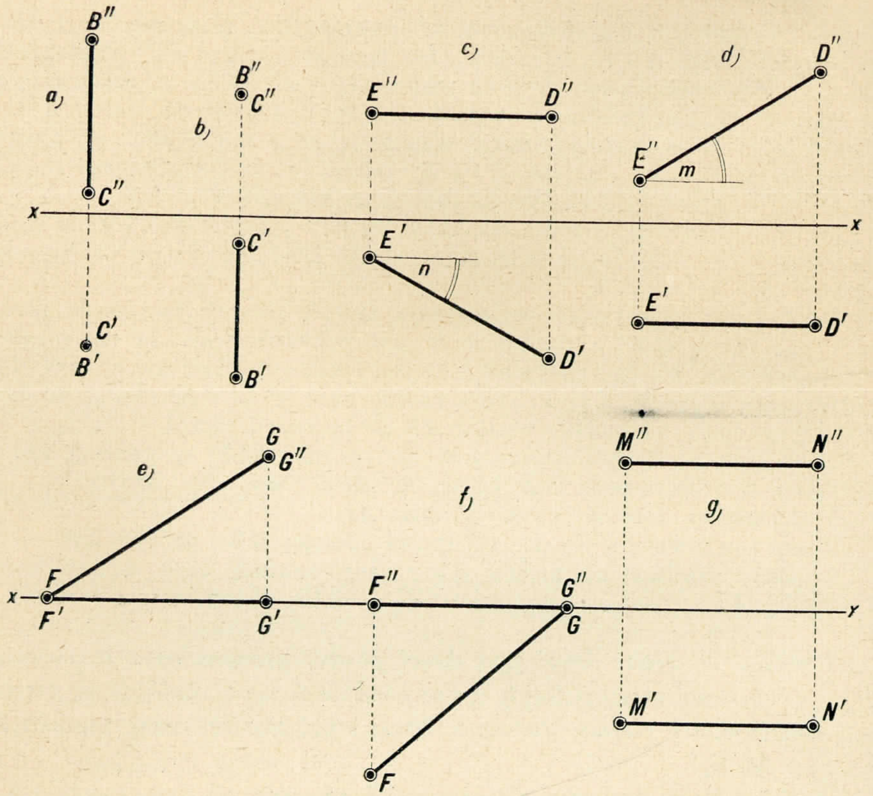
Opisz tę konstrukcję słowami!

29. a) Niechaj prosty drucik wyobraża odcinek; ustawiając go w szczególnych położeniach względem prostopadłych do siebie rzutni, wykreślaj jego rzuty prostokątne i udowodnij twierdzenia:

1) *Jeżeli odcinek jest prostopadły do pierwszej (drugiej) rzutni, to jego pierwszy (drugi) rzut jest punktem, rzut zaś drugi (pierwszy) jest odcinkiem równym danemu odcinkowi.* (Rys. 33 a) i b).

2) *Jeżeli odcinek jest równoległy do pierwszej (drugiej) rzutni, to jego drugi (pierwszy) rzut jest równoległy do osi x, rzut zaś pierwszy (drugi) tworzy z osią x kąt n (kąt m) równy kątowi nachylenia danego odcinka do drugiej (pierwszej) rzutni.* (Rys. 33 c) i d).

Co do długości jest wtedy pierwszy (drugi) rzut równy danemu odcinkowi.



Rys. 33.

3) *Jeżeli odcinek leży na pierwszej (drugiej) rzutni, to jego pierwszy (drugi) rzut znajduje się w nim samym, drugi (pierwszy) zaś rzut schodzi się z osią x.* (Rys. 33 e), f).

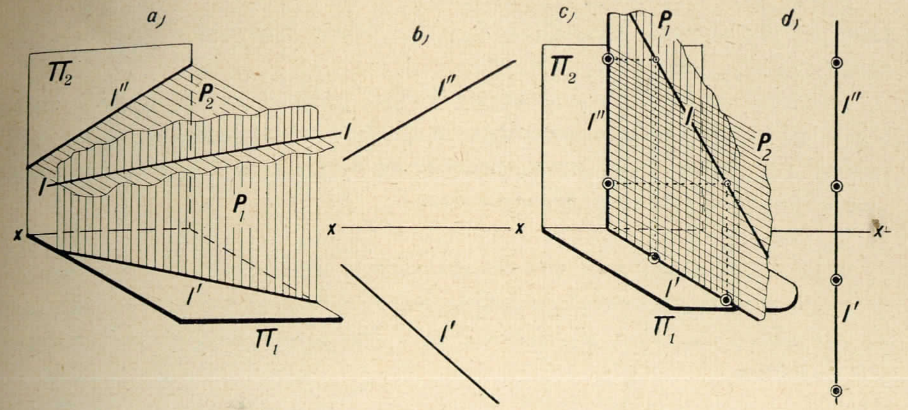
4) *Jeżeli odcinek jest równoległy do osi x, to oba jego rzuty są również równoległe do osi x i są równe temu odcinkowi.* (Rys. 33 g).

5) *Jeśli w końcu odcinek jest prostopadły do osi x, to również są prostopadłe do tej osi oba jego rzuty.* [Rys. 34 c) i d)].

b) Mając wyznaczyć rzuty prostokątne dowolnej linii prostej nieograniczonej l [Rys. 34 a)], prowadzimy przez nią dwie płaszczyzny: płaszczyznę $P_1 \perp \pi_1$, zwaną *pierwszą płaszczyzną rzutującą*, i płaszczyznę $P_2 \perp \pi_2$, zwaną *drugą płaszczyzną rzutującą*.

Krawędź l' płaszczyzny P_1 z rzutnią π_1 jest pierwszym rzutem, krawędź zaś l'' płaszczyzny P_2 z rzutnią π_2 jest drugim rzutem prostej l. [Por. art. 8 a)!].

Po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny rysunkowej *rzuty te tworzą parę prostych*, z których:



Rys. 34.

1) *obie będą nachylone do osi rzutów x, jeśli prosta l w przestrzeni była nachylona do obu rzutni.* [Rys. 34 b)];

2) *obie będą równoległe do osi x, jeśli prosta l w przestrzeni była równoległa do obu rzutni, tj. jeśli $l // x$.* [Por. rys. 33 g)!];

3) *pierwszy rzut $l' // x$, jeśli $l // \pi_2$.* [Por. rys. 33 d)!];

4) *drugi rzut $l'' // x$, jeśli $l // \pi_1$.* [Por. rys. 33 c)!];

5) *obie proste l' i l'' utworzą jedną prostą prostopadłą do osi x w przypadku, gdy prosta l była prostopadła do osi x, tj. gdy $l \perp x$.* [Rys. 34 c) i d)].

Wtedy bowiem obie płaszczyzny rzutujące tworzą jedną płaszczyznę prostopadłą do osi x; krawędzie zatem l' i l'' tej płaszczyzny z rzutniami π_1 i π_2 są w przestrzeni prostopadłe do osi x w tym samym punkcie, na płaszczyźnie rysunkowej muszą więc tworzyć jedną prostą prostopadłą do tej osi.

Udowodnij, że:

Linia prosta nie może nigdy zająć takiego położenia względem dwóch prostopadłych do siebie rzutni, aby jej rzuty prostokątne tworzyły parę prostych, z których tylko jedna byłaby prostopadła do osi rzutów.

Z powyższego wynika, że:

Każdą parę prostych na płaszczyźnie rysunku można przyjąć za pierwszy i drugi rzut prostej w przestrzeni, z wyjątkiem takiej pary prostych, z których tylko jedna jest prostopadła do osi rzutów x.

c) Jeśli mamy na płaszczyźnie rysunkowej dane rzuty l i l'' prostej l [Rys. 34 b)] i chcemy odbudować tę prostą w przestrzeni, postępujemy odwrotnie jak przy wyznaczaniu jej rzutów:

Sprowadzamy rzutnie do pierwotnego ich położenia przez obrót rzutni π_1 dokoła osi x o kąt 90^0, a następnie prowadzimy przez rzut l' płaszczyznę rzutującą $P_1 \perp \pi_1$, przez rzut zaś l'' płaszczyznę rzutującą $P_2 \perp \pi_2$.

Płaszczyzny P_1 *i* P_2 *przetną się wzdłuż jedynej prostej* l, gdy rzuty l' i l'' są nachylone lub równoległe względem osi x, *nakryją się zaś, gdy rzuty* l' *i* l'' *tworzą jedną prostą prostopadłą do osi* x; *w tym ostatnim przypadku prosta* l *jest więc nieoznaczona.*

A zatem:

Pierwszy i drugi rzut prostej wyznaczają dokładnie położenie prostej w przestrzeni tylko wtedy, gdy bądź żaden z rzutów nie jest prostopadły do osi rzutów, bądź też gdy jeden z nich jest prostopadły do osi, a drugi jest punktem.

30. Ćwiczenia.

1) Narysować rzuty odcinka AB prostopadłego do π_1, jeżeli współrzędne punktów końcowych są: $A(z_1 = 0,\ y_1 = 3)$, $B(z_2 = 6,\ y_2 = 3)$. $(J = 1$ cm$)$.

2) Narysować rzuty odcinka $GH = 6$ cm, prostopadłego do π_2, jeżeli odległość drugiego jego rzutu od osi x wynosi 4 cm.

3) Narysuj rzuty i wyznacz kąty nachylenia do płaszczyzn rzutów odcinka $CD = 5$ cm, jeżeli współrzędne punktów końcowych są:

a) $C(z_1 = 4,\ y_1 = 6)$, $D(z_2 = 4,\ y_2 = 3)$;
b) $C(z_1 = 6,\ y_1 = 4)$, $D(z_2 = 3,\ y_2 = 4)$; $(J = 1$ cm$)$.

4) Dany jest pierwszy i drugi rzut dowolnej prostej l. Wyznaczyć rzuty takiego punktu na niej leżącego, którego a) współrzędna $z = 0, 2, 3, \ldots$; b) współrzędna $y = 0, 3, 4, 5, \ldots$.

Przyjmij rzuty prostej r równoległej do pierwszej rzutni i wyznacz rzuty punktu, leżącego na tej prostej, którego współrzędna $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$

6) Przyjmij rzuty prostej q równoległej do drugiej rzutni, a następnie wyznacz rzuty takiego punktu, leżącego na tej prostej, którego by współrzędna $z = 0, 2, 3, 5, \ldots$

7) Wyznacz kąty nachylenia do pierwszej i drugiej rzutni prostej; a) dowolnej, b) równoległej do pierwszej rzutni, c) równoległej do drugiej rzutni, jeżeli dane są oba rzuty tej prostej!

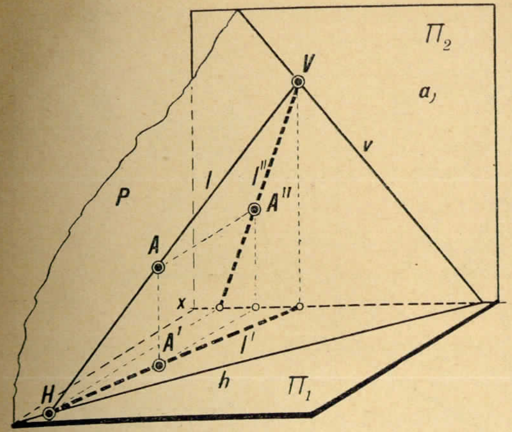
§ 3. Rzuty figury leżącej na płaszczyźnie, wyznaczonej za pomocą śladów.

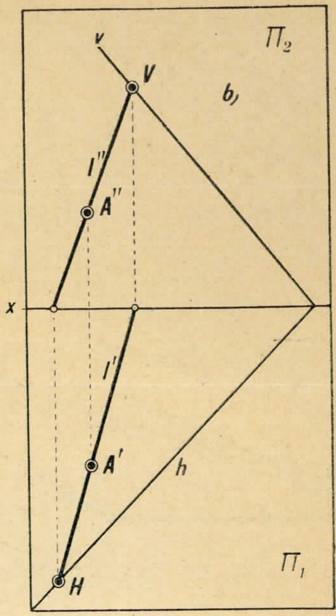
31. a) Najczęściej przedstawiamy dowolną płaszczyznę P w rzutach za pomocą dwóch jej prostych h i v, wzdłuż których przecina się ona z rzutniami π_1 i π_2. (Rys. 34 A).

Prostą h nazywamy pierwszym śladem, prostą v drugim śladem płaszczyzny P.

Pierwszy i drugi ślad tej samej płaszczyzny przecinają się w punkcie na osi x.

b) Biorąc pod uwagę na płaszczyźnie P dowolną prostą l, spostrzegamy:





Rys. 34 A.

Jeżeli prosta l *leży na płaszczyźnie* P, *natenczas pierwszy ślad* H *tej prostej leży na pierwszym śladzie* h *tej płaszczyzny, drugi zaś ślad* V *tej prostej leży na drugim śladzie* v *tej płaszczyzny.*

I na odwrót:

Jeżeli płaszczyzna P *przechodzi przez prostą* l, *natenczas pierwszy ślad* h *tej płaszczyzny przechodzi przez pierwszy ślad* H *tej prostej, drugi zaś ślad* v *płaszczyzny przechodzi przez drugi ślad* V *prostej.*

(Por. art. 12. b)!).

Uwaga. *Punkt* A *leży na płaszczyźnie* P, *jeżeli leży na prostej* l *tej płaszczyzny.*

Prostą zaś l *przyjmiemy na płaszczyźnie* P, *jeżeli przyjmiemy jej ślady* H *i* V *na odpowiednich śladach* h *i* v *tejże płaszczyzny.* (Rys. 34 A).

Jeśli więc mamy wykreślony pierwszy i drugi rzut prostej l, leżącej na płaszczyźnie P [Rys. 34 A — b)], to dowolna prosta prostopadła do osi x przecina pierwszy rzut l' w pierwszym rzucie A', drugi zaś rzut l'' w drugim rzucie A'' punktu A, który się znajduje na płaszczyźnie P.

