

# OPTIMUM

## STUDIA EKONOMICZNE

### SPIS TREŚCI

<b>STUDIA I ROZPRAWY</b> .....	3
Krzysztof Piasecki – <i>O pewnych modyfikacjach teorii skierowanych liczb rozmytych</i> .....	3
Krzysztof S. Targiel, Maciej Nowak, Tadeusz Trzaskalik – <i>Wybór momentu rozpoczęcia projektu z wykorzystaniem interaktywnego podejścia wielokryterialnego</i> .....	19
Marcin Czupryna, Przemysław Szufel, Bogumił Kamiński, Anna Wiertelwska – <i>O estymacji preferencji w sztucznych sieciach społecznych</i> .....	31
Jerzy Zemke – <i>Metoda Monte Carlo w ocenie ryzyka finansowego inwestycji</i> .....	48
Elżbieta Majewska – <i>Wpływ kryzysu finansowego 2007-2009 na strukturę hierarchiczną europejskich rynków kapitałowych</i> .....	61
Helena Gaspars-Wieloch – <i>A Decision Rule for Uncertain Multi-Criteria Pure Decision Making and Independent Criteria</i> .....	77
Ewa Chojnacka, Dorota Górecka – <i>Application of MCDA Methods in the Performance Evaluation of Public Benefit Organisations</i> .....	93
<b>MISCELLANEA</b> .....	107
Dariusz Kacprzak – <i>Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych w modelu równowagi rynkowej</i> .....	107
Anna Łyczkowska-Hanćkowiak – <i>Behavioralna wartość bieżąca w postaci skierowanych liczb rozmytych</i> .....	122

Grzegorz Tarczyński, Michał Jakubiak – <i>Wpływ kompletacji strefowej, składowania towarów i metody wyznaczenia trasy magazyniera na efektywność procesu kompletacji zamówień</i> .....	138
Aleksandra Wójcicka – <i>Classification of Trade Sector Entities in Credibility Assessment Using Neural Networks</i> .....	153
Michał Dominik Stasiak – <i>Analiza falowa kursu USD/PLN w reprezentacji binarnej</i> .....	162
Grzegorz Szczerbak – <i>Wykorzystanie modeli GARCH w analizie ryzyka finansowego spółek akcyjnych notowanych na GPW</i> .....	176

**prof. dr hab. Krzysztof PIASECKI**

Wydział Zarządzania, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

e-mail: k.piasecki@ue.poznan.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.01

*Profesorowi Witoldowi Kosińskiemu  
in memoria*

### O PEWNYCH MODYFIKACJACH TEORII SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

#### Streszczenie

Skierowane liczby rozmyte zostały zdefiniowane w doskonały i intuicyjny sposób przez Witolda Kosińskiego. Z tej przyczyny skierowane liczby rozmyte coraz częściej określa się mianem liczb Kosińskiego. W pierwszej części tej pracy zaproponowano w pełni sformalizowaną definicję liczby Kosińskiego. Definicję tę następnie uogólniono do przypadku skierowanej liczby rozmytej z nieciągłą funkcją przynależności. Istotną wadą arytmetyki zaproponowanej przez Kosińskiego był brak zamknięcia przestrzeni skierowanych liczb rozmytych ze względu na podstawowe działania arytmetyczne, takie jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Głównym celem prezentowanej pracy jest taka modyfikacja działań arytmetycznych, aby przestrzeń liczb Kosińskiego była zamknięta z racji zmodyfikowanych działań arytmetycznych.

**Słowa kluczowe:** skierowane liczby rozmyte, arytmetyka

#### ON CERTAIN MODIFICATIONS OF ORDERED FUZZY NUMBERS THEORY

#### Summary

Ordered fuzzy numbers have been defined in an excellent, intuitive way by Witold Kosiński. For this reason, they are increasingly referred to as Kosiński's numbers. A fully formalized definition of a Kosiński's number is proposed in the first part of this work. This definition is generalized so as to fit an ordered fuzzy number with an upper semi-continuous membership function. A significant drawback of Kosiński's arithmetic is that the space of ordered fuzzy numbers is not closed under addition, subtraction, multiplication, or division. The main aim of this paper is to modify the arithmetic in such a way that the space of ordered fuzzy numbers is closed under the modified arithmetic operations.

**Key words:** ordered fuzzy number, arithmetic

**JEL:** C02

## 1. Wstęp

Nieprecyzyjne określenia i oceny przesłanek podejmowania decyzji są istotnym czynnikiem, który ma wpływ na proces decyzyjny. W obrębie badań operacyjnych nieprecyzyjność tę najczęściej modeluje się za pomocą teorii zbiorów rozmytych, zainicjowanej przez Zadeha [1965]. Z racji rosnących potrzeb, teoria ta jest intensywnie rozwijana do tej pory. Jednym z podstawowych narzędzi jest tutaj liczba rozmyta (w skrócie FN). Szczególny rodzaj FN, tj. skierowane liczby rozmyte (w skrócie OFN), został w intuicyjny sposób wprowadzony przez Kosińskiego i współautorów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002 a, b; 2003; Kosiński, 2006]. Skierowane liczby rozmyte zaczęły znajdować swoje zastosowanie w badaniach operacyjnych. Przykłady takich zastosowań można już znaleźć w pracach: [Kacprzak, 2012; Roszkowska, Kacprzak, 2016; Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017; Piasecki, 2016].

Jednak zdefiniowane w intuicyjny sposób OFN wykazywały pewne wady. Szczególnie istotnym mankamentem arytmetyki zaproponowanej przez Kosińskiego był tutaj brak zamknięcia przestrzeni OFN ze względu na podstawowe działania arytmetyczne, takie jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie [Kosiński, 2006]. Powodowało to znaczne trudności w praktycznych zastosowaniach OFN, m.in. w badaniach operacyjnych.

Stąd głównym celem prezentowanej pracy jest taka modyfikacja działań arytmetycznych, aby przestrzeń liczb Kosińskiego była zamknięta z uwagi na te działania. Realizacji tego celu będzie służyć dyskusja nad intuicyjną definicją OFN zaproponowaną przez Kosińskiego. Dyskusja ta będzie zmierzać do zaproponowania takiej formalnej definicji OFN, która będzie w pełni odzwierciedlać intuicyjne podejście Kosińskiego. Zakłada się przy tym uzyskanie takiego stopnia ogólności, aby było możliwe zastosowanie teorii skierowanych liczb rozmytych do modelu Behawioralnej Wartości Bieżącej (w skrócie BPV) [Piasecki, 2011a; b, 2014], [Piasecki, Siwek, 2015]. Postawienie takiego celu wynika z faktu, że Łyczkowska-Hanćkowiak [2017] uzasadniła nadanie BPV orientacji.

## 2. Określenia liczby rozmytej

Teoria zbiorów rozmytych [Zadeh, 1965] odnosi się do opisu nieprecyzyjnych pojęć, przez które rozumie się nieprecyzyjnie wyróżniony obiekt w przestrzeni elementów  $\mathbb{X}$ . Każdy podzbiór rozmyty  $A \subset \mathbb{X}$  jest jednoznacznie opisany za pomocą swej funkcji przynależności  $\mu_A \in [0; 1]^{\mathbb{X}}$ . W ujęciu logik wielowartościowych, wartość  $\mu_A(x)$  jest interpretowana jako wartość logiczna zdania  $x \in A$ . Za pomocą symbolu  $\mathcal{F}(\mathbb{X})$  oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych w przestrzeni  $\mathbb{X}$ .

W tym artykule do analizy dowolnego zbioru rozmytego zastosowano następujące pojęcia:

- $\alpha$  – cięcie  $[A]_{\alpha}$  zbioru  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$  określone dla każdego  $\alpha \in ]0; 1]$  za pomocą zależności:

$$[A]_{\alpha} = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad (1)$$

- domknięcie nośnika  $[A]_{0^+}$  zbioru  $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$  określone za pomocą zależności:

$$[A]_{0^+} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [A]_{\alpha}. \quad (2)$$

W tym artykule przedmiotem zainteresowania będą wartości przybliżone. Stąd przestrzeń  $\mathbb{X}$  ograniczamy do przypadku przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ . Przybliżeniem dowolnej wartości jest rozmyta liczba rzeczywista  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , zdefiniowana poniżej w najbardziej ogólny sposób.

**Definicja 1.** Liczba rozmyta (w skrócie FN) jest podzbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  o ograniczonym domknięciu nośnika  $[S]_{0^+}$  i reprezentowany przez swą półciągłą z góry funkcję przynależności  $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  spełniająca warunki [Dubois, Prade, 1979]:

$$\exists x \in \mathbb{R}: \mu_S(x) = 1, \quad (3)$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \leq y \leq z \implies \mu_S(y) \geq \min\{\mu_S(x), \mu_S(z)\}. \quad (4)$$

Przykładem FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  jest Behawioralna Wartość Bieżąca [Piasecki, 2011a; b, 2014; Piasecki, Siwek, 2015] reprezentowana przez funkcję swą funkcję przynależności przedstawioną na rysunku 1.

Wzorując się na pracy [Dubois, Prade, 1982], dla każdej czwórki  $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$  spełniającej warunek  $a_S \leq b_S \leq c_S \leq d_S$  definiujemy szczególny rodzaj FN  $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$  typu LR (w skrócie LR-FN). Każda z LR-FN  $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$  jest reprezentowana przez swe funkcje przynależności  $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$  określoną następująco:

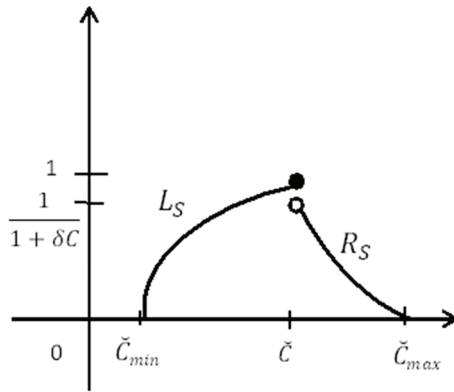
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < a_S \\ L_S(x) & a_S \leq x \leq b_S \\ 1 & b_S \leq x \leq c_S, \\ R_S(x) & c_S \leq x \leq d_S \\ 0 & d_S < x \end{cases} \quad (5)$$

gdzie lewa funkcja odniesienia  $L_S \in [0, 1]^{[a_S, b_S]}$  jest prawostronnie ciągłą funkcją rosnącą i prawa funkcja odniesienia  $R_S \in [0, 1]^{[c_S, d_S]}$  jest lewostronnie ciągłą funkcją malejącą. Dowolną parę funkcji  $(L_S, R_S)$  nazywamy parą funkcji odniesienia.

W pracy [Dubois, Prade, 1982] LR-FN zdefiniowano jedynie do przypadku czwórki  $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$  spełniającej warunek  $a_S < b_S \leq c_S < d_S$  oraz ciągłych funkcji odniesienia będących suriekcjami. Dalsze uogólnienia wynikały z potrzeb narzucanych przez wymogi poszczególnych zastosowań. Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że BPV opisana na rysunku 1. jest LR-FN  $S(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{max})$ . Na tym rysunku można również dostrzec, że prawa funkcja odniesienia  $R_S$  nie jest suriekcją. Zaproponowane uogólnienie określenia LR-FN jest zatem niezbędne do przedstawienia BPV jako LR-FN.

## RYSUNEK 1.

## Behawioralna wartość bieżąca (BPV)



Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

Goetschel i Voxman [1986] pokazali, że definicję 1. można zastąpić równoważną poniższą definicją FN.

**Definicja 2.** FN jest to podzbiór rozmyty  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  o ograniczonym domknięciu nośnika  $[S]_{0+}$  spełniający dodatkowo warunek [Goetschel, Voxman, 1986]:

$$\forall \alpha \in ]0; 1[ \exists (l_S(\alpha), r_S(\alpha)) \in \mathbb{R}^2: l_S(\alpha) \leq r_S(\alpha): [S]_\alpha = [l_S(\alpha), r_S(\alpha)]. \quad (6)$$

Następnie Goetschel i Voxman [1986] dowiedli prawdziwości poniższych twierdzeń.

**Twierdzenie 1.** Dla dowolnej FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  mamy:

$$- l_S \text{ jest ograniczoną funkcją niemalejącą na } ]0; 1[, \quad (7)$$

$$- r_S \text{ jest ograniczoną funkcją nierosnącą na } ]0; 1[, \quad (8)$$

$$l_S(1) \leq r_S(1), \quad (9)$$

$$- \text{funkcje } l_S \text{ i } r_S \text{ są lewostronnie ciągłe na } ]0; 1[ \text{ i prawostronnie ciągłe w } 0. \quad (10)$$

Dowolną parę funkcji  $(l_S, r_S)$  spełniającą warunki: (7), (8), (9) i (10), nazywamy parą funkcji Goetschela-Voxmana.

**Twierdzenie 2.** Dla dowolnej pary  $(l_S, r_S)$  funkcji Goetschela-Voxmana istnieje dokładnie jedna FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  taka, że spełniony jest warunek (6).

W tej sytuacji parę funkcji Goetschela-Voxmana, reprezentującą FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ , zawsze będziemy oznaczać za pomocą symbolu  $(l_S, r_S)$ . W szczególnym przypadku można stwierdzić, że:

**Twierdzenie 3.** Dla dowolnej LR-FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  dodatkowo mamy:

- funkcje  $l_S$  i  $r_S$  są ciągle na  $]0,1[$ . (11)

**Twierdzenie 4.** Dla dowolnej pary  $(l_S, r_S)$  funkcji Goetschela-Voxmana, spełniającej dodatkowo warunek (11), istnieje dokładnie jedna LR-FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  taka, że spełniony jest warunek (6).

Jeśli FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  jest typu LR, to wtedy mamy:

$$S = S(l_S(0), l_S(1), r_S(1), r_S(0)). \quad (12)$$

Ponadto, dla dowolnej LR-FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  między reprezentującymi ją parą  $(L_S, R_S)$  funkcji odniesienia a parą  $(l_S, r_S)$  funkcji Goetschela-Voxmana zachodzą następujące tożsamości:

$$\forall \alpha \in [0;1]: l_S(\alpha) = L_S^*(\alpha) = \min\{x \in [a_S, b_S]: L_S(x) \geq \alpha\}, \quad (13)$$

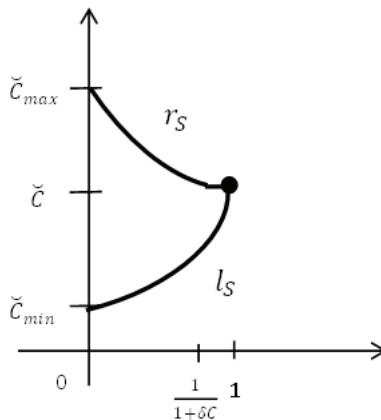
$$\forall \alpha \in [0;1]: r_S(\alpha) = R_S^\circ(\alpha) = \max\{x \in [c_S, d_S]: R_S(x) \geq \alpha\}, \quad (14)$$

$$\forall x \in [l_S(0), l_S(1)]: L_S(x) = l_S^\triangleleft(x) = \max\{\alpha \in [0;1]: l_S(\alpha) = x\}, \quad (15)$$

$$\forall x \in [r_S(1), r_S(0)]: R_S(x) = r_S^\triangleright(x) = \min\{\alpha \in [0;1]: r_S(\alpha) = x\}. \quad (16)$$

**RYSUNEK 2.**

**Funkcje Goetschela-Voxmana**



Źródło: opracowanie własne.

Reasumując, w rozdziale tym uogólniliśmy pojęcie LR-FN do przypadku jednostronnie ciągłych funkcji odniesienia. Uogólnienie takie było konieczne do tego, aby móc BPV zaliczyć do klasy LR-FN. Na rysunku 2. przedstawiono parę  $(l_S, r_S)$  funkcji Goetschela-Voxmana, reprezentującą BPV przedstawioną na rysunku 1.

Ponadto, warto zauważyć, że jeśli funkcje Goetschela-Voxmana są różnowartościowe, to mamy wtedy:

$$\forall_{x \in [l_S(0), l_S(1)]}: L_S(x) = l_S^{\leq}(x) = l_S^{-1}(x), \quad (17)$$

$$\forall_{x \in [r_S(1), r_S(0)]}: R_S(x) = r_S^{\geq}(x) = r_S^{-1}(x). \quad (18)$$

### 3. Istota i określenie skierowanych liczb rozmytych

Pojęcie skierowanych liczb rozmytych (w skrócie OFN) zostało wprowadzone przez Kosińskiego i współautorów w serii artykułów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002a; 2002b; 2003; Kosiński, 2006] jako rozszerzenie pojęcia FN. Stąd dowolna OFN powinna być określona jako taki podzbiór rozmyty przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ , którego funkcja przynależności spełnia warunki definicji 1. lub definicji 2. Z drugiej strony Kosiński zdefiniował OFN jako uporządkowaną parę funkcji przekształcających przedział jednostkowy  $[0,1]$  w  $\mathbb{R}$ . Taka para nie jest podzbiorem rozmytym w  $\mathbb{R}$ . Oznacza to, że nie można zaakceptować oryginalnej terminologii Kosińskiego. Niemniej intuicyjne podejście Kosińskiego do pojęcia OFN jest bardzo użyteczne. Z tych powodów poniżej zaprezentowano zmodyfikowaną definicję OFN. Zmodyfikowana definicja w pełni będzie odpowiadać intuicyjnemu określeniu OFN sformułowanemu przez Kosińskiego. Pojęcie OFN jest ściśle powiązane z następującą parą uporządkowaną.

**Definicja 3.** Para Kosińskiego jest to uporządkowana para  $(f_S, g_S)$  ciągłych bijekcji lub funkcji stałych  $f_S: [0,1] \rightarrow UP_S$  i  $g_S: [0,1] \rightarrow DOWN_S$  spełniających warunki:

$$(f_S(1) - f_S(0)) \cdot (g_S(1) - g_S(0)) \leq 0, \quad (19)$$

$$|f_S(1) - g_S(1)| \leq |f_S(0) - g_S(0)|, \quad (20)$$

$$UP_S \cap DOWN_S = \{f_S(1)\} \cap \{g_S(1)\}. \quad (21)$$

Dla dowolnej pary Kosińskiego  $(f_S, g_S)$  funkcja  $f_S: [0,1] \rightarrow UP_S$  jest nazywana funkcją wznoszącą. Wtedy funkcja  $g_S: [0,1] \rightarrow DOWN_S$  jest nazywana funkcją opadającą. Obie te funkcje mają swoją wspólną nazwę – funkcje Kosińskiego.

**Uwaga:** W oryginalnej wersji definicji Kosińskiego [2006] OFN są zdefiniowane jako uporządkowana para  $(f_S, g_S)$  ciągłych funkcji  $f_S, g_S \in \mathbb{R}^{[0;1]}$ . Pozostałe warunki definicji 3. Kosiński zaznaczył jedynie na wykresach. Zdefiniowane w ten sposób OFN nie były podzbiorem rozmytym. Z tego powodu zaproponowane w definicji 3. przez Kosińskiego OFN zostały zastąpione przez termin **para Kosińskiego**.

Warunki: (19), (20) i (21) implikują, że każda para Kosińskiego spełnia dokładnie jeden z następujących warunków:

$$f_S(0) \leq f_S(1) \leq g_S(1) \leq g_S(0), \quad (22)$$

$$f_S(0) \geq f_S(1) \geq g_S(1) \geq g_S(0). \quad (23)$$



W przypadku spełnienia warunku (22) funkcję  $f_S$  nazywamy początkową funkcją Kosińskiego, zaś funkcję  $g_S$  końcową funkcją Kosińskiego. Jeśli jest spełniony warunek (23), to funkcję  $f_S$  nazywamy końcową funkcją Kosińskiego, natomiast funkcję  $g_S$  początkową funkcją Kosińskiego.

Korzystając z tych określeń faktu, OFN definiuje się w poniższy sposób.

**Definicja 4.** Dla ustalonej pary Kosińskiego  $(f_S, g_S)$ , OFN  $\vec{S}$  jest to para  $\langle S, \mathcal{U} \rangle$  złożona z  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  i orientacji  $\mathcal{U}$ , gdzie:

- $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  jest LR-FN jednoznacznie wyznaczona przez parę  $(l_S, r_S)$  funkcji Goetschela-Voxmana określonych w ten sposób, że:
  - lewa funkcja Goetschela-Voxmana  $l_S$  jest równa początkowej funkcji Kosińskiego;
  - prawa funkcja Goetschela-Voxmana  $r_S$  jest równa końcowej funkcji Kosińskiego;
- orientacja  $\mathcal{U}$  jest określona jako wspólny zwrot wszystkich wektorów prowadzących z przeciwdziedziny  $UP_S$  funkcji wznoszącej do przeciwdziedziny  $DOWN_S$  funkcji opadającej.

Powyższa definicja jest zgodna ze stosowanym przez Kosińskiego intuicyjnym podejściem do pojęcia OFN. Stąd autor tego artykułu zgadza się z opinią, że OFN powinny być nazwane liczbami Kosińskiego [Prokopowicz, 2015a,b]. Przestrzeń wszystkich OFN oznaczamy za pomocą symbolu  $\mathfrak{K}$ . Dla dowolnych OFN  $\vec{S} \in \mathfrak{K}$  ich funkcja wznosząca jest oznaczona za pomocą symbolu  $f_S$  i ich funkcja opadająca jest oznaczana za pomocą symbolu  $g_S$ . Ciągłość funkcji Kosińskiego powoduje, że  $UP_S$  i  $DOWN_S$  są przedziałami domkniętymi. Liczby  $f_S(0)$  i  $f_S(1)$  są granicami przedziału  $UP_S$ . Liczby  $g_S(0)$  i  $g_S(1)$  są granicami przedziału  $DOWN_S$ . Z tego powodu dowolną OFN  $\vec{S}$  z danymi  $UP_S$  i  $DOWN_S$  oznaczamy za pomocą symbolu  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ .

Kiedy  $f_S(0) < g_S(0)$ , to wtedy warunek (22) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca  $f_S$  jest rosnącą lub stałą i funkcja opadająca  $g_S$  jest malejącą lub stałą. Wykresy takich funkcji Kosińskiego zostały przedstawione na rysunku 3a.

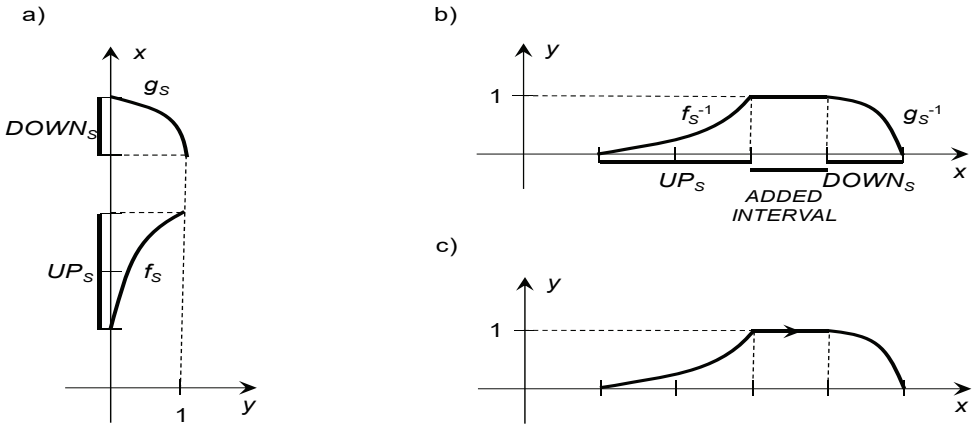
Ponadto, z zależności (5), (17) i (18) wynika, że dodatnio zorientowane OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie wyznaczają FNS  $(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  opisane przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0) \\ f_S^{-1}(x) & f_S(0) \leq x < f_S(1) \\ 1 & f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(1) < x \leq g_S(0) \\ 0 & g_S(0) < x \end{cases} \quad (24)$$

Wykres powyższej funkcji przynależności jest przedstawiony na rysunku 3b. Wykres funkcji przynależności OFN jest pokazany na rysunku 3c. Ostatni wykres ma dodatkową strzałkę oznaczającą orientację, co stanowi informację uzupełniającą.

## RYSUNEK 3.

## Konstrukcja dodatnio zorientowanej OFN



Źródło: [Kosiński, 2006].

Kiedy  $f_S(0) > g_S(0)$ , to wtedy warunek (23) opisuje ujemną orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca  $f_S$  jest malejąca lub stała i funkcja opadająca  $g_S$  jest rosnąca lub stała. Z zależności: (5), (17) i (18) wynika, że ujemnie zorientowana OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie determinuje FNS( $g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0)$ ) opisaną przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0) \\ g_S^{-1}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1) \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_S(1), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0) \\ 0 & f_S(0) < x \end{cases} \quad (25)$$

W szczególnym przypadku OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jest trapezoidalna OFN  $\vec{Tr}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ , określona przez następującą parę Kosińskiego:

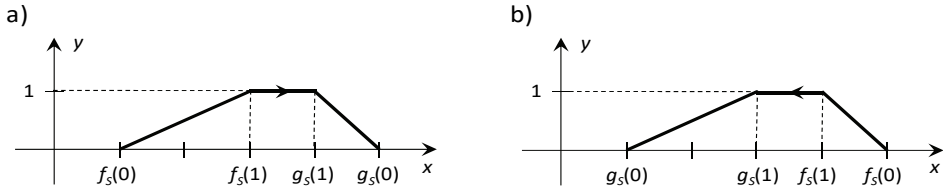
$$f_S(y) = (f_S(1) - f_S(0)) \cdot y + f_S(0), \quad (26)$$

$$g_S(y) = (g_S(1) - g_S(0)) \cdot y + g_S(0). \quad (27)$$

Funkcja przynależności przykładowej dodatnio zorientowanej  $\vec{Tr}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jest przedstawiona na rysunku 4a. Z kolei, na rysunku 4b znajduje się wykres funkcji przynależności przykładowej ujemnie zorientowanej  $\vec{Tr}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ .

## RYSUNEK 4.

## Funkcja przynależności trapezoidalnej OFN



Źródło: [Kosiński, 2006].

Na koniec warto zauważyć, że w przypadku  $f_S(0) = g_S(0)$  orientacja OFN jest nie-  
zdefiniowana. Wtedy jednak rozpatruje się liczbę  $\vec{S}(f_S(0), f_S(0), f_S(0), f_S(0))$ , jako ze  
swej natury niezorientowaną liczbę rzeczywistą  $f_S(0) \in \mathbb{R}$ .

## 4. Uogólnienie pojęcia skierowanej liczby rozmytej

Na rysunku 2. uwidoczono prawą funkcję Goetschela-Voxmana  $r_S$ , reprezentu-  
jącą przykładową BPV, która jest malejąca na przedziale  $[0; \frac{1}{1+\delta C}]$  i stała na przedziale  
 $[\frac{1}{1+\delta C}, 1]$ . Porównując to spostrzeżenie z definicją 3., można stwierdzić, że nie istnieje  
para Kosińskiego mogąca nadać orientację przykładowej BPV. Z drugiej strony Łycz-  
kowska-Hanćkowiak [2017] uzasadniła nadanie BPV orientacji poprzez potrzebę oz-  
naczenia subiektywnej prognozy zwrotu trendu przyszłych ocen BPV. Wywołuje to  
konieczność rozszerzenia definicji 3. pary Kosińskiego. W dalszych rozważaniach  
autor artykułu posłużył się poniższą, uogólnioną definicją pary Kosińskiego.

**Definicja 5.** Para Kosińskiego jest to uporządkowana para  $(f_S, g_S)$  ciągłych słabo  
monotonicznych suriekcji  $f_S: [0,1] \rightarrow UP_S$  i  $g_S: [0,1] \rightarrow DOWN_S$ , spełniających wa-  
runki: (19), (20) i (21).

Wtedy definicja 4. OFN pozostaje bez zmian. Przestrzeń wszystkich OFN ozna-  
czono za pomocą symbolu  $\mathfrak{F}$ .

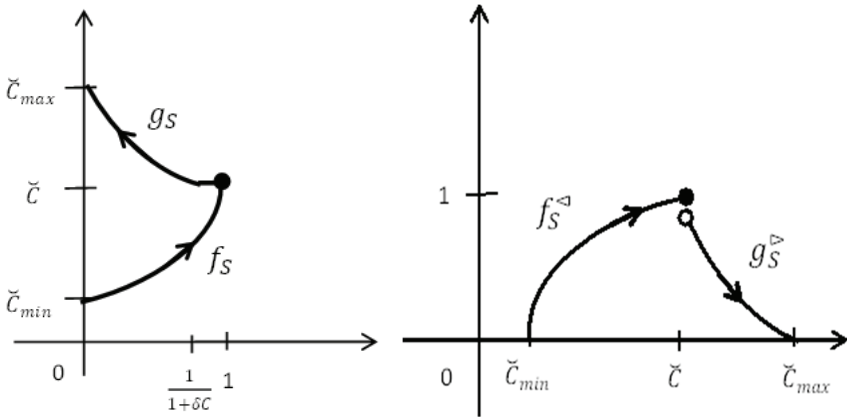
Kiedy  $f_S(0) < g_S(0)$ , to wtedy warunek (22) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym  
przypadku funkcja wznosząca  $f_S$  jest niemalejąca i funkcja opadająca  $g_S$  jest nieros-  
nąca. Ponadto, z zależności: (5), (15) i (16) wynika, że dodatnio zorientowana OFN  
 $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie wyznacza FN  $S(f_S(0), f_S(1), g_S(1),$   
 $g_S(0))$  opisaną przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0) \\ f_S^{\triangleleft}(x) & f_S(0) \leq x < f_S(1) \\ 1 & f_S(1) \leq x \leq g_S(1), \\ g_S^{\triangleright}(x) & g_S(1) < x \leq g_S(0) \\ 0 & g_S(0) < x \end{cases} \quad (28)$$

Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że jeśli przewiduje się wzrost ceny przykładowej BPV, to wtedy można ją przedstawić jako dodatnio zorientowaną OFN  $\vec{S}(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max})$ . Na rysunku 5a przedstawiono wykresy pary Kosińskiego, wyznaczającej dodatnio zorientowaną przykładową BPV. Na rysunku 5b zobrazowano wykres funkcji przynależności tej dodatnio zorientowanej BPV.

RYSUNEK 5.

## Dodatnio zorientowana BPV



Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

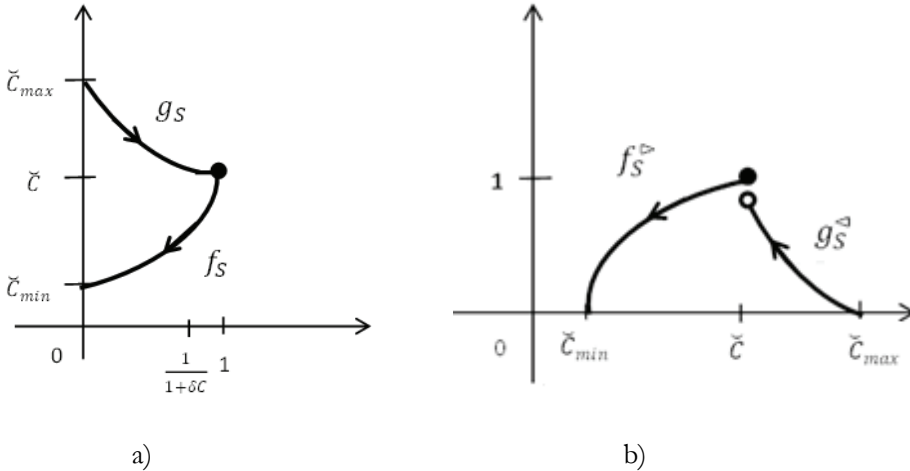
Kiedy  $f_S(0) > g_S(0)$ , to wtedy warunek (23) opisuje ujemną orientację OFN. Wówczas funkcja wznosząca  $f_S$  jest nierosnąca i funkcja opadająca  $g_S$  jest niemalejąca. Dzięki zależnościom: (5), (15) i (16) ujemnie zorientowana OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie determinuje FN  $S(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0))$ , opisaną przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0) \\ g_S^{\triangleleft}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1) \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_S(1), \\ f_S^{\triangleright}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0) \\ 0 & f_S(0) < x \end{cases} \quad (29)$$

Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że jeśli przewiduje się spadek oceny przykładowej BPV, to wtedy można ją przedstawić jako ujemnie zorientowaną OFN  $\vec{S}(\check{C}_{max}, \check{C}, \check{C}_{min})$ . Na rysunku 6a przedstawiono wykresy pary Kosińskiego, wyznaczającej ujemnie zorientowaną przykładową BPV. Na rysunku 6b zobrazowano wykres funkcji przynależności ujemnie zorientowanej przykładowej BPV.

RYSUNEK 6.

Ujemnie zorientowana BPV



Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

Relacje pomiędzy OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  a zerem  $0 \in \mathbb{R}$  są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)) > 0 \Leftrightarrow \min\{f_S(0), g_S(0)\} > 0, \quad (30)$$

$$\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)) \neq 0 \Leftrightarrow f_S(0) \cdot g_S(0) > 0. \quad (31)$$

5. Arytmetyka skierowanych liczb rozmytych

W tym rozdziale wszystkie symbole  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $/$  podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych zaprezentowano za pomocą symbolu  $\circ$ .

Dubois i Prade [1978] pierwsi wprowadzili operacje arytmetyczne na FN w sposób zgodny z zasadą rozszerzenia Zadeha [1975 a, b, c].

Niech  $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  są FN. Dowolne działanie arytmetyczne  $\circ$  można rozszerzyć do działania  $\odot$  na FN za pomocą tożsamości:

$$C = A \odot B, \quad (32)$$

gdzie:

$$\mu_C(z) = \sup\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} : z = x \circ y, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (33)$$

Goetschel i Voxman [1986] dowiedli, że mamy tutaj:

$$l_C = l_A \circ l_B \wedge r_C = r_A \circ r_B. \quad (34)$$

Formalna prostota tych zależności jest istotną zaletą definiowania za ich pomocą działań arytmetycznych na FN.

Kosiński wraz ze współautorami [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002 a, b; 2003] zaproponował poniższe rozszerzenie działań arytmetycznych do przypadku działań na OFN.

Niech  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathfrak{K}$ . Dowolne działanie arytmetyczne  $\circ$  można rozszerzyć do działania  $\odot$  na OFN dzięki tożsamości:

$$\vec{C} = \vec{A} \odot \vec{B}, \quad (35)$$

gdzie:

$$f_C = f_A \circ f_B \wedge g_C = g_A \circ g_B. \quad (36)$$

W obu powyższych rozszerzeniach dzielnik musi być niezerowy, to jest spełniający relację (31). Jednocześnie łatwo można sprawdzić, że dla zorientowanych liczb trapezoidalnych mamy:

$$\vec{Tr}(a \circ e, b \circ f, c \circ g, d \circ h) = \vec{Tr}(a, b, c, d) \circ \vec{Tr}(e, f, g, h). \quad (37)$$

Bez trudu można stwierdzić<sup>1</sup>, że jeśli OFN mają identyczne orientacje, to rezultaty uzyskane za pomocą arytmetyki Kosińskiego są identyczne z wynikami uzyskanymi za pomocą arytmetyki wprowadzonej przez Dubois i Prade. Oznacza to, że dla dowolnej pary OFN  $(\vec{A}, \vec{B})$  o identycznej orientacji warunek (35) implikuje warunek (32). Oczywiście należy tutaj pamiętać, że zgodnie z definicją 5., OFN  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  zostały utworzone poprzez nadanie orientacji FN  $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

Ponadto, Kosiński [2006] pokazał, że jeśli OFN mają różne orientacje, to rezultaty uzyskane za pomocą jego arytmetyki mogą być różne od wyników uzyskanych dzięki arytmetyce wprowadzonej przez Dubois i Prade.

Oznacza to, że dla dowolnej pary OFN  $(\vec{A}, \vec{B})$  o różnej orientacji warunek (35) nie jest warunkiem dostatecznym dla (32).

**Kontrprzykład:** Rozważmy sumę Kosińskiego  $\vec{A}$  trapezoidalnych OFN  $\vec{C} = \vec{Tr}(1; 3; 7; 8)$  i  $\vec{D} = \vec{Tr}(5; 4; 4; 2)$  to jest:

<sup>1</sup> Wystarczy zestawić razem zależności: (34), (35), (37) i (38) z definicją 5. i warunkami: (22) i (23).

$$\bar{A} = \overrightarrow{Tr}(1; 3; 7; 8) \oplus \overrightarrow{Tr}(5; 4; 4; 2).$$

Stosując zależności (36), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 5 = f_C(0) + f_D(0) = f_A(0) < f_A(1) = f_C(1) + f_D(1) = 3 + 4 = 7 \\ 10 &= 8 + 2 = g_C(0) + g_B(0) = g_A(0) < g_A(1) = g_C(1) + g_B(1) = 7 + 4 \\ &= 11. \end{aligned}$$

To oznacza, że funkcje  $f_A$  i  $g_B$  są równocześnie rosnące. Jest to sprzeczność! To oznacza, że w tym przypadku zależności (36) nie wyznaczyły pary Kosińskiego. Wykres uporządkowanej pary, określonej przez te zależności, jest przedstawiony na rysunku 7a.

**Wniosek:** Istnieją takie pary Kosińskiego, że ich suma Kosińskiego nie istnieje.

Z tego powodu powinno się zmodyfikować działania arytmetyczne na OFN w ten sposób, aby wynik działania zawsze istniał. W tym artykule poddaje się myśl związaną z akceptacją następującej modyfikacji działań arytmetycznych zaproponowanych przez Kosińskiego.

Niech  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathfrak{K}$ . Dowlone działanie arytmetyczne  $\circ$  rozszerzamy do zmodyfikowanego działania  $\square$  na OFN za pomocą tożsamości:

$$\vec{C} = \vec{A} \square \vec{B}, \quad (38)$$

gdzie  $\vec{C}$  jest reprezentowane przez parę Kosińskiego  $(f_C, g_C)$  daną przez tożsamości:

$$f_C(y) = \begin{cases} \min\{f_A(y) \circ f_B(y), f_C(1)\} & (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \beta) \\ \max\{f_A(y) \circ f_B(y), f_C(1)\} & (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \beta), \end{cases} \quad (39)$$

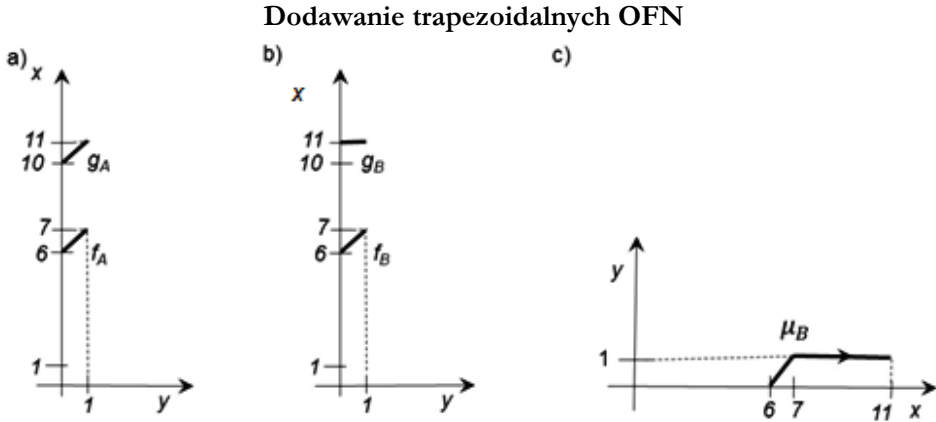
$$g_C(y) = \begin{cases} \max\{g_A(y) \circ g_B(y), g_C(1)\} & (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \beta) \\ \min\{g_A(y) \circ g_B(y), g_C(1)\} & (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \beta), \end{cases} \quad (40)$$

gdzie:

$$\begin{cases} f_C(1) = f_A(1) \circ f_B(1) \\ g_C(1) = g_A(1) \circ g_B(1) \\ \alpha = f_A(0) \circ f_B(0) \\ \beta = g_A(0) \circ g_B(0). \end{cases} \quad (41)$$

Dla dowolnej pary OFN rezultat zmodyfikowanego działania  $\square$  jest równy OFN reprezentowanej przez tę parę Kosińskiego, która jest najbliższa uporządkowanej pary określonej za pomocą tożsamości (36). To powoduje, że jeśli dla danej pary OFN istnieje wynik arytmetycznego działania Kosińskiego  $\odot$ , to wtedy jest on równy wynikowi zmodyfikowanego działania  $\square$ . Jeśli są dwie różne OFN najbliższe wynikowi działania Kosińskiego  $\odot$ , to wtedy wybieramy spośród nich zawsze jednoznacznie określoną, dodatnio zorientowaną OFN.

RYSUNEK 7.



Źródło: opracowanie własne.

**Przykład:** Przedstawiono tutaj pewne przypadki zmodyfikowanych sum  $\boxplus$  trapezoidalnych OFN. Warto zauważyć, że w żadnym z tych przypadków suma Kosinińskiego  $\oplus$  nie istnieje.

$$\overrightarrow{Tr}(1; 2; 4; 6) \boxplus \overrightarrow{Tr}(5; 3; 2; 1) = \overrightarrow{Tr}(5; 5; 6; 7)$$

$$\overrightarrow{Tr}(6; 4; 2; 1) \boxplus \overrightarrow{Tr}(1; 2; 3; 5) = \overrightarrow{Tr}(7; 6; 5; 5)$$

$$\overrightarrow{Tr}(1; 2; 4; 4) \boxplus \overrightarrow{Tr}(5; 3; 2; 1) = \overrightarrow{Tr}(5; 5; 6; 6)$$

$$\overrightarrow{Tr}(4; 4; 2; 1) \boxplus \overrightarrow{Tr}(1; 2; 3; 5) = \overrightarrow{Tr}(6; 6; 5; 5)$$

$$\overrightarrow{Tr}(1; 2; 3; 4) \boxplus \overrightarrow{Tr}(6; 3; 2; 2) = \overrightarrow{Tr}(7; 5; 5; 5)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{Tr}(1; 3; 7; 8) \boxplus \overrightarrow{Tr}(5; 4; 4; 2) = \overrightarrow{Tr}(6; 7; 11; 11)$$

Ostatnia, zmodyfikowana suma jest reprezentowana przez parę Kosinińskiego, przedstawioną na rysunku 7b. Funkcja przynależności tej sumy jest dana na rysunku 7c.

## 6. Podsumowanie

W pracy, dzięki wykorzystaniu twierdzeń Goetschela i Voxmana [1986], udało się przedstawić teorię skierowanych liczb rozmytych Kosinińskiego jako ciągłą kontynuację ewolucji teorii liczb rozmytych. W sposób niezbity dowiedziono, że zgodnie z przypuszczeniami Kosinińskiego [2006], jeśli w jego arytmetyce ograniczyć się do liczb o identycznej orientacji, to uzyska się wprowadzoną przez Dubois i Prade [1978] arytmetykę liczb rozmytych. Wobec przywołanych już twierdzeń Goetschela i Voxmana, podobnych efektów rozszerzenia można oczekiwać także na gruncie całej teorii liczb rozmytych. Zatem



teoria Kosińskiego może być brana pod uwagę jako rozszerzenie teorii liczb rozmytych. Wniosek ten otwiera szerokie, nowe pole badawcze.

Za sprawą uogólnienia pojęcia pary Kosińskiego udało się teorię skierowanych liczb rozmytych uogólnić do przypadku liczb rozmytych z półciągłymi z góry funkcjami odniesienia.

W przeciwieństwie do arytmetyki Kosińskiego, wszystkie zaproponowane w pracy rozszerzenia działań arytmetycznych są zamknięte w przestrzeni skierowanych liczb rozmytych.

Wszystkie te wyniki dobrze osadzają teorię skierowanych liczb rozmytych na gruncie matematyki systemów rozmytych. Zwiększa to możliwości zastosowania tej teorii w wielu dziedzinach teorii i praktyki.

## Literatura

- Dubois D., Prade H., 1978, *Operations on fuzzy numbers*, “International Journal System Sciences”, vol. 9, DOI: 10.1080/00207727808941724.
- Dubois D., Prade H., 1979, *Fuzzy real algebra: some results*, “Fuzzy Sets and Systems”, vol. 2, DOI: 10.1016/0165-0114(79)90005-8.
- Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York.
- Goetschel R., Voxman W., 1986, *Elementary fuzzy calculus*, “Fuzzy Sets and Systems”, vol. 18, DOI: 10.1016/0165-0114(86)90026-6.
- Kacprzak D., 2012, *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji cen akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 60.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002a, *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions*, [in:] *Methods of Artificial Intelligence*, T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski (eds.), Silesian University of Technology, Gliwice.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002b, *Fuzzy numbers with algebraic operations: algorithmic approach*, [in:] *Proc. IIS'2002, Sopot, June 3–6, Poland*, M. Kłopotek, S.T. Wierzchoń, M. Michalewicz (eds.), Physica Verlag, Heidelberg.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered fuzzy numbers*, “Bulletin of the Polish Academy of Sciences”, no. 51(3).
- Kosiński W., 2006, *On fuzzy number calculus*, “Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.”, no. 16(1).
- Łyczkowska-Hanćkowiak A., 2017, *Behavioralna wartość bieżąca w ujęciu skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 3(87).
- Piasecki K., 2011a, *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.
- Piasecki K., 2011b, *Behavioural present value*, “SSRN Electronic Journal”, DOI: 10.2139/ssrn.1729351.
- Piasecki K., 2014, *Behavioralna wartość bieżąca – nowe podejście*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 67, DOI:10.15290/ose.2014.01.67.03.

- Piasecki K., 2016, *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, Edu-Libri, Kraków-Legionowo.
- Piasecki K., Siwek J., 2015, *Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – a New Approach*, “Folia Oeconomica Stetinensia”, no. 15(2), DOI: 10.1515/fofi-2015-0033.
- Prokopowicz P., 2015, *The Directed Inference for the Kosinski’s Fuzzy Number Model*, ”Proceedings of the Second International Afro-European Conference for Industrial Advancement AECIA 427”.
- Prokopowicz P., Pedrycz W., 2015, *The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing*, “Artificial Intelligence and Soft Computing”, no. 9 (119).
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, Information Sciences, DOI:10.1016/j.ins.2016.07.044.
- Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy sets*, “Information and Control”, no. 8, DOI:10.1016/s0019-9958(65)90241-x.
- Zadeh L.A., 1975a, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I*, “Information linguistic variable. Expert Systems with Applications”, no. 36(2).
- Zadeh L.A., 1975b, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part II*, “Information Sciences”, no. 8(4), DOI:10.1016/0020-0255(75)90046-8.
- Zadeh L.A., 1975c, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part III*, “Information Sciences”, no. 9(1), DOI:10.1016/0020-0255(75)90017-1.

**dr hab. inż. Krzysztof S. TARGIEL**

Wydział Informatyki i Komunikacji, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
e-mail: krzysztof.targiel@ue.katowice.pl

**dr hab. Maciej NOWAK, prof. UE**

Wydział Informatyki i Komunikacji, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
e-mail: maciej.nowak@ue.katowice.pl

**prof. dr hab. Tadeusz TRZASKALIK**

Wydział Informatyki i Komunikacji, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
e-mail: tadeusz.trzaskalik@uekat.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.02

## WYBÓR MOMENTU ROZPOCZĘCIA PROJEKTU Z WYKORZYSTANIEM INTERAKTYWNEGO PODEJŚCIA WIELOKRYTERIALNEGO<sup>1</sup>

### Streszczenie

W wielu projektach pojawia się problem wyboru momentu ich rozpoczęcia. Jest to istotne, np. gdy końcowe rezultaty są uzależnione od kursów wymiany walut. Można oczekiwać korzystniejszej sytuacji, lecz wiąże się to z ryzykiem opóźnienia projektu poza dopuszczalne granice. W pracy oparto się na metodzie Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR), wykorzystując drzewa dwumianowe do modelowania scenariuszy rozwoju sytuacji na rynku walutowym. Problem potraktowano dwukryterialnie, przyjmując za kryteria koszt realizacji przedsięwzięcia oraz prawdopodobieństwo, że projekt się opóźni. Przyjęto również, że parametry rozkładu prawdopodobieństwa są określane przez ekspertów.

