POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

Magdalena Kacprzak
Dariusz Kacprzak

MATEMATYKA

przykłady i zadania

skrypt dla studentów kierunku
zarządzanie i marketing

BIAŁYSTOK 2000

Spis treści

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań został napisany z myślą o studentach pierwszego roku kierunku zarządzanie i marketing jako uzupełnienie i poszerzenie zagadnień realizowanych na ćwiczeniach. Jego treść jest zgodna z obowiązującym programem wykładów. Przy doborze zadań wykorzystano doświadczenie zdobyte w kilkuletniej pracy ze studentami tego właśnie kierunku. Może być on jednak przydatny również studentom ekonomii i nauk pokrewnych. Ma on pomagać w kształceniu umiejętności samodzielnego rozwiązywania zadań oraz ułatwiać samokontrolę przy przyswajaniu nowego materiału.

W opracowaniu tym podano tylko wybrane definicje i twierdzenia, dlatego przystąpienie do wykonywania zadań powinien poprzedzić udział w wykładzie z określonego zakresu, bądź też lektura skryptu [BMP], w którym autorzy prezentują systematyczny wykład teorii przedmiotu. Ze skryptu zaczerpnięte są też symbole i oznaczenia.

Całość została podzielona na 25 rozdziałów. Pierwsze rozdziały wprowadzają w świat matematyki. Zawierają ćwiczenia ułatwiające zrozumienie podstawowych pojęć z zakresu logiki oraz zbiorów, relacji i funkcji. Pozostałe rozdziały poświęcone są elementom algebry liniowej, rachunku różniczkowego i całkowego. Na szczególną uwagę zasługuje zastosowanie poznanych narzędzi matematycznych w badaniach ekonomicznych. Ułatwia to studentom rozwiązywanie problemów, z którymi mogą się spotkać w późniejszym życiu zawodowym. Zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania zawsze poprzedzone są przykładami. Niektóre przykłady zawierają nie tylko szczegółowe rozwiązania, ale także krótki komentarz wprowadzający oraz wzory podane w formie gotowych recept na rozwiązanie określonego problemu. Na końcu zamieszczono odpowiedzi do zadań w formie zwięźle opracowanych wyników, jednak bez przedstawienia toku rozwiązania, który podany jest w przykładach.

Pragniemy gorąco podziękować recenzentowi prof. dr hab. Z Bartosiewiczowi za cenne uwagi i wskazówki, które wpłynęły na jakość niniejszego wydania.

1 Elementy logiki

Przykład 1.
Wykazać, że prawo podwójnego przeczenia jest tautologią rachunku zdań

$$p \Leftrightarrow [\sim (\sim p)].$$

Rozwiązanie:
Układamy tablicę wartości logicznych zmiennej p i kolejnych zaprzeczeń.

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$p \Leftrightarrow [\sim (\sim p)]$
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**

Wszystkie "jedynki" w ostatniej kolumnie oznaczają, że prawo podwójnego przeczenia jest tautologią.

Przykład 2.
Wykazać, że prawo de Morgana jest tautologią rachunku zadań

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)].$$

Rozwiązanie:
Układamy tablicę wszystkich możliwych podstawień wartości logicznych za zmienne zdaniowe p, q i obliczamy dla każdego podstawienia wartość logiczną całej formuły.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$
0	0	0	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	1	0	1	1	**1**
1	1	1	0	0	0	0	**1**

Wszystkie "jedynki" w ostatniej kolumnie oznaczają, że prawo de Morgana jest tautologią.

Przykład 3.
Zbadać, czy podana formuła jest tautologią, stosując tablicę wartości logicznych zdań składowych

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(t \vee p) \Rightarrow (t \vee q)].$$

Rozwiązanie:
Układamy tablicę wszystkich możliwych podstawień wartości logicznych za zmienne zdaniowe p, q, t i obliczamy dla każdego podstawienia wartość logiczną całej formuły.

p	q	t	$p \Rightarrow q$	$t \vee p$	$t \vee q$	$(t \vee p) \Rightarrow (t \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(t \vee p) \Rightarrow (t \vee q)]$
0	0	0	1	0	0	1	**1**
0	0	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	1	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**1**
1	0	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	1	1	**1**
1	1	1	1	1	1	1	**1**

Wszystkie "jedynki" w ostatniej kolumnie oznaczają, że formuła

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(t \vee p) \Rightarrow (t \vee q)]$$

jest tautologią rachunku zadań.

Przykład 4.
Zbadać, czy podana formuła jest tautologią, stosując tablicę wartości logicznych zdań składowych

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \Rightarrow r)].$$

Rozwiązanie:
Układamy tablicę wszystkich możliwych podstawień wartości logicznych za zmienne zdaniowe p, q, r i obliczamy dla każdego podstawienia wartość logiczną całej formuły.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \Rightarrow r)]$
0	0	0	0	1	1	0	**0**
0	0	1	0	1	1	0	**0**
0	1	0	0	1	0	0	**0**
0	1	1	0	1	1	0	**0**
1	0	0	0	1	1	1	**1**
1	0	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	1	1	1	**1**

Pojawienie się “zer” w ostatniej kolumnie oznacza, że formuła

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \Rightarrow r)]$$

nie jest tautologią rachunku zadań.

Przykład 5.
Wykazać, że formuła

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$$

jest tautologią rachunku zdań, stosując skróconą metodę zero-jedynkową.
Rozwiązanie:
Załóżmy, że formuła jest fałszywa

$$\{p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]\} \equiv 0. \tag{1}$$

Formuła (1) jest implikacją. Implikacja (1) jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy

$$p \equiv 1, \tag{2}$$

natomiast następnik fałszywy

$$[q \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \equiv 0. \tag{3}$$

Z (3) otrzymujemy analogicznie

$$q \equiv 1 \tag{4}$$

i

$$(p \Rightarrow q) \equiv 0 \tag{5}$$

więc z (2) i (4) otrzymujemy $p \equiv 1$ i $q \equiv 1$. Ale przy takim wartościowaniu $(p \Rightarrow q) \equiv 1$, czyli zachodzi sprzeczność z wartościowaniem (5), więc formuła

$$p \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$$

jest tautologią.

Przykład 6.
Wykazać, że formuła

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$$

jest tautologią rachunku zdań, stosując skróconą metodę zero-jedynkową.
Rozwiązanie:
Załóżmy, że formuła jest fałszywa

$$\{(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]\} \equiv 0. \tag{6}$$

Formuła (6) jest implikacją. Implikacja (6) jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy poprzednik jest prawdziwy

$$(p \Rightarrow q) \equiv 1, \tag{7}$$

natomiast następnik fałszywy

$$[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \equiv 0. \tag{8}$$

Z (8) otrzymujemy analogicznie

$$(\sim q) \equiv 1 \tag{9}$$

i

$$(\sim p) \equiv 0 \tag{10}$$

więc z (9) i (10) otrzymujemy $p \equiv 1$ i $q \equiv 0$. Ale przy takim wartościowaniu $(p \Rightarrow q) \equiv 0$, czyli zachodzi sprzeczność z wartościowaniem (7), więc formuła

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$$

jest tautologią.

Przykład 7.
Określić wartość logiczną zdania

$$[(3 \geqslant 2) \wedge (3^3 = 28)] \Rightarrow [(\sin \frac{\pi}{6} = 1) \vee (1 + 2 = 4)].$$

Rozwiązanie:
Określmy prawdziwość zdań składowych:

zdanie $(3 \geqslant 2)$ jest prawdziwe,
zdanie $(3^3 = 28)$ jest fałszywe,
zdanie $(\sin \frac{\pi}{6} = 1)$ jest fałszywe,
zdanie $(1 + 2 = 4)$ jest fałszywe.

Podstawiając wartości logiczne zdań składowych otrzymamy

$$\{[1 \wedge 0] \Rightarrow [0 \vee 0]\} \quad \equiv \quad \{(0) \Rightarrow (0)\} \quad \equiv \quad \{1\}.$$

Wartość logiczna zdania

$$[(3 \geqslant 2) \wedge (3^3 = 28)] \Rightarrow [(\sin \frac{\pi}{6} = 1) \vee (1 + 2 = 4)]$$

jest równa "jeden", czyli jest ono prawdziwe.

Przykład 8.
Określić wartość logiczną zdania

$$[(2k - \text{jest liczbą parzystą},\ k \in \mathbb{Z}) \wedge (\log_2 8 = 3)] \Rightarrow [(2^3 \cdot 2^4 = 2^7) \vee (\operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi = 1)].$$

Rozwiązanie:
Określmy prawdziwość zdań składowych:

zdanie ($2k -$ jest liczbą parzystą, $k \in \mathbb{Z}$) jest prawdziwe,

zdanie ($\log_2 8 = 3$) jest prawdziwe,

zdanie ($2^3 \cdot 2^4 = 2^7$) jest prawdziwe,

zdanie ($\operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi = 1$) jest prawdziwe.

Podstawiając wartości logiczne zdań składowych otrzymamy

$$\{[1 \wedge 1] \Rightarrow [1 \vee 1]\} \quad \equiv \quad \{(1) \Rightarrow (1)\} \quad \equiv \quad \{1\}.$$

Wartość logiczna zdania

$$[(2k - \text{jest liczbą parzystą},\ k \in \mathbb{Z}) \wedge (\log_2 8 = 3)] \Rightarrow [(2^3 \cdot 2^4 = 2^7) \vee (\operatorname{tg} \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi = 1)]$$

jest równa "jeden", czyli jest ono prawdziwe.

Przykład 9.
Określić wartość logiczną zdania

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} : x^2 + 2x + 7 > 0.$$

Rozwiązanie:
Delta trójmianu kwadratowego x^2+2x+7 jest mniejsza od zera ($\triangle = -24$) i współczynnik stojący przy x^2 jest większy od zera ($a = 1$), a zatem wartości trójmianu dla każdego x są większe od zera, czyli zdanie jest prawdziwe.

Przykład 10.
Napisać zaprzeczenie zdania i określić wartość logiczną zaprzeczenia

$$\exists_{x \in \mathbb{Z}} : x \neq 2x.$$

Rozwiązanie:
Do wyznaczenia zaprzeczenia tego zdania użyjemy następującego prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\sim \exists_{x \in X} : f(x) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} :\sim f(x).$$

$$\sim [\exists_{x \in \mathbb{Z}} : x \neq 2x] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{Z}} :\sim [x \neq 2x] \Leftrightarrow \forall_{x \in \mathbb{Z}} : x = 2x.$$

Zdanie

$$\forall_{x \in \mathbb{Z}} : x = 2x$$

jest zdaniem fałszywym.
Aby to wykazać, wystarczy podać kontrprzykład, czyli przykład obalający postawioną tezę.
Kontrprzykład: gdy $x = 3 \Rightarrow 2x = 6$, zatem $x \neq 2x$ ($3 \neq 6$).

Przykład 11.
Napisać zaprzeczenie zdania i określić wartość logiczną zaprzeczenia

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : x+y\neq 1.$$

Rozwiązanie:
Do wyznaczenia zaprzeczenia tego zdania użyjemy prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\sim[\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : x+y\neq 1] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}} :\sim [x+y\neq 1] \Leftrightarrow \forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}} : x+y=1.$$

Zdanie

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}} : x+y=1$$

jest zdaniem prawdziwym. Dla każdej liczby rzeczywistej x możemy wskazać liczbę rzeczywistą $y=1-x$. Suma tych dwóch liczb będzie równa 1.

Przykład 12.
Napisać zaprzeczenie zdania i określić wartość logiczną zaprzeczenia

$$\forall_{x\in\mathbb{N}} : (x=1\Rightarrow x^2=1).$$

Rozwiązanie:
Do wyznaczenia zaprzeczenia tego zdania użyjemy następującego prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\sim \forall_{x\in X} : f(x) \Leftrightarrow \exists_{x\in X} :\sim f(x).$$

$$\sim[\forall_{x\in\mathbb{N}} : (x=1\Rightarrow x^2=1)] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{N}} :\sim [x=1\Rightarrow x^2=1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{N}} :\sim [x\neq 1 \vee x^2=1] \Leftrightarrow \exists_{x\in\mathbb{N}} : x=1 \wedge x^2\neq 1.$$

Zdanie

$$\exists_{x\in\mathbb{N}} : x=1 \wedge x^2\neq 1$$

jest zdaniem fałszywym. Nie istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x=1$ i $x^2\neq 1$.

ZADANIA:
Zbadać, dla jakich wartości logicznych zmiennych p, q i r formuły są prawdziwe:
1.1. $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow[(\sim p)\vee q]$
1.2. $(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow[(\sim p)\wedge(\sim q)]$
1.3. $(p\wedge q)\Leftrightarrow(p\vee q)$
1.4. $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
1.5. $[p\Rightarrow(\sim q)]\Rightarrow[(\sim q)\Rightarrow p]$
1.6. $[(\sim p\wedge q)\vee r]\wedge[\sim r\vee q]$
1.7. $[(p\Rightarrow q)\vee(q\Rightarrow r)]\Rightarrow r$
Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:
1.8. $[p\Rightarrow(\sim p)]\Rightarrow(\sim p)$
1.9. $p\Rightarrow[q\Rightarrow(p\wedge q)]$
1.10. $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow[p\vee(\sim q)]$
1.11. $(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)$
1.12. $[(\sim p)\wedge(p\vee q)]\Rightarrow q$
1.13. $[(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow r]\Leftrightarrow[q\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow r)]$

1.14. $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow [(p \wedge r) \vee q]$
1.15. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q \vee r)$
1.16. $(r \wedge (\sim r) \wedge p) \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$
Wykazać, że następujące formuły są tautologiami:
1.17. $p \vee (\sim p)$
1.18. $\sim [p \wedge (\sim p)]$
1.19. $(\sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
1.20. $(\sim p) \Rightarrow [\sim (p \wedge q)]$
1.21. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
1.22. $[(p \Rightarrow q) \wedge ((\sim p) \Rightarrow (\sim q))] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
1.23. $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
1.24. $[\sim ((\sim p) \wedge r)] \vee [\sim (q \wedge (\sim r))]$
1.25. $[(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge (\sim r))] \Rightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
1.26. $(p \vee q) \wedge ((\sim q) \vee r) \Rightarrow (p \vee r)$
Określić wartość logiczną zdań:
1.27. $(\cos\pi = 1) \vee (\log_{\frac{2}{3}} 5 > \log_{\frac{2}{3}} 8)$
1.28. $[($37jest liczbą pierwszą $\Rightarrow$ 2 dzieli 37$) \vee (\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 \wedge \forall_{n\in\mathbb{N}} : (2n-1)^2 -$jest liczbą parzystą$)]$
1.29. $[(\sqrt{e^{-100}} > 1) \wedge (e^2 > 2)] \Leftrightarrow \ln 1 = 0$
1.30. $[(\frac{1}{\sqrt{3}} > \sqrt{2}) \vee (2 \cdot 5 = 10)] \Rightarrow (\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{2}})$
1.31. Jeśli $\sin(132^o) < 1$, to równanie $5x^{100} + x^5 + 3 = 0$ ma pierwiastki rzeczywiste lub równanie $5x^{100} + x^5 + 3 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.
1.32. $\sin\frac{3}{2}\pi < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie kąty w trójkącie równobocznym są rozwarte.
1.33. Jeśli $\sqrt{25}$ jest liczbą niewymierną, to $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną lub 5 jest liczbą parzystą.
1.34. Jeśli $2 + 2 = 5$, to sprzedaż cukierków wzrośnie o 100%.
1.35. Jeśli zbiór liczb naturalnych jest zawarty w zbiorze liczb całkowitych, to zbiór liczb całkowitych jest zawarty w zbiorze liczb niewymiernych.
Określić wartość logiczną zdań:
1.36. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : (x^2 + x + 2 = 0)$
1.37. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : [(x > 0) \Rightarrow (x > 1)]$
1.38. $\exists_{x\in\mathbb{N}} : [(x^2 + x - 2 = 0) \wedge (x > 0)]$
1.39. $\exists_{x\in\mathbb{Z}} : [(x^2 + 1 = 0) \Rightarrow (x + 1 = 0)]$
1.40. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : [(x - 1 > x) \Rightarrow (4 > 7)]$
1.41. $\sim \forall_{x\in\mathbb{R}} : |x + 1| = |x| + 1$
1.42. $\sim \exists_{x\in\mathbb{R}} : \text{sgn}|x| = |\text{sgn}x|$
1.43. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : \text{sgn}x = [x]$, gdzie $[x]$ – oznacza część całkowitą liczby x
1.44. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : [x + 1] = [x] + 1$
1.45. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : (x > 2) \Leftrightarrow (x^2 > 4)$
1.46. $\forall_{x\in\mathbb{R}} : (x^2 - 6x + 8 = 0) \Leftrightarrow (x = 2)$
1.47. $\sim \forall_{x\in(0,1)} : \log_x 7 > \log_x x$
Napisać zaprzeczenia zdań i określić wartość logiczną zaprzeczeń:
1.48. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : (x^2 < 0 \wedge 5^x < 2)$
1.49. $\exists_{x\in\mathbb{N}} : (\ln x = 1 \wedge |x| \leqslant 0)$
1.50. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : |\cos x| > 1$
1.51. $\exists_{x\in\mathbb{Z}} : x^2 + 1 = 3$
1.52. $\exists_{x\in\mathbb{R}} : (\sin 2x = 2\sin x)$
1.53. $\forall_{x\in(0,1)} : e^x > 1$
1.54. $\forall_{x\in\mathbb{N}} : (\sqrt{x^2} = x)$
Określić wartość logiczną zdań:
1.55. $\exists_{n\in\mathbb{N}}\, \exists_{x\in\mathbb{R}} : n = \sqrt{x + 1}$
1.56. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \exists_{n\in\mathbb{N}} : n^2 < x$
1.57. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \forall_{n\in\mathbb{N}} : n^2 > x$

1.58. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : (x^2 = y^2 \wedge x = -y) \Rightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$
1.59. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{Z}} : (x > y \vee x < y)$
1.60. $\sim [\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)]$
1.61. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{z\in\mathbb{N}} : x + y = z$
Napisać zaprzeczenia zdań i określić wartość logiczną zaprzeczeń:
1.62. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : x^2 + y^2 \neq 1$
1.63. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : (x = 3y) \Rightarrow (y = 3x)$
1.64. $\exists_{x\in\mathbb{N}}\ \exists_{y\in\mathbb{N}} : [(\frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x}) \Rightarrow (x = y)]$
Sprawdzić, czy następujące zdania są prawdziwe:
1.65. Jeśli p jest zdaniem fałszywym, to zdanie $(p \wedge q) \Rightarrow q$ jest prawdziwe.
1.66. Jeśli q jest zdaniem fałszywym, to zdanie $\sim [(p \vee q) \Rightarrow p]$ jest prawdziwe.
1.67. Jeśli p jest zdaniem prawdziwym, to zdanie $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ jest prawdziwe.
Podać zaprzeczenia zdań:
1.68. Każde rozwiązanie rodzi nowe problemy.
1.69. Wszystkie najprostsze myśli formułowane są w skomplikowany sposób.
1.70. Każdy granat po wyciągnięciu zawleczki przestaje być twoim przyjacielem.
1.71. Istnieją rzeczy, których nie da się wytłumaczyć.
1.72. Jeżeli Jaś się nie nauczy, to Jan nie będzie umiał.
Stosując prawa de Morgana oraz prawo $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$ uprościć formuły:
1.73. $[\sim (p \Rightarrow q)] \wedge p$
1.74. $[(p \wedge q) \Rightarrow (\sim p)] \vee (\sim q)$
1.75. $\sim [((\sim p) \vee q) \Rightarrow q]$
1.76. $[\sim ((\sim p) \vee r)] \wedge [\sim (q \vee r)]$.

2 Algebra zbiorów

Przykład 13.
Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A i B prawdziwe są równości:
a) $A \setminus B = A \cap B'$,
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania).
Rozwiązanie:
Podamy definicje działań na zbiorach. Niech $X-$ przestrzeń, A, $B-$ podzbiory przestrzeni X:
1. $A = B \iff \forall_{x\in X}(x \in A \iff x \in B)$
2. $A \subset B \iff \forall_{x\in X}(x \in A \Longrightarrow x \in B)$
3. $a \in A \cup B \iff a \in A \vee a \in B$
4. $a \in A \cap B \iff a \in A \wedge a \in B$
5. $a \in A \setminus B \iff a \in A \wedge a \notin B$
6. $a \in A' \iff [(a \in X) \wedge (a \notin A)]$.

a) Wykażemy, że

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \cap B'.$$

$$[x \in (A \setminus B)] \overset{5}{\iff} [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \overset{6}{\iff} [(x \in A) \wedge (x \in B')] \overset{4}{\iff} [x \in (A \cap B')].$$

b) Wykażemy, że

$$x \in [A \cap (B \cup C)] \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$x \in [A \cap (B \cup C)] \overset{4}{\iff} (x \in A) \wedge [x \in (B \cup C)] \overset{3}{\iff} (x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)] \iff$$

$$\iff [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)] \overset{4}{\iff} [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)] \overset{3}{\iff}$$

$$\iff x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)].$$

Przykład 14.
Wyznaczyć $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, gdzie

$$A = \{a \in \mathbb{Z} : \sqrt{a^2} \leqslant 2\}, \quad B = \{b \in \mathbb{R} : (0,5)^b < 1\}.$$

Rozwiązanie:
Zbiór A jest zbiorem liczb całkowitych spełniających nierówność

$$\sqrt{a^2} \leqslant 2.$$

Zatem

$$\sqrt{a^2} \leqslant 2 \wedge a \in \mathbb{Z} \iff |a| \leqslant 2 \wedge a \in \mathbb{Z} \iff a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Zbiór B jest zbiorem liczb rzeczywistych spełniających nierówność

$$(0,5)^b < 1.$$

Rozwiążmy ją

$$(0,5)^b < 1 \iff (0,5)^b < (0,5)^0 \iff b > 0.$$

Zatem

$$b \in (0, +\infty).$$

Zbiór $A \cap B$ zawiera elementy należące do zbioru A i do zbioru B, czyli

$$A \cap B = \{1, 2\}.$$

Zbiór $A \cup B$ zawiera elementy należące do zbioru A lub do zbioru B, czyli

$$A \cup B = \{-2, -1\} \cup [0, +\infty).$$

Zbiór $A \setminus B$ zawiera elementy należące do zbioru A i nienależące do zbioru B, czyli

$$A \setminus B = \{-2, -1, 0\}.$$

Przykład 15.
Zaznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych zbiór $A \times B$ i $B \times A$, gdzie

$$A = \{a \in \mathbb{N} : |a - 3| \leqslant 1\}, \quad B = \{b \in \mathbb{R} : b^2 < 4\}.$$

Rozwiązanie:
Zbiór A jest zbiorem liczb naturalnych spełniających nierówność

$$|a - 3| \leqslant 1.$$

Rozwiążmy tę nierówność

$$|a - 3| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant a - 3 \leqslant 1 \iff 2 \leqslant a \leqslant 4.$$

Zatem

$$(2 \leqslant a \leqslant 4) \wedge (a \in \mathbb{N}) \iff a \in \{2, 3, 4\}.$$

Zbiór B jest zbiorem liczb rzeczywistych spełniających nierówność

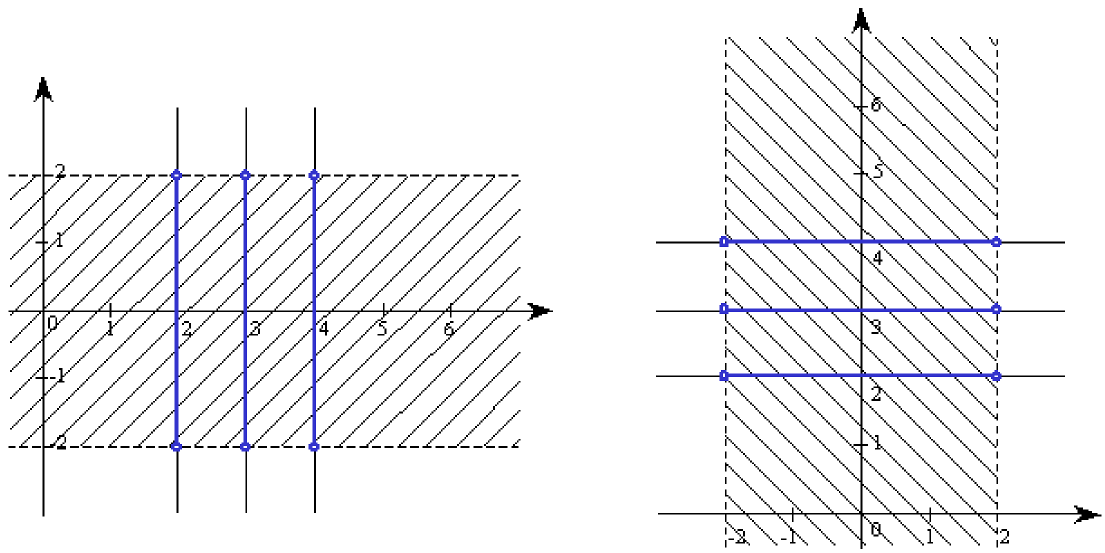
$$b^2 < 4.$$

Po rozwiązaniu tej nierówności otrzymujemy

$$b \in (-2, 2).$$

Zaznaczamy w układzie współrzędnych zbiór $A \times B$ i $B \times A$.

$A \times B$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $B \times A$

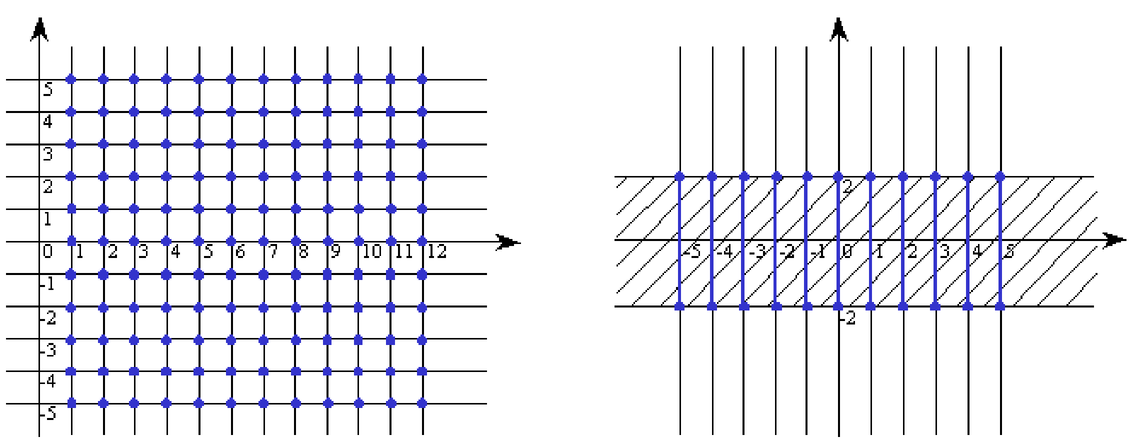


Rysunek 1: Interpretacja geometryczna zbiorów $A \times B$ i $B \times A$.

Przykład 16.
Zaznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych zbiór

$$\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \ \text{ i } \ \mathbb{Z} \times [-2, 2].$$

Rozwiązanie:
$\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{Z} \times [-2, 2]$



Rysunek 2: Interpretacja geometryczna zbiorów $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z} \times [-2, 2]$.

ZADANIA:

2.1. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B i C prawdziwe są równości:

a) $(A \setminus B) \cup A = A$

b) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$

c) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

d) $(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$

e) $(B \cap C) \cup (C \setminus A) = C \setminus (A \setminus B)$.

2.2. Niech

$$A = (-2, 10), \quad B = [4, 12), \quad C = \mathbb{N}.$$

Wyznaczyć $(A \setminus B) \cap C$.

2.3. Niech

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 10\}, \quad B = \{-1, 1, 10\}, \quad C = \{-2, 10\}.$$

Wyznaczyć:

a) $(A \setminus C) \cup B$

b) $(C \cap B) \setminus A$.

2.4. Wyznaczyć

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B$$

gdzie:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+4} > 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^4}{x} \leqslant 8\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^5+1}{2x} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 5\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \leqslant 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : -x^2 + x + 2 \geqslant 0\}$.

2.5. Dane są zbiory punktów płaszczyzny

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant -\frac{2}{3}x + 4 \wedge y \leqslant -2x + 8\} \text{ i } L_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = m\}$$

gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą. Dla jakich m spełniony jest warunek $A \cap L_m = \emptyset$?

2.6. Niech

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \exists n \in \mathbb{N} : x = (-1)^n\}, \quad B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge \exists n \in \mathbb{N} : x = (-1)^{2n}\}.$$

Sprawdzić prawdziwość zależności:

a) $A \cap B \neq \emptyset$

b) $A \subset B$

c) $B \subset A$.

2.7. Dane są zbiory

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| \leqslant 2\}, \quad B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge |x| = 1\} \text{ i } C = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}.$$

Sprawdzić prawdziwość zależności:

a) $A \cap B \cap C = B$

b) $(C \setminus A) \cap B = \emptyset$

c) $A \cup B \cup C = B$.

2.8. Niech $n\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych podzielnych przez n ($n \in \mathbb{N}$). Wyznaczyć:

a) $4\mathbb{Z} \cap 2\mathbb{Z}$

b) $4\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z}$

c) $6\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$

e) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$
ponadto sprawdzić, czy:
f) $2\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$
g) $5\mathbb{Z} \setminus (5\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) = 10\mathbb{Z}$.
2.9. Niech A, B, $C-$ niepuste zbiory takie, że

$$A \cap B \cap C = A.$$

Sprawdzić prawdziwość następujących zależności:
a) $A \subset C \wedge A \subset B$
b) $B \cap C = A$
c) $A \cup B = B$.
2.10. Dla jakich wartości parametru $k \in \mathbb{R}$, zbiory

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + kx - k^2 \leqslant y\} \ \text{ i } \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant -1\}$$

są rozłączne?
2.11. Zaznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych zbiór A, gdzie:
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 4\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leqslant 5\}$
c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y = -3\}$
d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x < y\}$.
2.12. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznaczyć zbiory

$$A \cap B, \ \ A \cup B, \ \ A \setminus B$$

gdzie:
a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - y \geqslant 0\}, \ \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x| \leqslant 2\}$
b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \leqslant -1\}, \ \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x \leqslant 0\}$.
2.13. Niech

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2} + y^2 \leqslant 0\}, \ \ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 \leqslant 0\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}, \ \ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 < 0\}.$$

Zaznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych zbiory:
a) $(B \cap C) \setminus D$
b) $(D \cup B) \cap A$
c) $[(A \cap C) \cup D] \setminus B$.
2.14. Zaznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych zbiory $A \times B$, gdzie:
a) $A = \{0, 1, 3\}, \ \ B = \{-4, 0, 2, 5\}$
b) $A = \{a : a \in \mathbb{N}\}, \ \ B = \{b : b \in \mathbb{R}_+\}$
c) $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 < a \leqslant 1\}, \ \ B = \{b \in \mathbb{R} : |b| \geqslant 2\}$
d) $A = \{a \in \mathbb{R} : a = 1\}, \ \ B = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 \leqslant 4\}$.

3 Relacje. Relacje równoważności

Przykład 17.
Sprawdzić, czy dana relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich jest zwrotna, symetryczna, przechodnia

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y > 0.$$

Rozwiązanie:
Najpierw, korzystając z własności funkcji logarytmicznej, przekształcimy powyższą nierówność

$$\log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 y > 0 \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x + \frac{\log_{\frac{1}{3}} y}{\log_{\frac{1}{3}} 3} > 0 \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x + \frac{\log_{\frac{1}{3}} y}{-1} > 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} y > 0 \Longleftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{y} > 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{y} < 1 \Longleftrightarrow x < y.$$

Zatem

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x < y.$$

Teraz możemy zbadać własności tej relacji.
1) Relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze X jest **zwrotna**, jeżeli spełnia następujący warunek

$$\forall_{x\in X} : x\mathcal{R}x.$$

Sprawdzamy, czy rozpatrywana relacja spełnia go

$$\forall_{x\in\mathbb{R}_+} : x\mathcal{R}x \Longleftrightarrow x < x.$$

Nie istnieje liczba rzeczywista dodatnia x taka, że $x < x$, czyli relacja nie jest zwrotna.
2) Relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze X jest **symetryczna**, jeżeli spełnia następujący warunek

$$\forall_{x,y\in X} : x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

Zatem

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}_+} : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x < y \not\Longrightarrow y < x \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

czyli relacja nie jest symetryczna.
3) Relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze X jest **przechodnia**, jeżeli spełnia następujący warunek

$$\forall_{x,y,z\in X} : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

Zatem

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}_+} : x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Longleftrightarrow x < y \wedge y < z \Longrightarrow x < z \Longleftrightarrow x\mathcal{R}z,$$

czyli rozpatrywana relacja jest przechodnia.

Przykład 18.
Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest relacją równoważności

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow |a-b| \leqslant 5.$$

Jeżeli tak, wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.
Rozwiązanie:
Relacja jest relacją równoważności, jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
1) zwrotność

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} : a\mathcal{R}a \Longleftrightarrow |a-a| = 0 \leqslant 5,$$

czyli relacja $\mathcal{R}$ jest zwrotna.
2) symetria

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow |a-b| \leqslant 5 \Longleftrightarrow |(-1)\cdot(b-a)| \leqslant 5 \Longleftrightarrow |-1|\cdot|b-a| \leqslant 5 \Longleftrightarrow$$

$$\iff |b-a| \leqslant 5 \iff b\mathcal{R}a,$$

czyli relacja $\mathcal{R}$ jest symetryczna.
3) przechodniość

$$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}}: \quad \left.\begin{array}{r} a\mathcal{R}b \iff |a-b| \leqslant 5 \\ b\mathcal{R}c \iff |b-c| \leqslant 5 \end{array}\right\} \not\Longrightarrow |a-c| \leqslant 5 \iff a\mathcal{R}c,$$

czyli relacja $\mathcal{R}$ nie jest przechodnia. Aby to uzasadnić, podamy kontrprzykład.
Niech $a=9,\ b=4,\ c=0$. Wówczas

$$\left.\begin{array}{l} |9-4| = 5 \leqslant 5 \\ |4-0| = 4 \leqslant 5 \end{array}\right\}, \quad \text{ale} \ \ |9-0| = 9 \nleqslant 5.$$

Ponieważ nie jest spełniony warunek przechodniości, relacja $\mathcal{R}$ nie jest relacją równoważności.

Przykład 19.
Sprawdzić, czy relacja $\mathcal{R}$ określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest relacją równoważności

$$a\mathcal{R}b \iff a-b \in \mathbb{Z}.$$

Jeśli tak, wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.
Rozwiązanie:
1) zwrotność

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} : a\mathcal{R}a \iff a-a \in \mathbb{Z}.$$

Ponieważ $a-a=0$ i $0 \in \mathbb{Z}$, to relacja ta jest zwrotna.
2) symetria

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R}} : a\mathcal{R}b \iff a-b \in \mathbb{Z}.$$

Niech $a-b=k$, czyli $b-a=-k$. Jeżeli k jest liczbą całkowitą, to $-k$ też jest liczbą całkowitą. Zatem $b-a \in \mathbb{Z}$, co implikuje $b\mathcal{R}a$, czyli relacja jest symetryczna.
3) przechodniość

$$\forall_{a,b,c\in\mathbb{R}} : a\mathcal{R}b \Longrightarrow a-b \in \mathbb{Z} \wedge b\mathcal{R}c \Longrightarrow b-c \in \mathbb{Z}.$$

Niech $a-b=k$ i $b-c=s,\ k,s \in \mathbb{Z}$. Zatem

$$\left.\begin{array}{c} a = k+b \\ c = b-s \end{array}\right\} \Longrightarrow a-c = k+b-b+s = k+s.$$

Ponieważ k i s są liczbami całkowitymi, to $k+s$ też jest liczbą całkowitą. Zatem $a-c \in \mathbb{Z}$, co implikuje $a\mathcal{R}c$, czyli relacja jest przechodnia.
Ostatecznie rozpatrywana przez nas relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli jest relacją równoważności.
Możemy zatem wyznaczyć klasy abstrakcji. Najpierw wyznaczymy klasę abstrakcji reprezentowaną przez element $2,45 \in \mathbb{R}$, więc musimy znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste s, które są w relacji z elementem 2,45, czyli takie, że $(2,45-s) \in \mathbb{Z}$. Zauważmy, że s może być równe

$$-3,55;\ -1,55;\ 0,45;\ 5,45;\ \text{itd.}$$

Zatem

$$[2,45] = \{\ ...\ -2,55;\ -1,55;\ -0,55;\ 0,45;\ 1,45;\ 2,45;\ 3,45;\ 4,45;\ ...\ \}.$$

Wyznaczymy teraz klasę abstrakcji reprezentowaną przez element $\left(3\frac{1}{3}\right)$

$$\left[3\frac{1}{3}\right] = \left\{ \ ... \ -4\frac{2}{3}; \ -3\frac{2}{3}; \ -2\frac{2}{3}; \ -1\frac{2}{3}; \ -\frac{2}{3}; \ \frac{1}{3}; \ 1\frac{1}{3}; \ 2\frac{1}{3}; \ 3\frac{1}{3}; \ ... \ \right\}.$$

Ogólnie klasa abstrakcji reprezentowana przez pewien element $a \in \mathbb{R}$ wygląda następująco

$$[a] = \{a + k, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

ZADANIA:

Sprawdzić, czy dana relacja $\mathcal{R}$ jest zwrotna, symetryczna, przechodnia:

3.1. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff |a - b| \geqslant 1$

3.2. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff |a| = |b|$

3.3. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff a - b$ jest liczbą nieparzystą

3.4. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff a^2 + b^2 = 3ab$

3.5. $a, b \in \mathbb{R}_+ : a\mathcal{R}b \iff \log_c a = \log_c b$

3.6. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff 7^a = 7^b$

3.7. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff |a| \geqslant |b|$

3.8. $a, b \in \mathbb{Z}_- : a\mathcal{R}b \iff \frac{a}{b} \geqslant 5$

3.9. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff e^a = \frac{3}{e^b}$

3.10. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff a^2 = b$

3.11. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff a^2 + b^2 \leqslant 1$

Zbadać, czy relacja $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności. Jeżeli tak, wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji:

3.12. $a, b \in \mathbb{N} : a\mathcal{R}b \iff a = b$

3.13. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff a - b = b - a$

3.14. $a, b \in \mathbb{N} : a\mathcal{R}b \iff 2a = 3b$

3.15. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff a^2 = b^2$

3.16. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff a^2 + b^2 = 2ab$

3.17. $a, b \in \mathbb{R}_+ : a\mathcal{R}b \iff \sqrt{a} = \sqrt{b}$

3.18. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff |a - b| \leqslant 1$

3.19. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff a - b$ jest liczbą parzystą

3.20. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff 3$ dzieli $a - b$

3.21. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff ac = bc$ dla pewnego $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3.22. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff 2^a \cdot 2^b = 4^a$

3.23. $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : a\mathcal{R}b \iff \log_a b = \log_b a$

3.24. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff 2^{[a]} = 2^{[b]}$

3.25. $a, b \in [-1, 1] : a\mathcal{R}b \iff 2^{\mathrm{sgn(a)}} = 2^{\mathrm{sgn(b)}}$

3.26. $a, b \in \mathbb{R} : a\mathcal{R}b \iff \left(1 + \sqrt{5}\right) a = 2b + \frac{4}{1+\sqrt{5}} a$

3.27. $a, b \in A = \{1, 2, 3, ..., 16\} : a\mathcal{R}b \iff 4|(a^2 - b^2)$

3.28. $a, b \in B = \{2, 4, 6, 8, ...\} \subset \mathbb{N} : a\mathcal{R}b \iff 4|(a - b)$

3.29. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff a$ i b dają tę samą resztę z dzielenia przez liczbę pierwszą p postaci $4n + 1, \ n \in \mathbb{N}$

3.30. $a, b \in \mathbb{Z} : a\mathcal{R}b \iff$ liczba pierwsza p postaci $4n + 3, \ n \in \mathbb{N}$, dzieli różnicę liczb a i b

W zbiorze X określamy relację $\mathcal{R}$. Sprawdzić, czy jest to relacja równoważności:

3.31. $X = \mathbb{N}, \ n\mathcal{R}m \iff [(n|m) \vee (m|n)]$

3.32. $X = \mathbb{Z}, \ n\mathcal{R}m \iff m$ ma tyle samo cyfr co n

3.33. $X = \mathbb{N}, \ n\mathcal{R}m \iff$ suma cyfr liczby m jest równa sumie cyfr liczby n

3.34. $X = \{1, 2, 3, ..., 20\}, \ n\mathcal{R}m \iff n, m$ mają tę samą liczbę podzielników.

4 Funkcje i ich własności

Przykład 20.
Zbadaj, które z niżej określonych odwzorowań jest iniekcją, suriekcją, bijekcją:
a) $f : X \longrightarrow Y,\ \ f(x) = x^5 + 2,\ \ X = \{-1, 0, 1, 2\},\ \ Y = \mathbb{Z}$,
b) $g : X \longrightarrow Y,\ \ g(x) = \log|x-1|,\ \ X = \mathbb{R} \setminus \{1\}, Y = \mathbb{R}$,
c) $h : X \longrightarrow Y,\ \ h(x) = 2^x - 2^{-x},\ \ X = \mathbb{R},\ \ Y = \mathbb{R}$.
Rozwiązanie:
Funkcja f jest **iniekcją**, jeżeli spełnia jeden z warunków:
(1) $\forall_{x_1,x_2\in X} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
(2) $\forall_{x_1,x_2\in X} : x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ADa) Korzystamy z warunku (1).

$$\forall_{x_1,x_2\in X} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^5 + 2 = x_2^5 + 2 \Longrightarrow x_1^5 = x_2^5 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja f jest iniekcją.
ADb) Korzystamy z warunku (2).
Niech $x_1 = 2,\ x_2 = 0$, wówczas

$$g(x_1) = \log|2-1| = \log 1 = 0 \ \text{ oraz } \ g(x_2) = \log|0-1| = \log|-1| = \log 1 = 0.$$

Zatem dla dwóch różnych argumentów $x_1 = 2$ i $x_2 = 0$ funkcja g osiąga tę samą wartość

$$g(x_1) = g(x_2) = 0,$$

co jest zaprzeczeniem warunku (2), czyli nie jest iniekcją.
ADc) Korzystamy z warunku (1).

$$\forall_{x_1,x_2\in X} : h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow 2^{x_1} - 2^{-x_1} = 2^{x_2} - 2^{-x_2} \Longrightarrow 2^{x_1} - \frac{1}{2^{x_1}} = 2^{x_2} - \frac{1}{2^{x_2}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2^{x_1} - 2^{x_2} - \left(\frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}}\right) = 0 \Longrightarrow 2^{x_1} - 2^{x_2} - \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1}2^{x_2}} = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (2^{x_1} - 2^{x_2})\left(1 + \frac{1}{2^{x_1}2^{x_2}}\right) = 0 \Longrightarrow (2^{x_1} - 2^{x_2}) = 0 \Longrightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Zatem funkcja h jest iniekcją.

Funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest **suriekcją**, gdy spełniony jest warunek

$$f(X) = Y.$$

ADa) $X = \{-1, 0, 1, 2\},\ \ f(-1) = 1,\ \ f(0) = 2,\ \ f(1) = 3,\ \ f(2) = 34.$
Zatem

$$f(X) = \{1, 2, 3, 34\},\ \ Y = \mathbb{Z} \Longrightarrow f(X) \neq Y,$$

czyli funkcja f nie jest suriekcją.
ADb) $g(X) = \mathbb{R}$, ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej y istnieje liczba $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ równa

$$x = 1 + 10^y \vee x = 1 - 10^y,$$

taka że

$$y = g(x),\ \ Y = \mathbb{R} \Longrightarrow g(X) = Y,$$

czyli funkcja g jest suriekcją.
ADc) $h(X)=\mathbb{R}$, ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej y istnieje liczba rzeczywista x równa

$$x=\log_2(y+\sqrt{y^2+4})-1$$

taka, że

$$y=h(x),\ \ Y=\mathbb{R}\Longrightarrow h(X)=Y,$$

czyli funkcja h jest suriekcją.

Funkcja f jest **bijekcją**, gdy jest iniekcją i suriekcją.

ADa) Funkcja f nie jest suriekcją, czyli nie jest bijekcją.
ADb) Funkcja g nie jest iniekcją, czyli nie jest bijekcją.
ADc) Funkcja h jest iniekcją i suriekcją, czyli jest bijekcją.

Przykład 21.
Wyznaczyć, o ile to jest możliwe, funkcję odwrotną do funkcji $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$f(x)=|x|+2x.$$

Rozwiązanie:
Funkcja posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.
Funkcję f możemy przedstawić w postaci

$$f(x)=\begin{cases} 3x & \text{gdy} \quad x\geqslant 0 \\ x & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases}.$$

Najpierw sprawdzimy, czy jest ona iniekcją. W tym celu musimy rozpatrzyć trzy przypadki:
1) Niech $x_1,x_2\geqslant 0: f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow 3x_1=3x_2\Longrightarrow x_1=x_2$.
2) Niech $x_1,x_2<0: f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$.
3) Niech $x_1<0, x_2\geqslant 0: f(x_1)=f(x_2)\Longleftrightarrow x_1=3x_2$.
Ponieważ $x_1<0$ a $x_2\geqslant 0$, powyższa równość nigdy nie będzie spełniona, co oznacza, że

$$\forall_{(x_1<0,x_2\geqslant 0)}\ \ f(x_1)\neq f(x_2).$$

Ostatecznie

$$\forall_{x_1,x_2\in\mathbb{R}}: f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2,$$

czyli f jest iniekcją.
Teraz sprawdzimy, czy funkcja f jest suriekcją

$$f(X)=\mathbb{R},\ \ Y=\mathbb{R}\Longrightarrow f(X)=Y,$$

czyli f jest suriekcją.
Funkcja f jest bijekcją, czyli możemy wyznaczyć funkcję odwrotną.
Gdy $x\geqslant 0$

$$y=3x\Longrightarrow x=\frac{y}{3},\ \ \text{czyli}\ \ f^{-1}(y)=\frac{y}{3}.$$

Gdy $x<0$

$$y=x\Longrightarrow x=y,\ \ \text{czyli}\ \ f^{-1}(y)=y.$$

Zatem

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \frac{x}{3} & \text{gdy} \quad x\geqslant 0 \\ x & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases},\ \ D_{f^{-1}}=\mathbb{R}.$$

Przykład 22.
Wyznaczyć, o ile to jest możliwe, funkcję odwrotną do funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2-x} & \text{gdy} \quad x \neq 2 \\ -2 & \text{gdy} \quad x = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Najpierw sprawdzamy, czy funkcja jest iniekcją
1) Niech $x_1,\ x_2 \neq 2$, wówczas

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \frac{x_1+1}{2-x_1} = \frac{x_2+1}{2-x_2} \Longrightarrow (x_1+1)(2-x_2) = (x_2+1)(2-x_1) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

2) Niech $x_1 \neq 2$ i $x_2 = 2$, wówczas

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \frac{x_1+1}{2-x_1} = -2 \Longrightarrow x_1 = 5.$$

Otrzymujemy, że

$$f(2) = f(5) = -2,$$

czyli funkcja f nie jest iniekcją, a co za tym idzie nie jest bijekcją i nie możemy wyznaczyć funkcji odwrotnej.