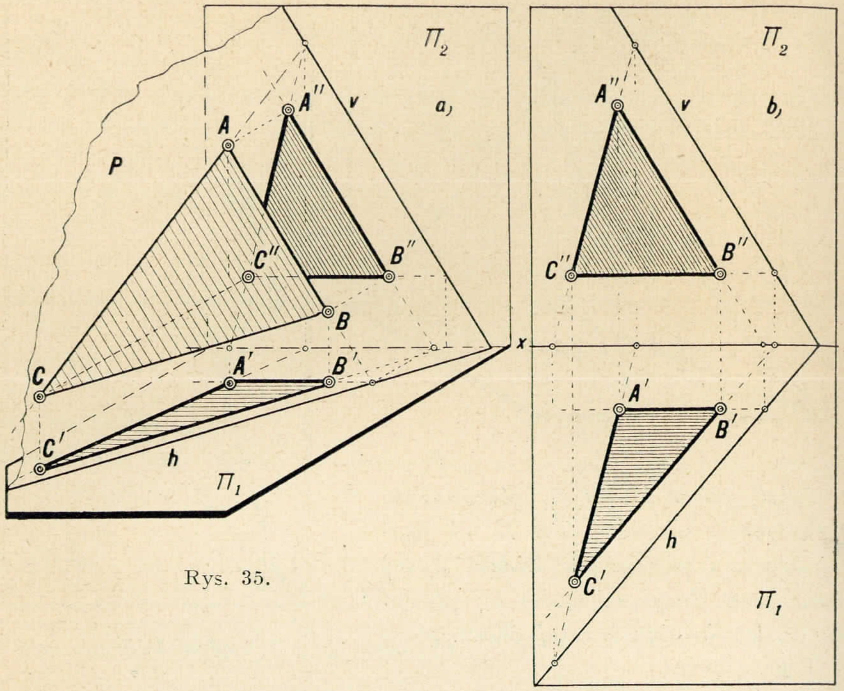
Ćwiczenia.

1) Wykreślić pierwszy i drugi rzut dowolnego trójkąta ABC leżącego na płaszczyźnie P, danej za pomocą śladów h i v. (Rys. 35).

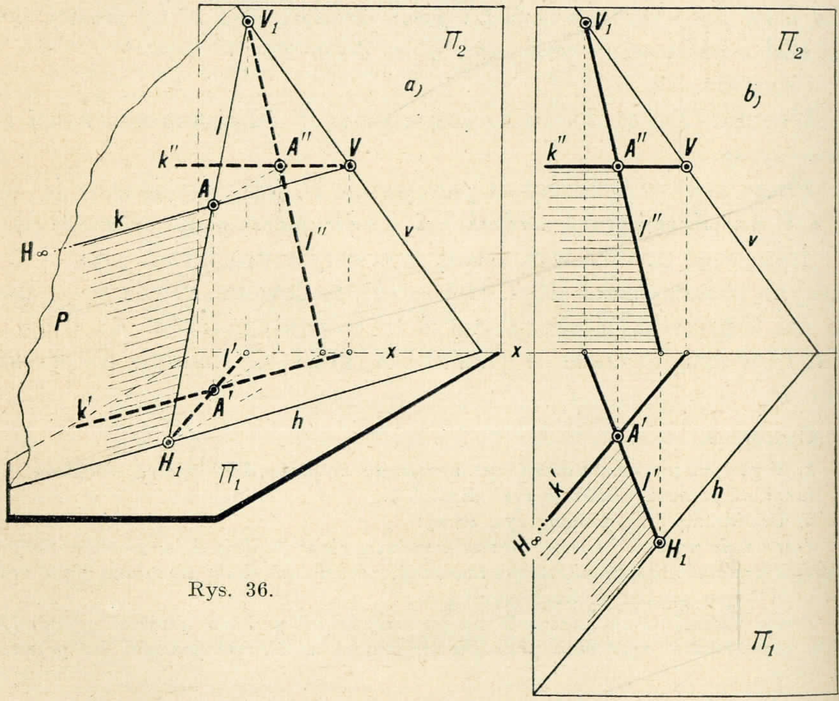
2) Udowodnij przy pomocy rys. 36 a):

Jeżeli dwie proste k *i* l *w przestrzeni przecinają się w punkcie* A, *to pierwsze rzuty tych prostych przecinają się w pierwszym rzucie* A', *drugie zaś rzuty przecinają się w drugim rzucie* A'' *tego punktu* A. Stąd wynika że:

Prosta, łącząca punkt przecięcia się pierwszych rzutów dwóch prostych przecinających się w przestrzeni — z punktem przecięcia się drugich rzutów tych prostych, jest prostopadła do osi x.



Rys. 35.



Rys. 36.

3) Przyjmij rzuty dwóch dowolnych prostych przecinających się k i l i wykreśl ślady płaszczyzny, wyznaczonej przez te proste. (Rys. 36 b).

4) Przy pomocy art. 1 ust. b) i rys. 2 udowodnij:

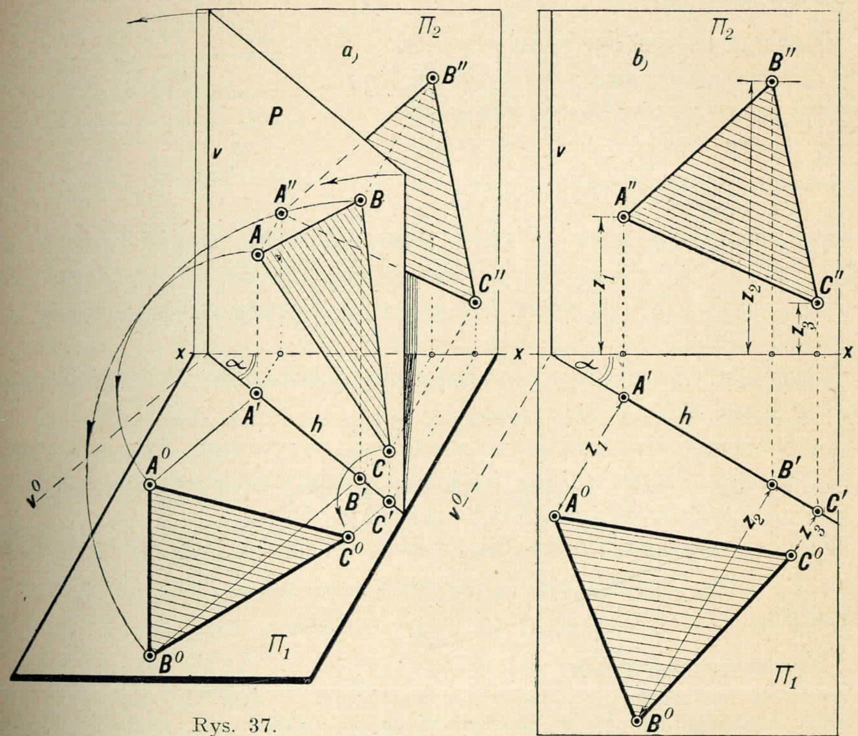
Jeżeli proste a, b, c, ... są w przestrzeni do siebie równoległe, to ich tak pierwsze rzuty, jak drugie rzuty są z osobna do siebie równoległe.

5) Przyjąwszy pierwsze i drugie rzuty dwóch prostych równoległych a i b, wykreśl ślady płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

32. Niech sztywny karton papieru przedstawia płaszczyznę P! Trzymając płaszczyznę P w szczególnych położeniach względem rzutni wykreśl jej ślady i rzuty figury ABC... na niej leżącej!

Udowodnij t w i e r d z e n i a:

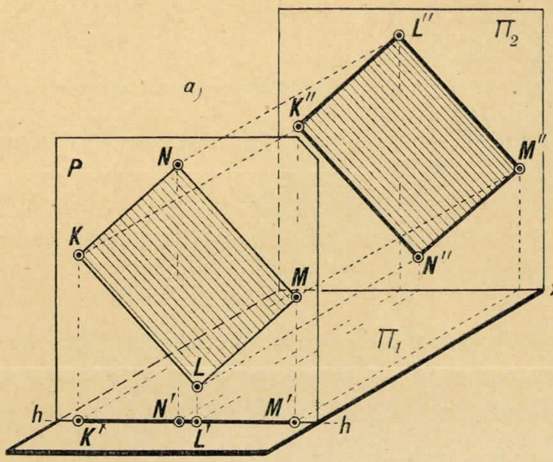
a) *Jeśli płaszczyzna P jest prostopadła do pierwszej rzutni* π_1 (Rys. 37), *to jej drugi ślad v jest prostopadły do osi x, pierwszy zaś ślad h tworzy z osią x kąt α, który jest miarą kąta nachylenia tej płaszczyzny do rzutni* π_2.

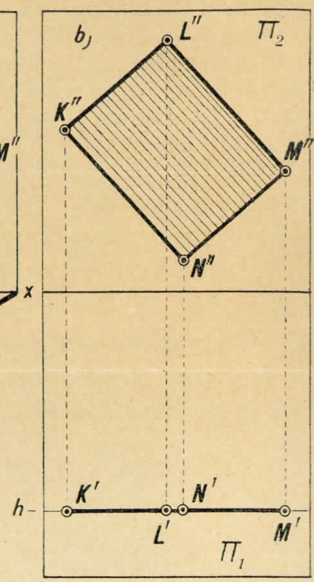


Rys. 37.

Pierwszy rzut figury leżącej na płaszczyźnie prostopadłej do pierwszej rzutni pada w pierwszy ślad tej płaszczyzny.

Płaszczyznę prostopadłą do rzutni π_1 nazywamy, jak wiadomo, rzutującą; jej szczególnym przypadkiem jest *płaszczyzna równoległa do drugiej rzutni* π_2. (Rys. 38).





Płaszczyzna taka ma tylko pierwszy ślad h, w który pada pierwszy rzut jakiejkolwiek figury na niej leżącej; drugi rzut takiej figury jest do niej przystający.

Udowodnij to przy pomocy rys. 38 a)!

Rys. 38.

b) *Jeśli płaszczyzna P jest prostopadła do drugiej rzutni* π_2 (Rys 39), *to jej pierwszy ślad jest prostopadły do osi x, drugi zaś tworzy z osią x kąt β, który jest miarą nachylenia tej płaszczyzny do pierwszej rzutni* π_1.

Drugi rzut figury leżącej na płaszczyźnie prostopadłej do drugiej rzutni pada w drugi ślad tej płaszczyzny.

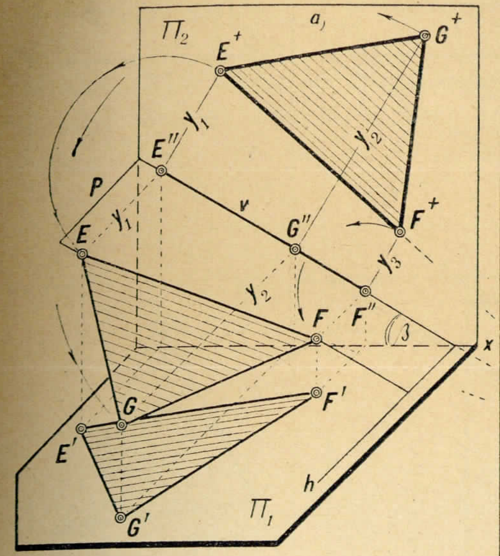
Płaszczyznę prostopadłą do rzutni π_2 nazywamy, jak wiadomo, drugą płaszczyzną rzutującą. Jej szczególnym przypadkiem jest *płaszczyzna równoległa do pierwszej rzutni.* (Rys. 40).

Płaszczyzna taka ma tylko drugi ślad v, w który pada drugi rzut jakiejkolwiek figury na niej leżącej; pierwszy rzut takiej figury jest do niej przystający.

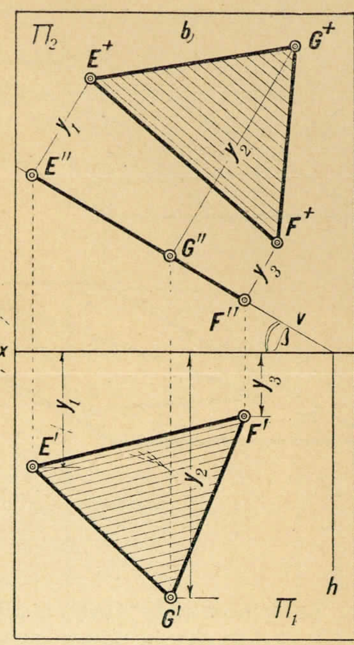
Udowodnij to przy pomocy rys. 40 a) !

33. Uwaga 1). *Przy konstrukcjach rzeczywistych wielkości* figur płaskich, danych za pomocą dwóch rzutów prostokątnych — lub *przy wykreślaniu dwóch rzutów* prostokątnych tych figur, gdy są dane prawdziwe ich wielkości — *posługujemy się kładem płaszczyzny:*

1) Bądź to na p i e r w s z ą r z u t n i ę przez obrót danej płaszczyzny dokoła jej pierwszego śladu *h*;



Rys. 39.



2) bądź to na d r u g ą r z u t n i ę przez obrót danej płaszczyzny dokoła drugiego jej śladu *v*.

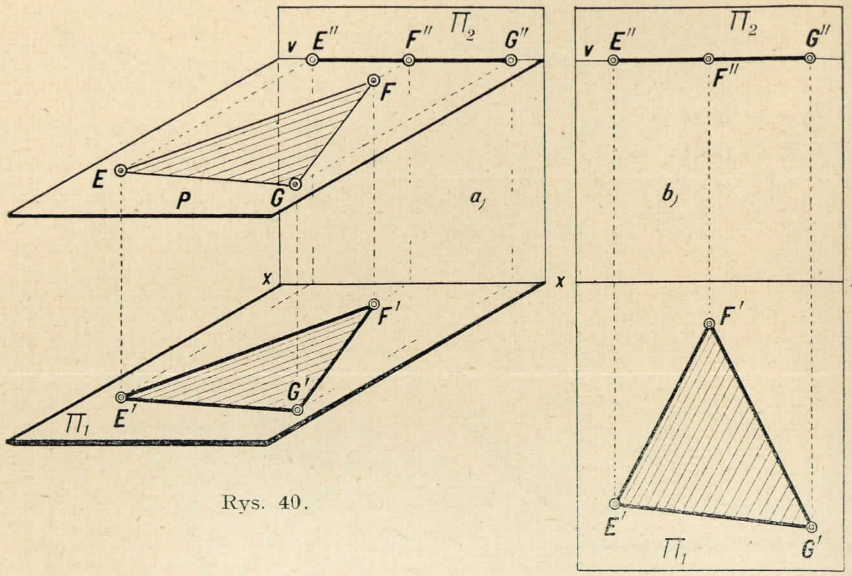
Kłady te wykonywamy przy pomocy konstrukcji poznanych w § 4 Rozdziału I; należy tylko zastąpić cechę punktu, który obracamy (zob. punkt *C* na rys. 19!):

przy kładzie ad 1) — przez współrzędną *z*, tj. przez odległość drugiego rzutu od osi *x*;

przy kładzie ad 2) — przez współrzędną *y*, tj. przez odległość pierwszego rzutu od osi *x*.