Problem przedstawiono jako proces dynamiczny. Do jego rozwiązania zaproponowano technikę interaktywną. Procedura wykorzystuje współczynniki wymiany do wyznaczenia proponowanego wariantu, który jest następnie oceniany przez decydenta.

**Słowa kluczowe:** zarządzanie projektem, wielokryterialne metody interaktywne, drzewa dwumianowe, modelowanie ryzyka

### SCHEDULING OF PROJECT START TIME USING INTERACTIVE MULTICRITERIA APPROACH

#### Summary

Selection of project start time is a problem that decision makers often face. This is important when, e.g., the final results depend on currency exchange rates. Sometimes more favourable rates can be expected in the

---

<sup>1</sup> Praca została sfinansowana ze środków Narodowego Centrum Nauki (NCN) jako projekt badawczy nr DEC 2013/11/B/HS4/01471.

future, but postponing the project start date involves the risk of delay beyond acceptable limits. In the paper, the Cox-Ross-Rubinstein method (CRR), based on binomial trees, is applied. Two criteria are taken into account: project cost and the probability of project delay. It is assumed that the parameters of probability distribution are specified by experts.

The problem is presented as a dynamic process. An interactive technique of multi-criteria decision-making about problems under risk is proposed. The procedure uses trade-offs to select a proposal, which is next evaluated by the decision maker.

**Key words:** project management, interactive multi-criteria approach, binomial trees, risk modelling

**JEL:** C61

## 1. Wstęp

Wiele projektów ma narzucone ramy czasowe, w których projekt musi być zrealizowany. Najczęściej wynika to z rocznych okresów budżetowych. W tym okresie środki budżetowe muszą być wykorzystane. Jeśli długość trwania projektu nie wypełnia całego okresu budżetowego, istnieje możliwość wyboru (w pewnych granicach) momentu rozpoczęcia projektu. Jest to szczególnie istotne w sytuacji, gdy wyniki projektu są uzależnione od pewnego zmiennego czynnika zewnętrznego. Przykładem może być kurs wymiany waluty. Jego zmienność powoduje, że w zależności od momentu rozpoczęcia, realizacja projektu może być bardziej lub mniej korzystna. Może to stanowić przesłankę skłaniającą decydenta do odłożenia w czasie rozpoczęcia projektu w oczekiwaniu na korzystniejszy kurs. Jednak wiąże się to jednocześnie ze wzrostem ryzyka opóźnienia zakończenia projektu poza wyznaczone wcześniej granice.

Problem modelowania zmienności instrumentów finansowych szeroko omówiono w literaturze finansowej. Dobrze znanym rozwiązaniem jest metoda Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) [Cox i in. 1979, s. 229-263], wykorzystująca drzewa dwumianowe.

Sformułowane wyżej zagadnienie można rozważać jako problem dwukryterialny. Z jednej strony dążymy do zminimalizowania kosztów, które w przypadku spadku kursu wymiany walut mogą obniżyć się. Z drugiej strony wraz z upływem czasu także rośnie prawdopodobieństwo ryzyka opóźnienia, które można potraktować jako drugie kryterium.

Rozwiązanie problemu wielokryterialnego nie jest możliwe bez pozyskania informacji o preferencjach decydenta. W tym celu są wykorzystywane dwa główne podejścia [Roy, 1971, s. 240]. W pierwszym fazą pozyskiwania informacji preferencyjnej jest wyraźnie oddzielona od fazy obliczeniowej. Najpierw decydent jest proszony o jak najbardziej precyzyjne wyspecyfikowanie swoich preferencji, a dopiero potem informacja ta jest wykorzystywana do wyznaczenia rozwiązania problemu. Podejście to często jest krytykowane, m.in. ze względu na duże wymagania, jakie stawia przed decydem [Spronk, 1981]. Alternatywnym podejściem jest podejście interaktywne. W tej sytuacji informacja o preferencjach jest pozyskiwana stopniowo. Decydent jest ściślej angażowany w proces poszukiwania rozwiązania, co z jednej strony, pogłębia jego wiedzę o strukturze problemu, z drugiej, skutkuje większym zaufaniem, jakim darzy wyznaczone rozwiązanie.

Projektując procedurę interaktywną, należy zdecydować nie tylko o tym, które z wymienionych wyżej podejść będzie wykorzystywane, ale również o tym, w jaki sposób

decydent będzie artykułował swoje preferencje. W tym kontekście wspomina się o pozyskiwaniu informacji w sposób bezpośredni i pośredni [Kaliszewski i in. 2012, s. 188-199]. W pierwszym przypadku decydent powinien określić swoje preferencje przez ustosunkowanie się do wartości kryteriów uzyskiwanych dla poszczególnych wariantów decyzyjnych. Tego typu podejście było wykorzystanie m.in. w metodzie STEM [Benayoun i in. 1971, s. 366-375]. Czasami oba powyższe sposoby są stosowane równolegle [Kaliszewski, Michałowski, 1999, s. 549-562]. Jak dowiedziono w pracy [Nowak, 2010, s. 103-115], podejście oparte na analizie współczynników wymiany można także wykorzystać w dyskretnych, wielokryterialnych problemach podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, gdy oceny wariantów ze względu na kryteria mają charakter losowy.

W pracach [Nowak, Trzaskalik, 2013, s. 315-330; Nowak, 2016, s. 301-314] pokazano, w jaki sposób podejście interaktywne może być zastosowane w dynamicznych problemach decyzyjnych. W obu przypadkach przyjęto, że informacja o preferencjach ma charakter bezpośredni. W niniejszej pracy przedstawiono procedurę interaktywną dedykowaną dla dwukryterialnych dynamicznych problemów decyzyjnych, która w celu wyznaczenia nowej propozycji decydentowi, wykorzystuje informację o współczynnikach wymiany. Zmienność czynników zewnętrznych jest modelowana za pomocą drzew dwumianowych.

Praca składa się z trzech zasadniczych części. W pierwszej sformułowano problem wyboru momentu rozpoczęcia projektu jako proces dynamiczny. W kolejnej części poddano analizie dwukryterialną procedurę wyboru momentu rozpoczęcia projektu, najpierw opisując sposób modelowania ryzyka za pomocą drzew dwumianowych. Następnie w tej samej części przedstawiono metodę interaktywną wyboru preferowanego wariantu opartą na współczynnikach wymiany. Całość kończy ilustracja numeryczna tej metody.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważa się problem wyboru momentu rozpoczęcia projektu, dla którego określono nieprzekraczalny termin zakończenia. Koszty projektu są rozliczane w walucie krajowej (PLN), lecz pewne wydatki są wyrażone w walucie obcej (euro). W tej sytuacji koszt projektu zależy od kursu wymiany, który niezmiennie fluktuuje. O rezultacie finansowym przedsięwzięcia w dużej mierze decyduje moment poniesienia wydatków, a tym samym moment rozpoczęcia projektu.

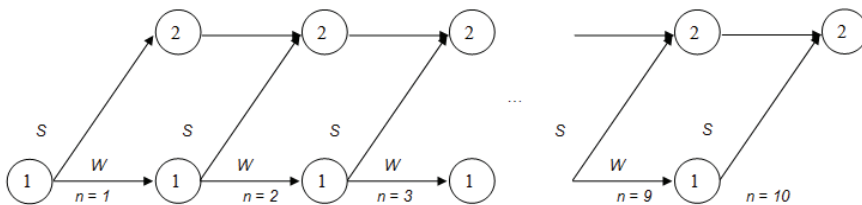
Przyjęto poniższe założenia.

1. Wydatki są wyrażone w euro.
2. Ustalono okno czasowe, w którym projekt ma być zrealizowany.
3. Określono, że projekt może rozpocząć się tylko z początkiem miesiąca.
4. Rzeczywisty koszt wyrażony w złotych jest uzależniony od kursu wymiany w ostatnim dniu miesiąca, w którym rozpoczęto projekt.
5. Znane są oszacowania prawdopodobieństwa zakończenia projektu w każdym z miesięcy.
6. Należy określić miesiąc rozpoczęcia projektu, biorąc pod uwagę dwa kryteria:  $f_1$  – koszt projektu oraz  $f_2$  – prawdopodobieństwo opóźnienia.

Powyższy problem może zostać opisany jako proces dynamiczny, analizowany dla odcinka czasu składającego się z  $N$  etapów, którymi w tym przypadku są miesiące (rysunek 1.). Na początku pierwszego etapu proces może znajdować się tylko w stanie (1), oznaczającym, że projekt nie został jeszcze rozpoczęty. W tym stanie mogą być podjęte dwie decyzje, tj.: S lub W. Decyzja S (Start) skutkuje przejściem do stanu (2), który świadczy o tym, że projekt został już wcześniej rozpoczęty. Z kolei, decyzja W (Wait) unaocznia, że proces nadal pozostanie w stanie (1). Zakłada się, że projekt musi być zrealizowany, dlatego w przypadku, gdy na początku ostatniego etapu proces nadal pozostaje w stanie (1), musi być podjęta decyzja S. Niezależnie od etapu, w stanie (2) jest podejmowana już tylko jedna decyzja o pozostaniu w tym samym stanie.

RYSUNEK 1.

### Proces dynamiczny



Źródło: opracowanie własne.

W powyższym problemie występuje  $N$  wariantów decyzyjnych, odpowiadających etapowi, w którym należy rozpocząć projekt.

## 3. Dwukryterialna procedura wyboru momentu rozpoczęcia projektu

### 3.1. Modelowanie scenariuszy przyszłości za pomocą drzew dwumianowych

Przyszłe wartości kursu wymiany mogą być modelowane za pomocą stochastycznych równań różniczkowych. Oznaczając przez  $X(t)$  wartość kursu wymiany w momencie  $t$ , do opisu zmian tego kursu wykorzystano geometryczny proces Wienera w postaci:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad (1)$$

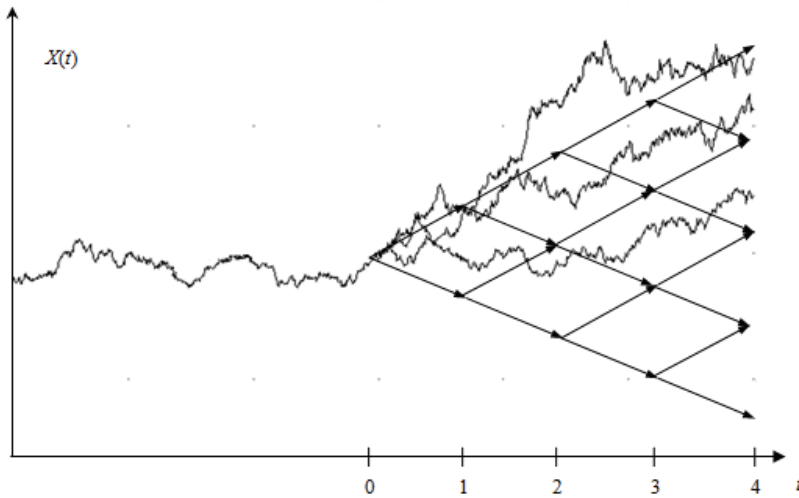
gdzie:

- $W(t)$  – proces Wienera;
- $X(t)$  – wartość parametru  $X$  w momencie  $t$ ;
- $\mu$  – parametr dryfu;
- $\sigma$  – zmienność procesu.

Przykładowe trzy realizacje takiego procesu przedstawiono na rysunku 2. Rozpoczynają się one od momentu 0. Na rysunku przedstawiono również rzeczywiste wartości

parametru  $X$  w okresie wcześniejszym, na podstawie których można oszacować wartości parametrów  $\mu$  i  $\sigma$ . Taki ciągły proces może zostać aproksymowany za pomocą dyskretnej struktury grafu, jakim jest drzewo dwumianowe. To podejście było przedmiotem dyskusji w pracach [Targiel, 2013, s. 131-142; 2015, s. 389-397]. Na rysunku 2. zilustrowano takie drzewo, pokrywające przyszłe zmiany parametru  $X$ .

**RYSUNEK 2.**  
**Drzewo dwumianowe pokrywające proces stochastyczny**



Źródło: opracowanie własne.

Węzły drzewa dwumianowego mogą być obliczone z zależności:

$$x_{i,n} = x_{0,0} e^{(n-2i)\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t_p}}, \quad (2)$$

gdzie:

$x_{i,n}$  – wartość parametru  $X$  po  $n$  okresach oraz  $i$  spadkach;

$\Delta t_p$  – część roku, która reprezentuje jeden okres w drzewie dwumianowym;

$\hat{\sigma}$  – oszacowanie wartości zmienności  $X$ .

Zmienność procesu można oszacować na podstawie danych historycznych przez przeskalowanie odchylenia standardowego:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{\Delta t_d}}, \quad (3)$$

gdzie:

$\Delta t_d$  – część roku, która reprezentuje okres, w którym rejestrowano jedno notowanie;

$\sigma_d$  – odchylenie standardowe w danych historycznych.

Znając oszacowanie zmienności procesu stochastycznego  $\hat{\sigma}$ , można obliczyć współczynnik najbardziej prawdopodobnego wzrostu ( $u$ ) i spadku ( $d = 1/u$ ):

$$u = e^{\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t_p}}. \quad (4)$$

Prawdopodobieństwo wzrostu o taką wartość ( $q$ ) może zostać obliczone ze wzoru:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t_p}}{2\hat{\sigma}}. \quad (5)$$

Jednocześnie można za Guthrie [2009, s. 56] oszacować prawdopodobieństwo osiągnięcia przez proces  $X(t)$  każdego węzła ( $i, n$ ) w drzewie:

$$P\{x \text{ at } (i, n)\} = \frac{n!}{i!(n-i)!} q^{n-i} (1-q)^i. \quad (6)$$

To bezpośrednio prowadzi do wartości oczekiwanej procesu na każdym etapie  $n$ :

$$\mathbf{E}[X(n)] = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} q^{n-i} (1-q)^i x_{i,n}. \quad (7)$$

Korzystając z formuły (7), można obliczyć oczekiwany koszt projektu w zlotówkach:

$$f_1(a^{(n)}) = K \mathbf{E}[X(n)], \quad (8)$$

gdzie  $K$  oznacza ustalony koszt w euro, a parametr  $X$  jest wartością kursu wymiany EUR/PLN.

### 3.2. Modelowanie ryzyka

Drugim kryterium jest ryzyko, mierzone prawdopodobieństwem opóźnienia. Zostało ono określone przez ekspertów na podstawie ich doświadczenia i intuicji.

W przykładzie, który dalej przedstawiono, zakłada się, że projekt trwający trzy miesiące może rozpocząć się najwcześniej w styczniu (wariant  $a^{(1)}$ ), a najpóźniej w październiku (wariant  $a^{(10)}$ ). Tym samym istnieje swoboda w wyborze momentu rozpoczęcia projektu, przy czym przyjmuje się, że jest to zawsze początek miesiąca. W zależności od terminu realizacji projektu inaczej określono prawdopodobieństwa opóźnienia.

### 3.3. Metoda interaktywna

Niech  $\mathbf{A}$  będzie zbiorem wariantów reprezentujących moment rozpoczęcia projektu. W każdej iteracji decydentowi proponuje się pewien wariant roboczy  $a^*$ . Decydent jest



pytany, czy oczekiwany koszt i prawdopodobieństwo opóźnienia są satysfakcjonujące. Jeśli oczekiwany koszt projektu jest zbyt wysoki, nowy wariant roboczy jest wyznaczany w ten sposób, by maksymalizować zysk z wymiany:

$$T_{1,2}(a, a^*) = \frac{f_1(a^*) - f_1(a)}{f_2(a) - f_2(a^*)}, \quad (9)$$

gdzie:  $f_1(a^*)$  i  $f_1(a)$  reprezentują oczekiwany koszt obecnej i nowej propozycji, natomiast  $f_2(a^*)$  i  $f_2(a)$  obrazują dla tych samych wariantów prawdopodobieństwo opóźnienia. W takim przypadku współczynnik wymiany (*trade-off*) mierzy spadek w kosztach wraz z jednostkowym wzrostem prawdopodobieństwa opóźnienia.

Z drugiej strony, jeśli decydent uzna prawdopodobieństwo opóźnienia za niesatysfakcjonujące, nowy wariant maksymalizujący następujący współczynnik jest wyznaczany:

$$T_{2,1}(a, a^*) = \frac{f_2(a^*) - f_2(a)}{f_1(a) - f_1(a^*)}. \quad (10)$$

W początkowej fazie procedury są identyfikowane warianty niezdominowane. Wariant  $a'$  jest niezdominowany, jeżeli nie ma takiego wariantu  $a$ , dla którego zachodzi:

$$f_1(a') \geq f_1(a) \text{ i } f_2(a') > f_2(a) \text{ lub } f_1(a') > f_1(a) \text{ i } f_2(a') \geq f_2(a).$$

W każdej iteracji decydentowi są przedstawiane rezultaty cząstkowe, a mianowicie: ocena proponowanego wariantu oraz macierz możliwości. Zawiera ona dwa wiersze: pierwszy grupuje wartości optymistyczne obydwu kryteriów –  $\bar{f}_1$  i  $\bar{f}_2$ , natomiast drugi wiersz grupuje wartości pesymistyczne –  $\underline{f}_1$  i  $\underline{f}_2$ . Są one obliczane następująco:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &:= \min_{a \in \mathbf{A}^*} \{f_1(a)\} & \bar{f}_2 &:= \min_{a \in \mathbf{A}^*} \{f_2(a)\} \\ \underline{f}_1 &:= \max_{a \in \mathbf{A}^*} \{f_1(a)\} & \underline{f}_2 &:= \max_{a \in \mathbf{A}^*} \{f_2(a)\} \end{aligned}$$

Procedurę przedstawiono poniżej.

#### Faza początkowa

1. Dla każdego  $a \in \mathbf{A}$  obliczamy wartości kryteriów.
2. Identyfikujemy zbiór wariantów niezdominowanych  $\mathbf{A}^*$ .
3. Wybieramy pierwszy wariant próbny  $a^*$ :

$$a^* := \arg \min_{a \in \mathbf{A}^*} \{f_1(a)\}.$$

4. Ustalamy  $l := 1$ .

#### Iteracja $l$

1. Prezentujemy następujące wyniki decydentowi:
  - oceny wariantu próbnego  $a^*$ :  $f_1(a^*)$ ,  $f_2(a^*)$ ,

- macierz możliwości.
- 2. Pytamy decydenta, czy jest usatysfakcjonowany przedstawioną propozycją. Jeśli tak, przechodzimy do punktu (11).
- 3. Pytamy decydenta, czy jest usatysfakcjonowany wartością kryterium  $f_1$ . Jeśli tak, przechodzimy do punktu (7).
- 4. Wyznaczamy zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$  jako:

$$\hat{\mathbf{A}} := \{a : a \in \mathbf{A}^*, f_1(a) < f_1(a^*)\}.$$

- 5. Jeśli  $\hat{\mathbf{A}} = \emptyset$ , informujemy decydenta, iż poprawa wartości  $f_1$  jest niemożliwa i pytamy, czy chce kontynuować procedurę. Jeśli nie, przechodzimy do punktu (11), w przeciwnym razie do punktu (1).
- 6. Dla każdego  $a \in \hat{\mathbf{A}}$  obliczamy współczynniki wymiany, korzystając z formuły (9). Wyznaczamy wariant, dla którego uzyskujemy najwyższą wartość współczynnika wymiany, oraz ustalamy ten wariant jako nowy wariant próbny  $a^*$ . Przechodzimy do punktu (10).
- 7. Wyznaczamy zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$ :

$$\hat{\mathbf{A}} := \{a : a \in \mathbf{A}^*, f_2(a) < f_2(a^*)\}.$$

- 8. Jeśli  $\hat{\mathbf{A}} = \emptyset$ , informujemy decydenta, iż poprawa wartości  $f_2$  jest niemożliwa i pytamy, czy chce kontynuować procedurę. Jeśli nie, przechodzimy do punktu (11), w przeciwnym razie do punktu (2).
- 9. Dla każdego  $a \in \hat{\mathbf{A}}$  obliczamy współczynniki wymiany, korzystając z formuły (10). Wyznaczamy wariant, dla którego uzyskujemy najwyższą wartość współczynnika wymiany, a także ustalamy ten wariant jako nowy wariant próbny  $a^*$ .
- 10. Przyjmujemy  $\mathbf{A}^* := \hat{\mathbf{A}}$ ,  $l := l + 1$  i przechodzimy do punktu (1).
- 11. Koniec procedury.

#### 4. Przykład numeryczny

Rozważa się projekt, który musi skończyć się w danym roku kalendarzowym. Koszty projektu wynoszą 50 mln euro i nie zależą od momentu ich poniesienia. Księgi rachunkowe są prowadzone w złotych, stąd powyższy koszt zostanie zaksięgowany po przemnożeniu przez aktualny kurs wymiany PLN do EUR. Na początku badanego roku kalendarzowego kurs ten wynosił 4,1472. Na podstawie danych historycznych oszacowano prawdopodobieństwo wzrostu tego kursu na 0,4, zgodnie ze wzorem (5). Czas realizacji projektu jest szacowany na trzy miesiące, jednak może znacząco wydłużyć się, co może spowodować przekroczenie terminu granicznego, jakim jest koniec roku. Prawdopodobieństwo opóźnienia oszacowane przez ekspertów przedstawia tabela 1. W tej samej tabeli zaprezentowano także oczekiwane koszty projektu, gdy projekt zostanie rozpoczęty w danym miesiącu, obliczone za pomocą wzoru (8).

TABELA 1.

## Zbiór wariantów decyzyjnych

Wariant	Moment rozpoczęcia projektu	Oczekiwany koszt (w mln PLN)	Prawdopodobieństwo opóźnienia
$a^{(1)}$	Styczeń	206,635	0,01
$a^{(2)}$	Luty	205,913	0,02
$a^{(3)}$	Marzec	205,194	0,04
$a^{(4)}$	Kwiecień	204,476	0,05
$a^{(5)}$	Maj	203,762	0,05
$a^{(6)}$	Czerwiec	203,050	0,05
$a^{(7)}$	Lipiec	202,340	0,08
$a^{(8)}$	Sierpień	201,633	0,25
$a^{(9)}$	Wrzesień	200,928	0,30
$a^{(10)}$	Październik	200,226	0,50

Źródło: opracowanie własne.

Prawdopodobieństwo wzrostu kursu wymiany przyjęto na poziomie 0,4, w wyniku czego z upływem czasu maleje oczekiwany koszt projektu. Stanowiliby to zatem argument przemawiający za jak najpóźniejszym rozpoczęciem projektu. Wraz z upływem czasu rośnie jednak prawdopodobieństwo jego opóźnienia. Warto przy tym zauważyć, że dla miesięcy: kwiecień, maj i czerwiec zostało ono oszacowane na tym samym poziomie 0,05. Wynika stąd, że warianty  $a^{(4)}$  i  $a^{(5)}$  są zdominowane przez wariant  $a^{(6)}$ . Korzystniej więc rozpocząć projekt w czerwcu niż w kwietniu lub maju, gdyż oczekiwane koszty są niższe, a prawdopodobieństwo opóźnienia identyczne. Warianty zdominowane zostają usunięte z dalszych rozważań. Zbiór  $\mathbf{A}^*$  przedstawia się następująco:

$$\mathbf{A}^* := \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(6)}, a^{(7)}, a^{(8)}, a^{(9)}, a^{(10)}\}.$$

Ze względu na najniższy koszt jako wariant próbny wybieramy  $a^{(10)}$ . Ustalamy  $l = 1$ , realizujemy kolejne kroki  $l$ -tej iteracji.

Iteracja 1.

1. Przedstawiamy decydentowi macierz możliwości (tabela 2.) oraz oceny wariantu próbnego:  $f_1(a^{(10)}) = 200,226$ ;  $f_2(a^{(10)}) = 0,50$ .

TABELA 2.

## Macierz możliwości w iteracji 1.

	Oczekiwany koszt	Prawdopodobieństwo opóźnienia
Wartość optymistyczna	200,226	0,01
Wartość pesymistyczna	206,635	0,50

Źródło: opracowanie własne.

2. Decydent nie jest usatysfakcjonowany przedstawionym wariantem próbnym.
3. Decydent jest usatysfakcjonowany oczekiwanym kosztem. Przechodzimy do punktu (7).
7. Wyznaczamy zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$  wariantów, dla których prawdopodobieństwo opóźnienia jest niższe niż dla wariantu próbnego. Jest on następujący:

$$\hat{\mathbf{A}} := \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(6)}, a^{(7)}, a^{(8)}, a^{(9)}\}.$$

8. Zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$  nie jest pusty, stąd przechodzimy do następnego kroku procedury.
9. Obliczamy współczynniki wymiany dla każdego wariantu  $a \in \hat{\mathbf{A}}$  (tabela 3.). Jako nowy wariant próbny przyjmujemy  $a^{(9)}$ .

TABELA 3.

## Współczynniki wymiany obliczone w iteracji 1.

Wariant	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(6)}$	$a^{(7)}$	$a^{(8)}$	$a^{(9)}$
Współczynnik wymiany	0,076	0,084	0,093	0,159	0,213	0,178	0,285

Źródło: opracowanie własne.

10. Przyjmujemy  $\mathbf{A}^* := \hat{\mathbf{A}}$ ,  $l := 2$  i przechodzimy do kolejnej iteracji.

## Iteracja 2.

1. Przedstawiamy decydentowi macierz możliwości (tabela 4.) oraz oceny wariantu próbnego:  $f_1(a^{(9)}) = 200,928$ ;  $f_2(a^{(9)}) = 0,30$ .

TABELA 4.

## Macierz możliwości w iteracji 2.

	Oczekiwany koszt	Prawdopodobieństwo opóźnienia
Wartość optymistyczna	200,928	0,01
Wartość pesymistyczna	206,635	0,30

Źródło: opracowanie własne.

2. Decydent nie jest usatysfakcjonowany przedstawionym wariantem próbnym.
3. Decydent nie jest usatysfakcjonowany oczekiwanym kosztem.
4. Wyznaczamy zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$ :

$$\hat{\mathbf{A}} := \{a : a \in \mathbf{A}^*, f_1(a) < f_1(a^{(9)})\} = \emptyset.$$

5. Ponieważ  $\hat{\mathbf{A}} = \emptyset$ , informujemy decydenta, iż poprawa wartości  $f_1$  jest niemożliwa, jednak decydent chce kontynuować procedurę. Przechodzimy do punktu 1.

1. Ponownie przedstawiamy decydentowi macierz możliwości (tabela 4.) oraz oceny wariantu próbnego:  $f_1(a^{(9)}) = 200,928$ ;  $f_2(a^{(9)}) = 0,30$ .

2. Decydent nie jest usatysfakcjonowany przedstawionym wariantem próbnym.
3. Decydent musi zaakceptować oczekiwany koszt. Przechodzimy do punktu (7).
7. Wyznaczamy zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$  wariantów, dla których prawdopodobieństwo opóźnienia jest niższe niż dla wariantu próbnego. Jest on następujący:

$$\hat{\mathbf{A}} := \{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(6)}, a^{(7)}, a^{(8)}\}.$$

8. Zbiór  $\hat{\mathbf{A}}$  nie jest pusty, stąd przechodzimy do następnego kroku procedury.
9. Obliczamy współczynniki wymiany dla każdego wariantu  $a \in \hat{\mathbf{A}}$  (tabela 5.). Jako nowy wariant próbny przyjmujemy  $a^{(7)}$ .

**TABELA 5.****Współczynniki wymiany obliczone w iteracji 2.**

Wariant	$a^{(1)}$	$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$a^{(6)}$	$a^{(7)}$	$a^{(8)}$
Współczynnik wymiany	0,051	0,056	0,061	0,118	0,177	0,071

Źródło: opracowanie własne.

10. Przyjmujemy  $\mathbf{A}^* := \hat{\mathbf{A}}$ ,  $l := 3$  i przechodzimy do kolejnej iteracji.

*Iteracja 3.*

1. Przedstawiamy decydentowi macierz możliwości (tabela 6.) oraz oceny wariantu próbnego:  $f_1(a^{(7)}) = 202,340$ ;  $f_2(a^{(7)}) = 0,08$ .

**TABELA 6.****Macierz możliwości w iteracji 3.**

	Oczekiwany koszt	Prawdopodobieństwo opóźnienia
Wartość optymistyczna	201,633	0,01
Wartość pesymistyczna	206,635	0,25

Źródło: opracowanie własne.

2. Decydent jest usatysfakcjonowany przedstawionym wariantem próbnym. Przechodzimy do punktu (11)
  11. Koniec procedury.
- Zgodnie z preferencjami decydenta, projekt należałoby rozpocząć w lipcu.

**5. Podsumowanie**

W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu wyboru momentu rozpoczęcia projektu uzależnionego od kursu wymiany walut. Z jednej strony, można liczyć na korzystny spadek kursu wymiany, z drugiej, wraz z opóźnieniem rozpoczęcia rośnie ryzyko przekroczenia dopuszczalnych terminów zakończenia projektu. Zaproponowana

metoda wykorzystuje interaktywne podejście wielokryterialne i współczynniki wymiany. Wybranymi kryteriami były: oczekiwany koszt projektu oraz prawdopodobieństwo opóźnienia. Przeprowadzona procedura może zostać zastosowana także w innych dwukryterialnych problemach dynamicznych.

Przyszłe badania będą ukierunkowane w stronę poszukiwania innych problemów, które można rozwiązać dzięki zaprezentowanej metodzie. Należy do nich na przykład problem wyboru momentu rozpoczęcia czynności niekrytycznej w metodzie ścieżki krytycznej.

### **Wkład autorów w powstanie artykułu**

prof. dr hab. Tadeusz Trzaskalik – opracowanie koncepcji i założeń – 20%

dr hab. Maciej Nowak, prof. UEK – opracowanie metody interaktywnej – 30%

dr hab. inż. Krzysztof Targiel – opracowanie metody oceny ryzyka, obliczenia – 50%

### **Literatura**

- Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J., Larichev C., 1971, *Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM)*, “Mathematical Programming”, vol. 8.
- Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M., 1979, *Option Pricing: a Simplified Approach*, “Journal of Financial Economics”, vol. 7.
- Guthrie G., 2009, *Real Options in Theory and Practice*, Oxford University Press, Oxford.
- Kaliszewski I., Michalowski W., 1999, *Searching for psychologically stable solutions of multiple criteria decision problems*, “European Journal of Operational Research”, vol. 118.
- Kaliszewski I., Miroforidis J., Podkopaev D., 2012, *Interactive Multiple Criteria Decision Making based on preference driven Evolutionary Multiobjective Optimization with controllable accuracy*, “European Journal of Operational Research”, vol. 216, no. 1.
- Nowak M., 2010, *Trade-off analysis in discrete decision making problems under risk*, [in:] *New Developments in Multiple Objective and Goal Programming*, D. Jones, M. Tamiz, J. Ries (eds.), “Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems”, no. 638, Springer, Berlin.
- Nowak M., Trzaskalik T., 2013, *Interactive procedure for a multiobjective stochastic discrete dynamic problem*, “Journal of Global Optimization”, vol. 57.
- Nowak M., 2016, *Solving a Multicriteria Decision Tree Problem Using Interactive Approach*, [in:] *Knowledge, Information and Creativity Support Systems: Recent Trends, Advances and Solutions*, A. M. Skulimowski, J. Kacprzyk (eds.), “Advances in Intelligent Systems Computation”, vol. 364, Springer, Berlin.
- Roy B., 1971, *Problems and methods with multiple objective functions*, “Mathematical Programming”, vol. 1, no. 1.
- Spronk J., 1981, *Interactive Multiple Goal Programming*, Martinus Nijhoff, The Hague.
- Targiel K. S., 2013, *Multiple criteria decision making in the valuation of real options*, “Multiple Criteria Decision Making”, vol. 8.
- Targiel K.S., 2015, *Real Options in the Timing Problem of Non-critical Activities*, “Project Management Development – Practice and Perspectives”.

**dr Marcin CZUPRYNA**

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
e-mail: mczupr@sgh.waw.pl

**dr Przemysław SZUFEL**

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
e-mail: pszufe@sgh.waw.pl

**dr hab. Bogumił KAMIŃSKI**

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
e-mail: bkamins@sgh.waw.pl

**mgr Anna WIERTLEWSKA**

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie  
e-mail: awiert@sgh.waw.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.03

## O ESTYMACJI PREFERENCJI W SZTUCZNYCH SIECIACH SPOŁECZNYCH<sup>1</sup>

### Streszczenie

W artykule rozważano scenariusz, w którym administracja publiczna wykorzystuje internetową platformę społecznościową do komunikacji z obywatelami i uzyskiwania informacji o ich preferencjach. Z platformy tej korzysta tylko część całej populacji (subpopulacja), co powoduje, że preferencje obserwowane na platformie mogą być niereprezentatywne dla całego społeczeństwa. W niniejszym opracowaniu uwzględniono dwa problemy związane z brakiem reprezentatywności preferencji, tj.: (1) odmienną strukturę demograficzną populacji i subpopulacji oraz (2) różnice w procesie dynamiki preferencji w całej populacji i subpopulacji wyrażającej swoje opinie na platformie społecznościowej.

Dane wykorzystane w analizie obejmują informacje o aktywności użytkowników na platformie społecznościowej, ich dane socjodemograficzne oraz dane o populacji pochodzące ze spisu powszechnego. W celu badania dynamiki preferencji skonstruowano wieloagentowy model symulacyjny, w którym sieć społeczną przedstawiono za pomocą nieskierowanego grafu, gdzie węzły reprezentują obywateli, a luki ich relacje społeczne.

---

<sup>1</sup> Niniejsze prace badawcze zostały zrealizowane w ramach projektu ROUTE-TO-PA (*Raising Open and User-friendly Transparency-Enabling Technologies for Public Administrations*) [<http://routetopa.eu/>], który jest finansowany ze środków Europejskiego Programu w Zakresie Badań Naukowych i Innowacji „Horizon 2020” na podstawie umowy o dotację nr 645860. Autorzy wyrażają również podziękowanie anonimowym recenzentom za ich uwagi dotyczące treści artykułu.

W procesie analizy najpierw jest generowana sztuczna populacja i na niej jest symulowana dynamika preferencji. Następnie losowo, metodą kuli śnieżnej (ang. *snowballsampling*) są wybierane różne niereprezentatywne subpopulacje, na których są testowane algorytmy uogólniania preferencji przez odtwarzanie dynamiki całej populacji. Miarą jakości modelu jest zgodność preferencji między subpopulacją a całą populacją. Rezultaty przeprowadzonych symulacji wskazały na skuteczność zastosowanej metody: wraz z kolejnymi krokami symulacji wzrasta zgodność między populacją rzeczywistą a syntetyczną. Okazało się również, że najistotniejszymi determinantami błędów uogólniania preferencji są model dyfuzji preferencji oraz waga opinii własnej agenta.

**Słowa kluczowe:** dynamika preferencji, modelowanie sieci społecznych, symulacje wieloagentowe

## PREFERENCE ELICITATION IN SYNTHETIC SOCIAL NETWORKS

### Summary

The paper considers a scenario in which public administration (PA) uses an online social platform to collect information on citizens' preferences. However, the opinions of the sub-population that uses the online platform might be not representative. The author develops a method for generalization of the dynamics of the preferences observed on the social platform onto the entire population. The available data include information collected by the PA from the online platform (assuming that it is run and administered by the PA) and census data regarding the population. Hence, the PA has access to basic personal data of platform users (e.g. gender and age), position in the online social network, and opinions revealed on the platform. The online users' data can be analyzed along with the aggregated census data on the entire population. The author has implemented a multi-agent simulation model that takes into account the distribution of personal attributes, social network data, and opinion diffusion dynamics. The analysis involves showing how different algorithms enable generalization of preferences collected by the online platform to the entire population. The results of the analysis prove that the proposed method is efficient in the preference elicitation process – with each simulation step, the preference congruence level between real and synthetic populations increases. The main determinants of preference elicitation errors include the preference diffusion model and the weight of the agents' own opinions.

**Key words:** preference dynamics, social network modelling, agent-based simulation

**JEL:** C6, C8, C9, R5

## 1. Wstęp

Celem pracy jest konstrukcja metod uogólniania preferencji z niereprezentatywnej podpopulacji na całą populację z uwzględnieniem procesu dyfuzji preferencji w sieciach społecznościowych. Potrzeba stworzenia takiego podejścia powstała w trakcie realizacji projektu ROUTE-TO-PA finansowanego w ramach programu Unii Europejskiej „Horizon 2020” (numer grantu 645860). Głównym produktem projektu ROUTE-TO-PA jest platforma społecznościowa Social Platform for Open Data (SPOD, <http://spod.routetopa.eu/>). Platforma SPOD umożliwi interakcję pomiędzy obywatelami oraz interakcję obywateli z administracją publiczną. Interakcje te mają opierać się na otwartych danych, a mianowicie: administracja publiczna udostępni obywatelom na platformie SPOD informacje dotyczące alokacji oraz wydatków środków publicznych. Na ich podstawie obywatele mogą monitorować i kontrolować podejmowane przez nią działania administracyjne i tym samym wpływać na wzrost ich efektywności.



Jednocześnie platforma SPOD jest wykorzystywana przez administrację publiczną w celu zbierania informacji o preferencjach obywateli. Preferencje i opinie wyrażane przez użytkowników portalu, którzy stanowią pewną część całego społeczeństwa (*subpopulację*), administracja publiczna uogólnia na całą populację. Dzięki temu, bazując na pełniejszej wiedzy o potrzebach i preferencjach społeczeństwa, jest w stanie efektywniej podejmować wszelkie decyzje administracyjne.

Dane wykorzystane w analizie obejmują informacje o aktywności użytkowników na platformie społecznościowej, ich dane socjodemograficzne podane w procesie rejestracji oraz dane o całej populacji pochodzące ze spisów powszechnych. Dostępne dane o użytkownikach obejmują: płeć, wiek, status społeczny, informacje o zatrudnieniu i dynamikę wyrażanych opinii.

Założenie, że rozkłady cech społeczno-demograficznych wśród użytkowników internetowego portalu społecznego są zbliżone do rozkładu w całej populacji nie musi być prawdziwe. Rozkłady te mogą różnić się między populacją a subpopulacją, co przekłada się na niereprezentatywność. Należy w tym miejscu wyróżnić dwa błędy systematyczne, charakterystyczne dla opisywanego problemu: *selection bias* oraz *persuasiveness bias*. *Selection bias* wiąże się z niereprezentatywną dla całego społeczeństwa próbą użytkowników portalu internetowego, na podstawie której mają być dokonywane uogólnienia na całą populację. Z kolei, *persuasiveness bias* dotyczy sytuacji, w której kilku przekonujących użytkowników portalu może mieć znaczący wpływ na dynamikę preferencji i tok całej dyskusji.

W celu modelowania dynamiki preferencji takich problemów, została skonstruowana innowacyjna metoda wykorzystująca podejście symulacyjne: wieloagentowy model dynamiki preferencji (ang. *open data governance model* – ODGM). Jego zadaniem jest z jednej strony dostarczenie administracji publicznej informacji na temat aktywności użytkowników platformy, w tym wyrażane przez nich opinie i preferencje oraz ich pozycja w sieci społecznej, a z drugiej strony ma on w efektywny sposób uogólniać te preferencje na całą populację. Model dynamiki preferencji opiera się na symulacjach wieloagentowych, w wyniku których jest możliwe przeprowadzenie zaawansowanej analizy statystycznej i wizualizacji wykonanych eksperymentów symulacyjnych. Został on zbudowany w środowisku MASON i napisany w języku Java. Wykonaniu analiz statystycznych i wizualizacji posłużyły pakiety GNU R i Python.

Na potrzeby niniejszego artykułu następujące słowa: *subpopulacja*, *próba* i *podpopulacja* oraz *populacja sztuczna* i *populacja syntetyczna* będą używane zamiennie. Analogicznie, wyrażenia *administracja publiczna* i *samorząd* będą traktowane jako synonimy. *Uogólnianie* preferencji jest opisywane także jako ich *generalizowanie* czy *odtworzenie*, a pojęcia: *platforma społecznościowa*, *platforma społeczna* i *platforma internetowa* odnoszą się do strony internetowej umożliwiającej interakcję pomiędzy obywatelami oraz interakcję obywateli z administracją publiczną.

Struktura artykułu jest następująca: w rozdziale 2. przedstawiono problem estymowania dynamiki preferencji w sztucznych sieciach społecznych; w rozdziale 3. opisano wykorzystaną metodologię, w rozdziale 4. zaprezentowano zastosowane narzędzia oraz wyliczono kolejne etapy modelowania, a w rozdziale 5. ukazano wyniki analizy symula-

cyjnego modelu wieloagentowego przeprowadzonej na danych dotyczących populacji włoskiego miasta Prato, znajdującego się w regionie Toskanii.

## 2. Problem rekonstrukcji dynamiki preferencji w sztucznych sieciach społecznych

Dobra komunikacja na linii *samorząd – mieszkańcy* jest niezbędna w celu lepszego zrozumienia potrzeb i preferencji mieszkańców przez administrację publiczną. Z kolei, lepsze zrozumienie obywateli przyczynia się do podejmowania bardziej efektywnych decyzji administracyjnych i do prowadzenia świadomej polityki samorządowej. Odpowiedzią na potrzebę poprawnej komunikacji są platformy społecznościowe, które stanowią miejsce dyskusji na tematy decyzji administracyjnych pomiędzy mieszkańcami (C2C – *citizen-to-citizen*) oraz mieszkańców z administracją (C2G – *citizen-to-government*). W literaturze pokazano, że platformy społeczne promują kulturę przejrzystości, otwartości informacji i w efekcie sprzyjają zmniejszaniu korupcji [Bertot, 2010]. Co więcej, platforma społecznościowa to nie tylko miejsce komunikacji samorządów z mieszkańcami, ale również miejsce dyskusji samych mieszkańców na tematy administracyjne, co umożliwia samorządom bezpośrednią obserwację wymiany zdań pomiędzy obywatelami i śledzenie ich opinii. Dzięki platformom administracja publiczna ma wgląd do preferencji mieszkańców w wielu obszarach, więc może zwracać uwagę na priorytetowe kwestie, to jest takie, które w danym momencie są najważniejsze dla obywateli i o których gorąco dyskutują. Koncepcja platformy społecznościowej jest zgodna z ideami *open government* i *open data*.

Administracja publiczna na podstawie danych z platformy powinna móc wyciągnąć wnioski o rozkładzie preferencji dla całej populacji. Subpopulacja aktywna na platformie nie stanowi jednak całej populacji. Użytkownicy platform internetowych nie są dobrą reprezentacją całej populacji i jej charakterystyk, takich jak: płeć, wiek czy poziom wynagrodzenia. Wnioski wyprowadzone wyłącznie na podstawie preferencji subpopulacji, czyli użytkowników platformy, obarczone są ryzykiem stronniczości. Dotyczy to takich kwestii, jak opinia większości społeczeństwa bądź rozkład zróżnicowania opinii mieszkańców. Ryzyko zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby użytkowników platformy, jednakże pozostaje na wysokim poziomie, zwłaszcza w początkowych fazach życia portalu. W związku z powyższym, aby uogólnić jakiegokolwiek informacje z platformy, administracja publiczna powinna uwzględnić jakościowy i ilościowy charakter niejednorodności respondentów w odniesieniu do takich aspektów, jak społeczna czy demograficzna struktura subpopulacji i populacji.

Zwykle w klasycznych metodach statystycznych, w celu poznania opinii populacji na dany temat, jest przeprowadzana ankieta, dzięki której respondentów wybiera się tak, aby próba była reprezentatywna dla danej populacji, tj. jej struktura powinna być zbieżna ze strukturą populacji w maksymalnie wielu wymiarach. Próba jest konstruowana zgodnie z zamysłem i potrzebami badaczy. W przypadku portalu społecznościowego sytuacja jest całkowicie odmienna: nie ma kontroli nad tym, kto się na niej rejestruje i kto z niej korzysta. Można powiedzieć, że próba jest samoistnie tworzona. Struktura użyt-

kowników platform nie jest tożsama ze strukturą ze spisów ludności, ale można założyć, że koreluje z tymi danymi przynajmniej wzdłuż niektórych wymiarów, takich jak: wiek, przychód bądź skłonność do wyrażania opinii (otwartość, radykalizm). Mimo korelacji, nie jest możliwe uogólnienie opinii wyrażanych na portalach społecznościowych na całą populację przy wykorzystaniu klasycznych metod statystycznych.

Poza cechami charakterystycznymi dla spisów ludności, portale społecznościowe dostarczają nowego wymiaru informacji, która jest zawarta w połączeniach i sieciach pomiędzy użytkownikami. Informacje te są odzwierciedlane poprzez wyrażane przez mieszkańców poglądy na dany temat oraz dyskusje pomiędzy użytkownikami, często nieznanymi się nawzajem. Oddziaływania on-line mogą mieć charakter *bezpośredni*, na przykład, gdy dwóch obywateli oddziałuje na siebie podczas dyskusji na dany temat albo *pośredni*, na przykład, gdy określone użytkownicy omawiają ten sam temat na innym forum z innymi użytkownikami albo publikują swoje opinie publicznie i każdy użytkownik może je zobaczyć. Na potrzeby artykułu należy przyjąć założenie, że połączenia między obywatelami, ustalone za pośrednictwem platformy internetowej, nawiązują do sytuacji, w której dwoje obywateli bierze udział w dyskusji nad danym tematem, niezależnie od tego, czy oddziałują między sobą bezpośrednio czy pośrednio.

Uogólnianie preferencji jest klasycznym problemem w statystycznej i ekonomicznej literaturze o następującej postaci: badacz chce poznać preferencje całej populacji, ale posiada jedynie preferencje małej próby. W idealnym przypadku, gdy próba jest losowa, można uogólnić wyniki bezpośrednio na całą populację (średnia w próbie jest nieobciążonym estymatorem średniej w populacji) i następnie można obliczyć błąd estymacji. Jeśli próba nie jest reprezentatywna, to wnioskowanie o populacji nie jest możliwe lub wnioskowanie takie wymaga zastosowania innych narzędzi statystycznych. W szczególności wyniki mogą zostać odpowiednio przeskalowane, wykorzystując statystyczne metody. W kontekście sieci społecznościowych sytuacja jest jeszcze bardziej skomplikowana, ponieważ stronniczość nie występuje wyłącznie w odniesieniu do różnych rozkładów subpopulacji i populacji (*selection bias*), lecz także ze względu na procesy społeczne, czyli zmiany opinii w konsekwencji interakcji społecznych wśród obywateli, które mogą mieć odmienną formę dla subpopulacji i populacji (*persuasiveness bias*). Formalnie oznacza to, że dyfuzja (rozprzestrzenianie się) preferencji w subpopulacji jest odmienna od dyfuzji preferencji w całej populacji. W najgorszym scenariuszu ta odmienna forma procesów społecznych może prowadzić do jeszcze większego błędu niż ten wynikający z różnych rozkładów cech socjodemograficznych w subpopulacji i populacji. W takich sytuacjach tradycyjne miary statystyczne wraz z poprawką na korekcję błędu zwracałyby wyraźnie gorsze wyniki od zaproponowanej metody prezentowanej w niniejszym artykule.

W pracy uwzględniono dwa problemy związane z brakiem reprezentatywności preferencji: (1) odmienną strukturę demograficzną populacji i subpopulacji oraz (2) różnice w procesie dyfuzji preferencji w całej populacji i subpopulacji wyrażającej swoje opinie na platformie społecznościowej.

Narzędziami wykorzystywanymi do modelowania systemów społeczno-gospodarczych są systemy wieloagentowe, opisywane w literaturze. Systemy społeczno-gospodarcze są klasyfikowane jako systemy złożone, co oznacza, że system jako całość wykazuje od-

mienne, zagregowane cechy w skali makro, od tych, które można wywnioskować z prostego sumowania cech na poziomie mikro (poszczególnych działań indywidualnych jednostek, gospodarstw domowych, przedsiębiorstw i instytucji, które stanowią części całej populacji – makrosystemu).