Przykład 23.
Zbadać, czy dana relacja $\mathcal{R}$ jest funkcją

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^4 = 1\}.$$

Rozwiązanie:
Funkcją f określoną na zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy relację $f \subset X \times Y$ taką, że:
1. $\forall_{x\in X}\ \forall_{y_1,y_2\in Y} : [(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2]$
2. $\forall_{x\in X}\ \exists_{y\in Y} : (x,y) \in f.$

Funkcja f przyporządkowuje więc każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jeden element $y \in Y$.
Relacja $\mathcal{R}$ nie jest funkcją, ponieważ każdemu elementowi x przyporządkowane są dwie wartości y

$$y_1 = \sqrt{1+x^4} \ \text{ oraz } \ y_2 = -\sqrt{1+x^4}.$$

Przykład 24.
Wyznaczyć $f \circ f$, gdy $f(x) = x^2 + 3$.
Rozwiązanie:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+3) = (x^2+3)^2 + 3 = x^4 + 6x^2 + 12.$$

Przykład 25.
Wyznaczyć $f \circ g$ oraz $g \circ f$, gdy
a) $f(x) = x^6,\ \ g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{gdy} \quad x > 2 \\ -x^2 & \text{gdy} \quad x \leqslant 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \end{cases}.$
Rozwiązanie:
ADa)
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt[3]{x})^6 = x^2,$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^6} = x^2$.
ADb)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x)+2 & \text{gdy} \quad g(x) > 2 \\ -[g(x)]^2 & \text{gdy} \quad g(x) \leqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 & \text{gdy} \quad x < -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} & \text{gdy} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x > 0 \end{cases},$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad f(x) > 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} & \text{gdy} \quad f(x) \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x > 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} & \text{gdy} \quad x \leqslant 2 \end{cases}.$$

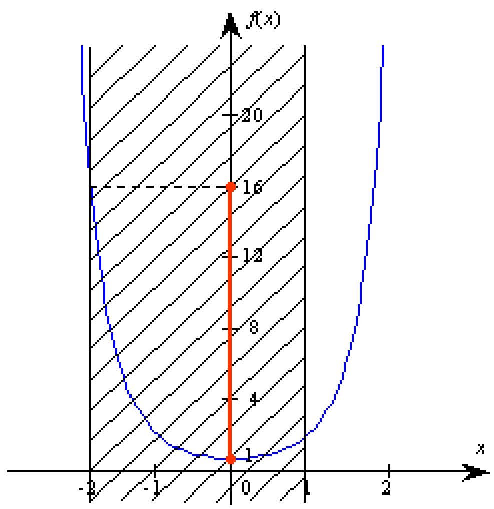
Przykład 26.
Wyznaczyć obraz i przeciwobraz zbioru

$$A = [-2, 1]$$

względem funkcji

$$f(x) = 2^{x^2}.$$

Rozwiązanie:
Narysujmy wykres funkcji f (gdy $x \in [-2, 1]$).



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x) = 2^{x^2}$.

Z wykresu odczytujemy

$$f(A) = [1, 16].$$

Wartość 16 znajdujemy po wyznaczeniu $f(-2) = 16$, a wartość 1 po wyznaczeniu $f(0) = 1$.
Wyznaczymy teraz przeciwobraz zbioru A. Jedyną wartością funkcji f należącą do przedziału $[-2, 1]$ jest wartość 1, zatem

$$f(x) = 1 \Longrightarrow x = 0, \;\text{ czyli }\; f^{-1}(A) = \{0\}.$$

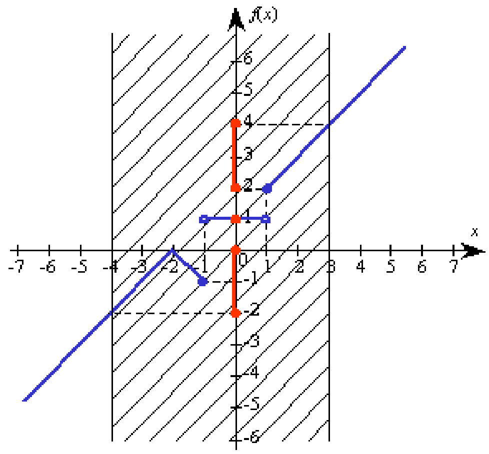
Przykład 27.
Wyznaczyć obraz i przeciwobraz zbioru

$$A = [-4, 3]$$

względem funkcji f

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{gdy} \quad x \geqslant 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad -1 < x < 1 \\ -|x+2| & \text{gdy} \quad x \leqslant -1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Narysujmy wykres funkcji f (gdy $x \in [-4, 3]$).

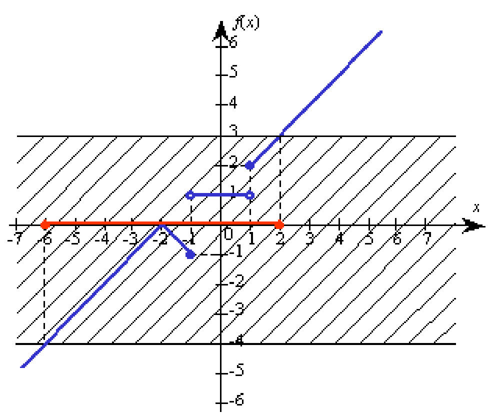


Rysunek 4: Wykres funkcji $f(x)$.

Z wykresu odczytujemy

$$f(A) = [-2, 0] \cup \{1\} \cup [2, 4].$$

Wartość -2 znajdujemy po wyznaczeniu $f(-4) = -2$, wartość $2 = f(1)$, a wartość $4 = f(3)$.
Narysujmy wykres funkcji f (gdy $f(x) \in [-4, 3]$).



Rysunek 5: Wykres funkcji $f(x)$.

Z wykresu odczytujemy

$$f^{-1}(A) = [-6, 2].$$

Argument -6 znajdujemy po rozwiązaniu równania

$$-|x+2| = -4 \wedge x \leqslant -1 \Longrightarrow x = -6,$$

a argument 2 po rozwiązaniu równania

$$x + 1 = 3 \Longrightarrow x = 2.$$

ZADANIA:

4.1. W pewnej gminie postanowiono wyremontować trzy wolno stojące budynki: szkołę, przedszkole i ośrodek zdrowia. W przetargu wybrano dwie firmy budowlano-remontowe, po czym podzielono między nie zakres robót. Remont szkoły i przedszkola zlecono pierwszej firmie, a remont ośrodka zdrowia drugiej firmie. Czy takie przyporządkowanie firmom budynków jest funkcją?

4.2. Po reorganizacji pewnego zakładu utworzono dwa nowe stanowiska pracy. Po rozmowie kwalifikacyjnej z grupy sześciu kandydatów wybrano dwóch, którym zaproponowano zatrudnienie, a reszcie podziękowano. Czy takie przyporządkowanie grupie kandydatów zaoferowanej im pracy jest funkcją?

4.3. W pewnym biurze zatrudniającym 8 osób do dyspozycji wszystkich pracowników przeznaczono 4 komputery, a następnie każdemu pracownikowi przydzielono jeden komputer, z którego może korzystać. Czy takie przyporządkowanie jest funkcją? Jeżeli tak, to czy jest to bijekcja?

4.4. W małym miasteczku jest 5 sklepów spożywczych i dwie hurtownie. Czy przyporządkowanie poszczególnym sklepom hurtowni, w której się zaopatrują jest funkcją, jeżeli założymy, że każdy sklep zaopatruje się w tylko jednej miejscowej hurtowni? Jak powinna zmienić się sytuacja w miasteczku, aby przyporządkowanie to było bijekcją?

4.5. W firmie liczącej 8 osób zakupiono 10 nowych biurek. Jak należy rozdzielić biurka między pracowników, aby utworzone w ten sposób odwzorowanie zbioru pracowników w zbiór biurek było funkcją?

4.6. W jedenastoosobowej grupie studentów jest dwóch studiujących informatykę, sześciu studiujących zarządzanie i troje studiujących informatykę i zarządzanie. Czy przyporządkowanie tej grupie studentów kierunku ich studiów jest funkcją?

Zbadać czy następujące odwzorowania są funkcjami? Jeżeli tak, to czy są to bijekcje?

4.7. Każdemu przedstawicielowi handlowemu firmy zajmującej się kolportażem prasy przyporządkowujemy rejon pracy.

4.8. Każdemu pracownikowi pewnej firmy konsultingowej zatrudniającej 10 osób przyporządkowujemy miesięczne wynagrodzenie w wysokości 1500 zł.

4.9. Studentom I roku kierunku ZiM przyporządkowujemy końcową ocenę z matematyki.

Funkcja $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = x^2$ jest suriekcją. Jakim zbiorem jest Y, jeżeli:

4.10. $X = \mathbb{R}$

4.11. $X = \mathbb{R}_+$

4.12. $X = \mathbb{Z}$

4.13. $X = [-5, 5]$

Zbadaj, które z niżej określonych odwzorowań jest iniekcją, suriekcją, bijekcją:

4.14. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = 2x + 4,\ X = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}$

4.15. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = -\sqrt{x},\ X = \mathbb{R}_+ \cup \{0\},\ Y = \mathbb{R}_- \cup \{0\}$

4.16. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = e^x,\ X = \mathbb{N},\ Y = \mathbb{R}$

4.17. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = \frac{x^4}{2},\ X = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

4.18. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) =$ reszta z dzielenia x przez 4, $X = \mathbb{Z},\ Y = \{0, 1, 2, 3\}$

4.19. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = [x],\ X = [-2, 2],\ Y = [-2, 2]$

4.20. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = \operatorname{sgn}(x),\ X = \mathbb{Z},\ Y = \{-1, 0, 1\}$

4.21. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = \ln x,\ X = \{1, e, e^2, e^3\},\ Y = \{0, 1, 2, 3\}$

4.22. $f : X \longrightarrow Y,\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{gdy} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},\ X = \mathbb{R},\ Y = \{-1, 1\}$

Sprawdzić, czy dana funkcja jest iniekcją:

4.23. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-7}{x+1} & \text{gdy} \quad x \neq -1 \\ 4 & \text{gdy} \quad x = -1 \end{cases}$

4.24. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-3} & \text{gdy} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{gdy} \quad x = 3 \end{cases}$

4.25. $f(x) = \begin{cases} e^{x^2-5} & \text{gdy} \quad x > 1 \\ 5 & \text{gdy} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$

4.26. $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{gdy} \quad x > 2 \\ 3 & \text{gdy} \quad x = 2 \\ -x^2 & \text{gdy} \quad x < 2 \end{cases}$

4.27. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+5} & \text{gdy} \quad x < -5 \\ -x-5 & \text{gdy} \quad x \geqslant -5 \end{cases}$

4.28. $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2x-1} & \text{gdy} \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x = \frac{1}{2} \\ \frac{3x+4}{6x-3} & \text{gdy} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Wyznaczyć, o ile to jest możliwe, funkcję odwrotną do funkcji:

4.29. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (x+2)^3 - 5$
4.30. $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x^2}$
4.31. $f : [3, \infty) \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = (\frac{x}{3} - 1)^8$
4.32. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{1}{x+2}$
4.33. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$
4.34. $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1),\ f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
4.35. $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),\ f(x) = \sqrt{x} + 3x$
4.36. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2^x - 2^{-x}$
4.37. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow (-\infty, -2] \cup [2, \infty),\ f(x) = x + x^{-1}$
4.38. $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1),\ f(x) = \frac{1+x+|x|}{2(1+|x|)}$
4.39. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x + [x]$
4.40. $f : (1, \infty) \longrightarrow (0, \infty),\ f(x) = \log_x 4$
4.41. $f : [\frac{\pi}{2}; \pi] \longrightarrow [0, 1],\ f(x) = \cos^2 x$

Zbadać, czy dana relacja jest funkcją:

4.42. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 + x^2 = 4\}$
4.43. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 2x + y^2 = 6\}$
4.44. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^4 - x = 0\}$
4.45. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y^5 = 0\}$
4.46. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^5 - y = 0\}$
4.47. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 3x^2y + 4y = 2 + 5x\}$
4.48. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^{502}y^3 = 602!\}$

Wyznaczyć obraz i przeciwobraz zbioru A względem funkcji f:

4.49. $A = \{-10, 2, 7\},\ f(x) = -3x + 7$
4.50. $A = \{-1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\},\ f(x) = 3^{4x-1}$
4.51. $A = [-1, 2],\ f(x) = 5^{-x^2}$
4.52. $A = (0, 3),\ f(x) = \frac{2}{x-3}$
4.53. $A = [-4, -2) \cup (-2, 2),\ f(x) = \frac{-3x-2}{2x+4}$
4.54. $A = [-2, +\infty),\ f(x) = |x + 4|$
4.55. $A = \{-4, -2, 1, \frac{1}{2}\},\ f(x) = \log_2 |x|$
4.56. $A = (-3, 3],\ f(x) = \operatorname{sgn}(x + 1) - 2$
4.57. $A = [-4, 2),\ f(x) = x - [x]$
4.58. $A = [-2, 5),\ f(x) = [x - 2] + 3$

4.59. $A=(-1,2),\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{gdy} \quad x>0 \\ -\frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x=0 \\ -1 & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases}$

4.60. $A=[-3,4),\ f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(3-x^2) & \text{gdy} \quad x>2 \\ 5 & \text{gdy} \quad 0\leqslant x\leqslant 2 \\ \frac{1}{4}(x+2) & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases}$

4.61. $A=[-4,4],\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{gdy} \quad x\geqslant 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad -2<x<1 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{gdy} \quad x\leqslant -2 \end{cases}$

Wyznaczyć $f\circ f$, gdy:
4.62. $f(x)=(x-1)^2$
4.63. $f(x)=\cos x$
4.64. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
4.65. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}$
Wyznaczyć $f\circ f\circ f\circ f\circ f\circ f$, gdy:
4.66. $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$
4.67. $f(x)=\frac{3}{x}$
4.68. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$
Wyznaczyć $f\circ g$ oraz $g\circ f$, gdy:
4.69. $f(x)=(x+5)^2,\ g(x)=x-2$
4.70. $f(x)=\sin x,\ g(x)=2^{x^2}$
4.71. $f(x)=\frac{1}{x^3},\ g(x)=\frac{1}{x^4}$
4.72. $f(x)=\mathrm{e}^x,\ g(x)=\ln x$

4.73. $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{gdy} \quad x\geqslant 2 \\ -x & \text{gdy} \quad x<2 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{gdy} \quad x>1 \\ 1 & \text{gdy} \quad x\leqslant 1 \end{cases}$

4.74. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x\geqslant 0 \\ -2 & \text{gdy} \quad x<0 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{gdy} \quad x\geqslant 1 \\ -2^x & \text{gdy} \quad x<1 \end{cases}$

4.75. $f(x)=|x|,\quad g(x)=\begin{cases} \ln x & \text{gdy} \quad x>0 \\ \sqrt{-x} & \text{gdy} \quad x\leqslant 0 \end{cases}.$

5 Układy równań liniowych. Metoda eliminacji Gaussa

Przykład 28.
Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2x+3y-6z=-1 \\ -3x+2y+5z=4 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Układ ten definiuje następującą tablicę

$$\begin{array}{rrr|rl} 2 & 3 & -6 & -1 & W_1 \\ -3 & 2 & 5 & 4 & W_2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & W_3 \end{array}$$

Aby uzyskać jedynkę na pierwszym miejscu w pierwszym wierszu, zamieniamy wiersze miejscami

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -2 & 3 & 2 & W_1:=W_3 \\ 2 & 3 & -6 & -1 & W_2:=W_1 \\ -3 & 2 & 5 & 4 & W_3:=W_2 \end{array}$$

Przy użyciu tej jedynki zerujemy pierwsze elementy w drugim i trzecim wierszu

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -2 & 3 & 2 & W_1 := W_1 \\ 0 & 7 & -12 & -5 & W_2 := W_2 - 2W_1 \\ 0 & -4 & 14 & 10 & W_3 := W_3 + 3W_1 \end{array}$$

Przy pomocy drugiego i trzeciego wiersza uzyskujemy jedynkę na drugiej pozycji w wierszu drugim

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -2 & 3 & 2 & W_1 := W_1 \\ 0 & 1 & -16 & -15 & W_2 := -W_2 - 2W_3 \\ 0 & -4 & 14 & 10 & W_3 := W_3 \end{array}$$

Przy użyciu tej jedynki zerujemy drugi element w wierszu pierwszym i trzecim

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & -29 & -28 & W_1 := W_1 + 2W_2 \\ 0 & 1 & -16 & -15 & W_2 := W_2 \\ 0 & 0 & -50 & -50 & W_3 := W_3 + 4W_2 \end{array}$$

Mnożymy trzeci wiersz przez $\left(-\frac{1}{50}\right)$ i uzyskujemy jedynkę na trzeciej pozycji w trzecim wierszu

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & -29 & -28 & W_1 := W_1 \\ 0 & 1 & -16 & -15 & W_2 := W_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & W_3 := -\frac{1}{50}W_3 \end{array}$$

Przy użyciu tej jedynki zerujemy trzeci element w wierszu pierwszym i drugim

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & 0 & 1 & W_1 := W_1 + 29W_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & W_2 := W_2 + 16W_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & W_3 := W_3 \end{array}$$

Z tablicy odczytujemy rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Przykład 29.
Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2a + b + 3c + d = 5 \\ 3a - b + c + 2d = 0 \\ a + b - 2c - d = -3 \\ -a + 3b - 6c - 2d = -17 \end{cases} .$$

Rozwiązanie:
Układ ten definiuje następującą tablicę

$$\begin{array}{rrrr|rl} 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & W_1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & W_2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -3 & W_3 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & -17 & W_4 \\ \hline 1 & 1 & -2 & -1 & -3 & W_1 := W_3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 & W_2 := W_1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & W_3 := W_2 \\ -1 & 3 & -6 & -2 & -17 & W_4 := W_4 \\ \hline \end{array}$$

1	1	−2	−1	−3	$W_1 := W_1$
0	−1	7	3	11	$W_2 := W_2 - 2W_1$
0	−4	7	5	9	$W_3 := W_3 - 3W_1$
0	4	−8	−3	−20	$W_4 := W_4 + W_1$
1	0	5	2	8	$W_1 := W_1 + W_2$
0	1	−7	−3	−11	$W_2 := -W_2$
0	0	−21	−7	−35	$W_3 := W_3 - 4W_2$
0	0	20	9	24	$W_4 := W_4 + 4W_2$
1	0	5	2	8	$W_1 := W_1$
0	1	−7	−3	−11	$W_2 := W_2$
0	0	1	−2	11	$W_3 := -W_3 - W_4$
0	0	20	9	24	$W_4 := W_4$
1	0	0	12	−47	$W_1 := W_1 - 5W_3$
0	1	0	−17	66	$W_2 := W_2 + 7W_3$
0	0	1	−2	11	$W_3 := W_3$
0	0	0	49	−196	$W_4 := W_4 - 20W_3$
1	0	0	12	−47	$W_1 := W_1$
0	1	0	−17	66	$W_2 := W_2$
0	0	1	−2	11	$W_3 := W_3$
0	0	0	1	−4	$W_4 := \frac{1}{49}W_4$
1	0	0	0	1	$W_1 := W_1 - 12W_4$
0	1	0	0	−2	$W_2 := W_2 + 17W_4$
0	0	1	0	3	$W_3 := W_3 + 2W_4$
0	0	0	1	−4	$W_4 := W_4$

Z tablicy odczytujemy rozwiązanie układu

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = -4 \end{cases}.$$

Przykład 30.
Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 3a - b = 4 \\ -2a + 7b = -3 \\ -a + 13b = 1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Układ ten definiuje następującą tablicę

3	−1	4	W_1
−2	7	−3	W_2
−1	13	1	W_3
1	−13	−1	$W_1 := -W_3$
0	−19	−5	$W_2 := W_2 - 2W_3$
0	38	7	$W_3 := W_1 + 3W_3$
1	−13	−1	$W_1 := W_1$
0	1	$\frac{5}{19}$	$W_2 := -\frac{1}{19}W_2$
0	38	7	$W_3 := W_3$
1	0	$\frac{46}{19}$	$W_1 := W_1 + 13W_2$
0	1	$\frac{5}{19}$	$W_2 := W_2$
0	0	−3	$W_3 := W_3 - 38W_2$

W trzecim wierszu otrzymaliśmy $0 = -3$, więc układ ten jest sprzeczny.

Przykład 31.
Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-2y=-1 \\ -3x+5y=1 \\ x+y=5 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Układ ten definiuje następującą tablicę

$$\begin{array}{rr|rl}
2 & -3 & 0 & W_1 \\
1 & -2 & -1 & W_2 \\
-3 & 5 & 1 & W_3 \\
1 & 1 & 5 & W_4 \\
\hline
1 & -2 & -1 & W_1 := W_2 \\
0 & 1 & 2 & W_2 := W_1 - 2W_2 \\
0 & -1 & -2 & W_3 := W_3 + 3W_2 \\
0 & 3 & 6 & W_4 := W_4 - W_2 \\
\hline
1 & 0 & 3 & W_1 := W_1 + 2W_2 \\
0 & 1 & 2 & W_2 := W_2 \\
0 & 0 & 0 & W_3 := W_3 + W_2 \\
0 & 0 & 0 & W_4 := W_4 - 3W_2
\end{array}$$

Wiersze składające się z samych zer wykreślamy

$$\begin{array}{rr|l}
1 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 2
\end{array}$$

Z tablicy odczytujemy rozwiązanie układu

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

Przykład 32.
Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} 2a-3b+c-d=8 \\ -a+2b+3c-5d=2 \\ 3a+b-2c+4d=-3 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Układ ten definiuje następującą tablicę

$$\begin{array}{rrrr|rl}
2 & -3 & 1 & -1 & 8 & W_1 \\
-1 & 2 & 3 & -5 & 2 & W_2 \\
3 & 1 & -2 & 4 & -3 & W_3 \\
\hline
1 & -2 & -3 & 5 & -2 & W_1 := -W_2 \\
0 & 1 & 7 & -11 & 12 & W_2 := W_1 + 2W_2 \\
0 & 7 & 7 & -11 & 3 & W_3 := W_3 + 3W_2 \\
\hline
1 & 0 & 11 & -17 & 22 & W_1 := W_1 + 2W_2 \\
0 & 1 & 7 & -11 & 12 & W_2 := W_2 \\
0 & 6 & 0 & 0 & -9 & W_3 := W_3 - W_2 \\
\hline
1 & 0 & 11 & -17 & 22 & W_1 := W_1 \\
0 & 0 & 7 & -11 & \frac{27}{2} & W_2 := W_2 - \frac{1}{6}W_3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & W_3 := \frac{1}{6}W_3 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|l}
1 & 0 & 11 & -17 & 22 & W_1 := W_1 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{27}{14} & W_2 := \frac{1}{7}W_2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & W_3 := W_3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{14} & W_1 := W_1 - 11W_2 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{27}{14} & W_2 := W_2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & W_3 := W_3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{11}{14} & W_1 := W_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & W_2 := W_3 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{11}{7} & \frac{27}{14} & W_3 := W_2
\end{array}$$

Jest to układ nieoznaczony, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.
Z tablicy odczytujemy rozwiązanie układu

$$\begin{cases} a = \frac{11}{14} - \frac{2}{7}d \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{27}{14} + \frac{11}{7}d \\ d \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

ZADANIA:

Rozwiązać układy równań metodą eliminacji Gaussa:

5.1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + 6y = 15 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 3y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \\ 4x - 3y = 6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - 5y = -3 \\ 3x + y = 4 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ x - 3y = -4 \\ -5x + 7y = 12 \\ 4x - 3y = -7 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \\ 4x - 5y - 3z = -7 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + z = 2 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x + 3y = 8 \\ 3x + 2y - 5z = 7 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 4x - 5y + 4z = 0 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ 5x + y = 5 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 7 \\ 3x + 2y + z = 8 \\ 7x - y - 2z = 3 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y - z - t = 1 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x - y + 2z + 3t = 1 \\ x - y - z + t = 0 \\ 2x - 2y + z + 4t = 1 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 5 \\ 3x - 5y - z + t = 2 \\ x + 11y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 2x + y - 3z + t = 1 \\ 4x + 2y + 6z + t = 1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x+y=4-z+t \\ 2x+t=-3+2z+y \\ y-z=3-x-2t \\ 2z=4+y-2x \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x-2y=7-z-4t \\ 2x+y=-3+t+2z \\ z+2t=1-5x \\ 3z+3t=4-3x+y \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} y+z+t=4 \\ x+z+t=-1 \\ x+y+t=2 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} 2x+3y+4z+t=1 \\ x+y+z+t=0 \\ -x+2z+3t=1 \\ x+3y+6z+4t=2 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x+y-2z-t+v=0 \\ x-3y-z-4t-3v=-1 \\ 5x+y-9z-8t+v=-1 \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} 3x-5y+7z+12t+v=18 \\ x-y+3z-2t+3v=4 \\ 5x-2y-z+t-v=2 \\ -2x-5y+8z+t-3v=-1 \\ x+3y-2z-v=1 \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x+y+z+t+v=1 \\ 2x-3y-4z+8t+v=2 \\ x-3y+2z+4v=10 \\ x-3z+5t-3v=-4 \\ 2y-3z-4t+5v=4 \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} 2x+y-2z+3t-v=2 \\ -5x+2y+z-t+2v=9 \\ -y+3z-2t=-1 \\ 5x+z+2t-2v=0 \\ -7x+y+2t-v=3 \end{cases}$

6 Algebra macierzy

Przykład 33.
Dane są stałe $a=-2$ i $b=3$ oraz macierze $A,\ B,\ C,$ gdzie

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć

$$AB+aC^T \text{ oraz } b(A+C)^T\cdot B-aC^T.$$

Rozwiązanie:

$$AB+aC^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}^T=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot 3 & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 \\ 4\cdot 2+(-3)\cdot 3 & 4\cdot(-2)+(-3)\cdot 0 \end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot(-5) \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

Ostatecznie

$$AB+aC^T=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$b(A+C)^T\cdot B-aC^T=3\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\right]^T\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-(-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}^T=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-(-2)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot(-5) \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$= 3\cdot\begin{pmatrix} 6\cdot 2+(-1)\cdot 3 & 6\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 \\ -2\cdot 2+(-2)\cdot 3 & -2\cdot(-2)+(-2)\cdot 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 2 & -2\end{pmatrix} =$$
$$= 3\cdot\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -10 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 9 & 3\cdot(-12) \\ 3\cdot(-10) & 3\cdot 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 2 & -2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 27 & -36 \\ -30 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & 10 \\ 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -46 \\ -32 & 14\end{pmatrix}$$

Ostatecznie

$$b(A+C)^T\cdot B - aC^T = \begin{pmatrix} 35 & -46 \\ -32 & 14\end{pmatrix}.$$

Przykład 34.
Dane są stałe $a=-3$ i $b=2$ oraz macierze $A,\ B,\ C,$ gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć

$$AB-aC \ \text{ oraz } \ BC+bA^T.$$

Rozwiązanie:

$$AB-aC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2\end{pmatrix} - (-3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+0\cdot 1+(-2)\cdot 3 & 2\cdot 3+0\cdot(-2)+(-2)\cdot 2 \\ 1\cdot 2+5\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 3+5\cdot(-2)+3\cdot 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot 1 \\ (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot 2\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 16 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 19 & 5\end{pmatrix}$$

Ostatecznie

$$AB-aC = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 19 & 5\end{pmatrix}.$$

$$BC+bA^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}^T =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 2 \\ 1\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 1\cdot 1+(-2)\cdot 2 \\ 3\cdot 2+2\cdot 1 & 3\cdot 1+2\cdot 2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -2 & 3\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -3 \\ 8 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -3 \\ 8 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 10 \\ -4 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 7 \\ 4 & 13\end{pmatrix}$$

Ostatecznie

$$BC+bA^T = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 7 \\ 4 & 13\end{pmatrix}.$$

Przykład 35.
Rozwiązać równanie

$$\left[(X+3\mathbf{I})^T - 2AB\right]^T = \mathbf{0},$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \text{macierz jednostkowa.}$$

Rozwiązanie:
Wykorzystamy następujące własności macierzy:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3. $(pA)^T = pA^T, \ p \in \mathbb{R}$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

$$\left[(X+3\mathbf{I})^T - 2AB\right]^T = \mathbf{0} \overset{2}{\Longleftrightarrow} \left[(X+3\mathbf{I})^T\right]^T - [2AB]^T = \mathbf{0} \overset{1,3,4}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Longleftrightarrow X + 3\mathbf{I} - 2B^T A^T = \mathbf{0} \Longleftrightarrow X = 2B^T A^T - 3\mathbf{I}$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 10 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -8 & 15 & 35 \\ 17 & -31 & -35 \\ 8 & -14 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -16 & 30 & 70 \\ 34 & -62 & -70 \\ 16 & -28 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 30 & 70 \\ 34 & -65 & -70 \\ 16 & -28 & 17 \end{pmatrix}$$

Przykład 36.
Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \left(A^T - X\right)^T = Y + (3X)^T \\ \frac{1}{2}\left(Y + 3X^T\right) = \frac{1}{3}A \end{cases},$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} \left(A^T - X\right)^T = Y + (3X)^T \\ \frac{1}{2}\left(Y + 3X^T\right) = \frac{1}{3}A \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - X^T = Y + 3X^T \\ Y + 3X^T = \frac{2}{3}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - X^T = Y + 3X^T \\ Y = \frac{2}{3}A - 3X^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - X^T = \frac{2}{3}A - 3X^T + 3X^T \\ Y = \frac{2}{3}A - 3X^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} A - X^T = \frac{2}{3}A \\ Y = \frac{2}{3}A - 3X^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^T = \frac{1}{3}A \\ Y = \frac{2}{3}A - 3 \cdot \frac{1}{3}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3}A^T \\ Y = -\frac{1}{3}A \end{cases}$$
Zatem

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Przykład 37.
Znaleźć macierz X spełniającą równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 19 & -4 \end{pmatrix} \cdot X.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wówczas
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 19 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5a-b & 2a \\ 5c-d & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a-2c & 9b-2d \\ 19a-4c & 19b-4d \end{pmatrix}$$
Otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} 5a-b = 9a-2c \\ 2a = 9b-2d \\ 5c-d = 19a-4c \\ 2c = 19b-4d \end{cases} \iff \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 2c-4a \\ c \in \mathbb{R} \\ d = 9c-19a \end{cases}$$
Zatem

$$X = \begin{pmatrix} a & 2c-4a \\ c & 9c-19a \end{pmatrix}, \text{ gdzie } a, c \in \mathbb{R}.$$

ZADANIA:
6.1. Dane są macierze A, B, C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć:
a) $A + B$
b) $B - A$
c) $A + 3B - 4C$
d) $B^T - A^T$.
6.2. Dane są macierze A, B, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Wyznaczyć:
a) AB
b) BA.
6.3. Dane są macierze: A o wymiarach 4×2, $B - 3\times 2, C - 2\times 4$. Czy określone są następujące iloczyny:
a) CAB^T
b) ABC
c) BA^TC^T?
Rozwiązać równanie macierzowe z niewiadomą X:
6.4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^T + X = 2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
6.5. $\begin{pmatrix} 1 & -11 & 5 \\ -10 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 3X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 23 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.
6.6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 10 & 12 & -8 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 2X^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 10 & 12 & -13 \end{pmatrix}$.
6.7. $X = 4\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5X\right] - \begin{pmatrix} -30 & 1 \\ 10 & -6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.
6.8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 18 \\ 14 & 16 & 30 \end{pmatrix}^T$.
6.9. $X^2 = X^T\cdot X$, gdzie X jest macierzą 2×2.
6.10. $X^T\cdot X = X^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.
6.11. $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Rozwiązać równania:
6.12. $\left(A^T\cdot B - X^T + 2\mathbf{I}\right)^T = \mathbf{0}$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 10 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{I} - \text{macierz jednostkowa.}$$

6.13. $\left(3X + BA^T\right)^T = X^T\cdot C$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 & 2 \\ 10 & 2 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & 6 & -3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.14. $\left(A^T\cdot X\right)^T - B\cdot B^T + (A-2X)^T = \mathbf{0}$, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.15. $5X^T = \left(2X + C^T\cdot B\right)^T$, gdzie

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -7 & 10 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

6.16. Wyznaczyć A^n, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązać układy równań macierzowych:

6.17. $\begin{cases} X = 3Y - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 4X \end{cases}.$

6.18. $\begin{cases} \frac{1}{2}\left[X^T + \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\right] = Y \\ Y^T + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5X \end{cases}.$

6.19. $\begin{cases} X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$

6.20. $\begin{cases} \left(X^T + 2Y\right)^T + B = \mathbf{0} \\ (B - Y)^T = 2X \end{cases}$, gdzie $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

7 Wyznacznik macierzy. Własności wyznacznika

Przykład 38.
Obliczyć wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
$\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-7) \cdot 3 = 5 + 21 = 26.$

Przykład 39.
Obliczyć wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy z metody Sarrusa

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & 5 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right. =$$

$= [(-1) \cdot (-2) \cdot 6 + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3] - [4 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 6] =$
$= [12 + 0 + 36] - [8 + 0 + 90] = 48 - 98 = -50.$

Przykład 40.
Obliczyć wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznacznik ten obliczymy korzystając z rozwinięcia Laplace'a. Rozwijamy ten wyznacznik względem trzeciego wiersza

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [(5 \cdot 0 - 3 \cdot 2)] + 0 + 7 \cdot [6 \cdot 2 - 5 \cdot 4] = 1 \cdot (-6) + 7 \cdot (-8) = -6 - 56 = -62\ .$$

Przykład 41.
Obliczyć wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Najpierw, wykorzystując własności wyznaczników, przekształcamy wyznacznik tak, aby w dowolnym wierszu (kolumnie) otrzymać tylko jeden niezerowy element, a następnie korzystając z rozwinięcia Laplace'a rozwijamy wyznacznik względem tego wiersza (kolumy).

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_4 := K_4 + 3K_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem drugiego wiersza

$$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_2 := K_2 - 2K_1 \\ K_3 := K_3 + 3K_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 19 \\ 2 & -3 & 16 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem pierwszego wiersza

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 19 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = [(-8) \cdot 16] - [19 \cdot (-3)] = -128 - (-57) = -71.$$

Przykład 42.
Obliczyć wartość wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Najpierw przekształcamy wyznacznik, a następnie korzystamy z rozwinięcia Laplace'a

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{W_2 := W_2 - W_4}{=} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_3 := K_3 + K_4}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem drugiego wiersza

$$= (-4) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{K_1 := K_1 + 3K_2 \\ K_4 := K_4 + K_2}}{=} (-4) \cdot \begin{vmatrix} 15 & 4 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem czwartego wiersza

$$= (-4) \cdot (-1) \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 15 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{W_2 := W_2 - 3W_1 \\ W_3 := W_3 - 2W_2}}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} 15 & 1 & 5 \\ -35 & 0 & -8 \\ -15 & 0 & -11 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem drugiej kolumny

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -35 & -8 \\ -15 & -11 \end{vmatrix} = (-4) \cdot [(-35) \cdot (-11) - (-8) \cdot (-15)] = (-4) \cdot [385 - 120] =$$

$$= (-4) \cdot 265 = -1060.$$

Przykład 43.
Rozwiązać nierówność

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -9 & 1 \\ 1 & 2\sqrt{x} & \sqrt{x} & 1 \\ x & 3 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} 36x & 6 \\ 3 & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Obliczamy wyznacznik znajdujący się po lewej stronie nierówności

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -9 & 1 \\ 1 & 2\sqrt{x} & \sqrt{x} & 1 \\ x & 3 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{W_1 := W_1 - W_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -18 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{x} & \sqrt{x} & 1 \\ x & 3 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem pierwszego wiersza

$$= (-18) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{x} & 1 \\ x & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{K_1 := K_1 - K_3}{=} (-18) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{x} & 1 \\ x-1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

wyznacznik rozwijamy względem pierwszej kolumny

$$= (-18) \cdot (x-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2\sqrt{x} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-18) \cdot (x-1) \cdot (-1) \cdot [2\sqrt{x} \cdot 1 - 1 \cdot (-1)] =$$

$$= 18(x-1)(2\sqrt{x}+1) = 36x\sqrt{x} - 36\sqrt{x} + 18x - 18.$$

Obliczamy wyznacznik znajdujący się po prawej stronie nierówności

$$\begin{vmatrix} 36x & 6 \\ 3 & \sqrt{x} \end{vmatrix} = 36x\sqrt{x} - 18.$$

Podstawiamy obliczone wyznaczniki do nierówności

$$36x\sqrt{x} - 36\sqrt{x} + 18x - 18 \leqslant 36x\sqrt{x} - 18.$$

Zauważmy, że nierówność ta jest określona tylko dla $x \geqslant 0$. Przenosimy wszystkie wyrazy na stronę lewą, dokonujemy redukcji wyrazów podobnych i otrzymujemy następującą nierówność

$$18x - 36\sqrt{x} \leqslant 0.$$

Podstwiamy

$$\sqrt{x} = t, \quad t \geqslant 0$$

i otrzymujemy

$$18t^2 - 36t \leqslant 0 \wedge t \geqslant 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność

$$18t(t-2) \leqslant 0 \wedge t \geqslant 0 \Longleftrightarrow t \in [0,2].$$

Zatem

$$\sqrt{x} \in [0,2] \Longleftrightarrow x \in [0,4].$$

Przykład 44.
Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości wyznacznika macierzy A wiedząc, że

$$A^6 + A^T = \mathbf{0}.$$

Rozwiązanie:

$$A^6 + A^T = \mathbf{0} \Longleftrightarrow A^6 = -A^T.$$

Zatem

$$\det A^6 = \det(-A^T).$$

Wykorzystamy następujące własności wyznaczników macierzy
1. $\det\left(A^T\right) = \det A$
2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
3. $\det\left(A^k\right) = (\det A)^k,\ k \in \mathbb{N}$
4. $\det(p \cdot A) = p^n \cdot \det A,\ \ p \in \mathbb{R},\ n-$ wymiar macierzy A

$$\det A^6 = \det(-A^T) \overset{3,4}{\Longleftrightarrow} (\det A)^6 = (-1)^n \cdot \det(A^T) \overset{1}{\Longleftrightarrow} (\det A)^6 = (-1)^n \cdot \det A.$$

Niech

$$\det A = t.$$

Wówczas

$$t^6 = (-1)^n \cdot t \Longleftrightarrow t^6 - (-1)^n \cdot t = 0 \Longleftrightarrow t(t^5 - (-1)^n) = 0.$$

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to $(-1)^n = 1$ i wtedy otrzymujemy

$$t(t^5 - 1) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \vee t^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \vee t = 1,$$

natomiast jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $(-1)^n = -1$ i otrzymujemy

$$t(t^5 + 1) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \vee t^5 + 1 = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \vee t = -1.$$

Ostatecznie jeżeli wymiar macierzy A jest liczbą parzystą, to

$$\det A = 1 \vee \det A = 0,$$

jeżeli nieparzystą, to

$$\det A = -1 \vee \det A = 0.$$

ZADANIA:
Obliczyć wartość podanych wyznaczników:

7.1. $\begin{vmatrix} 15 & 11 \\ -12 & 23 \end{vmatrix}$ **7.2.** $\begin{vmatrix} 71 & -15 \\ -22 & -3 \end{vmatrix}$ **7.3.** $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$

7.4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **7.5.** $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ -2 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ **7.6.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

7.7. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **7.8.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **7.9.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

7.10. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **7.11.** $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

7.12. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **7.13.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -9 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -7 & 1 \end{vmatrix}$

7.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **7.15.** $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

7.16. $\begin{vmatrix} b & a & a & a & a & a \\ 0 & b & a & a & a & a \\ 0 & 0 & b & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & b & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ **7.17.** $\begin{vmatrix} b & a & a & a & a & a \\ a & b & a & a & a & a \\ a & a & b & a & a & a \\ a & a & a & b & a & a \\ a & a & a & a & b & a \\ a & a & a & a & a & b \end{vmatrix}$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

7.18. Nie rozwijając wyznaczników wykazać, że przy dowolnych wartościach liczbowych a, b, c, m, n, p, r, s, t zachodzą równości:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ -a & 0 & -c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b & ca & 1 \\ c & ab & 1 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} a-b & m-n & r-s \\ b-c & n-p & s-t \\ c-a & p-m & t-r \end{vmatrix} = 0$, d) $\begin{vmatrix} a & b+c & m \\ b & c+a & m \\ c & a+b & m \end{vmatrix} = 0.$

7.19. Niech a, b, c będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Uzasadnić, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+t & b+t & c+t \\ (a+t)^2 & (b+t)^2 & (c+t)^2 \end{vmatrix}$$

nie zależy od parametru $t \in \mathbb{R}$.

7.20. Niech a_i, b_i, $c_i \in \mathbb{R}$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$. Uzasadnić równości:

a) $\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Rozwiązać równania:

7.21. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **7.22.** $\begin{vmatrix} 25 & 5 & 1 \\ x^2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

7.23. $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

7.24. $\begin{vmatrix} x-2 & 6 & 1 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & x-3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & x-1 & 7 \\ 1 & 0 & x-2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

7.25. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & e^{-x} \\ 1 & -2 & -3 \\ e^x & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{x} & 6 & \sqrt{x} \\ 5 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

7.26. $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & x \\ 0 & x^2 & 3 & 4 \\ 1 & \frac{1}{x} & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

Rozwiązać nierówność

7.27. $\begin{vmatrix} 10 & -10 & 10 & -10 \\ \ln x & 1 & -1 & 1 \\ 5 & \ln^2 x & 5 & -5 \\ -4 & 4 & \ln x^2 & 4 \end{vmatrix} < 0$

7.28. Wiedząc, że macierz B jest macierzą stopnia n oraz $\det B = 3$ obliczyć:

a) $\det\big(B^T \cdot B\big)$,

b) $\det\big(2B^3\big)$.

7.29. Obliczyć $\det A$ wiedząc, że macierz A jest macierzą stopnia n oraz:

a) $A^T - A^7 = \mathbf{0}$,

b) $A^4 - 3A = \mathbf{0}$,

c) $A^5 + A^T = \mathbf{0}$.

7.30. Obliczyć $\det A$ i $\det B$ wiedząc, że

$$\begin{cases} AB = \mathbf{I} \\ A^T - B^2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową.

8 Wzory Cramera

Przykład 45.
Zbadać, czy układ równań jest układem cramerowskim? Jeżeli tak, rozwiązać ten układ stosując wzory Cramera

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z=-7 \\ 3x+y+4z=5 \\ 2x+5y+z=18 \end{array}\right. .$$

Rozwiązanie:
Sprawdzamy, czy układ równań jest cramerowski, licząc wartość wyznacznika głównego W

$$W=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right|=10.$$

Wyznacznik główny $W=10\neq 0$, czyli dany układ równań jest układem cramerowskim.
Obliczamy pozostałe wyznaczniki $W_x,\ W_y,\ W_z$

$$W_x=\left|\begin{array}{rrr} -7 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 18 & 5 & 1 \end{array}\right|=20,\qquad W_y=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 18 & 1 \end{array}\right|=30,\qquad W_z=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 18 \end{array}\right|=-10.$$

Wyznaczamy niewiadome $x,\ y,\ z$

$$x=\frac{W_x}{W}=\frac{20}{10}=2,\qquad y=\frac{W_y}{W}=\frac{30}{10}=3,\qquad z=\frac{W_z}{W}=\frac{-10}{10}=-1.$$

Rozwiązanie układu jest następujące

$$\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=-1 \end{array}\right. .$$

Przykład 46.
Zbadać, czy układ równań jest układem cramerowskim? Jeżeli tak, rozwiązać ten układ stosując wzory Cramera

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=2 \\ -2x+y+2z=-1 \\ x+7y-7z=5 \end{array}\right. .$$

Rozwiązanie:
Sprawdzamy, czy układ równań jest cramerowski, licząc wartość wyznacznika głównego W

$$W=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -7 \end{array}\right|=0.$$

Wyznacznik główny $W=0$, czyli dany układ równań nie jest układem cramerowskim.

Przykład 47.
Zbadać, czy układ równań jest układem cramerowskim? Jeżeli tak, rozwiązać ten układ stosując wzory Cramera

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=0 \\ 4x+8y-7z+t=1 \\ x+2y-z+t=1 \\ -x+y+4z+6t=0 \end{array}\right. .$$

Rozwiązanie:
Sprawdzamy, czy układ równań jest cramerowski, licząc wartość wyznacznika głównego W

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 9.$$

Wyznacznik główny $W = 9 \neq 0$, czyli dany układ równań jest układem cramerowskim.
Obliczamy pozostałe wyznaczniki $W_x,\ W_y,\ W_z,\ W_t$

$$W_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 36, \qquad W_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -18,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad W_t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 9.$$

Wyznaczamy niewiadome $x,\ y,\ z,\ t$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{36}{9} = 4, \qquad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-18}{9} = -2, \qquad z = \frac{W_z}{W} = \frac{0}{9} = 0, \qquad t = \frac{W_t}{W} = \frac{9}{9} = 1.$$

Rozwiązanie układu jest następujące

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Przykład 48.
Zbadać, ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \\ x + 7y - 7z = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Układ ten jest układem jednorodnym (wszystkie wyrazy wolne są równe zero), zatem ma dokładnie jedno rozwiązanie ($x = y = z = 0$), gdy $W \neq 0$. W przeciwnym wypadku ($W = 0$) ma nieskończenie wiele rozwiązań. Układ jednorodny nigdy nie jest układem sprzecznym.
Obliczmy wartość wyznacznika głównego W

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik główny układu $W = 0$, czyli dany układ ma nieskończnie wiele rozwiązań.