Uwaga 2). *Bardzo uproszczoną jest konstrukcja kładu pierwszej i drugiej płaszczyzny rzutującej.* [Rys. 37 i 39]:

Kłady na pierwszą (drugą) rzutnię punktów znajdujących się na pierwszej (drugiej) płaszczyźnie rzutującej wyznaczymy, jeżeli wykreślimy w pierwszych (drugich) rzutach tych punktów prostopadle do pierwszego śladu h (do drugiego śladu v) tej płaszczyzny i na tych prostopadłych odłożymy współrzędne z (współrzędne y). (Zob. na rys. 37 kład $A^0\,B^0\,C^0$ trójkąta *ABC* i na rys. 39 kład $E^+F^+G^+$ trójkąta *EFG*!).



Rys. 40.

§ 4. Zastosowanie nabytych wiadomości do wykreślania rzutów prostokątnych brył na dwie rzutnie prostopadłe i do rozwiązywania łatwych zadań konstrukcyjnych i rachunkowych, odnoszących się do tych brył i ich przekrojów.

34. Pierwszy i drugi rzut prostokątny bryły lub przedmiotu na dwie prostopadłe rzutnie wykreślimy, jeżeli wyznaczymy pierwsze i drugie rzuty poszczególnych ich punktów, krawędzi i ścian.

Zarys tak pierwszego rzutu bryły, jak zarys drugiego rzutu wyznaczamy w podobny sposób, jak w art. 1 ust. d), z tą tylko różnicą, że przy wyznaczaniu zarysu pierwszego rzutu patrzymy na bryłę w kierunku prostopadłym do pierwszej rzutni, przy wyznaczaniu zaś zarysu drugiego rzutu patrzymy na tę bryłę w kierunku prostopadłym do drugiej rzutni.

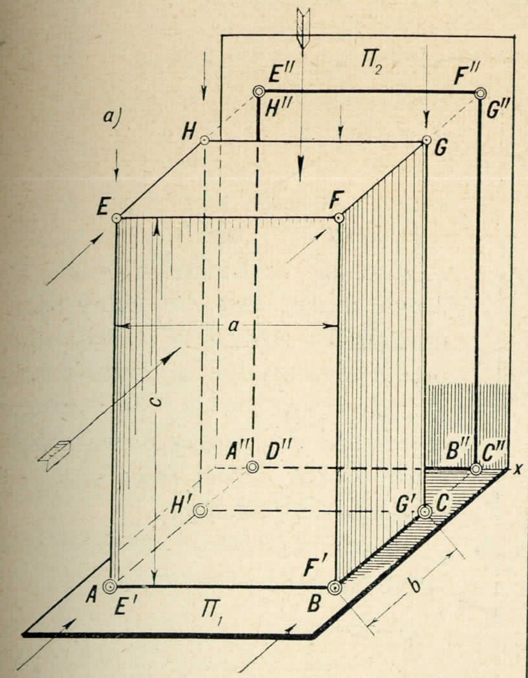
I. Rzuty graniastosłupa i walca i ich przekrojów.

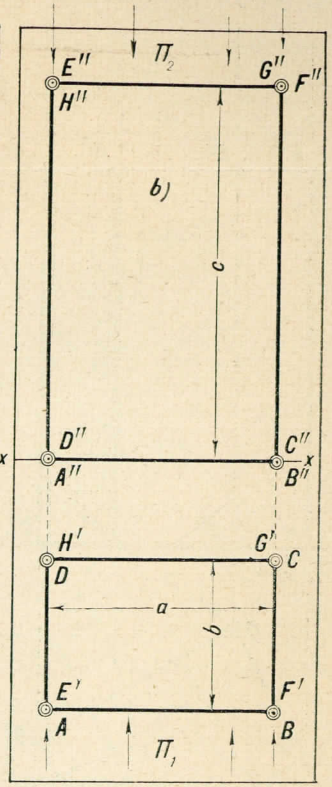
35. a) Ustawmy model prostopadłościanu o podstawie prostokątnej, a o krawędziach $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm tak, aby jego podstawa $ABCD$ leżała na rzutni poziomej π_1, a dwie ściany boczne $ABEF$ i $CDGH$ były równoległe do rzutni pionowej π_2. [Rys. 41 — a], i rzutujmy go raz w kierunku prostopadłym do rzutni π_1, drugi raz w kierunku prostopadłym do rzutni π_2.

Pierwsze rzuty krawędzi bocznych prostopadłościanu nakrywają się z wierzchołkami, pierwsze zaś rzuty ścian bocznych z bokami podstawy

dolnej $ABCD$; z prostokątem tym nakrywa się również pierwszy rzut podstawy górnej $E'\,F'\,G'\,H'$. [Por. art. 29 a) — 1) i 2); art. 32 a) i b) !].

Prostokąt $ABCD$ stanowi zatem zarys pierwszego rzutu bryły. Z zarysem tym schodzi się obraz bryły, jeżeli patrzymy na nią ze znacznej odległości w kierunku prostopadłym do pierwszej rzutni π_1.





Rys. 41.

Drugie rzuty krawędzi prostopadłych do rzutni π_2 są wierzchołkami, drugie zaś rzuty ścian prostopadłych do π_2 — bokami prostokąta $A''\,B''\,F''\,E''$, którego jedna para boków jest prostopadła, druga zaś para równoległa do osi x. Prostokąt ten jest równocześnie drugim rzutem ścian $ABEF$ i $CDGH$ równoległych do drugiej rzutni, a zatem do nich przystającym. (Zob. art. 29 a) — 3) i 4) i art. 32 b) !).

Prostokąt $A''\,B''\,F''\,E''$ stanowi zatem zarys drugiego rzutu bryły. Z zarysem tym schodzi się obraz bryły, jeżeli patrzymy na nią ze znacznej odległości w kierunku prostopadłym do drugiej rzutni π_2.

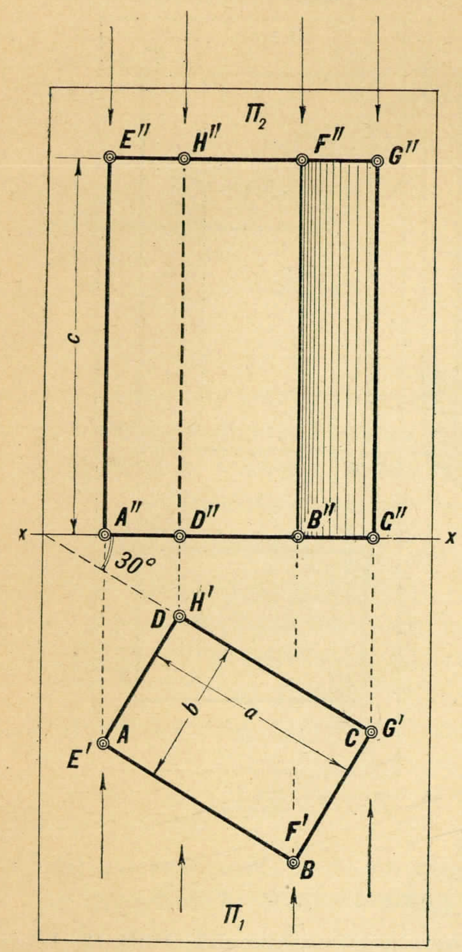
Rys. 41 — b) przedstawia pierwszy i drugi rzut prostopadłościanu po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny rysunkowej. *Na rzutach tych występują w rzeczywistych długościach rozmiary prosto-*

padłościanu: na rzucie pierwszym długość i szerokość, na rzucie zaś drugim wysokość.

b) Ustawmy prostopadłościan na pierwszej rzutni tak, aby jego ściana tylna była nachylona do drugiej rzutni pod kątem 30^0. (Rys. 42).

Pierwszy rzut prostopadłościanu nakryje się znowu z podstawą dolną, zarys zaś drugiego rzutu będzie prostokątem $A'' E'' G'' C''$, który jest rzutem linii łamanej $AEFGCBA$, stanowiącej zarys widzialny dla oka, patrzącego na prostopadłościan w kierunku prostopadłym do drugiej rzutni. Dla takiego położenia oka dwie ściany boczne $BCGF$ i $ABFE$ są widzialne, a więc są widzialne również ich drugie rzuty, dwie zaś ściany boczne $CDHG$ i $ADHE$ są niewidzialne, przeto niewidzialne są również drugie ich rzuty. Ściany niewidzialne przecinają się podług niewidzialnej krawędzi DH, której drugi rzut jest również niewidzialny.

Rzuty krawędzi niewidzialnych rysujemy linią przerywaną.



Rys. 42.

Ćwiczenia.

1) Powierzchnia sześcianu $= 1274{,}49$ cm². Obliczyć długość: 1) jego krawędzi; 2) przekątnej; 3) wykreślić oba rzuty sześcianu, gdy przekątna jego ma położenie prostopadłe do pierwszej rzutni.

2) Naroże sześcianu o krawędzi a odcięto płaszczyznami, przechodzącymi przez środki krawędzi. Przedstawić pozostałą bryłę za pomocą dwóch rzutów prostokątnych! Obliczyć jej powierzchnię i objętość!

3) Największy trójkąt równoboczny, podług którego możemy przeciąć sześcian, wynosi $1{,}3102$ m². Obliczyć powierzchnię i objętość sześcianu! Wykreślić rzuty sześcianu!

4) Przez krawędź podstawy sześcianu prowadzimy płaszczyznę nachyloną do podstawy pod kątem $\alpha = 36^0\,50'$. Pole przekroju wynosi 30 cm². Obliczyć objętość sześcianu. Wykreślić jego rzuty!

5) Obliczyć powierzchnię i objętość kwadratowego prostopadłościanu i wykreślić jego rzuty, jeżeli jest dana długość krawędzi przypodstawnej a i wysokość w:

1) $a = 2{,}5$ m	2) $a = 5{,}3$ m
$w = 3{,}8$ m	$w = 1{,}7$ m.

6) Objętość kwadratowego prostopadłościanu $= V$, krawędź przypodstawna $= a$. Obliczyć wysokość w! Wykreślić jego rzuty!

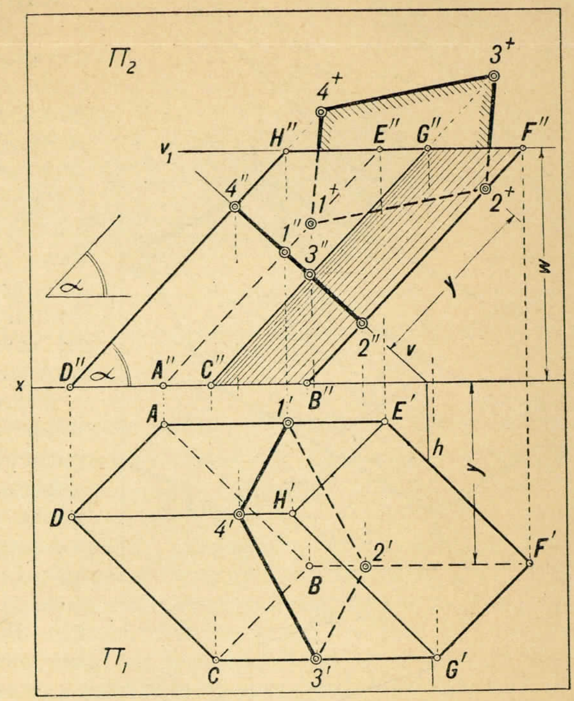
1) $V = 46{,}875$ dcm³	2) $V = 3{,}38$ m³
$a = 2{,}5$ cm	$a = 1{,}3$ m.

7) Prosty równoległościan ma za podstawę romb o boku $a = 6$ cm i ostrym kącie $\delta = 75^0\,20'$. Wykreśl jego rzuty i oblicz: a) jego powierzchnię, 2) objętość, 3) obie nierówne przekątne, jeżeli wysokość równoległościanu wynosi 20 cm!

36. Zagadnienie 1. *Równoległościan pochyły, którego podstawa jest prostokątem $ABCD$, leżącym na pierwszej rzutni, ma krawędzie boczne równoległe do drugiej rzutni.* (Rys. 43).

1) *Wykreślić rzuty tego równoległościanu, jeżeli jest dana jego wysokość w i kąt nachylenia α krawędzi bocznych do pierwszej rzutni.*

2) *Wykreślić rzuty i wyznaczyć rzeczywistą wielkość przekroju tego równoległościanu płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznych.*



Rys. 43.

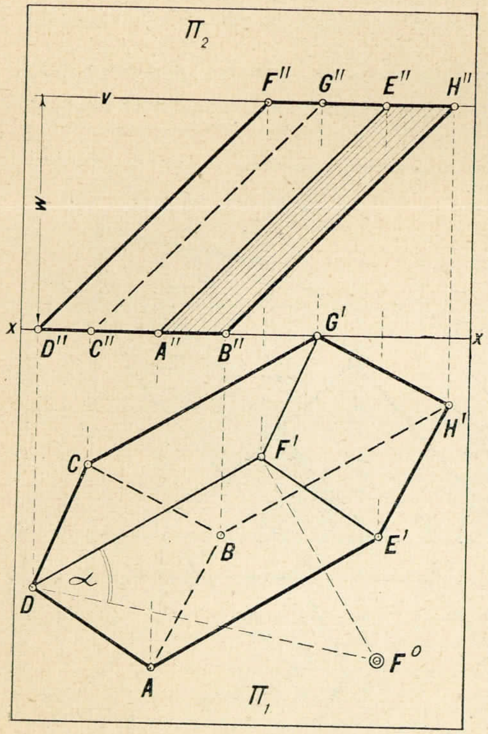
Wskazówka. 1) Ponieważ podstawa równoległościanu leży na pierwszej rzutni, przeto pierwszy jej rzut znajduje się w niej samej, zaś drugi w osi x. Rzuty krawędzi bocznych wykreślisz na podstawie art. 29, rys. 33 d).