Różnice w postępowaniu na poziomie makro i mikro wynikają z wzajemnych interakcji pomiędzy jednostkami. Dlatego też, w celu efektywnego modelowania złożonych systemów społeczno-gospodarczych, nie wystarczy uchwycić zachowania poszczególnych elementów na poziomie mikro i następnie je zagregować, lecz ważne jest zrozumienie i odzwierciedlenie ogólnej dynamiki systemu [Axtell, 2007; Tesfatsion, 2002]. Zasada ta stanowi bazę modelowania wieloagentowego, którego metodologia umożliwia badaczom ilościowe wyjaśnianie złożoności zjawisk społecznych i gospodarczych.

Za pomocą modeli wieloagentowych można objaśnić zachowania obserwowane w skali makro, które występują w wyniku oddziaływania działań w skali mikro (np. efekty sieciowe). Takie podejście konstruowania modeli jest określane jako metoda oddolna (ang. *bottom-up*) [Oeffner, 2009], co oznacza, że model jest projektowany na poziomie mikro, na którym interakcje i zachowania poszczególnych agentów zostały określone, a następnie na poziomie makro jest obserwowana dynamika jako wylaniający się rezultat modelu symulacji [Tsfatsion, 2002; Pyka, Fagiolo, 2005]. Same interakcje w modelu wiążą się z tym, że agenci bezpośrednio na siebie oddziałują, a ich decyzje zależą od przeszłych i obecnych wyborów dokonywanych przez siebie i innych agentów [Fagiolo, 1998]. Interakcje te są ściśle nieliniowe, a kryteria wyboru w modelach wieloagentowych są złożone i obejmują wiele wymiarów. Ponadto, mogą pojawić się pętle sprzężenia zwrotnego pomiędzy poziomami mikro i makro. Wszystkie te cechy modeli wieloagentowych wpływają na endogeniczność i niestacjonarność systemów, które prowadzą do wylaniania się nowych wzorców zachowań. Nowe wzorce z kolei wymuszają adaptację agentów do nowego środowiska i napędzają ich uczenie się, które jest zaimplementowane w wielu modelach wieloagentowych [Windrum, Moneta, 2007].

Modelowanie wieloagentowe uchyla, występujące w standardowym modelowaniu ekonomicznym, założenie o jednorodności populacji agentów, w którym każda osoba, gospodarstwo domowe, firma itd. są identyczne i w pełni racjonalne. Przez pełną racjonalność należy rozumieć to, że posiada pełną wiedzę, na jej podstawie podejmuje optymalne decyzje i nie ponosi kosztów w procesie podejmowania decyzji. Takie podejście z pewnością nie jest empirycznie uzasadnione, chociaż w niektórych przypadkach jest wystarczające i zapewnia zadowalającą moc predykcyjną. Jednak, gdy celem analizy jest wyjaśnienie efektów interakcji pomiędzy agentami, to kluczowe jest uznanie, że agenci są różni i nie do końca racjonalni, czyli założenie o ich jednorodności należy uchylić.

Zasadniczą cechą modelu wieloagentowego jest to, że zawiera on wiele heterogenicznych elementów, tj.: indywidualnych jednostek, gospodarstw domowych, rodzin, firm itp., które dostosowują swoje działania do dynamicznie zmieniającego się środowiska. Zazwyczaj agenci tworzą hierarchie, np. grupa osób stanowi gospodarstwo domowe oraz połączenia, np. sieci społeczne. Te trzy elementy, tj. heterogeniczność, zachowanie adaptacyjne i skomplikowane relacje między jednostkami, sugerują, że choć teoretycznie

jest możliwe zapisanie pełnej, matematycznej specyfikacji tego modelu, w praktyce nie jest to możliwe. Co więcej, właśnie w praktyce to kod komputerowy jest powszechnie stosowaną i akceptowaną metodą szczegółowej specyfikacji takich modeli. Ponadto, nie tylko określenie specyfikacji modelu jest skomplikowane. Przy rozwiązywaniu takich modeli wręcz niemożliwe jest korzystanie ze standardowych narzędzi matematycznych. Alternatywnie wykorzystuje się symulację komputerową. Podsumowując, specyfikacja modelu wieloagentowego ze względu na jego złożoność nie jest jednoznaczna (ang. *explicit*), czyli nie jest to model matematyczny, ale domyślna (ang. *implicit*) – jest to kod komputerowy. Analogicznie, metoda analizy nie jest dedukcyjna (dowodzenie twierdzeń), ale indukcyjna (analiza statystyczna wychodząca z symulacji komputerowej) [Kamiński, 2012].

Model wieloagentowy jest odzwierciedlany i analizowany za pomocą symulacji komputerowych, co z kolei wprowadza kilka ograniczeń. Najważniejszym z nich jest liczebność agentów w modelu. Modelowanie populacji składającej się z milionów jednostek na ogół jest niewykonalne (ale możliwe), gdyż wymaga ogromnych mocy obliczeniowych. Jako alternatywę konstruuje się syntetyczną populację agentów, które z reguły zawierają mniej jednostek – np. w skalach tysięcy. W sztucznych populacjach charakterystykę agentów wybiera się tak, aby dokładnie reprezentowali oni populację rzeczywistą. Typowym rozwiązaniem jest zebranie zagregowanych danych o rozkładzie charakterystyk jednostek w prawdziwym życiu (np.: płeć, wiek, dochód, lokalizacja) wraz z ich współzależnościami i stworzenie syntetycznej populacji, która cechuje się podobnymi rozkładami. Do metod, służących rekonstrukcji syntetycznych populacji, należą m.in.: podejście kombinatoryczne (ang. *combinatorial approach*) czy metoda Monte Carlo [zob. np. Haug, Williamson, 2001]. Ta druga została wykorzystana w analizie opisywanej w niniejszym artykule.

Ważną zaletą podejścia syntetycznej populacji w modelowaniu wieloagentowym jest to, że pozwala ono rozważać różne rzeczywiste scenariusze. Oznacza to, że można nie tylko rozważać i modelować zachowanie rzeczywistej populacji (jak na przykład w modelowaniu ekonometrycznym), ale można również rozważać scenariusze „co będzie, jeśli...”, zakładając rozmaite, prawdopodobne schematy przyszłych zdarzeń. Dodatkowo, modele wieloagentowe pozwalają także analizować, w jaki sposób dany system zachowuje się w określonych okolicznościach i jakie są konsekwencje zmian w jego strukturze.

W skład modelu symulacji wieloagentowej wchodzi następujące typy elementów:

- *agenci*, przez których rozumie się obiekty o zdefiniowanym typie (np.: gospodarstwa domowe, banki, firmy czy rząd) i zaimplementowani do symulowanego środowiska gospodarczego jako podmioty autonomiczne i interaktywne. Charakteryzują się mikro-parametrami, którymi mogą różnić się (np. typ wykształcenia czy wieku). Mikro-parametry są stałe lub zmienne w stosunku do kolejnych iteracji symulacji. Każdy agent ma zbiór decyzyjnych mikro-zmiennych, które są aktualizowane zgodnie z zasadami *ex ante*, biorąc pod uwagę reguły decyzyjne w modelu;
- *struktura interakcji* definiująca, którzy agenci współdziałają ze sobą i w jaki sposób;

- *czas*, modele są symulowane w dyskretnych krokach czasowych, np.: dzień, tydzień czy miesiąc. Różne rodzaje decyzji mogą być podjęte w rozmaitych ramach czasowych,
- *makro-zmienne*, które są wynikiem określonej agregacji mikro-zmiennych. Niektóre z nich mogą być niezależnie definiowane na poziomie makro (np. stopy procentowe).

Model wieloagentowy jest zazwyczaj tak skomplikowany, że nie da się go dokładnie sparametryzować, wykorzystując dane empiryczne. Na ogół należy go kalibrować i testować jego zachowanie w stosunku do różnych wartości jego parametrów.

Ostatnim etapem modelowania wieloagentowego jest zebranie wyników wykonanych symulacji oraz meta-modelowanie. Meta-modelowanie jest kluczowym elementem analizy symulacji [Kleijnen, 2000; Santos, 2007] i polega na objaśnianiu stochastycznych relacji między parametrami wejściowymi a wyjściowymi modelowanego systemu. Meta-modele (przybliżenia) mogą być użyteczne ze względu na swoje trzy główne cechy, a mianowicie: (1) zrozumiały kształt relacji między elementami wejścia (ang. *inputs*) a wynikiem (ang. *outputs*), (2) predykcja oraz (3) optymalizacja [Barton, 1992]. Te trzy cechy meta-modele wymagają różnego podejścia do: wyboru ich funkcjonalnej specyfikacji, konstrukcji eksperymentu symulacji i estymacji parametrów.

### 3. Metoda rekonstrukcji dynamiki preferencji w sieciach społecznych

W niniejszym rozdziale zaprezentowano autorską procedurę (algorytm) *rekonstrukcji dynamiki preferencji w sztucznych sieciach społecznych* wykorzystującą *wieloagentowy model symulacyjny*. Procedura ta uwzględnia metody estymacji struktury sieci połączeń społecznościowych oraz metody modelowania dynamiki opinii w sieciach opisywane w literaturze.

Proponowany algorytm wygląda następująco: w punkcie wyjścia są dostępne dane ze spisu społecznego oraz dane z internetowego portalu SPOD, w tym dane demograficzne podane przez użytkowników podczas rejestracji, a także informacje o połączeniach pomiędzy nimi (użytkownicy portalu mają możliwość wyboru kręgu swoich znajomych spośród użytkowników portalu poprzez wysyłanie lub akceptację odpowiednich zaproszeń). Ponadto, zakłada się, że każdy agent może ujawnić jedną z trzech opinii: (1) za, (2) obojętny, (3) przeciw.

W pierwszym kroku na podstawie danych ze spisu ludności jest generowana sztuczna populacja, która pod względem rozkładów cech jest zbliżona do populacji rzeczywistej. Następnie na podstawie obserwowanej próby, czyli połączeń pomiędzy użytkownikami portalu społecznościowego, jak również ich indywidualnych cech jest rekonstruowana siatka połączeń na całą syntetyczną populację. Celem określenia prawdopodobieństwa istnienia połączeń pomiędzy agentami, należącymi do syntetycznej populacji, zastosowano model regresji logistycznej. Zmiennymi objaśniającymi w modelu były pary cech socjodemograficznych, w szczególności różnice pomiędzy wartościami tych cech dla obu agentów. Wyznaczając parametry modelu, przyjęto zasadę, że im mniej agenci różnią się od siebie (np. liczbą kategorii wieku, jaka ich dzieli),

tym wyższe jest prawdopodobieństwo, że przyjaźnią się (zjawisko hemofilii). Wzór przedstawiono następująco:

$$P(y_{ij} = 1) = \frac{1}{1 + e^{\alpha_0 + \alpha_1 \times |x_1^i - x_1^j| + \dots + \alpha_n \times |x_n^i - x_n^j|}}$$

gdzie symbolem  $x^i = [x_1^i, \dots, x_n^i]$  oznaczono wektor cech socjodemograficznych agenta  $i$ .

W kolejnym kroku dla syntetycznej populacji agentów wygenerowano ich opinie pierwotne, czyli opinie wyrażane przez nich po raz pierwszy, na które pozostali obywatele i wyrażone przez nich opinie nie mieli jeszcze wpływu. W tym celu wykorzystano model trinomialny, którego parametry zostały oszacowane na danych pochodzących z portalu społecznościowego: założono, że jedna z trzech możliwych opinii wyrażanych przez danego agenta  $j$  w rundzie 0, oznaczona symbolem  $o(v_j, 0)$ , zależy od jego indywidualnych cech, zgodnie ze wzorem:

$$P(o(v_j, 0) = k) = \frac{e^{\gamma_0^k + \gamma_1^k \times x_1^j + \dots + \gamma_n^k \times x_n^j}}{\sum_{k=-1}^1 e^{\gamma_0^k + \gamma_1^k \times x_1^j + \dots + \gamma_n^k \times x_n^j}}$$

Następnie dla różnych wartości parametru  $\beta$ , który odzwierciedla wagę przywiązania danego agenta do własnej opinii ( $\beta$  – waga opinii własnej agenta,  $1-\beta$  – waga wpływu opinii agentów sąsiadujących), jest przeprowadzany eksperyment symulacyjny. Agenci w kolejnych krokach symulacji wchodzą w interakcje z przyjaciółmi, co przekłada się na zmianę ich opinii. Modelowanie dynamiki opinii w opisywanym algorytmie wygląda następująco: w kolejnych iteracjach preferencje agentów są aktualizowane jako liniowa średnia ważona opinii danego agenta oraz opinii agentów sąsiadujących. Przyjęte podejście należy do prostszych metod modelowania dynamiki preferencji [de Groot, 1977], w odróżnieniu od metod wykorzystujących podejście Bayesowskie [zob. np. Acemoglu, Ozdaglar, 2011]. Jednak mogłoby zostać rozszerzone np. o wagi zmienne w czasie [Krause, 2000] czy też poprzez wprowadzenie tzw. upartych agentów (ang. *stubbornagents*), którzy nie zmieniają swojej opinii pod wpływem innych agentów. Ostatecznie wynik otrzymany za pomocą eksperymentu symulacyjnego na całej populacji jest porównywany ze strukturą preferencji w obserwowanej próbie, czyli w grupie użytkowników portalu internetowego.

Przyjmijmy, że agent  $j$  posiada  $n$  sąsiadujących agentów, a rozkład ich opinii opisuje wektor  $\pi(v)$ , zgodnie ze wzorami:

$$n = \sum_{k \in \{-1, 0, 1\}} n_k,$$

$$\pi(v) = \left( \frac{n_{-1}}{n}, \frac{n_0}{n}, \frac{n_1}{n} \right).$$

Dla każdego agenta i każdej kolejnej rundy rozważono trzy alternatywne sposoby aktualizacji opinii w rundzie  $r$ , takie jak:

$$o(v_j, r + 1) \leftarrow k^*,$$

- a) metoda średniej opinii sąsiadujących agentów:

$$s = \beta \times o(v_j, r) + (1 - \beta) \times \frac{n_1 - n_{-1}}{n},$$

$$k^* = \begin{cases} -1, & s < -0,33 \\ 0, & -0,33 \leq s \leq 0,33, \\ 1, & s > 0,33 \end{cases}$$

- b) metoda dominującej opinii sąsiadujących agentów:

$$s = \beta \times o(v_j, r) + (1 - \beta) \times o(max, r),$$

$$o(max, r) = \begin{cases} -1, & n_{-1} = n_{max} \wedge n_{-1} \neq n_1 \\ 0, & n_0 = n_{max} \vee n_{-1} = n_1 \\ 1, & n_1 = n_{max} \wedge n_{-1} \neq n_1 \end{cases},$$

$$n_{max} = \max(n_{-1}, n_0, n_1),$$

$$k^* = \begin{cases} -1, & s < -0,33 \\ 0, & -0,33 \leq s \leq 0,33, \\ 1, & s > 0,33 \end{cases}$$

- c) metoda polaryzującej opinii sąsiadujących agentów:

$$k^* = \text{sign}(\beta \times 10 \times o(v_j, r) + n_1 - n_{-1}).$$

Opisany wyżej algorytm odnosi się do docelowej sytuacji, w której są znane dane z portalu SPOD. Jednakże dane te nie są jeszcze dostępne, więc analiza opisywana w niniejszym artykule musiała opierać się na sztucznie wygenerowanej próbie użytkowników: w pierwszym kroku na podstawie danych ze spisu ludności, również wygenerowano sztuczną populację (jej rozkład cech demograficznych odpowiadał populacji rzeczywistej) i na niej zasymulowano dynamikę dyfuzji (rozprzestrzeniania się) preferencji. Następnie losowo, metodą kuli śnieżnej z całej sztucznej populacji wybierano różne potencjalnie niereprezentatywne subpopulacje. Inne metody losowania próby dla sieci społecznościowych szczegółowo opisano w przytoczonej literaturze [Frank, 1974]. Dla każdej subpopulacji testowano algorytmy uogólniania preferencji przez odtwarzanie dynamiki całej populacji. Miarą jakości modelu w takim podejściu jest także zgodność preferencji wygenerowanych (symulowanych) i odtworzonych na podstawie wylosowanej subpopulacji. Zgodność taka była rozważana zarówno na wylosowanej subpopulacji, jak i wygenerowanej całej syntetycznej populacji. Ostatnim etapem było zatem zbieranie wyników wykonanych symulacji oraz meta-modelowanie. W analizie prezentowanej w niniejszym artykule meta-modelowanie ma dwa główne cele: zrozumienie i przewidywanie. W związku z tym, oczekuje się, że otrzymane meta-modele mają dwie charakterystyki: prostą in-



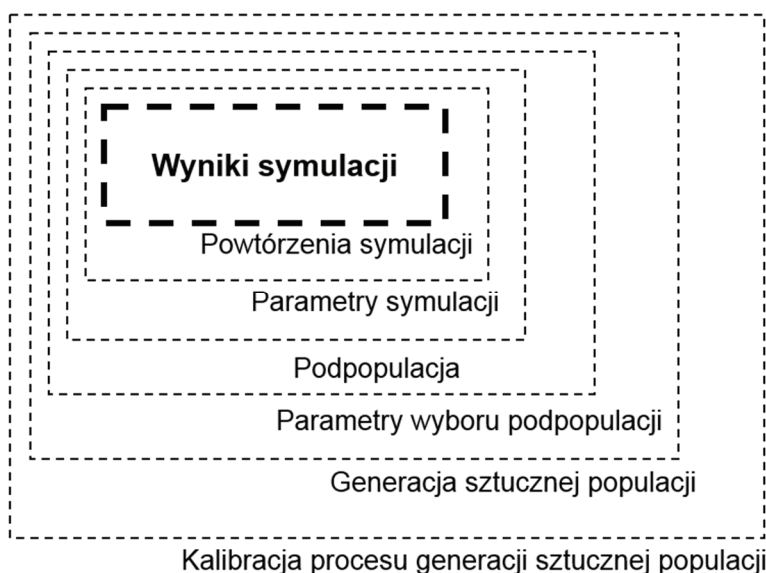
terpretację swojej struktury oraz moc statystyczną. W analizie opisywanej w tym artykule jako przybliżenie zastosowano lasy losowe, które należą do klasy modeli posiadających powyższe dwie pożądane właściwości.

#### 4. Narzędzia i etapy modelowania

Wieloagentowy model symulacyjny, umożliwiający rekonstrukcję preferencji w sztucznych sieciach społecznych, został zaimplementowany dzięki wykorzystaniu następujących oprogramowań typu Free Open Source: R, Java, Python, MASON, Weka, JUNG. Na rysunku 1. zaprezentowano warstwy symulacji modelu ODGM. Zastosowane podejście pozwoliło na porównywanie wyników dla różnych parametryzacji modelu i tym samym umożliwiło testowanie wrażliwości modelu na zmiany wartości parametrów.

**RYSUNEK 1.**

#### Warstwy parametrów w wieloagentowym modelu symulacyjnym



Źródło: opracowanie własne.

Problemem w symulacyjnych modelach wieloagentowych o wysokiej liczbie parametrów może być duża liczba powtórzeń symulacji, czyli przeszukiwanie bardzo obszernej przestrzeni parametrów, co wymaga znacznej mocy obliczeniowej. Z tego względu opisany model symulacji został przeprowadzony na klastrze obliczeniowym w chmurze Amazon Web Services. Do procesu zrównoleglania obliczeń wykorzystano narzędzie Open Grid Scheduler, a w szczególności jego implementację przeznaczoną do wykorzystania w środowisku obliczeń w chmurze – Star Cluster. Moduł symulacji został napisany w języku programowania Java, zaimplementowany w środowisku symulacyjnym

MASON i opierał się na kilku bibliotekach typu Open Source. Syntetyczna populacja, analiza i wizualizacja zostały przeprowadzone w języku GNU R, wykorzystując odpowiednie biblioteki. Poniżej opisano kolejne etapy estymacji sztucznej populacji miasta Prato i przeprowadzonych na niej symulacji.

1. Stworzenie skryptu symulacji.
2. Analiza zagregowanych danych pochodzących ze spisu ludności miasta Prato.
3. Wygenerowanie sztucznej populacji na podstawie powyższych danych.
4. Zbudowanie siatki połączeń pomiędzy agentami w sztucznej populacji.
5. Stworzenie pierwotnych preferencji w sztucznej populacji.
6. Symulacja dynamiki dyfuzji preferencji w populacji.
7. Wybór próby subpopulacji.
8. Uruchomienie właściwej symulacji, czyli przeprowadzenie określonej liczby symulacji dla danych kombinacji parametrów modelu (parametryzacji).

Kod źródłowy opracowanej implementacji modelu może być pobrany ze strony: <https://bitbucket.org/pszufe/socialpreferencessimulation2/>.

## 5. Wyniki eksperymentów symulacyjnych

Dane, na których opierała się niniejsza analiza, pochodziły ze spisu ludności we włoskim mieście Prato i z danych rocznych deklaracji podatkowych, z których pobrano informacje o dochodach obywateli. Na koniec roku 2014 Prato zamieszkiwało 191 tysięcy ludzi. W analizie wykorzystano następujące cechy społeczno-demograficzne: region zamieszkania, płeć, kategorię wiekową, zawód, stan cywilny i kategorię dochodu rocznego. Na podstawie informacji o wszystkich rozkładach brzegowych zmiennych wygenerowano reprezentatywną próbę 2 480 mieszkańców, której następnie przyporządkowano opinie pierwotne (bazując na obserwowanych społeczno-ekonomicznych cechach) oraz na której zasymulowano dyfuzję preferencji. Z wygenerowanej populacji losowano niereprezentatywne próby, na których wykonywano eksperyment symulacyjny. W celu wprowadzenia do modelu błędu reprezentatywności starsi mieszkańcy mieli tendencję do głosowania „za”, a bogatsi do głosowania „przeciw”.

W każdym ze skończonych kroków symulacji można było obserwować dynamikę dyfuzji preferencji w populacji i w subpopulacji. W eksperymencie symulacyjnym rozważono pięciowymiarową przestrzeń parametrów, opisanych poniżej.

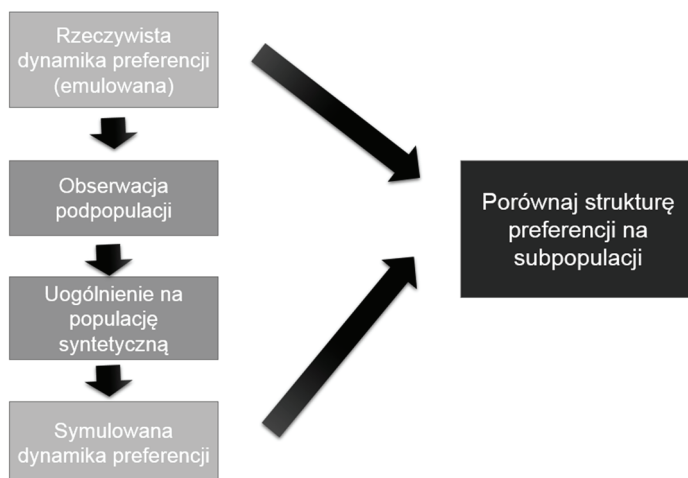
1. *Model dyfuzji preferencji* wskazujący na sposób, w jaki dany agent uwzględnia opinie innych agentów, z którymi jest połączony. Przyjęto trzy możliwe modele: (1) agent uwzględnia *średnią* opinię sąsiadów; (2) agent uwzględnia *dominującą* opinię sąsiadów; (3) agent *polaryzuje* opinię sąsiadów, czyli już po pierwszej rundzie symulacji musi być albo za, albo przeciw: nigdy nie może być neutralny.
2. *Średnia liczba połączeń* determinująca gęstość sieci połączeń pomiędzy agentami.
3. *Przywiązanie do opinii*, czyli parametr beta  $\beta \in (0,1)$  homogeniczny dla wszystkich agentów, reprezentujący siłę przywiązania agenta do własnej opinii ( $\beta$  – waga opinii własnej agenta,  $1-\beta$  – wpływ opinii agentów sąsiadujących). W analizie przyjęto osiem poziomów tego parametru.

4. *Struktura opinii początkowych*: parametr wyrażający typ opinii pierwotnej: każdy agent mógł wyrażać na początku jedną z trzech opinii: za, neutralny, przeciw.
5. *Rozmiar próby*, czyli parametr reprezentujący sposób, w jaki subpopulacja agentów jest losowana. Przyjmuje szesnaście poziomów.

Pelen iloczyn kartezjański powyższej przestrzeni parametrów zawierał 1 536 punktów (5 parametrów pomnożonych przez liczbę przyjmujących przez nie poziomów). Dla każdej parametryzacji wykonano 30 symulacji, co łącznie dało 46 080 wykonanych eksperymentów symulacyjnych. Celem tych eksperymentów był pomiar zgodności preferencji między preferencjami rzeczywistymi (w populacji rzeczywistej) a symulowanymi (w wygenerowanej, syntetycznej populacji). Zgodność jest miarą słuszności zastosowanego podejścia do uogólniania preferencji w analizowanym problemie badawczym. Rozumowanie to zostało zobrazowane na rysunku 2.

RYSUNEK 2.

### Zgodność rzeczywistych i symulowanych preferencji jako miara jakości w podejściu uogólniania preferencji

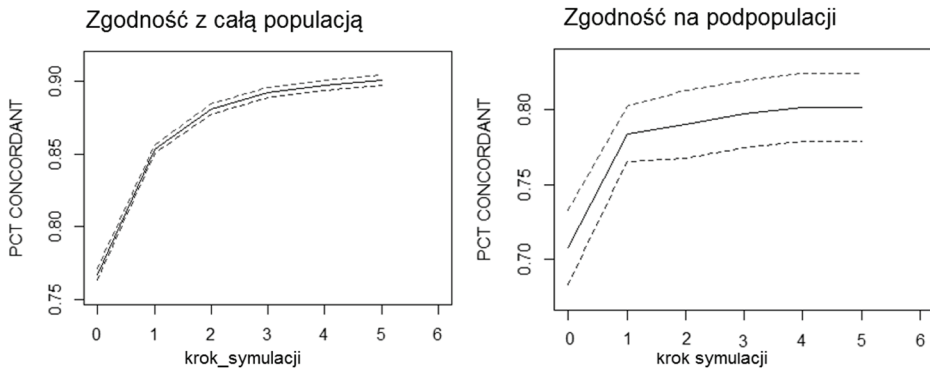


Źródło: opracowanie własne.

Jak się okazało, kolejne rundy symulacji prowadzą do wzrostu zgodności preferencji między populacją rzeczywistą a odtworzoną zarówno dla całej populacji, jak i dla subpopulacji, co zostało przedstawione na rysunku 3. Wykres z lewej strony reprezentuje zgodność na całej populacji, czyli odsetek par zgodnych opinii końcowych, symulowanych w procesie tworzenia syntetycznej populacji i odtworzonych na podstawie wylosowanej próby za pomocą algorytmu opisanego w niniejszym artykule, obserwowanych na całej populacji syntetycznej. Analogiczne miary dla wylosowanej subpopulacji zobrazowano na rysunku 3. po stronie prawej. W równej mierze na jednym, jak i na drugim rysunku zgodność preferencji rośnie wraz z kolejnymi krokami symulacji, a poziom zgodności jest zadowalający (90% na poziomie populacji).

## RYSUNEK 3.

Przykładowe wyniki symulacji: zgodność populacji rośnie zarówno w całej populacji, jak i w podpopulacji



Uwaga: linia ciągła przedstawia wartości średnie, natomiast linie przerywane prezentują granice przedziału, w którym mieściło się 90% uzyskanych wyników symulacji.

Źródło: opracowanie własne.

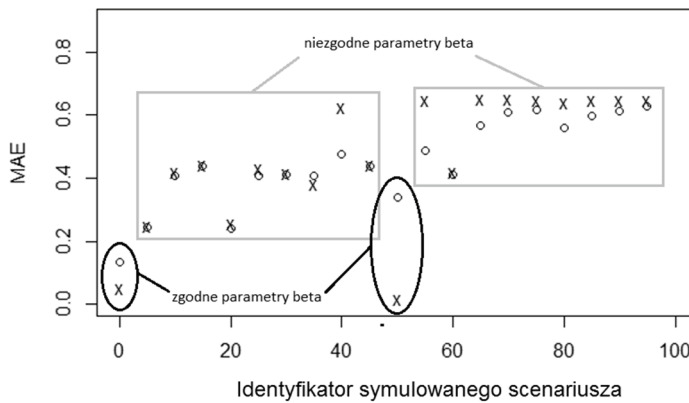
Rysunek 4. przedstawia średni błąd uogólniania preferencji. Dla niezgodnych parametrów  $\beta$  średni błąd absolutny uogólniania preferencji jest na wysokim poziomie zarówno na początku, jak i na końcu symulacji. Z kolei, dla zgodnych parametrów  $\beta$  wraz ze wzrostem liczby symulacji średni błąd odtworzenia preferencji na podpopulacji maleje.

Na ostatnim etapie za pomocą meta-modelu lasów losowych sprawdzono, który parametr jest krytyczny pod względem wpływu na błąd odtwarzania preferencji. Na rysunku 5. zostały zilustrowane wyniki porównania dwóch stanów symulacji: na początku eksperymentu symulacyjnego i na końcu, czyli po wykonaniu symulacji na całej przestrzeni parametrów. Można zauważyć, że najbardziej istotnymi determinantami błędów uogólniania preferencji są model dyfuzji preferencji oraz waga opinii własnej agenta (parametr  $\beta$ ). Zatem typ dynamiki dyfuzji opinii i przywiązanie do opinii własnej agenta mają największy wpływ na błąd odtworzenia preferencji.

Dalsze wyniki analizy symulacji pokazały również, że błąd reprezentatywności wzrasta równoległe z tym, jak opinie agentów stają się jednorodnie. Innymi słowy, spadek wariancji opinii w populacji prowadzi do wzrostu błędu reprezentatywności.

RYSUNEK 4.

Przykładowe wyniki symulacji: średni błąd uogólniania preferencji maleje wraz ze wzrostem liczby iteracji symulacji



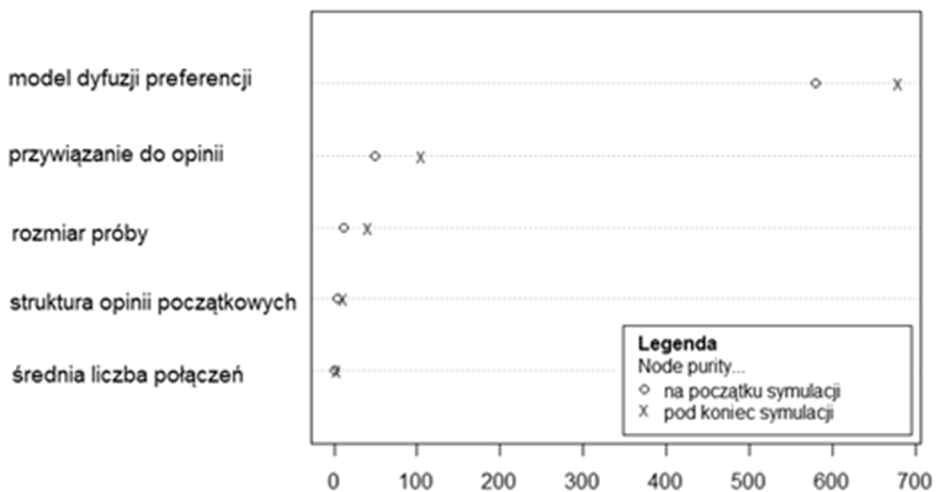
Legenda

- o - po pierwszym kroku symulacji
- x - na koniec symulacji

Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 5.

Czystość węzła w metodzie lasów losowych na początku i na końcu symulacji wykonanej na całej przestrzeni parametrów: 30 powtórzeń dla każdej parametryzacji. Determinanty błędów odtwarzania preferencji



Źródło: opracowanie własne.

## 6. Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono *estymowanie dynamiki preferencji w sztucznych sieciach społecznych*, którego celem było stworzenie systemu efektywnego uwzględniania preferencji obywateli przez administrację publiczną w swoich decyzjach. W skonstruowanym modelu rozważano rzeczywistą sytuację, w której za pomocą platformy społecznościowej administracja udostępnia informacje na temat podejmowanych decyzji, umożliwiając obywatelom: monitorowanie, kontrolę i wymianę zdań na temat swoich działań i wydatków publicznych. Jednocześnie na podstawie tej platformy administracja publiczna może obserwować opinie mieszkańców i analizować ich preferencje. W celu efektywnego i uwzględniającego preferencje całej populacji podejmowania decyzji administracyjnych, należy jednak uogólnić preferencje subpopulacji, czyli użytkowników portalu społecznościowego, na całą populację, a mianowicie na wszystkich obywateli. Analiza taka opiera się na danych pochodzących ze spisów ludności, a w przyszłości może także opierać się na danych z portalu społecznościowego, w szczególności na danych dotyczących: logowania przeglądanych baz danych, intensywności prowadzonych dyskusji, indywidualnych preferencji czy sieci połączeń. W zaprezentowanych w artykule wynikach wykorzystano dane o użytkownikach portalu wygenerowane w symulacjach. Zastosowanie opisanej metody do rzeczywistych danych o użytkownikach portalu będzie przedmiotem dalszych badań.

Jako metodę modelowania dyfuzji preferencji w sieciach społecznościowych wykorzystano symulacje wieloagentowe. Podejście to pozwoliło na uogólnienie informacji o preferencjach użytkowników internetowej platformy społecznościowej na całą populację, w celu umożliwienia administracji publicznej podejmowania decyzji odpowiednich dla wszystkich obywateli. W opracowaniu przedstawiono implementację praktyczną powyższego modelu do danych dotyczących prowincji Prato we Włoszech. Na podstawie danych empirycznych wygenerowano sztuczną populację liczącą 2 840 agentów, na której przeprowadzono łącznie 46 080 symulacji. Rezultaty eksperymentu symulacyjnego potwierdziły skuteczność modelu: wraz ze wzrostem liczby symulacji wzrastała zgodność preferencji między populacją rzeczywistą a syntetyczną. Zdiagnozowano także determinanty błędu uogólniania preferencji na całą populację: są to model dyfuzji preferencji oraz waga opinii własnej agenta.

### Wkład autorów w powstanie artykułu

dr Marcin Czupryna – prowadzenie badań, opis wyników i przygotowanie artykułu – 25%

dr Przemysław Szufel – prowadzenie badań, opis wyników i przygotowanie artykułu – 25%

dr hab. Bogumił Kamiński – prowadzenie badań, opis wyników i przygotowanie artykułu – 25%

mgr Anna Wiertelwska – prowadzenie badań, opis wyników i przygotowanie artykułu – 25%

## Literatura

- Acemoglu D., Ozdaglar A., 2011, *Opinion Dynamics and Learning in Social Networks*, „Dynamic Games and Applications”, vol. 1(1).
- Axtell R. L., 2007, *What economic agent do: How cognition and interaction lead to emergence and complexity*, „Review Austrian Economics”, no. 20, DOI 10.1007/s11138-007-0021-5.
- Barton R. R., 1992, *Metamodels for simulation input-output relations*, [in:] *Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference*, J. Swain, D. Goldsman, R. Crain, J. Wilson (eds.), IEEE.
- Bertot J. C., Jaeger P. T., Grimes J. M., 2010, *Using ICTs to create a culture of transparency: E-government and social media as openness and anti-corruption tools for societies*, “Government Information Quarterly”, no. 27.
- De Groot M. H., 1977, *Reaching a Consensus*, “Journal of the American Statistical Association”, no. 69.
- Fagiolo G., 1998, *Spatial interactions in dynamic decentralized economies: a review*, “The Economics of Networks”, DOI 10.1007/978-3-642-72260-8\_3.
- Frank O., 1974, *Survey sampling in graphs*, “Journal of Statistical Planning and Inference”, vol. 126.
- Haung Z., Williamson P., 2001, *A comparison of synthetic reconstruction and combinatorial optimization approaches to the creation of the small-area microdata*, “Working Paper”, no. 2, University of Liverpool.
- Kamiński B., 2012, *Podejście wieloagentowe do modelowania rynków. Metody i zastosowania*, Oficyna Wydawnicza Szkoły Głównej Handlowej, Warszawa.
- Kamiński B., 2015, *Interval metamodels for the analysis of simulation Input – Output relations*, “Simulation Modeling Practice and Theory”, no. 54.
- Kleijnen J. P., Sargent R. G., 2000, *A methodology fitting and validating metamodels in simulation*, “European Journal of Operational Research”, no. 120 (1).
- Krause U., 2000, *A Discrete Nonlinear and Nonautonomous Model of Consensus Formation*, [in:] *Communications in Difference Equations*, J. Rakowski (ed.), Gordon and Breach, Amsterdam.
- Oeffner M., 2009, *Agent – Based Keynesian Macroeconomics – An Evolutionary Model Embedded in an Agent-Based Computer Simulation*, MPRA Paper, no. 18199, The Munich University Library, Munich.
- Pyka A., Fagiolo G., 2005, *Agent-based modelling: A methodology for Neo-Schumpeterian economics*, Discussion Paper Series, no. 272, University of Augsburg, Augsburg.
- Santos I. R., Santos P. R., 2007, *Simulation metamodels for modeling output distribution parameters*, [in:] *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference*, R. Barton (ed.), IEEE.
- Tesfatsion L., 2002, *Agent-Based Computational Economics: Growing Economies From the Bottom Up*, “Artificial Life”, vol. 8, no. 1, DOI 10.1162/106454602753694765.
- Windrum P., Fagiolo G., Moneta A., 2007, *Empirical Validation of Agent-Based Models: Alternatives and Prospects*, “Journal of Artificial Societies and Social Simulation”, no. 10(2).

**dr hab. Jerzy ZEMKE, prof. UG**  
Wydział Zarządzania, Uniwersytet Gdański  
e-mail: jerzy.zemke@ug.edu.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.04

## **METODA MONTE CARLO W OCENIE RYZYKA FINANSOWEGO INWESTYCJI**

### **Streszczenie**

Zmiany uwarunkowań otoczenia decyzji inwestycyjnych mogą znacząco różnić się od przyjętych w planach i to różnice między założonymi uwarunkowaniami a ich rzeczywistymi wartościami są źródłem ryzyka finansowego inwestycji. Ocenę ryzyka najpełniej rozwinął sektor finansów. Nie oznacza to, że problem został w pełni zbadany i nie ma już miejsca na nowe rozwiązania. Celem badania jest konstrukcja instrumentu pomiaru ryzyka finansowego inwestycji wykorzystującego generator Monte Carlo. Przyjęto miarę efektywności inwestycji – stopę zwrotu brutto, a jakość instrumentu pomiaru ryzyka zwerifikowano empirycznie, szacując ryzyko stopy zwrotu zakupu pakietu akcji banku przez Zakład Ubezpieczeń. Wynik użycia Metody Monte Carlo potwierdza tezę o wzroście ryzyka wraz ze wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji.

**Słowa kluczowe:** ryzyko finansowe inwestycji, instrumenty pomiaru ryzyka, metoda Monte Carlo

### **MONTE CARLO METHOD IN ESTIMATING FINANCIAL RISK OF INVESTMENTS**

#### **Summary**

The problem of risk has been explored most exhaustively by the financial sector. This does not mean, however, that the subject is closed to discussion. Forecasting the possible states of process risk is the most crucial element of decision-making – not only in the field of finance. Most forecasts are characterised by low reliability – most frequently, they do not prove true. The study proposes a design of a flexible instrument for measuring the financial risk of investment decisions, using the Monte Carlo generator. The instrument is intended to enable the adjustment of decision-making processes so as to keep the process risk within acceptable limits.

**Key words:** financial risk of investments, instruments of risk measuring, Monte Carlo method

**JEL:** C15, G11



## 1. Wstęp

Teoria i praktyka finansowania inwestycji szczególnym zainteresowaniem darzy koncepcję równowagi pomiędzy miarą generowanych korzyści – zysku a niepewnością wypracowywania tej formy premii. Niepewność jest bliżej nieokreślona i często trudno ten stan wyskalować. Ze wspomnianą niepewnością łączy się inne pojęcie. Jest nim ryzyko, przez które rozumie się stan realizacji procesów decyzyjnych w warunkach zmienności uwarunkowań otoczenia decyzyjnego<sup>1</sup>.

Celem opracowania jest ukazanie możliwości użycia metody Monte Carlo do oceny ryzyka finansowego inwestycji. O ile skutki funkcjonowania w warunkach niepewności są trudne do określenia z uwagi na brak bądź mało precyzyjne skalowania tego stanu, to już identyfikowalne skutki ryzyka pozwalają na jego pomiar. W tym kontekście uznanie miary ryzyka za miarę niepewności przyszłych korzyści jest w pełni uzasadnione.

Zmienność uwarunkowań otoczenia decyzyjnego skłania do uwzględniania różnych wariantów scenariuszy procesów inwestycyjnych i w następstwie pomiaru efektywności każdego z nich. Istotą metody Monte Carlo jest możliwość wygenerowania dowolnej, skończonej liczby wyników inwestycji kapitałowej. Otwiera to szanse pomiaru ryzyka, a w konsekwencji ocenę stanu niepewności przyszłych korzyści inwestora. Pomiar ryzyka przy użyciu metody Monte Carlo jest szacunkiem przybliżonym, ale i takiej jakości informacja może być podstawą korekt procesu inwestycyjnego w warunkach ryzyka.

## 2. Finansowania inwestycji, niepewność, ryzyko

Finansowanie inwestycji wymaga odpowiedzi na fundamentalne pytanie o źródła kapitału finansującego projekty. Czy kapitałem dominującym będzie kredyt bankowy, kapitał pochodzący z emisji akcji, kapitał pochodzący z emisji, obligacje, kapitał pomocowy czy kapitał uzupełniający, czyli: kapitał własny, krótkoterminowe kredyty bankowe i pożyczki, emisja krótkoterminowych papierów dłużnych, leasing, zobowiązania krótkoterminowe? Wybór rodzaju kapitału finansującego inwestycje zależy od: jego dostępności, stabilności, terminowości, dopływu w czasie jej realizacji, kosztu pozyskania, a także reakcji właścicieli na możliwy spadek wartości ich aktywów [Hay, Morris, 1987; Rappaport, 1986; Coates i in. 1993]. Rodzaj kapitału inwestycyjnego wpływa na efektywność inwestycji, bowiem należy uwzględnić koszty pozyskania kapitału.

Realizacja inwestycji jest monitorowana w kontekście zgodności przyjętych w planach uwarunkowań otoczenia inwestycyjnego z ich aktualnym stanem. W przypadku istotnych różnic narasta niepewność uzyskania planowanej stopy zwrotu<sup>2</sup>. Oznacza to

---

<sup>1</sup> Obszarem uwarunkowań bezpośrednich organizacji są: zasoby, kompetencje, strategie, mikrootoczenie, otoczenie konkurencyjne i makrootoczenie [Gołębiowski, 2001, s. 103-119].

<sup>2</sup> Interesujący wynik uzyskał Mark K. Kritzman, a mianowicie dowiódł on, że *wartość oczekiwana z określonej próby stóp zwrotu na ogół przewyższa zrealizowaną wartość tej próby, podczas gdy bardziej prawdopodobne jest, że losowo wybrany szereg stóp zwrotu z tej próby nie osiągnie wartości oczekiwanej, niż, że ją przewyższy* [Kritzman, 2011, s. 59].

konieczność prowadzenia kontroli dynamiki i kierunku zmian uwarunkowań otoczenia inwestycyjnego, a w konsekwencji wyboru właściwego scenariusza realizacji inwestycji.

Z niepewnością uzyskania zwrotu łączy się ryzyko towarzyszące realizowanym procesom inwestycyjnym<sup>3</sup>. Postrzegając ryzyko jako skutek wpływu turbulencji uwarunkowań otoczenia inwestycyjnego na wynik podjętych działań, nie popelnia się błędu uznając miarę ryzyka za miarę stanu niepewności realizowanego procesu inwestycyjnego. Pomiar ryzyka inwestycyjnego redukuje niepewność inwestora spowodowaną wpływem zmian otoczenia na realizowany cel inwestycji.

### 2.1. Źródła niepewności

Procesy inwestycyjne są realizowane w otoczeniu uwarunkowań identyfikowanych jako zasoby własne, takie jak: wiedza, kompetencje, kultura organizacyjna, potencjał pracowniczy, struktura organizacyjna, majątek materialny i niematerialny, kapitały. Zasób własny dopełniają czynniki bliskiego otoczenia rynkowego, tj.: potencjał konkurentów rynkowych, uwarunkowania środowiska naturalnego, zasoby rynku pracy, relacje z dostawcami, cechy środowiska kulturowego, ale także makrootoczenia obejmującego uwarunkowania: polityczne, ekonomiczne, prawne, finansowe, kulturowe [Thomson, Strickland, 1998].

Otoczenie inwestycyjne jest źródłem niepewności. Zarządzanie w warunkach zmian uwarunkowań otoczenia uświadamia konieczność uwzględnienia różnych wariantów inwestycyjnych, nawet jeśli tylko niewielka liczba uwarunkowań otoczenia decyzyjnego ulega zmianom, które istotnie różnią się od inwestycji przyjętych w założeniach.

### 2.2. Metody analizy ryzyka

Ryzyko inwestycji jest skutkiem zmienności otoczenia decyzyjnego, a fundamentem analizy ryzyka jest monitoring zmian jego uwarunkowań. Wynik analizy umożliwia identyfikację decyzji mających korzystny wpływ na cel inwestycyjny. Można na to spojrzeć także z innej perspektywy. Wyniki monitoringu mogą mieć walor ostrzegawczy, bowiem informują o zagrożeniach realizacji celu inwestycyjnego.

Monitoring zmian uwarunkowań otoczenia decyzyjnego pozwala na ocenę trendu oraz dynamiki uwarunkowań istotnych dla realizowanych celów inwestycyjnych. Ocena ta ma miejsce za sprawą:

1. analizy wrażliwości celów inwestycyjnych na zmiany uwarunkowań; jej wynik służy określeniu wartości krytycznych uwarunkowań otoczenia decyzyjnego, dzięki którym jest możliwa realizacja planowanych celów;

---

<sup>3</sup> Pojęcia niepewności i ryzyka często są postrzegane jako pojęcia tożsame. Jest to nieuprawnione, bowiem niepewność to niezmierny stan „niepokoju” o rezultat podjętych działań, natomiast ryzyko jest kategorią mierzalną i określa liczbowo jego poziom.

2. metod statystycznych do wyznaczania trendów zmian uwarunkowań w horyzoncie realizacji inwestycji;
3. symulacji realizacji celów inwestycji według zróżnicowanych scenariuszy, a w okresie zwrotu nakładów prowadzenia symulacji procesów decyzyjnych zapewniających planowany poziom efektywności inwestycji.

Analiza wrażliwości celów inwestycyjnych na zmiany uwarunkowań realizowanego procesu przy użyciu metod prognozowania uwarunkowań ma umożliwić pogłębienie analizy podjętego ryzyka. Dotyczy to ważnej odpowiedzi na pytanie o granice dopuszczalnych zmian uwarunkowań otoczenia decyzyjnego stabilizujących poziom ryzyka. Analizę tę uzupełnia symulacja wyników realizacji projektów inwestycyjnych w warunkach różnych wariantów scenariuszy działań. Wynik symulacji ma odpowiedzieć na pytanie, które ze scenariuszy chronią najskuteczniej cel inwestycyjny przed skutkami podjętego ryzyka. Jest to równoważne z redukcją stanu niepewności wyniku, a tym samym wyborem scenariusza procesu decyzyjnego.

### 2.3. Pomiar ryzyka inwestycyjnego

Inwestycja to rezultat nabycia lub wytworzenia składników aktywów: rzeczowych majątku trwałego, wartości niematerialnych i prawnych, a w ujęciu praw majątkowych: licencji, znaków towarowych, patentów. Celem każdej inwestycji jest jej oplacalność. Inwestor alokuje kapitał, ponosząc nakłady inwestycyjne, liczy na przyszłe dochody.