ZADANIA:
Zbadać, czy układy równań są układami cramerowskimi. Jeżeli tak, rozwiązać te układy stosując wzory Cramera:

8.1. $\begin{cases} 3x - 3y + 5z = 12 \\ 4x + y - 8z = -18 \\ -3x + 2y - 5z = 4 \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -18 \\ 3x + z = -7 \\ 6x + 3y + 6z = -27 \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} -7x + 4y = 6 \\ 3x - 9z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = 21 \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} -3x + 5y - 7z = 28 \\ 7x - 12y - 2z = -15 \\ 2x - 3y - 7z = -3 \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} 3x + 12y + 5z + 43 = 0 \\ 5x - 3y - 10z + 76 = 0 \\ 4x - 17y + 2z - 23 = 0 \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} 2x - 11y + 7z = 5 \\ -4x + y + 2z = -10 \\ 2x - 32y + 23z = 5 \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} x - y - z = 3 \\ x - y = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 6t = -5 \\ 2x + y - 8t = -30 \\ -3x - 4y + 5t = 10 \\ -4x + 2y - z - t = -27 \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} -2x + 2y + 3z - t = -14 \\ 2x + y + z - 8t = -3 \\ 6x - 2y + z - t = 4 \\ -x - 2y - z + t = -5 \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} x + y + 2z + 3t - 1 = 0 \\ 3x - y - z - 2t + 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - t + 6 = 0 \\ x + 2y + 3z - t + 4 = 0 \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -x + 2y - 2z + 3t = 0 \\ 2x + 3y + 3z + t = 0 \\ 3y - z + 4t = 1 \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x + 2y - z - t = -2 \\ 2x - 3y - z + 2t = 1 \\ 4x - 5y + 2z + 3t = 5 \\ x - y - z - t = -2 \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 4x - 5y + 6z - t = 0 \\ x - 2y - 3z - 4t = 0 \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} x + y + z + u = a \\ x + y + z = b \\ y + z + u = c \\ x + z + u = d \end{cases}$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ są dane

8.16. $\begin{cases} y + z + u = a \\ x + z + u = b \\ x + y + u = c \\ x + y + z = d \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} x - 2y + 3t + v = 1 \\ 2x - 3y + z + 8t + 2v = 3 \\ x - 2y + z + 3t - v = 1 \\ y + 3t + 5v = 0 \\ x - 2y + 5t + 8v = -1 \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z - v - 3 = 0 \\ 2x + y + z + 2t + 3v - 6 = 0 \\ 3x - z + t + v - 3 = 0 \\ y + 4t + v - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2t + 5v - 8 = 0 \end{cases}$

9 Rząd macierzy

Przykład 49.
Wyznaczyć rząd macierzy A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Minorami stopnia k macierzy prostokątnej A nazywamy wyznaczniki macierzy kwadratowych stopnia k, powstałych przez skreślenie w macierzy A odpowiedniej liczby wierszy i kolumn.
Rzędem macierzy A nazywamy najwyższy stopień różnych od zera minorów tej macierzy.

Najwyższy stopień minora macierzy A wynosi 2 i macierz posiada elementy niezerowe, a zatem

$$1 \leqslant \mathrm{rz}A \leqslant 2,$$

czyli macierz A może być macierzą najwyżej rzędu drugiego. Mimo że elementy kolumny pierwszej są proporcjonalne do elementów kolumny drugiej, istnieje minor stopnia drugiego różny od zera np.

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30.$$

Zatem rząd macierzy A wynosi 2.

Przykład 50.
Wyznaczyć rząd macierzy B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & -3 \\ 1 & 5 & 2 & 7 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Najwyższy stopień minora macierzy B wynosi 3 i macierz ta posiada elementy niezerowe, a zatem

$$1 \leqslant \mathrm{rz}B \leqslant 3,$$

czyli macierz B może być macierzą najwyżej rzędu trzeciego. Okazuje się jednak, że elementy pierwszego wiersza są proporcjonalne do odpowiednich elementów trzeciego wiersza. Wynika stąd, że minory stopnia trzeciego macierzy B muszą być wszystkie równe zero. Łatwo zauważyć, że istnieją minory stopnia drugiego, różne od zera np.

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 21,$$

a zatem macierz B jest macierzą rzędu drugiego.

Przykład 51.
Wyznaczyć rząd macierzy C

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Rząd macierzy nie ulega zmianie, gdy

1. Kolumny (wiersze) pomnożymy przez elementy różne od 0.
2. Przestawimy kolumny (wiersze).
3. Do jednej kolumny (wiersza) dodamy kombinację liniową pozostałych kolumn (wierszy).

Ponadto kolumna (wiersz) złożona z samych zer nie wpływa na rząd macierzy.

Korzystając z powyższych własności obliczamy rząd macierzy C

$$\mathrm{rz}C = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{K_4 := K_4 - 2K_2}{=} \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{K_3 := K_3 + K_2}{=} \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_1 \text{ i } K_2}}{=}$$

$$= 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

Symbol $\overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_i \text{ i } K_j}}{=}$ oznacza wykreślenie $i-$ tego wiersza i $j-$ tej kolumny.
Ostatecznie

$$\text{rz}C = 2.$$

Przykład 52.
Wyznaczyć rząd macierzy D

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\text{rz}D = \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_5 \text{ i } K_5}}{=} 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_4 \text{ i } K_4}}{=}$$

$$= 1 + 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_3 := K_3 - K_2}{=} 2 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_3 \text{ i } K_2}}{=}$$

$$= 2 + 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5.$$

Ostatecznie

$$\text{rz}D = 5.$$

Przykład 53.
W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd macierzy E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\text{rz}E = \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{K_1 := K_1 - K_4 \\ K_2 := K_2 - 2K_4 \\ K_3 := K_3 + K_4}}{=} \text{rz}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 4 & a+2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_1 \text{ i } K_4}}{=}$$

$$= 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & a \\ 4 & a+2 & 3 \end{pmatrix} \overset{K_1 := \frac{1}{4}K_1}{=} 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a+2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{K_2 := K_2 + K_1 \\ K_3 := K_3 - 3K_1}}{=}$$

$$= 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a-3 \\ 1 & a+3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_1 \; texti \; K_1}}{=} 2 + \text{rz}\begin{pmatrix} 0 & a-3 \\ a+3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a-3 \\ a+3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-3 \\ a+3 & 0 \end{vmatrix} = -(a-3)(a+3)$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & a-3 \\ a+3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff -(a-3)(a+3) = 0 \iff |a| = 3$$

Wartość ostatniego minora zależy od parametru a i decyduje o rzędzie macierzy E. Jeżeli $|a| = 3$, ten minor jest zerowy (jego rząd wynosi 1) i rz$E = 3$, natomiast jeżeli $|a| \neq 3$, ten minor jest różny od zera (jego rząd wynosi 2) i rz$E = 4$.

Ostatecznie

$$\text{rz}E = \begin{cases} 4 & \text{gdy} \quad |a| \neq 3 \\ 3 & \text{gdy} \quad |a| = 3 \end{cases} .$$

Przykład 54.

Ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 4 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 7z = 5 \end{cases} .$$

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy układ m równań liniowych o n niewiadomych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} .$$

Utwórzmy macierz powstałą ze współczynników przy niewiadomych układu

$$W = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i macierz uzupełnioną powstałą z macierzy W przez dopisanie kolumny wyrazów wolnych

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Warunkiem koniecznym i wystarczającym rozwiązalności ogólnego układu równań liniowych jest równość rzędu macierzy W i rzędu macierzy uzupełnionej U

$$\text{rz}W = \text{rz}U.$$

Gdy wspólny rząd tych macierzy równa się liczbie niewiadomych n, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest oznaczony), gdy zaś wspólny rząd jest mniejszy od liczby niewiadomych n, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony). Gdy

$$\text{rz}W \neq \text{rz}U$$

układ nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Budujemy macierz współczynników W i macierz uzupełnioną U

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 5 \end{pmatrix} .$$

Łatwo obliczyć, że

$$\text{rz}W = 2,$$

natomiast

$$\text{rz}U = 3,$$

czyli

$$\text{rz}W \neq \text{rz}U,$$

tzn. układ ten nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Przykład 55.
Ile rozwiązań ma układ równań

$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z - 6t = 7 \\ 5x - 10y + 20z = 12 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Budujemy macierz współczynników W i macierz uzupełnioną U

$$W = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 \\ 5 & -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & -6 & 7 \\ 5 & -10 & 20 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy rzędy macierzy W i U i otrzymujemy

$$\text{rz}W = \text{rz}U = 2.$$

Rząd macierzy W jest równy rzędowi macierzy U, czyli układ ma rozwiązania, ponadto wspólny rząd jest mniejszy od liczby niewiadomych, więc układ jest nieoznaczony.

Przykład 56.
W zależności od parametru a przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + ay + 2az = 4 \\ x + 4y + 8z = a \\ ay + az = 8 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:
Obliczamy rząd macierzy współczynników W

$$\text{rz}W = \text{rz}\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \overset{W_1 := W_1 - W_2}{=} \text{rz}\begin{pmatrix} 0 & a-4 & 2a-8 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_2 \text{ i } K_1}}{=}$$

$$= 1 + \text{rz}\begin{pmatrix} a-4 & 2a-8 \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a-4 & 2a-8 \\ a & a \end{pmatrix} = -a(a-4)$$

$$\det\begin{pmatrix} a-4 & 2a-8 \\ a & a \end{pmatrix} = 0 \iff -a(a-4) = 0 \iff a = 0 \lor a = 4$$

Jeśli $a = 0$ lub $a = 4$, to ostatni minor jest zerowy (jego rząd jest równy 1) i rz$W = 2$.
Jeśli $a \neq 0$ i $a \neq 4$, to ostatni minor jest różny od zera (jego rząd jest równy 2) i rz$W = 3$.

Obliczamy rząd macierzy uzupełnionej U

$$\mathrm{rz}U = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 1 & a & 2a & 4 \\ 1 & 4 & 8 & a \\ 0 & a & a & 8 \end{pmatrix} \overset{W_1 := W_1 - W_2}{=} \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & a-4 & 2a-8 & 4-a \\ 1 & 4 & 8 & a \\ 0 & a & a & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{opuszczamy} \\ W_2 \text{ i } K_1}}{=}$$

$$= 1 + \mathrm{rz}\begin{pmatrix} a-4 & 2a-8 & 4-a \\ a & a & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{K_1 := K_1 + K_3 \\ K_2 := K_2 + 2K_3}}{=} 1 + \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-a \\ a+8 & a+16 & 8 \end{pmatrix}.$$

Jeśli $a = 4$, to rząd ostatniego minora wynosi 1 i $\mathrm{rz}U = 2$.
Jeśli $a \neq 4$, to rząd ostatniego minora wynosi 2 i $\mathrm{rz}U = 3$.

Ostatecznie
gdy $a = 4$, to $\mathrm{rz}W = \mathrm{rz}U = 2$, ponadto wspólny rząd jest mniejszy od liczby niewiadomych, a zatem układ jest nieoznaczony;
gdy $a = 0$, to $\mathrm{rz}W \neq \mathrm{rz}U$, czyli układ jest sprzeczny;
gdy $a \neq 0$ i $a \neq 4$, to $\mathrm{rz}W = \mathrm{rz}U = 3$, czyli układ jest oznaczony.

Przykład 57.
Zbadać, ile rozwiązań ma układ $AX = B$, gdy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Obliczamy rząd macierzy współczynników, czyli rząd macierzy A

$$\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Obliczamy rząd macierzy uzupełnionej

$$\mathrm{rz}(A|B) = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rz}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Zatem $\mathrm{rz}A \neq \mathrm{rz}(A|B)$, czyli układ jest sprzeczny.

ZADANIA:

Wyznaczyć rząd macierzy:

9.1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ **9.2.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.3.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$:

9.4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **9.5.** $\begin{pmatrix} 2a & 4 & -a \\ 2 & 1 & a \\ 4+2a & 6 & a \end{pmatrix}$ **9.6.** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$

Zbadać liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$:

9.7. $\begin{cases} x - y = a + 1 \\ 2x - y = 2 - a \end{cases}$ **9.8.** $\begin{cases} ax - 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} 6a^2x - 3y = 3a \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ **9.10.** $\begin{cases} 3x - (a-1)y = 3 \\ ax - 2y = -2 \end{cases}$

9.11. $\begin{cases} (a+1)x - ay = 1 \\ 2x + (a-1)y = 3a \end{cases}$ **9.12.** $\begin{cases} x + ay + z = 2a \\ ax + y + z = a \end{cases}$

9.13. $\begin{cases} ax + 3y + az = 0 \\ -ax + 2z = 3 \\ x + 2y + az = a \end{cases}$

9.14. $\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x + y + az = 4 \\ 2x + ay + z = 0 \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ x - ay + z = 1 \\ 3x - 3y + 2z = 2a \end{cases}$

9.16. $\begin{cases} x - y - z - t = ax \\ -x + y - z - t = ay \\ -x - y + z - t = az \\ -x - y - z + t = at \end{cases}$

Ile rozwiązań ma układ $AX = B$, gdy:

9.17. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & 4 \\ 7 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

9.18. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

9.19. $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 10 & 2 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Ile rozwiązań ma układ $AX = B$, w zależności od parametru m, gdy:

9.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

9.21. $A = \begin{pmatrix} m & -3 & 2m & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2m & 6 & -8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

9.22. $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & -1 & 3m \\ m & 0 & m^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}.$

10 Macierz odwrotna

Przykład 58.
Wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1}, gdy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy wartość wyznacznika macierzy A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$\det A = 1 \neq 0$, więc macierz A jest odwracalna. Wyznaczamy dopełnienia algebraiczne elementów macierzy A

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7,$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Macierz dopełnień algebraicznych ma postać

$$A^D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Macierz dopełnień transponowana ma postać

$$(A^D)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy A ma postać

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^D)^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Przykład 59.
Wyznaczyć macierz odwrotną B^{-1}, gdy

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy wartość wyznacznika macierzy B

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$\det B = -1 \neq 0$, więc macierz B jest odwracalna. Stosujemy metodę Gaussa

$$\begin{array}{rrr|rrrl}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & W_1 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_2 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & W_3 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & W_1 := W_1 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & W_2 := W_2 - 2W_1 \\
0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & W_3 := W_3 - W_1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 & W_1 := W_1 + 2W_2 \\
0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & W_2 := -W_2 \\
0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & W_3 := W_3 - 3W_2
\end{array}$$

Macierz odwrotna B^{-1} do macierzy B ma postać

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 60.
Wyznaczyć macierz odwrotną C^{-1}, gdy

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy wartość wyznacznika macierzy C

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$\det C = 2 \neq 0$, więc macierz A jest odwracalna. Wyznaczamy dopełnienia algebraiczne elementów macierzy C

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad C_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad C_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad C_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad C_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

Macierz dopełnień algebraicznych ma postać

$$C^D = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Macierz dopełnień transponowana ma postać

$$(C^D)^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Macierz odwrotna C^{-1} do macierzy C ma postać

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot (C^D)^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 61.
Wyznaczyć macierz odwrotną D^{-1}, gdy

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy wartość wyznacznika macierzy D

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

$\det D = 2 \neq 0$, więc macierz D jest odwracalna. Stosujemy metodę Gaussa

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrrl}
1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 \\
2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2 \\
1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & W_3 \\
-2 & -7 & 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4 \\
-1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_5 \\
\hline
1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_1 := W_1 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2 := W_2 - 2W_1 \\
0 & -2 & -3 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & W_3 := W_3 - W_1 \\
0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4 := W_4 + 2W_1 \\
0 & -1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & W_5 := W_5 + W_1 \\
\hline
1 & 5 & 7 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_1 := W_1 + W_4 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2 := W_2 \\
0 & -2 & -3 & 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & W_3 := W_3 \\
0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & W_4 := W_4 \\
0 & -3 & -9 & 0 & 14 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 & W_5 := W_5 - 2W_4 \\
\hline
1 & 0 & -3 & 0 & 11 & 13 & -5 & 0 & 1 & 0 & W_1 := W_1 - 5W_2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & W_2 := W_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & W_3 := W_3 + 2W_2 \\
0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & W_4 := W_4 - W_2 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 5 & -9 & 3 & 0 & -2 & 1 & W_5 := W_5 + 3W_2 \\
\hline
\end{array}$$

1	0	0	0	8	-2	1	3	1	0	$W_1 := W_1 + 3W_3$
0	1	0	0	-1	8	-3	-2	0	0	$W_2 := W_2 - 2W_3$
0	0	1	0	-1	-5	2	1	0	0	$W_3 := W_3$
0	0	0	1	2	19	-7	-3	1	0	$W_4 := W_4 - 3W_3$
0	0	0	0	2	-24	9	3	-2	1	$W_5 := W_5 + 3W_3$
1	0	0	0	8	-2	1	3	1	0	$W_1 := W_1$
0	1	0	0	-1	8	-3	-2	0	0	$W_2 := W_2$
0	0	1	0	-1	-5	2	1	0	0	$W_3 := W_3$
0	0	0	1	2	19	-7	-3	1	0	$W_4 := W_4$
0	0	0	0	1	-12	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$W_5 := \frac{1}{2}W_5$
1	0	0	0	0	94	-35	-9	9	-4	$W_1 := W_1 - 8W_5$
0	1	0	0	0	-4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$W_2 := W_2 + W_5$
0	0	1	0	0	-17	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$W_3 := W_3 + W_5$
0	0	0	1	0	43	-16	-6	3	-1	$W_4 := W_4 - 2W_5$
0	0	0	0	1	-12	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$W_5 := W_5$

Macierz odwrotna

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 94 & -35 & -9 & 9 & -4 \\ -4 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -17 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 43 & -16 & -6 & 3 & -1 \\ -12 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Przykład 62.
Rozwiązać równanie $\left(X^T \cdot A\right)^T = X + B$ z niewiadomą X, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
$\left(X^T \cdot A\right)^T = X + B \iff A^T X = X + B \iff A^T X - X = B \iff (A^T - \mathbf{I})X = B \iff$
$\iff X = \left(A^T - \mathbf{I}\right)^{-1} \cdot B$
Najpierw obliczymy $\left(A^T - \mathbf{I}\right)^{-1}$

$$A^T - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det(A^T - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}$, więc ta macierz jest odwracalna.

$$\left(A^T - \mathbf{I}\right)^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy już wyznaczyć X

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Przykład 63.
Rozwiązać układ równań macierzowych

$$\begin{cases} Y - 2A^T X^{-1} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} X \left(A^{-1}\right)^T + Y^{-1} = A \end{cases}, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Rozwiążemy układ, wykorzystując następujące własności:
1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
3. $(pA)^{-1} = \frac{1}{p}(A^{-1}), \;\; p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. $(A^{n})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}, \;\; n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} Y - 2A^{T}X^{-1} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}X\left(A^{-1}\right)^{T} + Y^{-1} = A \end{cases} \iff \begin{cases} Y = 2A^{T}X^{-1} \\ \frac{1}{2}X\left(A^{-1}\right)^{T} + Y^{-1} = A \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} Y^{-1} = \left(2A^{T}X^{-1}\right)^{-1} \\ \frac{1}{2}X\left(A^{-1}\right)^{T} + Y^{-1} = A \end{cases} \overset{1,3,4}{\iff} \begin{cases} Y^{-1} = \frac{1}{2}X(A^{T})^{-1} \\ \frac{1}{2}X\left(A^{-1}\right)^{T} + \frac{1}{2}X\left(A^{T}\right)^{-1} = A \end{cases} \overset{2}{\iff}$$

$$\iff \begin{cases} Y = \left[\frac{1}{2}X\left(A^{T}\right)^{-1}\right]^{-1} \\ \frac{1}{2}X\left(A^{T}\right)^{-1} + \frac{1}{2}X\left(A^{T}\right)^{-1} = A \end{cases} \overset{1,3,4}{\iff} \begin{cases} Y = 2A^{T}X^{-1} \\ X\left(A^{T}\right)^{-1} = A \end{cases} \iff \begin{cases} Y = 2A^{T}X^{-1} \\ X = A \cdot A^{T} \end{cases}.$$

Zatem

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 32 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aby wyznaczyć Y, obliczymy najpierw X^{-1}

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 32 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{64} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

czyli

$$Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{64} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ostatecznie

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 32 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Przykład 64.
Wyznaczyć $\det A^{10}$, wiedząc że $A^{-2} + 3A^{T} = \mathbf{0}$ oraz macierz A jest macierzą wymiaru 3.
Rozwiązanie:
Wykorzystamy następującą własności wyznaczników $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

$$A^{-2} + 3A^{T} = \mathbf{0} \iff A^{-2} = -3A^{T}$$

Zatem $\det(A^{-2}) = \det(-3A^T)$ i korzystając z własności wyznaczników otrzymujemy

$$(\det A)^{-2} = (-3)^3 \det A \Longleftrightarrow (\det A)^{-2} = -27 \det A.$$

Oznaczmy $\det A = t \wedge t \neq 0$ (bo macierz A jest macierzą odwracalną), wówczas

$$t^{-2} = -27t \Longleftrightarrow t^3 = -\frac{1}{27} \Longleftrightarrow t = -\frac{1}{3},$$

czyli

$$\det A = -\frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\det(A^{10}) = (\det A)^{10} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

ZADANIA:

Wyznaczyć macierze odwrotne do danych macierzy:

10.1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10.2. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

10.3. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

10.4. $\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

10.5. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

10.6. $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

10.7. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10.8. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

10.9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10.10. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

10.11. Rozwiązać równanie z niewiadomą X:

a) $(2AX)^{-1} - X^{-1} = \mathbf{I}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(2A^2)^{-1} + (X^T \cdot A)^{-1} = \mathbf{0}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(AX^{-1})^{-1} \cdot A + (2\mathbf{I} + A^{-1})^T \cdot A^T = \mathbf{I}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} \cos a & \sin^2(b+a) \\ \cos^2(b-a) & \sin b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

10.12. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10.13. Macierz A spełnia warunek $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Obliczyć $A^2 + A^{-2}$.

10.14. Rozwiązać równanie z niewiadomą X:

a) $(A \cdot X^{-1})^{-1} \cdot A + (2\mathbf{I} + A^2)^T \cdot A^T = (A^T)^3$, gdzie $A = \begin{pmatrix} \log 0,7 & 2,3 \\ \sqrt{7} & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X + (X^T \cdot A)^T = 0,5B$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}$.

c) $(AX^T - B)^T = \mathbf{0}$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

10.15. Rozwiązać układ równań macierzowych

$$\begin{cases} X + Y = \left(\frac{1}{2}A\right)^T \\ X - Y = A^{-1} \end{cases}, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.16. Rozwiązać układ równań macierzowych

$$\begin{cases} (XY)^{-1} + (4AY)^{-1} = B \\ 2Y^{-1} = B \end{cases}, \text{ gdzie } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

10.17. Obliczyć $\det A$, wiedząc że macierz A ma wymiar n oraz:

a) $A^{-1} + \left(A^T\right)^2 = \mathbf{0}$,

b) $A^T \cdot A^3 = \left(A^{-1}\right)^4$.

10.18. Obliczyć $\det A^5$, wiedząc że:

a) macierz A ma wymiary 6×6 oraz $(7A)^T + A^{-2} = \mathbf{0}$,

b) macierz A ma wymiary 5×5 oraz $A^T - (2A)^{-1} = \mathbf{0}$.

10.19. Obliczyć $\det A$ i $\det B$ wiedząc, że $\begin{cases} A^T - 2A^3 = \mathbf{0} \\ AB^2 = A^{-1} \end{cases}$.

11 Zastosowania macierzy i wyznaczników. Liniowe układy dynamiczne

Przykład 65.

Macierz migracji między dwoma ośrodkami ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć rozkład ludności po roku, wiedząc że stan początkowy jest następujący

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}^T.$$

b) Zakładając, że macierz M nie ulega zmianie w czasie, wyznaczyć wektor równowagi.

c) Zakładając, że po pierwszym roku stan jest następujący

$$x(1) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^T,$$

wyznaczyć stan początkowy.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ

$$x(k) = M^{k-l} \cdot x(l), \text{ gdy } k > l,$$

więc

$$x(1) = M \cdot x(0) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,51 \\ 0,49 \end{pmatrix}.$$

b) Wyznaczamy wektor $\bar{x}$ spełniający równanie

$$\bar{x} = M\bar{x} \Longleftrightarrow (I - M)\bar{x} = \mathbf{0}.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ -0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4x_1 - 0,3x_2 \\ -0,4x_1 + 0,3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z powyższej równości macierzy i z faktu, że współrzędne wektora równowagi spełniają warunek

$$x_1 + x_2 = 1$$

otrzymujemy układ

$$\begin{cases} 0,4x_1 - 0,3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{7} \\ x_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Więc wektor równowagi ma postać

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

c) Ponieważ

$$x(k) = (M^{l-k})^{-1} \cdot x(l), \quad \text{gdy} \ \ l > k,$$

więc

$$x(0) = M^{-1} \cdot x(1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Przykład 66.
Macierz migracji między trzema ośrodkami ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć rozkład ludności po piątym roku, wiedząc że po dwóch latach w pierwszym ośrodku mieszkało 60%, w drugim 30%, a w trzecim 10% całej ludności.
b) Zakładając, że macierz M nie ulega zmienie w czasie, wyznaczyć wektor równowagi.
c) Zakładając, że po trzecim roku w pierwszym ośrodku mieszkało 35%, w drugim 25%, a w trzecim 40% całej ludności, wyznaczyć stan początkowy.
Rozwiązanie:

$$x(2) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

a)

$$x(5) = M^3 \cdot x(2) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3446 \\ 0,2418 \\ 0,4136 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,4x_1 - 0,3x_2 - 0,1x_3 \\ -0,2x_1 + 0,5x_2 - 0,1x_3 \\ -0,2x_1 - 0,2x_2 + 0,2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0,4x_1 - 0,3x_2 - 0,1x_3 = 0 \\ -0,2x_1 + 0,5x_2 - 0,1x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{7} \\ x_2 = \frac{3}{14} \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Więc wektor równowagi ma postać

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c)

$$x(0) = (M^3)^{-1} \cdot x(3) = \left[\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^3\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,25 \\ 0,40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{81} \\ \frac{37}{81} \\ \frac{3}{81} \end{pmatrix}.$$

Przykład 67.
Niech A będzie macierzą przepływu międzygałęziowego systemu składającego się z dwóch gałęzi, natomiast d wektorem zapotrzebowań zewnętrznych

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć taką produkcję każdej gałęzi, aby system znajdował się w równowadze.
Rozwiązanie:
Wektor produkcji $\bar{x}$ spełnia równanie

$$\bar{x} = A\bar{x} + d \iff \bar{x} = (I - A)^{-1}d.$$

$$\bar{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,3 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{70}{29} & \frac{30}{29} \\ \frac{20}{29} & \frac{50}{29} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{141000}{29} \\ \frac{90000}{29} \end{pmatrix}.$$

Wektor produkcji ma postać

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{141000}{29} \\ \frac{90000}{29} \end{pmatrix}.$$

Przykład 68.
Niech A będzie macierzą przepływu międzygałęziowego systemu składającego się z trzech gałęzi, natomiast d wektorem zapotrzebowań zewnętrznych

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix}.$$

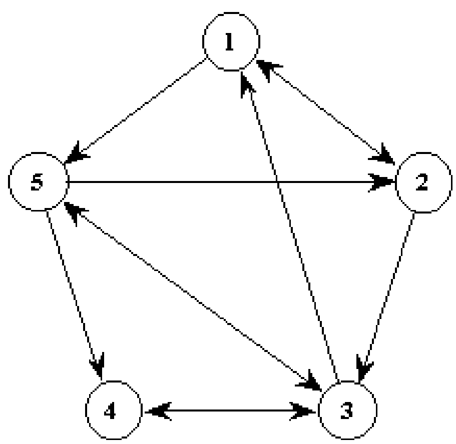
Wyznaczyć taką produkcję każdej gałęzi, aby system znajdował się w równowadze.
Rozwiązanie:

$$\bar{x} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 1600 \\ 2010 \end{pmatrix}$$

Wektor produkcji ma postać

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 1600 \\ 2010 \end{pmatrix}.$$

Przykład 69.
Graf przedstawia połączenia między pięcioma miastami.



Rysunek 6: Graf połączeń.

Wyznaczyć:
a) macierz bezpośrednich połączeń między miastami,
b) macierz połączeń między miastami z jedną przesiadką,
c) macierz połączeń między miastami z trzema przesiadkami.
Rozwiązanie:
a) Macierz bezpośrednich połączeń P składa się z elementów p_{ij}, gdzie

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy istnieje droga z miasta } j \text{ do miasta } i \\ 0 & \text{gdy nie istnieje droga z miasta } j \text{ do miasta } i \end{cases}.$$

Macierz P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Macierzą połączeń z k przesiadkami jest macierz P^{k+1}

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

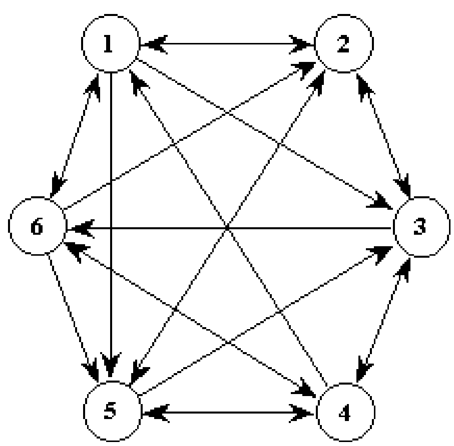
c)

$$P^4 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 10 \\ 5 & 5 & 6 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Przykład 70.
Macierz P jest macierzą bezpośrednich połączeń między sześcioma miastami

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtworzyć graf połączeń.
Rozwiązanie:



Rysunek 7: Graf połączeń.

ZADANIA:
11.1. Macierz migracji między dwoma ośrodkami ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,15 \\ 0,25 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć rozkład ludności po roku, po trzech i po pięciu latach, wiedząc że stan początkowy jest następujący $x(0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}^T$.
b) Zakładając, że macierz M nie ulega zmianie w czasie, wyznaczyć wektor równowagi.
c) Zakładając, że po drugim roku stan jest następujący $x(2) = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^T$, wyznaczyć stan początkowy i stan po roku.
11.2. Dla danej macierzy migracji wyznaczyć wektor równowagi, zakładając że macierz nie ulega zmianie w czasie:
a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix}$
b) $M_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,0 \\ 0,2 & 1,0 \end{pmatrix}$
c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,25 \\ 0,4 & 0,75 \end{pmatrix}$.
11.3. Macierz migracji między trzema ośrodkami ma postać

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

a) Wyznaczyć rozkład ludności po roku, po dwóch i po czterech latach, wiedząc że stan początkowy jest następujący $x(0) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}^T$.
b) Zakładając, że macierz M nie ulega zmianie w czasie, wyznaczyć wektor równowagi.
c) Zakładając, że po pierwszym roku stan jest następujący $x(1) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}^T$, wyznaczyć stan początkowy.
11.4. Dla danej macierzy migracji wyznaczyć wektor równowagi, zakładając że macierz nie ulega zmianie w czasie:
a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$
b) $M_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,9 & 0,3 \\ 0,4 & 0,0 & 0,1 \\ 0,0 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$
c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,2 \\ 0,0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.
11.5. Niech A będzie macierzą przepływu międzygałęziowego systemu składającego się z dwóch gałęzi, natomiast d wektorem zapotrzebowań zewnętrznych

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć taką produkcję każdej gałęzi, aby system znajdował się w równowadze.
11.6. Niech A będzie macierzą przepływu międzygałęziowego systemu składającego się z trzech sektorów, natomiast d wektorem zapotrzebowań zewnętrznych

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć taką produkcję każdego sektora, aby system znajdował się w równowadze.

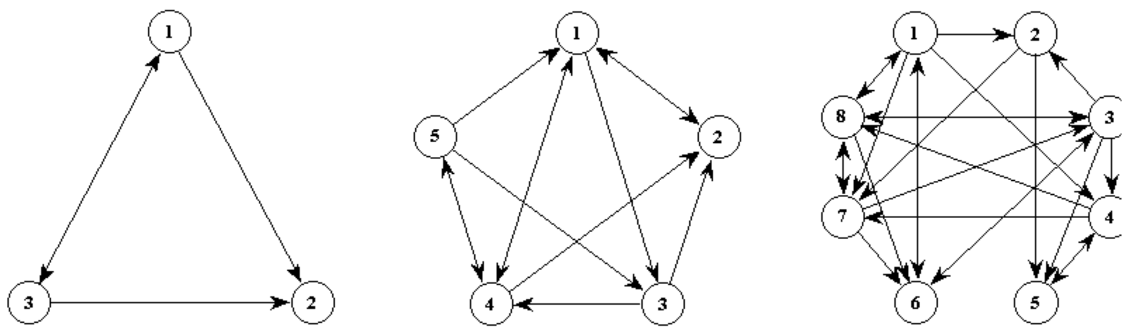
11.7. Macierz przepływu międzygałęziowego czterech gałęzi systemu gospodarczego ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,0 \end{pmatrix}.$$

Zapotrzebowanie zewnętrzne wynosi odpowiednio 400tys., 250tys., 300tys. i 250tys.. Jaki powinien być wektor produkcji, aby system znajdował się w równowadze?

11.8. Grafy przedstawiają połączenia między miastami.

I II III



Rysunek 8: Grafy połączeń.

Wyznaczyć:

a) macierz bezpośrednich połączeń między miastami,

b) macierz połączeń między miastami z jedną przesiadką,

c) macierz połączeń między miastami z trzema przesiadkami.

11.9. Macierze P_i, $(i = 1, 2, 3)$ są macierzami bezpośrednich połączeń między miastami:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtworzyć grafy połączeń.

12 Elementy algebry liniowej w R^n

Przykład 71.

Zbadać liniową niezależność wektorów x, y, z, gdzie

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

Wektory x_1, x_2, ..., x_k są liniowo niezależne, jeżeli

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k = \mathbf{0} \implies a_1 = a_2 = ... = a_k = 0.$$

$$ax+by+cz=\mathbf{0} \iff a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3b\\2b\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4c\\4c\\5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a+3b+4c\\2a+2b+4c\\3a+b+5c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+3b+4c=0\\ 2a+2b+4c=0\\ 3a+b+5c=0\end{cases}$$

$$W=\begin{vmatrix}1&3&4\\2&2&4\\3&1&5\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Układ jest oznaczony, czyli jedynym rozwiązaniem jest $a=b=c=0$, więc wektory $x,\ y,\ z$ są liniowo niezależne.

Przykład 72.
Zbadać liniową niezależność wektorów $x,\ y,\ z$, gdzie

$$x=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}5\\4\\1\\2\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}3\\6\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$ax+by+cz=\mathbf{0} \iff a\begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}5\\4\\1\\2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\6\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix}2a+5b+3c\\a+4b+6c\\4a+b+c\\2a+2b+2c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2a+5b+3c=0\\a+4b+6c=0\\4a+b+c=0\\2a+2b+2c=0\end{cases}$$

Ponieważ istnieje minor stopnia 3 różny od zera, np.

$$W=\begin{vmatrix}2&5&3\\1&4&6\\4&1&1\end{vmatrix}=66\neq 0,$$

więc układ ten jest oznaczony i jedynym jego rozwiązaniem jest $a=b=c=0$, czyli wektory $x,\ y,\ z$ są liniowo niezależne.

Przykład 73.
Zbadać liniową niezależność wektorów $x,\ y,\ z$, gdzie

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix}4\\8\\-5\end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$ax+by+cz=\mathbf{0} \iff a\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}4\\8\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+2b+4c \\ 2a+4b+8c \\ -3a+b-5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+2b+4c=0 \\ 2a+4b+8c=0 \\ -3a+b-5c=0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Układ jest nieoznaczony, więc wektory $x,\ y,\ z$ są liniowo zależne, np. $z = 2x + y$.

Przykład 74.
Wyznaczyć liczbę m, tak aby wektory $x,\ y,\ z,\ t$ były liniowo zależne, gdzie

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ m \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$ax + by + cz + dt = \mathbf{0} \iff a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ m \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a+c+2d \\ 2a+3b+5d \\ 3a-b+3c+md \\ a+2b-4c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+c+2d=0 \\ 2a+3b+5d=0 \\ 3a-b+3c+md=0 \\ a+2b-4c-d=0 \end{cases}$$

Wektory $x,\ y,\ z,\ t$ są liniowo zależne, jeżeli wyznacznik główny układu jest równy 0.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & m \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 11m - 55$$

$$W = 0 \iff 11m - 55 = 0 \iff m = 5.$$

Więc wektory $x,\ y,\ z,\ t$ są liniowo zależne dla $m = 5$.

Przykład 75.
Czy wektory $x,\ y,\ z$ tworzą bazę przestrzeni $V(\mathbb{R}^3)$, gdzie

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Aby te wektory tworzyły bazę przestrzeni $V(\mathbb{R}^3)$, wystarczy, że będą liniowo niezależne.

$$ax + by + cz = \mathbf{0} \iff a\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a-b \\ 3a+2b+6d \\ a-b+4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-b=0 \\ 3a+2b+6c=0 \\ a-b+4c=0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

Więc wektory $x,\ y,\ z$ są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę przestrzeni $V(\mathbb{R}^3)$.

Przykład 76.
Wyznaczyć współrzędne wektora v w bazie $u_1,\ u_2$ przestrzeni $V(\mathbb{R}^2)$, gdzie

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie:
Wektor v przedstawiamy w bazie $u_1,\ u_2$

$$v = au_1 + bu_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Z powyższej równości otrzymujemy układ

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ 2 = a + 3b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Czyli współrzędnymi wektora v w bazie $u_1,\ u_2$ są

$$a = -1 \ \text{ i } \ b = 1.$$

Przykład 77.
Wykazać, że jeżeli wektory

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k$$

tworzą bazę przestrzeni V, to wektory

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

również tworzą bazę przestrzeni V.
Rozwiązanie:
Aby te wektory

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1},\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

tworzyły bazę przestrzeni V, wystarczy, że będą liniowo niezależne.

$$a_1x_1 + a_2(x_1 + x_2) + a_3(x_1 + x_2 + x_3) + \ldots + a_{k-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) + a_k(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \mathbf{0},$$

należy uzasadnić, że

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = a_k = 0.$$

$a_1x_1 + a_2(x_1 + x_2) + a_3(x_1 + x_2 + x_3) + \ldots + a_{k-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}) + a_k(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) =$
$= a_1x_1 + a_2x_1 + a_2x_2 + a_3x_1 + a_3x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{k-1}x_1 + a_{k-1}x_2 + \ldots + a_{k-1}x_{k-1} + a_kx_1 + a_kx_2 +$
$\ldots + a_kx_k =$
$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k)x_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k)x_2 + (a_3 + \ldots + a_{k-1} + a_k)x_3 +$
$\ldots + (a_{k-1} + a_k)x_{k-1} + a_kx_k = \mathbf{0}.$
Ponieważ wektory

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x_k$$

tworzą bazę przestrzeni V, więc są liniowo niezależne, czyli

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_k = 0 \\ a_2 + a_3 + ... + a_{k-1} + a_k = 0 \\ a_3 + ... + a_{k-1} + a_k = 0 \\ \vdots \\ a_{k-1} + a_k = 0 \\ a_k = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ \vdots \\ a_{k-1} = 0 \\ a_k = 0 \end{cases}$$

Ostatecznie wektory

$$x_1,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_2 + x_3,\ ...\ ,\ x_1 + x_2 + ... + x_{k-1},\ x_1 + x_2 + ... + x_k$$

są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę przestrzeni V.

Przykład 78.
Sprawdzić, czy odwzorowanie

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

jest odwzorowaniem liniowym.
Rozwiązanie:

Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy **liniowym**, jeżeli spełnia ono następujące warunki:

1. $\forall_{x,\ y \in \mathbb{R}^m} : f(x + y) = f(x) + f(y)$ (**addytywność**)

2. $\forall_{x \in \mathbb{R}^m,\ a \in \mathbb{R}} : f(ax) = af(x)$ (**jednorodność**)

Twierdzenie
Każde odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ma postać $f(x) = Ax$ dla pewnej macierzy A.

1. $\forall_{x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2} :$
$f(x + y) = f[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 3(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) =$
$= 3x_1 + 3y_2 + 5x_2 + 5y_2 = (3x_1 + 5x_2) + (3y_2 + 5y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = f(x) + f(y)$

2. $\forall_{x=(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ a \in \mathbb{R}} :$
$f(ax) = f[a(x_1, x_2)] = f(ax_1, ax_2) = 3ax_1 + 5ax_2 = a(3x_1 + 5x_2) = af(x_1, x_2) = af(x)$.
Czyli odwzorowanie

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Przykład 79.
Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x) = 2x - 1$$

jest odwzorowaniem liniowym.
Rozwiązanie:
$\forall_{x,\ y \in \mathbb{R}} : f(x + y) = 2(x + y) - 1 = 2x + 2y - 1 = (2x - 1) + (2y - 1) + 1 = f(x) + f(y) + 1$.
To znaczy, że funkcja $f(x) = ax+b$ nie jest odwzorowaniem liniowym, jeżeli $b \neq 0$. W szczególności funkcja $f(x) = 2x - 1$ nie jest odwzorowaniem liniowym.

Przykład 80.
Sprawdzić, czy odwzorowanie

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 4x_2 + x_3, 3x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Rozwiązanie:

Aby wykazać, że powyższe odwzorowanie jest liniowe wystarczy wyznaczyć macierz A taką, że

$$f(x) = Ax,$$

gdzie

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Aby wyznaczyć macierz A, wystarczy współczynniki zmiennych ustawić w wierszach odpowiadających kolejnym współrzędnym

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

To znaczy, że odwzorowanie

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 4x_2 + x_3, 3x_1 - 3x_2 + 3x_3)$$

jest odwzorowaniem liniowym.

ZADANIA:

12.1. Zbadać liniową niezależność wektorów:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

12.2. Dla jakiej wartości parametru a dane wektory są liniowo zależne:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3a \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} -2 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}.$

12.3. Czy wektory $x, \ y, \ z$ tworzą bazę przestrzeni V, gdzie:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ V = V(\mathbb{R}^2)$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \ V = V(\mathbb{R}^3)$

c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ V = V(\mathbb{R}^4).$

12.4. Wyznaczyć współrzędne wektora x w bazie $u_i, \ (i = 1, 2, 3, 4)$, gdzie:

a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

12.5. Wykazać, że jeżeli wektory $x_1, \ x_2, \ x_3$ tworzą bazę przestrzeni V, to poniższe wektory również tworzą bazę przestrzeni V:

a) $x_1 + 2x_2 + x_3, \ x_1 - x_2 + 2x_3, \ 3x_1 + 4x_3$

b) $x_2, \ x_1 - x_2 + x_3, \ x_1 - 2x_2 + 2x_3$

c) $x_1 + x_2 + x_3, \ x_1 - 3x_3, \ x_2 - x_3.$

12.6. Zbadać, czy jeżeli wektory $x_1, \ x_2, \ x_3$ tworzą bazę przestrzeni V, to wektory:

a) $ax_1 + x_2 + x_3, \ x_1 + x_2, \ x_2 + x_3$

b) $ax_1 + x_2, \ ax_2 + x_3, \ x_1 + x_2 - x_3$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, również tworzą bazę przestrzeni V.

12.7. Sprawdzić, czy następujące odwzorowania są liniowe:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x, y) = ax + by + c, \ \ a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $f(x, y) = x - y$

d) $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$

e) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, x + y + 2z, 2x + 3y + z)$

f) $f(x, y, z) = (x + y - z, 2x - 4y + z, 3x - 3y + 3z)$

g) $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (x_2, x_3, ..., x_n, x_1), \ \ n \in \mathbb{N}.$

13 Wybrane zastosowania funkcji jednej zmiennej w ekonomii i matematyce finansowej

Przykład 81.
Zbadano, że popyt na pomidory zależy od ceny c (w zł za kilogram) w następujący sposób

$$PP(c) = 576 - 64c.$$

Wyznaczyć funkcję dochodu

$$D(c) = PP(c) \cdot c.$$

Przy jakiej cenie dochód jest maksymalny i ile wtedy wynosi? Jaki dochód daje cena 3zł? Czy istnieje cena, przy której dochód wynosi 1280zł?
Rozwiązanie:
Najpierw wyznaczamy funkcję dochodu zależną od ceny

$$D(c) = PP(c) \cdot c = (576 - 64c) \cdot c = -64c^2 + 576c.$$

Jest to funkcja kwadratowa, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie (x_w, y_w) i której ramiona są skierowane do dołu. Zatem, aby wyznaczyć maksymalny dochód i cenę, przy której jest on osiągany, należy wyznaczyć współrzędne tego wierzchołka

$$x_w = c_0 = \frac{-576}{-2 \cdot 64} = 4,5 \qquad y_w = D_{max}(c_0) = \frac{-576^2}{-4 \cdot 64} = 1296\text{zł}.$$

Cena, przy której dochód jest maksymalny, wynosi 4,5zł, a maksymalny dochód jest równy 1296zł. Aby wyznaczyć jaki dochód daje cena 3zł, należy obliczyć wartość funkcji dochodu w punkcie $c = 3$zł

$$D(3) = -64 \cdot 3^2 + 576 \cdot 3 = 1152\text{zł}.$$

Aby wyznaczyć cenę, przy której dochód wynosi 1280zł, należy rozwiązać równanie

$$-64c^2 + 576c = 1280.$$

Jest to równanie kwadratowe, którego pierwiastkami są liczby

$$c_1 = 4 \ \text{ i } \ c_2 = 5.$$

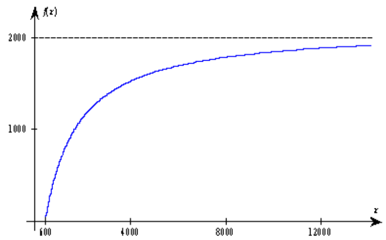
Zatem istnieją dwie ceny $c_1 = 4$ i $c_2 = 5$, przy których dochód wynosi 1280zł.

Przykład 82.
Zbadano, że zależność między dochodami w rodzinie (w zł na osobę) a wydatkami na zakup odzieży wieczorowej i bankietowej opisuje funkcja Törnquista II rodzaju (popyt na dobra wyższego rzędu)

$$f(x) = \frac{2000(x - 600)}{x + 300}.$$

Narysować wykres funkcji f. Czy istnieje dochód, który maksymalizuje wydatki na odzież?
Rozwiązanie:
Szwedzki ekonomista H. Törnquist, badając zależność pomiędzy wydatkami na zakup dóbr a wielkością dochodów, posługiwał się trzema typami funkcji popytu. W przypadku dóbr wyższego rzędu stosował on następującą funkcję

$$f(x) = \frac{a(x - c)}{x + b}, \text{ gdzie } x \geqslant c, \ a > 0, \ b > 0, \ c > 0.$$



Rysunek 9: Wykres funkcji $f(x) = \frac{2000(x-600)}{x+300}$, $x \geqslant 600$.