Podstawa górna leży na płaszczyźnie równoległej do pierwszej rzutni π_1; jej drugi ślad v_1 jest równoległy — w odstępie wysokości równoległościanu — do osi x [zob. art. 32 *b*), rys. 40] i przecina drugie rzuty krawędzi bocznych w punktach E'', F'', G'', H'', które są drugimi rzutami wierzchołków podstawy górnej; pierwsze rzuty tych wierzchołków znajdują się na prostopadłych do osi x i na pierwszych rzutach krawędzi bocznych.

2) Jeżeli krawędzie boczne równoległościanu są równoległe do drugiej rzutni π_2, a płaszczyzna tnąca jest do nich prostopadła, to płaszczyzna ta jest prostopadła również do drugiej rzutni π_2; jej drugi ślad v jest prostopadły do drugich rzutów krawędzi bocznych. (Por. twierdzenie V art. 5!).

Rzuty i rzeczywistą wielkość przekroju wyznaczysz jak w artykule 33, uwaga 2), rys. 39.

37. Zagadnienie 2. *Podstawą graniastosłupa pochyłego jest czworokąt $ABCD$, leżący na pierwszej rzutni. Wykreślić rzuty tego graniastosłupa, jeżeli jest dany pierwszy rzut DF' jednej krawędzi bocznej DF i kąt nachylenia a tej krawędzi do pierwszej rzutni.* (Rys. 44).



Rys. 44.

Rozwiązanie. Pierwszy rzut podstawy $ABCD$ schodzi się z nią samą, pierwsze więc rzuty krawędzi bocznych wychodzą z wierzchołków A, B, C i D i są równoległe do danego pierwszego rzutu DF' krawędzi DF. (Por. art. 1 własność III).

Pierwszy rzut podstawy górnej jest równoległym przesunięciem podstawy dolnej; rysujemy go zatem jako czworobok, którego boki są równoległe do boków podstawy dolnej, wierzchołki zaś leżą na rzutach krawędzi bocznych.

Patrząc na graniastosłup w kierunku prostopadłym do pierwszej rzutni widzimy przede wszystkim podstawę górną, a następnie ściany boczne wychodzące z krawędzi przy podstawnych AD i DC; nie widzimy zaś podstawy dolnej, ścian bocznych $ABHE$ i $BCGH$ i krawędzi AB, BC i BH; dlatego te krawędzie wykreślono linią przerywaną.

Aby wykreślić drugi rzut graniastosłupa, zauważymy najpierw, że górna podstawa $EFGH$ leży na płaszczyźnie równoległej do pierwszej rzutni; jej zatem drugi rzut $E''F''G''H''$ leży na drugim śladzie tej płaszczyzny, który jest prostą równoległą do osi x. Odległość tej prostej od osi x równa jest wysokości graniastosłupa w, którą znajdujemy w następujący sposób: Kreślimy trójkąt prostokątny $DF'F^0$, którego jedną przyprostokątną jest dany rzut DF' krawędzi bocznej DF, kątem zaś ostrym przy wierzchołku D jest kąt nachylenia α tej krawędzi do pierwszej rzutni. Druga przyprostokątna tego trójkąta $F'F^0$ jest równa szukanej wysokości graniastosłupa.

Drugi rzut podstawy dolnej $A''B''C''D''$ znajduje się na osi x.

Drugie rzuty krawędzi bocznych są równoległymi do siebie odcinkami, łączącymi drugie rzuty A'', B'', C'', D'' wierzchołków podstawy dolnej z drugimi rzutami E'', H'', G'', F'' wierzchołków podstawy górnej. Trzy z krawędzi bocznych są w drugim rzucie widzialne, jedna zaś CG jest niewidzialna.

38. Ćwiczenia. 1) *Oblicz powierzchnię i objętość równoległościanu, o którym mowa w art. 36, jeżeli są dane długości krawędzi schodzących się w wierzchołku D i kąty płaskie przy tym wierzchołku, a mianowicie:*

$DA = 2,5$ dcm, $DC = 3,2$ dcm, $DH = 5$ dcm;

$\sphericalangle ADH = 30^0$, $\sphericalangle HDC = 45^0$!

(Zob. ćw. 1), art. 19)!

2) Trzy krawędzie, schodzące się w jednym narożu równoległościanu, mają długości 14, 21, 28 cm; dwie pierwsze z nich tworzą kąt $58^0\,45'$; kąt nachylenia trzeciej krawędzi do płaszczyzny dwóch pierwszych wynosi $82^0\,15'$. Wykreślić rzuty równoległościanu; obliczyć jego objętość!

3) Krawędzie równoległościanu, schodzące się w jednym narożu, wynoszą: $k = 90$ cm, $k_1 = 74$ cm, $k_2 = 51,5$ cm, kąty płaskie: $\sphericalangle (kk_1) = 72^0\,8'47''$, $\sphericalangle (kk_2) = 84^0\,44'7''$, $\sphericalangle (k_1k_2) = 64^0\,11'18''$.

a) *Wykreślić rzuty i siatkę.*

b) *Obliczyć kąty dwuścienne, objętość, pole.*

($V = 293,551$ cm³).

4) Krawędzie podstawowe graniastosłupa trójściennego, $k = 7$ m, $k_1 = 2,5$ m, tworzą kąt $= 91^0\,33'4''$, krawędź zaś boczna, wychodząca z wierzchołka tego kąta, jest nachylona do k pod kątem $= 62^0\,8'45''$, do k_1 pod kątem $= 75^0\,17'22''$.

a) *Wykreślić rzuty i siatkę w skali 1 : 100.*

b) *Obliczyć kąty dwuścienne, pole i objętość.*

($V = 14,742$ m³).

39. Zagadnienie 3. *Kierownica walca obrotowego o promieniu r spoczywa na pierwszej rzutni; wysokość walca równa się danemu odcinkowi w.* (Rys. 45).

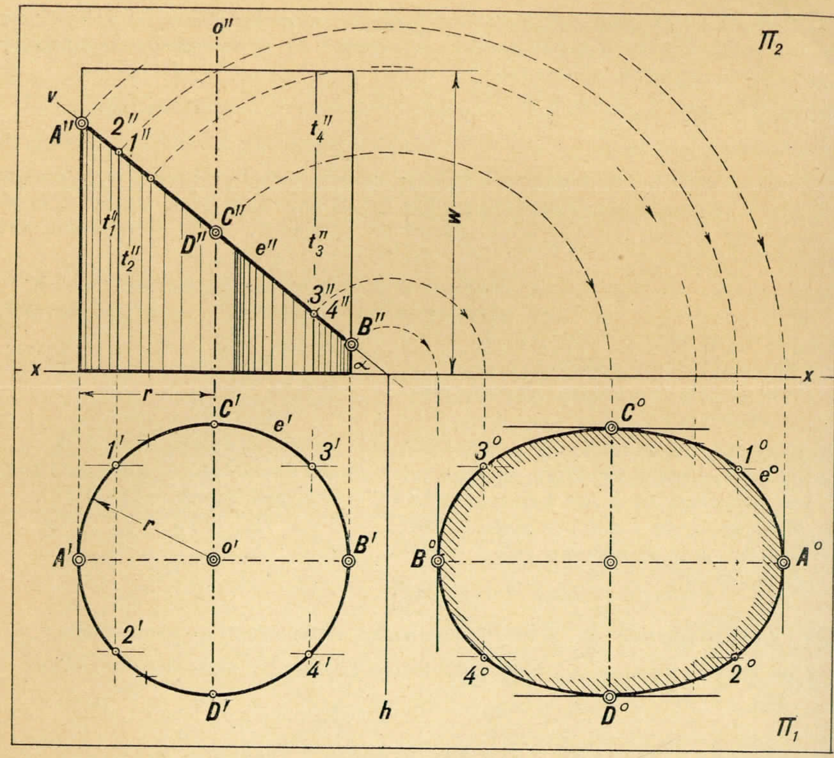
Wykreślić: 1) *rzuty prostokątne walca*; 2) *rzuty przekroju walca płaszczyzną* (hv) *prostopadłą do drugiej rzutni*; 3) *wyznaczyć rzeczywistą wielkość przekroju*; 4) *wyprowadzić wzór na obliczenie pola elipsy.*

Wskazówka. 1) Tworzące walca są prostopadłe do pierwszej rzutni; ich pierwsze rzuty są przeto punktami leżącymi na obwodzie koła podstawowego, drugie zaś rzuty odcinkami prostopadłymi do osi x. Pierwszy rzut koła górnego schodzi się z kołem dolnym, drugi zaś rzut jest odcinkiem równym średnicy $2\,r$. Odcinek ten jest równoległy do osi x i odległy od niej o wysokość walca w.

Koło podstawowe stanowi zatem zarys pierwszego rzutu walca; zarys drugiego rzutu jest prostokątem, którego jeden bok równy jest średnicy koła podstawowego, drugi bok wysokości walca.

2) Przekrój walca płaszczyzną (hv) jest miejscem geometrycznym punktów 1, 2, 3, ..., w których płaszczyzna ta przecina poszczególne tworzące t_1, t_2, t_3, ... walca. Miejsce to jest linią krzywą zamkniętą, którą nazywamy e l i p s ą. Punkt, w którym płaszczyzna (hv) przecina oś walca, jest ś r o d k i e m elipsy.

Elipsa ta ma dwie o s i e s y m e t r i i: oś w i e l k ą AB, wzdłuż której płaszczyzna (hv) przecina płaszczyznę, poprowadzoną przez oś walca równolegle do drugiej rzutni, i o ś m a ł ą CD, wzdłuż której płaszczyzna (hv) przecina płaszczyznę, poprowadzoną przez oś walca prostopadle do drugiej rzutni.



Rys. 45.

Powyższą elipsę możemy uważać za rzut równoległy ukośny jednego z kół podstawowych walca na płaszczyznę (hv), *w kierunku osi walca.*

Pierwszy rzut elipsy schodzi się z kołem podstawowym, drugi jest odcinkiem $A'' B''$, równym wielkiej osi AB.

3) Rzeczywistą wielkość elipsy otrzymamy, jeżeli wykonamy kład płaszczyzny (hv) na pierwszą rzutnię wraz z osiami i poszczególnymi punktami elipsy.

Konstrukcja tych kładów jest uwidoczniona na rysunku.

Kłady punktów łączymy linią krzywą, bacząc na to, aby była symetryczna względem wielkiej i małej osi $A^0 B^0$ i $C^0 D^0$.

4) Małą oś elipsy CD oznaczamy przez 2 b; jest ona na rys. 45 równoległa do rzutni π_1, przeto jej długość równa jest długości średnicy koła kierowniczego walca, tj. $CD = 2b = 2r$, czyli: *mała półoś* $b = r$.

Wielką oś AB oznaczamy przez 2 a; leży ona na prostej największego spadku płaszczyzny (hv), przeto między jej długością a długością jej rzutu zachodzi związek:

$$A' B' = AB \cos \alpha; \text{ stąd}$$

$$\cos \alpha = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2r}{2a} = \frac{r}{a},$$

jeśli α oznacza kąt nachylenia płaszczyzny (hv) do rzutni π_1. (Por. art. 9, ust. b); art. 13, ust. b!).

Oznaczmy pole elipsy e przez F, pole zaś jej prostokątnego rzutu na π_1, który się schodzi z kierownicą walca, przez F'.

Między tymi polami zachodzi związek, wyrażony równaniem z art. 13 ust. c):

$$F' = F \cos \alpha,$$

$$\text{czyli } F = \frac{F'}{\cos \alpha}.$$

Wprowadzając w równaniu tym za $F' = r^2 \pi$, za $\cos \alpha = \frac{r}{a}$, otrzymamy:

$$F = \frac{F'}{\cos \alpha} = r^2 \pi : \frac{r}{a} = r^2 \pi \cdot \frac{a}{r} = ar \pi.$$

A ponieważ $r = b$, przeto mamy *wzór na obliczenie pola elipsy e, o półosiach a i b*:

$$F = ab \pi.$$

Wyrazić ten wzór słowami.

Porównaj wzór ten z wzorem na obliczenie pola koła!

40. Ćwiczenia.

1) Podstawą graniastosłupa prostego o objętości $V = 56{,}8$ cm³ jest trójkąt o bokach $a = 80$ cm, $b = 150$ cm i kącie $\beta = 85^0\, 16'$. Na graniastosłupie opisano walec obrotowy.

Przedstawić graniastosłup i walec w rzutach prostokątnych. Obliczyć: a) różnicę objętości; b) różnicę powierzchni tych brył; 3) różnicę pól przekrojów graniastosłupa i walca płaszczyzną nachyloną do podstawy pod kątem $\alpha = 45^0$.

2) W prosty graniastosłup trójścienny o wysokości 20 cm, którego podstawa zawiera kąty $\alpha = 52^0\, 18'$, $\beta = 68^0$, da się wpisać walec obrotowy o promieniu $\varrho = 3$ cm. Przedstawić w rzutach prostokątnych obie bryły. Obliczyć powierzchnię pobocznicy walca! Obliczyć pola przekrojów graniastosłupa i walca płaszczyzną tworzącą z podstawą kąt $\alpha = 30^0$.

3) Boki podstawy trójściennego graniastosłupa wynoszą 2,4 cm, 4,5 cm, 5,2 cm; krawędź boczna $k = 14$ cm jest nachylona do podstawy pod kątem $\delta = 67^0\, 12'$. Jak wielka jest objętość walca opisanego na tym graniastosłupie?

Wykreślić rzuty prostokątne obu brył.