Realizacja inwestycji jest procesem warunkowym, który zachodzi w dynamicznie zmieniającym się otoczeniu decyzyjnym, a zmiany otoczenia są przyczyną niepewności co do rezultatów realizowanego procesu inwestycyjnego. Możliwość pomiaru niepewności na każdym etapie realizacji jest istotnym warunkiem ograniczającym niekorzystne skutki wystąpienia różnic między uwarunkowaniami planu inwestycyjnego a uwarunkowaniami otoczenia w toku realizacji inwestycji. Pomiar niepewności pośrednio jest realizowany dzięki pomiarowi ryzyka inwestycyjnego. Literatura problemu jest zasobna i tym samym wyróżnia pomiar ryzyka mający wartość sprawozdawczą *ex post* oraz pomiar o wartości ostrzegawczej *ex ante*. Pomiar *ex ante* ma istotne znaczenie w procesach zarządzania w warunkach ryzyka. Pomiar ryzyka na podstawie bieżących informacji o zmianach uwarunkowań otoczenia decyzyjnego umożliwia dobór skutecznych instrumentów chroniących realizowane procesy inwestycyjne przed niekorzystnym wpływem zmian uwarunkowań.

Pomiary ryzyka inwestycyjnego, dokonywane metodami statycznymi bądź dynamicznymi, mają zróżnicowaną wartość informacyjną. Różni je rola czasu w procedurze pomiaru efektywności inwestycji. W przeciwieństwie do metod dynamicznych, metody statystyczne nie zakładają zmienności wartości pieniądza w czasie<sup>4</sup>. Nie oznacza

---

<sup>4</sup> Metody statyczne to: rachunek porównawczy kosztów, rachunek porównawczy zysków, rachunek rentowności, okres zwrotu [Ostrowska, 1999; Rogowski, 2008], natomiast metody dynamiczne to: metoda wartości bieżącej NPV i metoda wewnętrznej stopy zwrotu IRR [Ajuga, 2009].

to, że wyniki uzyskane metodami statystycznymi są bezwartościowe, odwrotnie, mają znaczenie informacyjne i stanowią wstępną, przybliżoną ocenę ryzyka finansowego inwestycji.

Wyniki monitoringu dynamiki zmian uwarunkowań otoczenia decyzyjnego stanowią podstawę procesów prognozowania stanów otoczenia decyzyjnego. Naturalnym wykorzystaniem prognoz jest ich użycie do szacowania ryzyka możliwych scenariuszy zarządzania procesem inwestycyjnym.

Problem pomiaru ryzyka nabiera szczególnego znaczenia wówczas, gdy uwarunkowania są wielkościami jakościowymi – niematerialnymi. W powszechnej ocenie, zmienne mające wymiar jakościowy są niemierzalne [Hubbard, 2014]. Jeżeli jednak ważne decyzje wymagają uwzględnienia uwarunkowań przyjmujących wartości jakościowe, a w przypadku oceny ryzyka inwestycyjnego tak jest i decydent postrzega je jako niemierzalne, to z dużym prawdopodobieństwem można uznać, że nie zostaną podjęte nawet próby ich pomiaru. W rezultacie część uwarunkowań, mających wpływ na poziom ryzyka, nie jest uwzględniana w jego pomiarze, tymczasem problem skutków pominięcia nawarstwia się w kolejnych fazach monitoringu zmian efektywności realizowanej inwestycji.

#### 2.4. Metoda Monte Carlo

Stochastyczna natura zjawisk oznacza, że jednoznaczne wskazanie wyniku pomiaru zjawiska jest niemożliwe. Jeżeli założy się rozkład prawdopodobieństwa stanów badanego zjawiska, to już samo określenie przedziału miary stanów jest zadowalającym wynikiem. Koncepcja takiego rozwiązania sięga XVIII wieku. Louis Leclerc hrabia Buffon, analizując problem wnioskowania w warunkach ograniczonej wiedzy o zachodzących zjawiskach, stwierdził, że jeśli przyczyny zjawisk są jasne i zrozumiałe, to sformułowaniu wniosków może posłużyć analogia lub powtarzalność zjawisk [Leclerc, 2010, s. 18 i następ.].

Koncepcja rozwiązania pomiaru, według idei Leclerca, w obecnej formie została opublikowana w 1949 roku przez Metropolisa i Ulama, a rozwiązanie jest znane pod nazwą symulacji Monte Carlo<sup>5</sup>. Literatura problemu zna różne definicje metody: [Halton, 1970, s. 2; Metropolis, Ulam, 1949, s. 335; Jäckel, 2002; Sobol, 1975]. W wymienionych pozycjach zdefiniowano założenia metody symulacyjnej. Na potrzeby tego opracowania wybrano sformułowanie Haltona. Jest ono zrozumiałe, jak również opiera się na znajomości podstaw statystyki oraz analizy matematycznej. Zacytowano je poniżej.

*Definicja. Metoda Monte Carlo jest to metoda reprezentująca rozwiązanie problemu w postaci parametru pewnej hipotetycznej populacji i używająca sekwencji liczb losowych do skonstruowania próby losowej danej populacji, z której to statystyczne oszacowania tego parametru mogą być otrzymane.*

---

<sup>5</sup> Zob. [Metropolis, 1987]. Instrumenty narzędziowe użyte w metodzie mają swoje źródło w analizie gier losowych. Metropolis potwierdził, że Ulam zainspirował go opowiadaniem o swoim wuju, namiętym hazardziście, bywalcu kasyn w Monte Carlo. Stanisław Ulam urodził się w Polsce w rodzinie żydowskiej, matematyk, przedstawiciel szkoły lwowskiej, współtwórca bomby termojądrowej (obywatelstwo amerykańskie przyjął dopiero w 1943 roku).

Do wygenerowania hipotetycznej populacji jest wykorzystywany generator liczb losowych (*ang. random number generator* – RNG), a wynikiem działania generatora liczb losowych są liczby z przedziału o rozkładzie jednostajnym. Z generatora o takim rozkładzie można uzyskać generator o dowolnym, innym rozkładzie przez wyznaczenie funkcji odwrotnej do dystrybuanty otrzymanej na podstawie wyników pierwszego generatora [Zieliński, 1979].

#### 2.4.1. Metoda odwracania dystrybuanty

Założenia:

1.  $R$  – zmienna losowa o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0,1)$ ;
2.  $F$  – pewna ciągła i ściśle rosnąca funkcja, taka, że  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ .

Niech zmienna losowa  $X$  jest funkcją odwrotną dystrybuanty rozkładu zmiennej losowej  $R$ , to  $X = F^{-1}(R)$ .

Zatem z relacji  $P\{X \leq x\} = P\{F^{-1}(R) \leq x\}$  i  $P\{F^{-1}(R) \leq x\} = P\{R \leq F(x)\} = F(x)$  wynika, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład o dystrybuancie  $F$ .

Niech  $\{r_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  jest ciągiem liczb losowych o rozkładzie równomiernym w przedziale  $(0,1)$ , to ciąg  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gdzie  $x_n = F^{-1}(r_n)$  jest ciągiem liczb losowych o dystrybuancie  $F$ .

Praktyczne rozwiązanie zadania generowania ciągu liczb losowych  $\{x_n\}$  podał Kahn [Tocher, 1969; Zieliński, 1970], proponując rozwiązanie przybliżone, mianowicie aproksymantę funkcji odwrotnej  $F^{-1}$ :

$$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \approx \frac{4e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}; \quad k = \sqrt{\frac{8}{\pi}}, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

stąd:

$$x = \frac{1}{k} \ln \frac{1+R}{1-R}, \quad 0 < R < 1. \quad (2)$$

Jeżeli  $R$  ma rozkład równomierny w przedziale  $(0, 1)$ , to  $X$  ma w przybliżeniu taki rozkład jak wartość bezwzględna zmiennej losowej o rozkładzie normalnym  $(0, 1)$ .

Załóżmy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny  $N(0,1)$  o rozkładzie gęstości:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Wygenerowanie zmiennej  $Z$  o rozkładzie normalnym  $N(\mu, \sigma)$  poprzedza wygenerowanie zmiennej  $X$  zgodnie z rozkładem (3), a następnie wyznaczenie zmiennej  $Z = \sigma X + \mu$ .

Metoda odwracania dystrybuanty w przypadku funkcji  $y = \varphi(x)$  obejmuje następujące założenia:

$$1. \quad \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \approx \frac{4e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}; \quad k = \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}, \quad x > 0, \quad (4)$$

2. ograniczenie aproksymacji funkcji (3) do dodatniej półosi jest równoznaczne z aproksymacją dystrybuanty rozkładu normalnego o parametrach  $N(0, 1)$  uciętego do wartości dodatnich:

$$y = \varphi(x), \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{1 + e^{-kx}} - 1, \quad (5)$$

3. z relacji (5) wyznaczamy funkcję  $x = \frac{1}{k} \ln \frac{1+y}{1-y}$ ,  $0 < y < 1$ , która jest przybliżeniem funkcji odwrotnej.

Jeżeli zmienna losowa  $y$  ma rozkład równomierny w przedziale  $(0, 1)$ , to zmienna losowa  $x$  ma w przybliżeniu rozkład normalny ucięty do wartości dodatnich, tzn. rozkład o gęstości:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x > 0^6. \quad (6)$$

Funkcja rozkładu gęstości zmiennej losowej jest potencjalnym instrumentem redukcji niepewności wynikającej ze stochastycznej natury zjawisk ekonomicznych, bowiem umożliwia przeprowadzenie procesu generowania ciągu wartości losowych stóp zwrotu z inwestycji. Wprawdzie idea procedury pomiaru daje jedynie pewne przybliżenie miary, to już sam fakt możliwości określenia jej przedziału sprawia, że wzrasta zasób informacji, które stanowią fundament procesu podejmowania decyzji inwestycyjnych.

### 3. Ryzyko finansowania inwestycji

Przywilejem inwestora jest decyzja inwestycyjna, ale jednocześnie to inwestor ponosi skutki podjętej decyzji. Analiza bieżących uwarunkowań decyzji obejmuje także, co oczywiste, pomiar stopy zwrotu z inwestycji w aktualnych uwarunkowaniach.

Stopa zwrotu inwestycji jest definiowana jako relacja średniego rocznego zysku w okresie zwrotu nakładów do skali finansowania inwestycji<sup>7</sup>.

Analiza ryzyka finansowania inwestycji koncentruje się na monitoringu zmian wartości stopy zwrotu, a w przypadku trendu spadkowego na wskazaniu przyczyn tego

<sup>6</sup> Uzasadnienie zamieścił Zieliński w rozdziale pt.: *Generatory liczb losowych o dowolnych rozkładach prawdopodobieństwa* [Zieliński, 1979].

<sup>7</sup> Obok miary efektywności inwestycji, jaką przyjęto w tym opracowaniu, literatura zagadnienia wymienia: koszt/zysk w jednostce czasu – na etapie wyboru wariantu inwestycyjnego, okres zwrotu, rentowność [Karpus, 2003]. Celem uproszczenia badania przyjęto zysk brutto.

niekorzystnego stanu. Definicja ryzyka powinna uwzględniać przyjęte założenia analizy finansowej, tak by w konsekwencji formalny opis ryzyka otwierał możliwość budowy modelu ryzyka, a następnie pomiar ryzyka. Definicję tę przedstawiono poniżej.

*Ryzyko finansowe inwestycji jest zdarzeniem zrealizowania stopy zwrotu z inwestycji na poziomie niższym aniżeli stopa zwrotu zakładana w planach inwestora.*

Modelem odzwierciedlającym przekaz definicji ryzyka jest obraz rozstępu  $m_r$  między zrealizowaną stopą zwrotu a jej wartością planowaną, zatem:

$$m_r = \begin{cases} s - s^{(p)} \geq 0, & (A) \\ s - s^{(p)} < 0, & (B) \end{cases}, \quad (7)$$

gdzie:

$s$  – zrealizowana stopa zwrotu inwestycji,

$s^{(p)}$  – planowana stopa zwrotu,

(A) – A zdarzenie: zwrot z inwestycji na poziomie planowanym,

(B) – B zdarzenie: zwrot z inwestycji poniżej poziomu planowanego.

Finansowanie inwestycji w zmiennym otoczeniu decyzyjnym wymaga od zarządzających gotowości do zmian realizacji scenariusza przyjętego w planach, spowodowanych zmianami uwarunkowań procesu inwestycyjnego. Konsekwencją zmian mogą być odchylenia od planowanej stopy zwrotu. Jak oszacować ryzyko finansowe realizacji inwestycji?

Wybór instrumentu pomiaru nie może być przypadkowy. Należy pamiętać, że efektywność inwestycji – stopa zwrotu – jest zmienną losową. Oznacza to, że stopa zwrotu  $s^{(p)}$  jest zmienną, która może przyjąć wartości z pewnego przedziału zmienności  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Wybór skutecznego i nieskomplikowanego instrumentu pomiaru ryzyka o wiarygodnej zawartości informacyjnej miary ma istotne znaczenie. Inwestor oczekuje pełnej informacji o możliwych zagrożeniach procesu inwestycyjnego, łącznie z oszacowaniem ryzyka stopy zwrotu, nim podejmie decyzje o finansowaniu inwestycji.

Naturalną miarą ryzyka relacji (7) jest prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzeń B. Taki pomiar jest możliwy pod warunkiem przeprowadzenia eksperymentu Monte Carlo, w wyniku którego zostaną wygenerowane ciągi losowe wartości stopy zwrotu.

Wątpliwości inwestora może osłabić bądź wzmocnić analiza oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji alternatywnych. Efektywność inwestycji alternatywnych wyznacza oczekiwana stopa zwrotu  $s^{(ia)}$  portfela możliwych inwestycji o określonych stopach zwrotu – lokaty bankowe, bony skarbowe, obligacje Skarbu Państwa, pożyczki zabezpieczone papierami o wysokiej płynności czy zakup papierów dłużnych o krótkim terminie zwrotu zabezpieczonych majątkiem produktywnym o płynnej i natychmiastowej zbywalności.

Algorytm oceny ryzyka finansowania inwestycji przedstawiono poniżej.

1. Przyjęcie wartości planowanej stopy zwrotu  $s^{(p)}$ .
2. Oszacowanie przedziału wartości planowanej stopy zwrotu  $[a, b]$ .

3. Określenie minimalnej oczekiwanej stopy zwrotu  $s^{(ia)}$  z inwestycji alternatywnych.
4. Wygenerowanie metodą Monte Carlo ciągu  $\{s_i\}$  – stóp zwrotu przyjmujących wartości z przedziału  $[a, b]$ .
5. Oszacowanie ryzyka finansowego inwestycji zapewniającego stopę zwrotu na poziomie nie niższym niż planowany  $s^{(p)}$ .
6. Oszacowanie ryzyka finansowego inwestycji zapewniającego oczekiwaną stopę zwrotu z przedziału  $[s^{(ia)}, s^{(p)}]$ .
7. Oszacowanie ryzyka finansowego inwestycji w przypadku, gdy stopa zwrotu przyjmuje wartość na poziomie niższym niż oczekiwana stopa zwrotu inwestycji alternatywnych  $s^{(ia)}$ .

Redukcja niepewności związanej z wartością stopy zwrotu jest równoważna z oszacowaniem poziomu ryzyka finansowania inwestycji. Definicja ryzyka określa ten stan jednoznacznie, jako nieuzyskanie planowanego poziomu stopy zwrotu z inwestycji. Sporządzone plany inwestycyjne ujmują rozwiązania alternatywne z niższym poziomem stopy zwrotu, oceniane jako obciążone „mniejszym ryzykiem”. Uwzględnienie w analizie ryzyka finansowania inwestycji alternatywnych obok inwestycji planowanej – głównie definiuje dwa poniższe obszary ryzyka.

- I Scenariusze realizacji inwestycji  $s_i$  nie gwarantują stóp zwrotu na poziomie planowanej stopy zwrotu:  $s_i < s^{(p)}$ .
- II Scenariusze realizacji  $s_i$  inwestycji nie gwarantują stóp zwrotu na poziomie stopy zwrotu z inwestycji alternatywnych  $s_i < s^{(ia)}$ .

gdzie:  $s_i$  – wygenerowane w przedziale  $[a, b]$ , metodą Monte Carlo wartości stóp zwrotu.

**Przykład.** Zakład Ubezpieczeń zamierza zakupić akcje dużego banku z zasobów własnych kapitału, eksperyment przeprowadzono przyjmując poniższe założenia.

1. Wartość planowanej stopy zwrotu na poziomie  $s^{(p)} = 6,4\%$ .
2. Wartość oczekiwana stopy zwrotu z inwestycji alternatywnych  $s^{(ia)} = 3,5\%$ .
3. Analizowany przedział wartości stopy zwrotu  $[a, b] = [0\%, 8\%]$ .
4. Rozkład stóp zwrotu zgodny z rozkładem normalnym ( $\mu = 4, \sigma = 3,29$ )<sup>8</sup>.
5. Wygenerowano 10 000 wartości z przedziału  $[0\%, 8\%]$ .

Na podstawie przyjętych założeń oszacowano ryzyko finansowe inwestycji, mierzone prawdopodobieństwem stopy zwrotu  $s$ .

- I Ryzyko osiągnięcia stopy zwrotu na poziomie nie niższym niż  $6,4\%$ , mierzone prawdopodobieństwem wystąpienia takiego zdarzenia, oszacowano na poziomie  $0,85$ .
- II Ryzyko nieosiągnięcia stopy zwrotu w granicach  $3,5\% - 6,4\%$  %, mierzone prawdopodobieństwem wystąpienia takiego zdarzenia, oszacowano na poziomie  $0,58$ .

<sup>8</sup> Jest to odchylenie standardowe w 90%-owym przedziale ufności  $\sigma = 3,29$ .



- III Ryzyko nieosiągnięcia stopy zwrotu na poziomie 3,5% z inwestycji alternatywnych, mierzone prawdopodobieństwem wystąpienia takiego zdarzenia, oszacowano na poziomie 0,52.

Wyniki empiryczne nie są zaskoczeniem, gdyż potwierdzają wnioski z analizy teoretycznej. Teoria i empiria badanego przypadku są zgodne, natomiast poziom ryzyka wzrasta wraz ze wzrostem oczekiwań co do poziomu stóp zwrotu.

#### 4. Podsumowanie

Wynik decyzji inwestycyjnych obciąża niepewność łącząca się z efektywnością poniesionych nakładów finansowych, a także okres ich zwrotu. Wydłużanie okresu zwrotu obniża efektywności inwestycji. Teza ta wynika wprost z definicji miary efektywności stopy zwrotu. Jednocześnie wydłużony okres zwrotu nakładów to okres pozostawania w środowisku większych bądź mniejszych turbulencji otoczenia inwestycyjnego. Niezależnie od skali zakłóceń, odchylenia uwarunkowań decyzyjnych od przyjętych w planach inwestycyjnych są źródłem ryzyka finansowego inwestycji, mierzonego prawdopodobieństwem zrealizowanej stopy zwrotu. Skutki podjętego ryzyka mogą być przyczyną utraty płynności finansowej, co stawia inwestora w trudnej sytuacji finansowej, który traci zdolność do obsługi zobowiązań wobec instytucji finansowych udzielających środki stanowiące finansowanie zewnętrzne. Równocześnie inwestor, nie uzyskując zwrotu z środków własnych, ponosi starty.

Identyfikacja prawdopodobnych scenariuszy realizacji stopy zwrotu, oszacowanej przy użyciu metody Monte Carlo, jest przybliżeniem modelu rozkładu, niedającego się obserwować rozkładu rzeczywistego zarówno przeszłych, jak i przyszłych stóp zwrotu, a wynik jest rezultatem zbliżonym do konstrukcji modelu próbki rozkładu stóp [Kritzman, 2011]. Mimo tej wady, rozwiązanie umożliwia oszacowanie prawdopodobieństwa ryzyka scenariuszy stóp zwrotu finansowania inwestycji. Informacja ta ma pierwszoplanowe znaczenie w systemie monitoringu zmian tych uwarunkowań otoczenia, które istotnie wpływają na poziom stopy zwrotu. Ta cecha systemu monitoringu stanowi fundament systemu instrumentów zabezpieczeń przed skutkami ryzyka finansowania inwestycji.

Eksperyment Monte Carlo rozwiązał wiele znaczących problemów natury praktycznej. Obliczenie prędkości cząsteczek metodą Monte Carlo przez generowanie prędkości cząsteczek trytu w trakcie wybuchu bomby wodorowej, dokonane przez E. Teller i S. Ulama w 1952 roku, uznawane jest za moment opracowania tej metody. Jej zaletą było zastąpienie czasochłonnych rozwiązań analitycznych. Dzięki rosnącej mocy komputerów, metoda uwolniła badaczy od skomplikowanych teorii i wzorów, a to pozwoliło im na skupieniu się na praktycznej stronie problemu. Obok niepodważalnych zalet, metoda ma zauważalne wady, a mianowicie: ograniczenie eksperymentów do skończonej liczby prób, otrzymane wyniki są przybliżeniem, a ich jakość zależy od użytego generatora liczb pseudolosowych.

Rozwiązaniem zbliżonym do prezentowanej metody Monte Carlo jest metoda Bootstrap. Zakłada ona, że rozkład teoretyczny jest aproksymantą rzeczywistego rozk-

ladu stóp zwrotu. Jednakże zbiór ten ma ważną własność, bowiem może stanowić fundament procesu generowania scenariuszy, które będą kreowane na podstawie danych historycznych i mogą obejmować statystyki o właściwościach historycznych [Kritzman, 2011], co umożliwia doprecyzowanie wyniku otrzymanego metodą Monte Carlo.

### Literatura

- Coates J., Davis E. W., Emmanuel C., Longden S., Stacey R. J., 1993, *Corporate Performance Evaluation in Multinationals*, Chartered Institute of Management Accountants, London.
- Gołębiowski T., 2001, *Zarządzanie strategiczne. Planowanie i kontrola*, Wydawnictwo Difin, Warszawa
- Halton J., 1970, *A Retrospective and Prospective Survey of the Monte Carlo Method*, "SIAM Review", vol. 12, no. 1
- Hay D.A., Morris D.J., 1987, *Industrial Economics: Theory and Evidence*, Oxford University Press, Oxford.
- Hubbard D. W., 2011, *Pomiar Uniwersalny. Odkrywanie w biznesie wartości niematerialnych*, MT Biznes Sp. z o.o., Warszawa.
- Jajuga K., 2009, *Wprowadzenie do inwestycji finansowych. Depozyty i instrumenty rynku pieniężnego*, Komisja Nadzoru Finansowego, Warszawa.
- Kritzman M. P., 2011, *Paradoksy inwestowania. Metody zwiększające zyskowność i bezpieczeństwo portfela*, CeDeWu Sp. z o.o., Warszawa.
- Leclerc G., L., 2010, *Essays on Moral Arithmetic*, LSF Research Working Paper Series, no. 10-16, Luxemburg.
- Metropolis N., 1987, *The Beginning of the Monte Carlo Method*, Los Alamos Science, Special Issue, no. 15.
- Metropolis N., Ulam S., 1949, *The Monte Carlo Method*, "Journal of the American Statistical Association", vol. 44, no. 247.
- Ocena efektywności inwestycji*, 2003, P. Karpuś (red.), CeDeWu Sp. z o.o., Warszawa.
- Ostrowska E., 1999, *Ryzyko inwestycyjne. Identyfikacja i metody oceny*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.
- Rappaport A., 1986, *Creating Shareholder Value*, Free Press, New York.
- Rogowski W., 2013, *Rachunek efektywności inwestycji. Wyzwania teorii i potrzeby praktyki*, Wolters Kluwer, Kraków.
- Sobol L., 1975, *The Monte Carlo Method*, Mir Publisher, Moskwa.
- Thomson A.A., Strickland A.J., 1998, *Strategic Management*, ed. 10, R. D. Irwin (ed.), McGraw-Hill, Boston.
- Tocher K.D., 1969, *The art of simulation*, English Universities Press, London.
- Zieliński R., 1970, *Metody Monte Carlo*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Zieliński R., 1979, *Generatory liczb losowych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa.

## Załącznik 1.

Oczekiwana stopa zwrotu $\geq 6,4\%$		
Numer scenariusza	Wygenerowane stopy zwrotu	Wartość logiczna relacji (wsz $\geq 6,4\%$ ) wsz – wygenerowana stopa zwrotu
1	2,65	–
2	1,37	–
3	6,44	1
4	3,75	–

9 999	1,02	–
10 000	3,59	–
$p(B) = 0,85$		$\Sigma(\text{Wartość logiczna [wsz} \geq 6,4\%] / 10\ 000)$

Oczekiwana stopa zwrotu $< 3,5\%$		
Numer scenariusza	Wygenerowane stopy zwrotu	Wartość logiczna relacji (wsz $< 3,5\%$ ) wsz – wygenerowana stopa zwrotu
1	4,18	1
2	3,78	1
3	5,44	1
4	1,50	–

9 999	6,04	1
10 000	4,09	1
$p(B) = 0,52$		$\Sigma(\text{Wartość logiczna [wsz} < 3,5\%] / 10\ 000)$

Oczekiwana stopa zwrotu w granicach $3,5\% - 6,4\%$		
Numer scenariusza	Wygenerowane stopy zwrotu	Wartość logiczna relacji ( $3,5\% < \text{wsz} < 6,4\%$ ) wsz – wygenerowana stopa zwrotu
1	2,65	–
2	1,37	–
3	6,44	–
4	3,75	1

9 999	1,02	–
10 000	3,59	1
$p(B) = 0,58$		$\Sigma(\text{Wartość logiczna [} 3,5\% \leq \text{wsz} < 6,4\%] / 10\ 000)$

Definicja operatu losowania:  $\text{rozklad.normalny.odw}(\text{los}(\ ); \mu; (a - b) / \sigma)$ , gdzie przedział  $[a, b] = [0, 8]$ ,  $\mu$  – wartość przeciętna przedziału losowania (generowania),  $\sigma$  – odchylenie standardowe. Przyjęto założenie o zgodności zmiennej losowej  $msz$  z rozkładem normalnym, a jej generowanie przeprowadzono metodą odwracania dystrybuanty.

**dr Elżbieta MAJEWSKA**

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: e.majewska@uwb.edu.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.05

## **WPŁYW KRYZYSU FINANSOWEGO 2007-2009 NA STRUKTURĘ HIERARCHICZNĄ EUROPEJSKICH RYNKÓW KAPITAŁOWYCH**

### **Streszczenie**

Celem niniejszego opracowania jest analiza struktury hierarchicznej europejskich rynków kapitałowych w okresach: przed globalnym kryzysem finansowym 2007-2009 oraz po jego zakończeniu. W badaniu wykorzystano tygodniowe logarytmiczne stopy zwrotu głównych indeksów 28 giełd europejskich, wśród których znalazły się zarówno rynki rozwinięte, jak i rozwijające się. Okres badawczy objął lata 2000-2016. Do zbadania struktury powiązań między rynkami wykorzystano metody aglomeracyjne, przede wszystkim metodę Warda. Przeprowadzona analiza pozwoliła stwierdzić istotne różnice w strukturze powiązań między rynkami w okresie przed kryzysem i po jego zakończeniu. Wskazała również grupy rynków szczególnie silnie oddziałujących na siebie.

**Słowa kluczowe:** globalny kryzys finansowy, analiza skupień, dendrogram, metoda Warda

### **IMPACT OF 2007-2009 FINANCIAL CRISIS ON HIERARCHICAL STRUCTURE OF EUROPEAN CAPITAL MARKETS**

#### **Summary**

The purpose of this paper is to investigate the hierarchical structure of the European capital markets in the periods before and after the Global Financial Crisis of 2007-2009. The author uses weekly logarithmic stock market returns of the 28 main indexes of the European exchanges, both from the developed and developing markets, in the period 2000-2016. The examination is based on agglomerative clustering methods, primarily on the Ward's linkage method. The results show that the Global Financial Crisis has changed the hierarchy of the markets. They also indicate which groups of markets are most strongly interconnected.

**Key words:** Global Financial Crisis, cluster analysis, dendrogram, Ward's method

**JEL:** C38, F65, G15, O52

## 1. Wstęp

W latach 2007-2012 europejskie rynki finansowe zostały dotknięte dwoma następującymi po sobie okresami istotnych spadków. Najpierw był to światowy kryzys finansowy, który rozpoczął się na większości rynków w drugiej połowie 2007 roku i zakończył w pierwszych miesiącach roku 2009. Niewątpliwie jego źródłem były wydarzenia na rynku amerykańskim. Jednak już pod koniec 2009 roku pojawiły się pierwsze symptomy kolejnego kryzysu w Europie. Tym razem zapoczątkowały go problemy gospodarki greckiej, które nieoczekiwanie w roku 2010 rozprzestrzeniły się na niemal cały kontynent [Majewska, 2017].

Kryzysy te pokazały, jak ważne są wzajemne powiązania między rynkami dla stabilności finansowej gospodarek. Z literatury jest znany fakt istotnego wzrostu korelacji między rynkami finansowymi w okresach kryzysów. Przyczyn tego zjawiska autorzy upatrują z jednej strony w globalizacji łączonej z rosnącą integracją rynków, z drugiej w zjawisku zarażania rynków. Analiza struktury powiązań między rynkami może pomóc w identyfikacji rynków szczególnie silnie oddziałujących na siebie oraz tych, których wzajemne powiązania są niewielkie. Jest to istotne zwłaszcza w okresach kryzysów, kiedy to kluczowa staje się możliwość dywersyfikacji ryzyka inwestorów na rynkach międzynarodowych. Prostym narzędziem, wspomagającym tego typu analizy, mogą być metody wielowymiarowej analizy statystycznej, w tym analiza skupień.

Celem pracy jest zbadanie struktury powiązań między 28 europejskimi rynkami finansowymi dzięki metodom aglomeracyjnym. Ponadto, przeprowadzono analizę zmian w tej strukturze wywołanych globalnym kryzysem finansowym lat 2007-2009.

W kolejnych częściach pracy zaprezentowano krótki przegląd literatury dotyczącej wykorzystania metod hierarchicznych w analizie struktury rynków finansowych (rozdział 2.), a także zarys metod grupowania obiektów (rozdział 3.). W rozdziale 4. przedstawiono dane empiryczne wykorzystane w badaniu, a w rozdziale 5. wyniki analizy struktury hierarchicznej badanej grupy rynków finansowych w okresach przed i po globalnym kryzysie finansowym lat 2007-2009. W ostatnim rozdziale podsumowano rezultaty badań.

## 2. Struktura hierarchiczna rynków finansowych – krótki przegląd literatury

W literaturze związanej ze strukturą hierarchiczną rynków finansowych można wyodrębnić trzy główne podejścia opierające się na: minimalnych drzewach rozpinających (*minimal spanning trees*), grafach aktywów (*asset graphs*) oraz analizie skupień (*clustering analysis*). Wszystkie te metody bazują na analizie odległości (niepodobieństwa) pomiędzy szeregami stóp zwrotu. Minimalne drzewa rozpinające stanowią sieć  $n$  obiektów połączonych  $n - 1$  krawędziami, przy czym suma wag wszystkich krawędzi (odległości między obiektami) jest minimalizowana [Onnela i in. 2003; Leon i in. 2016]. W szczególności otrzymana struktura nie zawiera więc cykli ani wierzchołków izolowanych, co jest możliwe w przypadku grafów [Onnela i in. 2003]. Liczba powiązań grafu jest uzależniona od ustalonej wartości progowej odległości między obiektami. Metody analizy skupień bazują zaś na

analizie podobieństwa między obiektami i między grupami obiektów oraz prowadzą do uzyskania drzewa binarnego [Everitt i in. 2011, s. 88; Leon i in. 2016].

Najliczniejszą grupę opracowań stanowią prace dotyczące wykorzystania minimalnych drzew rozpinających. Początek tym badaniom dał Mantegna [1999], który analizował strukturę portfeli indeksów DJIA oraz S&P500 w okresie od lipca 1989 do października 1995 roku. Rynku amerykańskiego dotyczyło również opracowanie Bonanno i innych [2004], w którym autorzy budowali minimalne drzewa rozpinające w grupie 100 największych spółek w latach 1995-1998. Natomiast strukturę spółek z indeksu Dow Jones analizowali Brida i Risso [2008], którzy konstrukcję drzew rozpinających opierali zarówno na jednej zmiennej (stopy zwrotu akcji), jak i na dwóch (stopy zwrotu i wolumeny).

Odrębną grupę stanowią prace związane ze strukturą rynków międzynarodowych. Coehlo, Gilmore i Lucey [2007] budowali minimalne drzewa rozpinające na podstawie danych dotyczących 53 indeksów giełdowych z całego świata w okresie od 8 stycznia 1997 do 1 lutego 2006 roku. Natomiast Eryigit i Eryigit [2009] uwzględnili dzienne i tygodniowe logarytmiczne stopy zwrotu 143 indeksów z 59 krajów w próbie od 7 czerwca 1995 do 8 lutego 2008 roku. Strukturę grupy 21 rynków Unii Europejskiej w latach 1999-2006 opisali z kolei Gilmore, Lucey i Boscia [2008]. Obszerne badania przedstawił także Sandoval [2012], który analizował minimalne drzewa rozpinające w okresach obejmujących światowe kryzysy finansowe, począwszy od roku 1986 aż do roku 2008, uwzględniając w różnych okresach od 16 do 92 indeksów światowych.

Przykłady zastosowania metody grafów można znaleźć w pracach Onnela i innych [2003] oraz Sandovala [2013], przy czym pierwsza objęła akcje 477 spółek notowanych na giełdzie nowojorskiej (okres badawczy od 2 stycznia 1980 do 31 grudnia 1999 roku). Sandoval zaś analizował od 16 do 79 indeksów światowych w latach 1986-2001, skupiając się na kryzysach finansowych tamtego okresu.

Ostatnia grupa metod, czyli analiza skupień, nie jest, jak dotąd, zbyt szeroko reprezentowana w literaturze. Jednak można tu wskazać na przykład pracę Pantona, Lessiga, Joya [1976] prezentującą wyniki grupowania 12 rynków światowych w latach 1963-1972, choć była to nieliczna grupa rynków. Znacznie szersze badanie przeprowadzili Leon i inni [2016], którzy opisali strukturę hierarchiczną 80 rynków z całego świata na podstawie dziennych logarytmicznych stóp zwrotu głównych indeksów tych rynków w okresie od 10 stycznia 2005 do 22 czerwca 2012 roku. Na uwagę zasługuje fakt, iż uwzględnili oni zmiany powiązań między rynkami w dwóch próbach: przed globalnym kryzysem finansowym 2007-2009 i po jego zakończeniu. W niniejszym opracowaniu zaprezentowano wyniki podobnych badań, ale skupiających się na wzajemnych powiązaniach rynków europejskich oraz obejmujących inny okres badawczy.

### 3. Aglomeracyjne metody grupowania obiektów

Analiza skupień jest jednym z ważniejszych elementów statystycznej analizy danych wielowymiarowych. Umożliwia ona grupowanie obiektów w niepuste, rozłączne i jednorodnie grupy, zwane skupieniami lub klastrami. Istotą grupowania jest to, że do

jednego skupienia trafiają obiekty najbardziej do siebie podobne. Jednocześnie obiekty należące do różnych skupień powinny być jak najmniej do siebie podobne [Kolenda, 2006]. Grupowanie może mieć charakter niehierarchiczny lub hierarchiczny. W pierwszym przypadku konieczne jest określenie z góry liczby klastrow, na które będą dzielone obiekty. Natomiast metody hierarchiczne pozwalają wyznaczyć skupienia poprzez łączenie (algorytmy aglomeracyjne) bądź podział (algorytmy deaglomeracyjne) klastrow zbudowanych w poprzednich krokach algorytmu. W niniejszym opracowaniu wykorzystano metody należące do pierwszej grupy.

W pierwszym kroku algorytmu aglomeracyjnego każdy obiekt stanowi oddzielny klaster i w kolejnych krokach są łączone skupienia najbardziej podobne aż do momentu uzyskania zakładanej liczby grup albo połączenia wszystkich obiektów w jedno skupienie. Uzyskana struktura hierarchiczna w czytelny sposób przedstawia powiązania między obiektami.

Do graficznej ilustracji przebiegu aglomeracji wykorzystuje się dendrogram, czyli drzewo binarne, w którym węzłami są skupienia, a liśćmi obiekty. Poszczególne węzły są umieszczane na poziomie odpowiadającym mierze podobieństwa między węzłami potomkami.

Kluczową kwestią związaną z grupowaniem jest sposób pomiaru podobieństwa dwóch obiektów i dwóch skupień. W przypadku obiektów  $i$  oraz  $j$  za miarę podobieństwa można przyjąć odległość euklidesową  $d_{ij}$ :

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{p=1}^n (x_{ip} - x_{jp})^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

gdzie:

$x_{ip}$  – wartość zmiennej  $p$  dla obiektu  $i$ ,

$K$  – liczba obiektów grupowanych,

$n$  – liczba obserwacji dla każdej ze zmiennych.

Im mniejsza wartość  $d_{ij}$ , tym obiekty są bardziej podobne. Jeżeli zmienne wykorzystywane w badaniu są wyrażone w różnych jednostkach, to niezbędne jest doprowadzanie do ich porównywalności. Jednym ze sposobów jest standaryzacja, która przebiega zgodnie ze wzorem:

$$z_{ip} = \frac{x_{ip} - \bar{x}_p}{s_p}, \quad (2)$$

gdzie

$z_{ip}$  – wartość zmiennej  $p$  dla obiektu  $i$  po standaryzacji,

$\bar{x}_p$  – średnia arytmetyczna zmiennej  $p$ ,

$s_p$  – odchylenie standardowe zmiennej  $p$ .

Standaryzacja zmiennych prowadzi więc do uzyskania wartości niemianowanych, jak również do ujednoczenia zmienności i położenia zmiennych, a to pozwala uniknąć wpływu różnic skali i rozproszenia na wyniki badań.

Niekiedy wykorzystuje się także inne miary podobieństwa obiektów, np. odległość Minkowskiego czy odległość Mahalanobisa [Kolenda, 2006, s. 53-55; Everitt i in. 2011,



s. 49-50, 62]. Natomiast w przypadku finansowych szeregów czasowych wielu autorów posługuje się odległością opartą na współczynniku  $\varrho_{ij}$  korelacji między zmiennymi  $i$  oraz  $j$  [Mantegna, 1999]:

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \varrho_{ij})}, i, j = 1, 2, \dots, K. \quad (3)$$

Spełnia ona wszystkie aksjomaty miary odległości, a jej wartości należą do przedziału  $[0,2]$ . Jednak należy pamiętać, że ze względu na własności współczynnika korelacji stosowanie takiej odległości wymaga w szczególności przyjęcia założenia o rozkładzie normalnym stóp zwrotu. Ponadto, współczynnik korelacji jest obciążony ze względu na poziom ich zmienności [Forbes, Rigobon, 2002]. W związku z tym, porównywanie odległości opartych na współczynniku korelacji w okresach o różnej zmienności nie jest wskazane.

Natomiast sposób określenia miary podobieństwa dwóch skupień ściśle zależy od przyjętej metody grupowania. Do najczęściej stosowanych należą metody:

1. **pojedynczego wiązania (najbliższego sąsiedztwa)** – miarą podobieństwa dwóch skupień jest minimalna odległość między dwoma obiektami, z których każdy należy do jednego z tych skupień;
2. **pełnego wiązania (najdalszego sąsiedztwa)** – miarą podobieństwa dwóch skupień jest maksymalna odległość między dwoma obiektami, z których każdy należy do jednego z tych skupień;
3. **średniego wiązania** – miarą podobieństwa dwóch skupień jest średnia odległość między wszystkimi parami obiektów, z których każdy należy do jednego z tych skupień;
4. **Warda** – miarą podobieństwa dwóch skupień jest suma kwadratów odchyłeń wewnątrz tych skupień [Everitt i in. 2011, s. 76-77].

Niestety, każda z tych metod ma swoje wady [Everitt i in. 2011, s. 79]. Nie ma zaś jednoznacznych badań, które wskazywałyby, która z metod jest najlepsza w zastosowaniach do finansowych szeregów czasowych. Jednakże wielu autorów, posługując się różnymi kryteriami, wskazuje na przewagę metody Warda nad pozostałymi [Calinski, Harabasz, 1974; Ferreira, Hitchcock, 2009; Hossen, Siraj-Ud-Doulah, Hoque, 2015; Leon i in. 2016]. Warto także zwrócić uwagę na to, że metoda Warda, jako jedyna, opiera się na pewnej optymalizacji, a mianowicie, jest nią minimalizacja utraty informacji wynikającej z połączenia dwóch skupień w jedno [Ward, 1963]. Dodatkowo, dendrogramy, uzyskiwane tą metodą, zazwyczaj mają dużo bardziej przejrzystą strukturę i dlatego są łatwiejsze w interpretacji. Stąd, w dalszej części artykułu przede wszystkim przeprowadzono analizę wyników uzyskanych tą właśnie metodą.

#### 4. Dane empiryczne

Prezentowane badania przeprowadzono na podstawie notowań głównych indeksów 28 europejskich giełd papierów wartościowych. Uwzględniono przy tym zarówno rynki największe, rozwinięte, jak i mniejsze, rozwijające się. Na podstawie tygodniowych

kursów zamknięcia<sup>1</sup> indeksów z okresu od początku stycznia 2000 do końca grudnia 2016 roku wyznaczono ich logarytmiczne stopy zwrotu. Następnie wyodrębniono dwie równoliczne próby:

- próba I – 14.01.2000-27.04.2007,
- próba II – 03.04.2009-15.07.2016,

każda po 381 obserwacji. Jednakowa liczba obserwacji zapewnia porównywalność wyników uzyskanych w obu próbach. Z analizy wykluczono okres od maja 2007 do marca 2009 roku, ponieważ zgodnie z wynikami wcześniejszych badań [Olbrys, Majewska, 2014; 2015; Majewska, 2017] był to okres dużych spadków na giełdach europejskich związanych z globalnym kryzysem finansowym (formalnej identyfikacji okresów kryzysu dokonano w przypadku 25 spośród 28 uwzględnionych indeksów). Wysoka zmienność notowań w okresie kryzysu mogłaby wpłynąć na wyniki grupowania rynków, stąd pojawiła się konieczność pominięcia tej części próby pierwotnej.

Przystępując do analizy zgromadzonych danych, w pierwszej kolejności wyznaczono podstawowe statystyki wszystkich indeksów w obu próbach (tabele: 1. i 2.).

**TABELA 1.**

**Podstawowe statystyki analizowanych indeksów w okresie  
14.01.2000-27.04.2007 (próba I)**

Nr	Kraj	Indeks	Średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik asymetrii	Współczynnik ekscesu	Test Doornika-Hansena
1.	Anglia	FTSE100	0,000	0,021	-0,211 [0,093]	2,514 [0,000]	61,491 [0,000]
2.	Austria	ATX	0,004	0,022	-0,867 [0,000]	2,469 [0,000]	39,854 [0,000]
3.	Belgia	BEL20	0,001	0,026	-0,300 [0,017]	3,854 [0,000]	111,516 [0,000]
4.	Czechy	PX	0,003	0,027	-0,516 [0,000]	1,007 [0,000]	17,146 [0,000]
5.	Estonia	OMXT	0,005	0,026	0,100 [0,428]	2,377 [0,000]	58,808 [0,000]
6.	Finlandia	HEX	-0,001	0,046	-0,608 [0,000]	2,511 [0,000]	44,068 [0,000]
7.	Francja	CAC40	0,000	0,028	-0,226 [0,072]	1,975 [0,000]	41,983 [0,000]
8.	Grecja	ATHEX	0,000	0,031	-0,037 [0,767]	6,742 [0,000]	258,830 [0,000]
9.	Hiszpania	IBEX	0,001	0,026	-0,116 [0,356]	1,651 [0,000]	33,250 [0,000]
10.	Holandia	AEX	-0,001	0,030	-0,457 [0,000]	2,705 [0,000]	57,451 [0,000]
11.	Irlandia	ISEQ	0,002	0,024	-1,065 [0,000]	4,118 [0,000]	59,836 [0,000]
12.	Islandia	ICEX	0,004	0,021	-0,607 [0,000]	3,602 [0,000]	77,407 [0,000]
13.	Litwa	OMXV	0,004	0,023	0,052 [0,679]	1,583 [0,000]	31,556 [0,000]
14.	Luksemburg	LuxX	0,001	0,030	-1,541 [0,000]	16,869 [0,000]	375,329 [0,000]

<sup>1</sup> Dane zaczerpnięto z serwisu: [stooq.com].

15.	Łotwa	OMXR	0,005	0,036	-0,338 [0,007]	22,042 [0,000]	1032,13 [0,000]
16.	Malta	MSE	0,001	0,022	-0,051 [0,687]	2,723 [0,000]	72,773 [0,000]
17.	Niemcy	DAX	0,000	0,033	-0,193 [0,125]	1,678 [0,000]	33,100 [0,000]
18.	Norwegia	OSEAX	0,003	0,026	-1,486 [0,000]	7,132 [0,000]	88,475 [0,000]
19.	Polska	WIG20	0,002	0,034	-0,006 [0,959]	0,739 [0,003]	9,243 [0,010]
20.	Portugalia	PSI20	0,000	0,021	-0,588 [0,000]	4,050 [0,000]	95,302 [0,000]
21.	Rosja	RTSI	0,006	0,047	-0,575 [0,000]	1,576 [0,000]	25,055 [0,000]
22.	Słowacja	SAX	0,004	0,027	1,106 [0,000]	6,004 [0,000]	96,821 [0,000]
23.	Szwajcaria	SMI	0,001	0,025	0,009 [0,941]	7,304 [0,000]	287,251 [0,000]
24.	Szwecja	OMXS	0,000	0,031	-0,437 [0,001]	0,908 [0,000]	14,233 [0,001]
25.	Turcja	BIST100	0,003	0,058	-0,213 [0,090]	4,207 [0,000]	131,772 [0,000]
26.	Ukraina	UX	0,008	0,053	0,359 [0,004]	19,378 [0,000]	915,317 [0,000]
27.	Węgry	BUX	0,003	0,032	-0,253 [0,045]	0,870 [0,001]	11,999 [0,002]
28.	Włochy	FTSEMIB	0,000	0,027	-0,092 [0,463]	10,168 [0,000]	432,726 [0,000]

\* W nawiasach kwadratowych podano wartości prawdopodobieństwa **p**.

Źródło: obliczenia własne.