W naszym zadaniu $a = 2000$, $b = 300$, $c = 600$. Wykres funkcji f przedstawiony jest na powyższym rysunku. Dziedzinę funkcji ograniczamy do dziedziny praktycznej $x \geqslant 600$.
Z wykresu możemy odczytać, że popyt na odzież wieczorową i bankietową występuje dopiero przy dochodzie wyższym niż 600zł na osobę. Łatwo zauważyć, że wraz ze wzrostem dochodów wzrasta popyt, ale przy bardzo dużych dochodach popyt zmienia się nieznacznie. Ponieważ funkcja popytu jest funkcją rosnącą na całej swojej dziedzinie, zatem nie istnieje dochód, który maksymalizuje wydatki na odzież. Jednocześnie możemy zuważyć, że wydatki te nigdy nie przekroczą 2000zł.

Przykład 83.
Zaciągnięto w banku kredyt w wysokości 1000zł. Jaką kwotę trzeba będzie zwrócić za pół roku, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 36% ?
Rozwiązanie:
Aby obliczyć jaką kwotę należy zwrócić do banku, posłużymy się zależnością

$$S(t) = S_0(1 + rt)$$

gdzie: $S(t)-$ kwota zwrotu,
S_0- kwota zaciągniętego kredytu,
$t-$ okres trwania kredytu wyrażony w latach,
$r-$ roczna stopa procentowa.
Zatem kwota, którą trzeba będzie zwrócić za pół roku wynosi

$$S(0,5) = 1000(1 + 0,36 \cdot 0,5) = 1180\text{zł}.$$

Przykład 84.
Ulokowano w banku 600zł z roczną stopą procentową 26%. Obliczyć wartość lokaty po upływie 3 miesięcy, jeżeli bank rozlicza odsetki na koniec okresu trwania lokaty.
Rozwiązanie:
Jeżeli odsetki w całym okresie trwania lokaty naliczne są od tej samej podstawy, równej początkowej kwocie lokaty, to mamy do czynienia z odsetkami prostymi.
W tym przypadku końcową wartość lokaty liczymy korzystając z zależności

$$S(t) = S_0(1 + rt)$$

gdzie: $S(t)-$ wartość końcowa lokaty,
S_0- wartość początkowa lokaty,
$t-$ okres trwania lokaty wyrażony w latach,
$r-$ roczna stopa procentowa.
Zatem

$$S\left(\frac{3}{12}\right) = 600\left(1 + 0,26 \cdot \frac{3}{12}\right) = 639\text{zł}.$$

Po trzech miesiącach wartość lokaty będzie wynosiła 639zł.

Przykład 85.
Kwotę 500zł wkładamy na lokatę terminową na pół roku, przy czym bank nalicza i kapitalizuje odsetki co kwartał. Roczna stopa procentowa wynosi 28%. Obliczyć wartość końcową lokaty.
Rozwiązanie:
Jeżeli całkowity okres lokaty podzielony jest na podokresy, a odsetki naliczane są za poprzednie podokresy, wtedy mamy do czynienia z odsetkami składanymi. Dodawanie naliczonych odsetek do kwoty lokaty nazywa się kapitalizowaniem odsetek.
Jeżeli kapitalizacja odbywa się k razy w roku w równych odstępach, to wartość końcową lokaty liczymy korzystając z zależności:

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Zatem

$$S(0,5) = 500 \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{4 \cdot 0,5} = 572,45\text{zł}.$$

Po upływie pół roku wartość lokaty będzie wynosiła 572,45zł.

Przykład 86.
Rok temu do banku złożono 650zł. Dzisiaj stan konta wynosi 900zł. Obliczyć roczną stopę procentową, wiedząc że kapitalizacja jest ciągła.
Rozwiązanie:
Stan konta przy kapitalizacji ciągłej liczymy w następujący sposób

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

gdzie: $e-$ jest podstawą logarytmu naturalnego.
Aby wyznaczyć roczną stopę procentową, należy z powyższego wzoru wyznaczyć r.
Najpierw dzielimy obie strony równania przez S_0

$$\frac{S(t)}{S_0} = e^{rt}$$

a następnie obustronnie logarytmujemy

$$\ln \frac{S(t)}{S_0} = rt$$

i wyznaczamy r

$$r = \frac{\ln \frac{S(t)}{S_0}}{t}.$$

Zatem

$$r = \frac{\ln \frac{900}{650}}{1} \approx 0,325.$$

Roczna stopa procentowa wynosi 32,5%.

Przykład 87.
Jaka jest obecna wartość kwoty 6000zł, którą mamy otrzymać za rok, jeżeli roczna stopa dyskontowa wynosi 20% ?
Rozwiązanie:
Proces obliczania wartości początkowej S_0 kapitału na podstawie jego wartości końcowej $S(t)$ nazywa się dyskontowaniem. W przypadku oprocentowania prostego wartość tę obliczamy w następujący sposób

$$S_0 = \frac{S(t)}{1+rt}$$

gdzie: $r-$ roczna stopa dyskontowa,
Zatem obecna wartość kwoty 6000zł wynosi

$$S_0 = \frac{6000}{1+0,2\cdot 1} = 5000\text{zł}.$$

Przykład 88.
Dwa lata temu Jan Kowalski złożył w banku wszystkie swoje oszczędności. Bank zaoferował mu lokatę na 27% rocznie od bieżącej wartości wkładu. Jaką kwotę złożył pan Jan, jeżeli dziś dysponuje wkładem w wysokości 20000zł?
Rozwiązanie:
W tym zadaniu mamy do czynienia z oprocentowaniem składanym, a zatem wartość początkową policzymy korzystając z zależności

$$S_0 = \frac{S(t)}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}} = S(t)\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt}.$$

Zatem

$$S_0 = 20000\left(1+\frac{0,27}{1}\right)^{-1\cdot 2} \approx 12400\text{zł}.$$

Pan Jan zaoszczędził 12400zł.

Przykład 89.
Ustalono, że zapłata za wykonaną pracę zostanie rozłożona w czasie w następujący sposób: po pierwszym kwartale 800zł, po drugim 200zł, po trzecim 1000zł, a po czwartym 500zł. Jaka będzie wartość tego strumienia pieniędzy na koniec okresu płatności, jeżeli kwartalna stopa procentowa wynosi 10% ?
Rozwiązanie:
Wpływy lub wydatki pieniężne rozłożone w czasie nazywamy strumieniami pieniędzy. Rozpatrzmy następujący strumień pieniędzy

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ ...,\ S_n$$

odpowiednio w momentach 0, 1, 2,...,n. Moment 0 oznacza chwilę obecną. Przyszła wartość strumienia pieniędzy na koniec $n-$ tego okresu jest równa

$$S = \sum_{i=0}^{n} S_i(1+a)^{n-i}$$

gdzie: $a-$ oprocentowanie pojedynczego okresu.
Zatem wartość zapłaty na koniec czwartego okresu będzie wynosiła

$$S = 800(1+0,1)^{4-1} + 200(1+0,1)^{4-2} + 1000(1+0,1)^{4-3} + 500(1+0,1)^{4-4} = 2906,8\text{zł}.$$

Momentu zerowego nie ma, ponieważ w chwili obecnej nie otrzymujemy żadnej zapłaty.

Przykład 90.
Franek umówił się z kolegą, że kupi od niego motor. Ponieważ nie ma całej potrzebnej do kupna motoru kwoty, zadeklarował, że dziś zapłaci 500zł, a pozostałą kwotę będzie płacił w następujących ratach za miesiąc 600zł, a za dwa miesiące 300zł. Jaka jest obecna wartość tego stumienia pieniędzy, jeżeli miesięczna stopa procentowa wynosi 2% ?
Rozwiązanie:
Obecna wartość strumienia pieniędzy

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ ...,\ S_n$$

jest równa

$$Z = \sum_{i=0}^{n} \frac{S_i}{(1+a)^i}.$$

Zatem obecna wartość strumienia pieniędzy

$$S_0 = 500,\ S_1 = 600,\ S_2 = 300,$$

gdy miesięczna stopa procentowa wynosi 2%, jest równa

$$Z = \frac{500}{(1+0,02)^0} + \frac{600}{(1+0,02)^1} + \frac{300}{(1+0,02)^2} \approx 1376,6\text{zł}.$$

Przykład 91.
Wycieczka do Dominikany kosztuje 5100zł. Czy stać nas będzie na uczestnictwo w tej wycieczce, jeżeli przez pół roku co miesiąć będziemy wpłacać po 800zł? Miesięczne oprocentowanie wynosi 3%.
Rozwiązanie:
Wartość przyszła strumienia n równych płatności na koniec n-tego okresu jest równa

$$S(n) = S_0 \frac{(1+a)^n - 1}{a}$$

gdzie: S_0- wysokość pojedynczej płatności,
$a-$ oprocentowanie pojedynczego okresu,
$n-$ liczba okresów.

Zatem kwota, którą uzbieramy po upływie sześciu miesięcy (6 okresów), wynosi

$$S(6) = 800\frac{(1+0,03)^6 - 1}{0,03} \approx 5174,7\text{zł}.$$

Z rachunków tych wynika, że będziemy mogli pojechać na wycieczkę do Dominikany.

Przykład 92.
Jaka jest obecna wartość pieniężna urządzenia, za które będziemy przez rok płacić miesięczne raty w wysokości 300zł? Roczne oprocentowanie wynosi 48% .
Rozwiązanie:
Wartość obecna strumienia n równych płatności w wysokości S_0 dokonywanych na koniec n kolejnych okresów jest równa

$$Z(n) = S_0 \frac{(1+a)^n - 1}{a(1+a)^n}$$

Najpierw musimy obliczyć jakie jest oprocentowanie pojedynczego okresu, czyli ile wynosi miesięczna stopa procentowa

$$a = \frac{0,48}{12} = 0,04.$$

Zatem obecna wartość pieniężna urządzenia wynosi

$$Z(12) = 300\frac{(1+0,04)^{12}-1}{0,04(1+0,04)^{12}} \approx 2815,5\text{zł}.$$

ZADANIA:

13.1. Pewien robotnik ustalił z pracodawcą, że w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy będzie otrzymywał wynagrodzenie w wysokości 7zł za godzinę, natomiast za godziny nadliczbowe 12zł. Podać funkcję określającą zarobek robotnika w ciągu t godzin nieprzerwanej pracy, jeżeli za rozpoczętą godzinę pracy płaci się:
a) proporcjonalnie do przepracowanego czasu,
b) jak za całą godzinę.

13.2. Pewna firma handlowa sprzedaje anteny satelitarne. Badania marketingowe wykazały, że popyt na te anteny wyraża się zależnością

$$PP(c) = 635 - c,$$

gdzie $c-$ cena detaliczna jednej sztuki. Przy jakiej cenie dochód ze sprzedaży anten przekroczy 100500zł?

13.3. Producent mrożonek zlecił firmie konsultingowej zbadanie, jaki wpływ na sprzedaż mrożonych warzyw mają ceny detaliczne. Informacje zebrane przez dział zbytu zestawiono w tabeli

sprzedaż (w mln. zł)	12,5	11	3,5
cena detaliczna	1	1,5	3

Wyznaczyć parametry funkcji kwadratowej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

opisującej badaną zależność. Jaka cena maksymalizuje dochód uzyskany ze sprzedaży mrożonek?

13.4. Funkcja całkowitego kosztu produkcji x kaset magnetofonowych (w tys. sztuk) jest następująca

$$K(x) = \frac{1}{10}x^2 + 3x + 500.$$

Obecna wielkość produkcji wynosi 100tys. sztuk, a cena rynkowa 20zł. Czy opłacalne jest zwiększenie produkcji przy założeniu, że znajdzie ona zbyt?

13.5. Funkcja kosztu produkcji pewnego towaru dana jest wzorem

$$K(x) = 10x,$$

gdzie $x-$ wielkość produkcji. Popyt na ten towar zależy od jego ceny w następujący sposób

$$PP(c) = -0,02c^2 + 50.$$

Jaki warunek musi spełniać cena sprzedaży c, aby produkcja przynosiła zysk, zakładając że znajdzie ona zbyt?

13.6. Popyt i podaż na winogrona (w kilogramach) w zależności od ceny (w zł za kilogram) kształtują się w następujący sposób

$$PP(c) = 2^{15-c}, \ \ PD(c) = 4^c.$$

Wyznaczyć cenę równowagi oraz wartość podaży i popytu przy tej cenie.

13.7. Fukcja popytu pewnego towaru jest dana wzorem

$$PP(c) = \frac{320}{c+10},$$

gdzie $c-$ cena. Znaleźć i zinterpretować granicę

$$\lim_{c\to 0^+} PP(c), \quad \lim_{c\to\infty} PP(c).$$

13.8. Oszacowano, że popyt na samochody terenowe w zależności od ceny c (w tys. zł) opisuje funkcja

$$PP(c) = \frac{300}{1+e^{0{,}04c}}.$$

Narysować wykres funkcji popytu. Czy istnieje cena, przy której popyt wynosi 15 samochodów? Jak zareaguje rynek, jeżeli cena zmaleje o 10 tys. zł?
13.9. Stwierdzono, że zależność między miesięcznymi dochodami rodziny x, wyrażonymi w zł na osobę, a wydatkami na warzywa i owoce (w zł) opisuje funkcja Törnquista I rodzaju (popyt na dobra elementarne)

$$f(x) = \frac{400x}{x+1000}.$$

Narysować wykres funkcji f oraz obliczyć ile wydaje na warzywa i owoce rodzina, której dochód na jedną osobę wynosi 1000zł. Jak bardzo zmieni się ta wartość, jeżeli dochód wzrośnie o 500zł na osobę? Wyznaczyć poziom nasycenia, czyli poziom, do którego wydatki na warzywa i owoce rosną, lecz którego nigdy nie przekroczą.
13.10. Złożono w banku 700zł z roczną stopą procentową 13%. Obliczyć wartość lokaty po upływie 5 miesięcy, jeżeli:
a) bank nalicza odsetki na koniec okresu trwania lokaty,
b) kapitalizacja jest miesięczna,
c) kapitalizacja jest ciągła.
13.11. Za kwotę 2000zł nabywamy dwuletnie obligacje Skarbu Państwa. Oprocentowanie obligacji wynosi 30% w skali roku, a odsetki są naliczane i kapitalizowane co kwartał. Obliczyć wartość obligacji po dwóch latach.
13.12. Ile powinno wynosić oprocentowanie lokaty, żeby po upływie 6 lat potroić posiadany kapitał, jeżeli kapitalizacja jest roczna?
13.13. Jan Kowalski wygrał 150000zł. Zaproponowano mu natychmiastową wypłatę wygranej lub wypłatę wygranej po 40000zł w czterech ratach. Pierwsza rata wygranej zostaje wypłacona natychmiast, a pozostałe przez trzy kolejne lata pod koniec każdego roku. Która forma wypłaty wygranej jest korzystniejsza, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 15%?
13.14. Jaka powinna być wartość początkowa lokaty terminowej, aby po 1,5 roku uzyskać 1000zł zysku, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 20%, a kapitalizacja jest półroczna?
13.15. Janek chce ulokować w banku 2000zł. Po dokonaniu wstępnej analizy wybrał dwa banki. W pierwszym roczne oprocentowanie lokaty wynosi 12%, a odsetki kapitalizowane są co miesiąc, a w drugim roczne oprocentowanie wynosi 16%, a odsetki kapitalizowane są co kwartał. Który bank powinien wybrać Janek?
13.16. Do dwóch różnych banków złożono taką samą kwotę 500zł. W pierwszym banku po czterech miesiącach wartość lokaty wyniosła 541zł. W drugim banku po sześciu miesiącach wartość lokaty wyniosła 580zł. W którym banku jest korzystniejsze oprocentowanie, jeżeli kapitalizacja w obu bankach jest miesięczna?
13.17. Oszacowano, że zapłata za prace zlecone zostanie podzielona na trzy części. Pierwsza wypłata nastąpi za miesiąc i wyniesie 600 zł, druga za dwa miesiące i wyniesie 400zł a trzecia z trzy miesiące i wyniesie 500zł. Jaka będzie wartość tego strumienia pieniędzy na koniec trzeciego miesiąca, jeżeli miesięczna stopa procentowa wynosi 2%?
13.18. Pewien stolarz ustalił z klientem, że za wykonane meble otrzyma zapłatę w następujący sposób: na początek 1000zł, po pierwszym kwartale 500zł, a po drugim kwartale 700zł. Jaka jest początkowa wartość pieniężna wykonanej przez stolarza pracy, jeżeli kwartalna stopa procentowa

wynosi 8%?
13.19. Która z ofert jest korzystniejsza: otrzymać wynagrodzenie za wykonaną pracę po jej wykonaniu, czyli po roku w wysokości 6000 zł, czy otrzymywać wynagrodzenie co miesiąc w wysokości 450zł, jeżeli roczna stopa procentowa wynosi 27%?
13.20. Młode małżeństwo kupując samochód zdecydowało, że przy zakupie zapłaci 16000zł, a pozostałą kwotę będzie płacić przez dwa lata w miesięcznych ratach po 900zł. Jaki będzie koszt samochodu na koniec okresu spłaty, jeżeli oprocentowanie miesięczne wynosi 4%?
13.21. Klientowi chcącemu kupić nowy typ telewizora zaproponowano zaciągnięcie na trzy lata kredytu w wysokości 3000zł. Jaka będzie roczna spłata kredytu, gdy roczna stopa procentowa wynosi 15%?
13.22. Kwotę 600zł pożyczoną na 30% rocznie należy oddać w trzech równych ratach wypłacanych co pół roku. Obliczyć wysokość raty.

14 Pochodne funkcji jednej zmiennej

Podstawowe własności i wzory, które wykorzystamy do obliczania pochodnych:
niech $f(x),\ g(x),\ h(x)-$ funkcje różniczkowalne w pewnym przedziale, $c \in \mathbb{R}$

1. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

2. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

3'. $[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \neq 0$

5. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

6. $(a)' = 0,\ a \in \mathbb{R}$

7. $(x^a)' = ax^{a-1},\ x > 0,\ a \in \mathbb{R}$

7'. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7''. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,\ \cos x \neq 0$

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x),\ \sin x \neq 0$

12. $(e^x)' = e^x$

13. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0$

14. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0$

15. $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0$

16. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$

17. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$

18. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$

19. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ 0 < \operatorname{arctg} x < \pi$

Symbol $\stackrel{i}{=}$ dla $i = 1, ..., 19$ - oznacza, że korzystamy ze wzoru numer i.

Przykład 93.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 5.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = (5x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 5)' \overset{2}{=} (5x^4)' + (2x^3)' - (x^2)' + (3x)' - (5)' \overset{1}{=}$
$= 5(x^4)' + 2(x^3)' - (x^2)' + 3(x)' - (5)' \overset{6,\,7}{=} 5 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 2x + 3 = 20x^3 + 6x^2 - 2x + 3.$

Przykład 94.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[5]{x}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[5]{x}\right)' = \left(2x^{-\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{5}}\right)' \overset{2}{=} \left(2x^{-\frac{2}{3}}\right)' - \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' \overset{1}{=} 2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' - \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' \overset{7}{=}$
$= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}.$

Przykład 95.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1).$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = [(x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1)]' \overset{3}{=} (x^2 - 2x + 1)' \cdot (x - 1) + (x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 1)' \overset{1,\,2,\,6,\,7}{=}$
$= (2x - 2) \cdot (x - 1) + (x^2 - 2x + 1) \cdot 1 = (2x^2 - 4x + 2) + (x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3.$

Przykład 96.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \sin x \cdot \ln x.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = [\sin x \cdot \ln x]' \overset{3}{=} (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)' \overset{8,\,14}{=} \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$

Przykład 97.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \cos x.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^x \cdot \cos x\right)' \overset{3'}{=} \left(x^2\right)' \cdot e^x \cdot \cos x + x^2 \cdot (e^x)' \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \cdot (\cos x)' \overset{7,\,9,\,12}{=}$
$= 2x \cdot e^x \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \cdot \cos x + x^2 \cdot e^x \cdot (-\sin x) = xe^x(2\cos x + x\cos x - x\sin x).$

Przykład 98.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)' \overset{4}{=} \frac{(x^2+2)' \cdot (x-1) - (x^2+2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \overset{2,\,6,\,7}{=} \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(2x^2-2x) - (x^2+2)}{(x-1)^2} =$
$= \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}.$

Przykład 99.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sin x + x}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sin x+x}\right)' \stackrel{4}{=} \frac{(\ln x)'\cdot(\sin x+x)-\ln x\cdot(\sin x+x)'}{(\sin x+x)^2} \stackrel{1,\,2,\,7,\,8,\,14}{=} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(\sin x+x)-\ln x\cdot(\cos x+1)}{(\sin x+x)^2}.$

Przykład 100.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = (3x+1)^7.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left[(3x+1)^7\right]' \stackrel{5,\,7}{=} 7\cdot(3x+1)^6\cdot(3x+1)' \stackrel{1,\,2,\,6,\,7}{=} 7\cdot(3x+1)^6\cdot 3 = 21(3x+1)^6.$

Przykład 101.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \sqrt{x^2+3}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)' \stackrel{5,\,7'}{=} \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+3}}\cdot\left(x^2+3\right)' \stackrel{2,\,6,\,7}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.$

Przykład 102.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = e^{\cos^2 x}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(e^{\cos^2 x}\right)' \stackrel{5,\,12}{=} e^{\cos^2 x}\cdot\left(\cos^2 x\right)' \stackrel{5,\,7}{=} e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\cdot(\cos x)' \stackrel{9}{=} e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) =$
$= -2\sin x\cos x\cdot e^{\cos^2 x} = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}.$

Przykład 103.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = \left(\sqrt[x]{3} + \frac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)' = \left(3^{\frac{1}{x}} + 2^{-5x} + 6^{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)' \stackrel{2}{=}$
$= \left(3^{\frac{1}{x}}\right)' + \left(2^{-5x}\right)' + \left(6^{\sqrt{x}}\right)' - \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)' \stackrel{5,\,13,\,18}{=}$
$= 3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' + 2^{-5x}\ln 2\cdot(-5x)' + 6^{\sqrt{x}}\ln 6\cdot\left(\sqrt{x}\right)' - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' \stackrel{1,\,7,\,7',\,7''}{=}$
$= 3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2^{-5x}\ln 2\cdot(-5) + 6^{\sqrt{x}}\ln 6\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{4}{4+x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2} - \frac{5\ln 2}{2^{5x}} + \frac{6^{\sqrt{x}}\ln 6}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{4+x^2}.$

Przykład 104.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x)).$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = (\ln(\ln(\ln x)))' \stackrel{5,\,14}{=} \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot(\ln(\ln x))' \stackrel{5,\,14}{=} \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' \stackrel{14}{=} \frac{1}{\ln(\ln x)}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} =$
$= \frac{1}{(\ln(\ln x))\cdot(\ln x)\cdot x}.$

Przykład 105.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \sin 2x \cdot \ln \sqrt{x+1}.$$

Rozwiązanie:

$f'(x) = \left(\sin 2x \cdot \ln \sqrt{x+1}\right)' \stackrel{3}{=} (\sin 2x)' \cdot \left(\ln \sqrt{x+1}\right) + \sin 2x \cdot \left(\ln \sqrt{x+1}\right)' \stackrel{5,\,8,\,14}{=}$
$= \cos 2x \cdot (2x)' \cdot \left(\ln \sqrt{x+1}\right) + \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{x+1}\right)' \stackrel{1,\,5,\,7,\,7'}{=}$
$= \cos 2x \cdot 2 \cdot \left(\ln \sqrt{x+1}\right) + \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x+1)' \stackrel{2,\,6,\,7}{=}$
$= 2\cos 2x \ln \sqrt{x+1} + \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1 = 2\cos 2x \ln \sqrt{x+1} + \frac{\sin 2x}{2(x+1)}.$

Przykład 106.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{1+a^2}(a \sin x - \cos x),\ a \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

$f'(x) = \left[\frac{e^{ax}}{1+a^2}(a \sin x - \cos x)\right]' = \left[\frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{1+a^2}\right]' \stackrel{1}{=} \frac{1}{1+a^2}\left[e^{ax}(a \sin x - \cos x)\right]' \stackrel{3}{=}$
$= \frac{1}{1+a^2}\left[\left(e^{ax}\right)'(a \sin x - \cos x) + e^{ax}(a \sin x - \cos x)'\right] \stackrel{1,\,2,\,5,\,12}{=}$
$= \frac{1}{1+a^2}\left[e^{ax}\,(ax)'\,(a \sin x - \cos x) + e^{ax}(a(\sin x)' - (\cos x)')\right] \stackrel{1,\,7,\,8,\,9}{=}$
$= \frac{1}{1+a^2}\left[e^{ax}a(a \sin x - \cos x) + e^{ax}(a \cos x + \sin x)\right] =$
$= \frac{1}{1+a^2}e^{ax}\left(a^2 \sin x - a \cos x + a \cos x + \sin x\right) =$
$= \frac{e^{ax}}{1+a^2}\left(a^2 \sin x + \sin x\right) = \frac{e^{ax}}{1+a^2} \cdot \sin x\left(a^2+1\right) = e^{ax} \sin x.$

Przykład 107.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Rozwiązanie:

$f'(x) = \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' \stackrel{2}{=} \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)' + \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' \stackrel{1,\,4,\,5,\,14}{=}$
$= -\frac{(\cos x)' \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot (\sin^2 x)'}{(\sin^2 x)^2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' \stackrel{5,\,7,\,9,\,10}{=}$
$= -\frac{-\sin x \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)'}{\sin^4 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \stackrel{1,\,7,\,8}{=}$
$= \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{1}{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{2}{\sin^3 x}.$

Przykład 108.
Obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = (\cos x)^x.$$

Rozwiązanie:

$f'(x) = \left[(\cos x)^x\right]' = \left(e^{\ln(\cos x)^x}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln \cos x}\right) \stackrel{5,\,12}{=} \left(e^{x \cdot \ln \cos x}\right) \cdot (x \cdot \ln \cos x)' \stackrel{3,\,5,\,9,\,14}{=}$
$= \left(e^{x \cdot \ln \cos x}\right) \cdot \left(\ln \cos x + x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x}\right) = (\cos x)^x(\ln \cos x - x \operatorname{tg} x).$

Przykład 109.
Obliczyć pochodne

$$f', \ \ f'', \ \ f'''$$

funkcji

$$f(x) = x \ln x.$$

Rozwiązanie:
Dla $x > 0$ otrzymujemy:
$f'(x) = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$
$f''(x) = [f'(x)]' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$
$f'''(x) = [f''(x)]' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Przykład 110.
Znaleźć wzór ogólny na pochodną n-tego rzędu funkcji

$$f(x) = \sin 2x.$$

Rozwiązanie:
$f'(x) = 2\cos 2x$
$f''(x) = -2^2 \sin 2x$
$f'''(x) = -2^3 \cos 2x$
$f^{(4)}(x) = 2^4 \sin 2x$.
Z postaci pierwszych czterech pochodnych funkcji f można wysnuć hipotezę

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n \sin 2x & \text{dla} \quad n = 4k \\ 2^n \cos 2x & \text{dla} \quad n = 4k+1 \\ -2^n \sin 2x & \text{dla} \quad n = 4k+2 \\ -2^n \cos 2x & \text{dla} \quad n = 4k+3 \end{cases}, \ \text{gdzie} \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Uzasadnienie tej hipotezy należy przeprowadzić metodą indukcji matematycznej. Nieskomplikowany dowód pomijamy.

ZADANIA:
Obliczyć pochodne danych funkcji:

14.1. $f(x) = \sin^2 3x$

14.2. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \cdot e^x$

14.3. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2 \sin 2x}$

14.4. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+4x-1}{-x^3+4x+7}}$

14.5. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x \cdot \ln x}$

14.6. $f(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{1+\ln x}$

14.7. $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$

14.8. $f(x) = e^{\sin 2x} \cdot \ln \frac{x^2-3}{4}$

14.9. $f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{x}}$

14.10. $f(x) = \frac{2}{2+\sin x}$

14.11. $f(x) = \frac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}}$

14.12. $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14.13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$

14.14. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\,\mathrm{tg}\, x$

14.15. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$

14.16. $f(x) = \ln(x^7 + 2x^3 - \sin x + \sqrt{x+1})$

14.17. $f(x) = \ln \frac{e^{3x-2+\frac{1}{x}}}{\sin(x^2-3)}$

14.18. $f(x) = \frac{\ln x^3 - \sin x}{\ln(x+1)}$

14.19. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

14.20. $f(x) = \mathrm{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$

14.21. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

14.22. $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arcsin} x$

14.23. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$

14.24. $f(x) = x \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

14.25. $f(x) = \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{x \cos 3x}{9}$

14.26. $f(x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$

14.27. $f(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$

14.28. $f(x) = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

14.29. $f(x) = 2\ln(e^x + 1) - x$

14.30. $f(x) = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}$

14.31. $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

14.32. $f(x) = \left[\frac{1-x^2}{2}\sin x - \frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right] e^{-x}$

14.33. $f(x) = \frac{(\ln 3)\sin x + \cos x}{3^x}$

14.34. $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$

14.35. $f(x) = \ln\sin\sqrt{\frac{\cos x}{\ln x}}$

14.36. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+x^2})$

14.37. $f(x) = \sin^2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$

14.38. $f(x) = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln\operatorname{tg} x$

14.39. $f(x) = \operatorname{ctg} 5x + \frac{\cos 2x}{3\sin^3 4x}$

14.40. $f(x) = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$

14.41. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}$

14.42. $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$

14.43. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$

14.44. $f(x) = \sin x\cos x(2\cos^2 x + 3) + 3x$

14.45. $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

14.46. $f(x) = \frac{\sin x}{5}\left(\frac{1}{\cos^5 x} + \frac{4}{3\cos^3 x}\right) + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x$

14.47. $f(x) = x^x$,

14.48. $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

14.49. $f(x) = (x^2+1)^{\sin 2x}$

14.50. $f(x) = (x^x)^{x^x}$,

14.51. $f(x) = \log_x(\cos x)$,

14.52. $f(x) = \log_{\sin x}(\sqrt[x]{5})$

14.53. Obliczyć drugą pochodną funkcji f w punkcie $x_0 = 0$, jeżeli:

a) $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$

b) $f(x) = \ln\sqrt{x+5}$

14.54. Dla jakiej wartości parametru k zachodzi nierówność $f'''(2) \geqslant 0$?

a) $f(x) = 5kx^5 + (k-1)x^4 + 2$

b) $f(x) = \frac{e^{4kx}}{k}$

c) $f(x) = \frac{x^2+k}{x}$

14.55. Znaleźć wzór ogólny na pochodną n-tego rzędu funkcji f:

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = x\ln x$

14.56. Sprawdzić, czy funkcja f spełnia dane równanie:

a) $f(x) = \cos 2x$, $\quad \frac{f^{(5)}(x) - f^{(4)}(x)}{4} = f^{(2)}(x) - f^{(3)}(x)$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\quad x^5 f^{(3)}(x) - 2x^7 f'(x) = 6x - 2x^5$.

15 Ekstrema funkcji

Przykład 111.
Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji i punkty nieciągłości
$D_f = \{x : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)' = \frac{(x^3+4)'\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4-8x}{x^4}$.
3. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^4-8x}{x^4} = 0 \Longleftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Longleftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x = 0 \notin D_f \vee x = 2 \vee x^2 + 2x + 4 = 0$.
Równanie $x^2 + 2x + 4 = 0$ jest sprzeczne ($\triangle = -12 < 0$), czyli nie posiada rozwiązań. Jedynym punktem krytycznym, w którym funkcja f może mieć ekstremum jest punkt $x = 2$.
4. Badamy znak pierwszej pochodnej, monotoniczność funkcji f
$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x^4-8x}{x^4} > 0 \Longleftrightarrow x^4 - 8x > 0 \Longleftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$,
$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow \frac{x^4-8x}{x^4} < 0 \Longleftrightarrow x^4 - 8x < 0 \Longleftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4) < 0 \Longleftrightarrow x \in (0; 2)$.

Funkcja jest rosnąca na przedziale $(-\infty; 0)$ i na przedziale $(2; \infty)$, natomiast malejąca na przedziale $(0; 2)$.
5. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f
dla $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = 2$ pierwsza pochodna zmienia znak z $-$ na $+$)

$$f_{min}(2) = 3.$$

Przykład 112.
Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji i punkty nieciągłości:
$D_f = \mathbb{R}$.
2. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^{-x}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}$.
3. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = 0 \Longleftrightarrow x(2-x)e^{-x} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee e^{-x} = 0$.
Równanie $e^{-x} = 0$ jest sprzeczne. Punktami krytycznymi, w których funkcja f może mieć ekstremum są punkty $x = 0$ oraz $x = 2$.
4. Badamy znak pierwszej pochodnej, monotoniczność funkcji f
$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x(2-x)e^{-x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (0; 2)$,
$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} < 0 \Longleftrightarrow x(2-x)e^{-x} < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.
Funkcja jest rosnąca na przedziale $(0; 2)$, natomiast malejąca na przedziale $(-\infty; 0)$ i na przedziale $(2; \infty)$.
5. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f
dla $x = 0$ funkcja f osiąga minimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = 0$ pierwsza pochodna zmienia znak z $-$ na $+$)

$$f_{min}(0) = 0,$$

dla $x = 2$ funkcja f osiąga maksimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = 2$ pierwsza pochodna zmienia znak z $+$ na $-$):

$$f_{max}(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}.$$

Przykład 113.
Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji i punkty nieciągłości
$D_f = \{x : x > 0\} = \mathbb{R}_+$.
2. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(x^2 \cdot \ln x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$.
3. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Longleftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \notin D_f \vee \ln x = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Jedynym punktem krytycznym, w którym funkcja f może mieć ekstremum jest punkt $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
4. Badamy znak pierwszej pochodnej, monotoniczność funkcji f
$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x \ln x + x > 0 \Longleftrightarrow x(2 \ln x + 1) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$,

$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow 2x \ln x + x < 0 \Longleftrightarrow x(2 \ln x + 1) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Funkcja jest rosnąca na przedziale $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty\right)$, natomiast malejąca na przedziale $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

5. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f

dla $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ funkcja f osiąga minimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ pierwsza pochodna zmienia znak z $-$ na $+$)

$$f_{min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}.$$

Przykład 114.

Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą (ekstrema globalne) funkcji:

$$f(x) = x^5 \cdot e^{-x^4}$$

na przedziale:

$$[-1, 1].$$

Rozwiązanie:

1. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f

$f'(x) = \left(x^5 \cdot e^{-x^4}\right)' = \left(x^5\right)' \cdot e^{-x^4} + x^5 \cdot \left(e^{-x^4}\right)' = 5x^4 \cdot e^{-x^4} + x^5 \cdot e^{-x^4} \cdot \left(-4x^3\right) = 5x^4 e^{-x^4} - 4x^8 e^{-x^4}$.

2. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 5x^4 e^{-x^4} - 4x^8 e^{-x^4} = 0 \Longleftrightarrow x^4 e^{-x^4}(5 - 4x^4) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$.

Punkty $x = \pm\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$ nie należą do przedziału $[-1, 1]$.

Należy policzyć wartość funkcji f w punkcie krytycznym $x = 0$ i na brzegach przedziału w punktach $x = -1$ i $x = 1$

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = -e^{-1}, \quad f(1) = e^{-1}.$$

Wartość najmniejsza funkcji (minimum globalne) wynosi $-e^{-1}$ i jest osiągana w punkcie $x = -1$, a największa (maksimum globalne) wynosi e^{-1} i jest osiągana w punkcie $x = 1$.

ZADANIA:

Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji:

15.1.	$f(x) = 1 + 60x - 46x^2 + 12x^3 - x^4$	**15.2.**	$f(x) = x - \sqrt{x}$
15.3.	$f(x) = (1-x)^4 + 4x + 2$	**15.4.**	$f(x) = x^3(3x - 8)$
15.5.	$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 3x$	**15.6.**	$f(x) = x + x^3 + x^5$
15.7.	$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	**15.8.**	$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$
15.9.	$f(x) = x + \sin x$	**15.10.**	$f(x) = \sin x + \cos x$
15.11.	$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}$	**15.12.**	$f(x) = 3x + 2\sin x$
15.13.	$f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$	**15.14.**	$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+4}$
15.15.	$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$	**15.16.**	$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$
15.17.	$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$	**15.18.**	$f(x) = \frac{x^3+x}{x^4+x^2+1}$
15.19.	$f(x) = \frac{(x+2)^4}{(x+1)^3}$	**15.20.**	$f(x) = x\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji na podanym zbiorze:

15.21.	$f(x) = x^3 - 3x,\ \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$	**15.22.**	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 6,\ [-2, 2]$
15.23.	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5,\ [-4, 4]$	**15.24.**	$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x,\ [-2, 2]$
15.25.	$f(x) = 3\sqrt{x} + 1,\ [0, 4]$	**15.26.**	$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)},\ [0, 2\pi]$
15.27.	$f(x) = \frac{1}{x^2-1},\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$	**15.28.**	$f(x) = \frac{2}{\cos x},\ \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
15.29.	$f(x) = x - \operatorname{tg} x,\ \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$	**15.30.**	$f(x) = x - \sin 2x,\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

16 Badanie funkcji

Przykład 115.
Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji
$D_f = \mathbb{R}$.
2. Badamy istnienie asymptot
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$
Istnieje asymptota pozioma o równaniu

$$y = 0.$$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+x^3} = 0, \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

$$y = ax + b = 0.$$

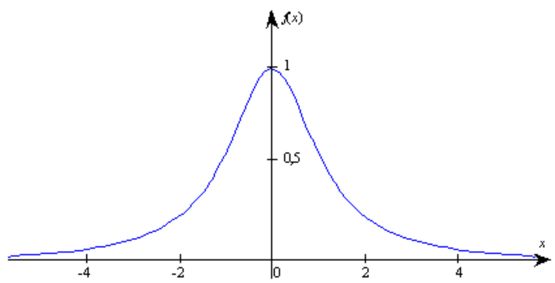
Asymptota ukośna pokrywa się z asymptotą poziomą.
3. Wyznaczamy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych
- z osią OX: $f(x) = 0 \iff \frac{1}{1+x^2} = 0$ (równanie sprzeczne),
- z osią OY: dla $x = 0$ z równania funkcji otrzymujemy $f(0) = 1$.
Zatem wykres funkcji nie przecina osi OX, natomiast oś OY przecina w punkcie $(0, 1)$.
4. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{(1)'\cdot(1+x^2)-(1)\cdot(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$
5. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji $f(x)$
$f'(x) = 0 \iff -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0.$
Jedynym punktem krytycznym, w którym funkcja f może mieć ekstremum jest punkt $x = 0$.
6. Badamy znak pierwszej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji f
$f'(x) > 0 \iff -\frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0 \iff x \in (-\infty; 0),$
$f'(x) < 0 \iff -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0 \iff -2x < 0 \iff x > 0 \iff x \in (0; \infty).$
Funkcja jest rosnąca na przedziale $(-\infty; 0)$, natomiast malejąca na przedziale $(0; \infty)$.
7. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f
dla $x = 0$ funkcja f osiąga maksimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = 0$ pierwsza pochodna zmienia znak z $+$ na $-$)

$$f_{max}(0) = 1.$$

8. Wyznaczamy drugą pochodną funkcji f
$f''(x) = (f'(x))' = \left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]' = \frac{(-2x)'\cdot[(1+x^2)^2]-(-2x)\cdot[(1+x^2)^2]'}{(1+x^2)^4} = \frac{2(1+x^2)(3x^2-1)}{(1+x^2)^4}.$
9. Wyznaczamy punkty, w których druga pochodna jest równa 0
$f''(x) = 0 \iff \frac{2(1+x^2)(3x^2-1)}{(1+x^2)^4} = 0 \iff (1+x^2) = 0 \vee (3x^2-1) = 0 \iff$
$\iff x \in \emptyset \vee x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$
10. Badamy znak drugiej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji f
$f''(x) > 0 \iff \frac{2(1+x^2)(3x^2-1)}{(1+x^2)^4} > 0 \iff 2(1+x^2)(3x^2-1) > 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right),$
$f''(x) < 0 \iff \frac{2(1+x^2)(3x^2-1)}{(1+x^2)^4} < 0 \iff 2(1+x^2)(3x^2-1) < 0 \iff x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$
Funkcja f jest wypukła na przedziale $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ i na przedziale $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$, natomiast wklęsła na

przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
11. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji f
Punktami przegięcia funkcji f są punkty $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (druga pochodna zeruje się w tych punktach i zmienia znak w ich otoczeniu).
12. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	∞
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0



Rysunek 10: Wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Przykład 116.
Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji
$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
2. Badamy istnienie asymptot:
$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty,$
$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty,\qquad \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty.$
Istnieją dwie asymptoty pionowe obustronne o równaniach

$$x=-1\ \text{ i }\ x=1.$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\infty,\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty.$
Nie istnieje asymptota pozioma.
$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1,\qquad b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0,$

$$y=ax+b=x.$$

Istnieje asymptota ukośna o równaniu

$$y=x.$$

3. Wyznaczamy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych
- z osią OX: $\quad f(x)=0\Longleftrightarrow\frac{x^3}{x^2-1}=0\Longleftrightarrow x=0.$

- z osią OY: dla $x = 0$ z równania funkcji otrzymujemy $f(0) = 0$.
Zatem wykres funkcji przecina obie osie układu współrzędnych w punkcie $(0, 0)$.
4. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.
5. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji f
$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \iff x^2(x^2-3) = 0 \iff x = 0 \lor x = -\sqrt{3} \lor x = \sqrt{3}$.
Punktami krytycznymi, w których funkcja f może mieć ekstremum, są punkty

$$x = 0, \quad x = -\sqrt{3} \ \text{ i } \ x = \sqrt{3}.$$

6. Badamy znak pierwszej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji f
$f'(x) > 0 \iff \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} > 0 \iff x^2(x^2-3)(x^2-1)^2 > 0 \iff x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$,
$f'(x) < 0 \iff \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} < 0 \iff x^2(x^2-3)(x^2-1)^2 < 0 \iff$
$\iff x \in \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left(1; \sqrt{3}\right)$.
Funkcja jest rosnąca na przedziale $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$ i na przedziale $\left(\sqrt{3}; \infty\right)$, natomiast malejąca na przedziałach $\left(-\sqrt{3}; -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i na przedziale $\left(1; \sqrt{3}\right)$.
7. Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f
dla $x = -\sqrt{3}$ funkcja f osiąga maksimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = -\sqrt{3}$ pierwsza pochodna zmienia znak z $+$ na $-$),

$$f_{max}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

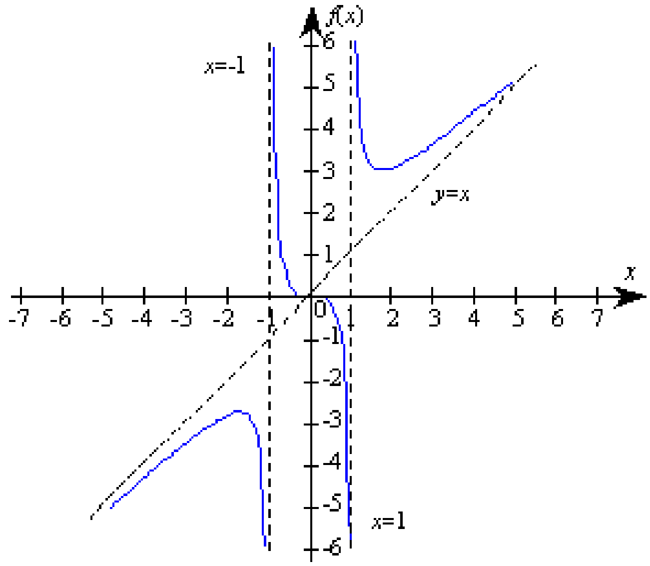
natomiast dla $x = \sqrt{3}$ funkcja f osiąga minimum lokalne (w otoczeniu punktu $x = \sqrt{3}$ pierwsza pochodna zmienia znak z $-$ na $+$),

$$f_{min}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

dla $x = 0$ funkcja nie osiąga ekstremum lokalnego (w otoczeniu punktu $x = 0$ pierwsza pochodna nie zmienia znaku).
8. Wyznaczamy drugą pochodną funkcji f
$f''(x) = (f'(x))' = \left[\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right]' = \frac{[x^2(x^2-3)]'(x^2-1)^2 - x^2(x^2-3)[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4} =$
$= \frac{[2x(x^2-3) + x^2 \cdot 2x](x^2-1)^2 - x^2(x^2-3) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$.
9. Wyznaczamy punkty, w których druga pochodna jest równa 0
$f''(x) = 0 \iff \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = 0 \iff 2x(x^2+3)(x^2-1) = 0 \iff$
$\iff x = 0 \lor x = -1 \notin D_f \lor x = 1 \notin D_f$.
10. Badamy znak drugiej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji f
$f''(x) > 0 \iff \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} > 0 \iff 2x(x^2+3)(x^2-1)(x^2-1)^4 > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$,
$f''(x) < 0 \iff \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} < 0 \iff 2x(x^2+3)(x^2-1)(x^2-1)^4 < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
Funkcja f jest wypukła na przedziale $(-1, 0)$ i na przedziale $(1, \infty)$, natomiast wklęsła na przedziale $(-\infty, -1)$ i na przedziale $(0, 1)$.
11. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji f
Punktem przegięcia funkcji f jest punkt $x = 0$ (druga pochodna zeruje się w tym punkcie i zmienia znak w jego otoczeniu).
12. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	N	$+$	0	$-$	N	$+$	$+$	$+$	∞
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	N	$-$	$-$	$-$	N	$-$	0	$+$	1
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	N	$\searrow$	0	$\searrow$	N	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	∞

N oznacza, że funkcja jest nieokreślona w tym punkcie.