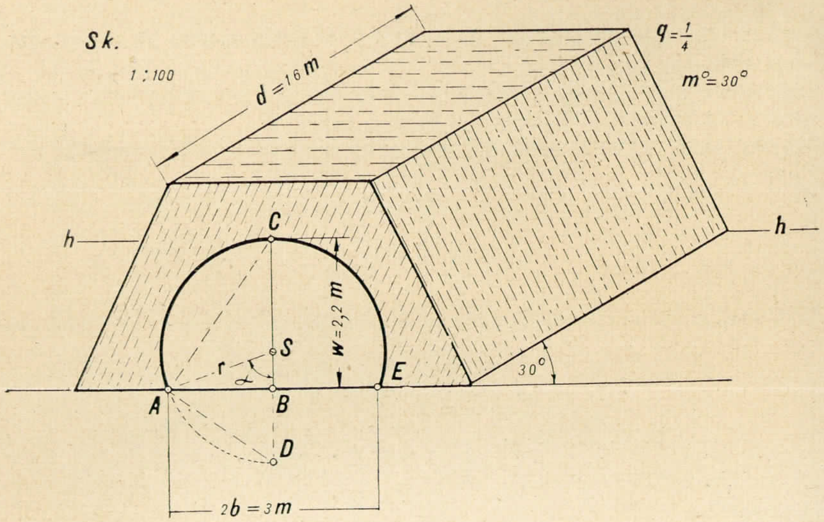
4) *Schron przeciwgazowy ma kształt walca obrotowego, który przecina płaszczyzna podłogi równolegle do jego osi.* (Rys. 46).

Wysokość schronu $w = 2{,}20$ *m, szerokość* $2b = 3$ m, *długość* $d = 16$ *m.*

1) Przyjmując płaszczyznę podłogi za pierwszą rzutnię, płaszczyznę zaś równoległą do osi walca i prostopadłą do podłogi za drugą rzutnię, przedstaw ten walec w dwóch rzutach prostokątnych!

2) *Ile osób można w nim zmieścić na 2 godziny, jeżeli dla jednej osoby przyjmujemy 1 m³ powietrza na 1 godzinę?*

Wskazówka. Pojemność schronu $V = V_1 - V_2$, gdzie V_1 jest pojemnością pełnego walca o nieznanym promieniu r i danej długości d, V_2 zaś



Rys. 46.

jest pojemnością części walca, odciętej płaszczyzną podłogi od pełnego walca.

Pojemność V_2 obliczymy, mnożąc pole p kołowego odcinka ADE przez długość walca d.

1) Promień r obliczymy z trójkąta prostokątnego ACD:

$$BD : AB = AB : BC, \text{ czyli}$$

$$(2\,r - w) : b = b : w, \text{ stąd } r = \frac{b^2 + w^2}{2\,w}.$$

Kąt zaś środkowy ASB — obliczymy przy pomocy funkcji

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{2\,bw}{b^2 + w^2}.$$

2) Pole odcinka ADE równe jest różnicy pola p_1 wycinka kołowego $ADES$ i pola p_2 trójkąta AES, którego wysokość

$$BS = \sqrt{r^2 - b^2} = \frac{b^2 - w^2}{2\,w}; \text{ a więc } p_2 = \frac{b\,(b^2 - w^2)}{2\,w}.$$

Pole p_1 obliczymy z proporcji:

$$p_1 : r^2 \pi = 2\,\alpha : 360^0, \text{ stąd}$$

$$p_1 = \frac{(b^2+w^2)^2}{4\,w^2} \cdot \frac{\pi\,\alpha}{180^0}.$$

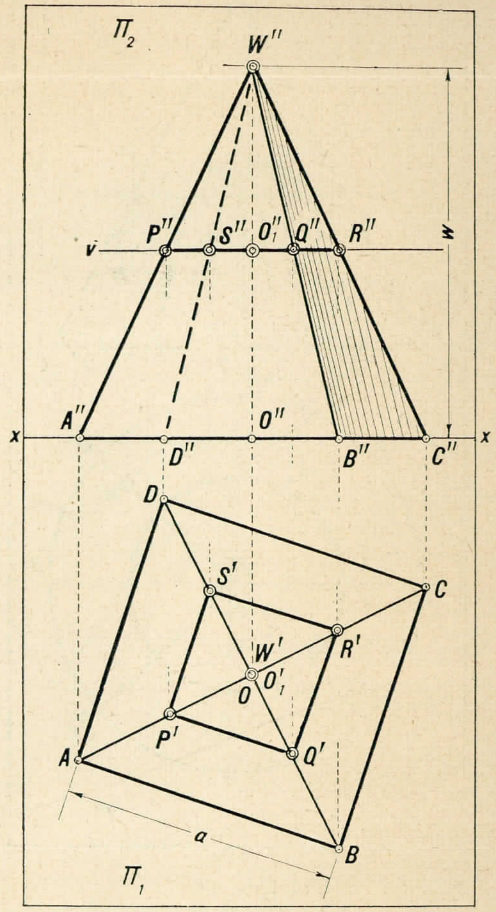
3) Na obliczenie pojemności schronu V otrzymamy wzór:

$$V = \frac{(b^2 + w^2)^2 d}{4\,w^2} \left[\frac{(180^0 - \alpha)\,\pi}{180^0} + \frac{2\,w \cdot b\,(w^2 - b^2)}{(b^2 + w^2)^2} \right]$$

II. Rzuty ostrosłupa, stożka, wielościanów foremnych, przedmiotów technicznych, powierzchni topograficznych i ich przekrojów.

41. *Nadzwyczaj prosta jest konstrukcja rzutów ostrosłupa i stożka, jeżeli ich podstawy przyjmiemy na pierwszej rzutni.*

a) Rys. 47 przedstawia pierwszy i drugi rzut ostrosłupa prostego; podstawą jego jest kwadrat o boku a, leżący na pierwszej rzutni, wysokością jest odcinek $w = OW$. Zarysem pierwszego rzutu ostrosłupa jest kwadrat podstawy; pierwsze rzuty krawędzi bocznych schodzą się z przekątnymi, pierwszy rzut wierzchołka ze środkiem tego kwadratu. Patrząc na ostrosłup w kierunku prostopadłym do pierwszej rzutni, widzimy wszystkie jego krawędzie; dlatego pierwsze rzuty wszystkich krawędzi ostrosłupa narysowano linią pełną.



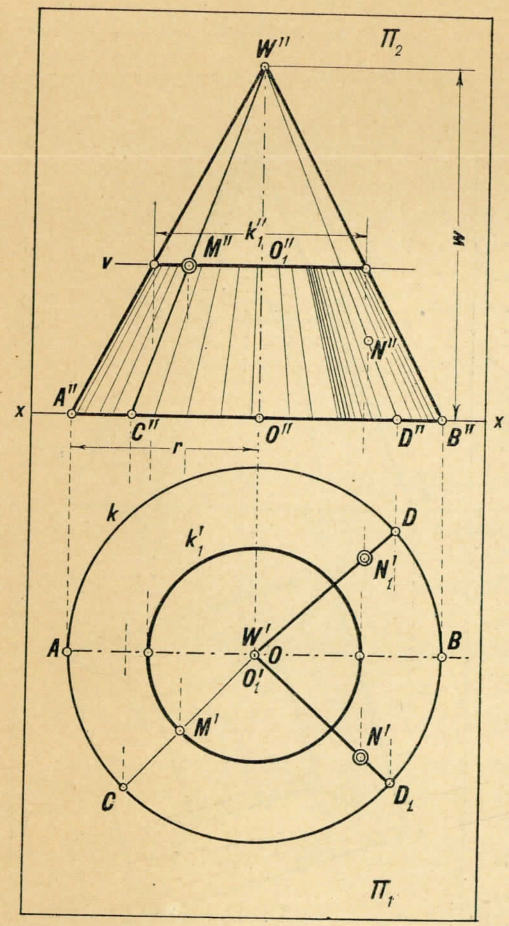
Rys. 47.

Zarys drugiego rzutu ostrosłupa przedstawia się jako trójkąt równoramienny $A''\,W''\,C''$ o wysokości w. Patrząc na ostrosłup w kierunku prostopadłym do drugiej rzutni, widzimy trzy krawędzie boczne i dwie krawędzie przypodstawne, nie widzimy natomiast jednej krawędzi bocznej WD i dwóch krawędzi przypodstawnych AD i DC. Niewidzialną krawędź boczną narysowano w drugim rzucie linią przerywaną, drugie zaś rzuty niewidzialnych krawędzi przypodstawnych schodzą się na osi x z rzutami krawędzi widzialnych.

Ponieważ wysokość ostrosłupa WO jest odcinkiem prostopadłym do pierwszej rzutni, przeto pierwszy jej rzut jest punktem, drugi zaś odcinkiem prostopadłym do osi x i równym danej długości w.

Płaszczyzna równoległa do pierwszej rzutni przecina ostrosłup podług kwadratu $PQRS$; drugi rzut tego kwadratu leży na drugim śladzie v płaszczyzny tnącej, rzut zaś pierwszy jest kwadratem $P'\ Q'\ R'\ S'$ przystającym do kwadratu $PQRS$. [Por. art. 32, ust. b)!].

Kwadraty $ABCD$ i $PQRS$ są podstawami ostrosłupa ściętego, o wysokości 00_1 równej odległości tych kwadratów.



Rys. 48.

b) Rys. 48 przedstawia rzuty stożka obrotowego o promieniu r, wysokości w, spoczywającego podstawą na pierwszej rzutni. Zarysem pierwszego rzutu jest koło o promieniu r, zarysem zaś drugiego rzutu jest trójkąt równoramienny o podstawie $2\,r$, wysokości w.

Objaśnij na rysunku: 1) konstrukcję rzutów koła k_1, podług którego stożek przecina płaszczyzna równoległa do pierwszej rzutni; 2) konstrukcję drugiego rzutu punktu M, znajdującego się na pobocznicy stożka, jeżeli jest dany pierwszy rzut tego punktu; 3) konstrukcję pierwszego rzutu punktu N, leżącego na pobocznicy, jeżeli jest dany drugi rzut tego punktu!

Zauważ: *punkt leży na pobocznicy stożka, jeżeli leży na jego tworzącej.*

42. Zagadnienie 1. *Ostrosłup prosty o podstawie kwadratowej opiera się jednym wierzchołkiem podstawy o rzutnię* π_1, *płaszczyzna zaś podstawy jest prostopadła do tej rzutni.* (Rys. 49).

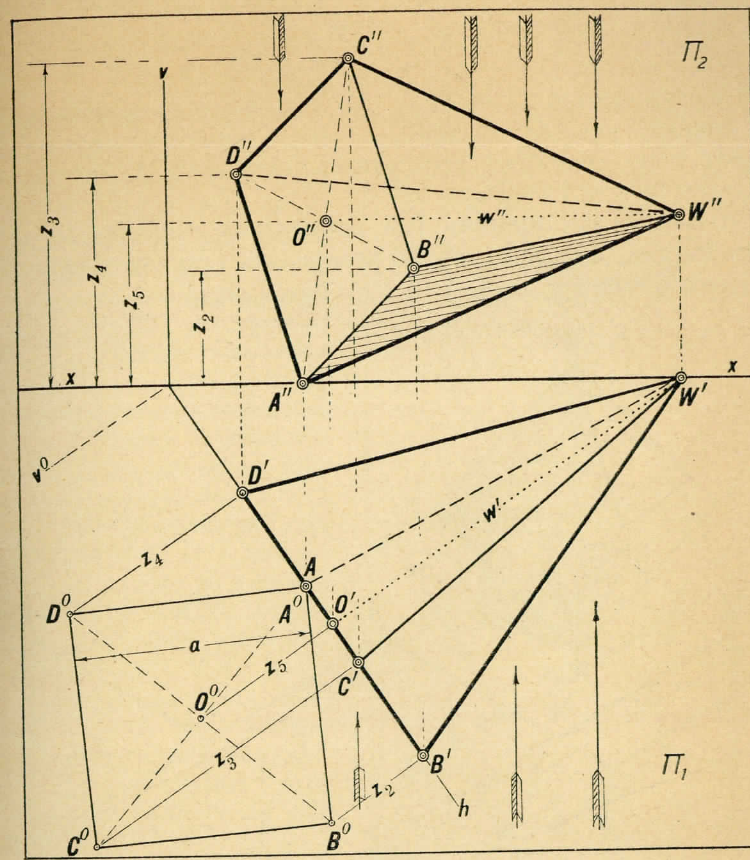
1) *Wykreślić rzuty ostrosłupa*; 2) *Obliczyć jego objętość i powierzchnię, jeśli bok podstawy* $a = 4{,}5\ dcm$, *wysokość* $w = 9\ dcm$.

Rozwiązanie ad 1). Oznaczmy pierwszy ślad płaszczyzny podstawy przez h (Zob. art. 32, ust. a)!).

Pierwszy i drugi rzut kwadratu podstawowego $ABCD$ wykreślimy przy pomocy jego kładu $A^0\ B^0\ C^0\ D^0$ na pierwszą rzutnię (Zob. art. 33, uwaga 2!).

Łącząc drugie rzuty A'' i C'', B'' i D'' przeciwległych wierzchołków kwadratu otrzymamy drugie rzuty jego przekątnych. Ich punkt przecięcia się O'' jest drugim rzutem środka kwadratu. Pierwszy rzut O' tego środka znajduje się na przecięciu się ze śladem h prostopadłej do osi x, poprowadzonej przez O''.

Przez środek kwadratu O przechodzi wysokość ostrosłupa $OW = w$ i jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. A ponieważ płaszczyzna ta



Rys. 49.

jest prostopadła do pierwszej rzutni, przeto wysokość OW jest równoległa do tej rzutni. Z tego wynika znowu, że pierwszy rzut $O'\ W'$ wysokości OW jest prostopadły do śladu h i równy długości w, drugi zaś rzut $O''\ W''$ tej wysokości jest równoległy do osi x.

Jeśli połączymy drugi rzut W'' wierzchołka ostrosłupa z drugimi rzutami wierzchołków podstawy za pomocą odcinków, otrzymamy drugie rzuty krawędzi bocznych.

Patrząc na ostrosłup w kierunku prostopadłym do drugiej rzutni, widzimy wszystkie jego krawędzie z wyjątkiem jednej WD, której drugi rzut wykreślono dlatego linią przerywaną.