**TABELA 2.**  
**Podstawowe statystyki analizowanych indeksów w okresie**  
**03.04.2009-15.07.2016 (próbą II)**

Nr	Kraj	Indeks	Średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik asymetrii	Współczynnik ekscesu	Test Doornika-Hansena
1.	Anglia	FTSE100	0,001	0,022	-0,378 [0,003]	1,934 [0,000]	36,558 [0,000]
2.	Austria	ATX	0,001	0,032	-0,458 [0,000]	2,164 [0,000]	40,551 [0,000]
3.	Belgia	BEL20	0,002	0,025	-0,529 [0,000]	1,158 [0,000]	26,566 [0,000]
4.	Czechy	PX	0,000	0,026	-0,232 [0,066]	2,627 [0,000]	65,065 [0,000]
5.	Estonia	OMXT	0,003	0,026	1,275 [0,000]	7,420 [0,000]	111,893 [0,000]
6.	Finlandia	HEX	0,001	0,029	-0,628 [0,000]	2,400 [0,000]	40,603 [0,000]
7.	Francja	CAC40	0,001	0,029	-0,429 [0,001]	1,157 [0,000]	17,641 [0,000]
8.	Grecja	ATHEX	-0,003	0,051	-0,381 [0,003]	0,819 [0,001]	12,185 [0,002]
9.	Hiszpania	IBEX	0,000	0,034	-0,311 [0,014]	0,654 [0,010]	9,061 [0,011]

10.	Holandia	AEX	0,002	0,026	-0,316 [0,012]	1,337 [0,000]	21,824 [0,000]
11.	Irlandia	ISEQ	0,003	0,027	-0,596 [0,000]	2,245 [0,000]	37,941 [0,000]
12.	Islandia	ICEX	0,003	0,018	0,064 [0,612]	2,099 [0,000]	48,937 [0,000]
13.	Litwa	OMXV	0,003	0,024	2,866 [0,000]	32,349 [0,000]	310,504 [0,000]
14.	Luksemburg	LuxX	0,001	0,028	-0,031 [0,807]	1,269 [0,000]	22,214 [0,000]
15.	Łotwa	OMXR	0,003	0,024	1,051 [0,000]	8,751 [0,000]	201,666 [0,000]
16.	Malta	MSE	0,001	0,014	0,253 [0,045]	3,972 [0,000]	119,369 [0,000]
17.	Niemcy	DAX	0,002	0,029	-0,509 [0,000]	1,697 [0,000]	27,572 [0,000]
18.	Norwegia	OSEAX	0,002	0,026	-0,315 [0,013]	3,060 [0,000]	78,150 [0,000]
19.	Polska	WIG20	0,000	0,027	-0,338 [0,007]	1,813 [0,000]	34,099 [0,000]
20.	Portugalia	PSI20	-0,001	0,030	-0,549 [0,000]	0,963 [0,000]	18,012 [0,000]
21.	Rosja	RTSI	0,001	0,045	-0,229 [0,068]	1,358 [0,000]	23,314 [0,000]
22.	Słowacja	SAX	0,000	0,025	-0,919 [0,000]	7,545 [0,000]	182,589 [0,000]
23.	Szwajcaria	SMI	0,001	0,022	-1,257 [0,000]	6,098 [0,000]	84,086 [0,000]
24.	Szwecja	OMXS	0,002	0,026	-0,455 [0,000]	2,347 [0,000]	46,073 [0,000]
25.	Turcja	BIST100	0,003	0,033	-0,404 [0,001]	0,610 [0,015]	10,728 [0,005]
26.	Ukraina	UX	0,001	0,049	-0,067 [0,593]	4,996 [0,000]	173,148 [0,000]
27.	Węgry	BUX	0,002	0,030	-0,282 [0,025]	2,572 [0,000]	61,171 [0,000]
28.	Włochy	FTSEMIB	0,000	0,034	-0,490 [0,000]	0,830 [0,001]	14,999 [0,001]

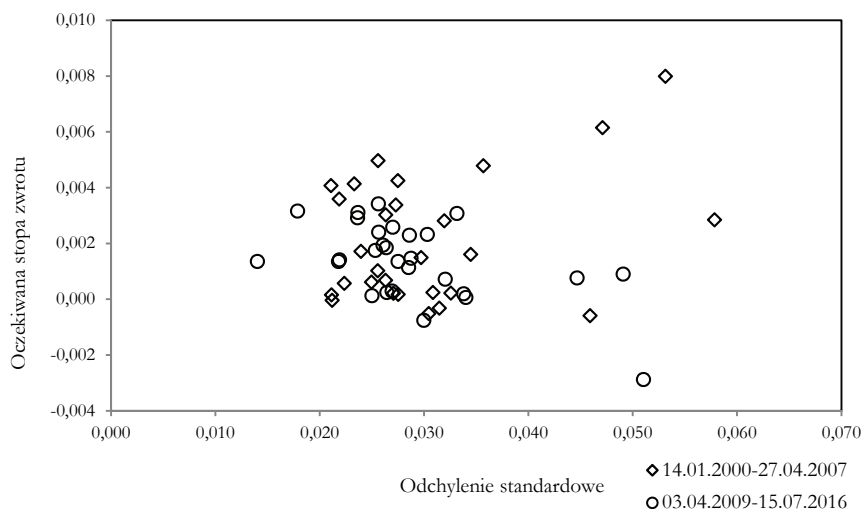
\* W nawiasach kwadratowych podano wartości prawdopodobieństwa  $p$ .

Źródło: obliczenia własne.

We wszystkich przypadkach oczekiwane stopy zwrotu przyjmowały wartości zbliżone do zera, a odchylenia standardowe wielokrotnie przekraczały ich wartości bezwzględne. Dodatkowo, można zauważyć, że rozproszenie wartości tych dwóch statystyk zarówno w obrębie każdej z prób, jak i pomiędzy próbami nie jest zaniedbywalne (rysunek 1.). W takiej sytuacji jest wskazana standaryzacja zmiennych. Jeżeli bowiem odchylenia standardowe zmiennych różnią się istotnie, to niektóre zmienne mogą zdominować wyznaczone odległości [Martinez, Martinez, Solka, 2005, s. 22].

## RYSUNEK 1.

**Rozkład odchylenia standardowego i oczekiwanej stopy zwrotu analizowanych indeksów w okresach przed kryzysem (14.01.2000- 27.04.2007) oraz po kryzysie (03.04.2009-15.07.2016)**



Źródło: opracowanie własne.

W każdej próbie rozkłady stóp zwrotu 23 spośród 28 analizowanych indeksów charakteryzowała ujemna asymetria. We wszystkich przypadkach rozkłady te były leptokurtyczne. Należy również zwrócić uwagę na wyniki testu Doornika-Hansena [Doornik, Hansen, 2008], które wskazują na to, że na poziomie istotności 0,05 w żadnym z rozważanych przypadków rozkładu stóp zwrotu nie można było uznać za normalny. W związku z tym, w dalszej części pracy do pomiaru podobieństwa indeksów wykorzystano odległość euklidesową, co nie wymagało przyjęcia żadnych dodatkowych założeń.

## 5. Struktura hierarchiczna rynków – wyniki badań

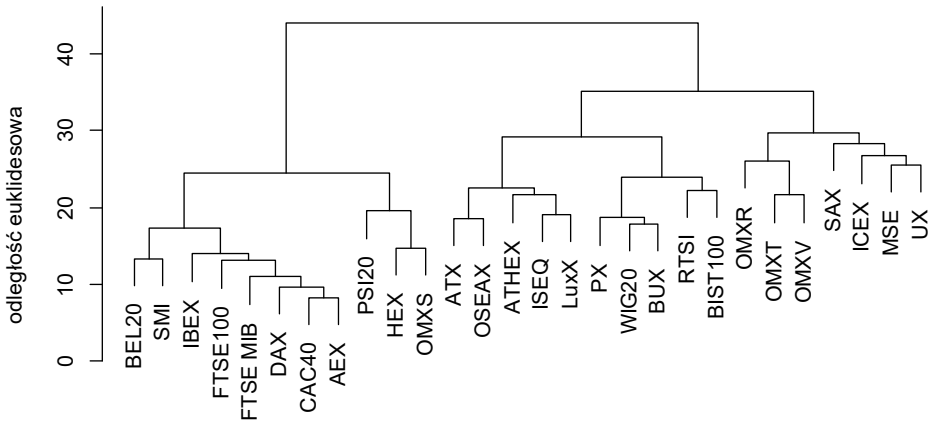
Przystępując do badania struktury rynków w obu próbach, zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, dokonano standaryzacji obserwacji według wzoru (2). Pozwoliło to uniknąć wpływu na uzyskane wyniki efektu skali i rozproszenia. Następnie wyznaczono odległości euklidesowe między indeksami.

Grupowanie rynków przeprowadzono najpierw metodą Warda. Dendrogram<sup>2</sup> otrzymany w próbie I (przed kryzysem) przedstawia rysunek 2.

<sup>2</sup> Wszystkie prezentowane dendrogramy uzyskano z wykorzystaniem pakietu R.

## RYSUNEK 2.

**Drzewo hierarchiczne uzyskane metodą Warda w próbie I  
(14.01.2000-27.04.2007)**



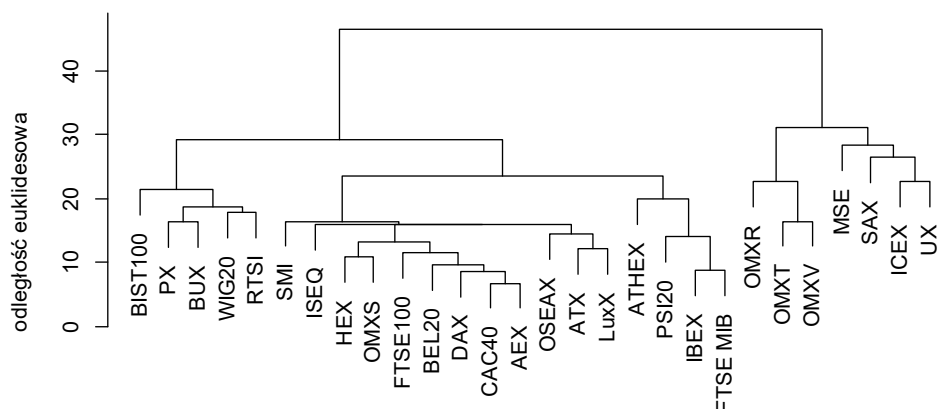
Źródło: opracowanie własne.

W uzyskanej strukturze można wskazać dwa zasadnicze skupienia. Pierwsze składało się z 11 indeksów. Są to: BEL20, SMI, IBEX, FTSE100, FTSEMIB, DAX, CAC40, AEX, PSI20, HEX i OMXS. Znalazły się tu rynki największe (francuski, niemiecki, brytyjski), jak również mniejsze (np. portugalski). Najbardziej podobne w tej grupie okazały się indeksy: francuski (CAC40) oraz holenderski (AEX). Pozostałe 17 indeksów tworzyły drugi klaster, w którym najmniej różnił się WIG20 i BUX. W tym skupieniu znalazły się m.in.: indeksy rynków wschodzących Europy Środkowej i Wschodniej (WIG20, PX, BUX, SAX, OMXV, OMXR, OMXT), a także rynków: rosyjskiego, tureckiego czy ukraińskiego. Odległości pomiędzy poszczególnymi indeksami i ich grupami w tym klastrze były większe niż w klastrze pierwszym, co oznacza, że skupiał on te rynki, które były słabiej ze sobą powiązane.

W strukturze uzyskanej w próbie przed kryzysem można również wskazać mniejsze (charakterystyczne) grupy indeksów podobnych, jak choćby: PX, WIG20 i BUX; RTSI i BIST100 czy OMXR, OMXT i OMXV.

W dalszej kolejności dokonano aglomeracji rynków w okresie po globalnym kryzysie finansowym (próba II). Jej wyniki przedstawia rysunek 3.

## RYSUNEK 3.

Drzewo hierarchiczne uzyskane metodą Warda w próbie II  
(03.04.2009-15.07.2016)

Źródło: opracowanie własne.

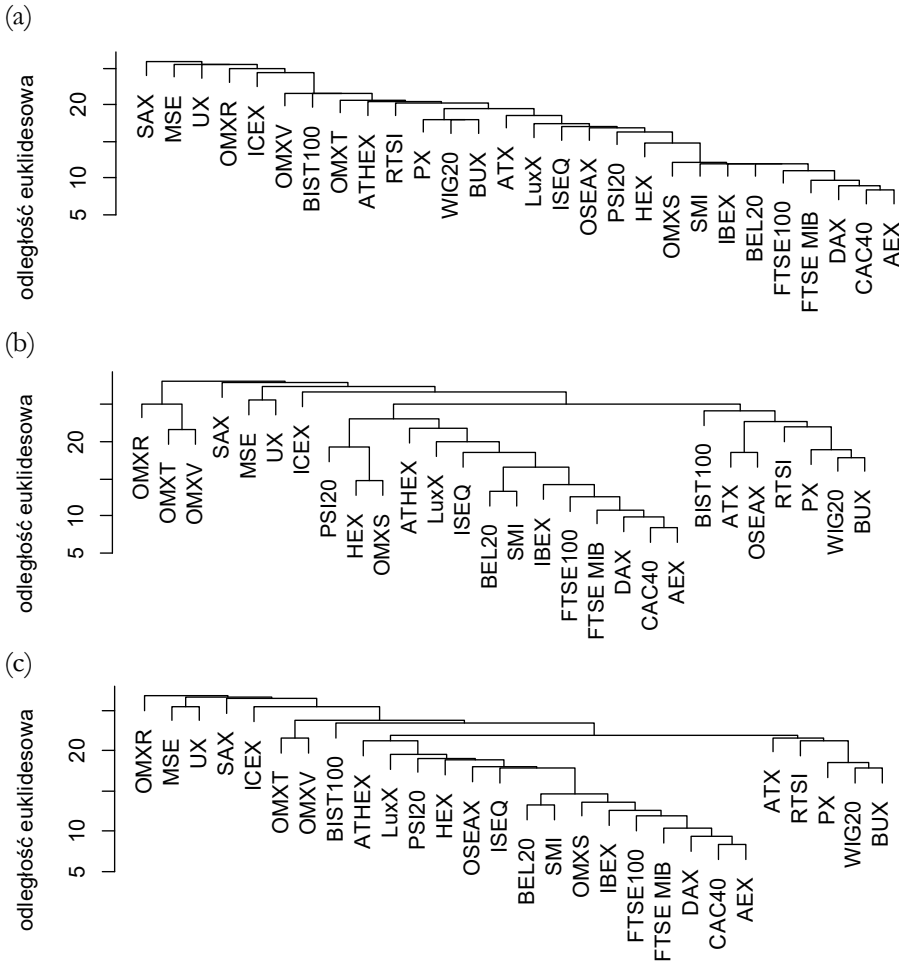
Jak widać, struktura ta różni się od uzyskanej w okresie przed kryzysem. W tym przypadku pierwszy z dwóch zasadniczych klastrow zawierał 21 indeksów, natomiast w drugim pozostało ich tylko 7 (OMXR, OMXT, OMXV, MSE, SAX, ICEX, UX). Pozostałych 10 rynków po okresie kryzysu okazało się być silniej związanymi z grupą zawierającą rynki największe. W tym skupieniu najbardziej podobnymi pozostały CAC40 i AEX, zaś w klastrze drugim OMXT i OMXV. W próbie II można także wskazać grupy rynków podobnych, wśród których ponownie znalazły się np.: czeski, polski i węgierski czy też rynki bałtyckie (litewski, lotewski i estoński). Natomiast warto zwrócić uwagę na skupienie zawierające: ATHEX, PSI20, IBEX, FTSEMIB. Jest to grupa, która wyraźnie wyodrębniła się po okresie kryzysu globalnego. Tworzyły ją indeksy rynków, które jako jedne z pierwszych zostały dotknięte europejskim kryzysem zadłużenia. Pierwsze jego symptomy pojawiły się w gospodarce greckiej już pod koniec 2009 roku, by następnie objąć rynki: Portugalii, Włoch czy Irlandii i w rezultacie, w roku 2010 już niemal cała Europa odczuła kolejny kryzys [Katsimi, Moutos, 2010; Moro, 2014].

Porównując strukturę rynków w próbach przed i po kryzysie, można również zauważyć, że niektóre indeksy wykazujące znaczne podobieństwo w próbie I (np.: HEX i PSI20, LuxX i ISEQ), w próbie II oddaliły się od siebie, co oznacza, że ich powiązania osłabły.

Jednocześnie w dalszej kolejności dokonano aglomeracji rynków w obu próbach metodami: pojedynczego, pełnego i średniego wiązania. Uzyskane dendrogramy przedstawiają rysunki: 4. i 5.

## RYSUNEK 4.

Drzewa hierarchiczne uzyskane metodą: (a) pojedynczego wiązania, (b) pełnego wiązania, (c) średniego wiązania w próbie I (14.01.2000-27.04.2007)



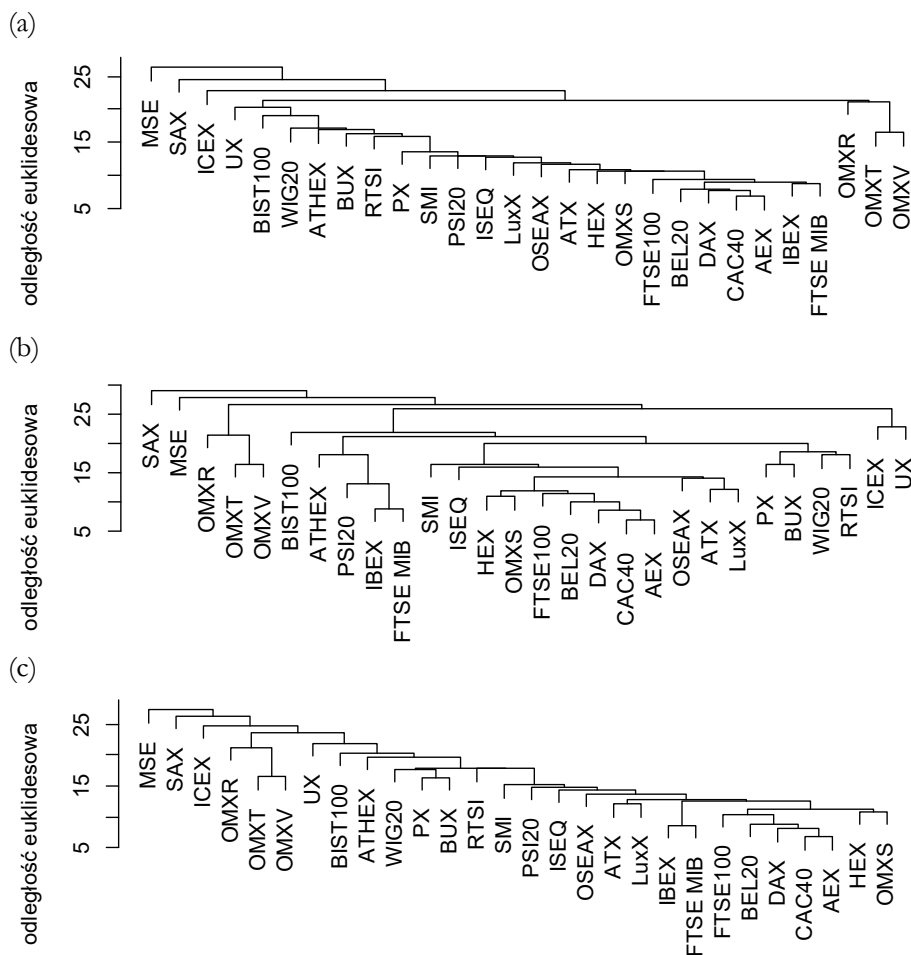
Źródło: opracowanie własne.

Drzewa uzyskane tymi metodami są oczywiście różne od prezentowanych wcześniej, jednak nie pozostają z nimi w sprzeczności. Na przykład można zauważyć pewne charakterystyczne skupienia, pojawiające się niezależnie od zastosowanej metody. W próbie przed kryzysem grupę taką tworzą np.: PX, WIG20 i BUX czy też MSE i UX. Analogicznie „trwałą” grupę tworzą: AEX, CAC40, DAX, FTSEMIB i FTSE100. Natomiast w próbie II, niezależnie od zastosowanej metody, jeden klaster tworzą: OMXV, OMXT i OMXR oraz OMXS i HEX. Można to uznać za potwierdzenie istotnego podobieństwa tych rynków.



## RYSUNEK 5.

Drzewa hierarchiczne uzyskane metodą: (a) pojedynczego wiązania, (b) pełnego wiązania, (c) średniego wiązania w próbie II (03.04.2009-15.07.2016)



Źródło: opracowanie własne.

## 6. Podsumowanie

W pracy przedstawiono wyniki zastosowania hierarchicznych metod aglomeracyjnych do zbadania struktury europejskich rynków kapitałowych oraz wpływu na tę strukturę kryzysu finansowego lat 2007-2009. Analizie poddano indeksy główne 28 giełd europejskich w okresie od stycznia 2000 do lipca 2016 roku, przy czym wykluczono okres największej zmienności rynków związany z globalnym kryzysem finansowym.

Uzyskane wyniki wskazują na to, że ogólna struktura rynków europejskich uległa zmianie pod wpływem globalnego kryzysu finansowego z lat 2007-2009. Do pierwszego klastra, skupiającego przed kryzysem 11 najsilniej powiązanych rynków, po okresie kryzysu dołączyło 10 kolejnych. Oznacza to, że okres kryzysu wzmocnił powiązania pomiędzy większością rynków. Po jego zakończeniu odrębną grupę stanowiły jedynie indeksy: krajów bałtyckich, Słowacji, Islandii, Ukrainy i Malty. Ponadto, na uwagę zasługuje wyodrębnienie się po okresie kryzysu grupy skupiającej takie rynki jak: grecki, portugalski, hiszpański i włoski, które wcześniej należały do różnych (mniejszych) skupień, a z kolei w kolejnych miesiącach jako pierwsze zostały dotknięte europejskim kryzysem zadłużenia. Można więc przypuszczać, że wzmocnienie powiązań pomiędzy niektórymi rynkami w okresie po zakończeniu globalnego kryzysu finansowego z lat 2007-2009 mogło przyczynić się do szybszego rozprzestrzenienia się kolejnej fali kryzysu w latach 2009-2010.

Jednocześnie w badanej strukturze rynków były widoczne takie powiązania (zarówno w grupie rynków rozwiniętych, jak i rozwijających się), które pozostały niezmiennie w obu analizowanych próbach: przed kryzysem i po kryzysie. Dotyczyło to np.: rynków bałtyckich (Litwa, Łotwa, Estonia), rosyjskiego i tureckiego, polskiego i węgierskiego czy też niemieckiego, francuskiego i belgijskiego. Można tu dopatrywać się wpływu czynników geograficznych, na których istotne znaczenie zwróciło uwagę wielu autorów [np.: Bonanno i in. 2004; Coelho i in. 2007; Eryigit, Eryigit, 2009; Leon i in. 2016; Sandoval, 2013]. Jednak czynniki geograficzne należy rozumieć w szerokim sensie, włączając w nie (obok sąsiedztwa geograficznego) podobieństwa kulturowe (np. wspólny język), ekonomiczne (np.: alokacja zasobów naturalnych, wymiana handlowa, współpraca inwestycyjna) i polityczne.

Otwarte pozostaje pytanie, czy europejski kryzys zadłużenia, który od 2010 roku objął niemal całą Europę, spowodował kolejne zmiany w strukturze rynków. Kwestia ta będzie przedmiotem dalszych badań.

## Literatura

- Bonanno G., Caldarelli G., Lillo F., Miccichè S., Vandewalle N., Mantegna R.N., 2004, *Networks of equities in financial markets*, „The European Physical Journal B”, no. 38, DOI: 10.1140/epjb/e2004-00129-6.
- Brida J.G., Riso W.A., 2008, *Multidimensional minimal spanning tree: The Dow Jones case*, „Physica A”, no. 387, DOI: 10.1016/j.physa.2008.05.009.
- Calinski T., Harabasz J., 1974, *A dendrite method for cluster analysis*, „Communications in Statistics”, 3:1, DOI: 10.1080/03610927408827101.
- Coelho R., Gilmore C.G., Lucey B., Richmond P., Hutzler S., 2007, *The evolution of interdependence in world equity markets – evidence from minimum spanning trees*, „Physica A”, no. 376, DOI: 10.1016/j.physa.2006.10.045.

- Doornik J.A., Hansen H., 2008, *An omnibus test for univariate and multivariate normality*, "Oxford Bulletin of Economics and Statistics", no. 70, Supplement 1, DOI: 10.1111/j.1468-0084.2008.00537.
- Eryiğit M., Eryiğit R., 2009, *Network structure of cross-correlations among the world market indices*, "Physica A", no. 388, DOI: 10.1016/j.physa.2009.04.028.
- Everitt B.S., Landau S., Leese M., Stahl D., 2011, *Cluster analysis*, Wiley, Chichester.
- Ferreira L., Hitchcock D.B., 2009, *A comparison of hierarchical methods for clustering functional data*, "Communications in Statistics – Simulation and Computation", no. 38(9), DOI: 10.1080/03610910903168603.
- Forbes K., Rigobon R., 2002, *No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements*, "The Journal of Finance", no. 57 (5), DOI:10.1111/0022-1082.00494.
- Gilmore C.G., Lucey B.M., Boscia M., 2008, *An ever-closer union? Examining the evolution of linkages of European equity markets via minimum spanning trees*, "Physica A", no. 387, DOI: 10.1016/j.physa.2010.06.057.
- Hossen B., Siraj-Ud-Douhah, Hoque A., 2015, *Methods for evaluating agglomerative hierarchical clustering for gene expression data: a comparative study*, "Computational Biology and Bioinformatics", no. 3(6), DOI: 10.11648/j.cbb.20150306.12.
- Katsimi, M., Moutos, T., 2010, *EMU and the Greek crisis: The political-economy perspective*, "European Journal of Political Economy", no. 26, DOI: 10.1016/j.ejpoleco.2010.08.002.
- Kolenda M., 2006, *Taksonomia numeryczna. Klasyfikacja, porządkowanie i analiza obiektów wielocebowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław.
- Leon C., Kim G.-Y., Martinez C., Lee D., 2016, *Equity markets' clustering and the global financial crises*, "Borradores de Economía", no. 937.
- Majewska E., 2017, *Okresy kryzysu na rynkach strefy euro w latach 2004-2016*, „Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia”, nr 85(1), DOI: 10.18276/frfu.2017.1.85-29.
- Mantegna R.N., 1999, *Hierarchical structure in financial markets*, „The European Physical Journal B”, no. 11.
- Martinez W.L., Martinez A.R., Solka J.L., 2005, *Exploratory data analysis with Matlab*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Moro B., 2014, *Lessons from the European economic and financial great crisis: A survey*, "European Journal of Political Economy", no. 34, DOI: 10.1016/j.ejpoleco.2013.08.005.
- Olbrys J., Majewska E., 2014, *The 2007-2009 financial crisis on emerging markets: Quantitative identification of crisis in continent-based regions*, "Chinese Business Review", no. 13(7).
- Olbrys J., Majewska E., 2015, *Bear market periods during the 2007-2009 financial crisis: Direct evidence from the Visegrad countries*, "Acta Oeconomica", no. 65(4), DOI: 10.1556/032.65.2015.4.3.
- Onnela J.-P., Chakraborti A., Kaski K., Kertész J., Kanto A., 2003, *Asset trees and asset graphs in financial markets*, "Physica Scripta", vol. T106, DOI: 10.1238/Physica.Topical.106a00048.
- Panton D.B., Lessing P., Joy O.M., 1976, *Comovement of international equity markets: a taxonomic approach*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis", no. 11(5).

- Sandoval L., 2012, *Pruning a minimum spanning tree*, “Physica A”, no. 391, DOI: 10.1016/j.physa.2011.12.052.
- Sandoval L., 2013, *Cluster formation and evolution in networks of financial market indices*, “Algorithmic Finance”, no. 2, DOI: 10.3233/AF-13015.
- Ward J.H., 1963, *Hierarchical grouping to optimize an objective function*, “Journal of the American Statistical Association”, no. 58(301).

**Helena GASPARS-WIELOCH, Ph.D.**

Faculty of Informatics and Electronic Economy, Poznań University of Economics and Business  
e-mail: helena.gaspars@ue.poznan.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.06

## A DECISION RULE FOR UNCERTAIN MULTI-CRITERIA PURE DECISION MAKING AND INDEPENDENT CRITERIA<sup>1</sup>

### Summary

The paper is concerned with multi-criteria decision-making under uncertainty with scenario planning. This topic has been explored by many researchers since almost all real-world decision problems contain multiple conflicting criteria and a deterministic evaluation of criteria is often impossible. We propose a procedure for uncertain multi-objective optimization which can be applied when seeking a pure strategy. A pure strategy, as opposed to a mixed strategy, allows the decision-maker to select and perform only one accessible alternative. The new approach takes into account the decision-maker's preference structure (importance of particular goals) and nature (pessimistic, moderate or optimistic attitude towards a given problem). It is designed for one-shot decisions made under uncertainty with unknown probabilities (frequencies), see decision-making under complete uncertainty or decision-making under strategic uncertainty. The novel approach can be used in the case of totally independent payoff matrices for particular targets.

**Keywords:** uncertainty, multi-criteria decision-making, pure strategies, one-shot decisions, independent criteria, two-stage models.

**JEL:** C44, D81, L21.

### 1. Introduction

Multiple criteria decision-making with uncertain attribute (criterion) evaluations has been theoretically and practically investigated by many researchers since usually real decision problems contain numerous conflicting criteria and a deterministic evaluation of criteria is often impossible. [Durbach and Stewart 2012] prepared an impressive review of possible models, methods and tools supporting uncertain multi-criteria decision-making (e.g. models with explicit risk measures, models with scenarios, models with fuzzy numbers, models using probabilities or probability-like quantities) [Gaspars-Wieloch, 2015c]. In this paper we propose a method designed for multi-criteria decision-making with scenario planning and one-shot decision problems (we assume that

---

<sup>1</sup> This research is financed by the National Science Center in Poland (project registration number: 2014/15/D/HS4/00771).

after the realization of a selected alternative the decision-maker may change his/her preferences – thus, multi-shot decisions are not considered). We analyze the case of games against nature (not games with other players). We assume that criteria payoff matrices are independent and that, within each criterion, payoffs connected with a given decision constitute sequences of outcomes (not sets of outcomes). We will refer to a multi-criteria two-stage model. The target of the new approach is to select an optimal pure strategy, which means that only one alternative is selected and performed. The procedure takes into consideration decision-makers' objective preferences and their attitude towards the risk connected with a given problem. This attitude is measured by the coefficient of optimism on the basis of which a set of events having the biggest subjective chance of occurrence (separately for each payoff matrix) is suggested. Such an approach allows us to reduce the quantity of data considered in the final decision selection.

The paper is organized as follows. Section 2 deals with the main features of MDMU (multi-criteria decision-making under uncertainty), scenario planning, 1-stage and 2-stage models. Section 3 presents a procedure that can be used as a tool in multi-criteria optimization under uncertainty for pure strategies and independent payoff matrices. Section 4 provides a case study on the basis of the bi-criteria single-period newsvendor problem. Conclusions are gathered in the last Section. The paper is a continuation of several articles, where uncertain one-criterion procedures [Gaspars-Wieloch, 2007; 2014a; 2014c; 2015b; 2016b] and multi-criteria decision rules [Gaspars-Wieloch, 2014d; 2015c; 2015d; 2017] are investigated.

## **2. How to combine criteria with scenarios in uncertain multi-criteria decision making when criteria are independent?**

The necessity to solve decision problems with uncertain parameters led to the development of many diverse theories [Zio, Pedroni, 2013], e.g. probability theory [Kolmogorov, 1933], possibility theory [Zadeh, 1978; Dubois, Prade, 2001], imprecise (interval) probability [Walley, 1991], uncertainty theory [Liu, 2007; 2009], credibility theory, evidence theory [Shafer, 1976; Sentz, Ferson, 2002]. Nevertheless, it is worth emphasizing that there is no unanimity in defining the notion of uncertainty and that there are many types of uncertainty. The three next paragraphs are prepared on the basis of [Gaspars-Wieloch, 2016a; 2017].

According to the theory of decision the decision-maker (DM) may choose the appropriate alternative (decision, strategy, variant) under certainty (DMC – parameters are deterministic), under risk (DMR – possible scenarios and their likelihood are known), with partial information (DMPI – possible states of nature are known, but their probability is not completely known), under complete uncertainty (DMCU – scenarios are known, but not the probability of their occurrence) or under total ignorance (DMTI – the DM is not able to define possible events). Note that DMCU may also occur when the DM does not want to make use of the estimated probability distribution [Trzaskalik, 2008]. Comments concerning particular decision-making circumstances can be found for instance in [Guo, 2011; Kaplan, Barish, 1967; Knight, 1921; Perez et al., 2015; Render et al., 2006;

Sikora, 2008; Waters, 2011; Weber, 1987]. Uncertainty and risk were formally integrated in economic theory by [von Neuman and Morgenstern 1944].

Supporters of the theory of economics state that uncertainty involves all situations with non-deterministic parameters (known, unknown or incompletely known probability distribution, lack of information about possible scenarios), while risk is related to the possibility that some bad (or other than predicted) circumstances will happen [Dominiak, 2009; Dubois, Prade, 2012; Fishburn, 1984; Gaspars-Wieloch, 2016a; Guney, Newell, 2015; Ogryczak, Sliwinski, 2009; Waters, 2011]. Note that in some cases the exact probability computation may be difficult due to: 1) the existence of diverse definitions of probability [Carnap, 1950; De Finetti, 1975; Frechet, 1938; Hau et al., 2009; Knight, 1921; Kolmogorov, 1933; Piegat, 2010; Popper, 1959; Ramsey, 1931; Van Lambalgen, 1996; Von Mises, 1949; Von Mises, 1957], 2) the lack of historical data (for totally new decisions and events) [Gaspars-Wieloch, 2016a; Guo, 2011; Guo, Ma, 2014], 3) the lack of sufficient knowledge about particular states or 4) the fact that the set of possible scenarios forecasted by experts in the scenario planning stage does not satisfy probability axioms (the sum of state probabilities should be equal to 1, the whole sample space must be precisely defined), see [Kolmogorov, 1933]. Caplan [2001] states that sometimes people may be even unable to declare subjective probabilities, but they implicitly set the likelihood in acting. Nevertheless, within the theory of economics, even if the probability is not known, some probability-like quantities can often be estimated and applied. Hence, uncertainty, in many cases, can be measured and quantified somehow [Piasecki, 2016].

Besides two aforementioned approaches, it is worth mentioning the Austrian Economic School which treats uncertainty as do decision theorists, i.e. as a situation where the likelihood is not known. Additionally, it is assumed that the mathematical probability of the occurrence of a given scenario is not known as probabilities only concern repetitive events, meanwhile in the majority of real problems the DM deals with non-repetitive events. According to [Von Mises, 1949], the theory of probability can never lead to a definite statement concerning a single event (the probability of a single event cannot be presented numerically). Uncertainty is not caused by the randomness of events (as held by mainstream economists) but is due to numerous factors, of which only some are known in the decision-making process [Gaspars-Wieloch, 2017].

Note that scientists distinguish two main types of uncertainty: the epistemic (reducible) uncertainty – due to the lack of knowledge (it can be reduced or eliminated after collecting information), and the aleatory (aleatoric, random) uncertainty – due to the inherent variability in a physical phenomenon (it cannot be reduced even after conducting  $n$  experiments) [Stirling, 2003; Zio, Pedroni, 2013].

In this paper we consider both epistemic and aleatory uncertainty, which leads us to a conclusion that the likelihood of the occurrence of particular states of nature cannot be estimated in an accurate way (the aleatory uncertainty is not reducible). Additionally, in connection with the fact that the contribution concerns only one-shot decisions, we refer in a sense to the Austrian approach where the probability understood as frequency cannot be computed for a single event. The theory of economics is also partially applied

in this research since unknown probabilities are replaced with some secondary probability-like quantities.

It is worth adding that, as a matter of fact, scientists declare different opinions concerning the role of probability in scenario planning (SP). Some of them state that the likelihood should not be applied to SP [Michnik, 2013]. Others are convinced that there are many advantages of using probabilities in SP [Millett, 2009].

The notion “uncertainty” has been just briefly discussed. Now, let us analyze possible ways of inserting uncertainty in multi-criteria decision-making. Many classical and extended decision rules designed for pure or mixed MDMU (multi-criteria decision-making under uncertainty) have been already developed, e.g. [Aghdaie et al., 2013; Ben Amor et al., 2007; Dominiak, 2006; 2009; Durbach, 2014; Eiselt, Marianov, 2014; Gaspars-Wieloch, 2014d; 2015c; 2015d; 2017; Ginevičius, Zubrecovas, 2009; Goodwin, Wright, 2001; Hopfe et al., 2013; Janjic et al., 2013; Korhonen, 2001; Lee, 2012; Liu et al., 2011; Lo, Michnik, 2010; Michnik, 2013; Mikhaidov, Tsvetnikov, 2004; Montibeller et al., 2006; Ram et al., 2010; Ramik et al., 2008; Ravindran, 2008; Silva, 2016; Stewart, 2005; Suo et al., 2012; Troutt, Pettypool, 1989; Tsauro et al., 2002; Urli, Nadeau, 2004; Wojewnik, Szapiro, 2010; Xu, 2000; Yu, 2002]. Some of them can be applied when the DM intends to perform the selected alternative only once (one-shot decisions). Others are recommended for people considering multiple realizations of the chosen variant (multi-shot decisions). In the aforementioned contributions diverse tools connected with uncertainty are used, e.g. probabilities, belief functions, fuzzy membership functions. However [Durbach, Stewart, 2012] underline that uncertainties become increasingly so complex that the elicitation of such measures becomes operationally difficult for DMs to comprehend and virtually impossible to validate. Therefore, in their opinion, it is useful to construct scenarios which describe possible ways in which the future might unfold and to combine MDMU with SP (scenario planning). And then, the result of the choice made under uncertainty with scenario planning depends on two factors: which decision will be chosen and which state of nature will occur [Gaspars-Wieloch, 2015c].

According to [Durbach, Stewart, 2012; Michnik, 2013] MDMU+SP models can be divided into two classes (the description below has been prepared on the basis of [Gaspars-Wieloch, 2014d; 2015c; 2015d; 2017]). The first one (A) includes 2-stage models in which evaluations of particular alternatives are estimated in respect of scenarios and criteria in two separate stages. Class A contains two subclasses: A-CS and A-SC. Subclass A-CS denotes the set of approaches considering decisions separately in each scenario and setting a  $n \times m$  table ( $n$  – number of decisions,  $m$  – number of scenarios) giving the aggregated (over attributes/criteria) performance of alternative  $D_j$  under scenario  $S_i$ . These evaluations are then aggregated over scenarios. In subclass A-SC the order of aggregation is reversed – performances are generated across scenarios and measures are then calculated over criteria. The second class (B) consists of one-stage procedures considering all combinations of scenarios and attributes (scenario-criterion pairs) as distinct meta-criteria and using a chosen multiple criteria approach for the transformed meta-matrix. There is currently no consensus on the best way to solve uncertain multi-goal problems [Durbach and Stewart 2012]. Let us emphasize that subclass A-CS



may be only applied to dependent payoff matrices. Hence, the number of events ought to be the same for each criterion considered in the decision problem and evaluation  $a_{ij}^k$  can only be connected with evaluations  $a_{ij}^1, \dots, a_{ij}^{k-1}, a_{ij}^{k+1}, \dots, a_{ij}^p$  and  $a_{ij}^p$  (those values describe the performance of each criterion by decision  $D_j$  provided that scenario  $S_i$  happens) where  $p$  is the number of criteria. On the other hand, subclass A-SC should merely be used for independent payoff matrices, which means that this time there is no relationship between criteria. The performance of particular targets can be analyzed totally separately since the number of states of nature can be different for each goal  $(m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_p)$ . In the second case, evaluation  $a_{ij}^k$  might be connected with any evaluation  $a_{ij}^1$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ), any evaluation  $a_{ij}^2$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ), ... and any evaluation  $a_{ij}^p$  ( $i = 1, \dots, m_p$ ). Those values describe the performance of each criterion by decision  $D_j$  assuming that any scenario occurs for criteria  $C_1, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}, \dots, C_p$ . One-stage models (i.e. class B) are also designed for independent payoff matrices.

Subclass A-SC from two-stage models, combined simultaneously with uncertain multi-criteria pure decision-making, games against nature, probability-like quantities, scenario forecasting stage and independent criteria, hasn't so far been analyzed in the literature. Nevertheless, we would like to investigate this topic, since it gives us the possibility to elaborate a procedure focusing on events having the biggest subjective chance of occurrence. Note that the set of aforementioned scenarios will not be directly predicted by the DM – it will be indirectly generated on the basis of his/her coefficient of optimism.

### 3. Procedure for MDMU+SP, pure strategies and independent criteria

The discrete version (i.e. the set of alternatives is explicitly defined and discrete) of MDMU+SP with independent payoff matrices consists of  $n$  decisions ( $D_1, \dots, D_j, \dots, D_n$ ), each evaluated on  $p$  criteria ( $C_1, \dots, C_k, \dots, C_p$ ) and  $m_k$  mutually exclusive scenarios ( $S^{k_1}, \dots, S^{k_i}, \dots, S^{k_{m_k}}$ ) where  $k = 1, \dots, p$ . The problem can be presented by means of  $p$  payoff matrices (one for each criterion) and  $n \times (m_1 + \dots + m_k + \dots + m_p)$  evaluations. Each payoff matrix contains  $n \times m_k$  evaluations, say  $a_{ij}^k$ , which denotes the performance of criterion  $C_k$  resulting from the choice of decision  $D_j$  and the occurrence of scenario  $S^{k_i}$ . We assume that the distribution of payoffs related to a given decision is discrete.

Instead of using probabilities, we will apply here the coefficients of optimism ( $\beta$ ) and pessimism ( $\alpha$ ). They allow us to take into account the DM's nature (attitude towards a given problem) and to generate some secondary probability-like quantities. These parameters belong to interval  $[0,1]$  and satisfy the condition  $\alpha + \beta = 1$ , where  $\alpha$  ( $\beta$ ) tends to 0 (1) for extreme optimists (risk-prone behavior) and is close to 1 (0) for radical pessimists (risk-averse behavior). The coefficients of pessimism and optimism have been already used in decision rules suggested for instance by [Gaspars-Wieloch, 2014b; 2015a; Hurwicz, 1952; Perez et al., 2015].

The procedure presented in this Section considers DM's preferences (criteria weights) and suppositions (optimism/pessimism level, indirect choice of the scenarios with the biggest subjective chance of occurrence).

The suggested method (based on subclass A-SC) consists of the following steps:  
 1) Given a set of potential decisions and payoff matrices for each criterion, define an appropriate value of parameter  $\beta \in [0,1]$  according to your level of optimism, and choose weights  $w^k$  for each attribute ( $k=1, \dots, p$ ). The weights ought to describe the importance of each target and should satisfy Equation (1):

$$\sum_{k=1}^p w^k = 1 \quad (1)$$

2) If necessary (i.e. when criteria are presented in different scales or units), normalize the evaluations (use Equation (2) for maximized criteria and Equation (3) for minimized criteria) separately within each payoff matrix:

$$a(n)_{ij}^k = \frac{a_{ij}^k - \min_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\}}{\max_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\} - \min_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\}} \quad i = 1, \dots, m_k; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p \quad (2)$$

$$a(n)_{ij}^k = \frac{\max_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\} - a_{ij}^k}{\max_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\} - \min_{i=1, \dots, m} \{a_{ij}^k\}} \quad i = 1, \dots, m_k; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p \quad (3)$$

where  $a(n)_{ij}^k$  denotes the normalized evaluation of  $a_{ij}^k$ . Expressions  $\max\{a_{ij}^k\}$  and  $\min\{a_{ij}^k\}$  signify the highest and the lowest evaluation of criterion  $C_k$  in payoff matrix related to this attribute.

3) Compute the sum of cumulative relative profits ( $p(r)^k_i$ ) for each scenario (separately for each criterion).

$$p(r)_i^k = \sum_{j=1}^n p(r)_{ij}^k \quad i = 1, \dots, m_k; k = 1, \dots, p \quad (4)$$

$$p(r)_{ij}^k = m_k \cdot a(n)_{ij}^k - \sum_{i=1}^{m_k} a(n)_{ij}^k \quad i = 1, \dots, m_k; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p \quad (5)$$

This step allows identifying scenarios that are relatively better than others. In the contribution, the dominance is measured by means of the distance between particular evaluations related to a given scenario and all corresponding values connected consecutive decisions. The method presented above is just a suggestion. The status of each event may be estimated in a different way.

4) Choose the set of scenarios with the biggest chance of occurrence for each criterion separately:

- a) If there exists at least one scenario for which the sum of relative profits is exactly equal to the value given by Equation (6), the set of events with the biggest chance of occurrence ( $S^{k*}$ ) contains all such states of nature (the number of scenarios belonging to that set is denoted by  $m_{k*}$ ). Go to step 5a.

$$p(r)_{\beta}^{\kappa} = \beta \cdot (p(r)_{\max}^{\kappa} - p(r)_{\min}^{\kappa}) + p(r)_{\min}^{\kappa} \quad \kappa = 1, \dots, p \quad (6)$$

$$p(r)_{\max}^{\kappa} = \max_i \{p(r)_i^{\kappa}\} \quad \kappa = 1, \dots, p \quad (7)$$

$$p(r)_{\min}^{\kappa} = \min_i \{p(r)_i^{\kappa}\} \quad \kappa = 1, \dots, p \quad (8)$$

- b) If there is no scenario fulfilling Equation (6), find all events  $S^{\kappa, \beta}_{\min}$  satisfying condition (9) – the set containing such states of nature is denoted by  $SS^{\kappa*}_{\min}$  and the cardinality of that set is defined by  $m^{\min}_{\kappa*}$ , and all events  $S^{\kappa, \beta}_{\max}$  satisfying condition (10) – the set containing such scenarios is denoted by  $SS^{\kappa*}_{\max}$  and its cardinality is defined by  $m^{\max}_{\kappa*}$ . All these states of nature constitute the set of scenarios with the biggest chance of occurrence (i.e.  $SS^{\kappa*}$ ):  $SS^{\kappa*}_{\min} \cup SS^{\kappa*}_{\max} = SS^{\kappa*}$ . Go to step 5b.

$$S^{\kappa, \beta}_{\min} = \arg \min_{S_i^{\kappa} | p(r)_i^{\kappa} < p(r)_{\beta}^{\kappa}} (p(r)_{\beta}^{\kappa} - p(r)_i^{\kappa}) \quad \kappa = 1, \dots, p \quad (9)$$

$$S^{\kappa, \beta}_{\max} = \arg \min_{S_i^{\kappa} | p(r)_i^{\kappa} > p(r)_{\beta}^{\kappa}} (p(r)_i^{\kappa} - p(r)_{\beta}^{\kappa}) \quad \kappa = 1, \dots, p \quad (10)$$

Hence, we see that the choice of scenarios with the biggest change of occurrence strictly depends on the level of  $\beta$ . We assume that the higher the value of  $\beta$ , the better scenarios (i.e. with higher sums of cumulative relative profits) should be treated as events reflecting the DM's nature. Step 4b involves situations where there is no event exactly fitting the level of the coefficient of optimism (according to Equation (6)). In such circumstances, one can for instance find scenarios for which the sum of cumulative relative profits is very close to the value indicated by Equation (6).

- 5) a) Calculate average values for each decision according to Equation (11), separately for each criterion.

$$v_j^{\kappa} = \frac{1}{m_{\kappa*}} \cdot \sum_{S_i^{\kappa} \in SS^{\kappa*}} a(n)_{ij}^{\kappa} \quad j = 1, \dots, n; \kappa = 1, \dots, p \quad (11)$$

- b) Calculate weighted values for each decision according to Equation (12), separately for each criterion.

$$v_j^{\kappa} = \frac{1}{m_{\kappa*}^{\max}} \cdot \sum_{S_i^{\kappa} \in SS^{\kappa*}_{\max}} a(n)_{ij}^{\kappa} \cdot \frac{p(r)_{\beta}^{\kappa} - p(r)_{\min}^{\kappa*}}{p(r)_{\max}^{\kappa*} - p(r)_{\min}^{\kappa*}} + \frac{1}{m_{\kappa*}^{\min}} \cdot \sum_{S_i^{\kappa} \in SS^{\kappa*}_{\min}} a(n)_{ij}^{\kappa} \cdot \frac{p(r)_{\max}^{\kappa*} - p(r)_{\beta}^{\kappa}}{p(r)_{\max}^{\kappa*} - p(r)_{\min}^{\kappa*}} \quad j = 1, \dots, n; \kappa = 1, \dots, p \quad (12)$$

In this step all evaluations connected with a given alternative and related to set  $SS^{\kappa*}$  are aggregated in order to generate only one index for each decision within each criterion. In step 5a the weight of each value is the same since all of them come from scenarios with the same level of the sum of cumulative relative profits. On the other hand, in step 5b weights for particular values may be different as the differences between sums of cumulative relative profits and the theoretical one (defined by Equation (6)) may

be diverse, depending on the scenario. The aggregation performed in step 5 completes the first stage of the 2-stage model.

- 6) Compute a weighted index for each decision across all criteria, using the SAW method (Simple Additive Weighting Method).

$$SAW_j = w^k \cdot v_j^k \quad j = 1, \dots, n \quad (13)$$

- 7) Choose the final pure strategy:

- a) Find the alternative fulfilling Equation (14).

$$D_{j^*} = \arg \max_j (SAW_j) \quad (14)$$

- b) If  $D_{j^*}$  satisfies condition (15) for the criterion with the highest weight  $w^k$ ,  $D_{j^*}$  is the optimal pure strategy.

$$\forall_{t \in \{1, 2, \dots, z_k\}} (a(n)_{t, j^*} \geq wald_{best}^k) \quad k | w^k = \max_k \{w^k\} \quad (15)$$

$$z_k = \lceil (1 - \beta) \cdot m_k \rceil = \lceil \alpha \cdot m_k \rceil \quad k | w^k = \max_k \{w^k\} \quad (16)$$

$$a(n)_{1, j^*} \geq \dots \geq a(n)_{t, j^*} \geq \dots \geq a_{z_k, j^*} \quad (17)$$

$$wald_j^k = \min_i \{a(n)_{ij}^k\} \quad j = 1, \dots, n; k | w^k = \max_k \{w^k\} \quad (18)$$

$$wald_{best}^k = \max_j \{wald_j^k\} \quad k | w^k = \max_k \{w^k\} \quad (19)$$

where  $z_k$  is the minimal number of scenarios for which normalized outcomes should be at least equal to  $wald_{best}^k$ . The last symbol denotes the highest value of Wald index for the criterion with the highest weight  $w^k$ .