Rysunek 11: Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Przykład 117.
Zbadać przebieg zmienności funkcji:

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy dziedzinę naturalną funkcji
$D_f = \mathbb{R}$.
2. Badamy istnienie asymptot:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0.$
Istnieje asymptota pozioma o równaniu

$$y = 0.$$

$a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0, \qquad b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,$

$$y = ax + b = 0.$$

Asymptota ukośna pokrywa się z asymptotą poziomą.
3. Wyznaczamy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych
- z osią OX : $f(x) = 0 \iff xe^{-x^2} = 0 \iff x = 0$,
- z osią OY : dla $x = 0$ z równania funkcji otrzymujemy $f(0) = 0$.
Zatem wykres funkcji przecina obie osie układu współrzędnych w punkcie $(0, 0)$.
4. Wyznaczamy pierwszą pochodną funkcji f
$f'(x) = \left(xe^{-x^2}\right)' = (x)' \cdot e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} =$
$= \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2}.$
5. Wyznaczamy punkty krytyczne funkcji $f(x)$

$f'(x) = 0 \iff (1-2x^2)e^{-x^2} = 0 \iff (1-2x^2) = 0 \iff x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Punktami krytycznymi, w których funkcja f może mieć ekstremum, są punkty

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Badamy znak pierwszej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji f
$f'(x) > 0 \iff (1-2x^2)e^{-x^2} > 0 \iff (1-2x^2) > 0 \iff x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$f'(x) < 0 \iff (1-2x^2)e^{-x^2} < 0 \iff (1-2x^2) < 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$.
Funkcja jest rosnąca na przedziale $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, natomiast malejąca na przedziale $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i na przedziale $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$.
7. Wyznaczamy drugą pochodną funkcji f
$f''(x) = (f'(x))' = \left[(1-2x^2)e^{-x^2}\right]' = (1-2x^2)' \cdot e^{-x^2} + \left(1-2x^2\right)\left(e^{-x^2}\right)' =$
$= -4xe^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = e^{-x^2}\left(-2x + 4x^3 - 4x\right) = e^{-x^2}\left(4x^3 - 6x\right) = 2x\left(2x^2 - 3\right)e^{-x^2}$.
8. Wyznaczamy punkty, w których druga pochodna jest równa 0
$f''(x) = 0 \iff 2x(2x^2-3)e^{-x^2} = 0 \iff 2x = 0 \vee (2x^2-3) = 0 \vee e^{-x^2} = 0 \iff$
$\iff x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2} \vee x \in \emptyset \iff x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
9. Badamy znak drugiej pochodnej, aby wyznaczyć przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji f
$f''(x) > 0 \iff 2x(2x^2-3)e^{-x^2} > 0 \iff 2x(2x^2-3) > 0 \iff x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$,
$f''(x) < 0 \iff 2x(2x^2-3)e^{-x^2} < 0 \iff 2x(2x^2-3) < 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
Funkcja jest wypukła na przedziale $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; 0\right)$ i na przedziale $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$, natomiast wklęsła na przedziale $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ i na przedziale $\left(0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.
10. Wyznaczamy punkty przegięcia funkcji f
Punktami przegięcia funkcji f są punkty

$$x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, \;\; x = 0 \text{ i } x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(druga pochodna zeruje się w tych punktach i zmienia znak w ich otoczeniu).
11. Z drugiego warunku wystarczającego wyznaczamy ekstrema funkcji f
$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0;$
funkcja f w punkcie $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ osiąga minimum lokalne

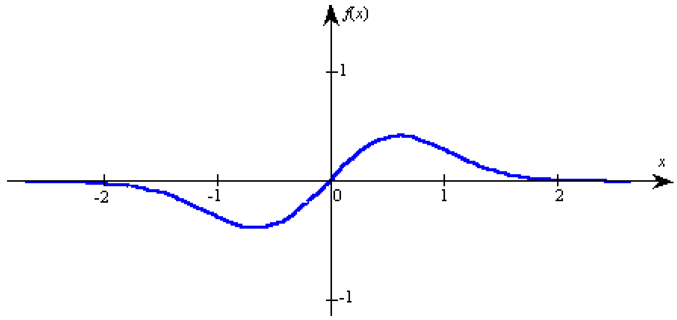
$$f_{min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}};$$

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 0;$
funkcja f w punkcie $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ osiąga maksimum lokalne:

$$f_{max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}.$$

12. Układamy tabelkę przebiegu zmienności danej funkcji:

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$	∞
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{3}{2e^3}}$	$\searrow$	0



Rysunek 12: Wykres funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$.

ZADANIA:
Zbadać przebieg zmienności danych funkcji w ich dziedzinach naturalnych:

16.1. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

16.2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

16.3. $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

16.4. $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$

16.5. $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

16.6. $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

16.7. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

16.8. $f(x) = x^2 e^{-x}$

16.9. $f(x) = x^3 e^{-x}$

16.10. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

16.11. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$

16.12. $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

16.13. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

16.14. $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

16.15. $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$

16.16. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

16.17. $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

16.18. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{x}{2}$

16.19. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

16.20. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16.21. $f(x) = (x^2 + 3)e^x$

16.22. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

16.23. $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2-4}}$

16.24. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

16.25. $f(x) = 2x + \sin x$

16.26. $f(x) = (6 + x)\sqrt{1 - x}$

16.27. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x-1}$

16.28. $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$

16.29. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

16.30. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

17 Zastosowanie pochodnych

Przykład 118.
W pewnej firmie ustalono, że koszt całkowity produkcji margaryny (wyrażony w tys. zł) zależy od wielkości produkcji w następujący sposób

$$K(x) = 21x^3 + 4x^2 + 100.$$

O ile wzrośnie koszt, jeżeli produkcję zwiększymy o jedną jednostkę w stosunku do poziomu wyjściowego $x_0 = 10$ tys. sztuk margaryny.
Rozwiązanie:
Miarą prędkości zmian wartości funkcji kosztu w punkcie x_0 jest granica

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{K(x_0 + \triangle x) - K(x_0)}{\triangle x} = K'(x_0)$$

nazywana kosztem krańcowym. Ponieważ

$$\triangle K = K(x_0 + \triangle x) - K(x_0) \approx K'(x_0)\triangle x,$$

więc dla $\triangle x = 1$ otrzymujemy

$$\triangle K = K'(x_0),$$

co oznacza, że zwiększenie produkcji o jedną jednostkę w stosunku do poziomu wyjściowego x_0 powoduje zwiększenie kosztów produkcji o $K'(x_0)$.
Zatem koszt krańcowy przy poziomie produkcji x_0 w przybliżeniu jest równy kosztowi wyprodukowania dodatkowej jednostki produktu.
$K'(x) = 63x^2 + 8x$,
$K'(10) = 63 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 = 6380$.
Jeżeli produkcję zwiększymy o jedną jednostkę, to koszt wzrośnie o 6380 tys. zł.

Przykład 119.
Funkcja kosztu całkowitego produkcji i sztuk naczyń ceramicznych ma postać

$$K(i) = \ln(i^2 + 2).$$

Dzienna produkcja naczyń wynosi 1500 sztuk. Jak zmieni się dzienny koszt całkowity, jeżeli produkcję zwiększymy o 1%.
Rozwiązanie:
Granicę

$$\lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{f(x)} : \frac{\triangle x}{x} \right) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

nazywamy elastycznością funkcji i oznaczamy symbolem $E_x f$. Elastyczność funkcji f w punkcie x_0 jest przybliżoną miarą procentowego przyrostu wartości funkcji odpowiadającego przyrostowi wartości argumentu o 1% w odniesieniu do poziomu wyjściowego x_0.
Obliczamy elastyczność funkcji kosztu w punkcie $i = 1500$ sztuk.
$E_i K = \frac{i}{K(i)} \cdot K'(i)$,
$K'(i) = \frac{2i}{i^2+2}$,
$E_{i=1500} K = \frac{1500}{K(1500)} \cdot K'(1500) = \frac{1500}{\ln((1500)^2+2)} \cdot \frac{2 \cdot 1500}{(1500)^2+2} \approx 0,137$.
Zatem jeżeli produkcja wzrośnie o 1%, to koszt całkowity wzrośnie o 0,137%.

Przykład 120.
Całkowity koszt produkcji w pewnej firmie wyraża funkcja

$$K(i) = i^3 - 8i^2 + 20i,$$

gdzie $i-$ wielkość produkcji(w tys. sztuk). Wyznaczyć wielkość produkcji minimalizującą koszt jednostkowy. Podać wartość kosztu jednostkowego oraz całkowitego przy tej wielkości produkcji.
Rozwiązanie:
Wyznaczamy funkcję kosztu jednostkowego $(KJ(i))$

$$KJ(i) = \frac{K(i)}{i} = \frac{i^3 - 8i^2 + 20i}{i} = i^2 - 8i + 20.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum
$KJ'(i) = 2i - 8$,
$KJ'(i) = 0 \Longleftrightarrow 2i - 8 = 0 \Longleftrightarrow i = 4$.
Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum dla produkcji $i = 4$

$$KJ''(i) = 2 \Longrightarrow KJ''(4) = 2 > 0,$$

czyli przy produkcji $i = 4$ koszt jednostkowy jest minimalny. Obliczamy wartość kosztu jednostkowego oraz wartość kosztu całkowitego przy tej produkcji

$$KJ_{min} = KJ(4) = 4, \text{ zaś } K(4) = 16.$$

Przykład 121.
Całkowity koszt produkcji i sztuk pewnego towaru wyraża funkcja

$$K(i) = 3i^2 + 20i + 120,$$

natomiast funkcja popytu na ten towar ma postać

$$PP(c) = 100 - c,$$

gdzie $c-$ cena towaru. Wyznaczyć maksymalny zysk oraz odpowiadającą mu wielkość produkcji, zakładając że cała produkacja zostanie sprzedana.
Rozwiązanie:
Ponieważ

$$PP(c) = i, \;\; \text{więc} \;\; 100 - c = i \Longleftrightarrow c = 100 - i.$$

Wyznaczamy funkcję dochodu

$$D(i) = i \cdot c = i(100 - i) = 100i - i^2,$$

czyli funkcja zysku ma postać

$$Z(i) = D(i) - K(i) = (100i - i^2) - (3i^2 + 20i + 120) = -4i^2 + 80i - 120.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum
$Z'(i) = -8i + 80,$
$Z'(i) = 0 \Longleftrightarrow -8i + 80 = 0 \Longleftrightarrow i = 10.$
Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum w punkcie $i = 10$

$$Z''(i) = -8 \Longrightarrow Z''(10) = -8 < 0,$$

czyli zysk jest maksymalny przy produkcji 10 sztuk i wynosi

$$Z_{max} = Z(10) = 280.$$

Przykład 122.
Koszt wykonania pewnej pracy jest funkcją liczby pracujących przy niej osób

$$K(x) = 0,003x^2 - 0,216 \ln x + 5.$$

Jaka liczba pracowników minimalizuje koszt wykonania pracy i ile on wtedy wynosi?
Rozwiązanie:
Dziedziną praktyczną funkcji jest zbiór

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

Wyznaczamy pochodną funkcji $K(x)$

$$K'(x) = 0,006x - \frac{0,216}{x}.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum
$K'(x) = 0 \Longleftrightarrow 0,006x - \frac{0,216}{x} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 36 \Longleftrightarrow x = 6 \vee x = -6 \notin D.$
Badamy warunek wystarczający istnienia ekstremum w punkcie $x = 6$

$$K''(x) = 0,006 + \frac{0,216}{x^2} \Longrightarrow K''(6) = 0,012 > 0,$$

czyli koszt jest minimalny przy zatrudnieniu 6 pracowników i wynosi

$$K_{min} = K(6) = 5,108 - 0,216 \ln 6 \approx 4,72.$$

Przykład 123.
Liczbę 30 rozłożyć na sumę takich dwóch składników, których suma kwadratów jest najmniejsza.
Rozwiązanie:
Niech $x-$ pierwszy składnik, wówczas drugi składnik wynosi $30 - x$ $(x \in (0, 30))$.
Tworzymy sumę kwadratów tych składników

$$S(x) = x^2 + (30 - x)^2 = 2x^2 - 60x + 900.$$

Wyznaczamy pochodną funkcji sumy

$$S'(x) = 4x - 60.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum

$$S'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4x - 60 = 0 \Longleftrightarrow x = 15.$$

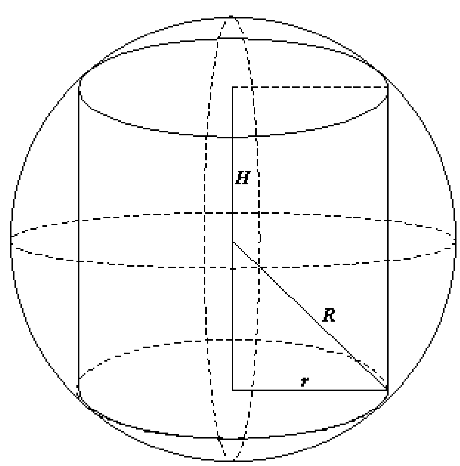
Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum dla $x = 15$

$$S''(x) = 4 \Longrightarrow S''(15) = 4 > 0,$$

czyli przy podziale liczby 30 na dwie równe części, po 15 każda, suma kwadratów tych liczb będzie najmniejsza, równa

$$S_{min} = S(15) = 450.$$

Przykład 124.
W kulę o promieniu R wpisano walec obrotowy. Obliczyć przy jakiej wartości promienia podstawy walca r jego pole powierzchni bocznej S będzie największe.
Rozwiązanie:



Rysunek 13: Walec wpisany w kulę.

Powierzchnia boczna walca wyraża się wzorem

$$S = 2\pi r H,$$

gdzie $r-$ promień podstawy, $H-$ wysokość.
Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość walca przy pomocy promienia kuli R i promienia podstawy walca r

$$\left(\frac{1}{2}H\right)^2 + r^2 = R^2 \Longrightarrow H = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Tworzymy funkcję wyrażającą zależność między powierzchnią boczną S walca a promieniem podstawy r

$$S(r) = 2\pi rH = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}, \text{ gdzie } r \in (0, R).$$

Wyznaczamy pochodną funkcji pola powierzchni bocznej walca S

$$S'(r) = 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum

$$S'(r) = 0 \iff 4\pi\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{4\pi r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \iff r = \pm\frac{\sqrt{2}R}{2} \wedge r \in (0, R) \iff r = \frac{\sqrt{2}R}{2}.$$

Sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum dla $r = \frac{\sqrt{2}R}{2}$

$$S''(r) = \frac{8\pi r^3 - 12\pi R^2 r}{(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2}} \Longrightarrow S''\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = -16\pi < 0,$$

czyli funkcja pola powierzchni bocznej walca S osiąga maksimum dla

$$r = \frac{\sqrt{2}R}{2}.$$

Wyznaczamy wartość maksymalnego pola

$$S_{max} = S\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\right) = 2\pi R^2.$$

ZADANIA:

17.1. Biuro turystyczne Itaka stwierdziło, że popyt na wycieczki zagraniczne zależy od ceny wycieczki w następujący sposób

$$PP(c) = \left(\frac{4900 - c^2}{100}\right)^3,$$

gdzie c cena jednego dnia pobytu. Jak zmieni się popyt, jeżeli cena wzrośnie o jedną jednostkę w stosunku do ceny wyjściowej $c_0 = 50$ zł.

17.2. Pewien lokal gastronomiczny postanowił wypiekać i sprzedawać zapiekanki. Seria próbna liczyła $i = 5$ sztuk. O ile wzrośnie zysk, jeżeli zostanie sprzedana jeszcze jedna zapiekanka. Funkcja zysku ma postać

$$Z(i) = \frac{2i^2}{i+1}.$$

17.3. Wyznaczyć elastyczność funkcji popytu na mydło firmy Irys w zależności od ceny c jednej sztuki gdy

$$P(c) = \frac{200 + c}{c + 1}.$$

17.4. Wyznaczyć, o ile wzrośnie koszt produkcji i sztuk opakowań pałeczek nawozowych do roślin doniczkowych, w odniesieniu do poziomu wyjściowego $i_0 = 3$, jeżeli produkcja wzrośnie o 1%

$$K(i) = \sqrt{i^5 + 2}.$$

17.5. W pewnej piekarni ustalono, że zysk uzyskany ze sprzedaży pieczywa francuskiego kształtuje się w zależności od ilości upieczonych i sprzedanych bułeczek x w następujący sposób

$$Z(x) = x^{0,25}.$$

Jak zmieni się wartość zysku, jeżeli produkcja wzrośnie o 1%?
17.6. Pewien ogrodnik oszacował, że dochód uzyskany ze sprzedaży i sztuk róż jest następujący

$$D(i) = \frac{0,25i^4 + 900i^2 + 100000i}{i^2 + 3600},$$

natomiast koszt uprawy wyraża funkcja

$$K(i) = \frac{i^2}{4}.$$

Kiedy zysk uzyskany ze sprzedaży róż będzie największy?
17.7. Popyt na karty pocztowe zależy od ich ceny jednostkowej c w następujący sposób

$$PP(c) = 1000\sqrt{10 - 0,2c^2}.$$

Przy jakiej cenie dochód będzie optymalny?
17.8. Zysk uzyskany ze sprzedaży i sztuk atlasów Polski przedstawia funkcja

$$Z(i) = 6i + 10,$$

natomiast koszt wyprodukowania i atlasów jest następujący

$$K(i) = -0,41i^2 + 35i + 300.$$

Wyznaczyć przy jakiej wielkości sprzedaży, dochód będzie największy, zakładając że cała produkcja zostanie sprzedana.
17.9. Ilość sprzedanych lodów zależy od temparatury powietrza t w następujący sposób

$$I(t) = 100e^{-0,002(t-30)^2}.$$

Jaka temperatura maksymalizuje ilość sprzedanych lodów?
17.10. W pewnej firmie stwierdzono, że wydajność pracy zależy od wieku pracowników x, w następujący sposób

$$W(x) = 0,05xe^{-\frac{x^2}{2048}}.$$

Jaki wiek maksymalizuje wydajność pracy?
17.11. Pewna fabryka samochodów osobowych zaprojektowała nowy model samochodu i na podstawie analizy rynku oszacowała, że popyt na ten właśnie model będzie kształtował się w zależności od czasu sprzedaży t (w miesiącach) w następujący sposób

$$PP(t) = -20(t + 10)(t + 0,5)(t - 6).$$

Po jakim czasie popyt na nowy model samochodu będzie optymalny?
17.12. Pewna firma dokonała oszacowania zależności odsetka produkcji wadliwej y od stażu pracy pracowników x wyrażonej w latach

$$y = \frac{(0,1x - 1)(0,2x - 2)}{\sqrt{7x + 14}} + 0,002.$$

Jaki staż pracy pracowników minimalizuje odsetek produkcji wadliwej?
17.13. Na każdej stronicy książki część zadrukowana ma zajmować 384cm^2. Margines dolny i górny mają mieć po 3cm, a boczne po 2cm. Jakie powinny być wymiary stronic, aby na książkę zużyć jak najmniej papieru?
17.14. Okno ma kształt prostokąta zakończonego półkolem. Obwód całego okna jest równy $4 + \pi$. Jakie powinny być wymiary części prostokątnej, aby okno przepuszczało jak najwięcej światła?
17.15. Fabryka produkuje puszki w kształcie walca o pojemności 1,1dm^3. Jedną z podstaw puszki wykonuje się z blachy o 20% droższej od blachy używanej do wykonania reszty puszki. Na wycięcie koła o promieniu r zużywa się $4r^2$ blachy. Jakie wymiary powinna mieć puszka, aby koszt jej produkcji był najmniejszy?
17.16. Puszka do konserw w postaci walca o pojemności 54π ma być tak wykonana, aby została zużyta minimalna ilość blachy. Wyznaczyć wymiary puszki.

18 Funkcje wielu zmiennych. Wykresy, warstwice i obrazy

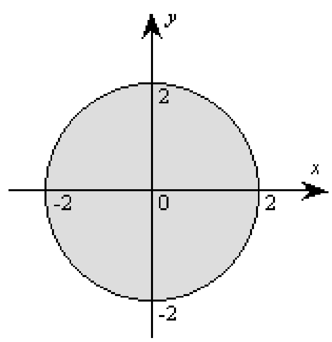
Przykład 125.
Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Rozwiązanie:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Dziedziną funkcji f jest koło o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu równym 2.



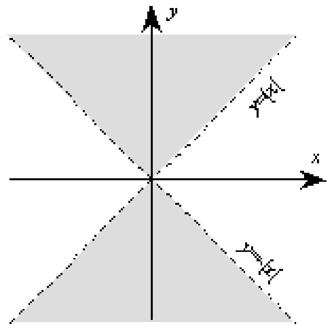
Rysunek 14: Wykres koła $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Przykład 126.
Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji

$$f(x, y) = \ln(y^2 - x^2).$$

Rozwiązanie:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > |x|\}.$$



Rysunek 15: Wykres obszaru $|y| > |x|$.

Przykład 127.
Wyznaczyć warstwice funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Rozwiązanie:
Warstwice tej funkcji opisuje równanie

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = a, \quad a \geqslant 0.$$

Po przekształceniu

$$x^2 + y^2 = 9 - a^2 \ \text{ i } \ a \in [0, 3],$$

gdyż dla $a > 3$ warstwice są zbiorami pustymi. Warstwicami tej funkcji są okręgi o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $R = \sqrt{9 - a^2}$, $\ a \in [0, 3]$.

Przykład 128.
Wyznaczyć warstwice funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y + 5.$$

Rozwiązanie:
Warstwice tej funkcji opisuje równanie

$$x^2 + y + 5 = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Po przekształceniu

$$y = -x^2 + a - 5.$$

Warstwicami tej funkcji są parabole o wierzchołku w punkcie $(0, a - 5)$, $\ a \in \mathbb{R}$.

Przykład 129.
Wyznaczyć warstwice funkcji

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Rozwiązanie:
Warstwice tej funkcji opisuje równanie

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a, \quad a \geqslant 0.$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Warstwicami tej funkcji są sfery o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu $a \geqslant 0$.

Przykład 130.
Narysować wykres funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1.$$

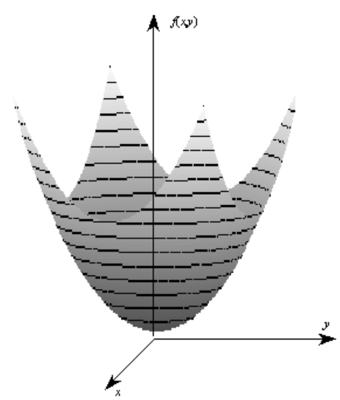
Rozwiązanie:
Warstwice tej funkcji opisuje równanie

$$x^2 + y^2 + 1 = a, \quad a \geqslant 1.$$

Po przekształceniu

$$x^2 + y^2 = a - 1 \text{ i } a \geqslant 1.$$

Warstwicami tej funkcji są okręgi o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $R = \sqrt{a-1}, \quad a \geqslant 1$.
Wykresem funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ jest paroboloida o wierzchołku w punkcie $(0, 0, 1)$.



Rysunek 16: Wykres funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Przykład 131.
Przedstawić podane równanie w postaci paramertycznej

$$6x - 2y = 14.$$

Rozwiązanie:
Równania to opisuje prostą. Ogólne równanie prostej ma postać

$$Ax + By + C = 0.$$

Parametryzacja prostej jest następująca

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -\frac{A}{B}t - \frac{C}{B} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Przekształcamy równanie prostej

$$y = 3x - 7.$$

Jej parametryzacja jest następująca

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t \\ y(t)=3t-7 \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

Przykład 132.
Przedstawić podane równanie w postaci parametrycznej

$$x^2+x+y^2+y=\frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie:
Równanie to opisuje okrąg. Ogólne równanie okręgu ma postać

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

gdzie punkt (a,b) jest środkiem okręgu, a R jest promieniem.
Parametryzacja okręgu o środku w punkcie (a,b) i promieniu R jest następująca

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=a+R\cos t \\ y(t)=b+R\sin t \end{array}\right., \ t\in[0,2\pi).$$

Przekształcamy podane równanie
$x^2+x+y^2+y=\frac{1}{2}$,
$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$,
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$.
Równanie to opisuje okrąg o środku w punkcie $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ i promieniu $R=1$. Jego parametryzacja jest następująca

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=-\frac{1}{2}+\cos t \\ y(t)=-\frac{1}{2}+\sin t \end{array}\right., \ t\in[0,2\pi).$$

Przykład 133.
Przedstawić podane równanie w postaci parametrycznej

$$3x^2+27y^2=27.$$

Rozwiązanie:
Równanie to opisuje elipsę. Ogólne równanie elipsy ma postać

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ \ a>b.$$

Parametryzacja elipsy jest następująca

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{array}\right., \ t\in[0,2\pi).$$

Przekształcamy podane równanie
$3x^2+27y^2=27$,
$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$.
Parametryzacja tej elipsy jest następująca

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=3\cos t \\ y(t)=\sin t \end{array}\right., \ t\in[0,2\pi).$$

ZADANIA:
Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji:

18.1. $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \ln(y-x^2)$

18.2. $f(x,y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} + \ln(4-x)$

18.3. $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \ln(y-x^2)$

18.4. $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2) + \sqrt{x+y-1}$

18.5. $f(x,y) = \ln(1-x-y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

18.6. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^2+y^2)} + \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$

18.7. $f(x,y) = \ln(y-x^2) + \sqrt{x^2+y^2-1}$

18.8. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}} + \sqrt{1-x^2-y}$

Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji:

18.9. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-4}}$

18.10. $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2}$

18.11. $f(x,y,z) = \sqrt{(x^2y^2+y^2z^6)^2 - (x^4+z^{12})y^4}$

18.12. $f(x,y,z) = \frac{\ln x + \ln y + \ln z}{x^2+z^2+1}$

18.13. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{x_1x_2^{10}x_3^7} + \frac{\ln(x_1x_4^2)}{x_3-x_4}$

18.14. $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1x_2)^{x_2} + x_3x_4$

18.15. $f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{1}{x_1^8+x_2^8+...+x_n^8}$

Wyznaczyć warstwice funkcji:

18.16. $f(x,y) = 2x+5y-7$

18.17. $f(x,y) = x+y+2$

18.18. $f(x,y) = x^2+y-3$

18.19. $f(x,y) = \sqrt{y-2x^2+5}$

18.20. $f(x,y) = x^2+y^2+4$

18.21. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

18.22. $f(x,y) = 18-2x^2-6y^2$

18.23. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2-9}$

18.24. $f(x,y) = y + \sqrt[3]{x^2}$

18.25. $f(x,y) = y + \sqrt{x^2}$

18.26. $f(x,y,z) = 2x+4y-z$

18.27. $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2$

18.28. $f(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2+y^2+(z-1)^2}$

18.29. $f(x,y,z) = \sqrt{2x^2+4y^2+9z^2}$

Przedstawić podane równanie w postaci parametrycznej:

18.30. $2x+3y+4=0$

18.31. $5x-7y-9=0$

18.32. $2x^2-y+3=0$

18.33. $\frac{1}{2}y-3x^2-2=0$

18.34. $x^2-\sqrt{3}x+y^2-\frac{1}{2}y=\frac{3}{16}$

18.35. $3x^2-\frac{3}{2}x+3y^2+6y=-\frac{3}{16}$

18.36. $\frac{x^2}{4}+4y^2=1$

18.37. $\frac{x^2}{3}+y^2=3$

Narysować wykres funkcji:

18.38. $f(x,y) = 2x+y-1$

18.39. $f(x,y) = x^2-3y+5$

18.40. $f(x,y) = x^2+y^2-3$

18.41. $f(x,y) = 2x^2+4y^2+1$

18.42. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

18.43. $f(x,y)=\sqrt{3x^2+5y^2+2}$
18.44. $f(x,y)=\sqrt{\cos x-1}+\sqrt{\cos y-1}$
18.45. $f(x,y)=|x|+|y|$
18.46. $f(x,y)=x^2-y^2$
18.47. $f(x,y)=y-e^{-x^2}$
18.48. $f(x,y)=e^{x^2}+e^{y^2}$

19 Pochodne cząstkowe

Przykład 134.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y)=6x^5-4xy+2y^2.$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x}=30x^4-4y,$
$\frac{\partial f}{\partial y}=-4x+4y.$

Przykład 135.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z)=x^2y^2z^2-xy\sin z.$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^2z^2-y\sin z,$
$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2yz^2-x\sin z,$
$\frac{\partial f}{\partial z}=2x^2y^2z-xy\cos z.$

Przykład 136.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y)=xe^y+5x^2y-\sqrt{xy}.$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y+10xy-\frac{y}{2\sqrt{xy}},$
$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^y+5x^2-\frac{x}{2\sqrt{xy}}.$

Przykład 137.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z)=e^{xy}\cdot(2xyz+1)\cdot\ln(x^2y+y^2z).$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{xy}\cdot y\cdot(2xyz+1)\cdot\ln(x^2y+y^2z)+e^{xy}\cdot 2yz\cdot\ln(x^2y+y^2z)+e^{xy}\cdot(2xyz+1)\cdot\frac{2xy}{(x^2y+y^2z)},$
$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{xy}\cdot x\cdot(2xyz+1)\cdot\ln(x^2y+y^2z)+e^{xy}\cdot 2xz\cdot\ln(x^2y+y^2z)+e^{xy}\cdot(2xyz+1)\cdot\frac{x^2+2yz}{(x^2y+y^2z)},$
$\frac{\partial f}{\partial z}=e^{xy}\cdot 2xy\cdot\ln(x^2y+y^2z)+e^{xy}\cdot(2xyz+1)\cdot\frac{y^2}{(x^2y+y^2z)}.$

Przykład 138.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^4+\cos^2 y}+e^{\sqrt{z}}\cdot\sin y.$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^4}{2\sqrt{x^4+\cos^2 y}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+\cos^2 y}}$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2\cos y \sin 2y}{2\sqrt{x^4+\cos^2 y}} + e^{\sqrt{z}} \cdot \cos y = \frac{-\sin 2y}{2\sqrt{x^4+\cos^2 y}} + e^{\sqrt{z}} \cdot \cos y$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{e^{\sqrt{z}} \cdot \sin y}{2\sqrt{z}}$.

Przykład 139.
Wyznaczyć gradient funkcji

$$f(x,y,z) = x^3y + x^2yz + 3xy^3z - 2y^2z^2 + z^2 + z + 1$$

w punkcie

$$p = (1, -1, 0).$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2xyz + 3y^3z$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + x^2z + 9xy^2z - 4yz^2$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y + 3xy^3 - 4y^2z + 2z + 1$,
$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (3x^2y+2xyz+3y^3z, x^3+x^2z+9xy^2z-4yz^2, x^2y+3xy^3-4y^2z+2z+1)$,

$$\nabla f(1,-1,0) = (-3, 1, -3).$$

Przykład 140.
Wyznaczyć gradient funkcji

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + 2xy^2 - 3y^2z + \ln y + e^{xyz}$$

w punkcie

$$p = (2, 1, 2).$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2y^2 + e^{xyz} \cdot yz$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 4xy - 6yz + \frac{1}{y} + e^{xyz} \cdot xz$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 3y^2 + e^{xyz} \cdot xy$,
$\nabla f(x,y,z) =$
$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 2y^2 + yze^{xyz}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + 4xy - 6yz + \frac{1}{y} + xze^{xyz}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 3y^2 + xye^{xyz}\right)$,

$$\nabla f(2,1,2) = \left(\frac{8}{3} + 2e^4, -\frac{8}{3} + 4e^4, -\frac{7}{3} + 2e^4\right).$$

Przykład 141.
Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 1?$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$L = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2 =$
$= \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1 = P.$
Funkcja

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

spełnia równanie

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Przykład 142.
Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$$

spełnia równanie

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0?$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{y-z}$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z-x}{(y-z)^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x-y}{(y-z)^2}$,
$L = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + \frac{1}{y-z} + \frac{z-x}{(y-z)^2} + \frac{x-y}{(y-z)^2} = \frac{(y-z)^2}{(y-z)^2} + \frac{y-z}{(y-z)^2} + \frac{z-x}{(y-z)^2} + \frac{x-y}{(y-z)^2} =$
$= \frac{(y-z)^2+y-z+z-x-y+x}{(y-z)^2} = \frac{(y-z)^2}{(y-z)^2} = 1 \neq 0 = P.$
Funkcja

$$f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z}$$

nie spełnia równania

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Przykład 143.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji

$$f(x,y) = x^5 + x^3y^2 + 3xy^4 + 2xy - x + 3y^2 - 5y + 7.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 3x^2y^2 + 3y^4 + 2y - 1,$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 12xy^3 + 2x + 6y - 5.$
Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(5x^4 + 3x^2y^2 + 3y^4 + 2y - 1) = 20x^3 + 6xy^2,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + 12xy^3 + 2x + 6y - 5) = 6x^2y + 12y^3 + 2,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(5x^4 + 3x^2y^2 + 3y^4 + 2y - 1) = 6x^2y + 12y^3 + 2,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y + 12xy^3 + 2x + 6y - 5) = 2x^3 + 36xy^2 + 6.$

Przykład 144.
Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji

$$f(x, y, z) = xyz + \ln xz + 2y + \sqrt{yz}.$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego
$\frac{\partial f}{\partial x} = yz + \frac{1}{x},$
$\frac{\partial f}{\partial y} = xz + 2 + \frac{z}{2\sqrt{yz}},$
$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{1}{z} + \frac{y}{2\sqrt{yz}}.$
Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(yz + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xz + 2 + \frac{z}{2\sqrt{yz}}\right) = z,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{1}{z} + \frac{y}{2\sqrt{yz}}\right) = y,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(yz + \frac{1}{x}\right) = z,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xz + 2 + \frac{z}{2\sqrt{yz}}\right) = -\frac{z}{4y\sqrt{yz}},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{1}{z} + \frac{y}{2\sqrt{yz}}\right) = x + \frac{1}{4\sqrt{yz}},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(yz + \frac{1}{x}\right) = y,$
$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(xz + 2 + \frac{z}{2\sqrt{yz}}\right) = x + \frac{1}{4\sqrt{yz}},$
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(xy + \frac{1}{z} + \frac{y}{2\sqrt{yz}}\right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{y}{4z\sqrt{yz}}.$

Przykład 145.
Sprawdzić, czy funkcja

$$f(x, y) = \sin x \sin ay, \quad \text{gdzie} \quad a \in \mathbb{R}$$

spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0?$$

Rozwiązanie:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin ay,$

$\frac{\partial f}{\partial y} = a\sin x\cos ay,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x\sin ay,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -a^2\sin x\sin ay,$

$L = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -a^2\sin x\sin ay - a^2\cdot(-\sin x\sin ay) = -a^2\sin x\sin ay + a^2\sin x\sin ay = 0 = P.$

Funkcja

$$f(x,y) = \sin x\sin ax$$

spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

ZADANIA:

Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego następujących funkcji:

19.1. $f(x,y) = x^3y + 3xy^4 - 3xy$
19.2. $f(x,y) = (x^2+y^3)e^{2x+3y+2}$
19.3. $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$
19.4. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$
19.5. $f(x,y) = \sin^2(2x+y)$
19.6. $f(x,y) = \sqrt{2xy+y^2}$
19.7. $f(x,y) = \frac{1}{5x^2-y^2+7}$
19.8. $f(x,y) = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$
19.9. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$
19.10. $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^y)^{\frac{1}{2}}$
19.11. $f(x,y) = (1+xy)^y$
19.12. $f(x,y) = e^x(\cos y + x\sin y)$
19.13. $f(x,y) = e^{xy^2}$
19.14. $f(x,y) = e^{2x+5y-6}$
19.15. $f(x,y) = e^{5x^2y} - y^3 - 1$
19.16. $f(x,y) = \sin\frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y}$
19.17. $f(x,y) = y\ln(x+y)$
19.18. $f(x,y) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$
19.19. $f(x,y) = \sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}$
19.20. $f(x,y) = \arcsin\frac{x+y}{xy}$
19.21. $f(x,y) = xe^y + ye^x$
19.22. $f(x,y) = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$
19.23. $f(x,y,z) = x^5 - 4x^3yz^2 + 3y$
19.24. $f(x,y,z) = e^{xyz}$
19.25. $f(x,y,z) = \ln e^{xyz}$
19.26. $f(x,y,z) = \ln(2x+y^3-3\sqrt{z})$
19.27. $f(x,y,z) = \ln(xyz) + xyz$
19.28. $f(x,y,z) = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$
19.29. $f(x,y,z) = z\operatorname{arctg}(x-y)^2$
19.30. $f(x,y,z) = \sin^2(3x^2+4y^2+2z)$

Wyznaczyć gradient funkcji f w punkcie p:

19.31. $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4x - 5y + 10, \quad p = (1,-1)$
19.32. $f(x,y) = xye^{xy}, \quad p = (2,0)$
19.33. $f(x,y,z) = xyz\ln(xyz), \quad p = (e,e,e)$
19.34. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}, \quad p = (1,1,1)$

Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji:

19.35. $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2$
19.36. $f(x,y) = x^y$
19.37. $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$
19.38. $f(x,y,z) = xy + xa^z$
19.39. $f(x,y,z) = e^{xyz}$

Zbadać, czy funkcja f spełnia dane równanie:

19.40. $f(x,y) = \ln\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$
19.41. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
19.42. $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$

19.43. $f(x,y) = x \sin xe^{-y}$, $x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y)$

19.44. $f(x,y) = \ln \frac{x^2-y^2}{xy}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)$

19.45. $f(x,y) = xe^y + ye^x$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

20 Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Przykład 146.
Zbadać istnienie ekstremów funkcji

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 5.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

2. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli zerowanie się pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

3. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

4. Wyznaczamy hesjan danej funkcji

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x,y) = (0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad \triangle_2 = \det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = 2 > 0 \text{ i } \triangle_2 = 4 > 0,$$

czyli funkcja

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 5$$

osiąga w punkcie $(0,0)$ minimum lokalne.
7. Wyznaczamy wartość minimum lokalnego

$$f_{min} = f(0,0) = 5.$$

Przykład 147.
Zbadać istnienie ekstremów funkcji

$$f(x,y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 25 - 25e^{-y} - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 25xe^{-y} - 50.$$

2. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 25 - 25e^{-y} - 2x = 0 \\ 25xe^{-y} - 50 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = \ln 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} \\ y_2 = \ln\frac{5}{4} \end{cases}.$$

3. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 25e^{-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 25e^{-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -25xe^{-y}.$$

4. Wyznaczamy hesjan danej funkcji

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 25e^{-y} \\ 25e^{-y} & -25xe^{-y} \end{pmatrix}.$$

Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_1, y_1) = (10, \ln 5).$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_1, y_1) = (10, \ln 5)$

$$Hf(10, \ln 5) = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -50 \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = -2, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -50 \end{vmatrix} = 75,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = -2 < 0 \ \text{ i } \ \triangle_2 = 75 > 0,$$

czyli funkcja

$$f(x,y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$$

osiąga w punkcie $(10, \ln 5)$ maksimum lokalne.
7. Wyznaczamy wartość maksimum lokalnego

$$f_{max} = f(10, \ln 5) = 100 - 50 \ln 5.$$

Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{5}{2}, \ln\frac{5}{4}\right).$$

8. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_2, y_2) = \left(\frac{5}{2}, \ln\frac{5}{4}\right)$

$$Hf\left(\frac{5}{2}, \ln\frac{5}{4}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ 20 & -50 \end{pmatrix}.$$

9. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = -2, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -2 & 20 \\ 20 & -50 \end{vmatrix} = -300,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = -2 < 0 \ \text{ i } \ \triangle_2 = -300 < 0,$$

czyli funkcja

$$f(x, y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$$

nie osiąga w punkcie $\left(\frac{5}{2}, \ln\frac{5}{4}\right)$ ekstremum.

Przykład 148.
Zbadać istnienie ekstremów funkcji

$$f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x.$$

Rozwiązanie:
1. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + 6xy - 15, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

2. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_3 = \sqrt{5} \\ y_3 = -\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_4 = -\sqrt{5} \\ y_4 = \sqrt{5} \end{cases}.$$

3. Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18x + 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

4. Wyznaczamy hesjan danej funkcji

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 18x + 6y & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix}.$$

Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_1, y_1) = (1, 1).$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_1, y_1) = (1, 1)$

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = 24, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 24 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -180,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = 24 > 0 \;\text{ i }\; \triangle_2 = -180 < 0,$$

czyli funkcja

$$f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$$

nie osiąga w punkcie $(1,1)$ ekstremum.
Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_2, y_2) = (-1, -1).$$

7. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_2, y_2) = (-1, -1)$

$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = -24, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -24 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -180,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = -24 < 0 \;\text{ i }\; \triangle_2 = -180 < 0,$$

czyli funkcja

$$f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$$

nie osiąga w punkcie $(-1,-1)$ ekstremum.
Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_3, y_3) = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right).$$

9. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_3, y_3) = \left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

$$Hf\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right) = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

10. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = 12\sqrt{5}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 12\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \\ 6\sqrt{5} & 6\sqrt{5} \end{vmatrix} = 180,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = 12\sqrt{5} > 0 \;\text{ i }\; \triangle_2 = 180 > 0,$$

czyli funkcja

$$f(x,y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$$

osiąga w punkcie $(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ minimum lokalne.
11. Wyznaczamy wartość minimum lokalnego

$$f_{min} = f\left(\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right) = -10\sqrt{5}.$$

Badamy istnienie ekstremum w punkcie

$$(x_4, y_4) = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right).$$

12. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x_4, y_4) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

$$Hf\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) = \begin{pmatrix} -12\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

13. Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = -12\sqrt{5}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} -12\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \\ -6\sqrt{5} & -6\sqrt{5} \end{vmatrix} = 180,$$

otrzymujemy

$$\triangle_1 = -12\sqrt{5} < 0 \text{ i } \triangle_2 = 180 > 0,$$

czyli funkcja

$$f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$$

osiąga w punkcie $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ maksimum lokalne.
14. Wyznaczamy wartość maksimum lokalnego

$$f_{max} = f\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) = 10\sqrt{5}.$$

ZADANIA:
Zbadać istnienie ekstremów funkcji:

20.1. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$
20.2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
20.3. $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5$
20.4. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \ \ x, y > 0$
20.5. $f(x, y) = x^3 - 3x^2y - y^2 + 10y$
20.6. $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$
20.7. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y$
20.8. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^4$
20.9. $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$
20.10. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 29$
20.11. $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$
20.12. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3 + 3$
20.13. $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
20.14. $f(x, y) = e^{-x}(x + y^2)$
20.15. $f(x, y) = x^3 - xy + y^3$
20.16. $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
20.17. $f(x, y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$
20.18. $f(x, y) = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$

20.19. $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12-x-y)$
20.20. $f(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
20.21. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$
20.22. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$
20.23. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
20.24. $f(x,y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
20.25. $f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 + 2y + z^2,\ x > 0$
20.26. $f(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - x - y + z^2$
20.27. $f(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z),\ x,y,z > 0$
20.28. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ \ x,y,z > 0$
20.29. $f(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$
20.30. $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z),\ \ x,y,z \in [0,\pi]$

21 Ekstrema globalne funkcji wielu zmiennych

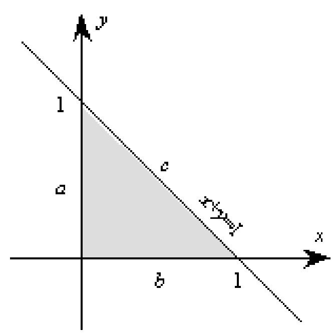
Przykład 149.
Znaleźć ekstrema globalne (wartość największą i najmniejszą) funkcji:

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \tag{11}$$

w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste o równaniach:

$$x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y - 1 = 0. \tag{12}$$

Rozwiązanie:



Rysunek 17: Wykres obszaru ograniczonego przez proste $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y - 1 = 0.$

1. Badamy ekstrema lokalne funkcji (11) wewnątrz trójkąta ograniczonego prostymi (12). Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 2,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2$$

i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ 6y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

otrzymujemy punkt

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

w którym funkcja (11) może przyjąć ekstremum lokalne wewnątrz trójkąta (12). W tym punkcie mamy

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

2. Badamy ekstrema lokalne funkcji (11) wzdłuż boku (a)

$$x = 0, \;\; y \in [0, 1].$$

Wzdłuż tego boku funkcja (11) przyjmuje postać

$$f(0, y) = 2y^2 + (y - 1)^2, \;\; y \in [0, 1],$$

stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dy} f(0, y) = 6y - 2 \;\text{ i }\; 6y - 2 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{3},$$

więc ekstremum lokalne na tym boku funkcja (11) może przyjąć w punkcie

$$\left(0, \frac{1}{3}\right),$$

w którym wartość funkcji (11) wynosi

$$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}.$$

3. Badamy ekstrema lokalne funkcji (11) wzdłuż boku (b)

$$y = 0, \;\; x \in [0, 1].$$

Wzdłuż tego boku funkcja (11) przyjmuje postać

$$f(x, 0) = 2x^2 + (x - 1)^2, \;\; x \in [0, 1],$$

stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dx} f(x, 0) = 6x - 2 \;\text{ i }\; 6x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3},$$

więc ekstremum lokalne na tym boku funkcja (11) może przyjąć w punkcie

$$\left(\frac{1}{3}, 0\right),$$

w którym wartość funkcji (11) wynosi

$$f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 1\frac{2}{3}.$$

4. Badamy ekstrema lokalne funkcji (11) wzdłuż boku (c)

$$x + y - 1 = 0, \ \ x \in [0, 1].$$

Wzdłuż tego boku funkcja (11) przyjmuje postać

$$f(x, 1-x) = 6x^2 - 6x + 3, \ \ x \in [0, 1],$$

stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dx} f(x, 1-x) = 12x - 6 \ \text{ i } \ 12x - 6 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2},$$

więc ekstremum lokalne na tym boku funkcja (11) może przyjąć w punkcie

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

w którym wartość funkcji (11) wynosi

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

5. Bierzemy pod uwagę wierzchołki trójkąta i wartości funkcji (11) w tych wierzchołkach. Wierzchołki mają współrzędne

$$(0, 0), \quad (1, 0), \quad (0, 1),$$

a wartości funkcji (11) w tych punktach wynoszą odpowiednio:

$$f(0, 0) = 2, \quad f(1, 0) = 3, \quad f(0, 1) = 3.$$

6. Porównując wszystkie otrzymane wartości funkcji (11)
$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$
$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = 1\frac{2}{3}$
$f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 1\frac{2}{3}$
$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
$f(0, 0) = 2$
$f(1, 0) = 3$
$f(0, 1) = 3$
widzimy, że badana funkcja (11) na trójkącie domkniętym ograniczonym prostymi (12) osiąga minimum globalne (wartość najmniejszą) $\frac{4}{3}$ w punkcie $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, natomiast maksimum globalne (wartość największą) 3 w punktach $(1, 0)$ i $(0, 1)$.