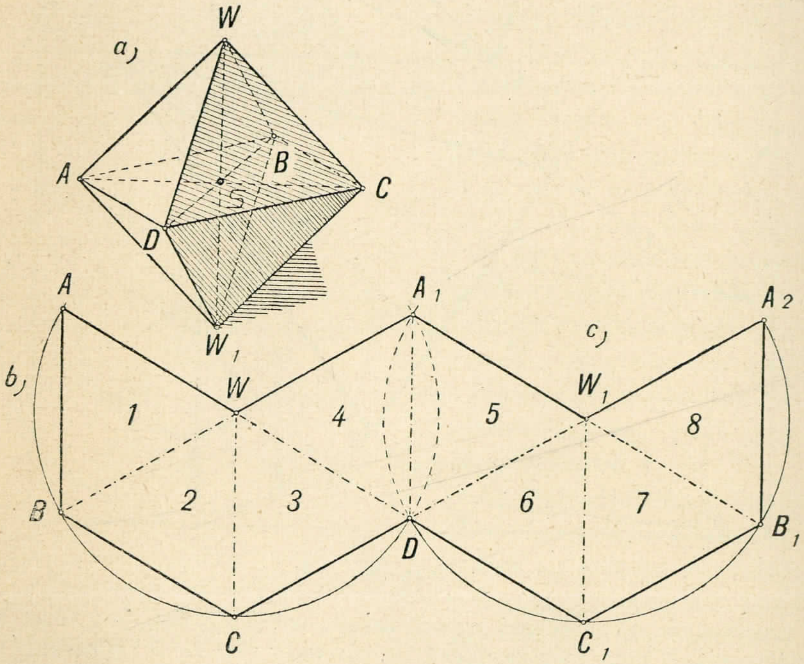
Pierwsze rzuty krawędzi bocznych są odcinkami łączącymi pierwszy rzut W' wierzchołka ostrosłupa z pierwszymi rzutami wierzchołków podstawy. Tylko jedna krawędź boczna WA jest w pierwszym rzucie niewidzialna dla oka, patrzącego na ostrosłup w kierunku prostopadłym do pierwszej rzutni.

Wskazówka ad 2). Objętość ostrosłupa V obliczamy, jak wiadomo, mnożąc pole podstawy p przez trzecią część wysokości w, tj. podług wzoru:

$$V = p \cdot \frac{w}{3}.$$

Powierzchnia ostrosłupa składa się z pola kwadratu podstawowego o boku a i pól czterech trójkątów równoramiennych o równej podstawie a i równej wysokości, którą obliczymy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa z wysokości ostrosłupa w i podstawy a.

43. a) Ośmiościan foremny jest ograniczony ośmioma równobocznymi trójkątami. Figura a) rys. 50 przedstawia rzut równoległy ukośny ośmiościanu foremnego, figury b) i c) jego siatkę.



Rys. 50.

Na modelu ośmiościanu spostrzegamy, że każda płaszczyzna przechodząca przez jego przekątne dzieli go na dwa ostrosłupy o wspólnej podstawie kwadratowej. Każde dwie przeciwległe ściany tych ostrosłupów są do siebie równoległe, np. ściany WDC i W_1AB.

b) **Zagadnienie 2.** *Przekątna WW_1 ośmiościanu foremnego o krawędzi a dotyka pierwszej rzutni i jest do niej prostopadła.* (Rys. 51).

1) *Wykreślić rzuty ośmiościanu, a nadto rzuty i prawdziwą wielkość jego przekroju płaszczyzną, prostopadłą do pierwszej rzutni.*

2) Przyjąwszy $a = 4$ cm obliczyć: a) *objętość ośmiościanu V;* b) *promień kuli wpisanej r;* c) *promień kuli opisanej R.*

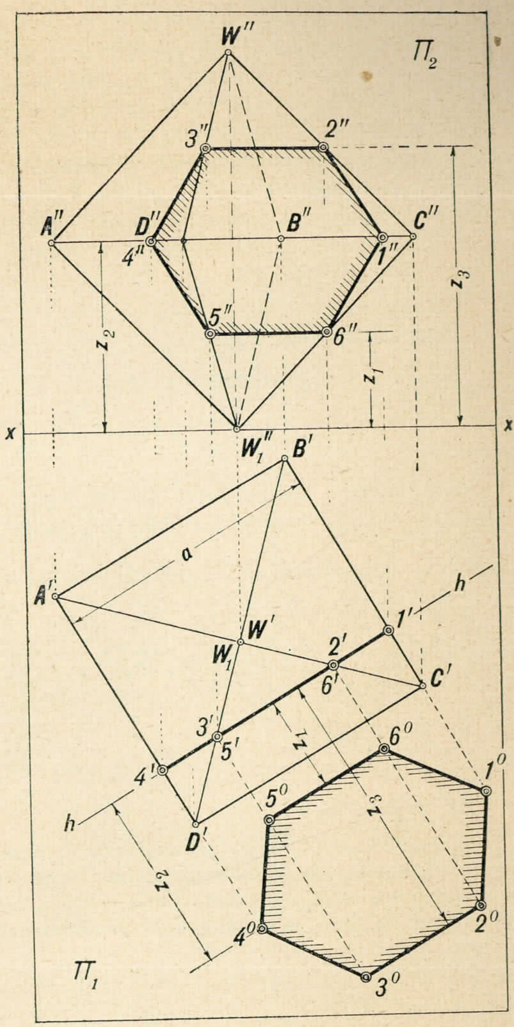
Rozwiązanie ad 1).

a) Pierwszy rzut przekątnej WW_1 jest punktem, rzut drugi odcinkiem, prostopadłym do osi x-ów i równym tej przekątnej. [Zob. art. 29, ust. a)].

Płaszczyzna przekątna ośmiościanu prostopadła do przekątnej WW_1, przecina ośmiościan podług kwadratu $ABCD$, który w pierwszym rzucie przedstawia się w prawdziwej wielkości i kształcie, w drugim rzucie jako odcinek, równoległy do osi x.

Wykreśliwszy zatem pod osią x kwadrat $A'\,B'\,C'\,D'$ o boku a możemy go przyjąć za pierwszy rzut kwadratu $ABCD$. Środek tego kwadratu jest pierwszym rzutem przekątnej WW_1, każda zaś przekątna kwadratu łączy w sobie pierwsze rzuty czterech krawędzi ośmiościanu, znajdujących się na płaszczyznach przekątnych prostopadłych do pierwszej rzutni.

Wykreślmy ze środka kwadratu $A'\,B'\,C'\,D'$ prostopadłą do osi x, a na tej prostopadłej odmierzmy powyżej osi x przekątną tego kwadratu $A'C' = W_1''W''$. Otrzymamy rzut pionowy przekątnej WW_1 ośmiościanu, prostopadłej do pierwszej rzutni.



Rys. 51.

Przez środek odcinka $W''\,W_1''$ poprowadźmy prostą równoległą do osi x. Na tej prostej i na prostopadłych do osi x poprowadzonych przez A', B', C', D', znajdować się będą drugie rzuty A'', B'', C'', D'' wierzchołków A, B, C i D.

Jeżeli rzuty A'', B'', C'', D'' połączymy z rzutami W'' i W_1'', to otrzymamy drugie rzuty krawędzi ośmiościanu, wychodzących z wierzchołków W i W_1.

Krawędzie widzialne i niewidzialne w drugim rzucie oznaczamy, jak w zagadnieniach poprzednich.

b) Oznaczmy pierwszy ślad płaszczyzny tnącej przez h.

Na prostą h pada pierwszy rzut figury przekroju. Rzuty pierwsze wierzchołków tej figury są w punktach przecięcia się prostej h z pierwszymi rzutami krawędzi ośmiościanu; oznaczmy je $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$.

Rzuty drugie tych wierzchołków będą punktami przecięcia się prostopadłych do osi x, wykreślonych przez $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, z drugimi rzutami odpowiednich krawędzi ośmiościanu.

Łącząc wierzchołki figury przekroju otrzymamy jej boki. Prawdziwą wielkość figury otrzymamy, jeżeli wykonamy kład płaszczyzny tnącej na pierwszą rzutnię i narysujemy w znany sposób wielokąt $1^0\,2^0\,3^0\,4^0\,5^0\,6^0$. (Zob. art. 33, uw. 2!).

Wskazówki ad 2).

Na rys. 50 spostrzegamy, że:

a) $v = 2 \cdot ABCD \cdot \frac{SW}{3} = 2a^2 \frac{a\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Objętość ośmiościanu składa się z objętości 8 ostrosłupów, których podstawami są ściany ośmiościanu, a wysokościami promień r kuli wpisanej w ośmiościan. Pole jednej ściany równe jest, jak wiadomo, $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. A zatem:

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r}{3}\text{; stąd } r = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

c) $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

44. Ćwiczenia.

1) Jeżeli na rys. 50 a) poprowadzimy przez przekątną ośmiościanu WW_1 płaszczyznę prostopadłą do krawędzi np. DC, to przetnie ona trójkąty WDC i W_1DC podług ich wysokości, które z przekątną WW_1 utworzą trójkąt równoramienny. Kąt wierzchołkowy tego trójkąta jest miarą kąta dwuściennego δ w ośmiościanie.

Oblicz ten kąt!

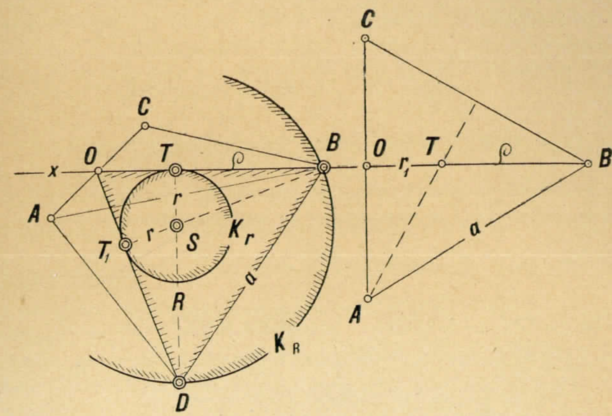
$$\left[\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right].$$

2) Na rysunku 52 widzimy rzut równoległy ukośny czworościanu foremnego, który przecięto płaszczyzną BDO prostopadłą do krawędzi AC. Płaszczyzna ta przecięła kulę opisaną na czworościanie podług wielkiego koła K_R, kulę zaś wpisaną podług koła wielkiego K_r.

Przyjmując krawędź czworościanu $a = 2{,}5$ dcm wykreślić pierwszy i drugi jego rzut, jeżeli jego ściana ABC jest równoległa do pierwszej rzutni, przekrój BDO do drugiej rzutni.

Obliczyć objętość czworościanu V, powierzchnię P, promień kuli opisanej R, promień kuli wpisanej r, kąt dwuścienny δ.

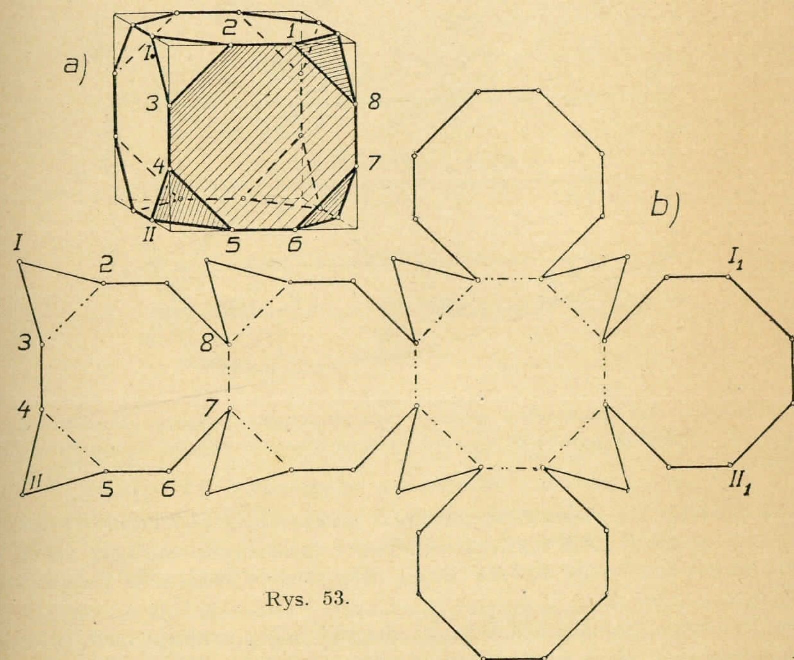
$$\left(V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2},\quad r = \frac{a}{12}\sqrt{6},\quad R = \frac{a}{4}\sqrt{6}, \ldots\right).$$



Rys. 52.

3) Wykreślić rzuty, obliczyć objętość i pole ostrosłupa trójściennego, jeżeli jego krawędzie podstawowe $k = 85$ cm i $k_1 = 74$ cm tworzą kąt $\alpha = 85^0\,14'$, zaś krawędź $k_2 = 107$ cm, wychodząca z wierzchołka tego kąta, jest nachylona do krawędzi k pod kątem $88^0\,40'$, zaś do krawędzi k_1 pod kątem $64^0\,15'$.

$(V = 107{,}673 \text{ dcm}^3)$.



Rys. 53.

Jeżeli rzuty A'', B'', C'', D'' połączymy z rzutami W'' i W_1'', to otrzymamy drugie rzuty krawędzi ośmiościanu, wychodzących z wierzchołków W i W_1.

Krawędzie widzialne i niewidzialne w drugim rzucie oznaczamy, jak w zagadnieniach poprzednich.

b) Oznaczmy pierwszy ślad płaszczyzny tnącej przez h.

Na prostą h pada pierwszy rzut figury przekroju. Rzuty pierwsze wierzchołków tej figury są w punktach przecięcia się prostej h z pierwszymi rzutami krawędzi ośmiościanu; oznaczmy je $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$.

Rzuty drugie tych wierzchołków będą punktami przecięcia się prostopadłych do osi x, wykreślonych przez $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, z drugimi rzutami odpowiednich krawędzi ośmiościanu.

Łącząc wierzchołki figury przekroju otrzymamy jej boki. Prawdziwą wielkość figury otrzymamy, jeżeli wykonamy kład płaszczyzny tnącej na pierwszą rzutnię i narysujemy w znany sposób wielokąt $1^0\,2^0\,3^0\,4^0\,5^0\,6^0$. (Zob. art. 33, uw. 2 !).

Wskazówki ad 2).