- c) If  $D_{j^*}$  does not fulfill condition (15), find  $D_{j^{**}}$  satisfying Equation (20). Note that such a decision always exists.

$$(SAW_j \rightarrow \max) \wedge \left( \forall_{t \in \{1, 2, \dots, z_k\}} (a(n)_{t, j} \geq wald_{best}^k) \right) \quad k | w^k = \max_k \{w^k\} \quad (20)$$

Step 7 also requires additional explanations. As a matter of fact, we could have stopped the algorithm after step 7a. Nevertheless, the choice of the final alternative merely on the basis of Equation (14) may be unfair especially for moderate and radical pessimists who feel more safely when the procedure provides necessary securities. For a radical pessimist, Equations (15)-(20) guarantee that even if the worst scenario connected with the selected decision and the most important criterion occurs, the outcome related to this goal will not be lower than the Wald index computed for the aforementioned target. Similar securities, but to a lesser extent, are also guaranteed for other types of DMs (moderate pessimists, moderate optimists etc.).

Let us name the procedure presented above  $\beta$ -MPDM/2, i.e. a method referring to parameter  $\beta$ , designed for multi-criteria pure decision-making and based on two-stage models. The choice of the set of events having the biggest subjective chance of occurrence (step 4) results from the fact that in the case of one-shot decisions only one scenario (within each criterion) will finally occur in the future. The use of the SAW method in step 6 is just a suggestion. Other multi-criteria approaches are also possible [Trzaskalik, 2014; Wachowicz, 2015].

#### 4. Case study

The novel approach will be illustrated by means of an example concerning the bi-criteria single period newsvendor problem. The one-criterion problem is described, e.g. in [Gaspars-Wieloch, 2016a; Sikora, 2008]. The newsvendor problem (NP) has attracted a great deal of attention and played a central role at the conceptual foundations of stochastic inventory theory [Bieniek, 2016]. It was originally related to decision making under stochastic uncertainty where the demand is presented as a random variable with a known probability distribution. Nevertheless, NP has also been recently discussed in the context of decision making with partial information [Guo, 2011; Guo, Ma, 2014], where the DM is able to subjectively define possibility degrees and satisfaction levels (the probability distribution is not known completely). Additionally, according to [Besbes, Muharremoglu, 2013; Benzion et al., 2010; Gaspars-Wieloch, 2016a], the newsvendor theory should not assume that the DM faces a known distribution (known frequencies), since in real-life situations the demand distribution is not always known (e.g. for innovative products where there are no data available for forecasting the upcoming demand via statistical analysis).

Let us assume that the newsvendor intends to sell a totally new short-cycle product. He assumes that the quantity procured will be solely used to satisfy the demand during the current period. The demand for this product is not known in advance. He considers order ( $q$ ) and demand ( $D$ ) quantities between 1 and 5 boxes. Hence, there are 5 alternatives:  $A_1$  (1 box),  $A_2$  (2 boxes),  $A_3$  (3 boxes),  $A_4$  (4 boxes) and  $A_5$  (5 boxes). The unit production/purchase cost of 1 box ( $c_1$ ) equals 5, the selling price ( $c_2$ ) equals 10 and the discount price (price of leftover items)  $c_3=1$ , hence the unit profit from selling the product at price  $c_2$ :  $b=c_2-c_1=5$  and the unit loss from selling it at price  $c_3$ :  $s=c_1-c_3=4$ . The newsvendor maximizes the total profit (e.g. in thousands of Euros) resulting from buying and selling the new product (the 1<sup>st</sup> criterion depends on the demand – five possible scenarios) and minimizes the cost of supply (also in thousands of Euros, the 2<sup>nd</sup> criterion depends on the supplying, storage, weather conditions – three possible scenarios). Note that the total profit does not include the cost of supply and that is equal to  $b \times q$  (for  $q \leq D$ ) or  $b \times D - s \times (q - D)$  when  $q > D$ . Payoff matrices are given in Tables 1-2 (first value in each cell). The newsvendor intends to find an optimal pure strategy. Now, let us apply the procedure  $\beta$ -MPDM/2 for the aforementioned problem.

**TABLE 1.**

**Payoff matrix and normalized values (1st criterion)**

Crit. 1	$A_1 = 1$	$A_2 = 2$	$A_3 = 3$	$A_4 = 4$	$A_5 = 5$
$S^1_1 = 1$	5/0.44	1/0.33	-3/0.22	-7/0.11	-11/0.00
$S^1_2 = 2$	5/0.44	10/0.58	6/0.47	2/0.36	-2/0.25
$S^1_3 = 3$	5/0.44	10/0.58	15/0.72	11/0.61	7/0.50
$S^1_4 = 4$	5/0.44	10/0.58	15/0.72	20/0.86	16/0.75
$S^1_5 = 5$	5/0.44	10/0.58	15/0.72	20/0.86	25/1.00

Source: prepared by the author.

**TABLE 2.**

**Payoff matrix and normalized values (2nd criterion)**

Crit. 2	$A_1 = 1$	$A_2 = 2$	$A_3 = 3$	$A_4 = 4$	$A_5 = 5$
$S^2_1$	0.5/1.00	0.6/0.96	0.7/0.92	0.8/0.87	0.9/0.83
$S^2_2$	1/0.79	1.1/0.75	1.2/0.71	1.3/0.67	1.4/0.62
$S^2_3$	2/0.37	2.2/0.29	2.5/0.17	2.7/0.08	2.9/0.00

Source: prepared by the author.

First (step 1), we assume that the DM is a moderate optimist ( $\beta=0.7, a=0.3$ ) and that  $n^1=0.7, n^2=0.3$ . We normalize values (step 2) since they are expressed in different scales, see Tables 1-2 (second value in each cell). The sums of cumulative relative profits are given in Tables 3-4 (step 3). For example,  $p(r)^{1_{23}}=5 \cdot 0.47 - (0.22+0.47+0.72+0.72+0.72)=-0.50$  and  $p(r)^{1_2}=0.00+0.25-0.5-1.00-1.25=-2.50$ . Now, we are going to select scenarios with the biggest subjective chance of occurrence (step 4). Measures  $p(r)^{k_\beta}$  calculated for each criterion separately show the level of the sum of cumulative relative profits corresponding to the level of the DM's optimism:  $p(r)^1_\beta=0.7 \times (5.00 - (-7.50)) + (-7.50)=1.25$ ,  $p(r)^2_\beta=0.7 \times (4.71 - (-6.29)) + (-6.29)=1.41$ . In the case of the 1<sup>st</sup> criterion, index  $p(r)^{1_3}$  (i.e. for scenario  $S^1_3$ ) is exactly equal to  $p(r)^1_\beta$ . Hence,  $SS^1*=\{S^1_3\}$ . In the case of the 2<sup>nd</sup> criterion, there is no scenario for which index  $p(r)^2_i=p(r)^2_\beta$ . Thus, according to step 4b,  $SS^{2*}=SS^{2*}_{\min} \cup SS^{2*}_{\max}=\{S^2_3\} \cup \{S^2_2\}=\{S^2_2, S^2_3\}$ . Within step 5, we compute, for each decision, average values for criterion  $C_1$  (Equation 11):  $v^1_1=0.44, v^1_2=0.58, v^1_3=0.72, v^1_4=0.61, v^1_5=0.50$  where  $m_{1*}=1$ , and weighted values for criterion  $C_2$  (Equation 12):  $v^2_1=0.78, v^2_2=0.74, v^2_3=0.70, v^2_4=0.65, v^2_5=0.61$ , where  $m^{\max}_{2*}=1, m^{\min}_{2*}=1$  and  $p(r)^{2*}_{\max}=1.58, p(r)^{2*}_{\min}=-6.29$ . In step 6, SAW indices are calculated:  $SAW_1=0.7 \cdot 0.44 + 0.3 \cdot 0.78=0.55, SAW_2=0.63, SAW_3=0.71, SAW_4=0.62, SAW_5=0.53$ . According to Equation 14 (step 7), alternative  $A_3$  should be selected, but first, let us check whether for the most important criterion (i.e. the first one:  $n^1 > n^2$ ) an appropriate number of normalized outcomes (i.e. at least  $z_1 = \lceil (1 - 0.7) \cdot 5 \rceil = \lceil 0.3 \cdot 5 \rceil = 2$ ) connected with  $A_3$  exceeds the Wald index:  $wald^1_{best} = \max\{0.44, 0.33, 0.22, 0.11, 0.00\}=0.44$ . We see in Table 1 that there are four normalized values equal to at least 0.44, i.e. 0.47, 0.72, 0.72 and 0.72. Therefore,  $A_3$  satisfies condition (15) and becomes the final optimal solution. The newsvendor should buy 3 boxes. This is the optimal

pure strategy for one period. If he intends to define the best solution for further periods, he should update his preferences and possibly payoff matrices.

**TABLE 3.****Sums of cumulative relative profits (1st criterion)**

Crit. 1	$A_1 = 1$	$A_2 = 2$	$A_3 = 3$	$A_4 = 4$	$A_5 = 5$	Sum $p(r)^{k_i}$
$S^1_1 = 1$	0.00	-1.00	-1.75	-2.25	-2.50	-7.50
$S^1_2 = 2$	0.00	0.25	-0.50	-1.00	-1.25	-2.50
$S^1_3 = 3$	0.00	0.25	0.75	0.25	0.00	1.25
$S^1_4 = 4$	0.00	0.25	0.75	1.50	1.25	3.75
$S^1_5 = 5$	0.00	0.25	0.75	1.50	2.50	5.00

Source: prepared by the author.

**TABLE 4.****Sums of cumulative relative profits (2nd criterion)**

Crit. 2	$A_1 = 1$	$A_2 = 2$	$A_3 = 3$	$A_4 = 4$	$A_5 = 5$	Sum
$S^2_1 = 1$	0.83	0.88	0.96	1.00	1.04	4.71
$S^2_2 = 2$	0.21	0.25	0.33	0.38	0.42	1.58
$S^2_3 = 3$	-1.04	-1.13	-1.29	-1.38	-1.46	-6.29

Source: prepared by the author.

## 5. Conclusions

The paper contains a description of a decision rule supporting multi-criteria decision making under uncertainty with unknown probabilities (understood as frequencies). Probabilities are not given here as initial data. Instead of it, some secondary probability-like quantities are used. The goal of the procedure is to find an optimal pure strategy which constitutes a one-shot decision (it is executed only once). The method is designed for games against nature. It is based on two-stage models. Advantages of applying that approach are as follows: 1) It does not require any information about probabilities, which is especially desirable in the case of new decision problems, 2) It takes into consideration the decision-maker's preference structure and nature, but only criteria weights and the level of optimism are supposed to be declared – hence, the procedure can be successfully applied by passive decision-makers, 3) It can be used in the case of totally independent payoff matrices for particular targets. The research takes into account experiment results obtained by [Kahneman 2011] and related to fast and heuristic thinking. The novel rule has been demonstrated by means of an illustrative example concerning the scenario-based bi-criteria single-period newsvendor problem.

In the future it would be desirable to explore the uncertain multi-criteria pure decision-making problem on the assumption that payoffs connected with particular decisions are presented as sets (not sequences) of outcomes, since in some real problems, payoffs

connected with particular investments depend on totally different scenarios (even within the framework of a given criterion).

### Bibliography

- Aghdaie M. H., Zolfani S. H., Zavadskas E. K., 2013, *Market Segment Evaluation and Selection Based on Application of Fuzzy AHP and COPRAS-G Methods*, "Journal of Business Economics and Management" vol. 14(1).
- Ben Amor S., Jabeur K., Martel J., 2007, *Multiple Criteria Aggregation Procedure for Mixed Evaluations*, "European Journal of Operational Research", vol. 181, iss. 3.
- Benzion U., Cohen Y., Shavit T., 2010, *The Newsvendor Problem with Unknown Distribution*, "Journal of the Operational Research Society" iss. 6(6), DOI 10.1057/jors.2009.56
- Besbes O., Muharremoglu A., 2013, *On Implications of Censoring Demand in the Newsvendor Problem*, "Management Science", vol. 59, iss. 6, DOI 10.2139/ssrn.1983270
- Bieniek M., 2016, *Bicriteria Optimization in the Newsvendor Problem with Exponentially Distributed Demand*, "Multiple Criteria Decision Making", vol. 11.
- Caplan B., 2001, *Probability, Common Sense, and Realism: A Reply to Hulsmann and Block*, "The Quarterly Journal of Austrian Economics", vol. 4, no. 2.
- Carnap R., 1950, *Logical Foundations of Probability*, University Press, Chicago.
- De Finetti B., 1975, *Theory of Probability. A Critical Introductory Treatment*, Wiley, London.
- Dominiak C., 2006, *Multicriteria Decision aid under Uncertainty*, "Multiple Criteria Decision-Making' 05".
- Dominiak C., 2009, *Multi-Criteria Decision Aiding Procedure under Risk and Uncertainty*, "Multiple Criteria Decision Making' 08".
- Dubois D., Prade H., 2001, *Possibility Theory, Probability Theory and Multiple-Valued Logics: A Clarification*, "Annals of Mathematics and Artificial Intelligence" vol. 32.
- Dubois D., Prade H., 2012, *Gradualness, Uncertainty and Bipolarity: Making Sense of Fuzzy Sets*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 192.
- Durbach I. N., 2014, *Outranking under Uncertainty Using Scenarios*, "European Journal of Operational Research", vol. 232, iss. 1.
- Durbach I. N., Stewart T. J., 2012, *Modeling Uncertainty in Multi-Criteria Decision Analysis*, "European Journal of Operational Research", vol. 223, iss. 1.
- Eiselt H. A., Marianov V., 2014, *Multi-Criteria Decision-Making under Uncertainty: A Visual Approach*, "International Transactions in Operational Research", vol. 21, iss. 4.
- Fishburn P.C., 1984, *Foundations of Risk Measurement. I. Risk or Probable Loss*, "Management Science", vol. 30.
- Frechet M., 1938, *The Diverse Definitions of Probability*. »Lecture at the fourth International Congress for the Unity of Science« Erkenntnis.
- Gaspars H., 2007, *Ressource Allocation under Uncertainty: Choice Models and Computational Procedures [Alokacja zasobu w warunkach niepewności: modele decyzyjne i procedury obliczeniowe]*. „Operations Research and Decisions”, vol. 1 (in Polish).
- Gaspars-Wieloch H., 2014a, *A Hybrid of the Hurwicz and Bayes Rules in Decision-Making under Uncertainty [Propozycja hybrydy reguł Hurwicza i Bayesa w podejmowaniu decyzji w warunkach*



- niepewności*. T. Trzaskalik (Ed.) „Modelowanie Preferencji a Ryzyko 2014. Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, 178, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice (in Polish).
- Gaspars-Wieloch H., 2014b, *On a Decision Rule for Mixed Strategy Searching under Uncertainty on the Basis of the Coefficient of Optimism*, “Procedia – Social and Behavioral Sciences”, vol. 110.
- Gaspars-Wieloch H., 2014c, *Modifications of the Hurwicz’s Decision Rules*, “Central European Journal of Operations Research”, vol. 22, iss. 4.
- Gaspars-Wieloch H., 2014d, *The Use of a Modification of the Hurwicz’s Decision Rule in Multicriteria Decision-Making under Complete Uncertainty*, “Business, Management and Education”, vol. 12, iss. 2.
- Gaspars-Wieloch H., 2015a, *Modifications of the Omega Ratio for Decision-Making under Uncertainty*, “Croatian Operational Research Review”, vol. 6, no. 1.
- Gaspars-Wieloch H., 2015b, *On a Decision Rule Supported by a Forecasting Stage Based on the Decision-Maker’s Coefficient of Optimism*, “Central European Journal of Operations Research”, vol. 23, iss. 3, DOI 10.1007/s10100-014-0364-5
- Gaspars-Wieloch H., 2015c, *A Decision Rule for Uncertain Multicriteria Mixed Decision-Making Based on the Coefficient of Optimism*, “Multiple Criteria Decision Making ’15”, University of Economics in Katowice.
- Gaspars-Wieloch H., 2015d, *On a Decision Rule for Searching an Optimal Pure Strategy in Uncertain Multi-Criteria Decision-Making [O regule decyzyjnej wspierającej wielokryterialne poszukiwanie optymalnej strategii czystej w warunkach niepewności]*, “Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, University of Economics in Katowice (in Polish).
- Gaspars-Wieloch H., 2016a, *Newsvendor Problem under Complete Uncertainty – A Case of Innovative Products*, “Central European Journal of Operations Research”, DOI 10.1007/s10100-016-0458-3.
- Gaspars-Wieloch H., Michalska E., 2016b, *On two Applications of the Omega Ratio:  $\text{Max}\langle\Omega_{\min}$  and  $\text{Omega}(H+B)$* , “Research Papers of Wrocław University of Economics” (Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu), no. 446, Metody i zastosowania badań operacyjnych. Wrocław, 21-36 DOI 10.15611/pn.2016.446.02
- Gaspars-Wieloch H., 2017, *A Decision Rule Based on Goal Programming and One-Stage Models for Uncertain Multi-Criteria Mixed Decision-Making and Games against Nature*, “Croatian Operational Research Review”, vol. 8, no. 1.
- Ginevičius R., Zubrecovas V., 2009, *Selection of the Optimal Real Estate Investment Project Basing on Multiple Criteria Evaluation Using Stochastic Dimensions*, “Journal of Business Economics and Management”, vol. 10, iss. 3.
- Goodwin P., Wright G., 2001, *Enhancing Strategy Evaluation in Scenario Planning: A Role for Decision Analysis*, “Journal of Management Studies”, vol. 38, iss. 1.
- Guney S., Newell B.R., 2015, *Overcoming Ambiguity Aversion through Experience*, “Journal of Behavioral Decision Making”, vol. 28, iss. 2.
- Guo P., 2011, *One-Shot Decision Theory*, “IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics”, Part A, vol. 41, iss. 5.

- Guo P., Ma X. 2014 *Newsvendor Models for Innovative Products with One-Shot Decision Theory*, "European Journal of Operational Research", vol. 239, DOI 10.1016/j.ejor.2014.05.028
- Hau R., Pleskac T.J., Hertwig R., 2009, *Decisions from Experience and Statistical Probabilities: Why they Trigger Different Choices than a priori Probabilities?*, "Journal of Behavioral Decision Making", DOI 10.1002/bdm.665
- Hopfe C. J., Augenbroe G.L.M., Hensen J.L.M., 2013, *Multicriteria Decision-Making under Uncertainty in Building Performance Assessment*, "Building and Environment", vol. 69.
- Hurwicz L., 1952, *A Criterion for Decision-Making under Uncertainty*, "Technical Report", 355, Cowles Commission.
- Janjic A., Andjolkovic A., Docic M., 2013, *Multiple Criteria Decision-Making under Uncertainty Based on Stochastic Dominance*, "Proceedings of the 2013 International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods in Engineering" 16-19 July 2013, Rhodes Island, Greece.
- Kahneman D., 2011, *Thinking, Fast and Slow*, Farrar, Straus & Giroux.
- Kaplan S., Barish N.N., 1967, *Decision-Making Allowing for Uncertainty of Future Investment Opportunities*, "Management Science", vol. 13, iss. 10.
- Knight F.H., 1921, *Risk, Uncertainty, Profit*, Hart. Boston MA, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Co.
- Kolmogorov A. N., 1933, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin.
- Korhonen A., 2001, *Strategic Financial Management in a Multinational Financial Conglomerate: A Multiple Goal Stochastic Programming Approach*, "European Journal of Operational Research", vol. 128.
- Lee Y.-H., 2012, *A Fuzzy Analytic Network Process Approach to Determining Prospective Competitive Strategy in China: A Case Study for Multinational Biotech Pharmaceutical Enterprises*, "Journal of Business Economics and Management", vol. 13, iss. 1.
- Liu Y., Fan Z., Hang Y., 2011, *A Method for Stochastic Multiple Criteria Decision-Making Based on Dominance Degrees*, "Information Sciences", vol. 181, iss. 19.
- Liu B., 2007, *Uncertainty Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- Liu B., 2009, *Some Research Problems in Uncertainty Theory*, "Journal of Uncertain Systems", vol. 3, no. 1.
- Lo M.C., Michnik J., 2010, *An Evaluation Method Based on Multi-Attributes Analysis with Stochastic Dominances for Improving the Information Quality*, "International Journal of Information Systems for Logistics and Management", vol. 6.
- Michnik J., 2013, *Scenario Planning+MCDM Procedure for Innovation Selection Problem*, "Foundations of Computing and Decision Sciences", 38(3).
- Mikhailidov L., Tsvetinov P. 2004 *Evaluation of Services Using a Fuzzy Analytic Hierarchy Process*, "Applied Soft Computing", vol. 5, iss. 1.
- Millett S.M., 2009, *Should Probabilities Be Used with Scenarios?*, "Journal of Futures Studies", 13(4).
- Montibeller G., Gummer H., Tumidei D. 2006 *Combining Scenario Planning and Multi-Criteria Decision Analysis in Practice*, "Journal of multi-criteria decision analysis" vol. 14.
- Ogryczak W., Śliwiński T., 2009, *On Efficient WOWA Optimization for Decision Support under Risk*, "International Journal of Approximate Reasoning", vol. 50.

- Operations Research [Badania Operacyjne]*, 2008, W. Sikora (ed), Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warsaw (in Polish).
- Perez D.E, Hernandez J.G., Garcia M.J., Hernandez G.J., 2015, *Hurwicz Method Modified and the Amplitude Model (TAM)*, In Delener et al. (Ed), GBATA 2015 Reading book, GBATA, USA.
- Piasecki K., 2016, *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behavioralnych [Intuitive Fuzzy Sets as a Tool of Behavioral Finances]*, edu-Libri (in Polish).
- Piegat A., 2010, *Uncertainty of Probability*, Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets.
- Popper K., 1959, *The Propensity Interpretation of Probability*, "The British Journal of the Philosophy of Science", 10(37).
- Ram C., Montibeller G., Morton A., 2010, *Extending the Use of Scenario Planning and MCDA for the Evaluation of Strategic Options*, "Journal of Operational Research Society", vol. 62, iss. 5.
- Ramík J., Hanclova J., Trzaskalik T., Sitarz S., 2008, *Fuzzy Multiobjective Methods in Multistage Decision Problems*, "Multiple Criteria Decision-Making '07".
- Ramsey F., 1931, *Truth and Probability*, In The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, by Frank Ramsey, Routledge, Kegan Paul, London.
- Ravindran A. R., 2008, *Operations Research and Management Science Handbook*, Boca Raton, London, New York, CRS Press.
- Shafer G., 1976, *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton.
- Sentz K., Ferson S., 2002, *Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory*, Sandia Report SAND2002-0835, April 2002, Albuquerque, NM.
- Silva R.C., 2016, *A Multiobjective Approach to Solve Container Ship Loading Planning Problem with Uncertainty*, Conference Handbook, 28<sup>th</sup> European Conference on Operational Research, EURO, The Association of European Operational Research Societies.
- Stewart T. J., 2005, *Dealing with Uncertainties in MCDA, Multiple Criteria Decision Analysis: State-of-the-Art Surveys*, "International Series in Operations Research & Management Science", 78.
- Stirling W.C., 2003, *Satisficing Games and Decision-Making. With Applications to Engineering and Computer Science*, Cambridge University Press.
- Suo M.Q., Li Y.P., Huang G.H., 2012, *Multicriteria Decision-Making under Uncertainty: An Advanced Ordered Weighted Averaging Operator for Planning Electric Power Systems*, "Engineering Applications of Artificial Intelligence", vol. 25, iss. 1.
- Troutt M.D., Pettypool M.D., 1989, *On the Role of Mixed Strategies in the Elementary Decision Analysis and Related Decision-Support-System Treatments*, "Journal of Operational Research Society", vol. 40, iss. 6.
- Trzaskalik T., 2008, *Introduction to Operations Research with Computer [Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem]*, 2nd ed. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warsaw (in Polish).
- Trzaskalik T., 2014, *Multicriteria Decision Aiding [Wielokryterialne wspomaganie decyzji]*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warsaw (in Polish).
- Tsaur S., Chang T., Yen C., 2002, *The Evaluation of Airline Service Quality by Fuzzy MCDM*, "Tourism Management", vol. 23, iss. 2.

- Urli B., Nadeau R. 2004 *PROMISE/scenarios: An Interactive Method for Multiobjective Stochastic Linear Programming under Partial Uncertainty*, "European Journal of Operational Research", vol. 155, iss. 2.
- Van Lambalgen M. 1996 *Randomness and Foundations of Probability: von Mises' Axiomatization of Random Sequences. Probability, Statistics and Game Theory*, Papers in honor of David Blackwell, Institute for Mathematical Statistics.
- Von Mises L., 1949, *Human Action: A Treatise on Economics*, Yale University Press.
- Von Mises R., 1957, *Probability, Statistics and Truth*, The Macmillan Company, New York.
- von Neumann J., Morgenstern O., 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New York.
- Wachowicz T., 2015, *Methods of Multi-Criteria Decision Analysis in Quantitative Scientific Research [Metody wielokryterialnej analizy decyzyjnej w ilościowych badaniach naukowych]*, [in:] *Podstawy metodologii badań w naukach o zarządzaniu*, W. Czakon (ed.), Oficyna Wolters Kluwer business (in Polish)
- Walley P., 1991, *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall.
- Waters D., 2011, *Supply Chain Risk Management. Vulnerability and Resilience in Logistics*. Kogan Page.
- Weber M., 1987, *Decision-Making with Incomplete Information*, "European Journal of Operational Research" vol. 28.
- Wojewnik P., Szapiro T., 2010, *Bireference Procedure FBI for Interactive Multicriteria Optimization with Fuzzy Coefficients*, "Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics", vol. 2.
- Xu R., 2000, *Fuzzy Least-Squares Priority Method in the Analytic Hierarchy Process*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 112, iss. 3.
- Yu C., 2002, *A GP-AHP Method for Solving Group Decision-Making Fuzzy AHP Problems*, "Computers and Operations Research", vol. 29, iss. 14.
- Zadeh L., 1978, *Fuzzy Sets as the Basis for a Theory of Possibility*, "Fuzzy Sets and Systems" 1.
- Zio E., Pedroni N., 2013, *Methods for Representing Uncertainty. A Literature Review*. Apports de la recherche 2013-3, Risk Analysis. Les cahiers de la securite industrielle, FONCSI.

**Ewa CHOJNACKA, Ph.D.**

The Faculty of Economic Sciences and Management, Nicolaus Copernicus University in Toruń  
e-mail: echoj@umk.pl

**Dorota GÓRECKA, Ph.D.**

The Faculty of Economic Sciences and Management, Nicolaus Copernicus University in Toruń  
e-mail: dgorecka@umk.pl

**DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.07**

## **APPLICATION OF MCDA METHODS IN THE PERFORMANCE EVALUATION OF PUBLIC BENEFIT ORGANISATIONS**

### **Summary**

The paper presents the issue of assessment of efficiency and effectiveness in organisations operating for public benefit. Taking into consideration the important role of those entities in the economy and specific conditions in which they operate, a new type of evaluation tools is needed. Therefore, the main aim of this paper is to propose such a new assessment instrument based on outranking multi-criteria decision aiding (MCDA) methods. The procedure proposed is used in a real-life scenario connected with the appraising process of eleven Public Benefit Organisations (PBOs) from Lodz Voivodeship in Poland, operating in the field of 'Ecology, animals and heritage protection', and eleven charities from Western Australia whose main activity is 'Animal Protection'. Rankings obtained as a result of the presented approach can serve a potential donor as a pointer for making better decisions regarding financial support.

**Key words:** public benefit organisations, charities, performance evaluation, reporting, MCDA, outranking methods

**JEL:** C44, C65, L31, M41,

### **1. Introduction**

Organisations established for charitable purposes, such as charities or voluntary organisations, exist almost all over the world. Generally, the main aim of their activity is connected with carrying out certain tasks that are believed to be of general benefit to society. They are usually presented as part of the third sector, next to state (the first sector) and business sector (the second sector) in the economy. The third sector organisations also include non-profit organisations (NPOs) and non-governmental organisations (NGOs). Additional features of organisations classified as non-profit ones include the following elements: they are 1) organised (institutionalized to some extent), 2) private (institutionally separate from government), 3) self-governing (equipped to control their

own activities), 4) non-profit-distributing (not returning profits generated to their owners or directors), 5) voluntary (involving some meaningful degree of voluntary participation) [Salamon, Anheier, 1992, p. 1; Salamon, Anheier, 1996, p. 2]. Nevertheless, it must be emphasised that the issue of charities and NPOs is subject to individual countries' legal frameworks that provide additional and specific characterisation of these entities. In consequence, the presented definition, as a kind of simplified understanding of this set of organisations, becomes more complicated and sometimes incomparable.

NGOs play an important role in the economy. The range of activities they perform is very diverse. According to the International Classification of Non-profit Organisations (ICNPO), which is the classification system recommended by the United Nations, NGOs' activities may be divided into 12 major groups, such as [*Handbook on Non-profit Institutions...*, 2003]: Culture and recreation; Education and research; Health; Social services; Environment; Development and housing; Law, advocacy and politics; Philanthropic intermediaries and voluntarism promotion; International; Religion; Business and professional associations, unions; Not elsewhere classified.

Not only the range of NGOs' activities, but also their economic impact indicate the significant contribution charities and voluntary organisations make in the economy. Although it is very difficult to analyse the economic effect of NGOs in a worldwide perspective (due to the lack of a unified system of national statistics), it is worth mentioning some findings presented in 2013 by Johns Hopkins University Centre for Civil Society Studies. According to the research results, the average contribution of non-profit institutions to Gross Domestic Product in the 15 analysed countries<sup>1</sup> reached 3.6% for paid workers and 0.9% for volunteers. Whereas non-profit institutions from 13 countries<sup>2</sup> employed on average 5.2% of total workforce in the examined countries [Salamon et al., 2013, pp. 2-3].

Besides the economic contribution of NGOs, one should also bear in mind their social and cultural contributions to society. They facilitate cooperation of people who share values, interests, and ideas. NGOs operate in the name of discriminated groups in society or those who are incapable of protecting their own rights. They may have an important influence on authorities as well as uphold the common weal [*Elementarz III sektora*, 2005, pp. 19-20].

Considering the increasing role of NGOs in many countries, there is a great need to work out methods enabling the assessment of efficiency and effectiveness in those entities. NGOs may fund their activities using many sources. The most important ones include payments for services or goods that NGOs provide, government grants, grants from local or state authorities, private donations, legacies, fundraising, membership fees, etc. Consequently, public or private resource providers may as well expect to obtain the proper information on NGOs' performance. In many countries legal regulations introduce a special status for those NGOs which fulfil certain requirements. With such

---

<sup>1</sup> Australia, Belgium, Brazil, Canada, the Czech Republic, France, Israel, Japan, Kyrgyzstan, New Zealand, Mozambique, Norway, Portugal, Thailand, and the United States.

<sup>2</sup> Data on Canada and Mozambique were not available.

a status NGOs obtain additional benefits, such as other source of finance or tax exemptions. Taking this fact into consideration, it is even more important to work out an assessment tool for this 'special status' group of NGOs.

The purpose of this article is to present a procedure based on multi-criteria decision aiding (MCDA) outranking methods, i.e. PROMETHEE IIv, EXPROM IIv, modified ELECTRE III and EVAMIX, as a tool suggested to be used in an assessment process of those NGOs which obtained a special status regulated by a country law. As a result of the presented approach, we obtain a kind of ranking of organisations established for charitable purposes. This ranking is based on a set of adjusted measures which may be used to evaluate NGOs effectiveness and reputation. In order to carry out an in-depth study we have analysed and evaluated NGOs from two countries: Australia and Poland. We concentrated on NGOs with a special domestic status: Public Benefit Organisations (PBOs) from one of the Polish provinces, operating in the field of 'Ecology, animals and heritage protection' and registered charities operating in Western Australia whose main activity is 'Animal Protection'.

The article is organised as follows. In section 2 we present the situation of charities in Australia and PBOs in Poland. In next part the steps of the proposed procedure are shown. Section 4 presents the case study and the results obtained due to the application of various MCDA outranking techniques, while section 5 provides a summary and conclusions.

## 2. Organisations established for charitable purposes in Australia and in Poland

The non-profit sector in Australia has been growing rapidly since the 1990s. In 2012 the Australian Charities and Not-for-profits Commission (ACNC), the national regulator of charities, was established [Cortis et al., 2015]. In Poland NGOs have also been developing intensively since 1990, that is from the transition from a state-controlled economy into a market economy. In 2003 the public benefit status was introduced. Table 1 presents selected characteristics of charities in Australia and PBOs in Poland.

**TABLE 1.**  
**Certain characteristics of charities in Australia and PBOs in Poland**

Characteristics	Australia (Charities)	Poland (Public Benefit Organisations)
Legal base	Charities Act 2013, No. 100, 2013	The Act of law of April 24th, 2003 on Public Benefit and Volunteer Work
Definition	Not-for-profit entities, which have only charitable purposes that are for the public benefit, have not a disqualifying purpose, and are not individual, a political party or a government entity.  The Charities Act 2013 indicates definition of charitable purpose (in Part 3) and disqualifying purpose (in Part 2, Division 3).	Non-governmental organisations (understood as corporate and non-corporate entities, which do not form part of the public finance sector and which do not operate for profit, with the exception of political parties, trade unions and organisations of employers, professional self-governing authorities, and foundations formed by political

		parties) entitled to perform the activity that is focused on the benefit of society in the area of public tasks, called a public benefit activity. The legislation indicates 37 areas of public activity.
Registration	Charities may register with the ACNC. This registration is required to obtain certain benefits.	PBOs are registered in the National Court Register.
Legal forms	Main types are incorporated entities, unincorporated entities, trusts, public company.	Main types are association and foundation.
Benefits	<p>All charities that register with the ACNC can apply for these tax concessions:</p> <p>Income tax exemptions, Refunds on franking credits, Goods and services tax (a tax on transactions) concessions, Fringe benefits tax (FBT) rebates (FBT is a tax paid on any benefits that an employer provides to their employees outside their salary or their superannuation, not all registered charities may apply for FBT rebate, public benevolent institutions (PBI), health promotion charities (HPC), not-for-profit hospitals and some charities advancing religion can access FBT exemptions).</p> <p>Charities can apply for deductible gift recipient (DGR) status – donations made to an organisation with DGR status may be tax deductible.</p> <p>There are also a number of tax concessions available to charities from state, territory and local governments (e.g., concessions on taxes like stamp duty, payroll tax, land tax).</p>	<p>PBOs are granted:</p> <p>Tax exemptions (the corporate income tax, the property tax, the tax on civil law transactions, the stamp duty, court fees), The right to receive 1% of the personal income tax (it may be used only for public benefit activity), Preferential terms while property owned by the State Treasury or by local self-government units, Free of charge promotion in public media to inform the general public of organisations' activities.</p>
Reporting obligations	<p>Registered charities are required to lodge an Annual Information Statement (AIS) with the ACNC. Generally, charities are required to submit their AIS within six months of the end of their reporting period.</p> <p>Medium and large charities are required to submit their annual financial report as well as the AIS.</p>	<p>PBOs prepare an annual performance report and annual financial statement. Accepted reports must be published in the Internet database of the Ministry of Labour and Social Policy.</p> <p>PBOs are required to present the information in how the 1% is used.</p>

Source: [Act of law of April...; Charities Act 2013...; Żak, 2012; Cortis et al., 2015; Charity tax concessions available ...].



Australian Charities Report as at 2014 presented main facts concerning charities registered with the ACNC which reported the obligatory Annual Information Statement (AIS) [Cortis et al., 2015, pp. 10-11, 42, 46, 53-54, 62]:

- The number of registered charities might be estimated taking into consideration the number of charities which reported the AIS: that was 37,798 charities in 2014 and 49,293 charities in 2013.
- In 2014 Australia's charities reported income totalling \$103.4 billion. Although the mean income per charity was \$3.4 million, half of all charities reported income of \$138,000 or less.
- Australia's charities reported expenses totalling \$95 billion in 2014. The mean total expenditure equalled \$3.2 million, but the median was much lower and reached \$116,400.
- In total, registered charities that reported workforce data employed 1,117,781 paid staff (55.7% of all charities that reported workforce data), including 443,270 full time staff, 402,011 part time staff, along with 272,500 casual workers.
- 83.4% of all charities engage volunteers. Around 1 in 3 charities had from 1 to 10 (33.3%) and from 11 to 50 (33.1%) volunteers. 16.6% of charities reported that they had no volunteers during the reporting period. Large organisations were least likely to use volunteers (25.3% used no volunteers), compared with 16.9% of medium charities and 13.8% of small charities.

In Poland, the latest report prepared by the Central Statistical Office refers to the non-profit sector and public benefit organisations as at 2014 [*Sektor non-profit...*, 2016, pp. 54-55, 76, 234, 236, 241-243, 247]:

- According to the National Court Register data, at the end of 2014 there were 8.7 thousand organisations registered with a public benefit status (8.6 thousand in 2013).
- 8.6 thousand of PBOs (99% of all registered PBOs) that took part in a research conducted by the Central Statistical Office reported income totalling PLN 7.4 billion. The mean income per charity equalled PLN 863.3 thousand whereas median was much lower and reached the level of PLN 101.7 thousand.
- PBOs in Poland reported total expenses of PLN 6.6 billion. On average, organisation's expenses accounted for PLN 763.2 thousand, however, the median expenses equalled PLN 88.1 thousand.
- In 2014 PBOs received PLN 507 million from 1% of the personal income tax (the special benefit for organisations with a public benefit status). On the one hand, almost all PBOs obtain income from this source, on the other hand, however, it was not a relevant source of income (8% of all income).
- As at the end of 2014 PBOs reported 52.6 thousand of paid employees, which accounted for 34% of all employees in analysed organisations from the non-profit sector (154.1 thousand employees) and 1.3% of all people hired on the basis of employment in Poland.

- Volunteers were involved in 94% of PBOs and comprised 20% of all people working in examined organisations. On average 92 volunteers were engaged in one PBO, but half of PBOs engaged 17 volunteers or less.

The information presented above illustrates the differences between Australian and Polish organisations which have a national special status for non-profit entities. Despite the fact that both legal regulations and the size of the non-profit sector is dissimilar in the analysed countries, the general idea of the non-profit sector's role in society is the same. Bearing this fact in mind, we hope that the assessment tool proposed in the next part of the paper may be regarded as a universal method that could be applied to evaluate charities in many countries.

### 3. The proposed performance appraisal procedure

Meeting the need to develop the instrument of evaluation and ordering of organisations of public benefit (for example to help donors decide where to give their money or to determine the best and the worst entities for public co-financing), and taking into account advantages and disadvantages of different MCDA methods [Górecka, 2010; Górecka, 2011; Górecka, 2012], the procedure composed of the following steps has been proposed [cf. Chojnacka, Górecka, 2016]:

- Identification of the participants of the decision-making process;
- Selection of the performance evaluation criteria and measures for them;
- Determination of weights for evaluation criteria:
  - arbitrarily;
  - with the help of Hinkle's method [Hinkle, 1965; Rogers, Bruen, 1998];
  - with the help of revised Simos' procedure [Figueira, Roy, 2002];
  - using Hokkanen and Salminen's approach, version 1 or 2 [Hokkanen, Salminen, 1994; Hokkanen, Salminen, 1997];
  - using Mousseau's method [Mousseau, 1995];
 (depending on number and preferences of the decision-makers);
- Establishing indifference, preference and veto thresholds for each criterion;
- Building a table of assessments (evaluation matrix) of organisations taken into consideration;
- Application of:
  - PROMETHEE IIv method [Górecka, Muszyńska, 2011; Górecka, Pietrzak, 2012; Górecka, 2014];
  - EXPROM IIv method [Górecka, Szalucka, 2013; Górecka, 2014; Górecka, 2015];
  - modified ELECTRE III method [Górecka, 2009];
  - EVAMIX method [Voogd, 1982];
 (depending on the expectations and preferences of the decision-makers);
- Taking final decision.

#### 4. Empirical example

Let us assume that there is a decision-maker (DM) who loves animals and would like to give her money to charitable organisations rescuing and taking care of them. She would like to select two such organisations to support: one in Western Australia (where she, for instance, live now), and one in Lodz Province, Poland (where she, for example, comes from).

Hence, the procedure recommended in the previous section was employed in the process of appraising and ranking of eleven Public Benefit Organisations from Lodz Voivodeship, operating in the field of 'Ecology, animals and heritage protection', and eleven registered charities from Western Australia whose main activity is 'Animal Protection'.

Criteria affecting the choice of the organisations of public benefit for donation and measures for them were identified through the literature review as well as based on the authors' own ideas. They are presented in Table 2.

Analysis was carried out on the basis of the official and publicly available annual reports (from 07.2014 - 06.2015 in Australia and from 2014 in Poland) of the organisations considered as well as information from their websites. Criteria  $f_{11}$ - $f_{14}$  were assessed by the DM. She also determined (arbitrarily) weighting coefficients for the evaluation criteria as well as indifference ( $q_k$ ), preference ( $p_k$ ) and veto ( $v_k$ ) thresholds for them.

The model of preferences for the decision-making problem and measurement data are presented in the table included in Appendix. In turn, Table 3 provides a summary of the results obtained by means of four multi-criteria techniques enumerated in the previous section of this paper.

The rankings presented in Table 3 show the sensitivity of the solutions to choice of the decision-aiding technique since the orders of the public service organisations in the rankings are not in complete agreement. Despite that, however, it is possible to determine the set of organisations which are 'good' (charities K, D, E and C in Australia; PBOs K, H and J in Poland) since the values of their appraisal scores are non-negative, and the other one containing organisations which are 'bad' (charities G, F, I and J in Australia; PBOs B, D and E in Poland) since their appraisal scores are negative regardless the MCDA method. The best entities for donation, taking into account their effectiveness and reputation, are charity K in Australia and PBO K in Poland. They will be recommended to the DM.

TABLE 2.

## Assessment factors (evaluation criteria and measures)

f <sub>k</sub>	Criterion (min/max/value of); (earlier studies)	Measure – calculation formula	
		Australia	Poland
f <sub>1</sub>	Average amount of aid per beneficiary (max)	costs directly connected with charitable activities/number of beneficiaries	cost of unpaid statutory activities/number of beneficiaries
f <sub>2</sub>	Average revenue generated by people involved in organisation's activities (max)	total revenue/number of people involved in charity activities (employees, volunteers, board members)	total revenue/number of people involved in PBO's activities (employees, volunteers, members)
f <sub>3</sub>	Labour cost in relation to total revenue (min)	gross salaries/total revenue	
f <sub>4</sub>	Change in revenue (max); (a)	(total revenue in current year – total revenue in previous year)/total revenue in previous year	
f <sub>5</sub>	Financial stability ratio (value of 73); (b, c)	(cash at bank and in hand + other short-term investments (in previous year) *365)/total cost (in current year)	cash and other short-term investments (in previous year) *365/total cost (in current year)
f <sub>6</sub>	Private revenue concentration ratio (% of private financing) (max); (b, c)	(donations and bequests + fundraising)/total revenue	(1% of PIT + incomes from private sources including individual and institutional donations)/total revenue
f <sub>7</sub>	Administrative costs ratio (% of administrative costs) (value of 6,5%); (b, c, d, e)	costs qualified as administrative costs/total cost	administrative cost/total cost
f <sub>8</sub>	Activity scope (value of 36); (b, c)	number of beneficiaries/number of people involved in organisation's activities	
f <sub>9</sub>	Alternative labour costs (max); (b, c)	(number of volunteers*gross salaries)/employees	
f <sub>10</sub>	Organisation's age (max); (e)	the number of days an organisation has been active	the number of days an organisation has PBO status
f <sub>11</sub>	Statutory goals and activities or projects (max); (c)	Do annual statements of an organisation or its promotion materials define precisely statutory goals and activities or projects undertaken to achieve those objectives? (appraisal of the DM on scale 0-3)	
f <sub>12</sub>	Effects of activities (max); (c)	Do annual statements of an organisation or its promotion materials disclose accurately effects of activities undertaken by the organisation in the recent period? (appraisal of the DM using scale 0-3)	
f <sub>13</sub>	Beneficiaries of activities (max); (c)	Do annual statements of an organisation or its promotion materials characterise thoroughly beneficiaries of activities conducted by the organisation in the recent period? (appraisal of the DM using scale 0-3)	
f <sub>14</sub>	Organisation's image (max); (c)	Does the web-site of the organisation help to produce a positive image of the PBO? (appraisal of the DM on scale 0-3)	

a) [*Charity Navigator...*]; b) [Dyczkowski, 2015a]; c) [Dyczkowski, 2015b]; d) [Frumkin, Kim 2001]; e) [Trussel, Parsons, 2008]

Source: [Dyczkowski, 2015a; 2015b; Waniak-Michalak, Zarzycka, 2012], own elaboration.

**TABLE 3.**

**Rankings of public service organisations obtained using different MCDA methods**

No.	Australia				Poland			
	Organisation (Charity)				Organisation (PBO)			
	PROMETHEE IIv	EXPROM IIv	Modified ELECTRE III	EVAMIX	PROMETHEE IIv	EXPROM IIv	Modified ELECTRE III	EVAMIX
1	AUS K	AUS K	AUS K	AUS C	POL K	POL K	POL K,	POL J
2	AUS D	AUS D	AUS D,	AUS B	POL H	POL H	POL H	POL K
3	AUS E	AUS E	AUS E	AUS K	POL C	POL C	POL A,	POL A
4	AUS C	AUS C	AUS A,	AUS A	POL J	POL J	POL C,	POL F
5	AUS A,	AUS A,	AUS C,	AUS H	POL G	POL G	POL G,	POL H
6	AUS H	AUS H	AUS H	AUS E	POL I	POL I	POL I,	POL B
7	AUS B	AUS B	AUS B,	AUS D	POL A	POL A	POL J	POL G
8	AUS J	AUS J	AUS F,	AUS G	POL F	POL F	POL B,	POL E
9	AUS G	AUS G	AUS G,	AUS F	POL D	POL D	POL D,	POL I
10	AUS F	AUS F	AUS J	AUS I	POL B	POL B	POL E,	POL C
11	AUS I	AUS I	AUS I	AUS J	POL E	POL E	POL F	POL D

Source: own elaboration.

## 5. Conclusions

In the article we have proposed a universally applicable tool, based on the outranking MCDA methods, which can support charitable givers all over the world in making clever and confident donation decisions. Furthermore, it may be used by authorities (self-governments or central administration) in the process of selecting organisations which are to be delegated certain tasks financed with public funds. Last but not least, it may help non-profit organisations to monitor themselves more effectively and to verify their own attractiveness as fundraisers.

It should be emphasised that the results obtained with the presented approach depend on assumptions made as well as on data quality. In the assessment process, we used both financial and non-financial data acquired from financial statements, additional reports (such as AIS in Australia or performance report in Poland) and organisations' websites. In the analysed countries, the data quality was subject to short experience in reporting (in Australia 2014 was the second year of obligatory reporting for charities registered with ACNC, in Poland there were changes in legal regulations in 2013 and 2014). Moreover, in Australia there are no standards or guidelines for financial statements reported to ACNC. According to Australian regulations, charities have to prepare their financial reports in accordance with the Australian Accounting Standards and present a true and

fair view. Though, one charity may present information in a different form than another charity presents its information. For example, some charities may concentrate on program allocation of costs but other charities may group costs according to their nature (such as ‘employee expenses’, ‘administration’ and so on) [*Information on the Register...*]. In consequence, it is hard to compare selected financial data when information is disclosed in different forms. However, taking into consideration the trend of promoting accountability and transparency in the third sector organisations, above mentioned challenges may be minimized in the future.