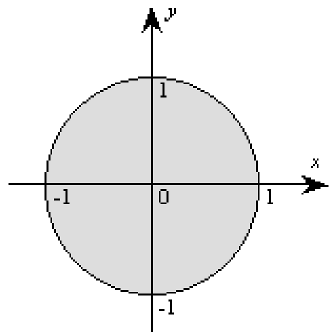
Przykład 150.
Znaleźć ekstrema globalne (wartość największą i najmniejszą) funkcji

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2 \tag{13}$$

w kole

$$x^2 + y^2 \leqslant 1. \tag{14}$$

Rozwiązanie:



Rysunek 18: Wykres koła $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1. Badamy ekstrema lokalne funkcji (13) wewnątrz koła (14).
Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy punkt

$$(0, 0),$$

w którym funkcja (13) może przyjąć ekstremum lokalne wewnątrz koła (14). W tym punkcie mamy

$$f(0, 0) = 2.$$

2. Badamy ekstrema lokalne funkcji (13) wzdłuż brzegu koła.
Równanie brzegu koła (14) ma postać

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Przedstawiamy ten okrąg w postaci parametrycznej

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Po podstawieniu do wzoru funkcji (13) otrzymujemy

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t + 2, \quad t \in [0, 2\pi]$$

stąd

$$\frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) = -4 \sin t \cos t = -2 \sin t,$$

$-2 \sin 2t = 0 \iff t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi \vee t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}$, więc ekstremum lokalne na brzegu koła funkcja (13) może przyjąć dla

$$t = 0, \quad t = \pi, \quad t = 2\pi, \quad t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2},$$

którym odpowiadają punkty

$$(1, 0), \quad (-1, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

Wartości funkcji (13) w tych punktach wynoszą odpowiednio

$$f(1, 0) = 3, \quad f(-1, 0) = 3, \quad f(0, 1) = 1, \quad f(0, -1) = 1$$

(wśród tych punktów są punkty krańcowe $t = 0$, $t = 2\pi$).
3. Porównując wszystkie otrzymane wartości funkcji (13)
$f(0, 0) = 2$
$f(0, 1) = 1$
$f(0, -1) = 1$
$f(-1, 0) = 3$
$f(1, 0) = 3$
widzimy, że badana funkcja (13) na kole (14) osiąga minimum globalne (wartość najmniejszą) 1 w punktach $(0, 1)$ i $(0, -1)$, natomiast maksimum globalne (wartość największą) 3 w punktach $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

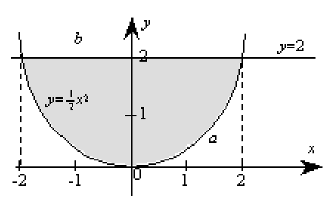
Przykład 151.
Znaleźć ekstrema globalne (wartość największą i najmniejszą) funkcji

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y \tag{15}$$

na obszarze ograniczonym krzywymi

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 2. \tag{16}$$

Rozwiązanie:



Rysunek 19: Wykres obszaru ograniczonego krzywymi $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2$.

1. Badamy ekstrema lokalne funkcji (15) wewnątrz obszaru ograniczonego krzywymi (16).
Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y - 2$$

i rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 4y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

otrzymujemy punkt

$$(1,1),$$

w którym funkcja (15) może przyjąć ekstremum lokalne wewnątrz obszaru (16). W tym punkcie mamy

$$f(1,1) = -1.$$

2. Badamy ekstrema lokalne funkcji (15) wzdłuż krawędzi (a)

$$y = \frac{1}{2}x^2, \;\; x \in [-2,2].$$

Wzdłuż tej krawędzi funkcja (15) przyjmuje postać

$$f\left(x, \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^4 - x^3, \;\; x \in [-2,2],$$

stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}f\left(x, \frac{1}{2}x^2\right) = 2x^3 - 3x^2 \;\text{ i }\; 2x^3 - 3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2},$$

więc ekstremum lokalne na tym boku funkcja (15) może przyjąć w punktach

$$(0,0), \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right),$$

w których wartości funkcji (15) wynoszą

$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right) = -\frac{27}{32}.$$

3. Badamy ekstrema lokalne funkcji (15) wzdłuż boku (b)

$$y = 2, \;\; x \in [-2,2].$$

Wzdłuż tego boku funkcja (15) przyjmuje postać

$$f(x,2) = x^2 - 4x + 4, \;\; x \in [-2,2].$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}f(x,2) = 2x - 4 \;\text{ i }\; 2x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2,$$

więc ekstremum lokalne na tym boku funkcja (15) może przyjąć w punkcie

$$(2,2),$$

w którym wartość funkcji (15) wynosi

$$f(2,2) = 0.$$

4. Bierzemy pod uwagę końce odcinka i wartości funkcji (15) w tych punktach. Mają one współrzędne

$$(2,2), \;\; (-2,2),$$

a wartości funkcji (15) w tych punktach wynoszą odpowiednio

$$f(2,2) = 0, \quad f(-2,2) = 16.$$

5. Porównując wszystkie otrzymane wartości funkcji (15)
$f(1,1) = -1$
$f(0,0) = 0$
$f\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right) = -\frac{27}{32}$
$f(2,2) = 0$
$f(-2,2) = 16$
widzimy, że badana funkcja (15) na obszarze (16) osiąga minimum globalne (wartość najmniejszą) -1 w punkcie $(1,1)$, natomiast maksimum globalne (wartość największą) 16 w punkcie $(-2,2)$.

ZADANIA:
Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji:
21.1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ w prostokącie $-2 \leqslant x \leqslant 3$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
21.2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ w kwadracie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.
21.3. $f(x,y) = 3xy$ w kole $x^2 + y^2 \leqslant 2$.
21.4. $f(x,y) = x + y$ w kole $x^2 + y^2 \leqslant 4$.
21.5. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2$ w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste o równaniach $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ i $y = 0$.
21.6. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste o równaniach $x = 0$, $y = 0$ i $x + y + 3 = 0$.
21.7. $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ w kwadracie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.
21.8. $f(x,y) = 5xy + x + y$ w kwadracie o wierzchołkach $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$, $D = (0,-1)$.
21.9. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ w kole $x^2 + y^2 \leqslant 36$.
21.10. $f(x,y) = x^4 + y^4$ w kole $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

22 Ekstrema warunkowe

Przykład 152.
Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y) = xy$$

przy ograniczeniu

$$x + y = 4.$$

Rozwiązanie:
1. Definiujemy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y),$$

gdzie

$$g(x,y) = x + y - 4$$

czyli

$$L(\lambda, x, y) = xy + \lambda(x + y - 4).$$

2. Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 4, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda.$$

3. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli zerowanie się pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

4. Wyznaczamy pochodne cząstkowe potrzebne do zbudowania hesjanu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0.$$

5. Wyznaczamy hesjan funkcji Lagrange'a

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda, x, y) = (-2, 2, 2)$

$$HL(-2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznacznik $\triangle_2$

$$\triangle_2 = \det HL(-2, 2, 2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_2 = 2 > 0,$$

czyli funkcja $f(x, y) = xy$ osiąga w punkcie $(x, y) = (2, 2)$ maksimum warunkowe.
7. Wyznaczamy wartość maksimum warunkowego

$$f_{maxw} = f(2, 2) = 4.$$

Przykład 153.
Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = 3 \ln x + \ln y$$

przy ograniczeniu

$$12x + 8y = 100.$$

Rozwiązanie:
1. Określamy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x, y) = 3 \ln x + \ln y + \lambda(12x + 8y - 100).$$

2. Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 12x + 8y - 100, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{3}{x} + 12\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{y} + 8\lambda.$$

3. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x + 8y - 100 = 0 \\ \frac{3}{x} + 12\lambda = 0 \\ \frac{1}{y} + 8\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{25} \\ x = \frac{25}{4} \\ y = \frac{25}{8} \end{cases}.$$

4. Wyznaczamy pochodne cząstkowe potrzebne do zbudowania hesjanu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 12, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 8, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

5. Wyznaczamy hesjan funkcji Lagrange'a

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 12 & -\frac{3}{x^2} & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda, x, y) = \left(-\frac{1}{25}, \frac{25}{4}, \frac{25}{8}\right)$

$$HL\left(-\frac{1}{25}, \frac{25}{4}, \frac{25}{8}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 12 & -\frac{48}{625} & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{64}{625} \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznacznik $\triangle_2$

$$\triangle_2 = \det HL\left(-\frac{1}{25}, \frac{25}{4}, \frac{25}{8}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 8 \\ 12 & -\frac{48}{625} & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{64}{625} \end{vmatrix} = \frac{12288}{625},$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_2 = \frac{12288}{625} > 0,$$

czyli funkcja $f(x, y) = 3\ln x + \ln y$ osiąga w punkcie $(x, y) = \left(\frac{25}{4}, \frac{25}{8}\right)$ maksimum warunkowe.
7. Wyznaczamy wartość maksimum warunkowego

$$f_{maxw} = f\left(\frac{25}{4}, \frac{25}{8}\right) = 8\ln 5 - 9\ln 2.$$

Przykład 154.
Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = x + 3y$$

przy ograniczeniu

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Rozwiązanie:
1. Określamy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x, y) = x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2. Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 3 + 2y\lambda.$$

3. Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 1 + 2x\lambda = 0 \\ 3 + 2y\lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ y_1 = -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ y_2 = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

4. Wyznaczamy pochodne cząstkowe potrzebne do zbudowania hesjanu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

5. Wyznaczamy hesjan funkcji Lagrange'a

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

5. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda_1, x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$$HL\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \sqrt{10} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{10}} & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

6. Obliczamy wyznacznik $\triangle_2$

$$\triangle_2 = \det HL\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \sqrt{10} & 0 \\ -\frac{6}{\sqrt{10}} & 0 & \sqrt{10} \end{vmatrix} = -4\sqrt{10},$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_2 = -4\sqrt{10} < 0,$$

czyli funkcja $f(x, y) = x + 3y$ osiąga w punkcie $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ minimum warunkowe.
7. Wyznaczamy wartość minimum warunkowego

$$f_{minw} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}.$$

8. Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda_2, x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$$HL\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & -\sqrt{10} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{10}} & 0 & -\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

9. Obliczamy wyznacznik $\triangle_2$

$$\triangle_2 = \det HL\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & -\sqrt{10} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{10}} & 0 & -\sqrt{10} \end{vmatrix} = 4\sqrt{10},$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_2 = 4\sqrt{10} > 0,$$

czyli funkcja $f(x,y) = x + 3y$ osiąga w punkcie $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ maksimum warunkowe.
10. Wyznaczamy wartość maksimum warunkowego

$$f_{maxw} = f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}.$$

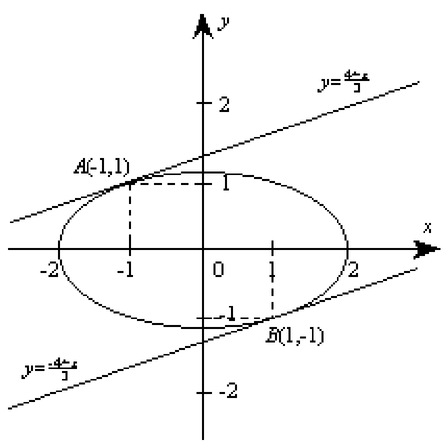
Przykład 155.
Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x,y) = 3y - x$$

przy ograniczeniu

$$x^2 + 3y^2 = 4.$$

Rozwiązanie:
Zadanie to można rozwiązać graficznie.



Rysunek 20: Graficzna interpretacja ekstremum warunkowego.

Wyznaczamy warstwice funkcji f i znajdujemy te z nich, które są styczne do elipsy

$$x^2 + 3y^2 = 4.$$

Warstwicami funkcji f są proste

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a, \ \ a \in \mathbb{R}.$$

Obliczamy dla jakich wartości a układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = 4 \vee a = -4.$$

Zatem dla $a = 4 \vee a = -4$ warstwice funkcji f są styczne do elipsy. Punkty styczności tych warstwic z elipsą

$$A = (-1, 1) \ \text{ i } \ B = (1, -1)$$

są punktami krytycznymi.
Wyznaczamy wartości funkcji f w punktach A i B

$$f(A) = f(-1, 1) = 4, \quad f(B) = f(1, -1) = -4.$$

Zatem funkcja f posiada maksimum warunkowe w punkcie $(-1, 1)$ i wynosi ono 4 oraz minimum warunkowe w punkcie $(1, -1)$ i wynosi ono -4.

ZADANIA:
Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji przy podanym obok warunku:

22.1. $f(x, y) = x + 2xy, \ \ x - 2y = 11$
22.2. $f(x, y) = 12x - 3y, \ \ 2x + xy = -1$
22.3. $f(x, y) = 2x - y, \ \ x^2 + 2y^2 = 18$
22.4. $f(x, y) = 5x + y^2 + 4, \ \ x^2 + y^2 = 1$
22.5. $f(x, y) = x^2 - y^2, \ \ x^2 - 2y^2 = 4$
22.6. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 2xy, \ \ x + 3y = 9$
22.7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy, \ \ x + 2y = 4$
22.8. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y, \ \ x^2 + y^2 = 25$
22.9. $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 5x - 3y, \ \ 3x - 5y = 2$
22.10. $f(x, y) = x^3 - 2y^2, \ \ 3x - 2y = 2$
22.11. $f(x, y) = 2x - y, \ \ x^2 + y = 1$
22.12. $f(x, y) = -y, \ \ (x - 1)^2 + y^2 = 1$
22.13. $f(x, y) = -x + y, \ \ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
22.14. $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}, \ \ x + y = 4$
22.15. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \ \ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 18$

23 Zastosowania pochodnych cząstkowych

Przykład 156.
Całkowity roczny dochód ze sprzedaży dwóch towarów wyraża funkcja

$$D(x, y) = 400x - 4x^2 + 1960y - 8y^2,$$

gdzie x i y oznaczają ilość sprzedanych w ciągu roku sztuk każdego z towarów. Koszt produkcji x sztuk towaru pierwszego i y sztuk towaru drugiego jest następujący

$$K(x, y) = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy.$$

Wyznaczyć ilość sztuk każdego z towarów wyprodukowanych i sprzedanych, dla których osiągany jest maksymalny zysk. Podać wartość tego zysku oraz wartość odpowiadającego mu kosztu i dochodu.
Rozwiązanie:
Tworzymy funkcję zysku

$$Z(x, y) = D(x, y) - K(x, y) = -6x^2 + 400x - 2xy + 1960y - 12y^2 - 100.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -12x + 400 - 2y, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -2x + 1960 - 24y.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli zerowanie się pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -12x + 400 - 2y = 0 \\ -2x + 1960 - 24y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}.$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -12, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = -2, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = -24.$$

Wyznaczamy hesjan danej funkcji

$$HZ(x,y) = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -24 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x, y) = (20, 80)$

$$HZ(20,80) = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -24 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(20,80) = -12, \quad \triangle_2 = \det HZ(20,80) = \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -24 \end{vmatrix} = 284$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_1 = -12 < 0 \text{ i } \triangle_2 = 284 > 0,$$

czyli funkcja $Z(x,y) = -6x^2+400x-2xy+1960y-12y^2-100$ osiąga w punkcie $(20, 80)$ maksimum lokalne, które wynosi

$$Z_{max} = Z(20,80) = 82300,$$

natomiast koszt

$$K(20,80) = 29700$$

oraz dochód

$$D(20,80) = 112000.$$

Odp: Maksymalny zysk jest osiągany przy produkcji 20 sztuk towaru pierwszego, 80 sztuk towaru drugiego i wynosi 82300. Odpowiadający tej produkcji koszt wynosi 29700, natomiast dochód 112000.

Przykład 157.
Dysponując budżetem w wysokości 4mln zł, wyznaczyć jakie kwoty należy przeznaczyć na surowce x i y, aby uzyskać minimalne koszty produkcji określone zależnością

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3.$$

Rozwiązanie:
Definiujemy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda g(x,y),$$

gdzie

$$g(x,y) = x + y - 4$$

czyli

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3 + \lambda(x + y - 4).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 4, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + \lambda.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji, czyli zerowanie się pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + \lambda = 0 \\ 2y - x + \lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe potrzebne do zbudowania hesjanu

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2.$$

Wyznaczamy hesjan funkcji Lagrange'a

$$HL(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda, x, y) = (-2, 2, 2)$

$$HL(-2, 2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik $\triangle_2$

$$\triangle_2 = \det HL(-2, 2, 2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

więc otrzymujemy

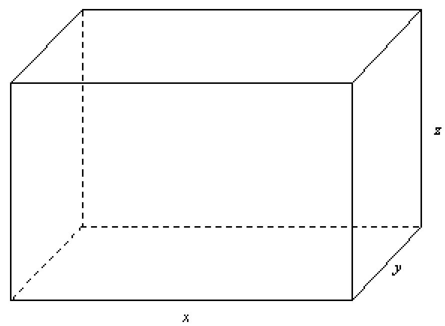
$$\triangle_2 = -6 < 0,$$

czyli funkcja $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3$ osiąga w punkcie $(x,y) = (2,2)$ minimum warunkowe. Wyznaczamy wartość minimum warunkowe

$$f_{minw} = f(2,2) = 7.$$

Odp: Koszty produkcji będą minimalne, jeśli przeznaczymy 2mln zł na surowce x oraz 2mln zł na surowce y.

Przykład 158.
Określić wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o objętości $32cm^2$, tak aby jego pole powierzchni było minimalne.
Rozwiązanie:
Sposób I



Rysunek 21: Widok zbiornika.

Objętość zbiornika wynosi

$$xyz = 32.$$

Pole otwartego zbiornika jest równe

$$S = 2xz + 2yz + xy,$$

zatem

$$S = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy \quad \left(z = \frac{32}{xy}\right).$$

Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{64}{x^2} + y, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{64}{y^2} + x.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{64}{x^2} + y = 0 \\ -\frac{64}{y^2} + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe rzędu drugiego

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3}.$$

Wyznaczamy hesjan danej funkcji

$$HS(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(x, y) = (4, 4)$

$$HS(4, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki $\triangle_i$

$$\triangle_1 = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4,4) = 2, \ \ \triangle_2 = \det HS(4,4) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_1 = 2 > 0 \ \text{ i } \ \triangle_2 = 3 > 0,$$

czyli funkcja $S = \frac{64}{x} + \frac{64}{y} + xy$ osiąga w punkcie $(4,4)$ minimum lokalne.
Minimalne pole powierzchni zbiornika mamy przy następujących jego wymiarach

$$x = 4, \ \ y = 4, \ \ z = 2 \ \ \left(z = \frac{32}{xy} \right).$$

Minimalne pole powierzchni wynosi

$$S_{min} = S(4,4) = 48.$$

Sposób II
Rozwiązanie oparte jest na metodzie mnożników Lagrange'a. Należy wyznaczyć minimum funkcji

$$S(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy$$

przy warunku

$$xyz = 32.$$

Definiujemy funkcję Lagrange'a

$$L(\lambda, x, y, z) = S(x,y,z) + \lambda g(x,y,z),$$

gdzie

$$g(x,y,z) = xyz - 32$$

czyli

$$L(\lambda, x, y, z) = 2xz + 2yz + xy + \lambda(xyz - 32).$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = xyz - 32, \ \ \frac{\partial L}{\partial x} = 2z + y + \lambda yz, \ \ \frac{\partial L}{\partial y} = 2z + x + \lambda xz, \ \ \frac{\partial L}{\partial z} = 2x + 2y + \lambda xy.$$

Badamy warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} xyz - 32 = 0 \\ 2z + y + \lambda yz = 0 \\ 2z + x + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 4 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe potrzebne do zbudowania hesjanu
$\frac{\partial g}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial g}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial g}{\partial z} = xy$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 2 + \lambda y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + \lambda z$,
$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 2 + \lambda x$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = 2 + \lambda y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 2 + \lambda x$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$.

Wyznaczamy hesjan funkcji Lagrange'a

$$HL(\lambda,x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 1+\lambda z & 2+\lambda y \\ xz & 1+\lambda z & 0 & 2+\lambda x \\ xy & 2+\lambda y & 2+\lambda x & 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczamy wartość hesjanu w punkcie krytycznym $(\lambda,x,y,z)=(-1,4,4,2)$

$$HL(-1,4,4,2)=\begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 16 \\ 8 & 0 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik $\triangle_i$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & -1 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-128, \quad \triangle_3=\det HL(-1,4,4,2)=\begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 16 \\ 8 & 0 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-768,$$

więc otrzymujemy

$$\triangle_2=-128<0 \ \text{ i } \ \triangle_3=-768<0,$$

czyli funkcja $S(x,y,z)=2xz+2yz+xy$ osiąga w punkcie $(x,y,z)=(4,4,2)$ minimum warunkowe. Wyznaczamy wartość minimum warunkowego

$$S_{minw}=S(4,4,2)=48.$$

Odp: Pole powierzchni zbiornika osiągnie wartość minimalną przy wymiarach 4, 4, 2.

ZADANIA:

23.1. Zysk firmy zależy od liczby wyprodukowanych x sztuk towaru A, y sztuk towaru B i jest opisany funkcją

$$Z(x,y)=3x+6y+xy-x^2-y^2.$$

Wyznaczyć liczbę sztuk obu towarów maksymalizującą zysk. Podać wartość maksymalnego zysku.

23.2. Dochód firmy produkującej samochody zależy od liczby wyprodukowanych i sprzedanych sztuk samochodów osobowych x (w tys. sztuk) i dostawczych y (w tys. sztuk). Funkcja dochodu ma postać

$$D(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y.$$

Wyznaczyć produkcję, przy której dochód jest maksymalny. Podać wartość tego dochodu.

23.3. Koszty produkcji pewnej firmy zależą od liczby zatrudnionych przy niej osób x oraz wielkości produkcji y (w tys. sztuk). Koszty opisuje funkcja

$$K(x,y)=x^2+y^2+xy-40x-56y+1332.$$

Wyznaczyć zatrudnienie i produkcję, przy której koszty są minimalne. Podać ich wartość.

23.4. Firma produkuje dwa typy telewizorów: x tys. sztuk typu A i y tys. sztuk typu B. Dany jest odpowiedni dochód i koszt

$$D(x,y)=2x+3y, \quad K(x,y)=x^2-2xy+2y^2+6x-9y+5.$$

Wyznaczyć taką wielkość produkcji każdego typu telewizora, aby zysk był maksymalny. Podać jego wartość oraz odpowiadające mu wartości dochodu i kosztu.
23.5. Sklep rozprowadza dwa typy towaru. Funkcje popytu dla obu towarów są następujące

$$PP_1 = 110 - 4c_1 - c_2, \quad PP_2 = 90 - 2c_1 - 3c_2,$$

gdzie c_1 cena towaru pierwszego, c_2 cena towaru drugiego. Wyznaczyć cenę każdego z towarów, tak aby całkowity dochód uzyskany ze sprzedaży był maksymalny. Podać wartość dochodu i odpowiadające mu wartości popytów.
23.6. Znaleźć maksimum funkcji (Cobba-Douglasa)

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

opisującej wartość produkcji, w przypadku gdy wielkości x i y spełniają warunek

$$7x + 3y = 84.$$

23.7. Koszt produkcji x jednostek produktu A oraz y jednostek produktu B jest dany wzorem

$$K(x, y) = 100 + 3x^2 + 5y^2.$$

Możliwości produkcyjne są takie, że można wytworzyć razem 80 jednostek obu produktów. Jaka produkcja minimalizuje koszty?
23.8. Funkcja użyteczności zakupów jest wyrażona wzorem

$$U(x, y) = 2 \ln x + \ln y.$$

Ograniczenie budżetowe ma postać

$$2x + 4y = 48.$$

Wyznaczyć poziom zakupów maksymalizujący funkcję użyteczności.
23.9. Konsument ustalił swoją funkcję użyteczności zakupów w postaci

$$U(x, y) = xy.$$

Ograniczenie budżetowe ma postać

$$5x + 10y = 100.$$

Wyznaczyć poziom zakupów maksymalizujący funkcję użyteczności.
23.10. Pudełko o kwadratowej podstawie ma mieć objętość 1000cm^3. Jakie powinny być rozmiary pudełka, jeżeli powierzchnia matriału użytego do jego wyprodukowania ma być minimalna. Rozważyć dwa przypadki:
a) pudełko ma wszystkie 6 ścianek,
b) pudełko nie ma wierzchniej ścianki.
23.11. Wyznaczyć trzy dodatnie liczby rzeczywiste o sumie równej 1 i najmniejszej sumie odwrotności.
23.12. Znaleźć punkt trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ taki, aby suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta miała najmniejszą wartość.
23.13. W równoramiennym trójkącie prostokątnym wyznaczyć punkt, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza.
23.14. Z kawałka drutu długości l zbudować prostopadłościan o największej objętości. Podać jego wymiary.

24 Całka nieoznaczona. Metody całkowania

Podstawowe własności i wzory służące do obliczania całek

Niech $f(x),\ g(x)-$ funkcje całkowalne określone na tym samym przedziale. Wówczas:

1. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad k \in \mathbb{R}$

Wzór na całkowanie przez części:

3. $\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$

Wzór na całkowanie przez podstawienie:

4. $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$, gdzie $F'(x) = f(x)$

4′. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

4″. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

5. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, gdzie $a \neq -1, \quad x > 0$

5′. $\int dx = x + C$

5″. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, gdzie $a > 0, \quad a \neq 1$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin}x + C = -\text{arccos}x + D$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x + C = -\text{arcctg}x + D$

Symbol $\overset{i}{=}$ dla $i = 1, ..., 13-$ oznacza, że korzystamy ze wzoru numer i.

Przykład 159.
Obliczyć całkę

$$\int (3x^5 - 2x^2 + x - 2)dx.$$

Rozwiązanie:

$\int (3x^5 - 2x^2 + x - 2)dx \overset{1}{=} \int 3x^5 dx - \int 2x^2 dx + \int x dx - \int 2dx \overset{2}{=}$
$= 3\int x^5 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - 2\int dx \overset{5,\,5'}{=} 3 \cdot \frac{1}{6}x^6 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C =$
$= \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$

Ostatecznie

$$\int (3x^5 - 2x^2 + x - 2)dx = \frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$$

Przykład 160.
Obliczyć całkę

$$\int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Rozwiązanie:
$\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx \overset{1}{=} \int\frac{1}{2}x^3dx+\int 2xdx-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2}{x^2}dx \overset{2}{=}$
$=\frac{1}{2}\int x^3dx+2\int xdx-\int\frac{1}{x}dx+2\int\frac{1}{x^2}dx \overset{5,\,4'',\,5''}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x^4+2\cdot\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+2\cdot(-\frac{1}{x})+C=$
$=\frac{1}{8}x^4+x^2-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.$
Ostatecznie

$$\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\frac{1}{8}x^4+x^2-\ln|x|-\frac{2}{x}+C.$$

Przykład 161.
Obliczyć całkę

$$\int\left(\sin x+\sqrt[5]{x^3}+e^x\right)dx.$$

Rozwiązanie:
$\int\left(\sin x+\sqrt[5]{x^3}+e^x\right)dx \overset{1}{=} \int\sin xdx+\int\sqrt[5]{x^3}dx+\int e^xdx \overset{8,\,6}{=}$
$=-\cos x+\int x^{\frac{3}{5}}dx+e^x \overset{5}{=} -\cos x+\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+e^x+C.$
Ostatecznie

$$\int\left(\sin x+\sqrt[5]{x^3}+e^x\right)dx=-\cos x+\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}}+e^x+C.$$

Przykład 162.
Obliczyć całkę

$$\int xe^xdx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x)=x,\ \ g'(x)=e^x,\ \ f'(x)=1,\ \ g(x)=e^x$$

$\int xe^xdx \overset{3}{=} xe^x-\int e^xdx \overset{6}{=} xe^x-e^x+C.$
Ostatecznie

$$\int xe^xdx=xe^x-e^x+C.$$

Przykład 163.
Obliczyć całkę

$$\int\ln xdx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x)=\ln x,\ \ g'(x)=1,\ \ f'(x)=\frac{1}{x},\ \ g(x)=x$$

$\int\ln xdx \overset{3}{=} x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot xdx=x\ln x-\int dx \overset{5'}{=} x\ln x-x+C.$
Ostatecznie

$$\int\ln xdx=x\ln x-x+C.$$

Przykład 164.
Obliczyć całkę

$$\int (x+1)\sin x dx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = x+1, \ \ g'(x) = \sin x, \ \ f'(x) = 1, \ \ g(x) = -\cos x$$

$\int (x+1)\sin x dx \stackrel{3}{=} (x+1)\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -(x+1)\cos x + \int \cos x dx \stackrel{9}{=}$
$= -(x+1)\cos x + \sin x + C.$
Ostatecznie

$$\int (x+1)\sin x dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C.$$

Przykład 165.
Obliczyć całkę

$$\int (x^2+x+1)e^{-x}dx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = x^2+x+1, \ \ g'(x) = e^{-x}, \ \ f'(x) = 2x+1, \ \ g(x) = -e^{-x}$$

$\int (x^2+x+1)e^{-x}dx \stackrel{3}{=} (x^2+x+1)(-e^{-x}) - \int(2x+1)(-e^{-x})dx =$
$= -(x^2+x+1)e^{-x} + \int(2x+1)e^{-x}dx.$
Ponownie korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = 2x+1, \ \ g'(x) = e^{-x}, \ \ f'(x) = 2, \ \ g(x) = -e^{-x}$$

$\int (2x+1)e^{-x}dx \stackrel{3}{=} -(2x+1)e^{-x} - \int 2(-e^{-x})dx = -(2x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx \stackrel{4,\,6}{=}$
$= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C.$
Ostatecznie

$$\begin{aligned}\int (x^2+x+1)e^{-x}dx &= -(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C = \\ &= e^{-x}(-x^2-x-1-2x-1-2) + C = e^{-x}(-x^2-3x-4) + C.\end{aligned}$$

Przykład 166.
Obliczyć całkę

$$\int e^x \sin x dx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = \sin x, \ \ g'(x) = e^x, \ \ f'(x) = \cos x, \ \ g(x) = e^x$$

$\int e^x \sin x dx \stackrel{3}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$
Ponownie korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = \cos x, \ \ g'(x) = e^x, \ \ f'(x) = -\sin x, \ \ g(x) = e^x$$

$\int e^x \cos x dx \overset{3}{=} e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$
czyli
$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$
Po przeniesieniu całki na lewą stronę równości otrzymujemy
$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$
Ostatecznie

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

Przykład 167.
Obliczyć całkę

$$\int x e^{-x^2} dx.$$

Rozwiązanie:
Aby obliczyć daną całkę, wykonamy podstawienie

$$-x^2 = t$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$-2x dx = dt, \text{ czyli } x dx = -\frac{1}{2} dt$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int x e^{-x^2} dx \overset{4}{=} \int e^t \left(-\frac{1}{2}\right) dt \overset{2}{=} -\frac{1}{2}\int e^t dt \overset{6}{=} -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$
Ostatecznie

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Przykład 168.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie

$$x^4 = t$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$4x^3 dx = dt, \text{ czyli } x^3 dx = \frac{1}{4} dt$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4} \overset{4}{=} \int \frac{\frac{1}{4} dt}{\cos^2 t} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} \overset{10}{=} \frac{1}{4}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{4}\operatorname{tg} x^4 + C.$
Ostatecznie

$$\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} x^4 + C.$$

Przykład 169.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie

$$\ln x = t$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$\frac{1}{x} dx = dt$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \stackrel{4}{=} \int t^2 dt \stackrel{5}{=} \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C.$
Ostatecznie

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C.$$

Przykład 170.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie

$$e^x = t$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$e^x dx = dt$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int \frac{e^x dx}{2e^x+1} dx \stackrel{4}{=} \int \frac{dt}{2t+1}.$
Podstawiając jeszcze raz

$$2t + 1 = u$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$2dt = du, \;\; \text{czyli} \;\; dt = \frac{1}{2} du$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int \frac{dt}{2t+1} \stackrel{4}{=} \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \stackrel{4''}{=} \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |2t + 1| + C$
Ostatecznie

$$\int \frac{e^x dx}{2e^x + 1} = \int \frac{dt}{2t + 1} = \frac{1}{2} \ln |2t + 1| + C = \frac{1}{2} \ln |2e^x + 1| + C.$$

Przykład 171.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie

$$\sqrt{x} = t$$

i różniczkując obustronnie uzyskamy

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \text{ po przekształceniu } \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$$

po podstawieniu otrzymujemy
$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \overset{4}{=} \int \ln t \cdot 2dt = 2\int \ln t dt.$
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(t) = \ln t,\ \ g'(t) = 1,\ \ f'(t) = \frac{1}{t},\ \ g(t) = t$$

$\int \ln t dt \overset{3}{=} \left[t\ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t dt\right] = \left[t\ln t - \int dt\right] \overset{5'}{=} [t\ln t - t] + C.$
Ostatecznie

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \ln t dt = 2\,[t\ln t - t] + C = 2\left[\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \sqrt{x}\right] + C = 2\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x} - 1\right) + C.$$

Przykład 172.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9x - 5}.$$

Rozwiązanie:
Obliczamy wyróżnik trójmianu znajdującego się w mianowniku $\triangle = 121$. Mianownik ma dwa pierwiastki -5 i $\frac{1}{2}$, czyli

$$2x^2 + 9x - 5 \equiv 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5) = (2x-1)(x+5).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{1}{2x^2 + 9x - 5} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+5}.$$

Po porównaniu obu stron otrzymujemy

$$1 \equiv A(x+5) + B(2x-1), \text{ czyli } 1 \equiv (A+2B)x + (5A - B).$$

Z powyższej tożsamości wynika układ

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 5A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{11} \\ B = -\frac{1}{11} \end{cases}.$$

Zatem otrzymujemy następujący rozkład funkcji podcałkowej

$$\frac{1}{2x^2+9x-5} = \frac{\frac{2}{11}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{11}}{x+5}.$$

Przystępujemy do całkowania

$\int \frac{dx}{2x^2+9x-5} = \int \left[\frac{\frac{2}{11}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{11}}{x+5}\right] dx \overset{1}{=} \int \frac{\frac{2}{11}}{2x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{11}}{x+5} dx \overset{2}{=} \frac{2}{11} \int \frac{dx}{2x-1} - \frac{1}{11} \int \frac{dx}{x+5} =$

$= \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{2x-1} - \frac{1}{11} \int \frac{dx}{x+5} \overset{4'}{=} \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{2} \ln|2x-1| - \frac{1}{11} \ln|x+5| + C = \frac{1}{11} \ln\left|\frac{2x-1}{x+5}\right| + C.$

Ostatecznie

$$\int \frac{dx}{2x^2+9x-5} = \frac{1}{11} \ln\left|\frac{2x-1}{x+5}\right| + C.$$

Przykład 173.
Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx.$$

Rozwiązanie:
Stopień licznika jest wyższy niż mianownika, więc po podzieleniu licznika przez mianownik otrzymamy

$$\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} = x+1+\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1},$$

wobec tego

$\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} dx = \int \left(x+1+\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\right) dx \overset{1}{=} \int x dx + \int dx + \int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} dx \overset{5,5'}{=}$

$= \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} dx$

Mianownik całki po prawej stronie rozkładamy na czynniki

$$x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Aby policzyć pozostałą całkę występującą po prawej stronie, funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Po porównaniu stron powyższej tożsamości otrzymujemy:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}.$$

Zatem uzyskujemy następujący rozkład funkcji podcałkowej

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Przystępujemy do całkowania

$\int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\right) dx \overset{1}{=} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \overset{1}{=}$

$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1} \overset{4',13}{=} \ln|x-1| + \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C =$

$= \ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$

Ostatecznie

$$\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1} = \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C.$$

Przykład 174.
Obliczyć całkę
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$$
Rozwiązanie:
$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx \overset{1}{=} \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx \overset{5',13}{=} x + \mathrm{arctg} x + C.$
Ostatecznie
$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x + \mathrm{arctg} x + C.$$

Przykład 175.
Obliczyć całkę
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$
Rozwiązanie:
$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}$
Wykonując podstawienie
$$x+1=\sqrt{2}t$$
i różniczkując obustronnie uzyskamy
$$dx=\sqrt{2}dt$$
po podstawieniu uzyskamy
$\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} \overset{4}{=} \int \frac{\sqrt{2}dt}{2t^2+2} \overset{2}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \overset{13}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg} t + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$
Ostatecznie
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

ZADANIA:
Obliczyć następujące całki:

24.1. $\int (4x^6-2x^2+6x-5)dx$

24.2. $\int (3x^2-2x+x-5\cos x)dx$

24.3. $\int \left(x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

24.4. $\int \left(\sin x+3\cos x-\sqrt[3]{x}\right)dx$

24.5. $\int \left(3\sqrt[5]{x^3}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

24.6. $\int \left[(x+1)(3x-2)^2\right]dx$

24.7. $\int \left[5\sqrt[7]{x^2}+e^x+(3x^2-2x+5)^2\right]dx$

24.8. $\int \frac{(x^2-1)^2}{x}dx$

24.9. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx$

24.10. $\int \frac{x^4+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x}dx$

24.11. $\int \left(4x^2-2^{x-4}\right)dx$

24.12. $\int \frac{(x^2-1)^5}{x}dx$

24.13. $\int \frac{(1-x)^3}{\sqrt{x}}dx$

24.14. $\int 2^x\cdot 7^x dx$

24.15. $\int (3^x+1)^2dx$

24.16. $\int \frac{5^{3x}+2}{5^x}dx$

24.17. $\int \frac{3(7^x)-2(5^x)}{4^x}dx$

24.18. $\int \frac{x^2-1}{1-x}dx$

24.19. $\int \left(\frac{1}{1+x}+2x\right)dx$

24.20. $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$

24.21. $\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}dx$

24.22. $\int \left(\frac{x-1}{x^2}+x^2\right)dx$

24.23. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{4-4x^2}dx$

24.24. $\int \sqrt{x\sqrt{x}}dx$

24.25. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}dx$

24.26. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

przez podstawienie:

24.27. $\int \frac{x}{3+x^2}dx$

24.28. $\int \frac{x}{(x^2+3)^5}dx$

24.29. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+1}}dx$

24.30. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

24.31. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

24.32. $\int \left(e^{2x}+e^{-3x}\right)dx$

24.33. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$

24.34. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$

24.35. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3}dx$

24.36. $\int (3x+5)^{20}dx$

24.37. $\int \sin(2-3x)dx$

24.38. $\int e^{2x+3}dx$

24.39. $\int 2x(x^2+1)^3dx$

24.40. $\int (3x^2+2)\sqrt{x^3+2x+3}dx$

24.41. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

24.42. $\int \frac{dx}{x(3\ln x+5)}$

24.43. $\int (e^x+2)^6e^xdx$

24.44. $\int \frac{x}{\sqrt[5]{2x^2+1}}dx$

24.45. $\int \cos^3 x\sin 2xdx$

24.46. $\int \sin^3 x\cos^5 xdx$

24.47. $\int \sin 2x2^{\cos^2 x}dx$

24.48. $\int \frac{3^x}{1+9^x}dx$

24.49. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}\, x}}$

24.50. $\int \frac{dx}{4+(x-1)^2}$

24.51. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

24.52. $\int \frac{(\mathrm{arctg} x)^4}{1+x^2}dx$

24.53. $\int \mathrm{ctg}^3\, xdx$

24.54. $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$

24.55. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(\mathrm{arcsin} x)^3}$

24.56. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$

przez części:

24.57. $\int e^x(x^2+1)dx$

24.58. $\int e^{3x}(2x^3-3x-1)dx$

24.59. $\int \sin x(x+1)dx$

24.60. $\int \cos x(2x^4-4x^2+2x-1)dx$

24.61. $\int x\cdot 3^xdx$

24.62. $\int xe^{-x}dx$

24.63. $\int e^{-x}\cos xdx$

24.64. $\int e^x\sin xdx$

24.65. $\int e^{5x}\cos xdx$

24.66. $\int x^2e^{-x}dx$

24.67. $\int \ln\sqrt{x}dx$

24.68. $\int \mathrm{arctg} xdx$

24.69. $\int \cos(\ln x)dx$

24.70. $\int \sin 2xe^{\sin x}dx$

24.71. $\int x^3\ln^2 xdx$

24.72. $\int \ln^2 xdx$

24.73. $\int e^x\sin 3xdx$

24.74. $\int e^{-3x}\cos xdx$

24.75. $\int \sin 2x\cos 3xdx$

24.76. $\int \sqrt{x}\ln xdx$

24.77. $\int \ln(1+x^2)dx$

24.78. $\int x^5\ln xdx$

24.79. $\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx$

24.80. $\int e^{2x}\cdot\sin e^xdx$

24.81. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

24.82. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

24.83. $\int \mathrm{arctg}(\frac{x}{5})dx$

24.84. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$

24.85. $\int xe^x\sin xdx$

24.86. $\int x^2e^{-x}\cos xdx$

wymierne:

24.87. $\int \frac{x+6}{x^2-3}dx$

24.88. $\int \frac{5x+11}{x^2-4x-5}dx$

24.89. $\int \frac{dx}{x^2+2x-1}$

24.90. $\int \frac{x-1}{4x^2-4x+1}dx$

24.91. $\int \frac{x-1}{x(2x-1)}dx$

24.92. $\int \frac{6x}{x^2+4x+13}dx$

24.93. $\int \frac{3x^2+2x-6}{x^2-x-2}dx$

24.94. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$

24.95. $\int \frac{x^3-3x^2+5x-9}{x^2-3x}dx$

24.96. $\int \frac{x^2+5x+10}{(x+3)(x-1)(x-2)}dx$

24.97. $\int \frac{17x^2-x-26}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

24.98. $\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}dx$

24.99. $\int \frac{xdx}{x^4-4x^3+10x^2-12x+9}dx$

24.100. $\int \frac{3x^4-12x^3+18x^2-12x+7}{(x-1)^2(x^2-2x+2)^3}dx$

25 Całka oznaczona. Zastosowania całek

Przykład 176.
Obliczyć całkę

$$\int_1^5 3x^2 dx.$$

Rozwiązanie:
$\int_1^5 3x^2 dx = \left[x^3\right]\Big|_1^5 = 5^3 - 1^3 = 125 - 1 = 124.$

Przykład 177.
Obliczyć całkę

$$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 4) dx.$$

Rozwiązanie:
$\int_1^3 (3x^2 + 2x + 4) dx = \left[x^3 + x^2 + 4x\right]\Big|_1^3 = \left[3^3 + 3^2 + 4 \cdot 3\right] - \left[1^3 + 1^2 + 4 \cdot 1\right] =$
$= [27 + 9 + 12] - [1 + 1 + 4] = 48 - 6 = 42.$

Przykład 178.
Obliczyć całkę

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{x+1} + 2x\right) dx.$$

Rozwiązanie:
$\int_0^4 \left(\frac{1}{x+1} + 2x\right) dx = \left[\ln|x+1| + x^2\right]\Big|_0^4 = \left[\ln 5 + 4^2\right] - \left[\ln 1 + 0^2\right] = 16 + \ln 5.$

Przykład 179.
Obliczyć całkę

$$\int_0^1 3e^x dx.$$

Rozwiązanie:
$\int_0^1 3e^x dx = 3\int_0^1 e^x dx = 3\left[e^x\right]\Big|_0^1 = 3\left[e^1 - e^0\right] = 3(e - 1).$

Przykład 180.
Obliczyć całkę

$$\int_1^2 (x + 3)^3 dx.$$

Rozwiązanie:
Powyższą całkę policzymy podstawiając

$$x + 3 = u,$$

co po zróżniczkowaniu daje

$$dx = du.$$

Zmieniamy jeszcze granice całkowania

$$\text{dla } \ x=1 \ \text{ mamy } \ u=4, \ \text{ natomiast dla } \ x=2 \ \text{ mamy } \ u=5$$

czyli
$\int\limits_1^2 (x+3)^3 dx = \int\limits_4^5 u^3 du = \left[\frac{1}{4}u^4\right]\Big|_4^5 = \left[\frac{1}{4}\cdot 5^4\right] - \left[\frac{1}{4}\cdot 4^4\right] = \frac{625}{4} - \frac{256}{4} = \frac{369}{4} = 92\frac{1}{4}.$

Przykład 181.
Obliczyć całkę

$$\int\limits_2^4 x^2\left(\frac{1}{2}x^3+1\right)dx.$$

Rozwiązanie:
Powyższą całkę policzymy podstawiając

$$\frac{1}{2}x^3+1 = u,$$

co po zróżniczkowaniu daje

$$\frac{3}{2}x^2 dx = du \ \text{ więc } \ x^2 dx = \frac{2}{3}du.$$

Zamieniamy jeszcze granice całkowania

$$\text{dla } \ x=2 \ \text{ mamy } \ u=5, \ \text{ natomiast dla } \ x=4 \ \text{ mamy } \ u=33$$

czyli
$\int\limits_2^4 x^2\left(\frac{1}{2}x^3+1\right)dx = \int\limits_5^{33} u\cdot\frac{2}{3}du = \frac{2}{3}\int\limits_5^{33} udu = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}u^2\right]\Big|_5^{33} = \frac{2}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 33^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 5^2\right)\right] =$
$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1089 - \frac{1}{2}\cdot 25\right) = \frac{2}{3}\cdot 532 = 354\frac{2}{3}.$

Przykład 182.
Obliczyć całkę

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części

$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g,$$

gdzie

$$f(x)=x, \ \ g'(x)=\sin x, \ \ f'(x)=1, \ \ g(x)=-\cos x$$

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx = \left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (-0\cos 0)\right] + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 0 + [\sin x]|_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

Przykład 183.
Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx.$$

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = x^2, \ \ g'(x) = \cos x, \ \ f'(x) = 2x, \ \ g(x) = \sin x$$

$\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x\right]\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2x \sin x dx = \left[\pi^2 \sin \pi - 0^2 \sin 0\right] - 2 \int\limits_0^{\pi} x \sin x dx =$
$= \left[\pi^2 \cdot 0 - 0\right] - 2 \int\limits_0^{\pi} x \sin x dx = -2 \int\limits_0^{\pi} x \sin x dx.$
Ponownie korzystamy ze wzoru na całkowanie przez części, gdzie

$$f(x) = x, \ \ g'(x) = \sin x, \ \ f'(x) = 1, \ \ g(x) = -\cos x$$

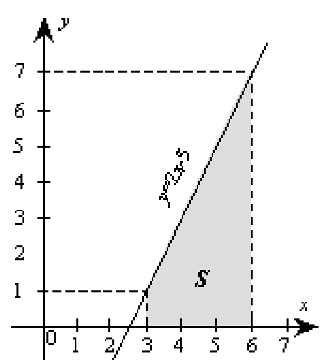
$\int\limits_0^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x]|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} (-\cos x) dx = [-x \cos x]|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x dx =$
$= [-\pi \cos \pi - (-0 \cos 0)] + [\sin x]|_0^{\pi} = [-\pi(-1) + 0] + [\sin \pi - \sin 0] = ([\pi + 0] + [0 - 0]) = \pi.$
Ostatecznie

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = -2 \int_0^{\pi} x \sin x dx = -2\pi.$$

Przykład 184.
Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji

$$f(x) = 2x - 5$$

i osią OX dla $x \in [3, 6]$.
Rozwiązanie:



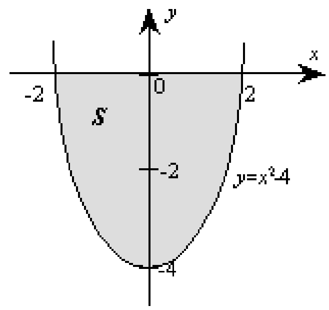
Rysunek 22: Wykres funkcji $f(x) = 2x - 5$.