Na rys. 50 spostrzegamy, że:

a) $v = 2 \cdot ABCD \cdot \dfrac{SW}{3} = 2a^2\,\dfrac{a\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Objętość ośmiościanu składa się z objętości 8 ostrosłupów, których podstawami są ściany ośmiościanu, a wysokościami promień r kuli wpisanej w ośmiościan. Pole jednej ściany równe jest, jak wiadomo, $\dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$. A zatem:

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 8\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{r}{3}\,;\ \text{stąd}\ r = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

c) $R = \dfrac{a}{2}\sqrt{2}$.

44. Ćwiczenia.

1) Jeżeli na rys. 50 a) poprowadzimy przez przekątną ośmiościanu WW_1 płaszczyznę prostopadłą do krawędzi np. DC, to przetnie ona trójkąty WDC i W_1DC podług ich wysokości, które z przekątną WW_1 utworzą trójkąt równoramienny. Kąt wierzchołkowy tego trójkąta jest miarą kąta dwuściennego δ w ośmiościanie.

Oblicz ten kąt!

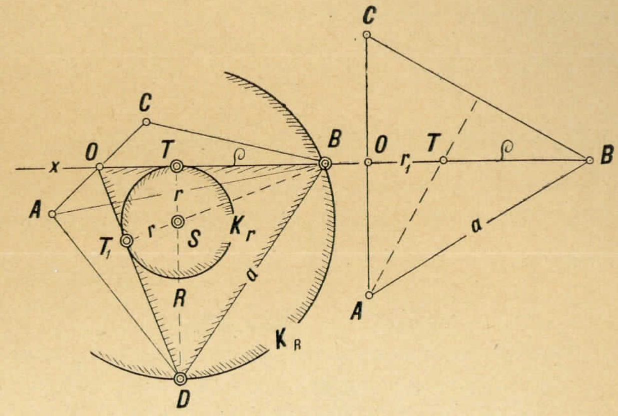
$$\left[\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right].$$

2) Na rysunku 52 widzimy rzut równoległy ukośny czworościanu foremnego, który przecięto płaszczyzną BDO prostopadłą do krawędzi AC. Płaszczyzna ta przecięła kulę opisaną na czworościanie podług wielkiego koła K_R, kulę zaś wpisaną podług koła wielkiego K_r.

Przyjmując krawędź czworościanu a = 2,5 dcm wykreślić pierwszy i drugi jego rzut, jeżeli jego ściana ABC jest równoległa do pierwszej rzutni, przekrój BDO do drugiej rzutni.

Obliczyć objętość czworościanu V, powierzchnię P, promień kuli opisanej R, promień kuli wpisanej r, kąt dwuścienny δ.

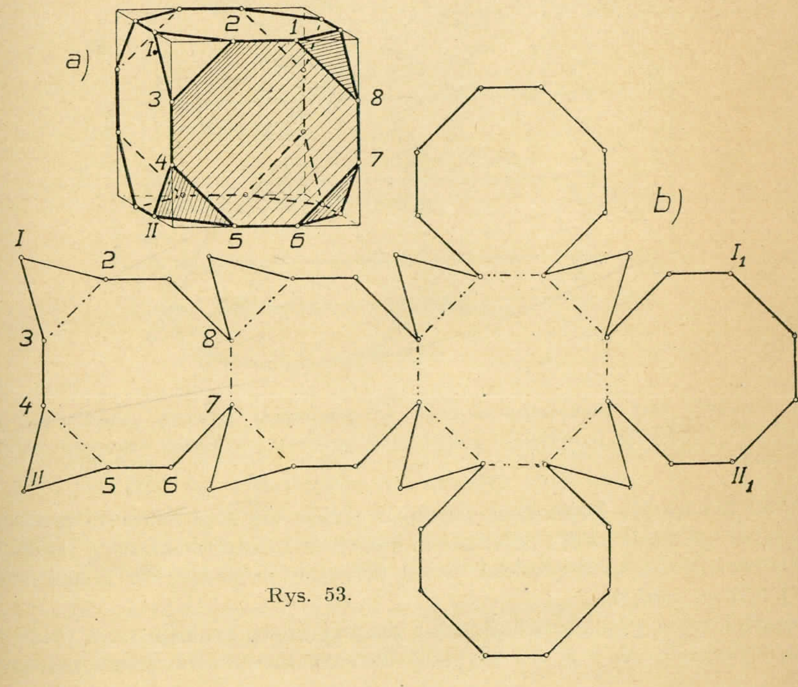
$$\left(V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2},\quad r = \frac{a}{12}\sqrt{6},\quad R = \frac{a}{4}\sqrt{6},\ \ldots\right).$$



Rys. 52.

3) Wykreślić rzuty, obliczyć objętość i pole ostrosłupa trójściennego, jeżeli jego krawędzie podstawowe k = 85 cm i k_1 = 74 cm tworzą kąt α = 85° 14′, zaś krawędź k_2 = = 107 cm, wychodząca z wierzchołka tego kąta, jest nachylona do krawędzi k pod kątem 88° 40′, zaś do krawędzi k_1 pod kątem 64° 15′.

(V = 107,673 dcm³).



Rys. 53.

4) Cztery przystające trójkąty o bokach 3,5; 4; 4,5 dcm ograniczają ostrosłup trójścienny. Przedstawić ostrosłup ten w dwóch rzutach prostokątnych; wyznaczyć konstrukcyjnie i rachunkiem kąty płaskie i dwuścienne jednego jego naroża.

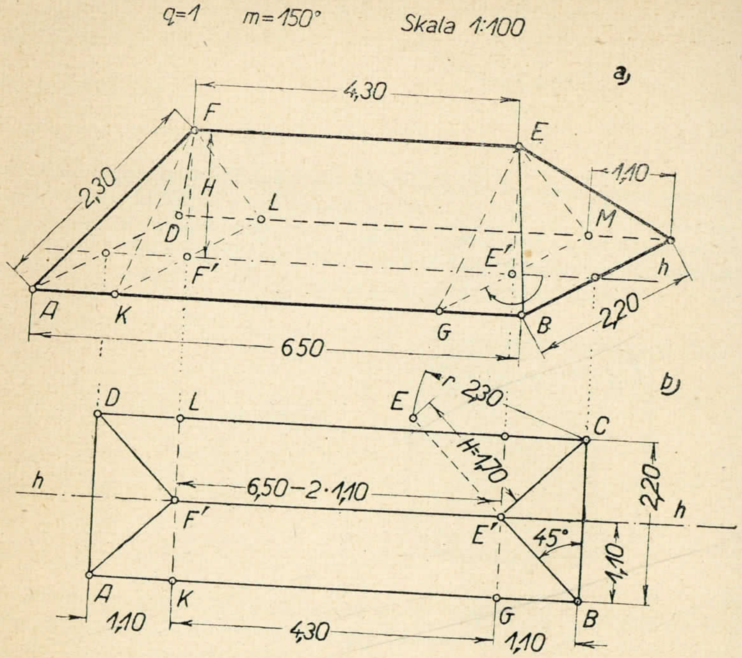
5) Rysunek 53 a) przedstawia rzut równol. ukośny bryły, którą otrzymano z sześcianu foremnego przez ścięcie jego naroży za pomocą płaszczyzn, poprowadzonych przez punkty dzielące krawędzie w stosunku 1 : 3. Na figurze b) tego rysunku wykreślono siatkę tej bryły.

a) Wykreślić pierwszy i drugi rzut tej bryły; b) obliczyć jej powierzchnię i objętość.

Uwaga. *W kształcie takiej bryły krystalizuje fluoryt.*

6) *Na rys.* 54 *figura* a) *przedstawia rzut równoległy ukośny namiotu (dachu), którego ściany są równo nachylone do poziomu; figura* b) *jest jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę poziomą.*

Podstawa namiotu ma 6,50 *m długości,* 2,20 *m szerokości; krawędź boczna wynosi* 2,30 *m.*



Rys. 54.

a) *Wykreślić rzut prostokątny namiotu na płaszczyznę pionową przechodzącą przez krawędź CD;* b) *obliczyć pojemność i powierzchnię namiotu;* c) *obliczyć kąt nachylenia ścian do poziomu.*

Wskazówka. 1. Pojemność namiotu składa się z pojemności graniastosłupa prostego $EGMLFK$ i pojemności dwóch ostrosłupów $ADLKF$ i $GBCME$, które zsunięte do siebie tworzą jeden ostrosłup o podstawie kwadratowej, której bok = 2,20 m.

Do obliczenia pojemności jednej i drugiej bryły brakuje nam tylko wymiaru wysokości $H = E'E$. Wymiar ten uzyskamy albo przez zmierzenie

na dokładnie wykreślonym trójkącie $CE'E$ przyprostokątnej $E'E$ lub przez jej obliczenie przy pomocy twierdzenia Pitagorasa.

2) Pole namiotu składa się z pól dwóch trapezów przystających i dwóch trójkątów przystających o równych wysokościach; wysokość tę obliczymy lub zmierzymy przy pomocy trójkąta prostokątnego $EE'G$.

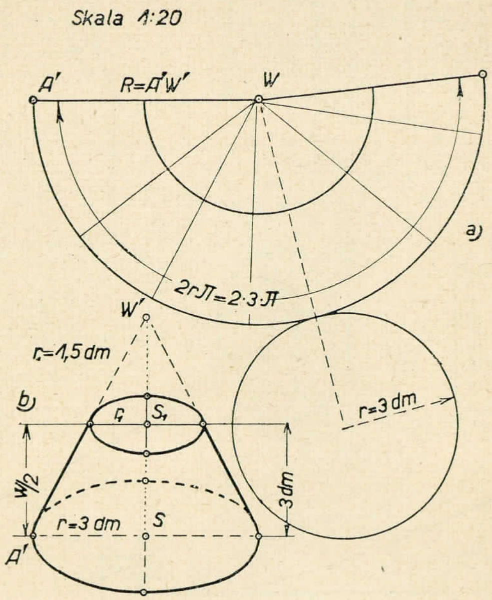
3) Również kąt α nachylenia ścian namiotu do poziomu obliczymy i zmierzymy przy pomocy trójkąta $EE'G$. $\left[tg\,\alpha = \frac{EE'}{E'G} \right]$.

Uwaga. *W powyższy sposób oblicza się objętość (kubaturę) i pole dachu równospadzistego.*

7) *Blaszane naczynie ma mieć kształt stożka ściętego, powstałego ze stożka pełnego o promieniu koła podstawowego r* = 3 *dcm, wysokości w* = 6 *dcm przez przecięcie go płaszczyzną równoległą do podstawy.*

Pojemność naczynia ma być równa $\frac{7}{8}$ pojemności stożka pełnego.

Sporządzić szkic techniczny dla blacharza; obliczyć, ile kosztować będzie blacha na naczynie, jeżeli za 1 m² cynkowej blachy płaci się po 3,75 zł? Ile l pojemności będzie miało naczynie? (Rys. 55).

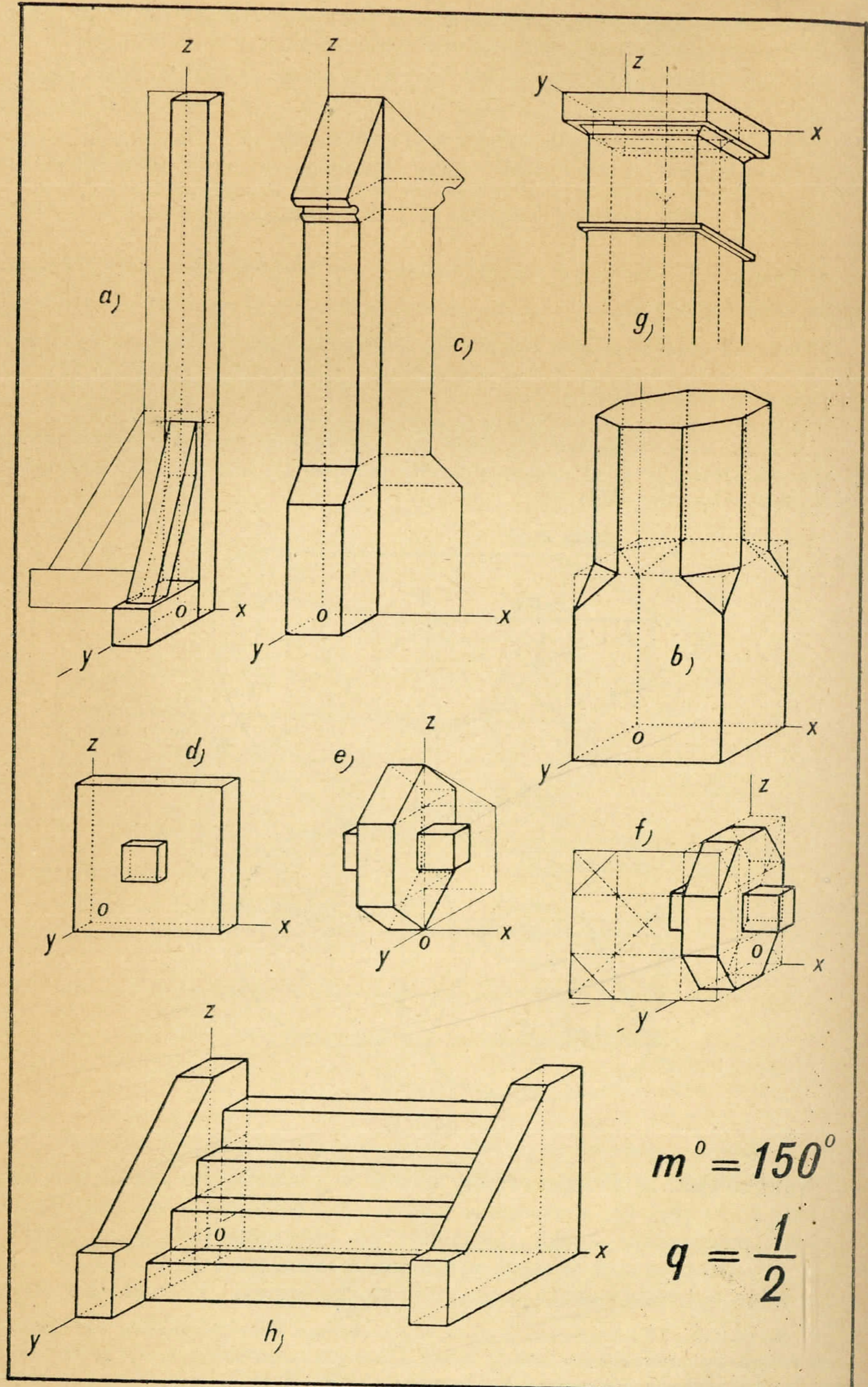


Rys. 55.