### Statement of Authorship

Ewa Chojnacka, Ph.D. – conception and design of the work, data collection, drafting the article, final approval of the version to be published – 50%

Dorota Górecka, Ph.D. – conception and design of the work, conception and application of the performance appraisal procedure, drafting the article, final approval of the version to be published – 50%.

### Bibliography

- Act of law of April 24th 2003 on Public Benefit and Volunteer Work, Ustawa z dnia 24 kwietnia 2003 r. o działalności pożytku publicznego i o wolontariacie*, Dz. U. 2003 nr 96, poz. 873 z późn. zm.
- Charities Act 2013 No. 100, 2013. An Act to Define Charity and Charitable Purpose, and for Related Purposes.*
- Charity Tax Concessions Available*, Australian Government, ACNC, [https://www.acnc.gov.au/ACNC/Register\\_my\\_charity/Why\\_register/Reg\\_Tax\\_conc/ACNC/Edu/Char\\_con\\_avail.aspx](https://www.acnc.gov.au/ACNC/Register_my_charity/Why_register/Reg_Tax_conc/ACNC/Edu/Char_con_avail.aspx) (access: 15.11.2016).
- Charity Navigator – Your Guide to Intelligent Giving*, <http://www.charitynavigator.org/index.cfm?bay=content.view&cpid=2181> (access: 10.10.2016).
- Chojnacka E., Górecka D., 2016, *Evaluating Public Benefit Organisations in Poland with the EVAMIX Method for Mixed Data*, “Multiple Criteria Decision Making”, 11, 36-50, doi: 10.22367/mcdm.2016.11.03.
- Cortis N., Lee I., Powell A., Simnett R., Reeve R., 2015, *Australian Charities Report 2014*, Centre for Social Impact and Social Policy Research Centre, UNSW Australia, 13.
- Dyczkowski T., 2015a, *Mierniki dokonania organizacji pożytku publicznego. Możliwości i ograniczenia stosowania*, “Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, 398, 146-158.
- Dyczkowski T., 2015b, *Financial and Non-Financial Information in Performance Assessment of Public Benefit Organizations*, “Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, 398.
- Elementarz III sektora* 2005, (ed.) Gałązka A., Klon/Jawor, 19-20, [http://www.ngo.pl/files/biblioteka.ngo.pl/public/ksiazki/Klon/elementarz\\_III\\_sektora.pdf](http://www.ngo.pl/files/biblioteka.ngo.pl/public/ksiazki/Klon/elementarz_III_sektora.pdf) (access: 29.11.2016).

- Figueira J., Roy B., 2002, *Determining the Weights of Criteria in the ELECTRE Type Method with a Revised Simos' Procedure*, "European Journal of Operational Research", 139(2).
- Frumkin P., Kim M.T., 2001, *Strategic Positioning and the Financing of Nonprofit Organizations: Is Efficiency Rewarded in the Contributions Marketplace?*, "Public Administration Review", 61(3).
- Górecka D., 2009, *Wielokryterialne wspomaganie wyboru projektów europejskich*, TNOiK „Dom Organizatora”, Toruń.
- Górecka D., 2010, *Zastosowanie metod wielokryterialnych opartych na relacji przerysowania do oceny europejskich projektów inwestycyjnych* [in:] *Metody i zastosowania badań operacyjnych'10*, (ed.) M. Nowak, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Górecka D., 2011, *On the Choice of Method in Multi-Criteria Decision Aiding Process Concerning European Projects* [in:] *Multiple Criteria Decision- Making'10-11*, (eds.) T. Trzaskalik, T. Wachowicz, Publisher of The University of Economics in Katowice, Katowice.
- Górecka D., 2012, *Applying Multi-Criteria Decision Aiding Techniques in the Process of Project Management within the Wedding Planning Business*, "Operations Research and Decisions", 4(22).
- Górecka D., 2014, *Metody PROMETHEE* [in:] *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Metody i zastosowania*, (ed.) T. Trzaskalik, PWE, Warszawa.
- Górecka D., 2015, *Zastosowanie metod wielokryterialnych w procesie ubiegania się o akredytację międzynarodową AACSB* [in:] *Badania operacyjne. Przykłady zastosowań*, (eds.) J.B. Gajda, R. Jadcak, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Górecka D., Muszyńska J., 2011, *Analiza przestrzenna innowacyjności polskich regionów*, "Acta Universitatis Lodziensis. Folia Oeconomica", 253.
- Górecka D., Pietrzak M.B. 2012 *Zastosowanie metody PROMETHEE II w procesie rankingowania projektów europejskich w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Kujawsko-Pomorskiego na lata 2007-2013*, "Studia Ekonomiczne, Modelowanie Preferencji a Ryzyko'12, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach".
- Górecka D., Szalucka M., 2013, *Country Market Selection in International Expansion Using Multicriteria Decision Aiding Methods*, "Multiple Criteria Decision Making", 8, 31-55.
- Handbook on Non-Profit Institutions in the System of National Accounts*, 2003, United Nations, Studies in Methods, Series F., No. 91, [http://unstats.un.org/unsd/publication/seriesf/seriesf\\_91e.pdf](http://unstats.un.org/unsd/publication/seriesf/seriesf_91e.pdf) (access: 01.12.2016).
- Hinkle D., 1965, *The Change of Personal Constructs from the Viewpoint of a Theory of Construct Implications*, Ph.D. Dissertation, Ohio State University, Ohio.
- Hokkanen J., Salminen P., 1994, *The Choice of a Solid Waste Management System by Using the ELECTRE III Decision-Aid Method* [in:] *Applying Multiple Criteria Aid for Decision to Environmental Management*, (ed.) M. Paruccini, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Hokkanen J., Salminen P., 1997, *Choosing a Solid Waste Management System Using Multicriteria Decision Analysis*, "European Journal of Operational Research", 98(1).
- Information on the Register: Understanding Financial Information*, Australian Government, ACNC, [http://www.acnc.gov.au/ACNC/Reg/understanding\\_financial.aspx](http://www.acnc.gov.au/ACNC/Reg/understanding_financial.aspx) (access: 06.12.2016).

- Mousseau V., 1995, *Eliciting Information Concerning the Relative Importance of Criteria* [in:] *Advances in Multicriteria Analysis*, (eds.) P.M. Pardalos, Y. Siskos, C. Zopounidis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Rogers M., Bruen M., 1998, *A New System for Weighting Environmental Criteria for Use within ELECTRE III*, "European Journal of Operational Research", 107(3).
- Salamon L.M., Sokolowski S.W., Haddock M.A., Tice H. S., 2013, *The State of Global Civil Society and Volunteering: Latest Findings from the Implementation of the UN Nonprofit Handbook*, Working Paper No. 49, March, The Johns Hopkins Center for Civil Society Studies, Baltimore.
- Salamon L.M., Anheier H.K., 1992, *In Search of the Nonprofit Sector II: The Problem of Classification*, Working Papers of the Johns Hopkins Comparative Nonprofit Sector Project, no. 3, The Johns Hopkins Institute for Policy Studies, Baltimore.
- Salamon L.M., Anheier H.K., 1996, *The International Classification of Nonprofit Organizations: ICNPO-Revision 1*, Working Papers of the Johns Hopkins Comparative Nonprofit Sector Project, no. 19, The Johns Hopkins Institute for Policy Studies, Baltimore.
- Sektor non-profit w 2014-2016*, Główny Urząd Statystyczny, Studia i Analizy Statystyczne, Warszawa, <http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/gospodarka-spoeczna-wolontariat/gospodarka-spoeczna-trzeci-sektor/sektor-non-profit-w-2014-r,1,5.html> (access: 27.10.2016).
- Trussel J.M., Parsons L.M., 2008, *Financial Reporting Factors Affecting Donations to Charitable Organizations*, "Advances in Accounting", 23.
- Voogd H., 1982, *Multicriteria Evaluation with Mixed Qualitative and Quantitative Data*, "Environment and Planning B", 9.
- Waniak-Michalak H., Zarzycka E., 2012, *Performance Measurement of Public Benefit Organizations on the Basis of Information from Financial Statements and Its Influence on Their Results*, "Zeszyty Teoretyczne Rachunkowości", 68(124).
- Żak P., 2012, *Public Benefit Status in Poland*, Ogólnopolska Federacja Organizacji Pozarządowych, Public Benefit Status in V4 countries and Germany - conference in Prague 21.09.2012, [http://ofop.eu/sites/ofop.eu/files/biblioteka-pliki/pzak\\_public\\_benefit\\_and\\_ngo\\_in\\_poland\\_20120921.pdf](http://ofop.eu/sites/ofop.eu/files/biblioteka-pliki/pzak_public_benefit_and_ngo_in_poland_20120921.pdf) (access: 15. 06.2016).



Model of Preferences and Input Data

$a_i/f_k$	$f_i$ [MAX]	$f_2$ [MAX]	$f_3$ [MIN]	$f_4$ [MAX]	$f_5$ [goal: 73]	$f_6$ [MAX]	$f_7$ [goal: 0.065]	$f_8$ [goal: 36]	$f_9$ [MAX]	$f_{10}$ [MAX]	$f_{11}$ (scale 0-3)	$f_{12}$ (scale 0-3)	$f_{13}$ (scale 0-3)	$f_{14}$ (scale 0-3)
weight	0.124	0.124	0.095	0.029	0.057	0.057	0.014	0.057	0.014	0.057	0.057	0.124	0.095	0.095
$q_k$	$0.2 f_k(a_i)$	$0.2 f_k(a_i)$	0.1	0.2	30	0.1	0.1	$0.3 f_k(a_i)$	$0.3 f_k(a_i)$	1825	1	1	1	1
$p_k$	$0.65 f_k(a_i)$	$0.65 f_k(a_i)$	0.7	0.6	150	0.7	0.7	$0.5 f_k(a_i)$	$0.5 f_k(a_i)$	3650	2	2	2	2
$v_k$	$0.95 f_k(a_i)$	$0.95 f_k(a_i)$	0.9	1	360	0.9	0.9	$0.95 f_k(a_i)$	$0.9 f_k(a_i)$	18250	3	3	3	3
<b>Australia - Charities</b>														
Charity	$f_k(a_i)$ – evaluation of the alternative $a_i$ (charity) on the criterion $f_k$													
AUS A	7077.64	14251.52	0.0920	-0.1429	153.75	0.6220	0.0502	1.83	109149.52	7822	1	1	1	2
AUS B	11.76	335436.67	0.1358	0.1110	302.47	0.9362	0.0298	22082.17	212808.99	6361	2	2	2	3
AUS C	571.02	254849.07	0.0000	0.1834	41.59	0.9609	0.0471	423.60	22217.87	1742	2	1	2	3
AUS D	606.25	114830.78	0.4839	0.0997	81.96	0.5389	0.0912	140.49	197743.75	3804	3	3	3	3
AUS E	189.71	381898.80	0.4477	0.4009	221.02	0.4458	0.0700	1365.69	727458.40	19875	1	1	1	2
AUS F	398.89	66519.64	0.5458	-0.0584	633.32	0.5317	0.0778	127.96	1702363.39	29737	1	1	1	2
AUS G	60.44	12854.30	0.3711	0.2078	517.75	0.1063	0.1445	85.74	5967888.89	7457	1	2	1	3
AUS H	7060.27	140420.67	0.3079	0.2516	1373.47	0.7053	0.0490	10.00	370544.29	13666	1	0	1	2
AUS I	429.02	46819.10	0.4917	-0.3039	54.84	0.9009	0.1660	77.42	0.00	8918	1	0	1	1
AUS J	1259.38	11902.46	0.2688	-0.4245	153.05	0.1936	0.3518	7.70	1472041.67	3804	1	1	1	2
AUS K	881.45	107923.37	0.5305	0.1745	12.21	0.6863	0.1652	79.94	3544850.01	37407	3	3	3	3
<b>Poland – Public Benefit Organisations</b>														
PBO	$f_k(a_i)$ – evaluation of the alternative $a_i$ (PBO) on the criterion $f_k$													
POLA	90.98	26694.42	0.0457	0.3024	41.41	0.8865	0.2815	204.26	14319.54	4117	3	3	3	3
POL B	89.44	29855.98	0.4663	0.4078	106.32	0.0322	0.0625	231.50	19640.25	4171	3	3	3	3
POL C	572.95	21367.02	0.0000	-0.0718	14.04	0.0000	0.0007	35.56	0.00	4318	2	1	1	1
POL D	0.00	37448.55	0.3462	-0.0788	66.73	0.2625	0.7341	4243.43	82577.78	4151	2	2	2	2
POL E	71.95	30175.27	0.0597	0.1709	30.30	0.0676	0.9723	11.76	0.00	3456	3	2	2	3
POL F	6.93	58578.88	0.1074	-0.0311	66.67	0.9255	0.3605	3386.49	30640.66	3110	3	3	3	3
POL G	104.97	8645.69	0.0000	-0.0928	0.00	0.9943	0.0000	84.58	277200.00	2794	2	1	2	2
POL H	37.98	40155.69	0.0000	1.1761	54.74	0.4237	0.1478	1100.92	132396.92	120	3	3	3	2
POL I	670.70	39624.44	0.0217	-0.5438	0.00	0.1287	0.0000	48.94	0.00	519	2	2	1	2
POL J	1039.83	217163.46	0.0740	0.4368	12.32	0.9998	0.0000	192.00	3350.00	1450	2	2	1	1
POL K	1003.37	22893.19	0.0687	0.1520	76.48	0.8096	0.0715	17.65	30319.50	1427	2	2	1	2

Source: own elaboration



**dr Dariusz KACPRZAK**

Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka

e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.08

## ZASTOSOWANIE SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH W MODELU RÓWNOWAGI RYNKOWEJ<sup>1</sup>

### Streszczenie

W pracy rozważono liniowy model równowagi rynkowej, w którym parametry są liczbami rzeczywistymi. W modelu tym zakłada się, że popyt i podaż zależą tylko od ceny, a czynniki pozacenowe są niezmiennie. Jednak, by uzyskać bardziej realistyczny model, można uwzględnić wpływ czynników pozacenowych na popyt i podaż. W ten sposób otrzyma się model z rozmytymi parametrami, które mogą być reprezentowane za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Aby wyznaczyć rozmytą równowagę rynkową tego modelu, należy rozwiązać rozmyty, liniowy układ równań.

**Słowa kluczowe:** podaż, popyt, równowaga rynkowa, skierowane liczby rozmyte

## APPLICATION OF ORDERED FUZZY NUMBERS TO MODELING OF MARKET EQUILIBRIUM

### Summary

The paper considers a linear model of market equilibrium in which real numbers are taken as parameters. In the model, it is assumed that demand and supply depend only on price, while other (non-price related) determinants do not change. However, to get a more realistic model, the author takes into account the impact of other (non-price related) determinants on demand and supply. In this way, a model with fuzzy parameters is obtained, which can be represented by means of ordered fuzzy numbers. In order to determine the fuzzy market equilibrium of such a model, a fuzzy linear system of equations must be solved.

**Key words:** demand, supply, market equilibrium, ordered fuzzy numbers

**JEL:** C02, C20, C65

---

<sup>1</sup> Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

## 1. Wstęp

W pracy przedstawiono matematyczny model sytuacji ekonomicznej, nazywanej równowagą rynkową. Jest to taki stan gospodarki, w którym popyt na dobra i usługi jest równoważony podażą tych dóbr i usług. Chcąc zapewnić przejrzystość i prostotę modelu (częściowej) równowagi, często przyjmuje się, że funkcje popytu i podaży są liniowe o rzeczywistych parametrach oraz korzysta się z klauzuli *ceteris paribus*, która zakłada niezmiennosc determinantów pozacenowych. Jednak, aby model był bliższy rzeczywistości obrazowi rynku, można uwzględnić wpływ czynników pozacenowych na parametry funkcji popytu i podaży. W ten sposób osiąga się model równowagi o parametrach rozmytych.

Celem pracy jest prezentacja modelu skierowanych liczb rozmytych w aspekcie możliwości zastosowania go w modelowaniu ekonomicznym. Wykorzystano go w modelu równowagi częściowej, w którym parametry przedstawiono za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Działania arytmetyczne na tych liczbach są zbliżone do działań na liczbach rzeczywistych. Dodatkowo, istnienie elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych względem mnożenia pozwala na rozwiązywanie układów równań liniowych o rozmytych współczynnikach.

W literaturze można znaleźć szereg prac, które stosują model skierowanych liczb rozmytych w modelach ekonomicznych. Modelem tym posłużono się m.in.: do prezentacji przychodu i kosztu [Kosiński i in. 2009; Kacprzak, 2010; 2012a], w modelu Leontiewa [Kacprzak, 2008; 2010; 2017], do prezentacji cen akcji [Kacprzak, 2012b; Kacprzak i in. 2013; Marszałek, Burczyński, 2013], do prezentacji cen i dynamiki ich zmian [Kacprzak, 2014] czy do ustalania ekonomicznej wielkości dostawy [Kacprzak, Kosiński, 2014; Sobol i in. 2015]. Ważnym zastosowaniem modelu skierowanych liczb rozmytych jest użycie go w wielokryterialnych metodach wspomagana decyzji. Badania w tym zakresie zostały zapoczątkowane przez Roszkowską i Kacprzaka [Roszkowska, Kacprzak, 2016; Kacprzak, 2017], następnie wykorzystane do rozwiązywania praktycznego problemu sterowania linią produkcyjną [Rudnik, Kacprzak, 2017]. Wspomniane wyżej zastosowania korzystają ze skierowania jako dodatkowej informacji oraz arytmetykę zbliżoną do arytmetyki liczb rzeczywistych, czego nie posiadały wcześniejsze modele liczb rozmytych.

Artykuł składa się z siedmiu części. W drugiej krótko zaprezentowano liniowy model równowagi rynkowej o parametrach rzeczywistych, w następnej przedstawiono argumenty przemawiające za zastąpieniem w tym modelu parametrów rzeczywistych liczbami rozmytymi. Część czwartą i piątą poświęcono prezentacji modelu skierowanych liczb rozmytych i użyciu tych liczb jako parametrów modelu równowagi. Ostatnią część stanowi przykład numeryczny i podsumowanie.

## 2. Liniowy model równowagi rynkowej

Popyt na dobro to przypadająca na jednostkę czasu wielkość zapotrzebowania odpowiadająca różnym cenom tego dobra. Zależy on od wielu zmiennych, z których podstawową (wynikającą z określenia) jest cena. Do pozacenowych determinantów popytu można zaliczyć:

- dochody nabywców,

- ceny dóbr komplementarnych i substytucyjnych,
- oczekiwania dotyczące sytuacji rynkowej,
- gusty i preferencje nabywców,
- przewidywane zmiany cen dobra,
- zmiany liczby i struktury ludności [Milewski, Kwiatkowski, 2005, s. 46].

Z kolei, podaż dobra to ilość dobra w jednostce czasu oferowana na rynku przy różnych wysokościach ceny. Podobnie jak w przypadku popytu, podaż jest również funkcją wielu zmiennych, z których główną jest także cena. Natomiast do pozacenowych determinantów podaży można zaliczyć:

- koszty wytwarzania,
- rentowność produkcji dóbr substytucyjnych,
- przewidywane zmiany cen dobra,
- wypadki losowe i czynniki naturalne (przy pewnych rodzajach produkcji) [Milewski, Kwiatkowski, 2005, s. 51].

W ekonomii powszechnie korzysta się z klauzuli *ceteris paribus*. Pozwala ona badać np. zależność między popytem a ceną oraz podażą a ceną, jak również równowagę rynkową, zakładając, że czynniki pozacenowe nie ulegają zmianie. W pozycjach poświęconych ekonomii matematycznej wspomniany model równowagi rynkowej często jest przedstawiany za pomocą funkcji liniowych, tzw. model liniowy [Chaing, 1994, s. 48; Gawinecki, 2000, s. 88]. Zaletą takiego podejścia jest niewątpliwie przejrzystość i prostota.

W celu zaprezentowania liniowego modelu równowagi rynkowej, zakłada się, że na rynku (wyizolowanym) znajduje się tylko jedno dobro konsumpcyjne. Oznacza to, że w modelu równowagi wystarczy uwzględnić trzy zmienne, tj.:

- $P$  – cenę dobra,
- $Q_d$  – wielkość popytu na dobro,
- $Q_s$  – wielkość podaży dobra.

Ponadto, zakłada się, opierając się na obserwacji rynku, że popyt jest malejącą liniową funkcją ceny, tzn. ma postać (rysunek 1.)<sup>2</sup>:

$$Q_d = a - bP, \quad (1)$$

natomiast podaż jest rosnącą liniową funkcją ceny, tzn. ma postać (rysunek 1.):

$$Q_s = -c + dP, \quad (2)$$

gdzie parametry  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ . Dodatkowo przyjmuje się, że podaż nie występuje do chwili, kiedy cena nie przekroczy określonego dodatniego poziomu (z równania (2) wynika, że jest on równy  $c/d$ ). Równowaga na modelowanym rynku zachodzi wówczas, gdy:

$$Q_d = Q_s. \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę równania (1)-(3), równowaga rynkowa jest osiągnięta, gdy cena ma wartość:

---

<sup>2</sup> Na rysunku 1. oznaczenia osi nie są zgodne z konwencją matematyczną, tzn. oś pozioma oznacza cenę, a oś pionowa opisuje wielkość popytu i podaż, ponieważ zastosowano konwencję przyjętą w podręcznikach do ekonomii. Pozostałe rysunki również utrzymano w tej konwencji.

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}, \quad (4)$$

a odpowiadająca jej wielkość równowagi  $\bar{Q}$  ( $\bar{Q} = Q_d = Q_s$ ) wynosi:

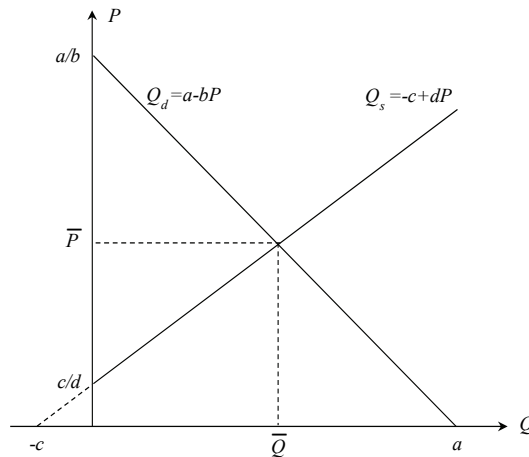
$$\bar{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}. \quad (5)$$

Z (5) wynika, że aby  $\bar{Q} > 0$  (punkt przecięcia musi znajdować się powyżej osi poziomej) parametry funkcji liniowych (1) i (2) muszą spełniać warunek:

$$ad > bc. \quad (6)$$

### RYSUNEK 1.

#### Ilustracja graficzna liniowej funkcji popytu (1), liniowej funkcji podaży (2) oraz równowagi rynkowej



Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Chiang, 1994, s. 49].

### 3. Liniowy model równowagi rynkowej o rozmytych parametrach

W uproszczonym liniowym modelu równowagi rynkowej (1)-(3) założono, że jego parametry, tzn.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  są rzeczywistymi liczbami dodatnimi. Jednak zwrócono uwagę na to, że aby model równowagi rynkowej był bliższy rzeczywistości, a jednocześnie dalej pozostał przejrzysty i prosty, te parametry mogą być opisane za pomocą liczb rozmytych, co wynika z kilku obserwacji rynku.

#### 1. Istnienie czynników pozacenowych.

Na rzeczywistym rynku, jak wspomniano w części 1., popyt zależy od różnych czynników pozacenowych. Zmiana któregoś z nich powoduje przesunięcie funkcji popytu. W przypadku liniowej funkcji popytu znajduje to odzwierciedlenie w zmianie wartości wyrazu wolnego, czyli elementu  $a$  w liniowej funkcji popytu (1).

#### 2. Elastyczność cenowa funkcji popytu.

Elastyczność cenowa popytu mierzy procentową (względna) zmianę zapotrzebowania w reakcji na procentową (względna) zmianę ceny. Do czynników wpływających na jej wielkość można zaliczyć m.in. ilość i bliskość substytutów oraz procentowy udział dobra w wydatkach konsumenta [Słoman, 2001, s. 63]. Korzystając z pochodnej funkcji, można pokazać, że elastyczność cenowa liniowej funkcji popytu zależy wprost proporcjonalnie od współczynnika kierunkowego. Oznacza to, że czynniki pozacenowe oddziałują na zmianę współczynnika kierunkowego  $c$  w liniowej funkcji popytu (1).

### 3. Stosowanie określeń nieprecyzyjnych i niejednoznacznych w ekonomii.

Dane do konstrukcji funkcji popytu mogą pochodzić z wielorakich źródeł, m.in. w wyniku ankietowania konsumentów. Ci z kolei mogą stosować, co jest częste w ekonomii, określenia nieprecyzyjne i niejednoznaczne. Na przykład konsumenci, udzielając odpowiedzi na pytanie o wielkość zapotrzebowania na dobro, gdy jego cena wzrośnie o jednostkę, mogą posługiwać się określeniami typu „około 10” czy „w przybliżeniu 10”, zamiast precyzyjną wartością. W przypadku liniowej funkcji popytu, wykorzystując interpretację matematyczną czy ekonometryczną, współczynnik kierunkowy wyznacza wielkość spadku popytu wywołanego wzrostem ceny o jednostkę, co oznacza, że takie nieprecyzyjne informacje znajdują odzwierciedlenie we współczynniku kierunkowym  $c$  w liniowej funkcji popytu (1).

Analogiczne uwagi można sformułować w stosunku do liniowej funkcji podaży. Wspomniane obserwacje rzeczywistego rynku uzasadniają użycie liczb rozmytych do opisu parametrów modelu równowagi rynkowej.

## 4. Skierowane liczby rozmyte

W 1965 roku w czasopiśmie „Information and Control” ukazała się praca Lotfi A. Zadeha pod tytułem: *Fuzzy Sets* [Zadeh, 1965], w której autor wprowadził pojęcie zbioru rozmytego. Liczba rozmyta to wypukły, normalny zbiór rozmyty, określony na uniwersum liczb rzeczywistych, którego funkcja przynależności jest kawałkami ciągła. Zbiory i liczby rozmyte dały możliwość matematycznego modelowania wielkości nieprecyzyjnych, niepewnych czy też wyrażonych w postaci opisowej (lingwistycznych). Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, m. in. w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i podejmowaniem decyzji.

Podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych opierają się na zasadzie rozszerzania i są dość skomplikowane. Wymagają wykonania wielu operacji zarówno na stopniach przynależności, jak i na elementach nośników. Dodatkowo zastosowania praktyczne liczb rozmytych pokazują, że ich funkcje przynależności zazwyczaj nie są dyskretne, ale ciągłe, a także mają stosunkowo regularny kształt, często w postaci: trójkąta, trapezu, krzywej Gaussa itp. Oznacza to, że nie trzeba podawać stopni przynależności dla wszystkich elementów nośnika, a jedynie kilka parametrów, które jednoznacznie określają regularne funkcje przynależności. Powyższe spostrzeżenia sprawiły, że Dubois i Prade [Dubois, Prade, 1980, s. 53] zaproponowali specjalną postać liczb roz-

mytych, nazywaną reprezentacją typu  $LR$ , która znacznie poprawia efektywność wykonywanych działań arytmetycznych. Jednocześnie pokazali oni, że dokładne wzory można uzyskać tylko dla dodawania i odejmowania, natomiast w przypadku mnożenia i dzielenia przedstawiono formuły przybliżone.

Model liczb rozmytych, zaproponowany przez Zadeha, a także jego późniejsza modyfikacja, tzw. model  $LR$ , posiadają kilka słabości, które ograniczają ich zastosowanie w niektórych dziedzinach, np. w modelowaniu ekonomicznym. Niedoskonałości te wynikają przede wszystkim z określenia działań arytmetycznych na tych liczbach. Powodują one powiększanie nośnika (niezależnie, czy liczby rozmyte dodajemy, czy odejmujemy), jak również brak elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych w stosunku do mnożenia. Skutkuje to brakiem możliwości rozwiązywania, w ogólnym przypadku, prostych równań:  $A + X = C$  oraz  $A \cdot X = C$ , gdzie  $A$  i  $C$  są ustalonymi liczbami rozmytymi, ponieważ  $A + X + (-A) \neq X$  i  $A \cdot X \cdot A^{-1} \neq X$ . Dodatkowo, rozwiązanie równania  $A + X = C$  nie istnieje, jeżeli nośnik liczby  $A$  jest szerszy, niż nośnik liczby  $C$ .

Wspomnianych powyżej ograniczeń jest pozbawiony model skierowanych liczb rozmytych (*Ordered Fuzzy Numbers* – OFN)<sup>3</sup>. Został on zaproponowany w 2002 roku przez Kosińskiego, Prokopowicza i Ślęzaka [Kosiński i in. 2002; 2003; Kosiński, Prokopowicz, 2004]. Arytmetyka działań w tym modelu jest analogiczna do działań na liczbach rzeczywistych, które stają się szczególnym przypadkiem OFN.

Skierowaną liczbą rozmytą  $A$  nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych:

$$A = (f_A, g_A), \quad (7)$$

gdzie

$$f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (8)$$

Poszczególne funkcje skierowanej liczby rozmytej nazywamy odpowiednio:  $f_A$  – częścią wznoszącą (*UP*),  $g_A$  – częścią opadającą (*DOWN*) (rysunek 2a). Ponieważ obie te funkcje są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio  $UP_A$  i  $DOWN_A$ , których granice oznaczamy następująco:  $UP_A = (f_A(0), f_A(1))$  oraz  $DOWN_A = (g_A(1), g_A(0))$ . Na rysunku 2a przedstawiono ilustrację graficzną skierowanej liczby rozmytej, gdzie  $y$  jest argumentem funkcji  $f_A$  i  $g_A$ , natomiast  $x$  wartością tych funkcji. Jeżeli funkcje  $f_A$  i  $g_A$  są ściśle monotoniczne, istnieją do nich funkcje odwrotne  $f_A^{-1}$  i  $g_A^{-1}$ , określone na odpowiednich przedziałach  $UP_A$  i  $DOWN_A$  (rysunek 2b). Do zbiorów  $UP_A$  i  $DOWN_A$  dodajemy na przedziale  $[f_A(1), g_A(1)]$  (przedział ten może być jednoelementowy) funkcję stałą (*CONST*) równą 1 (warunek normalności). Wówczas zbiór  $UP_A \cup [f_A(1), g_A(1)] \cup DOWN_A$  tworzy jeden przedział (nośnik liczby  $A$ ). Pozwala to określić funkcję przynależności  $\mu_A$  skierowanej liczby rozmytej  $A$  w następujący sposób [Kacprzak, 2008; 2010]:

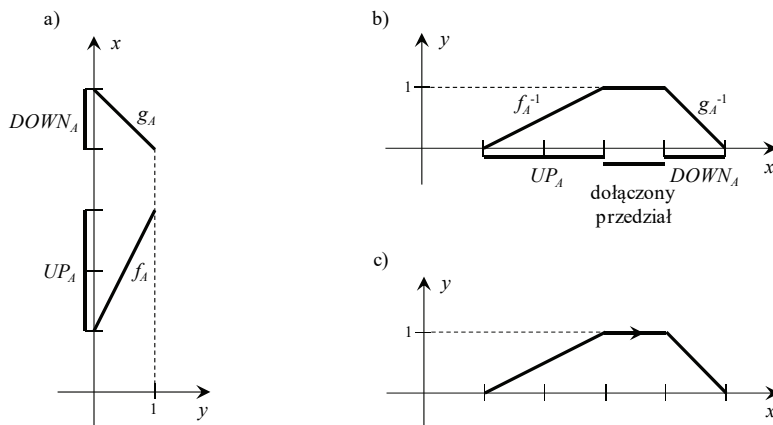
<sup>3</sup> Po śmierci prof. Kosińskiego, aby upamiętnić i uhonorować jego imię, termin *Ordered Fuzzy Numbers* często zastępowano określeniem *Kosinski Fuzzy Numbers* [Prokopowicz, Pedrycz, 2015].



$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin [f_A(0), g_A(0)] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (9)$$

RYSUNEK 2.

- a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) Skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do wypukłych liczb rozmytych, c) Strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację OFN



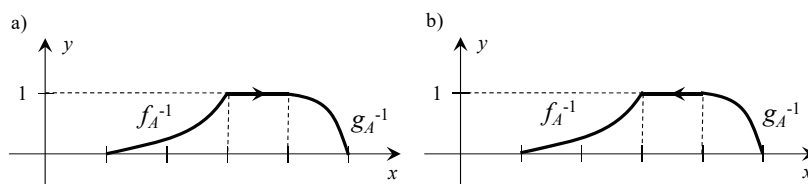
Źródło: [Kosiński i in. 2002].

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do wypukłych liczb rozmytych (*Convex Fuzzy Numbers* – CFN), jednak są wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką – skierowanie (rysunek 2c).

Graficznie liczba  $(f_A, g_A)$  nie różni się od liczby  $(g_A, f_A)$ , lecz w rzeczywistości są to dwie różne liczby, różniące się skierowaniem. Skierowanie pozwala na podzielenie zbioru skierowanych liczb rozmytych na dwie grupy: liczby o skierowaniu dodatnim, jeżeli skierowanie jest zgodne z osią  $Ox$  (rysunek 3a), liczby o skierowaniu ujemnym, jeżeli skierowanie jest przeciwne niż oś  $Ox$  (rysunek 3b).

RYSUNEK 3.

- a) Skierowana liczba rozmyta  $(f_A, g_A)$  o skierowaniu dodatnim,  
b) Skierowana liczba rozmyta  $(g_A, f_A)$  o skierowaniu ujemnym



Źródło: opracowanie własne.

Szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych są liczby rzeczywiste. W modelu OFN są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Dokładniej, liczba  $r \in \mathbb{R}$  jest zapisywana jako skierowana liczba rozmyta postaci  $r = (r^*, r^*)$ , gdzie  $r^*(y) = r$  dla  $y \in [0,1]$ .

Podstawowe działania arytmetyczne, czyli dodawanie (+), odejmowanie (-), mnożenie ( $\times$ ) i dzielenie ( $/$ ), na skierowanych liczbach rozmytych są określone następująco. Niech  $A = (f_A, g_A)$  i  $B = (f_B, g_B)$  będą skierowanymi liczbami rozmytymi, wówczas liczba  $C = (f_C, g_C)$  jest wynikiem działania  $* \in \{+, -, \times, /\}$  na liczbach:  $A$  i  $B$  ( $C = A * B$ ), jeżeli:

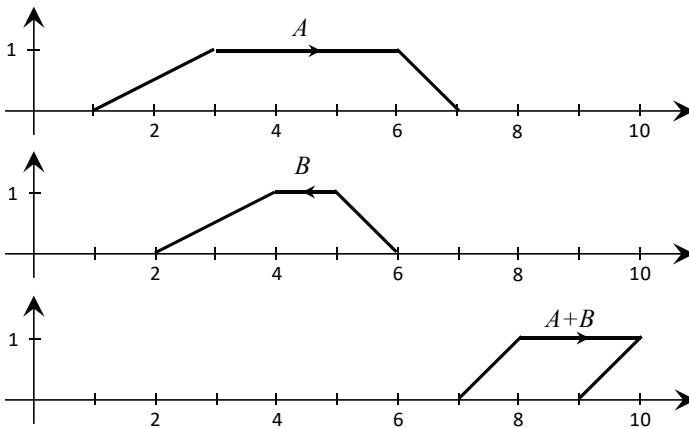
$$\forall y \in [0,1][f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)]. \quad (10)$$

Dodatkowo, w przypadku dzielenia musi być spełniony warunek, że  $\forall y \in [0,1]f_B(y) \neq 0$  i  $g_B(y) \neq 0$ . Zbiór skierowanych liczb rozmytych z tak określonymi działaniami ma strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej [Kosiński, Prokopowicz, 2004].

Warto w tym miejscu nadmienić, że wykonując działania arytmetyczne na skierowanych liczbach rozmytych, jako wynik można uzyskać tzw. liczby „niewłaściwe” [Kosiński i in. 2003], niebędące skierowanymi liczbami rozmytymi, których interpretacja jest trudna. Na przykład weźmy dwie skierowane liczby rozmyte  $A = (1 + 2s, 7 - s)$  i  $B = (6 - s, 2 + 2s)$ , gdzie  $s \in [0,1]$ , wówczas ich suma  $A + B = (7 + s, 9 + s)$ , gdzie  $s \in [0,1]$  jest niewłaściwą liczbą rozmytą (rysunek 4).

#### RYSUNEK 4.

**Dwie trapezowe skierowane liczby rozmyte  $A$  i  $B$  oraz „niewłaściwa” liczba będąca ich sumą  $A + B$**



Źródło: opracowanie własne.

## 5. Skierowane liczby rozmyte w liniowym modelu równowagi rynkowej

Skierowane liczby rozmyte, poza modelowaniem nieprecyzyjności (rozmytości), pozwalają również uwzględnić dodatkowy element (informację) obrazowany skierowaniem. Przyjmijmy, że rozmyte liniowe funkcje popytu (1) i podaży (2) mają postać:

$$Q_d = \tilde{a} - \tilde{b}P, \quad (10)$$

$$Q_s = -\tilde{c} + \tilde{d}P, \quad (11)$$

gdzie parametry:  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$  i  $\tilde{d}$  są reprezentowane za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Biorąc pod uwagę skierowanie, otrzymamy  $3^4 = 81$  różnych układów parametrów modelu (wliczając w to również parametry rzeczywiste). W pracy ograniczono się do układów, w których skierowanie będziemy interpretować przez pryzmat oczekiwań uczestników rynku w odniesieniu do ceny. Oznacza to, że wartość  $f(0)$  będzie określała wielkość parametru najmniej oczekiwaną (pożądaną) przez konsumenta lub producenta, natomiast  $g(0)$  wielkość parametru najbardziej oczekiwaną (pożądaną). Korzystając z liniowej rozmytej funkcji popytu (10), mamy:

$$Q_d = \tilde{a} - \tilde{b}P \Rightarrow P = \frac{\tilde{a} - Q_d}{\tilde{b}}. \quad (12)$$

Warto zauważyć, że im niższa cena rynkowa, tym korzystniejsza sytuacja konsumenta (założyliśmy, że popyt jest malejącą liniową funkcją ceny). Z (12) widać, że wyraz wolny  $\tilde{a}$  stoi w liczniku, co oznacza, że im mniejsza jego wartość, tym cena dobra jest niższa. Ponadto, współczynnik kierunkowy  $\tilde{b}$  stoi w mianowniku, więc im wyższa jego wartość, tym cena dobra jest niższa. Sprawia to, że wyraz wolny  $\tilde{a}$  powinien mieć skierowanie ujemne (rysunek 5a, gdzie  $\tilde{a} = \tilde{40}$ ), natomiast współczynnik kierunkowy  $\tilde{b}$  skierowanie dodatnie (rysunek 6a, gdzie  $\tilde{c} = \tilde{8}$ ). Odmiennie sytuacja wygląda ze strony producenta. Z (11) mamy:

$$Q_s = -\tilde{c} + \tilde{d}P \Rightarrow P = \frac{\tilde{c} + Q_s}{\tilde{d}}. \quad (13)$$

Producent jest zainteresowany ukształtowaniem się ceny na jak najwyższym poziomie (założyliśmy, że podaż jest rosnącą liniową funkcją ceny). Z (13) widać, że wyraz wolny  $\tilde{c}$  powinien mieć skierowanie dodatnie (rysunek 5b, gdzie  $\tilde{c} = \tilde{6}$ ), zaś współczynnik kierunkowy  $\tilde{d}$  skierowanie ujemne (rysunek 6b, gdzie  $\tilde{d} = \tilde{20}$ ).

Korzystając z zależności (4)-(5) oraz rozmytej liniowej funkcji popytu (10) i z rozmytej liniowej funkcji podaży (11), otrzymujemy rozmytą równowagę rynkową, przy której rozmyta cena ma postać:

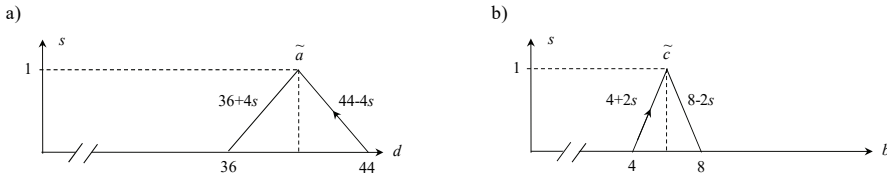
$$\bar{P} = \frac{(f_a g_a) + (f_c g_c)}{(f_b g_b) + (f_d g_d)} = \frac{(f_a + f_c g_a + g_c)}{(f_b + f_d g_b + g_d)}, \quad (14)$$

a odpowiadająca jej rozmyta wielkość równowagi  $\bar{Q}$  ( $\bar{Q} = Q_d = Q_s$ ) wyraża się następująco:

$$\bar{Q} = \frac{(f_a g_a)(f_d g_d) - (f_b g_b)(f_c g_c)}{(f_b g_b) + (f_d g_d)} = \frac{(f_a f_d g_a g_d) - (f_b f_c g_b g_c)}{(f_b + f_d g_b + g_d)}. \quad (15)$$

RYSUNEK 5.

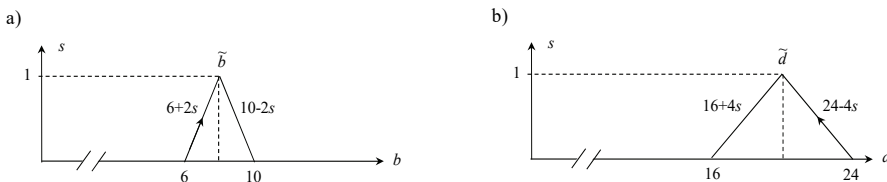
Skierowane liczby rozmyte reprezentujące wyraz wolny rozmytej liniowej funkcji: a) popytu (10), b) podaży (11)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 6.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące współczynnik kierunkowy rozmytej liniowej funkcji: a) popytu (10), b) podaży (11)



Źródło: opracowanie własne.

## 6. Przykład rozmytego liniowego modelu równowagi rynkowej o współczynnikach reprezentowanych za pomocą OFN

Rozważmy rozmyty liniowy model równowagi rynkowej o współczynnikach reprezentowanych za pomocą trójkątnych skierowanych liczb rozmytych. Przyjmijmy, że rozmyte liniowe funkcje popytu (10) oraz podaży (11) mają postać:

$$Q_d = \tilde{40} - \tilde{8}P, \quad (16)$$

$$Q_s = -\tilde{6} + \tilde{20}P. \quad (17)$$

Rozważmy trzy przypadki rozmywania parametrów modelu:

- rozmyte wyrazy wolne funkcji (16) i (17),
- rozmyte współczynniki kierunkowe funkcji (16) i (17),
- rozmyte parametry funkcji (16) i (17).

**AD a)** Rozmyty liniowy model równowagi rynkowej o rozmytych wyrazach wolnych. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (44 - 4s, 36 + 4s) - (8,8)P, \quad (18)$$

$$Q_s = -(4 + 2s, 8 - 2s) + (20,20)P, \quad (19)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, zgodnie z (14), gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(44-4s, 36+4s) + (4+2s, 8-2s)}{(8,8) + (20,20)} = \left( \frac{48-2s}{28}, \frac{44+2s}{28} \right), \quad (20)$$

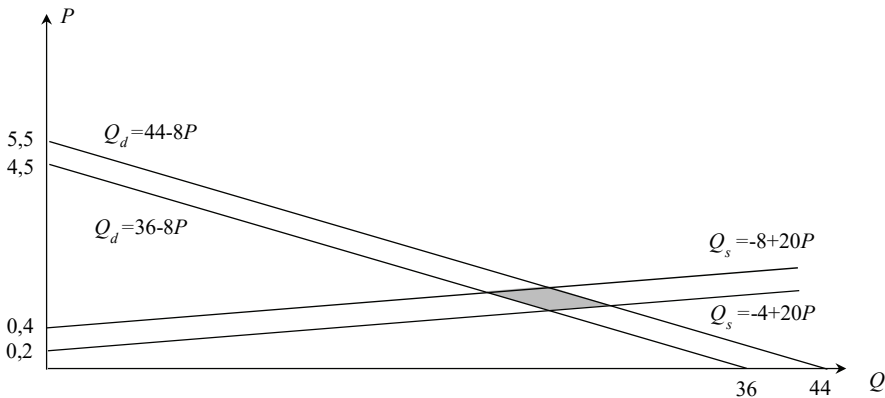
a odpowiadająca jej wielkość równowagi  $\bar{Q}$ , zgodnie z (15), ma postać:

$$\bar{Q} = \frac{(44-4s, 36+4s)(20,20) - (8,8)(4+2s, 8-2s)}{(8,8) + (20,20)} = \left( \frac{848-96s}{28}, \frac{656+96s}{28} \right), \quad (21)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Na rysunku 7. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (18) i podaży (19). Natomiast na rysunku 8a zobrazowano skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (20), a na rysunku 8b odpowiadającą jej wielkość równowagi (21).

### RYSUNEK 7.

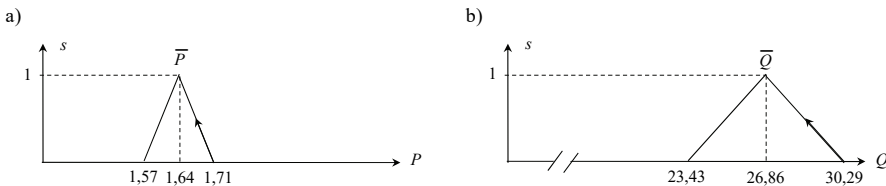
Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (18) i funkcji podaży (19)



Źródło: opracowanie własne.

### RYSUNEK 8.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę  $\bar{P}$  (20), b) wielkość równowagi  $\bar{Q}$  (21)



Źródło: opracowanie własne.

**AD b)** Liniowy rozmyty model równowagi rynkowej o rozmytych współczynnikach kierunkowych. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (40,40) - (6 + 2s, 10 - 2s)P, \quad (22)$$

$$Q_s = -(6,6) + (24 - 4s, 16 + 4s)P, \quad (23)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(40,40)+(6,6)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left( \frac{46}{30-2s}, \frac{46}{26+2s} \right), \quad (24)$$

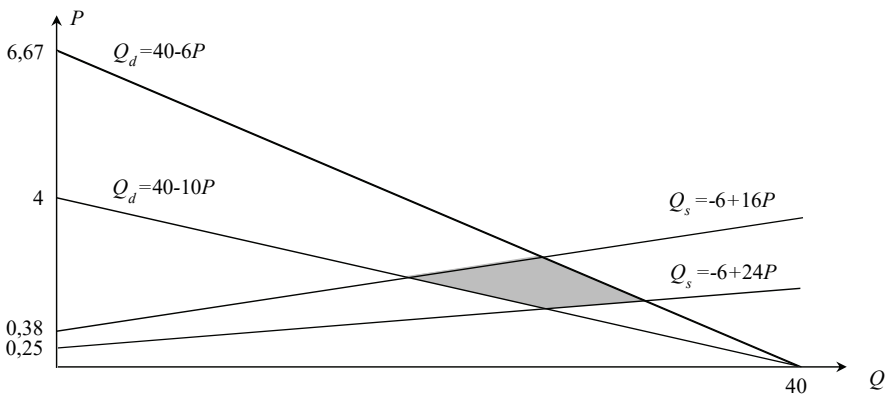
a odpowiadająca jej wielkość równowagi  $\bar{Q}$  jest postaci:

$$\bar{Q} = \frac{(40,40)(24-4s,16+4s)-(6,6)(6+2s,10-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left( \frac{924-172s}{30-2s}, \frac{580+172s}{26+2s} \right), \quad (25)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Na rysunku 9. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i podaży (23). Natomiast na rysunku 10a zobrazowano skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (24), a na rysunku 10b odpowiadającą jej wielkość równowagi (25).