$S = \int\limits_3^{6} (2x - 5) dx = \left[x^2 - 5x\right]\Big|_3^{6} = \left(6^2 - 5 \cdot 6\right) - \left(3^2 - 5 \cdot 3\right) = 6 - (-6) = 12.$

Przykład 185.
Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresem funkcji

$$f(x) = x^2 - 4$$

i osią OX.
Rozwiązanie:



Rysunek 23: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4$.

Punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 4$ z osią OX mają współrzędne

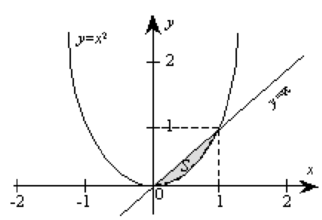
$$(-2, 0) \text{ i } (2, 0).$$

Dla $x \in [-2, 2]$ mamy $f(x) \leqslant 0$. Stąd poszukiwane pole obliczymy następująco
$S = -\int\limits_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]\Big|_{-2}^{2} = -\left[\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)\right] = -\left[-\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right] = 10\frac{2}{3}.$

Przykład 186.
Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi

$$f(x) = x^2 \text{ i } g(x) = x.$$

Rozwiązanie:



Rysunek 24: Wykres funkcji $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$.

Punkty przecięcia wykresów mają współrzędne

$$(0, 0) \text{ i } (1, 1).$$

Stąd poszukiwane pole obliczymy następująco
$S = \int\limits_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

Przykład 187.
Wydajność pracownika określona jest wzorem

$$w(t) = 8t - t^2$$

i wyrażona w zł / godz., gdzie $t-$ liczba godzin, $t \in [0, 8]$. Obliczyć jego produkcję $\left(P = \int\limits_a^b w(t)dt \right)$:
a) w czasie pierwszych dwóch godzin pracy,
b) w czasie ośmiogodzinnego dnia pracy.
Rozwiązanie:
a) $P = \int\limits_0^2 w(t)dt = \int\limits_0^2 (8t - t^2)dt = \left[4t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]\Big|_0^2 = \left[4 \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3\right] - \left[4 \cdot 0^2 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right] =$
$= \left[16 - \frac{8}{3}\right] = 13\frac{1}{3}$
b) $P = \int\limits_0^8 w(t)dt = \int\limits_0^8 (8t - t^2)dt = \left[4t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]\Big|_0^8 = \left[4 \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot 8^3\right] - \left[4 \cdot 0^2 - \frac{1}{3} \cdot 0^3\right] =$
$= \left[256 - \frac{512}{3}\right] = 85\frac{1}{3}$.

Przykład 188.
Stopa przyrostu dochodu z akcji promocyjnej firmy ALO jest funkcją liczby dni t trwania akcji

$$s(t) = -10t^3 + 170t^2 + 580t + 400,$$

gdzie $s(t)$ jest wyrażona w zł / dzień. Wyznaczyć:
a) dochód uzyskany w ciągu pierwszych dwóch dni,
b) dochód uzyskany w ciągu trzeciego i czwartego dnia,
c) liczbę dni, które maksymalizują dochód z promocji.
Rozwiązanie:
a) $\int\limits_0^2 s(t)dt = \int\limits_0^2 (-10t^3 + 170t^2 + 580t + 400)dt = \frac{7120}{3}$ zł
b) $\int\limits_2^4 s(t)dt = \int\limits_2^4 (-10t^3 + 170t^2 + 580t + 400)dt = \frac{20560}{3}$ zł
c) Maksymalny dochód uzyskujemy kończąc promocję w momencie, gdy przyrost będzie zerowy

$$s(t) = 0 \Longleftrightarrow t = -2 \vee t = -1 \vee t = 20.$$

Maksymalny dochód uzyskamy po 20 dniach (pierwsze dwa rozwiązania nie należą do dziedziny praktycznej).

Przykład 189.
Funkcje podaży i popytu na pewien towar mają postać

$$PD(c) = 4c - 1, \quad PP(c) = 4 - c^2,$$

gdzie $PD(c)$ i $PP(c)$ są mierzone w milionach sztuk tego towaru, zaś c cena w mln zł. Jaka jest użyteczność towaru oraz nadwyżka producenta

$$P_S = \int_a^b PD(c)dc$$

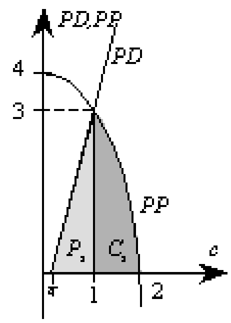
i nadwyżka konsumenta

$$C_S = \int_b^d PP(c)dc\,?$$

Rozwiązanie:
Wyznaczamy punkty charakterystyczne

$$PD(c) = PP(c) \iff c^2 + 4c - 5 = 0 \iff c = 1$$

(cenę $c = -5$ odrzucamy, ponieważ nie należy do dziedziny praktycznej).



Rysunek 25: Wykres funkcji $PD(c) = 4c - 1$ i $PP(c) = 4 - c^2$.

Cena równowagi wynosi $c = 1$ przy popycie $PP(1) = 3$. Użyteczność towaru wynosi

$$U = PP(1) \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3.$$

$P_S = \int\limits_{0,25}^{1} PD(c)dc = \int\limits_{0,25}^{1} (4c-1)dc = [2c^2 - c]\Big|_{0,25}^{1} = 1,125\text{mln zł}$
$C_S = \int\limits_{1}^{2} PP(c)dc = \int\limits_{1}^{2} (4-c^2)dc = \left[4c - \frac{c^3}{3}\right]\Big|_{1}^{2} = \frac{5}{3}\text{mln zł}.$

ZADANIA:
Obliczyć następujące całki oznaczone:

25.1. $\int_{-3}^{2} 2dx$
25.2. $\int_{4}^{5} 3xdx$
25.3. $\int_{2}^{5} (x+1)dx$
25.4. $\int_{1}^{5} (7x-3)dx$
25.5. $\int_{1}^{8} (x^3-1)dx$
25.6. $\int_{1}^{4} (x^2-2x+2)dx$
25.7. $\int_{0}^{2} (x^2+x+3)dx$
25.8. $\int_{-1}^{3} (x+1)(x+2)dx$
25.9. $\int_{1}^{4} (9-x)\sqrt{x}dx$
25.10. $\int_{3}^{5} (x+1)^2dx$
25.11. $\int_{0}^{5} 2x(x^2+3)dx$
25.12. $\int_{1}^{3} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$
25.13. $\int_{0}^{\ln e} \left(\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right) dx$
25.14. $\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{x^2}dx$
25.15. $\int_{0}^{\pi} \sin xdx$
25.16. $\int_{0}^{1} (3x-2)^{15}dx$
25.17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin(\pi - 3x)dx$
25.18. $\int_{0}^{1} xe^{x^2}dx$
25.19. $\int_{2}^{e} \frac{dx}{x\ln x}$
25.20. $\int_{1}^{2} (3x^2+2)\sqrt{x^3+2x+3}dx$
25.21. $\int_{1}^{3} \frac{4x}{x^2+1}dx$
25.22. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
25.23. $\int_{1}^{2} \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$
25.24. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(3\ln x+5)}$
25.25. $\int_{0}^{\ln 2} (e^x+2)^6e^xdx$
25.26. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (x^2+x-3)\sin xdx$
25.27. $\int_{1}^{2} x\ln xdx$
25.28. $\int_{-1}^{1} 2^x7^xdx$
25.29. $\int_{1}^{e} \ln^2 xdx$
25.30. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin xdx$
25.31. $\int_{0}^{2} x\cdot 3^xdx$
25.32. $\int_{0}^{1} xe^xdx$
25.33. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos xdx$
25.34. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}dx$

25.35. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

25.36. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2+6x+10} dx$

25.37. $\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}} dx$

25.38. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$

25.39. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$

25.40. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx$

25.41. $\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg} x dx$

25.42. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

25.43. $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$

25.44. $\int_0^4 \sqrt[4]{1+2x} dx$

25.45. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^2+1)}$

25.46. $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

25.47. $\int_2^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

25.48. $\int_0^1 \sqrt{e^x - 1} dx$

25.49. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$

25.50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4dx}{3+5\sin x}$

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresem funkcji a osią OX:

25.51. $f(x) = x^2 + 4, \ \ x \in [0,4]$

25.52. $f(x) = x + 2, \ \ x \in [0,2]$

25.53. $f(x) = 8 - x^2, \ \ x \in [0,2]$

25.54. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1, \ \ x \in [0,4]$

25.55. $f(x) = 6, \ \ x \in [2,4]$

25.56. $f(x) = \sin x, \ \ x \in [0,\pi]$

25.57. $f(x) = 2x - 5, \ \ x \in [3,6]$

25.58. $f(x) = x^3, \ \ x \in [0,2]$

25.59. $f(x) = e^x, \ \ x \in [0,1]$

25.60. $f(x) = e^{-x}, \ \ x \in [0,5]$

25.61. $f(x) = \sqrt{x}, \ \ x \in [1,4]$

25.62. $f(x) = -x + 6, \ \ x \in [0,6]$

25.63. $f(x) = 4 - x^2, \ \ x \in [2,3]$

25.64. $f(x) = 4 - x, \ \ x \in [0,2]$

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi:

25.65. $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$

25.66. $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x}$

25.67. $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x^2 + 2$

25.68. $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x + 6$

25.69. $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$

25.70. $f(x) = x^2 - 2$ i $g(x) = 2x + 1$

25.71. $f(x) = x^2 + 2$ i $g(x) = 10$

25.72. $f(x) = 3x^2 + 2$ i $g(x) = 7x$

25.73. $f(x) = x^2$ i $g(x) = 10$

25.74. $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$ i $g(x) = 1$

25.75. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

25.76. $\frac{1}{4}x^2 - 2x + y = 0$ i $x = 4y - 6$

25.77. $f(x) = e^x, \ \ g(x) = 0, \ \ x = 0$ i $x = 1$

25.78. $f(x) = \sqrt{x}, \ \ g(x) = -x + 2$ i $x = 0$

25.79. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \ \ g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $h(x) = 0$

Dla podanych niżej równań krzywych podaży i popytu obliczyć użyteczność towaru oraz nadwyżkę producenta i konsumenta:

25.80. $PD(c) = c + 2, \ \ PP(c) = -0,5c + 10$

25.81. $PD(c) = c^2, \ \ PP(c) = -4c + 5$

25.82. $PD(c) = c^2, \ \ PP(c) = -7c + 30$

25.83. $PD(c) = c^2 + 2c + 5, \ \ PP(c) = (c - 3)^2$

25.84. Wydajność pracownika określona jest wzorem $w(t) = -2 + 25t - 2t^2$ wyrażona w zł / godz., gdzie: $t-$ liczba godzin, $t \in [0,8]$. Obliczyć jego produkcję:

a) w czasie pierwszych trzech godzin pracy,

b) w czasie trzeciej, czwartej i piątej godziny,

c) w czasie ośmiogodzinnego dnia pracy.

25.85. Stopa przyrostu sprzedanych samochodów wyraża się wzorem $s(t) = 1000 + 20t$ sztuk / miesiąc. Wyznaczyć liczbę sprzedanych samochodów:

a) w ciągu pierwszych 6 miesięcy,

b) w ciągu 6-go miesiąca,

c) w ciągu roku.

25.86. Stopa przyrostu liczby sprzedanych akcji w banku wyraża się wzorem $s(t) = 200 + 300t^2$ akcji dziennie. Wyznaczyć liczbę sprzedanych akcji:

a) w ciągu pierwszych 7 dni,

b) w ciągu 5-go, 6-go i 7-go dnia,

c) w ciągu miesiąca (30 dni).

Odpowiedzi

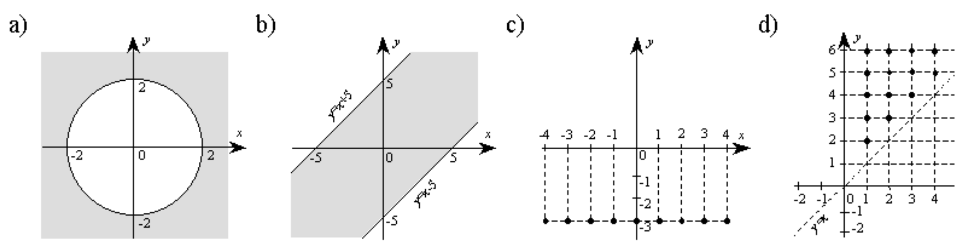
Elementy logiki

1.1. $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 0 \wedge q \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1)$; **1.2.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 0 \wedge q \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 0)$; **1.3.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1)$; **1.4.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1)$; **1.5.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 0) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1)$; **1.6.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 1 \wedge r \equiv 0) \vee (p \equiv 0 \wedge q \equiv 1 \wedge r \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1 \wedge r \equiv 1)$; **1.7.** $(p \equiv 0 \wedge q \equiv 0 \wedge r \equiv 1) \vee (p \equiv 0 \wedge q \equiv 1 \wedge r \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 0 \wedge r \equiv 1) \vee (p \equiv 1 \wedge q \equiv 1 \wedge r \equiv 1)$; **1.8.** tak; **1.9.** tak; **1.10.** nie; **1.11.** nie; **1.12.** tak; **1.13.** tak; **1.14.** tak; **1.15.** nie; **1.16.** tak; **1.27.** 1; **1.28.** 0; **1.29.** 0; **1.30.** 1; **1.31.** 1; **1.32.** 0; **1.33.** 1; **1.34.** 1; **1.35.** 0; **1.36.** 0; **1.37.** 0; **1.38.** 1; **1.39.** 1; **1.40.** 1; **1.41.** 1; **1.42.** 0; **1.43.** 1; **1.44.** 1; **1.45.** 0; **1.46.** 0; **1.47.** 1; **1.48.** $\forall_{x\in\mathbb{R}} : (x^2 \geqslant 0 \vee 5^x \geqslant 2),\ 1$; **1.49.** $\forall_{x\in\mathbb{N}} : (\ln x \neq 1 \vee |x| > 0),\ 1$; **1.50.** $\forall_{x\in\mathbb{R}} : |\cos x| \leqslant 1,\ 1$; **1.51.** $\forall_{x\in\mathbb{Z}} : x^2 \neq 2,\ 1$; **1.52.** $\forall_{x\in\mathbb{R}} : \sin 2x \neq 2\sin x,\ 0$; **1.53.** $\exists_{x\in(0,1)} : e^x \leqslant 1,\ 0$; **1.54.** $\exists_{x\in\mathbb{N}} : \sqrt{x^2} \neq x,\ 0$; **1.55.** 1; **1.56.** 0; **1.57.** 0; **1.58.** 0; **1.59.** 1; **1.60.** 1; **1.61.** 0; **1.62.** $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}} : x^2 + y^2 = 1,\ 0$; **1.63.** $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}} : (x = 3y) \wedge (y \neq 3x),\ 1$; **1.64.** $\forall_{x\in\mathbb{N}}\ \forall_{y\in\mathbb{N}} : \left(\frac{x^3}{y} = \frac{y^3}{x}\right) \wedge (x \neq y),\ 0$; **1.65.** tak; **1.66.** nie; **1.67.** tak; **1.68.** Istnieje rozwiązanie, które nie rodzi nowych problemów. **1.69.** Istnieją najprostsze myśli, które nie są sformułowne w skomplikowany sposób. **1.70.** Istnieje granat, który po wyciągnięciu zawleczki nie przestaje być twoim przyjacielem. **1.71.** Wszystkie rzeczy da się wytłumaczyć. **1.72.** Jaś się nie nauczy i Jan będzie umiał. **1.73.** $p \wedge \sim q$; **1.74.** $\sim (p \wedge q)$; **1.75.** $\sim (p \vee q)$; **1.76.** $p \wedge \sim q \wedge \sim r$.

Algebra zbiorów

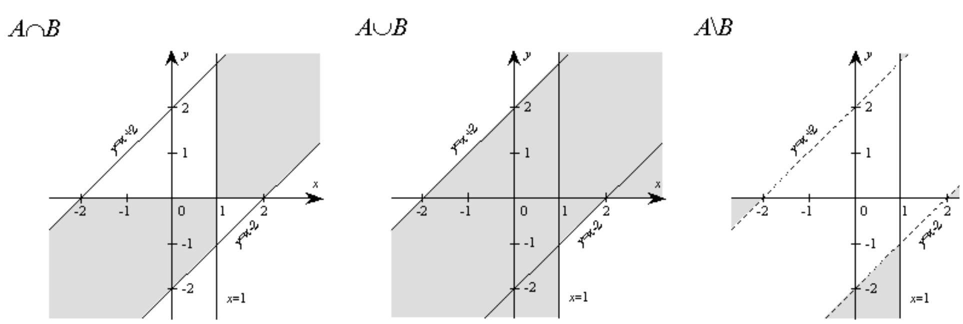
2.2. $\{1,2,3\}$; **2.3.** a) $\{-1,0,1,2,10\}$, b) $\emptyset$; **2.4.** a) $A \cap B = \emptyset,\ A \cup B = (-\infty,0) \cup (0,2] \cup (5,\infty),\ A \setminus B = (5,\infty)$; b) $A \cap B = [-4,-1) \cup (0,6],\ A \cup B = \mathbb{R},\ A \setminus B = (-\infty,-4) \cup (6,\infty)$; c) $A \cap B = \{1\},\ A \cup B = \{-2,-1,0,1,2\},\ A \setminus B = \{-2,-1,0\}$; **2.5.** $m > 5$; **2.6.** a) prawdziwa; b) nie prawdziwa; c) prawdziwa; **2.7.** a) prawdziwa; b) prawdziwa; c) nie prawdziwa; **2.8.** a) $4\mathbb{Z}$; b) $2\mathbb{Z}$; c) $\emptyset$; d) $6\mathbb{Z}$; e) $\{0, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm10, \pm12, \pm14, \pm15, \pm16, \pm18, ...\}$; f) nie; g) tak; **2.9.** a) prawdziwa; b) nieprawdziwa; c) prawdziwa; **2.10.** $k \in \left(-1, \frac{3}{5}\right)$;

2.11.

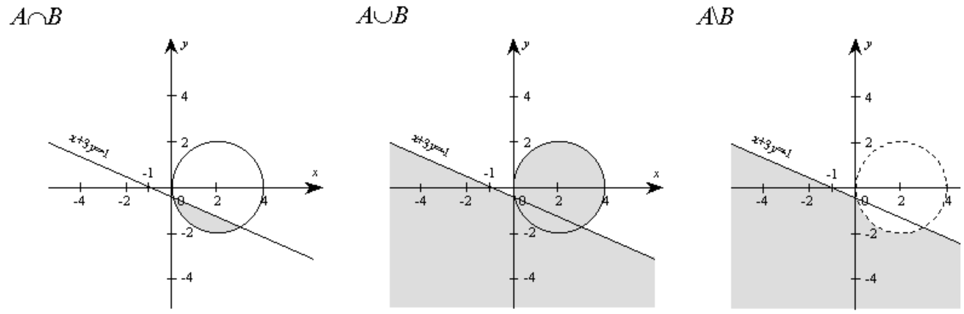


2.12.

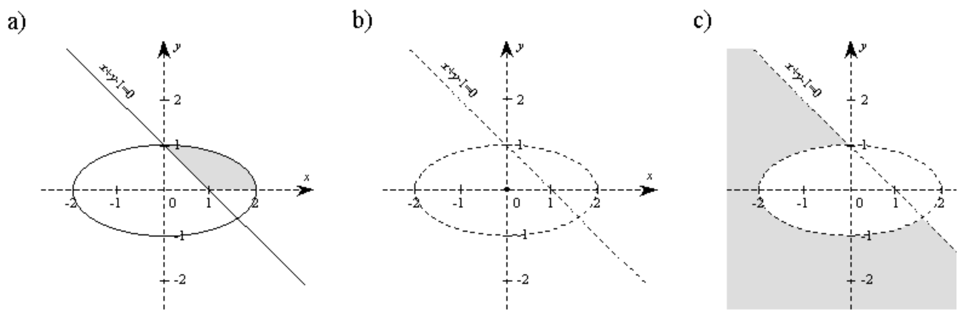
a)



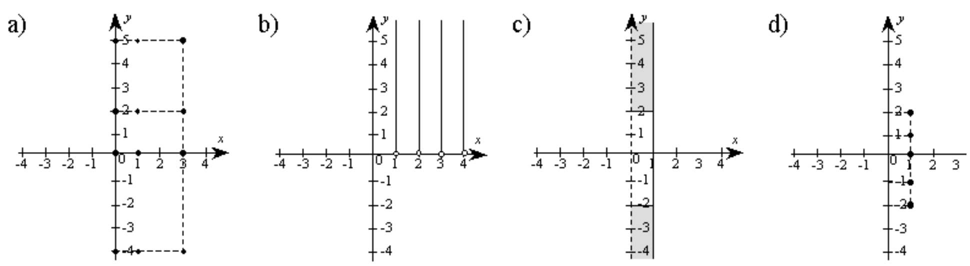
b)



2.13.



2.14.



Relacje. Relacje równoważności

3.1. nie, tak, nie; **3.2.** tak, tak, tak; **3.3.** nie, tak, nie; **3.4.** nie, tak, nie; **3.5.** tak, tak, tak; **3.6.** tak, tak, tak; **3.7.** tak, nie, tak; **3.8.** nie, nie, tak; **3.9.** nie, tak, nie; **3.10.** nie, nie, nie; **3.11.** nie, tak, nie; **3.12.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{N}$; **3.13.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{Z}$; **3.14.** nie; **3.15.** tak, $[a] = \{-a, a\},\ a \in \mathbb{R}$; **3.16.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{R}$; **3.17.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{R}_+$; **3.18.** nie; **3.19.** tak, $[1] = \{2k+1 :\ k \in \mathbb{Z}\},\ [2] = \{2k :\ k \in \mathbb{Z}\}$; **3.20.** tak, $[0] = \{3k :\ k \in \mathbb{Z}\},\ [1] = \{3k+1 :\ k \in \mathbb{Z}\},\ [2] = \{3k+2 :\ k \in \mathbb{Z}\}$; **3.21.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{R}$; **3.22.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{R}$; **3.23.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; **3.24.** tak, $[k] = [k, k+1),\ k \in \mathbb{Z}$; **3.25.** tak, $[0] = \{0\},\ [1] = (0, 1],\ [-1] = [-1, 0)$; **3.26.** tak, $[a] = \{a\},\ a \in \mathbb{R}$; **3.27.** tak, $[1] = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},\ [2] = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$; **3.28.** tak, $[2] = \{4k+2 :\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},\ [4] = \{4k :\ k \in \mathbb{N}\}$; **3.29.** tak, $[0] = \{pk : k \in \mathbb{Z}\},\ [1] = \{pk+1 : k \in \mathbb{Z}\},\ [2] = \{pk+2 : k \in \mathbb{Z}\}$,..., $[p-1] = \{pk+p-1 : k \in \mathbb{Z}\}$; **3.30.** tak, $[0] = \{pk : k \in \mathbb{Z}\},\ [1] = \{pk+1 : k \in \mathbb{Z}\},\ [2] = \{pk+2 : k \in \mathbb{Z}\}$,..., $[p-1] = \{pk+p-1 : k \in \mathbb{Z}\}$; **3.31.** nie; **3.32.** tak; **3.33.** tak; **3.34.** tak.

Funkcje i ich własności

4.1. nie; **4.2.** nie; **4.3.** tak, nie; **4.4.** tak, np. zamknąć 3 sklepy, a pozostałym przyporządkować różne hurtownie; **4.5.** każdemu pracownikowi należy przyporządkować jedno biurko; **4.6.** nie; **4.7.** tak, tak; **4.8.** tak, nie; **4.9.** tak, nie; **4.10.** $Y = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$; **4.11.** $Y = \mathbb{R}_+$; **4.12.** $Y = \{0, 1, 4, 9, 16, ..., k^2, ...\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; **4.13.** $Y = [0, 25]$; **4.14.** Funkcja jest iniekcją, suriekcją i bijekcją; **4.15.** Funkcja jest iniekcją, suriekcją i bijekcją; **4.16.** Funkcja jest iniekcją, nie jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.17.** Funkcja nie jest iniekcją, jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.18.** Funkcja nie jest iniekcją, jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.19.** Funkcja nie jest iniekcją, nie jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.20.** Funkcja nie jest iniekcją, jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.21.** Funkcja jest iniekcją, suriekcją i bijekcją; **4.22.** Funkcja nie jest iniekcją, jest suriekcją i nie jest bijekcją; **4.23.** nie; **4.24.** tak; **4.25.** nie; **4.26.** nie; **4.27.** tak; **4.28.** nie; **4.29.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5} - 2$, $Df^{-1} = \mathbb{R}$; **4.30.** $f^{-1}(x) = x$, $Df^{-1} = [0, +\infty)$; **4.31.** $f^{-1}(x) = 3\sqrt[8]{x} + 3$, $Df^{-1} = [0, +\infty)$; **4.32.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2$, $Df^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; **4.33.** $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$, $Df^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; **4.34.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $Df^{-1} = (-1, 1)$; **4.35.** $f^{-1}(x) = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{1+12x}\right)^2$, $Df^{-1} = [0, +\infty)$; **4.36.** $f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+4}) - 1$, $Df^{-1} = \mathbb{R}$; **4.37.** Funkcja ta nie jest iniekcją, czyli nie można wyznaczyć funkcji odwrotnej; **4.38.** $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{1-|2x-1|}$, $Df^{-1} = (0, 1)$; **4.39.** nie jest suriekcją, czyli nie można wyznaczyć funkcji odwrotnej; **4.40.** $f^{-1}(x) = 4^{\frac{1}{x}}$, $Df^{-1} = (0, +\infty)$; **4.41.** $f^{-1}(x) = \arccos\sqrt{x}$, $Df^{-1} = [0, 1]$; **4.42.** nie; **4.43.** nie; **4.44.** nie; **4.45.** tak; **4.46.** tak; **4.47.** tak; **4.48.** tak; **4.49.** $f(A) = \{-14, 1, 37\}$, $f^{-1}(A) = \left\{0, \frac{5}{3}, \frac{17}{3}\right\}$; **4.50.** $f(A) = \{\frac{1}{243}, \frac{1}{3}, 1, 3, 27\}$, $f^{-1}(A) = \left\{\frac{1}{4}\log_3\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\log_3\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right\}$; **4.51.** $f(A) = \left[\frac{1}{625}, 1\right]$, $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$; **4.52.** $f(A) = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $f^{-1}(A) = \left(\frac{11}{3}, \infty\right)$; **4.53.** $f(A) = \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup (-1, +\infty)$, $f^{-1}(A) = (-\infty, -6) \cup \left(-6, -\frac{14}{5}\right] \cup \left(-\frac{10}{7}, +\infty\right)$; **4.54.** $f(A) = [2, +\infty)$, $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$; **4.55.** $f(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$, $f^{-1}(A) = \left\{-2, -\sqrt{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, 2\right\}$; **4.56.** $f(A) = \{-3, -2, -1\}$, $f^{-1}(A) = [-1, +\infty)$; **4.57.** $f(A) = [0, 1)$, $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$; **4.58.** $f(A) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $f^{-1}(A) = [-3, 4)$; **4.59.** $f(A) = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\} \cup (0, 4)$, $f^{-1}(A) = [0, \sqrt{2})$; **4.60.** $f(A) = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup \{5\}$, $f^{-1}(A) = [-14, 0) \cup (2, 3]$; **4.61.** $f(A) = \{-1, 0\} \cup [2, 17]$, $f^{-1}(A) = \left(-\infty, \sqrt{3}\right]$; **4.62.** $(f \circ f)(x) = x^2(x-2)^2$; **4.63.** $(f \circ f)(x) = \cos(\cos x)$; **4.64.** $(f \circ f)(x) = x^4$, $x \neq 0$; **4.65.** $(f \circ f)(x) = \frac{x^4}{3x^4+8x^2+8}$; **4.66.** $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = a^6 x$; **4.67.** $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = x$, $x \neq 0$; **4.68.** $(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = \operatorname{sgn}(x)$; **4.69.** $(f \circ g)(x) = (x+3)^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 10x + 23$; **4.70.** $(f \circ g)(x) = \sin\left(2^{x^2}\right)$, $(g \circ f)(x) = 2^{\sin^2 x}$; **4.71.** $(f \circ g)(x) = x^{12}$, $(g \circ f)(x) = x^{12}$, $x \neq 0$; **4.72.** $(f \circ g)(x) = x$, $(g \circ f)(x) = x$, $x > 0$;

4.73. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 & \text{gdy} \quad x > 1 \\ -1 & \text{gdy} \quad x \leqslant 1 \end{cases}$, $\quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} -9 & \text{gdy} \quad x \geqslant 2 \\ 1 & \text{gdy} \quad x \in [-1, 2) \\ -x^2 & \text{gdy} \quad x < -1 \end{cases}$;

4.74. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x \geqslant 1 \\ -2 & \text{gdy} \quad x < 1 \end{cases}$, $\quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy} \quad x \geqslant 0 \\ -\frac{1}{4} & \text{gdy} \quad x < 0 \end{cases}$;

4.75. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} \ln x & \text{gdy} \quad x \geqslant 1 \\ -\ln x & \text{gdy} \quad x \in (0, 1) \\ \sqrt{-x} & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$, $\quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} \ln|x| & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$.

Układy równań liniowych. Metoda eliminacji Gaussa

5.1. $x = 3$, $y = 2$; **5.2.** sprzeczny; **5.3.** $x = 3$, $y = 2$; **5.4.** sprzeczny; **5.5.** $x = -1$, $y = 1$; **5.6.** $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$; **5.7.** $x = -\frac{2}{3} - z$, $y = \frac{2}{3}$, $z \in \mathbb{R}$; **5.8.** $x = -55$, $y = 21$, $z = -26$; **5.9.** $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$; **5.10.** $x = -4z + 2$, $y = 3z - 1$, $z \in \mathbb{R}$; **5.11.** $x = -z$, $y = 0$, $z \in \mathbb{R}$; **5.12.** $x \in \mathbb{R}$, $y = -5x + 5$, $z = -7x + 9$; **5.13.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$; **5.14.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; **5.15.** $x \in \mathbb{R}$, $y = -\frac{3}{2}x + 1$, $z \in \mathbb{R}$, $t = \frac{1}{2}x - z$; **5.16.** $x = y + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $t = -\frac{3}{2}z + \frac{1}{2}$; **5.17.** sprzeczny; **5.18.** $x = 4z - 1$, $y = -17z + 2$, $z \in \mathbb{R}, t = 12z + 1$; **5.19.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 1$; **5.20.** $x \in \mathbb{R}$, $y = -\frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$, $z = 0$, $t = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$; **5.21.** $x = -3$, $y = 2$, $z = -1$, $t = 3$; **5.22.** $x = -7t - 1$, $y = 11t + 1$, $z = -5t$, $t \in \mathbb{R}$; **5.23.** $x = -\frac{7}{3}y + \frac{7}{3}z - \frac{7}{3}v + \frac{1}{3}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, $t = -\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}v + \frac{1}{3}$, $v \in \mathbb{R}$; **5.24.** $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$, $v = 1$; **5.25.**

$x=\frac{79}{21},\ y=-\frac{5}{3},\ z=-\frac{1}{21},\ t=-\frac{29}{21},\ v=\frac{1}{3}$; **5.26.** $x=0,\ y=1,\ z=2,\ t=3,\ v=4$.

Algebra macierzy

6.1. a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 11 & 11 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 19 & 9 & -25 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; **6.2.** a) $\begin{pmatrix} 60 & 26 \\ 32 & 27 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 17 & 13 & 20 \\ 43 & 15 & 12 \\ 16 & 29 & 55 \end{pmatrix}$; **6.3.** a) tak, b) nie, c) tak; **6.4.** $X=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; **6.5.** $X=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; **6.6.** $X=\begin{pmatrix} -16 & 5 & 8 \\ -17 & 11 & 15 \\ 20 & -11 & -12 \end{pmatrix}$; **6.7.** $X=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; **6.8.** $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **6.9.** $X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $a,b,d\in\mathbb{R}$; **6.10.** $X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vee X=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **6.11.** $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \vee X=\begin{pmatrix} -d & b \\ -\frac{d^2}{b} & d \end{pmatrix}$, $c,d\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; **6.12.** $X=\begin{pmatrix} 32 & 12 & -6 \\ -7 & -24 & -11 \\ 21 & -38 & -27 \end{pmatrix}$; **6.13.** $X=\begin{pmatrix} 34 & -1 & 31 \\ 62 & 6 & 61 \\ 45 & 37 & 49 \end{pmatrix}$; **6.14.** $X=\begin{pmatrix} 23 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -8 \\ -1 & -8 & 14 \end{pmatrix}$;
6.15. $X=\begin{pmatrix} -14\frac{1}{3} & -13\frac{2}{3} & 20 \\ 0 & 20\frac{1}{3} & 15\frac{1}{3} \\ 18\frac{2}{3} & -15\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; **6.16.** $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – gdy n jest liczbą parzystą, $A^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – gdy n jest liczbą nieparzystą; **6.17.** $X=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
6.18. $X=\begin{pmatrix} -\frac{19}{9} & -\frac{10}{3} \\ \frac{47}{9} & \frac{22}{3} \\ -2 & \frac{41}{9} \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -\frac{14}{9} & \frac{46}{9} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{17}{3} & \frac{16}{9} \end{pmatrix}$; **6.19.** $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
6.20. $X=\begin{pmatrix} 4 & 4 & \frac{5}{3} \\ 1 & 10 & \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -\frac{5}{3} \\ -1 & -10 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 4 \end{pmatrix}$.

Wyznacznik macierzy. Własności wyznacznika

7.1. 477; **7.2.** -543; **7.3.** -2; **7.4.** 13; **7.5.** -758; **7.6.** -2; **7.7.** -60; **7.8.** -71; **7.9.** $-ayz-bxz-cxy$; **7.10.** 98; **7.11.** 4588; **7.12.** 14; **7.13.** -35482; **7.14.** -40176; **7.15.** -1; **7.16.** $b^6-b^4a^2+4b^3a^3-6b^2a^4+4ba^5-a^6$; **7.17.** $b^6-15b^4a^2+40b^3a^3-45b^2a^4+24ba^5-5a^6$; **7.21.** $x=2\vee x=3$; **7.22.** $x=1\vee x=5$; **7.23.** $x=-2\vee x=0\vee x=2$; **7.24.** $x=-8$; **7.25.** $x\in\emptyset$; **7.26.** $x=-1\vee x=1\vee x=\sqrt{6}\vee x=-\sqrt{6}$; **7.27.** $x\in\left(\frac{1}{e^2};\frac{1}{e}\right)$; **7.28.** a) 9, b) $27\cdot 2^n$; **7.29.** a) $-1\vee 0\vee 1$, b) $0\vee\sqrt[3]{3^n}$; c) 0 gdy $n-$ nieparzyste, $-1\vee 0\vee 1$ gdy $n-$ parzyste; **7.30.** $\det A=1$, $\det B=1$.

Wzory Cramera

8.1. $x=-\frac{149}{22},\ y=-16,\ z=-\frac{69}{22}$; **8.2.** $x=-1,\ y=1,\ z=-4$; **8.3.** $x=\frac{142}{3},\ y=\frac{253}{3},\ z=\frac{47}{3}$; **8.4.** $x=-\frac{271}{5},\ y=-30,\ z=-\frac{11}{5}$; **8.5.** $x=0,\ y=0,\ z=0$; **8.6.** $x=-9,\ y=-3,\ z=4$; **8.7.** nie jest cramerowski; **8.8.** $x=2,\ y=0,\ z=-1$; **8.9.** $x=5,\ y=0,\ z=2,\ t=5$; **8.10.** $x=3,\ y=4,\ z=-5,\ t=1$; **8.11.** $x=-1,\ y=-1,\ z=0,\ t=1$; **8.12.** $x=2,\ y=-\frac{5}{8},\ z=-\frac{7}{8},\ t=\frac{1}{2}$; **8.13.** $x=0,\ y=0,\ z=1,\ t=1$; **8.14.** $x=0,\ y=0,\ z=0,\ t=0$; **8.15.** $x=a-c,\ y=a-d,\ z=-2a+b+c+d,\ u=a-b$; **8.16.** $x=-\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}(b+c+d),\ y=-\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}(a+c+d),\ z=-\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}(a+b+d),\ u=-\frac{2}{3}d+\frac{1}{3}(a+b+c)$; **8.17.** $x=10,\ y=3,\ z=0,\ t=-1,\ v=0$; **8.18.** $x=1,\ y=0,\ z=1,\ t=0,\ v=1$.

Rząd macierzy

9.1. 3; **9.2.** 3; **9.3.** 4; **9.4.** 4 dla $a \neq 0$, 3 dla $a = 0$; **9.5.** 2 dla $a \in \mathbb{R}$; **9.6.** 4 dla $a \neq 1$, 1 dla $a = 1$; **9.7.** $\forall a \in \mathbb{R}-$ oznaczony; **9.8.** $a \neq -4-$ oznaczony, $a = -4-$ sprzeczny; **9.9.** $a \neq 1 \wedge a \neq -1-$ oznaczony, $a = 1 \vee a = -1-$ sprzeczny; **9.10.** $a \neq -2 \wedge a \neq 3-$ oznaczony, $a = -2-$ nieoznaczony, $a = 3-$ sprzeczny; **9.11.** $a \neq -1 \pm \sqrt{2}-$ oznaczony, $a = -1 \pm \sqrt{2}-$ sprzeczny; **9.12.** $a \neq 1-$ nieoznaczony, $a = 1-$ sprzeczny; **9.13.** $\forall a \in \mathbb{R}-$ oznaczony; **9.14.** $a \neq -1 \wedge a \neq \frac{1}{2}-$ oznaczony, $a = -1-$ nieoznaczony, $a = \frac{1}{2}-$ sprzeczny; **9.15.** $a \neq 1 \wedge a \neq 2-$ oznaczony, $a = 1-$ nieoznaczony, $a = 2-$ sprzeczny; **9.16.** $a \neq -2 \wedge a \neq 2-$ oznaczony, $a = -2 \vee a = 2-$ nieoznaczony; **9.17.** nieoznaczony; **9.18.** nieoznaczony; **9.19.** brak rozwiązań; **9.20.** brak rozwiązań; **9.21.** $m \neq 2-$ nieoznaczony, $m = 2-$ sprzeczny; **9.22.** $m \neq 0 \wedge m \neq \frac{5}{2}-$ oznaczony, $m = 0 \vee m = \frac{5}{2}-$ sprzeczny.

Macierz odwrotna

10.1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; **10.2.** $\begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$; **10.3.** $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; **10.4.** $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$; **10.5.** $\begin{pmatrix} \frac{5}{23} & \frac{6}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{17}{46} & -\frac{1}{23} & \frac{7}{46} \\ \frac{1}{46} & -\frac{4}{23} & \frac{5}{46} \end{pmatrix}$; **10.6.** $\begin{pmatrix} -\frac{9}{131} & \frac{23}{131} & \frac{3}{131} \\ -\frac{21}{131} & \frac{10}{131} & \frac{7}{131} \\ \frac{41}{131} & -\frac{32}{131} & \frac{30}{131} \end{pmatrix}$; **10.7.** $\begin{pmatrix} \frac{19}{222} & -\frac{3}{74} & -\frac{13}{222} \\ \frac{13}{111} & -\frac{4}{37} & \frac{32}{111} \\ \frac{4}{37} & \frac{2}{37} & \frac{7}{37} \end{pmatrix}$; **10.8.** $\begin{pmatrix} \frac{11}{67} & \frac{3}{67} & -\frac{29}{201} \\ \frac{4}{67} & -\frac{5}{67} & \frac{26}{201} \\ -\frac{4}{67} & \frac{5}{67} & \frac{41}{201} \end{pmatrix}$; **10.9.** $\begin{pmatrix} \frac{59}{432} & \frac{7}{216} & -\frac{43}{432} & \frac{1}{18} \\ -\frac{7}{72} & \frac{1}{36} & -\frac{1}{72} & \frac{1}{3} \\ \frac{31}{216} & \frac{11}{108} & \frac{25}{216} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{27} & -\frac{5}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; **10.10.** $\begin{pmatrix} \frac{5}{48} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & -\frac{5}{24} \\ -\frac{7}{48} & 0 & \frac{7}{16} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$;

10.11. a) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{4} & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{20} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2\cos a & -2\cos^2(b-a) \\ -2\sin^2(b+a) & -2\sin b \end{pmatrix}$;

10.12. $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; **10.13.** $\begin{pmatrix} 12 & 20 & 11 \\ 20 & 27 & 18 \\ 11 & 18 & 23 \end{pmatrix}$; **10.14.** a) $\begin{pmatrix} -2\log 0,7 & -2\sqrt{7} \\ -4,6 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{49}{90} \\ \frac{4}{3} & -\frac{26}{15} \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 2 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; **10.15.** $X = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; **10.16.** $X = \begin{pmatrix} \frac{208}{415} & \frac{8}{415} \\ \frac{12}{415} & \frac{192}{415} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$; **10.17.** a) $\det A = 1$, gdy $n-$ parzyste, $\det A = -1$, gdy $n-$ nieparzyste, b) $\det A = -1 \vee \det A = 1$; **10.18.** a) $\det A^5 = 7^{-10}$, b) $\det A^5 = \pm 2^{-\frac{25}{2}}$; **10.19.** $\det A = \pm 2^{-\frac{n}{2}}$, $\det B = \pm 2^n$, $n-$ wymiar macierzy A i B.

Zastosowanie macierzy i wyznaczników. Liniowe układy dynamiczne

11.1. a) $x(1) = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,37 \end{pmatrix}^T$, $x(3) = \begin{pmatrix} 0,4668 & 0,5332 \end{pmatrix}^T$, $x(5) = \begin{pmatrix} 0,408048 & 0,591952 \end{pmatrix}^T$, b) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}^T$, c) $x(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}^T$, $x(1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}^T$; **11.2.** a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$, b) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, c) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{8}{13} \end{pmatrix}^T$; **11.3.** a) $x(1) = \begin{pmatrix} 0,62 & 0,22 & 0,16 \end{pmatrix}^T$, $x(2) = \begin{pmatrix} 0,554 & 0,232 & 0,214 \end{pmatrix}^T$, $x(4) = \begin{pmatrix} 0,51026 & 0,24676 & 0,24298 \end{pmatrix}^T$, b) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T$, c) $x(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}^T$; **11.4.** a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{17}{53} & \frac{13}{53} & \frac{23}{53} \end{pmatrix}^T$, b) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{39}{59} & \frac{16}{59} & \frac{4}{59} \end{pmatrix}^T$, c) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^T$; **11.5.** a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 287,5 & 512,5 \end{pmatrix}^T$; **11.6.** a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{157000}{189} & \frac{227000}{289} & \frac{212000}{189} \end{pmatrix}^T$;
11.7. a) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1200 & \frac{17000}{7} & \frac{18300}{7} & \frac{12300}{7} \end{pmatrix}^T$;
11.8. ADI:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ADII:

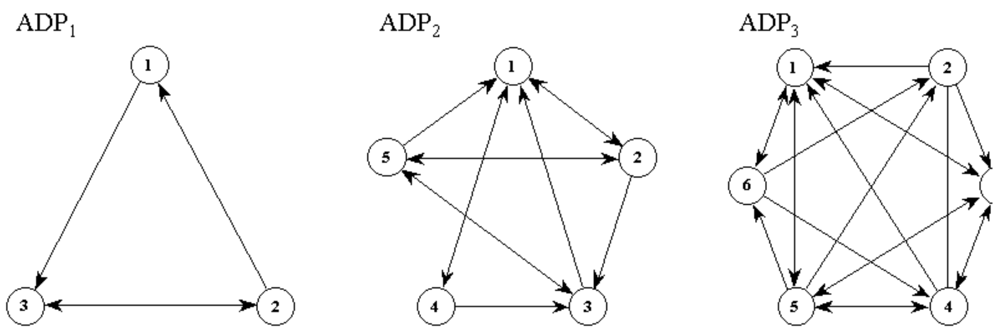
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 12 & 9 \\ 10 & 3 & 8 & 9 & 11 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

ADIII:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 18 & 4 & 16 & 10 & 3 & 6 & 12 & 13 \\ 11 & 4 & 7 & 7 & 3 & 9 & 7 & 13 \\ 22 & 6 & 20 & 13 & 4 & 12 & 17 & 21 \\ 14 & 6 & 10 & 10 & 3 & 13 & 11 & 19 \\ 19 & 4 & 15 & 10 & 3 & 6 & 13 & 14 \\ 23 & 8 & 19 & 15 & 5 & 18 & 18 & 27 \\ 24 & 6 & 20 & 14 & 3 & 8 & 18 & 19 \\ 22 & 7 & 17 & 13 & 5 & 16 & 17 & 25 \end{pmatrix}.$$

11.9.



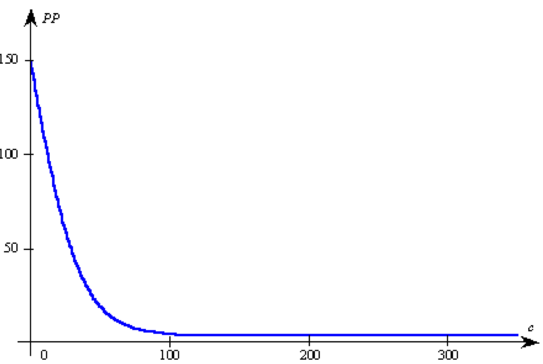
Elementy algebry liniowej w R^n

12.1. a) niezależne, b) niezależne, c) niezależne, d) zależne, e) niezależne; **12.2.** a) $a = -7 \vee a = -1$, b) $a = -1 \vee a = 1$, c) $a = 0 \vee a = 4$; **12.3.** a) nie, b) tak, c) nie; **12.4.** a) wektory u_i nie tworzą bazy, b) $a = -7,\ b = 8,\ c = 4,\ d = -2$, c) $a = 2,\ b = 0,\ c = -1,\ d = 1$; **12.6.** a) nie, b) nie; **12.7.** a) tak, b) nie, c) tak, d) tak, e) tak, f) tak, g) tak.