Wskazówka. a) Przedstawiamy stożek w równoległym rzucie ukośnym w skali 1 : 20 (fig. b), a następnie wykreślamy rozwinięcie na płaszczyźnie rysunku powierzchni stożka, potrzebne do obliczenia jego pola. (fig. a).

b) Wysokość stożka ściętego obliczamy z równania $V = V_1 - V_2 = \frac{7}{8} V_1$, gdzie V jest objętością stożka ściętego, V_1 stożka pełnego, V_2 stożka odciętego.

8) *Na rysunku* 56 *zobrazowano w rzucie równ. ukośnym kilka przedmiotów technicznych odniesionych do prostokątnego układu trzech płaszczyzn przecinających się podług trzech prostopadłych do siebie osi x, y, z.* A mianowicie:



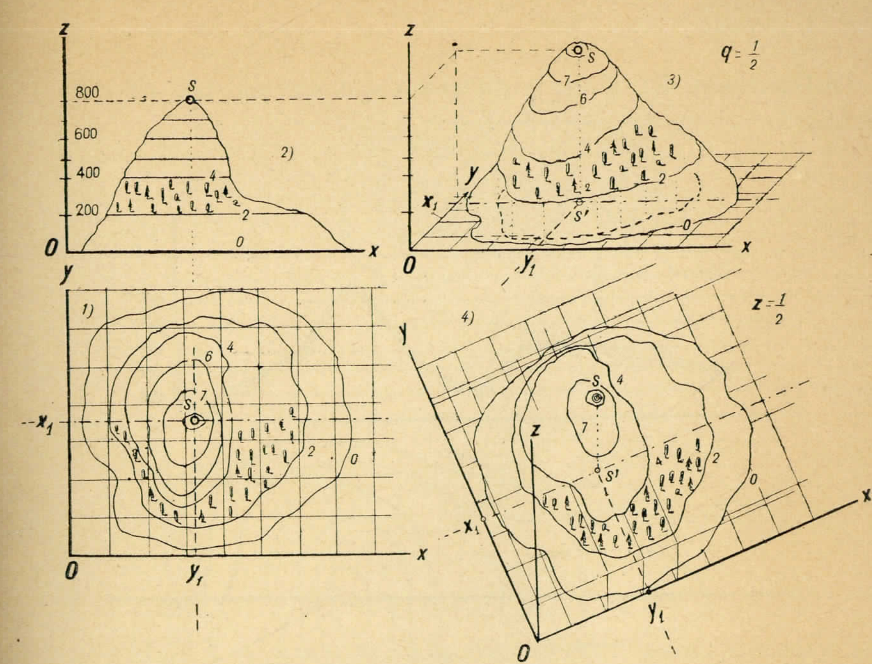
Rys. 56.

Figura a) przedstawia podporę drewnianą, b) gotycki słup podporowy, c) gotycką podporę murowaną; d), e) i f) płyty zaopatrzone w czopy o przekrojach kwadratowych; g) słup o przekroju kwadratowym, h) schody.

1) *Przedstawić przedmioty te w dwóch rzutach prostokątnych, na rzutnię (xy) i na rzutnię (xz).*

2) *Przyjąwszy stosowne wymiary tych przedmiotów obliczyć ich objętość.*

45. **Zagadnienie 3.** *Zobrazować teren,* którego mamy plan poziomnicowy (warstwicowy), względnie mapę topograficzną [Rys. 57 1)!] *przy pomocy:*



Rys. 57.

1) *rzutu prostokątnego na płaszczyznę pionową;*

2) *rzutu równoległego ukośnego na płaszczyznę pionową;*

3) *rzutu równoległego ukośnego na płaszczyznę poziomą — czyli* tzw. *perspektywy wojskowej.*

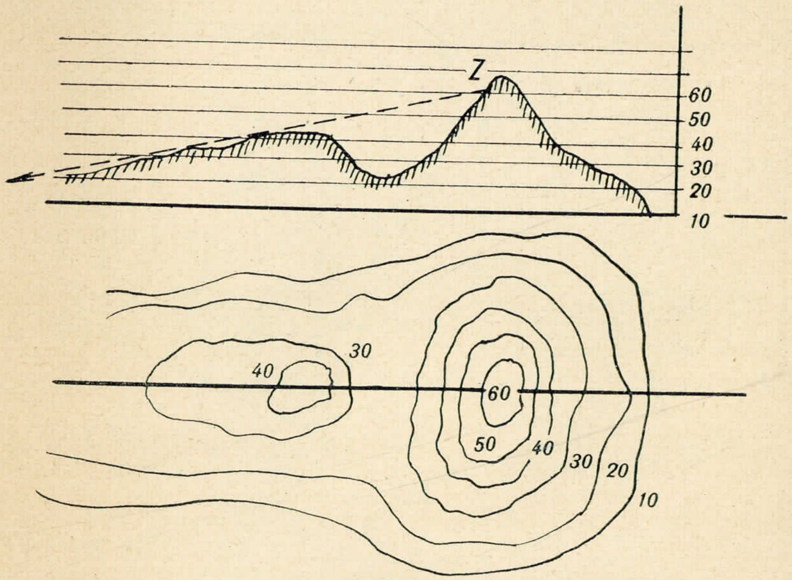
Wskazówka. Przyjmujemy prostokątny układ osi O (x, y, z) i pokrywamy plan szeregiem prostych równoległych do osi x i y, przy pomocy których wykreślamy rzuty poszczególnych punktów terenu. Wysokości tych punktów (cechy) wyznaczamy przy pomocy poziomnic; w rzucie równoległym prostokątnym i ukośnym na płaszczyznę pionową wystąpią one w prawdziwej wielkości (Fig. 2 i 3), w perspektywie wojskowej skrócą się w stosunku $z = \frac{1}{2}$ (Fig. 4).

Poziomnice wystąpią w rzucie prostokątnym jako proste // x, w perspektywie wojskowej jako krzywe, przystające do poziomnic na planie, w rzucie równoległym ukośnym „skręcą się".

46. Ćwiczenia.

1) Do jakiej wysokości musimy wyjść, abyśmy mogli przeglądnąć spadający teren? (Rys. 58).

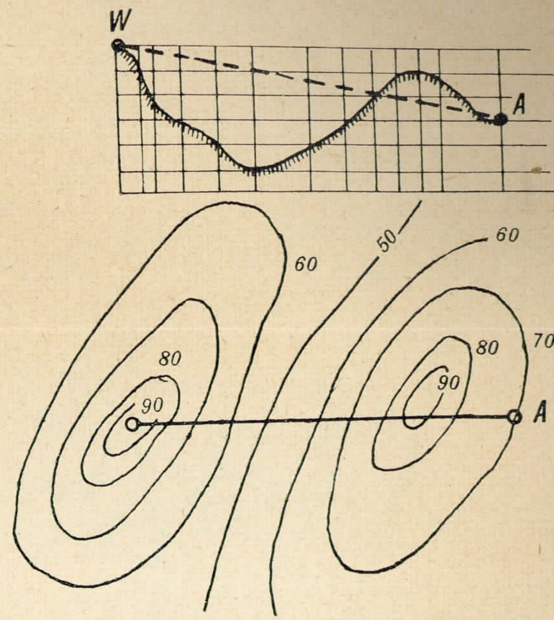
Objaśnienie. Kreślimy profil przekroju terenu, jak na rys. 18, art. 14.



Rys. 58.

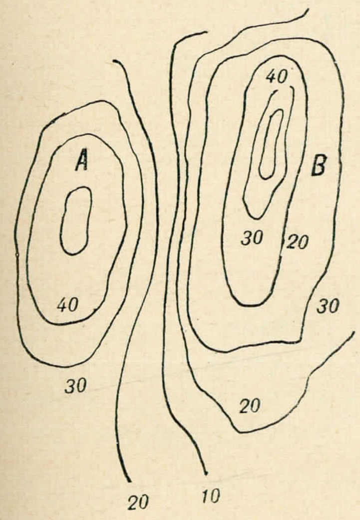
Na profilu spostrzeżemy, że musimy wyjść do punktu Z, leżącego na warstwicy **60.**

2) Czy ze stanowiska A można zobaczyć szczyt góry W (Rys. 59)?

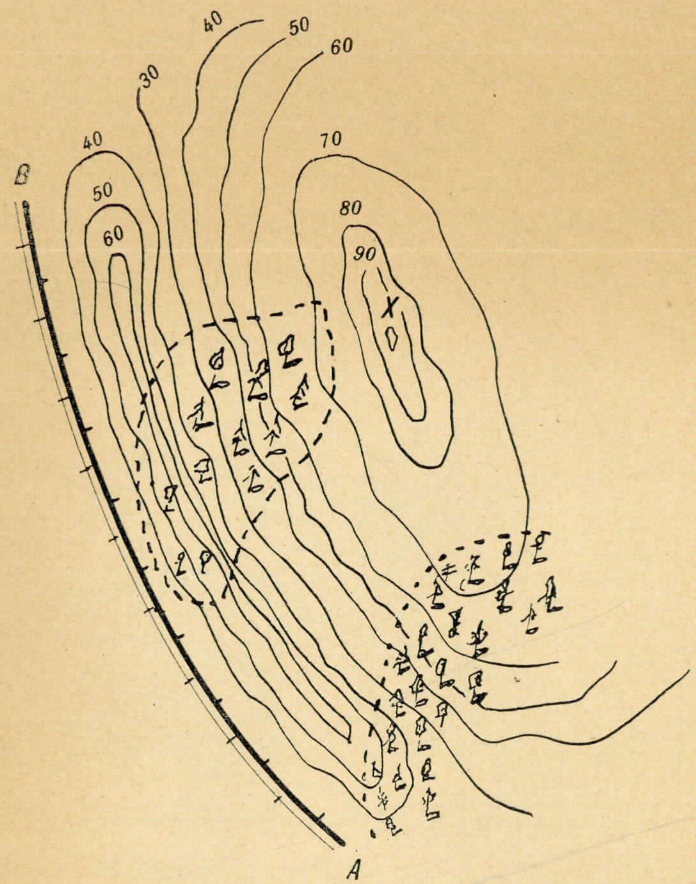


Rys. 59.

3) Czy ze stanowiska A można wysłać sygnał świetlny do stanowiska B? (Rys. 60).



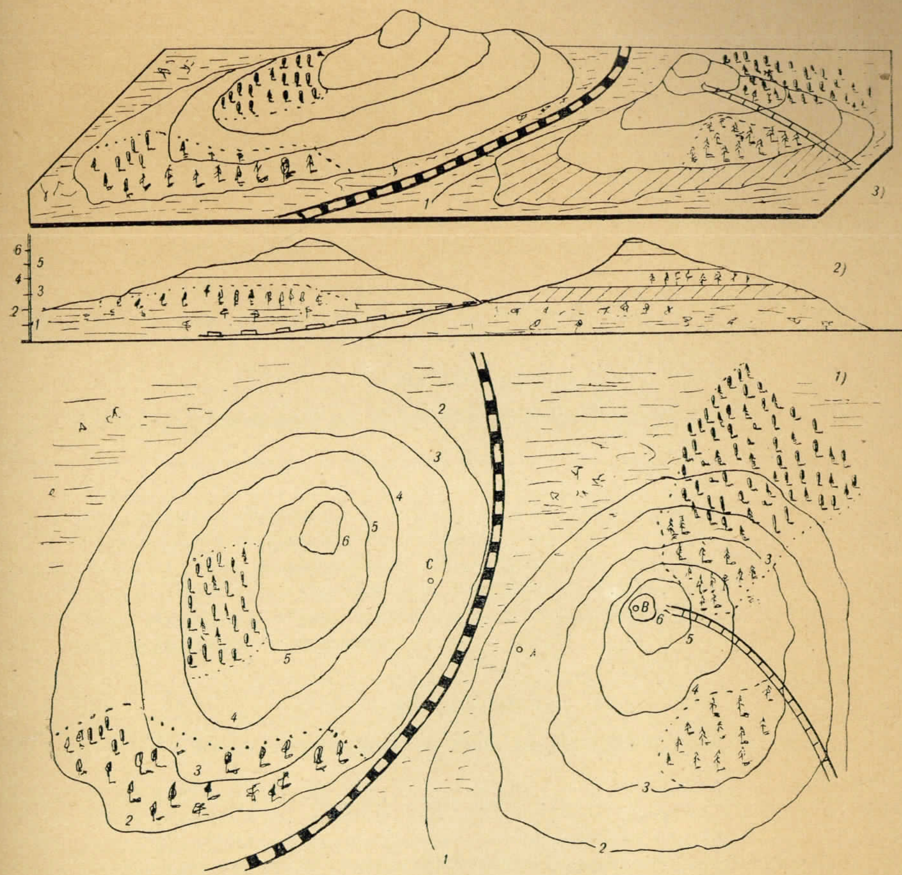
Rys. 60.



Rys. 61.

4) Z miejscowości *A* do miejscowości *B* prowadzi gościniec; czy można zobaczyć na nim ze szczytu góry X transport? (Rys. 61).

5) Zobrazować w rzucie równoległym ukośnym i w rzucie prostokątnym na płaszczyznę pionową topografię okolicy, której plan poziomnicowy posiadamy. (Rys. 62).



Rys. 62.

Objaśnienie. Plan poziomnicowy jest dany na fig. 1). Na podstawie tego planu wykreślamy na płaszczyznie pionowej, podobnie jak w art. 45, rzut prostokątny terenu [fig. 2)] i rzut ukośny [fig. 3)]. Z rzutów tych poznajemy dopiero charakter tego terenu.

SPIS TREŚCI.

WSTĘP

Powtórzenie wiadomości o własnościach rzutu równoległego, połączone z przypomnieniem potrzebnych twierdzeń ze stereometrii.

ROZDZIAŁ I

Rzuty prostokątne na jedną płaszczyznę. (Rzuty cechowane)

ROZDZIAŁ II

Rzuty prostokątne na dwie rzutnie prostopadłe.