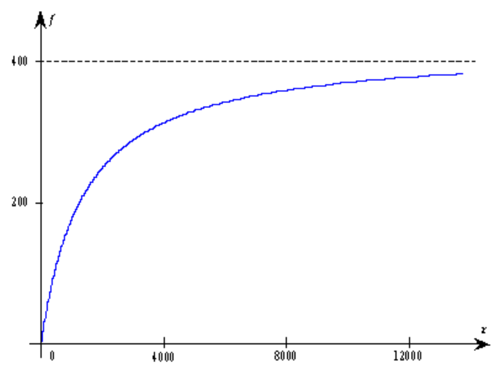
Wybrane zastosowania funkcji jednej zmiennej w ekonomii i matematyce finansowej

13.1. a) $f(t) = \begin{cases} 7t & \text{gdy} \quad t \in (0,8] \\ 12t - 40 & \text{gdy} \quad t > 8 \end{cases}$, b) $f(t) = \begin{cases} 7\lceil t \rceil & \text{gdy} \quad t \in (0,8] \\ 12\lceil t \rceil - 40 & \text{gdy} \quad t > 8 \end{cases}$, gdzie $\lceil t \rceil$ jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą t. **13.2.** $c \in (300, 335)$; **13.3.** $f(c) = -c^2 - 0,5c + 14,\ c = 2$; **13.4.** nie; **13.5.** $c \in (10, 50)$; **13.6.** $c = 5,\ PP(5) = PD(5) = 1024$; **13.7.** $\lim\limits_{c \to 0^+} PP(c) = 32$, jeżeli cena jest bliska 0, to popyt wynosi 32. $\lim\limits_{c \to \infty} PP(c) = 0$, gdy cena rośnie w nieskończoność, to popyt spada do 0. **13.8.** $c = \frac{\ln 19}{0,04} \approx 73,61$. Jeżeli cena zmaleje o 10 tys. zł, to popyt wzrośnie o około 7 samochodów (zob. rys. 13.8.). **13.9.** 200zł, Dochód wzrośnie o 40zł. Poziom nasycenia wynosi 400zł (zob. rys. 13.9.). **13.10.** a) $\approx 737,92$, b) $\approx 738,75$, c) $\approx 738,96$; **13.11.** $\approx 3566,96$; **13.12.** $\approx 20,09\%$; **13.13.** natychmiastowa wypłata; **13.14.** $\approx 3021,15$; **13.15.** drugi bank; **13.16.** drugi bank; **13.17.** 1532,24; **13.18.** $\approx 2063,1$; **13.19.** druga oferta; **13.20.** $\approx 51174,34$; **13.21.** $\approx 1313,93$; **13.22.** $\approx 262,79$.

Rys. 13.8



Rys. 13.9



Pochodne funkcji jednej zmiennej

14.1. $3\sin 6x$; **14.2.** $(x^3-x-1)e^x$; **14.3.** $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 2x}$; **14.4.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-x^3+4x+7}{x^2+4x-1}}\left(\frac{x^4+8x^3+x^2+14x+32}{(-x^3+4x+7)^2}\right)$; **14.5.** $\frac{1}{3\sqrt[3]{(\sin x\ln x)^2}}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$; **14.6.** $\frac{x+(3x+2)\ln x}{2\sqrt{x+1}(1+\ln x)^2}$; **14.7.** $\frac{\sin\frac{2}{x}}{x^2}$; **14.8.** $e^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\cdot\ln\frac{x^2-3}{4}+\frac{2x}{x^2-3}\right)$; **14.9.** $\frac{4x\cos 2x-\sin 2x}{4x\sqrt{x}}$; **14.10.** $\frac{-2\cos x}{(2+\sin x)^2}$; **14.11.** $\frac{\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}}+3x^2-\frac{1}{6}x^{-\frac{1}{6}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$; **14.12.** $\frac{2}{1+\sin 2x}$; **14.13.** $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{4}{5}x^{-\frac{7}{5}}$; **14.14.** $(x^2+2)\cos x-\frac{2}{\cos^2 x}$; **14.15.** $\frac{-\frac{1}{3}\sin^2 x(x+\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}+$ $+\frac{\sin 2x(\sqrt[3]{x+\sqrt{x}})}{\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$; **14.16.** $\frac{7x^6+6x^2-\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x^7+2x^3-\sin x+\sqrt{x+1}}$; **14.17.** $\left(3-\frac{1}{x^2}\right)-2x\,\mathrm{ctg}(x^2-3)$; **14.18.** $\frac{\frac{3}{x}-\cos x}{\ln(x+1)}+$ $+\frac{\sin x-\ln x^3}{(x+1)\ln^2(x+1)}$; **14.19.** $\frac{-1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}(2+2x+2\sqrt{1+x})}$; **14.20.** $\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{(1+(x+\sqrt{1+x^2})^2)(\sqrt{1+x^2})}$; **14.21.** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$; **14.22.** $\sqrt{1-x^2}$; **14.23.** $\frac{1}{x^2-1}$; **14.24.** $\mathrm{arctg}x$; **14.25.** $\frac{1}{9}[(3-3x)\sin 3x+(1+9x)\cos 3x]$; **14.26.** $\ln^2 x$; **14.27.** $e^{\sqrt{x}}$; **14.28.** $\sin(\ln x)$; **14.29.** $\frac{e^x-1}{e^x+1}$; **14.30.** $-\frac{8}{3\sin^2 x\cdot\sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,x}}$; **14.31.** $-\frac{\ln 2}{x^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{x}\right)2^{\mathrm{tg}\,\frac{1}{x}}$; **14.32.** $x^2\sin xe^{-x}$; **14.33.** $-\frac{\sin x+\ln^2 3\sin x}{3^x}$; **14.34.** $\frac{1}{2+2\sqrt{x+1}}$; **14.35.** $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\cos x}{\ln x}}\sqrt{\frac{\ln x}{\cos x}}\,\frac{x\sin x\ln x+\cos x}{x\ln^2 x}$; **14.36.** $\frac{2x}{3(1+x^2)}$; **14.37.** $\sin(\frac{2+2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$; **14.38.** $\sin x\cdot\ln\mathrm{tg}\,x$; **14.39.** $-\frac{5}{\sin^2 5x}-\frac{6\sin 2x\sin^3 4x+36\sin^2 4x\cos 4x\cos 2x}{9\sin^6 4x}$; **14.40.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; **14.41.** $\frac{1}{3}\left(\frac{1+\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}\,x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{1-\sin 2x}$; **14.42.** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; **14.43.** $-(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$; **14.44.** $8\cos^4 x$; **14.45.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\cdot$ $\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$; **14.46.** $\frac{1}{\cos^6 x}$; **14.47.** $x^x(\ln x+1)$; **14.48.** $(\sin x)^{\mathrm{tg}\,x}\left(\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}+1\right)$; **14.49.** $(x^2+$

$+1)^{\sin 2x}\left(2\cos 2x\ln(x^2+1)+\frac{2x\sin 2x}{x^2+1}\right)$; **14.50.** $(x^x)^{x^x}\cdot x^x(\ln x+1)(x\ln x+1)$; **14.51.** $-\frac{\operatorname{tg}x}{\ln x}-$ $-\frac{\ln\cos x}{x\ln^2 x}$; **14.52.** $-\frac{\ln 5(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)}{x^2\ln^2\sin x}$; **14.53.** a) 1, b) $-\frac{1}{50}$; **14.54.** a) $k\geqslant\frac{1}{26}$, b) $k\in\mathbb{R}$, c) $k\leqslant 0$; **14.55.** a) $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$, b) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$, $n\geqslant 2$; **14.56.** a) tak, b) nie.

Ekstrema lokalne funkcji

15.1. $(-\infty,1)\cup(3,5)-$ rosnąca, $(1,3)\cup(5,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(1)=26$, $f_{max}(5)=26$, $f_{min}(3)=10$; **15.2.** $(\frac{1}{4},\infty)-$rosnąca, $(0,\frac{1}{4})-$ malejąca, $f_{min}\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$; **15.3.** $(0,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)-$ malejąca, $f_{min}(0)=3$; **15.4.** $(2,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(0,2)-$ malejąca, $f_{min}(2)=-16$; **15.5.** $x\in\mathbb{R}-$ rosnąca, brak ekstremum; **15.6.** $x\in\mathbb{R}-$ rosnąca, brak ekstremum; **15.7.** $(-\infty,0)\cup(\sqrt[3]{2},\infty)-$ rosnąca, $(0,\sqrt[3]{2})-$ malejąca, $f_{min}(\sqrt[3]{2})=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$; **15.8.** $(-1,1)-$ rosnąca, $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(1)=2$, $f_{min}(-1)=-2$; **15.9.** $x\in\mathbb{R}-$ rosnąca, brak ekstremum; **15.10.** $\left(\frac{5}{4}\pi+2k\pi,\frac{9}{4}\pi+2k\pi\right)-$ rosnąca, $\left(\frac{1}{4}\pi+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right)-$ malejąca, $f_{max}\left(\frac{1}{4}\pi+2k\pi\right)=\sqrt{2}$, $f_{min}\left(\frac{5}{4}\pi+2k\pi\right)=-\sqrt{2}$; **15.11.** $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}-$ malejąca, brak ekstremum; **15.12.** $x\in\mathbb{R}-$ rosnąca, brak ekstremum; **15.13.** $(-1,0)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,-1)\cup(0,1)-$ malejąca, $f_{min}(-1)=0$, $f_{min}(1)=0$, $f_{max}(0)=1$; **15.14.** $(0,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)-$ malejąca, $f_{min}(0)=\frac{1}{4}$; **15.15.** $(-1,0)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,-1)\cup(0,1)-$ malejąca, $f_{min}(1)=2$, $f_{min}(-1)=2$; **15.16.** $(-\infty,-2)\cup(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)-$ rosnąca, $(-\sqrt{2},-1)\cup(-1,\sqrt{2})-$ malejąca, $f_{max}(-\sqrt{2})=-17-12\sqrt{2}$, $f_{min}(\sqrt{2})=-17+12\sqrt{2}$; **15.17.** $(0,2)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(2,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(2)=\frac{5}{3}$, $f_{min}(0)=-1$; **15.18.** $(-1,1)-$ rosnąca, $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(1)=\frac{2}{3}$, $f_{min}(-1)=-\frac{2}{3}$; **15.19.** $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)-$ rosnąca, $(-2,-1)\cup(-1,2)-$ malejąca, $f_{max}(-2)=0$, $f_{min}(2)=\frac{256}{27}$; **15.20.** $(-2,\sqrt{5}-1)-$ rosnąca, $(\sqrt{5}-1,2)-$ malejąca, $f_{max}(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}$; **15.21.** wartość najmniejsza: $-2=f(1)$, wartość największa: $2=f(-1)$; **15.22.** wartość najmniejsza: $-26=f(-2)$, wartość największa: $6=f(0)$; **15.23.** wartość najmniejsza: $4=f(-1)=f(1)$, wartość największa: $229=f(-4)=f(4)$; **15.24.** wartość najmniejsza: $-46=f(-2)$, wartość największa: $46=f(2)$; **15.25.** wartość najmniejsza: $1=f(0)$, wartość największa: $7=f(4)$; **15.26.** wartość najmniejsza: $0=f(0)=f(2\pi)$, wartość największa: $2=f(\pi)$; **15.27.** wartość najmniejsza: $-\frac{4}{3}=f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$, wartość największa: $-1=f(0)$; **15.28.** wartość najmniejsza: $2=f(0)$, wartość największa: $2\sqrt{2}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; **15.29.** wartość najmniejsza: $\frac{\pi}{4}-1=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, wartość największa: $-\frac{\pi}{4}+1=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; **15.30.** wartość najmniejsza: $-\frac{\pi}{2}=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, wartość największa: $\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Badanie funkcji

16.1. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(-1,1)-$ malejąca, $f_{max}(-1)=7$, $f_{min}(1)=3$, $(0,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,0)-$ wklęsła, $0-$ punkt przegięcia; **16.2.** $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(-3,1)-$ malejąca, $f_{max}(-3)=25$, $f_{min}(1)=-7$, $(-1,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,-1)-$ wklęsła, $-1-$ punkt przegięcia; **16.3.** $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)-$ rosnąca, $(-3,-1)-$ malejąca, $f_{max}(-3)=-\frac{27}{4}$, $(0,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,-1)\cup(-1,0)-$ wklęsła, $0-$ punkt przegięcia; **16.4.** $(\frac{1}{2},\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})-$ malejąca, $f_{min}(\frac{1}{2})=3$, $(-\infty,-\sqrt[3]{\frac{1}{4}})\cup(0,\infty)-$ wypukła, $(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}},0)-$ wklęsła, $-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}-$ punkt przegięcia; **16.5.** $(\frac{3}{2},\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\frac{3}{2})-$ malejąca, $f_{min}(\frac{3}{2})=\frac{27}{4}$, $(-\infty,0)\cup(1,\infty)-$ wypukła, $(0,1)-$ wklęsła, $0-$ punkt przegięcia; **16.6.** $(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)-$ rosnąca, $(-3,-1)-$ malejąca, $f_{max}(-3)=-\frac{27}{8}$, $(0,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,-1)\cup(-1,0)-$ wklęsła, $0-$ punkt przegięcia; **16.7.** $(0,1)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $f_{min}(0)=-1$, $(-\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,-\frac{1}{2})-$ wklęsła, $-\frac{1}{2}-$ punkt przegięcia; **16.8.** $(0,2)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(2,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $f_{min}(0)=0$, $(-\infty,2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},\infty)-$ wypukła, $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})-$ wklęsła, $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}-$ punkty przegięcia; **16.9.** $(-\infty,0)\cup(0,3)-$ rosnąca, $(3,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(3)=\frac{27}{e^3}$, $(0,3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3},\infty)-$ wypukła, $(-\infty,0)\cup(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})-$ wklęsła, 0, $3-\sqrt{3}$, $3+\sqrt{3}-$ punkty przegięcia; **16.10.** $(-1,1)-$ rosnąca, $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $f_{min}(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$,

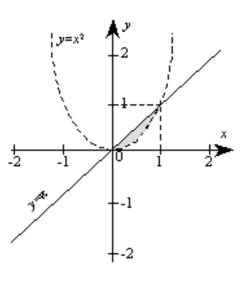
$(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},\infty)-$ wypukła, $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})-$ wklęsła, $-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}-$ punkty przegięcia; **16.11.** $(-\infty,1)\cup(1,2)-$ rosnąca, $(2,3)\cup(3,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(2)=\frac{1}{e}$, $(-\infty,1)\cup(1,2-\sqrt[4]{\frac{1}{3}})\cup(2+\sqrt[4]{\frac{1}{3}},3)\cup(3,\infty)-$ wypukła, $(2-\sqrt[4]{\frac{1}{3}},2+\sqrt[4]{\frac{1}{3}})-$ wklęsła, $2\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}-$ punkty przegięcia; **16.12.** $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(-3,1)-$ malejąca, $f_{max}(-3)=6e^{-3}$, $f_{min}(1)=-2e$, $(-\infty,-2-\sqrt{5})\cup(-2+\sqrt{5},\infty)-$ wypukła, $(-2-\sqrt{5},-2+\sqrt{5})-$ wklęsła, $-2-\sqrt{5},\ -2+\sqrt{5}-$ punkty przegięcia; **16.13.** $(-\infty,0)\cup(1,\infty)-$ rosnąca, $(0,1)-$ malejąca, $f_{min}(1)=e$, $(0,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,0)-$ wklęsła; **16.14.** $(-\infty,1)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $(\frac{1}{2},1)\cup(1,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,\frac{1}{2})-$ wklęsła, $\frac{1}{2}-$ punkt przegięcia; **16.15.** $(-\infty,-1)\cup(-1,0)-$ rosnąca, $(0,1)\cup(1,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(0)=1$, $(-\infty,-1)\cup(-1,-\sqrt[4]{\frac{1}{3}})\cup(\sqrt[4]{\frac{1}{3}},1)\cup(1,\infty)-$ wypukła, $(-\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\sqrt[4]{\frac{1}{3}})-$ wklęsła, $-\sqrt[4]{\frac{1}{3}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{3}}-$ punkty przegięcia; **16.16.** $(\frac{1}{2},\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})-$ malejąca, $f_{min}(\frac{1}{2})=\frac{e^2}{4}$, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)-$ wypukła; **16.17.** $(-\infty,0)\cup(0,\infty)-$ malejąca, $(0,\infty)-$ wypukła, $(-\infty,0)-$ wklęsła; **16.18.** $(2\sqrt{\frac{1}{e}},\infty)-$ rosnąca, $(0,2\sqrt{\frac{1}{e}})-$ malejąca, $f_{min}(2\sqrt{\frac{1}{e}})=-\frac{1}{e}$, $(2\sqrt{\frac{1}{e^3}},\infty)-$ wypukła, $(0,2\sqrt{\frac{1}{e^3}})-$ wklęsła, $2\sqrt{\frac{1}{e^3}}-$ punkt przegięcia; **16.19.** $(0,1)-$ rosnąca, $(1,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(1)=1$, $(\sqrt{e},\infty)-$ wypukła, $(0,\sqrt{e})-$ wklęsła, $\sqrt{e}-$ punkt przegięcia; **16.20.** $(0,e^2)-$ rosnąca, $(e^2,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(e^2)=\frac{2}{e}$, $(e^{\frac{8}{3}},\infty)-$ wypukła, $(0,e^{\frac{8}{3}})-$ wklęsła, $e^{\frac{8}{3}}-$ punkt przegięcia; **16.21.** $(-\infty,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,\infty)-$ wypukła; **16.22.** $(3,\infty)-$ rosnąca, $(-\infty,-3)-$ malejąca, $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)-$ wklęsła, **16.23.** $(-\infty,-2)-$ rosnąca, $(2,\infty)-$ malejąca, $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)-$ wypukła; **16.24.** $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi)\cup(\pi+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi)-$ rosnąca, $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,2k\pi)\cup(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)-$ malejąca, $f_{min}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=1$, $f_{max}(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)=-1$, $(2k\pi,\pi+2k\pi)-$ wypukła, $(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}-$ wklęsła, **16.25.** $(-\infty,\infty)-$ rosnąca, $(-\pi+2k\pi,2k\pi)-$ wypukła, $(2k\pi,\pi+2k\pi)-$ wklęsła, $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}-$ punkty przegięcia; **16.26.** $(-\infty,-\frac{4}{3})-$ rosnąca, $(-\frac{4}{3},1)-$ malejąca, $f_{max}(-\frac{4}{3})=\frac{14\sqrt{21}}{9}$, $(-\infty,1)-$ wklęsła; **16.27.** $(3,\infty)-$ rosnąca, $(0,1)\cup(1,3)-$ malejąca, $f_{min}(3)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $(1,3+2\sqrt{3})-$ wypukła, $(0,1)\cup(3+2\sqrt{3},\infty)-$ wklęsła, $3+2\sqrt{3}-$ punkt przegięcia; **16.28.** $(-\sqrt{3}-2,-2)\cup(-2,\sqrt{3}-2)-$ rosnąca, $(-\infty,-\sqrt{3}-2)\cup(\sqrt{3}-2,\infty)-$ malejąca, $f_{max}(\sqrt{3}-2)=4-2\sqrt{3}$, $f_{min}(-\sqrt{3}-2)=4+2\sqrt{3}$, $(-\infty,-2)-$ wypukła, $(-2,\infty)-$ wklęsła; **16.29.** $(-2,\infty)-$ rosnąca, $(-2,\infty)-$ wklęsła; **16.30.** $(-1,1)-$ malejąca, $(-1,\frac{1}{2})-$ wypukła, $(\frac{1}{2},1)-$ wklęsła, $\frac{1}{2}-$ punkt przegięcia.

Zastosowanie pochodnych

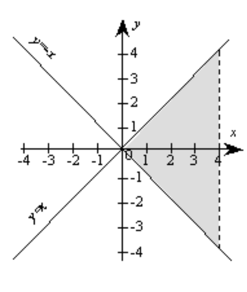
17.1. -1728; **17.2.** $\frac{35}{18}$zł; **17.3.** $\frac{-199c}{(c+1)(c+200)}$; **17.4.** $\frac{243}{98}\%$; **17.5.** wzrośnie o 0,25%; **17.6.** $i=60$, $Z(60)=\frac{2500}{3}$; **17.7.** $c=5$, $PP(5)=1000\sqrt{5}$, $D(5)=5000\sqrt{5}$; **17.8.** $ic=50$, $D(50)=1335$; **17.9.** $t=30^o$, $I(30)=100$; **17.10.** $x=32$, $W(32)=\frac{1{,}6}{\sqrt{e}}$; **17.11.** $t\approx 3,1$; $P(3,1)\approx 2735$; **17.12.** $x=10$lat, $y(10)=0,002$; **17.13.** 30×20; **17.14.** 2×1; **17.15.** $r=0,5dm$; $h=\frac{4{,}4}{\pi}dm$; **17.16.** $r=3$, $h=6$.

Funkcje wielu zmiennych, wykresy. Warstwice i obrazy

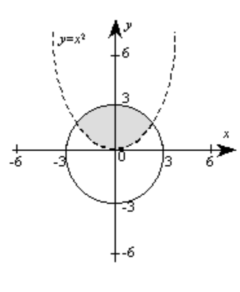
18.1.



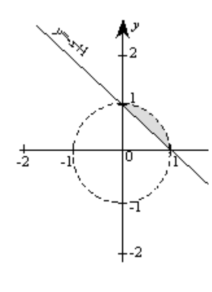
18.2.



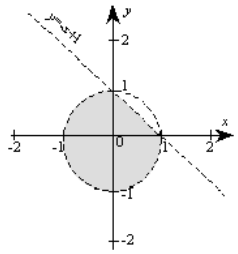
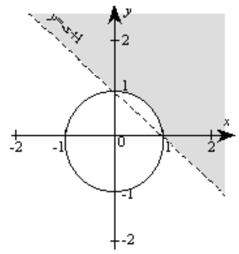
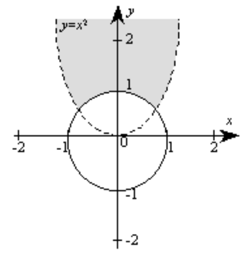
18.3.

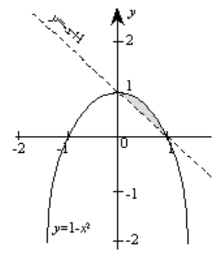


18.4.



18.1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x \wedge y > x^2\}$; **18.2.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x \wedge y \geqslant -x \wedge x < 4\}$; **18.3.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge y > x^2\}$; **18.4.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y \geqslant 1 - x\}$;

18.5. 
18.6. 
18.7. 

18.8. 

18.5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y < 1 - x\}$; **18.6.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 1 \wedge y > 1 - x\}$; **18.7.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 1 \wedge y > x^2\}$; **18.8.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 1 - x^2 \wedge y > 1 - x\}$; **18.9.** $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$; **18.10.** $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$; **18.11.** $\mathbb{R}^3$; **18.12.** $\mathbb{R}^3_+$; **18.13.** $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 > 0 \wedge x_3 \geqslant 0 \wedge x_4 \neq 0 \wedge x_3 \neq x_4\}$; **18.14.** $D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 \in \mathbb{R}, x_4 \in \mathbb{R}\}$; **18.15.** $\mathbb{R}^n \setminus (0, 0, ..., 0)$; **18.16.** $y = \frac{a+7-2x}{5}$, $a \in \mathbb{R}-$ proste; **18.17.** $y = a - 2 - x$, $a \in \mathbb{R}-$ proste; **18.18.** $y = a + 3 - x^2$, $a \in \mathbb{R}-$ parabole; **18.19.** $y = a^2 - 5 + 2x^2$, $a \geqslant 0-$ parabole; **18.20.** $x^2 + y^2 = a - 4$, $a \geqslant 4-$ okręgi; **18.21.** $x^2 + y^2 = 1 - a^2$, $a \in [0, 1]-$ okręgi; **18.22.** $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = \frac{18-a}{12}$, $a \leqslant 18-$ elipsy; **18.23.** $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2 + 9$, $a \geqslant 0-$ elipsy; **18.24.** $y + \sqrt[3]{x^2} = a$, $a \in \mathbb{R}-$ parabole; **18.25.** $y + |x| = a$, $a \in \mathbb{R}$; **18.26.** $2x + 4y - z = a$, $a \in \mathbb{R}-$ płaszczyzny; ; **18.27.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4a$, $a \geqslant 0-$ sfery; **18.28.** $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = a^2$, $a \geqslant 0-$ sfery; **18.29.** $\frac{x^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{z^2}{\frac{a^2}{9}} = 1$, $a \geqslant 0-$ elipsoidy; **18.30.** $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{-2t-4}{3} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ – prosta; **18.31.** $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{5t-9}{7} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ – prosta; **18.32.** $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t^2 + 3 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ – parabola; **18.33.** $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 6t^2 + 4 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ – parabola; **18.34.** $\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos t \\ y(t) = \frac{1}{4} + \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ – okrąg; **18.35.** $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4} + \cos t \\ y(t) = -1 + \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ – okrąg; **18.36.** $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ – elipsa; **18.37.** $\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = \sqrt{3}\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ – elipsa.

Pochodne cząstkowe

19.1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 3y^4 - 3y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 12xy^3 - 3x$; **19.2.** $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x^2 + 2x + 2y^3)e^{2x+3y+2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (3x^2 + 3y^2 + 3y^3)e^{2x+3y+2}$; **19.3.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y(x+\ln y)}$; **19.4.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2}$; **19.5.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(4x + 2y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(4x + 2y)$; **19.6.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy+y^2}}$; **19.7.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-10x}{(5x^2-y^2+7)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{(5x^2-y^2+7)^2}$; **19.8.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$; **19.9.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$; **19.10.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yx^{y-1}}{2(1+x^y)\sqrt{x^y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^y\ln x}{2(1+x^y)\sqrt{x^y}}$; **19.11.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1 + xy)^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + xy)^y\left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1+xy}\right]$; **19.12.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y + (x + 1)\sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x(x\cos y - \sin y)$; **19.13.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2e^{xy^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$; **19.14.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+5y-6}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5e^{2x+5y-6}$; **19.15.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 10xye^{5x^2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^2e^{5x^2y} - 3y^2$; **19.16.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}(\cos\frac{x}{y} - \sin\frac{x}{y})$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}(\sin\frac{x}{y} - \cos\frac{x}{y})$; **19.17.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x+y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x + y) + \frac{y}{x+y}$; **19.18.** $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}(1+\sqrt{xy})}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y(1-xy)}(1+\sqrt{xy})}$; **19.19.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}\left(\frac{x+y}{xy}\right)$; **19.20.** $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y\sqrt{(xy)^2-(x+y)^2}}$; **19.21.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ye^x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x$; **19.22.** $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$; **19.23.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 - 12x^2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^3z^2 + 3$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -8x^3yz$;

19.24. $\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}$; **19.25.** $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$; **19.26.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{2x+y^3-3\sqrt{z}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{2x+y^3-3\sqrt{z}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-3}{2\sqrt{z}(2x+y^3-3\sqrt{z})}$; **19.27.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + yz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + xz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z} + xy$; **19.28.** $\frac{\partial f}{\partial x} = (3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$; **19.29.** $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2z(x-y)}{1+(x-y)^4}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2z(x-y)}{1+(x-y)^4}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \operatorname{arctg}(x-y)^2$; **19.30.** $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x\sin(6x^2+8y^2+4z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y\sin(6x^2+8y^2+4z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2\sin(6x^2+8y^2+4z)$; **19.31.** $\nabla f(1,-1) = (-2,-9)$; **19.32.** $\nabla f(2,0) = (0,2)$; **19.33.** $\nabla f(e,e,e) = (4e^2, 4e^2, 4e^2)$; **19.34.** $\nabla f(1,1,1) = (1,0,0)$; **19.35.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x-4y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4x$; **19.36.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y(\ln x)^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(y\ln x+1)$; **19.37.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+\ln y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1+x+\ln y}{[y(x+\ln y)]^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y(x+\ln y)^2}$; **19.38.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = xa^z(\ln a)^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = a^z \ln a$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$; **19.39.** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2z^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2z^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^2y^2e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z(1+xyz)e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y(1+xyz)e^{xyz}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x(1+xyz)e^{xyz}$; **19.40.** tak; **19.41.** nie; **19.42.** tak; **19.43.** tak; **19.44.** nie; **19.45.** tak.

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

20.1. $(-1,2)-$ brak ekstremum; **20.2.** $f_{min}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = -8$, $f_{min}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = -8$, $(0,0)-$ brak ekstremum; **20.3.** $f_{min}(0,-1) = -7$; **20.4.** $f_{min}(5,2) = 30$; **20.5.** $(-2,-1)-$ brak ekstremum, $\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6}\right)-$ brak ekstremum, $f_{max}(0,5) = 25$; **20.6.** $f_{max}(-1,1) = 1$, $(0,0)-$ brak ekstremum; **20.7.** $f_{max}\left(0,-\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{4}$, $(-1,-1)-$ brak ekstremum, $(3,-1)-$ brak ekstremum; **20.8.** $f_{min}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$, $f_{min}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$, $(0,0)-$ brak ekstremum; **20.9.** $f_{min}\left(\frac{27}{2},5\right) = -\frac{109}{4}$, $\left(\frac{3}{2},1\right)-$ brak ekstremum; **20.10.** $f_{min}(5,6) = -77$, $(1,-6)-$ brak ekstremum; **20.11.** $f_{max}(2,1) = 4$; **20.12.** $f_{max}(2,2) = 11$, $(0,0)-$ brak ekstremum; **20.13.** $f_{max}(4,4) = 12$; **20.14.** $(1,0)-$ brak ekstremum; **20.15.** $f_{min}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$, $(0,0)-$ brak ekstremum; **20.16.** $f_{max}(4,4) = 15$; **20.17.** $f_{min}(0,-2) = -\frac{2}{e}$; **20.18.** $\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)-$ brak ekstremum; **20.19.** $f_{max}(6,4) = 5\ln 2$; **20.20.** $f_{min}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}},\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) = 3\sqrt[3]{4}$; **20.21.** $f_{min}(0,0) = 0$, $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)-$ brak ekstremum; **20.22.** $f_{max}(0,0) = 1$; **20.23.** $f_{min}(2,1) = -28$, $f_{max}(-2,-1) = 28$, $(1,2)-$ brak ekstremum, $(-1,-2)-$ brak ekstremum; **20.24.** $f_{max}(1,-1) = \sqrt{3}$; **20.25.** $f_{min}(1,-1,0) = -3$; **20.26.** $f_{min}(1,1,0) = -1$; **20.27.** $f_{max}(1,1,1) = 1$; **20.28.** $f_{min}\left(\frac{1}{2},1,1\right) = 4$; **20.29.** $f_{max}(6,4,10) = 13\ln 2 + 3\ln 3 + 5\ln 5$; **20.30.** $f_{max}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = 4$.

Ekstrema globalne funkcji wielu zmiennych

21.1. wartość najmniejsza: $0 = f(0,0)$, wartość największa: $10 = f(3,-1) = f(3,1)$; **21.2.** wartość najmniejsza: $20 = f(1,1)$, wartość największa: $28 = f(1,0) = f(0,1)$; **21.3.** wartość najmniejsza: $-3 = f(-1,1) = f(1,-1)$, wartość największa: $3 = f(1,1) = f(-1,-1)$; **21.4.** wartość najmniejsza: $-2\sqrt{2} = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, wartość największa: $2\sqrt{2} = f(\sqrt{2},\sqrt{2})$; **21.5.** wartość najmniejsza: $2 = f(0,0)$, wartość największa: $6 = f(0,-2)$; **21.6.** wartość najmniejsza: $-1 = f(-1,-1)$, wartość największa: $6 = f(-3,0) = f(0,-3)$; **21.7.** wartość najmniejsza: $0 = f(0,0) = f(0,\pi) = f(\pi,0) = f(\pi,\pi)$, wartość największa: $\frac{3\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$; **21.8.** wartość najmniejsza: $-\frac{29}{20} = f\left(-\frac{7}{10},\frac{3}{10}\right) = f\left(\frac{3}{10},-\frac{7}{10}\right)$, wartość największa: $\frac{9}{4} = f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; **21.9.** wartość najmniejsza: $-72 = f(0,6) = f(0,-6)$, wartość największa: $36 = f(-6,0) = f(6,0)$; **21.10.** wartość najmniejsza: $0 = f(0,0)$, wartość największa: $81 = f(3,0) = f(-3,0) = f(0,3) = f(0,-3)$.

Ekstrema warunkowe

22.1. $f_{minw}(5,-3) = -25$; **22.2.** $f_{minw}\left(\frac{1}{2},-4\right) = 18$, $f_{maxw}\left(-\frac{1}{2},0\right) = -6$; **22.3.** $f_{minw}(-4,1) = -9$, $f_{maxw}(4,-1) = 9$; **22.4.** $f_{minw}(-1,0) = -1$, $f_{maxw}(1,0) = 9$; **22.5.** $f_{minw}(2,0) = 4$, $f_{minw}(-2,0) = 4$; **22.6.** $f_{minw}(-6,5) = -63$; **22.7.** $f_{minw}(0,2) = 4$; **22.8.** $f_{minw}(3,4) = 0$,

$f_{maxw}(-3,-4)=50$; **22.9.** $f_{maxw}(29,17)=68$; **22.10.** $f_{maxw}\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f_{minw}(2,2)=0$; **22.11.** $f_{minw}(-1,0)=-2$; **22.12.** $f_{minw}(1,1)=-1$, $f_{maxw}(1,-1)=1$; **22.13.** $f_{minw}(2,0)=-2$, $f_{maxw}(0,2)=2$; **22.14.** $f_{minw}(2,2)=\frac{1}{2}$; **22.15.** $f_{minw}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=-6$, $f_{maxw}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=6$.

Zastosowanie pochodnych cząstkowych

23.1. $Z(4,5)=21$; **23.2.** $D(4,4)=12$; **23.3.** $K(8,24)=500$; **23.4.** $Z(2,4)=15$, $K(2,4)=1$, $D(2,4)=16$; **23.5.** $D(10,10)=1000$, $PP_1(10,10)=60$, $PP_2(10,10)=40$; **23.6.** $U(6,14)=2\sqrt{21}$; **23.7.** $K(50,30)=12100$; **23.8.** $U(16,4)=10\ln 2$; **23.9.** $U(10,5)=50$; **23.10.** a) $P(10,10,10)=600$, b) $P(10\sqrt[3]{2},10\sqrt[3]{2},5\sqrt[3]{2})=300\sqrt[3]{4}$; **23.11.** $S\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=9$; **23.12.** $d\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$; **23.13.** Punkt, którego odległość od przyprostokątnych długości a jest równa $\frac{a}{3}$. $d\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{3}a^2$; **23.14.** $V\left(\frac{l}{12},\frac{l}{12},\frac{l}{12}\right)=\frac{l^3}{1728}$.

Całka nieoznaczona. Metody całkowania

24.1. $\frac{4}{7}x^7-\frac{2}{3}x^3+3x^2-5x+C$; **24.2.** $x^3-\frac{1}{2}x^2-5\sin x+C$; **24.3.** $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$; **24.4.** $-\cos x+3\sin x-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; **24.5.** $\frac{15}{8}x^{\frac{8}{5}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$; **24.6.** $\frac{9}{4}x^4-x^3-4x^2+4x+C$; **24.7.** $\frac{35}{9}x^{\frac{9}{7}}+e^x+\frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{34}{3}x^3-10x^2+25x+C$; **24.8.** $\frac{1}{4}x^4-x^2+\ln|x|+C$; **24.9.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$; **24.10.** $\frac{1}{4}x^4+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$; **24.11.** $\frac{4}{3}x^3-\frac{2^{x-4}}{\ln 2}+C$; **24.12.** $\frac{1}{10}x^{10}-\frac{5}{8}x^8+\frac{5}{3}x^6-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$; **24.13.** $-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$; **24.14.** $\frac{2^x\cdot 7^x}{\ln 14}+C$; **24.15.** $\frac{3^{2x}+4\cdot 3^x+2x\ln 3}{2\ln 3}+C$; **24.16.** $\frac{5^{2x}-4\cdot 5^{-x}}{2\ln 5}+C$; **24.17.** $3\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^x}{\ln\frac{7}{4}}-2\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^x}{\ln\frac{5}{4}}+C$; **24.18.** $-\frac{1}{2}x^2-x+C$; **24.19.** $\ln|1+x|+x^2+C$; **24.20.** $2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$; **24.21.** $x+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$; **24.22.** $\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}x^3+C$; **24.23.** $\frac{1}{4}\mathrm{arcsin}x+C$; **24.24.** $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$; **24.25.** $2x+C$; **24.26.** $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$; **24.27.** $\frac{1}{2}\ln(3+x^2)+C$; **24.28.** $-\frac{1}{8(x^2+3)^4}+C$; **24.29.** $\frac{3}{8}(x+1)^{\frac{8}{3}}-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}+C$; **24.30.** $2\sqrt{1+\sin x}+C$; **24.31.** $-e^{\frac{1}{x}}+C$; **24.32.** $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$; **24.33.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x+1}\right|+C$; **24.34.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\cos x}\right|+C$; **24.35.** $\ln|x^2-3x+3|+C$; **24.36.** $\frac{1}{63}(3x+5)^{21}+C$; **24.37.** $\frac{1}{3}\cos(2-3x)+C$; **24.38.** $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$; **24.39.** $\frac{1}{4}(x^2+1)^4+C$; **24.40.** $\frac{2}{3}(x^3+2x+3)^{\frac{3}{2}}+C$; **24.41.** $\ln|\ln x|+C$; **24.42.** $\frac{1}{3}\ln|3\ln x+5|+C$; **24.43.** $\frac{1}{7}(e^x+2)^7+C$; **24.44.** $\frac{5}{16}(2x^2+1)^{\frac{4}{5}}+C$; **24.45.** $-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$; **24.46.** $\frac{1}{8}\cos^8 x-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$; **24.47.** $-\frac{2^{\cos^2 x}}{\ln 2}+C$; **24.48.** $\frac{1}{\ln 3}\mathrm{arctg}3^x+C$; **24.49.** $\frac{3}{2}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{2}{3}}+C$; **24.50.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$; **24.51.** $\arcsin(x-1)+C$; **24.52.** $\frac{1}{5}(\mathrm{arctg}x)^5+C$; **24.53.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|+C$; **24.54.** $-\frac{1}{4\ln^4 x}+C$; **24.55.** $-\frac{1}{2(\mathrm{arcsin}x)^2}+C$; **24.56.** $3\sqrt[3]{\sin x}+C$; **24.57.** $e^x(x^2-2x+3)+C$; **24.58.** $e^{3x}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{9}x-\frac{4}{27}\right)+C$; **24.59.** $\sin x-\cos x(x+1)+C$; **24.60.** $\sin x(2x^4-28x^2+2x+55)+\cos x(8x^3-56x+2)+C$; **24.61.** $\frac{x\cdot 3^x\ln 3-3^x}{(\ln 3)^2}+C$; **24.62.** $-e^{-x}(x+1)+C$; **24.63.** $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$; **24.64.** $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$; **24.65.** $\frac{1}{26}e^{5x}(\sin x+5\cos x)+C$; **24.66.** $-e^{-x}(x^2+2x+2)+C$; **24.67.** $x\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}x+C$; **24.68.** $x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; **24.69.** $\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$; **24.70.** $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$; **24.71.** $\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{8}x^4\ln x+\frac{1}{32}x^4+C$; **24.72.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$; **24.73.** $\frac{1}{10}e^x(\sin 3x-3\cos 3x)+C$; **24.74.** $\frac{1}{10}e^{-3x}(\sin x-3\cos x)+C$; **24.75.** $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$; **24.76.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C$; **24.77.** $x\ln(1+x^2)-2x+2\mathrm{arctg}x+C$; **24.78.** $\frac{1}{6}x^6\left(\ln x-\frac{1}{6}\right)+C$; **24.79.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)+C$, **24.80.** $\frac{e^x\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}e^x\right)-e^x+2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}e^x\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}e^x\right)}+C$; **24.81.** $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg}x\right)+C$; **24.82.** $-2\sqrt{1-x}\mathrm{arcsin}\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; **24.83.** $x\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{5}\right)-\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x^2+25}{25}\right|+C$; **24.84.** $\operatorname{tg}x\ln(\cos x)+\operatorname{tg}x-x+C$; **24.85.** $e^x\left[\left(\frac{1-x}{2}\right)\cos x+\frac{1}{2}x\sin x\right]+C$; **24.86.** $e^{-x}\left[\left(\frac{1-x^2}{2}\right)\cos x+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\sin x\right]+C$; **24.87.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-3|+\sqrt{3}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$; **24.88.** $6\ln|x-5|-\ln|x+1|+C$; **24.89.** $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right|+C$; **24.90.** $\frac{1}{4}\left(\ln|2x-1|+\frac{1}{2x-1}\right)+C$; **24.91.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$; **24.92.** $3\ln|x^2+4x+13|-4\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$; **24.93.** $3x+\frac{5}{3}\ln|x+1|+\frac{10}{3}\ln|x-2|+C$; **24.94.** $\frac{1}{3}x^3-x+\mathrm{arctg}x+C$; **24.95.** $\frac{1}{2}x^2+3\ln|x|+2\ln|x-3|+C$; **24.96.**

$\frac{1}{5}\ln|x+3|-4\ln|x-1|+\frac{24}{5}\ln|x-2|+C$; **24.97.** $\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{4}{3}\ln|x+1|+\frac{10}{3}\ln|x-2|-\frac{11}{3}\ln|x+2|+C$; **24.98.** $2\ln|x^2-4x+29|+3\ln|x^2-2x+5|+6\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{5}\right)+8\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$; **24.99.** $\frac{x-3}{4(x^2-2x+3)}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}(x-1)}{2}\right)+C$; **24.100.** $-\frac{4}{x-1}-\frac{57}{8}\operatorname{arctg}(x-1)-\frac{25}{8}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+2}-\frac{7}{4}\cdot\frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}+C$.

Całka oznaczona. Zastosowanie całek

25.1. 10; **25.2.** $\frac{27}{2}$; **25.3.** $\frac{27}{2}$; **25.4.** 72; **25.5.** $\frac{4067}{4}$; **25.6.** 12; **25.7.** $\frac{32}{3}$; **25.8.** $\frac{88}{3}$; **25.9.** $\frac{148}{5}$; **25.10.** $\frac{152}{3}$; **25.11.** $\frac{775}{2}$; **25.12.** $\frac{14}{3}$; **25.13.** $\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}-2$; **25.14.** $\frac{3}{2}$; **25.15.** 2; **25.16.** $-\frac{21845}{16}$; **25.17.** $\frac{1}{3}$; **25.18.** $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$; **25.19.** $-\ln(\ln 2)$; **25.20.** $10\sqrt{15}-4\sqrt{6}$; **25.21.** $2\ln 5$; **25.22.** $2-\frac{5}{e}$; **25.23.** $\ln\frac{13}{4}$; **25.24.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$; **25.25.** $\frac{1}{7}(4^7-3^7)$; **25.26.** $\frac{9(\sqrt{3}-5)+3(2\sqrt{3}-1)\pi-\pi^2}{18}$; **25.27.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$; **25.28.** $\frac{195}{14\ln 14}$; **25.29.** $e-2$; **25.30.** $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$; **25.31.** $\frac{18\ln 3-8}{\ln^2 3}$; **25.32.** 1; **25.33.** $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$; **25.34.** $1-\frac{\pi}{4}$; **25.35.** $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{12}$; **25.36.** $\frac{\pi}{4}$; **25.37.** $\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{5}$; **25.38.** $\frac{\pi}{6}$; **25.39.** $\frac{31}{80}$; **25.40.** 2; **25.41.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$; **25.42.** $\frac{1}{2}$; **25.43.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$; **25.44.** $\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{2}{5}$; **25.45.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$; **25.46.** $2\ln 2$; **25.47.** 3; **25.48.** $2(\sqrt{e-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{e-1})$; **25.49.** $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$; **25.50.** $\ln 3$; **25.51.** $\frac{112}{3}$; **25.52.** 6; **25.53.** $\frac{40}{3}$; **25.54.** 8; **25.55.** 12; **25.56.** 2; **25.57.** 12; **25.58.** 4; **25.59.** $e-1$; **25.60.** $1-\frac{1}{e^5}$; **25.61.** $\frac{14}{3}$; **25.62.** 18; **25.63.** $\frac{7}{3}$; **25.64.** 6; **25.65.** $\frac{1}{6}$; **25.66.** $\frac{1}{3}$; **25.67.** $\frac{8}{3}$; **25.68.** $\frac{125}{6}$; **25.69.** $\frac{1}{12}$; **25.70.** $\frac{32}{3}$; **25.71.** $\frac{64\sqrt{2}}{3}$; **25.72.** $\frac{125}{54}$; **25.73.** $\frac{40\sqrt{10}}{3}$; **25.74.** $6\operatorname{arctg}\sqrt{2}-2\sqrt{2}$; **25.75.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; **25.76.** $\frac{125}{24}$; **25.77.** $e-1$; **25.78.** $\frac{5}{6}$; **25.79.** $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$; **25.80.** $U=\frac{352}{9}$, $P_s=\frac{224}{9}$, $C_s=\frac{484}{9}$; **25.81.** $U=1$, $P_s=\frac{1}{3}$, $C_s=\frac{1}{8}$; **25.82.** $U=27$, $P_s=9$, $C_s=\frac{81}{14}$; **25.83.** $U=\frac{25}{8}$, $P_s=\frac{67}{24}$, $C_s=\frac{125}{24}$; **25.84.** a) $\frac{177}{2}$, b) $\frac{357}{2}$, c) $\frac{1328}{3}$; **25.85.** a) 6360, b) 1110, c) 13440; **25.86.** a) 35700, b) 28500, c) 2706000.

Spis Literatury

[BMP] Z. Bartosiewicz, D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz, Matematyka, Politechnika Białostocka, Białystok, 1998.

[Ch] A.C. Chiang, Podstawy ekonomii matematycznej, PWE, Warszawa, 1994.

[GT] K. Grysa, Z. Trylski, Zastosowania matematyki w zarządzaniu i ekonomii, Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 1996.

[MW] M. Matłoka, B. Wojcieszyn, Matematyka z elementami zastosowań w ekonomii, Wyższa Szkoła Bankowa, Poznań, 1998

[OO] A. Ostoja-Ostaszewski, Matematyka w ekonomii. Modele i metody, PWN, Warszawa, 1996.