### RYSUNEK 9.

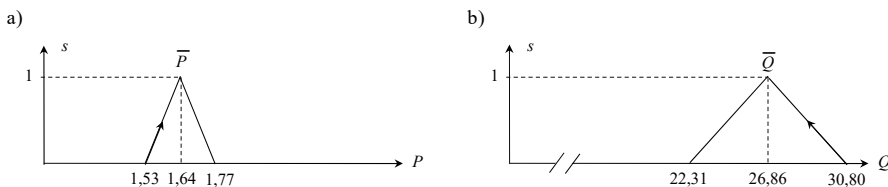
**Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i funkcji podaży (23)**



Źródło: opracowanie własne.

### RYSUNEK 10.

**Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę  $\bar{P}$  (24), b) wielkość równowagi  $\bar{Q}$  (25)**



Źródło: opracowanie własne.

**AD c)** Liniowy rozmyty model równowagi rynkowej o rozmytych parametrach. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (44 - 4s, 36 + 4s) - (6 + 2s, 10 - 2s)P, \quad (26)$$

$$Q_s = -(4 + 2s, 8 - 2s) + (24 - 4s, 16 + 4s)P, \quad (27)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(44-4s,36+4s)+(4+2s,8-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left( \frac{48-2s}{30-2s}, \frac{44+2s}{26+2s} \right), \quad (28)$$

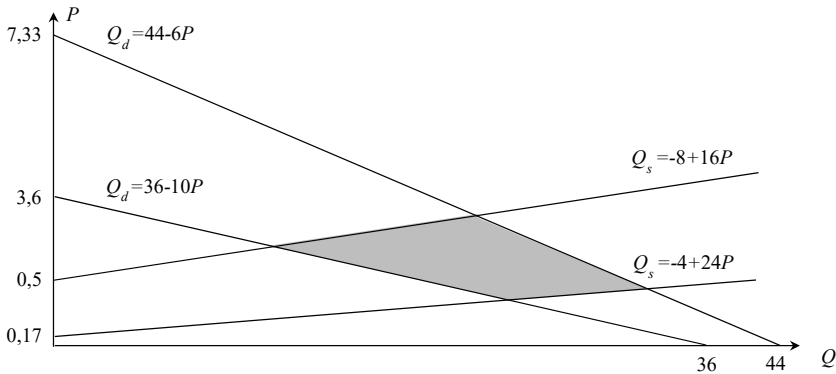
a odpowiadająca jej wielkość równowagi  $\bar{Q}$  jest postaci:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{(44-4s,36+4s)(24-4s,16+4s)-(6+2s,10-2s)(4+2s,8-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \\ &= \left( \frac{12s^2-292s+1032}{30-2s}, \frac{12s^2+244s+496}{26+2s} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie  $s \in [0,1]$ . Na rysunku 11. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (26) i podaży (27). Natomiast na rysunku 12a zobrazowano skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (28), a na rysunku 12b odpowiadającą jej wielkość równowagi (29).

#### RYSUNEK 11.

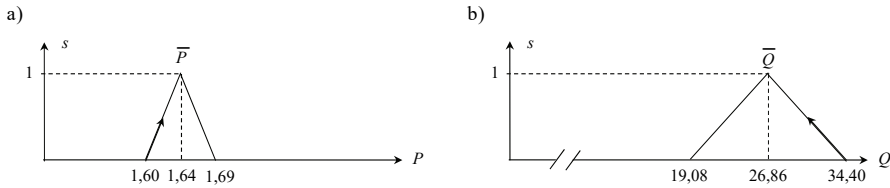
##### Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i funkcji podaży (23)



Źródło: opracowanie własne.

## RYSUNEK 12.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę  $\bar{P}$  (28), b) wielkość równowagi  $\bar{Q}$  (29)



Źródło: opracowanie własne.

## 7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono modyfikację liniowego modelu (częściowej) równowagi rynkowej, w którym parametry, zazwyczaj opisywane liczbami rzeczywistymi, zastąpiono skierowanymi liczbami rozmytymi. Umożliwia to reprezentowanie równowagi rynkowej za pomocą pewnego podzbioru płaszczyzny (płaszczyzny ceny i odpowiadającej jej wielkości popytu/podaży), a nie za pomocą punktu. Powoduje to, że model wierniej odzwierciedla rzeczywistość gospodarczą, ponieważ punktowe położenie równowagi jest raczej stanem idealnym i trudnym do osiągnięcia w realnych warunkach ekonomicznych. Co więcej, skierowane liczby rozmyte pozwalają uwzględnić dodatkowy czynnik, np. oczekiwania konsumenta czy producenta, obrazowany skierowaniem.

## Literatura

- Chiang A.C., 1994, *Podstawy ekonomii matematycznej*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York.
- Gawinecki J., 2000, *Matematyka dla ekonomistów*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlu i Prawa, Warszawa.
- Kacprzak D., 2008, *Model Leontiewa i skierowane liczby rozmyte*, VII Konferencja Naukowo-Praktyczna „Energia w nauce i technice”, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Suwałki.
- Kacprzak D., 2010, *Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Kacprzak D., 2012a, *Przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa wyrażony przy użyciu skierowanych liczb rozmytych*, „Zarządzanie i Finanse. Journal of Management and Finance”, no. 2/1.



- Kacprzak D., 2012b, *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji cen akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 6.
- Kacprzak D., 2014, *Prezentacja cen dóbr konsumpcyjnych oraz dynamiki ich zmian za pomocą skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 1.
- Kacprzak D., 2017, *Objective Weights Based on Ordered Fuzzy Numbers for Fuzzy Multiple Criteria Decision Making Methods*, “Entropy”, 19(7), 373.
- Kacprzak D., 2017, *The Input-Output Model Based on Ordered Fuzzy Numbers*, [in:] *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers: A Tribute to Professor Witold Kosiński*, P. Prokopowicz, J. Czerniak, D. Mikołajewski, Ł. Apiecionek, D. Ślęzak (eds.), “Studies in Fuzziness and Soft Computing”, vol. 356, Springer.
- Kacprzak D., Kosiński W., 2014, *Optimizing firm inventory costs as a fuzzy problem*, “Studies in Logic, Grammar and Rhetoric”, nr 37.
- Kacprzak D., Kosiński W., Kosiński W. K., 2013, *Financial stock data and ordered fuzzy numbers*, Artificial Intelligence and Soft Computing: 12th International Conference, ICAISC'2013, Berlin.
- Kosiński W., Prokopowicz P., 2004, *Algebra liczb rozmytych*, „Matematyka Stosowana”, nr 5(46).
- Kosiński W., Prokopowicz P., Kacprzak D., 2009, *Fuzziness – representation of dynamic changes by ordered fuzzy numbers*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 243, Springer-Verlag, Berlin.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002, *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions*, [in:] *Methods of Artificial Intelligence*, T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski (eds.), Gliwice.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered Fuzzy Numbers*, “Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic”, 52(3).
- Marszałek A., Burczyński T., 2013, *Financial fuzzy time series models based on ordered fuzzy numbers*, [in:] *Time Series Analysis. Modelling and Applications*, W. Pedrycz, S. M. Chen (eds.), ISRL 47, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Milewski R., Kwiatkowski E., 2005, *Podstany ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Prokopowicz P., Pedrycz W., 2015, *The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing*, “Artificial Intelligence and Soft Computing”, vol. 9119.
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, “Information Sciences”, vol. 369.
- Rudnik K., Kacprzak D., 2017, *Fuzzy TOPSIS method with ordered fuzzy numbers for flow control in a manufacturing system*, “Applied Soft Computing”, vol. 52.
- Słoman J., 2001, *Podstany ekonomii*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Sobol I., Kacprzak D., Kosiński W., 2015, *Optimizing of a company's costs under fuzzy data and optimal orders under dynamic conditions*, “Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 5.
- Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy Sets*, “Information and Control”, no. 8.

**dr Anna ŁYCHKOWSKA-HANĆKOWIAK**  
Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu  
e-mail: anna.lyczkowska-hanckowiak@wsb.poznan.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.09

## BEHAVIORALNA WARTOŚĆ BIEŻĄCA W POSTACI SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

### Streszczenie

Punktem wyjścia tych rozważań jest behawioralna wartość bieżąca (BPV) zdefiniowana jako dodatnia L-R liczba rozmyta. W tej pracy informacje opisane za pomocą BPV zostały uzupełnione o subiektywną prognozę zwrotu trendu ceny rynkowej. Prognozę tę zaimplementowano w modelu BPV jako zwrot dodatniej liczby rozmytej. Posłużono się tutaj poniższymi zasadami zapisu domniemanego zwrotu trendu.

1. Domniemanie wzrostu wartości ceny zapisujemy za pomocą dodatniej orientacji liczby rozmytej.
2. Domniemanie spadku wartości ceny zapisujemy za pomocą ujemnej orientacji liczby rozmytej.

W ten sposób BPV została przedstawiona jako rozmyta liczba skierowana. Tak określoną BPV zastosowano do wyznaczenia stopy zwrotu. Przy oczywistym założeniu, że wartość przyszła jest zmienną losową, wyznaczona stopa zwrotu została opisana jako skierowany, rozmyty zbiór probabilistyczny. Na koniec dowiedziono, że stopa zwrotu wykazuje zwrot przeciwny do zwrotu BPV, co jest zgodne z teorią finansów.

**Słowa kluczowe:** behawioralne finanse, wartość bieżąca, skierowana liczba rozmyta

## BEHAVIOURAL PRESENT VALUE IN TERMS OF ORDERED FUZZY NUMBERS

### Summary

The starting point for our discussion is behavioural present value defined as a positive L-R fuzzy number. In this paper, the information described by means of BPV is supplemented with a subjective forecast of the orientation of the market price trend. The forecast is implemented in the BPV model as an orientation of the positive fuzzy number. The following rules of recording the alleged orientation of the trend are used:

1. Presumption of market price increase is described as positive orientation of fuzzy number.
2. Presumption of market price decrease is described as negative orientation of fuzzy number.

In this way, BPV is presented as an ordered fuzzy number. Thus defined BPV is used to determine the rate of return. With the obvious assumption that the future value is a random variable, the determined rate of return is described as an ordered fuzzy probabilistic set. Finally, it is shown that the return rate reveals an orientation opposite to the orientation of BPV, which is consistent with the theory of finance.

**Key words:** behavioural finance, present value, ordered fuzzy number

**JEL:** C44, C02, G10

## 1. Wstęp

Przez wartość bieżącą (w skrócie PV) rozumie się wartość terażniejszego ekwiwalentu płatności dostępnej w ustalonym momencie [Piasecki, 2011a]. Powszechnie jest już akceptowany pogląd, że PV przyszłych przepływów finansowych może być wartością przybliżoną. Z tego powodu PV jest przedstawiona jako liczba rozmyta. Początków takiego opisu PV należy szukać w pracach Warda [1985] i Buckleya [1987]. Klasyczna aksjomatyczna definicja PV Peccatiego [1972] została uogólniona do przypadku rozmytego przez Calziego [1990], który ukazał PV jako przedział rozmyty. Na przestrzeni ostatnich lat teorię tę w istotny sposób pogłębili i rozszerzyli m.in.: Greenhut i inni [1995], Sheen [2005], Gutierrez [1989], Kuchta [2000], Lesage [2001].

W pracach [Piasecki, 2011a; 2011b; Piasecki, Siwek, 2014] behawioralną wartość bieżącą (w skrócie BPV) zdefiniowano jako nieprecyzyjnie oszacowaną PV, ocenioną z uwzględnieniem wpływu czynników behawioralnych na podstawie ceny rynkowej instrumentu finansowego.

Celem prezentowanej pracy jest poszerzenie zbioru informacji opisywanych za pomocą BPV o subiektywną prognozę orientacji trendu ceny rynkowej.

## 2. Skierowane liczby rozmyte

Zbiory i liczby rozmyte pozwalają formalnie opisywać oraz przetwarzać wielkości i informacje nieprecyzyjne. Zbiór rozmyty  $A$  w danej przestrzeni  $\mathbb{X}$  definiuje się jako zbiór par  $A = \{(x, \mu_A): x \in \mathbb{X}\}$ , gdzie  $\mu_A: \mathbb{X} \rightarrow [0; 1]$  jest funkcją, która każdemu elementowi  $x \in \mathbb{X}$  przypisuje jego stopień przynależności do zbioru  $A$ . Liczba rozmyta (w skrócie FN) to podzbiór rozmyty  $S$  określony na przestrzeni liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  przez swoją półciągłą z góry funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  spełniającą warunki [Dubois, Prade, 1979]:

$$- \exists_{x \in \mathbb{R}}: \mu_S(x) = 1, \tag{1}$$

$$- \forall_{x, y, z \in \mathbb{R}}: x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_S(y) \geq \min(\mu_S(x), \mu_S(z)). \tag{2}$$

Wzorując się na pracy [Dubois, Prade, 1980], dla każdej czwórki  $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$  spełniającej warunek  $a_S \leq b_S \leq c_S \leq d_S$  definiujemy szczególny rodzaj FN  $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$  typu LR (w skrócie LR-FN). Każda z LR-FN  $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$  jest reprezentowana przez swoją funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  określoną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in ]-\infty; a_S[ \\ L_S(x), & x \in [a_S; b_S[ \\ 1, & x \in [b_S; c_S] \\ R_S(x), & x \in ]c_S; d_S] \\ 0, & x \in ]d_S; \infty[ \end{cases} \tag{3}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia  $L_S: [a_S; b_S] \rightarrow [0; 1]$  jest prawostronnie ciągłą funkcją rosnącą i prawa funkcja odniesienia  $R_S: [c_S; d_S] \rightarrow [0; 1]$  jest lewostronnie ciągłą funkcją malejącą. Dowolną parę funkcji  $(L_S, R_S)$  nazywamy parą funkcji odniesienia. Dla pary funkcji odniesienia  $(L_S, R_S)$  wyznaczamy parę ich uogólnionych odwrotności  $(L_S^*, R_S^*)$  określonych następująco:

$$L_S^*(\alpha) = \min\{x \in [a_S; b_S]: L_S(x) \geq \alpha\}, \quad (4)$$

$$R_S^*(\alpha) = \max\{x \in [c_S; d_S]: R_S(x) \geq \alpha\}. \quad (5)$$

Uogólniona odwrotność  $L_S^*: [0; 1] \rightarrow [a_S; b_S]$  lewej funkcji odniesienia jest ciągłą funkcją niemalejącą. Uogólniona odwrotność  $R_S^*: [0; 1] \rightarrow [c_S; d_S]$  prawej funkcji odniesienia jest ciągłą funkcją nierosnącą.

W pracy [Dubois, Prade, 1980] LR-FN zdefiniowano jedynie dla przypadku czwórki  $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$  spełniającej warunek  $a_S < b_S \leq c_S < d_S$  oraz ciągłych funkcji odniesienia będących suriekcjami.

Skierowane liczby rozmyte (w skrócie OFN) zostały wprowadzone przez Kosińskiego i współautorów w serii artykułów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002 a, b; 2003; Kosiński, 2006] jako rozszerzenie FN. Pojęcie to wdrożono tam w sposób intuicyjny za pomocą wykresów. Tutaj uściślimy je w zakresie niezbędnym do realizacji celu poznawczego postawionego na wstępie<sup>1</sup>. Pojęcie OFN jest ściśle powiązane z uporządkowaną parą  $(f_S, g_S)$  słabo monotonicznych ciągłych suriekcji  $f_S: [0; 1] \rightarrow UP_S$  i  $g_S: [0; 1] \rightarrow DOWN_S$  spełniających warunki:

$$(f_S(1) - f_S(0)) \cdot (g_S(1) - g_S(0)) \leq 0, \quad (6)$$

$$|f_S(1) - g_S(1)| \leq |f_S(0) - g_S(0)|, \quad (7)$$

$$UP_S \cap DOWN_S = \{f_S(1)\} \cap \{g_S(1)\}. \quad (8)$$

Funkcja  $f_S: [0; 1] \rightarrow UP_S$  jest nazywana funkcją wznoszącą, zaś funkcja  $g_S: [0; 1] \rightarrow DOWN_S$  jest nazywana funkcją opadającą. Obie te funkcje mają swoją wspólną nazwę – funkcje Kosińskiego. Warunki: (6), (7) i (8) implikują, że każda para Kosińskiego spełnia dokładnie jeden z poniższych warunków:

$$f_S(0) \leq f_S(1) \leq g_S(1) \leq g_S(0), \quad (9)$$

$$f_S(0) \geq f_S(1) \geq g_S(1) \geq g_S(0). \quad (10)$$

W przypadku spełnienia warunku (9) funkcję  $f_S$  nazywamy początkową funkcją Kosińskiego, natomiast funkcję  $g_S$  końcową funkcją Kosińskiego. Jeśli jest spełniony warunek (10), to funkcję  $f_S$  końcową funkcją Kosińskiego, zaś funkcję  $g_S$  początkową funkcją Kosińskiego.

Korzystając z tych określeń, dla dowolnej pary Kosińskiego  $(f_S, g_S)$  definiujemy OFN  $\vec{S}$  jako parę  $\langle S, \mathcal{U} \rangle$  złożoną z LR-FN  $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  i orientacji  $\mathcal{U}$ , gdzie:

<sup>1</sup> Całość omówienia pojęcia OFN opracowano na podstawie: [Piasecki, 2017].

- uogólniona odwrotność  $L_S^*$  lewej funkcji odniesienia jest równa początkowej funkcji Kosińskiego;
- uogólniona odwrotność  $R_S^*$  prawej funkcji odniesienia jest równa końcowej funkcji Kosińskiego;
- orientacja  $\mathcal{U}$  jest określona jako wspólny zwrot wszystkich wektorów prowadzących z przeciwdziedziny  $UP_S$  funkcji wznoszącej do przeciwdziedziny  $DOWN_S$  funkcji opadającej.

Powyższa definicja w pełni odpowiada intuicyjnemu określeniu OFN sformułowanemu przez Kosińskiego.

Ciągłość funkcji Kosińskiego powoduje, że  $UP_S$  i  $DOWN_S$  są przedziałami domkniętymi. Liczby  $f_S(0)$  i  $f_S(1)$  są granicami przedziału  $UP_S$ . Liczby  $g_S(0)$  i  $g_S(1)$  są granicami przedziału  $DOWN_S$ . Z tego powodu dowolną OFN  $\vec{S}$  z danymi  $UP_S$  i  $DOWN_S$  oznaczamy za pomocą symbolu  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ .

Kiedy  $f_S(0) < g_S(0)$ , to wtedy warunek (9) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca  $f_S$  jest niemalejąca i funkcja opadająca  $g_S$  jest nierosnąca. Z zależności: (3), (4) i (5) wynika, że dodatnio zorientowana OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie wyznacza FN  $S(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  opisaną przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in ]-\infty; f_S(0)[ \\ f_S^\triangleleft(x), & x \in [f_S(0); f_S(1)[ \\ 1, & x \in [f_S(1); g_S(1)] \\ g_S^\triangleright(x), & x \in ]g_S(1); g_S(0)] \\ 0, & x \in ]g_S(0); \infty[ \end{cases}, \quad (11)$$

gdzie:

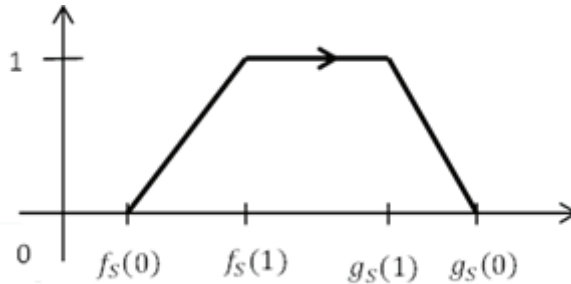
$$f_S^\triangleleft(x) = \max\{\alpha \in [0; 1]: f_S(\alpha) = x\}, \quad (12)$$

$$g_S^\triangleright(x) = \min\{\alpha \in [0; 1]: g_S(\alpha) = x\}. \quad (13)$$

Na rysunku 1. przedstawiono dodatnio zorientowaną skierowaną liczbę rozmytą (orientację zaznaczono strzałką).

## RYSUNEK 1.

Dodatnia orientacja OFN  $\vec{S} = (f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$



Źródło: opracowanie własne.

Kiedy  $f_S(0) > g_S(0)$ , to wtedy warunek (10) opisuje ujemną orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca  $f_S$  jest nierosnąca i funkcja opadająca  $g_S$  jest niemalejąca. Z zależności: (3), (4) i (5) wynika, że ujemnie zorientowana OFN  $\vec{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jednoznacznie determinuje FN  $S(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0))$  opisaną przez swą funkcję przynależności  $\mu_S: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in -\infty; g_S(0)[ \\ g_S^\triangleleft(x), & x \in [g_S(0); g_S(1)[ \\ 1, & x \in [g_S(1); f_S(1)] \\ f_S^\triangleright(x), & x \in ]f_S(1); f_S(0)] \\ 0, & x \in ]f_S(0); \infty[ \end{cases}, \quad (14)$$

gdzie:

$$g_S^\triangleleft(x) = \max\{\alpha \in [0; 1]: g_S(\alpha) = x\}, \quad (15)$$

$$f_S^\triangleright(x) = \min\{\alpha \in [0; 1]: f_S(\alpha) = x\}. \quad (16)$$

Na rysunku 2. przedstawiono ujemnie zorientowaną skierowaną liczbę rozmytą (orientację zaznaczono strzałką).

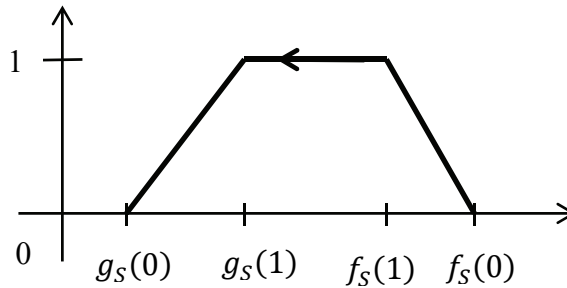
Skierowana liczba rozmyta  $\vec{S} = (f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$  jest dodatnia, jeżeli spełnia warunek:

$$\min\{f_S(0), g_S(0)\} > 0. \quad (17)$$

Na koniec zauważmy, że w przypadku  $f_S(0) = g_S(0)$  orientacja OFN jest niezdefiniowana. Wtedy jednak rozpatrujemy liczbę  $\vec{S}(f_S(0), f_S(0), f_S(0), f_S(0))$  jako ze swej natury niezorientowaną liczbę rzeczywistą  $f_S(0) \in \mathbb{R}$ .

**RYСУNEK 2.**

Ujemna orientacja OFN  $\vec{S} = (f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$



Źródło: opracowanie własne.

Operacje na liczbach rozmytych zostały zdefiniowane przez Kosińskiego [Kosiński, 2006] jako rozszerzenie operacji określonych na przestrzeni  $\mathbb{R}$ . W szczególnym przypadku dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej  $a \in \mathbb{R}^+$  i dla dodatniej OFN  $\vec{A}$  mamy określone:

- dzielenie skalarne:

$$\vec{B} = a \oslash \vec{A}, \quad (18)$$

gdzie:

$$\forall_{x \in [0,1]}: f_B(x) = a/f_A(x) \wedge g_B(x) = a/g_A(x), \quad (19)$$

- odejmowanie skalarne:

$$\vec{C} = \vec{A} \ominus a, \quad (20)$$

gdzie:

$$\forall_{x \in [0,1]}: f_C(x) = f_A(x) - a \wedge g_C(x) = g_A(x) - a. \quad (21)$$

### 3. Skierowana behawioralna wartość bieżąca

Rozważmy dowolny instrument finansowy będący przedmiotem obrotu na silnie efektywnym rynku finansowym. Cena rynkowa  $\check{C}$  tego instrumentu finansowego może zmieniać się w czasie, dlatego możemy mówić o trendzie ceny rynkowej. Finansowa równowaga jest stanem rynku finansowego, w którym trend ceny rynkowej jest stały. Wtedy wartość ceny rynkowej  $\check{C}$  jest równa cenie równowagi  $C_0$  określonej przez analizę techniczną lub fundamentalną.

W pracy Piaseckiego [2016] PV dowolnego przepływu finansowego została przedstawiona jako użyteczność tegoż przepływu. Wartość bieżąca dowolnego przepływu finansowego zależy zarówno od przesłanek obiektywnych, jak i subiektywnych. Na silnie

efektywnym rynku finansowym każdy z inwestorów ustala tę samą wartość  $C_0$ , która w tej sytuacji ma charakter obiektywny. Równocześnie wszyscy uczestnicy rynku obserwują obiektywną wartość  $\check{C}$  ceny rynkowej. Rozważmy dowolną PV ocenioną pod wpływem m.in. przesłanek behawioralnych. Stany środowiska behawioralnego są zdefiniowane nieprecyzyjnie, zatem odchylenie wyznaczonej PV od ceny rynkowej musi być nieprecyzyjne. Każda behawioralna ocena jest subiektywna. W tej sytuacji ocena PV ma subiektywny charakter i zazwyczaj jest wieloznaczna. Każdą z rozważanych alternatyw tej wyceny nazywa się potencjalną PV (w skrócie PPV). Behawioralną wartością bieżącą (w skrócie BPV) jest zbiór wszystkich PPV. Uzależnienie PV od subiektywnych czynników finansowych powoduje, że każdy z inwestorów może wyznaczyć własną wersję BPV. Stąd wszystkie dalsze rozważania są prowadzone dla ustalonego inwestora. W przypadku równowagi finansowej, kiedy to cena rynkowa  $\check{C}$  pokrywa się z ceną równowagi  $C_0$ , to jest  $\check{C} = C_0$ , inwestor musi uwzględniać możliwość spadków i wzrostów notowań (podatność inwestora na wpływ wewnętrznych i zewnętrznych impulsów behawioralnych). W tej sytuacji zakres zmienności PPV spełnia warunek  $C_{min} < C_0 < C_{max}$ , gdzie:

- $C_{min}$  dolny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej;
- $C_{max}$  górny zakres PPV zakładany w warunkach równowagi finansowej.

Przedział liczbowy  $[C_{min}; C_{max}]$  jest obrazem BPV dla przypadku równowagi finansowej.

W przypadku, kiedy jest notowana dowolna cena rynkowa  $\check{C}$ , BPV jest zależna od odchylenia  $\Delta C = \check{C} - C_0$  ceny rynkowej od ceny równowagi. Każdy z inwestorów określa wtedy następujące wartości:

- $\check{C}_{min}$  dolny zakres PPV zakładany dla ceny rynkowej  $\check{C}$ ;
- $\check{C}_{max}$  górny zakres PPV zakładany dla ceny rynkowej  $\check{C}$ .

Przedziałowy obraz BPV jednakowo traktuje wszystkie dopuszczalne wartości PPV i opisuje złożoność wpływów behawioralnych w niewystarczający sposób, ponieważ możemy przypuszczać, że inwestor w większym stopniu akceptuje PPV bardziej podobne do ceny rynkowej. Spowodowało to konieczność zbudowania modelu BPV uwzględniającego zmienność wagi poszczególnych PPV, co doprowadziło do zbudowania rozmytego obrazu BPV. Behawioralna wartość bieżąca została przedstawiona jako liczba rozmyta [Piasecki, 2016], której funkcja przynależności BPV dana jest wzorami:

- dla  $\Delta C > 0$

$$\mu_{BPV^+}(x, \check{C}) = \begin{cases} \frac{(x - \check{C}_{min})(1 + \delta C)}{\check{C} - \check{C}_{min} + (x - \check{C}_{min})\delta C} & \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}] \neq \{\check{C}\} \\ \frac{\check{C}_{max} - x}{\check{C}_{max} - \check{C} + (\check{C}_{max} - x)\delta C} & \text{dla } x \in ]\check{C}; \check{C}_{max}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [\check{C}_{min}; \check{C}_{max}] \end{cases} \quad (22)$$



- dla  $\Delta C \leq 0$

$$\mu_{BPV^-}(x, \check{C}) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min} + (x - \check{C}_{min})\delta C} & \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}[ \\ \frac{(\check{C}_{max} - x)(1 + \delta C)}{\check{C}_{max} - \check{C} + (\check{C}_{max} - x)\delta C} & \text{dla } x \in [\check{C}; \check{C}_{max}] \neq \{\check{C}\}, \\ 0 & \text{dla } x \notin [\check{C}_{min}; \check{C}_{max}] \end{cases} \quad (23)$$

gdzie:

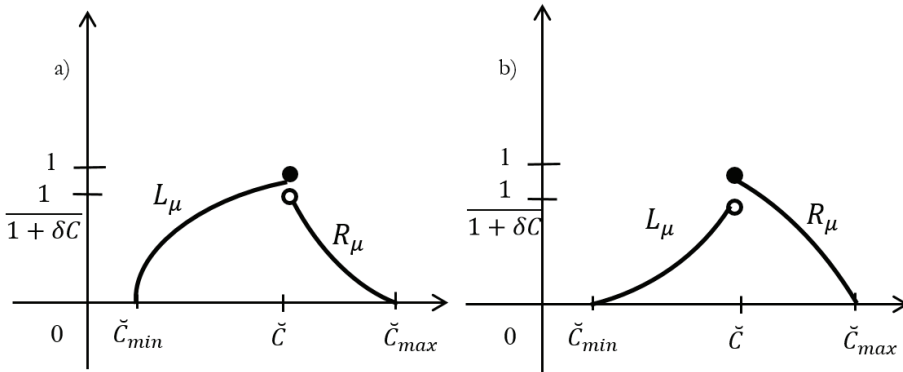
$\check{C}$  – obserwowana cena rynkowa,

$\delta C = \frac{|\Delta C|}{\check{C}} = \frac{\check{C} - C_0}{\check{C}}$  – względne odchylenie ceny rynkowej od ceny równowagi,

$C_0$  – merytorycznie uzasadniona cena równowagi finansowej.

**RYСУNEK 3.**

**Wykres funkcji przynależności BPV w przypadku, gdy a)  $\Delta C > 0$ , b)  $\Delta C < 0$**



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3. pokazano wykres funkcji przynależności BPV w zależności od odchylenia ceny rynkowej od ceny równowagi  $\Delta C$ . Dla  $\Delta C > 0$  (rysunek 3a)) funkcja przynależności jest opisana wzorem:

$$\mu_{BPV^+}(x) = \begin{cases} L_{BPV^+}(x) & \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}] \neq \{\check{C}\}, \\ R_{BPV^+}(x) & \text{dla } x \in ]\check{C}; \check{C}_{max}], \\ 0 & \text{dla } x \notin [\check{C}_{min}; \check{C}_{max}], \end{cases} \quad (24)$$

gdzie stosując oznaczenia Dubois i Prade, lewa oraz prawa funkcja odniesienia, odpowiednio  $L_{BPV^+}: [\check{C}_{min}; \check{C}] \rightarrow [0; 1]$ ,  $R_{BPV^+}: ]\check{C}; \check{C}_{max}] \rightarrow [0; \frac{1}{1+\delta}]$  są zdefiniowane jako:

$$L_{BPV^+}(x) = \frac{(x - \check{C}_{min})(1 + \delta C)}{\check{C} - \check{C}_{min} + (x - \check{C}_{min})\delta C} \quad \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}] \quad (25)$$

$$R_{BPV^+}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = \check{C} \\ \frac{\check{C}_{max} - x}{\check{C}_{max} - \check{C} + (\check{C}_{max} - x)\delta C} & \text{dla } x \in ]\check{C}; \check{C}_{max}] \end{cases} \quad (26)$$

Dla  $\Delta C < 0$  (rysunek 3b)) funkcja przynależności jest natomiast opisana przez:

$$\mu_{BPV^-}(x) = \begin{cases} L_{BPV^-}(x) & \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}[ \\ R_{BPV^-}(x) & \text{dla } x \in [\check{C}; \check{C}_{max}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [\check{C}_{min}; \check{C}_{max}] \end{cases} \quad (27)$$

gdzie lewa i prawa funkcja odniesienia, odpowiednio:  $L_{BPV^-}: [\check{C}_{min}; \check{C}[ \rightarrow [0; \frac{1}{1+\delta C}[$ ,  $R_{BPV^-}: [\check{C}; \check{C}_{max}] \rightarrow [0; 1]$  są określone za pomocą wzorów:

$$L_{BPV^-}(x) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min} + (x - \check{C}_{min})\delta C} & \text{dla } x \in [\check{C}_{min}; \check{C}[ \\ 1 & \text{dla } x = \check{C}, \end{cases} \quad (28)$$

$$R_{BPV^-}(x) = \frac{(\check{C}_{max} - x)(1 + \delta C)}{\check{C}_{max} - \check{C} + (\check{C}_{max} - x)\delta C} \quad \text{dla } x \in [\check{C}; \check{C}_{max}]. \quad (29)$$

Funkcje przynależności  $\mu_{BPV^+}$  i  $\mu_{BPV^-}$  są przedziałami ciągle i monotoniczne. Dlatego w każdym z przedziałów istnieją funkcje odwrotne do  $L_{BPV^+}, R_{BPV^+}, L_{BPV^-}, R_{BPV^-}$  oraz są odpowiednio równe:

$$L_{BPV^+}^{\triangleleft}(x) = \frac{(\check{C}_{min}(1 + \delta C) - \check{C})x - \check{C}_{min}(1 + \delta C)}{x\delta C - (1 + \delta C)} \quad \text{dla } x \in [0; 1], \quad (30)$$

$$R_{BPV^+}^{\triangleright}(x) = \begin{cases} \frac{[\check{C}_{max}(1 + \delta C) - \check{C}]x - \check{C}_{max}}{x\delta C - 1} & \text{dla } x \in [0; \frac{1}{1 + \delta}] \\ \check{C} & \text{dla } x \in [\frac{1}{1 + \delta}; 1] \end{cases} \quad (31)$$

$$L_{BPV^-}^{\triangleleft}(x) = \begin{cases} \frac{(\check{C}_{min}(1 + \delta C) - \check{C})x - \check{C}_{min}}{x\delta C - 1} & \text{dla } x \in [0; \frac{1}{1 + \delta}] \\ \check{C} & \text{dla } x \in [\frac{1}{1 + \delta}; 1] \end{cases} \quad (32)$$

$$R_{BPV^-}^{\triangleright}(x) = \frac{[\check{C}_{max}(1 + \delta C) - \check{C}]x - \check{C}_{max}(1 + \delta C)}{x\delta C - (1 + \delta C)} \quad \text{dla } x \in [0; 1] \quad (33)$$

Dla obserwowanej ceny rynkowej  $\check{C}$  behawioralną wartość bieżącą przedstawimy jako skierowaną liczbę rozmytą. Jest to uzasadnione prostotą realizacji działań arytmetycznych na przestrzeni skierowanych liczb rozmytych [Kacprzak, 2012]. Przewidywanie wzrostowego trendu ceny rynkowej będziemy zaznaczać za pomocą orientacji dodatniej, a przewidywanie spadkowego trendu ceny rynkowej za pomocą orientacji ujemnej. Rozważmy cztery przypadki w zależności od  $\Delta C$ :

1.  $\Delta C > 0$ , czyli gdy cena rynkowa przewyższa cenę równowagi ( $\check{C} > C_0$ );
2.  $\Delta C < 0$ , czyli gdy cena równowagi przewyższa cenę rynkową ( $\check{C} < C_0$ ).

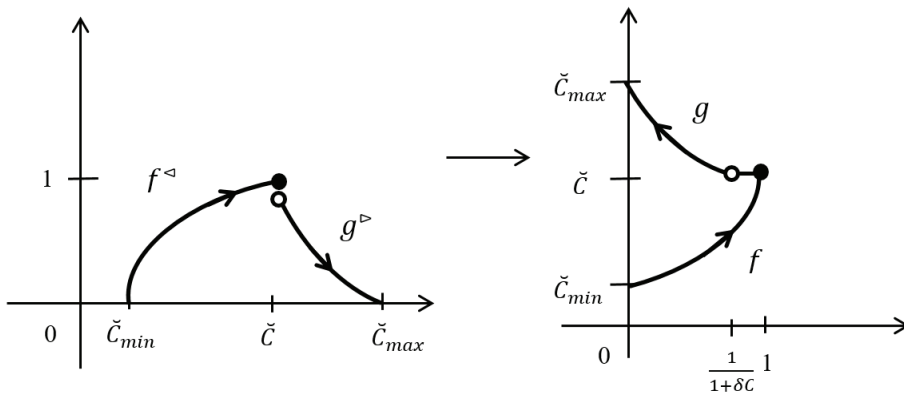
W każdym z powyższych przypadków uwzględnia się dwie sytuacje, kiedy:

- a) spodziewamy się na podstawie własnych, subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa wzrośnie;
- b) spodziewamy się na podstawie własnych, subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa zmaleje.

Liczbie rozmytej, która opisuje BPV, nadajemy w przypadku a) orientację dodatnią, a w przypadku b) orientację ujemną. Warto zauważyć, że orientacja dodatnia jest identyczna ze zbiorem rozmytym.

**RYSUNEK 4.**

**Wykres funkcji przynależności BPV zorientowanej dodatnio, gdy  $\Delta C > 0$**



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 4. (przypadek 1a)) ilustruje sytuację, kiedy  $\Delta C > 0$ , czyli gdy cena rynkowa przewyższa cenę równowagi. Wykres po lewej stronie przedstawia funkcję przynależności behawioralnej wartości bieżącej. Behawioralna wartość bieżąca jest zorientowana dodatnio, to znaczy spodziewamy się, że cena rynkowa wzrośnie. Rysunek po prawej stronie obrazuje funkcję przynależności opisującą standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą skierowanej liczby rozmytej OFN jako parę funkcji Kosińskiego BPV= $(f, g)$ , gdzie:

$$f(x) = L_{BPV+}^{\triangleleft}(x), x \in [0,1], \tag{34}$$

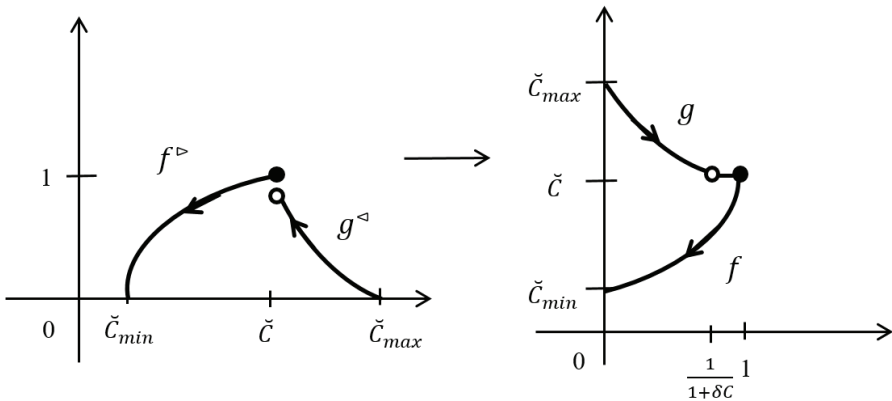
$$g(x) = R_{BPV+}^{\triangleright}(x), x \in [0,1], \tag{35}$$

$f(0) = \check{c}_{min}$ ,  $f(1) = \check{c}$ ,  $g(1) = \check{c}$ ,  $g(0) = \check{c}_{max}$ . Funkcja  $f$  odpowiada części wznoszącej UP,

a funkcja  $g$  – części opadającej DOWN. Na przedziale  $[\frac{1}{1+\delta C}, 1]$  została dołączona funkcja stała równa  $\check{c}$ .

Rysunek 5. (przypadek 1b)) pokazuje stan rzeczy, kiedy  $\Delta C > 0$ , czyli gdy cena rynkowa przewyższa cenę równowagi. Podobnie jak poprzednio, wykres po lewej stronie prezentuje funkcję przynależności behawioralnej wartości bieżącej. Behawioralna wartość bieżąca jest tutaj jednak zorientowana ujemnie, to znaczy spodziewamy się, że cena rynkowa zmaleje. Rysunek po prawej stronie przedstawia funkcję przynależności opisującą standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą skierowanej liczby rozmytej OFN jako parę funkcji Kosińskiego BPV= $(g, f)$ , gdzie funkcje  $f$  i  $g$  są dane za pomocą wzorów (7) i (8). Funkcja  $g$  odpowiada tutaj części wznoszącej UP, a funkcja  $f$  – części opadającej DOWN. Na przedziale  $[\frac{1}{1+\delta C}, 1]$  została dołączona funkcja stała równa  $\check{c}$ .

## RYSUNEK 5.

Wykres funkcji przynależności BPV zorientowanej ujemnie, gdy  $\Delta C > 0$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 6. (przypadek 2a) ilustruje sytuację, kiedy  $\Delta C < 0$ , czyli gdy cena równowagi przewyższa cenę rynkową. Analogicznie jak w przypadku 1a), wykres po lewej stronie obrazuje funkcję przynależności behawioralnej wartości bieżącej. Behawioralna wartość bieżąca jest zorientowana dodatnio, to znaczy spodziewamy się, że cena rynkowa wzrośnie. Rysunek po prawej stronie prezentuje funkcję przynależności opisującą standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą skierowanej liczby rozmytej OFN jako parę funkcji Kosińskiego BPV= $(f, g)$ , gdzie:

$$f(x) = L_{BPV}^{\triangleright}(x), x \in [0,1], \quad (36)$$

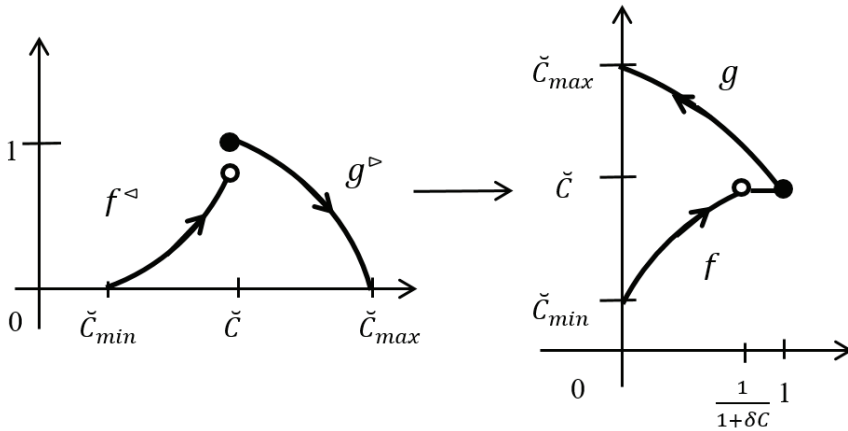
$$g(x) = R_{BPV}^{\triangleleft}(x), x \in [0,1], \quad (37)$$

$f(0) = \check{c}_{min}$ ,  $f(1) = \check{c}$ ,  $g(1) = \check{c}$ ,  $g(0) = \check{c}_{max}$ . Funkcja  $f$  odpowiada części wznoszącej UP,

a funkcja  $g$  – części opadającej DOWN. Na przedziale  $\left[\frac{1}{1+\delta C}, 1\right]$  została dołączona funkcja stała równa  $\check{c}$ .

**RYСУNEK 6.**

Wykres funkcji przynależności BPV zorientowanej dodatnio, gdy  $\Delta C < 0$

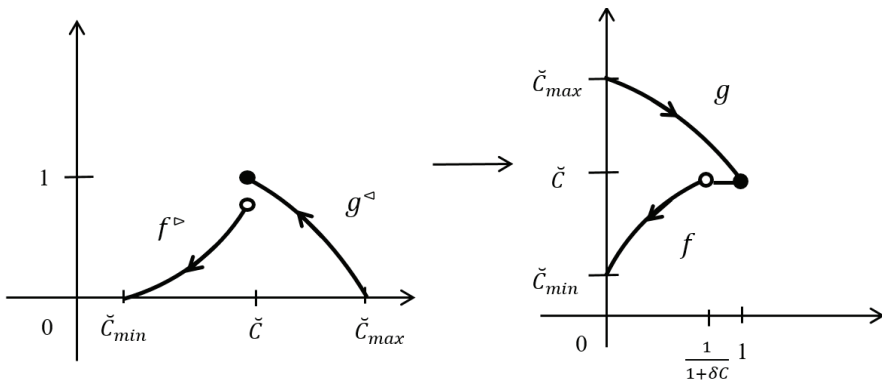


Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 7. (przypadek 2b)) ilustruje stan, kiedy  $\Delta C < 0$ , czyli gdy cena równowagi przewyższa cenę rynkową. Podobnie jak w przypadku 1b), wykres po lewej stronie przedstawia funkcję przynależności behawioralnej wartości bieżącej. Behawioralna wartość bieżąca jest zorientowana ujemnie, to znaczy spodziewamy się, że cena rynkowa zmaleje. Rysunek po prawej stronie obrazuje funkcję przynależności opisującą standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą skierowanej liczby rozmytej OFN jako parę funkcji Kosińskiego BPV= $(g, f)$ , gdzie funkcje  $f$  i  $g$  są dane za pomocą wzorów: (9) i (10). Funkcja  $g$  odpowiada części wznoszącej UP, a funkcja  $f$  – części opadającej DOWN. Na przedziale  $[\frac{1}{1+\delta C}, 1]$  została dołączona funkcja stała równa  $\check{C}$ .

**RYСУNEK 7.**

Wykres funkcji przynależności BPV zorientowanej ujemnie, gdy  $\Delta C < 0$



Źródło: opracowanie własne.

**Przykład 1.** Dany jest instrument A, dla którego cena równowagi  $C_0 = 110$ , cena rynkowa  $\check{C} = 120$ , odpowiednio dolny  $\check{C}_{min} = 108$  i górny  $\check{C}_{max} = 138$  zakres BPV przy obserwowanej cenie rynkowej. Mamy  $\Delta C = \check{C} - C_0 = 120 - 110 = 10 > 0$ ,  $\delta C = \frac{|10|}{120} = \frac{1}{12}$ .

Funkcja przynależności opisująca standaryzowaną rozmytą postać BPV wyraża się wzorem:

$$\mu_{BPV^+}(x, \check{C}) = \begin{cases} \frac{(x-108)\left(1+\frac{1}{12}\right)}{120-108+(x-108)\frac{1}{12}} & \text{dla } x \in [108,120], \\ \frac{138-x}{138-120+(138-x)\frac{1}{12}} & \text{dla } x \in ]120,138], \\ 0 & \text{dla } x \notin [108,138], \end{cases} \quad (39)$$

czyli po uproszczeniu

$$\mu_{BPV^+}(x, \check{C}) = \begin{cases} \frac{13x-1404}{x+36} & \text{dla } x \in [108,120] \\ \frac{12x-1656}{x-354} & \text{dla } x \in ]120,138] \\ 0 & \text{dla } x \notin [108,138] \end{cases}, \quad (40)$$

Korzystając ze wzorów (7) i (8), dostajemy funkcję przynależności opisującą standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą dodatnio skierowanej liczby rozmytej OFN jako parę funkcji Kosińskiego BPV= $(f, g)$ , gdzie:

$$f(x) = L_{BPV^+}^{-1}(x) = \frac{36x+1404}{13-x}, \quad x \in [0,1], \quad (41)$$

$$g(x) = \begin{cases} R_{BPV^+}^{-1}(x) = \frac{354x-1656}{x-12}, & x \in \left[0, \frac{12}{13}\right[ \\ 120, & x \in \left[\frac{12}{13}, 1\right] \end{cases}, \quad (42)$$

w sytuacji, gdy spodziewamy się na podstawie własnych, subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa wzrośnie. W sytuacji, gdy spodziewamy się na podstawie własnych, subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa spadnie, funkcja przynależności opisująca standaryzowaną rozmytą postać BPV za pomocą ujemnie skierowanej liczby rozmytej OFN jest parą funkcji Kosińskiego BPV= $(g, f)$ .

Skierowana rozmyta stopa zwrotu OFRR wyraża się wzorem:

$$OFRR = (r_f, r_g) = \left( \frac{V(\omega)}{f(x)} - 1, \frac{V(\omega)}{g(x)} - 1 \right). \quad (43)$$

W każdym z omówionych przypadków wyznaczmy OFRR. Dla sytuacji 1a) korzystając ze wzorów: (11), (7) i (8), otrzymujemy  $OFRR = (r_f, r_g)$ , gdzie:

$$r_f = V(\omega) \frac{x\delta C - (1+\delta C)}{(\check{C}_{min}(1+\delta C) - \check{C})x - \check{C}_{min}(1+\delta C)} - 1, \quad x \in [0,1], \quad (44)$$

$$r_g = \begin{cases} V(\omega) \frac{x\delta C - 1}{[\check{C}_{max}(1+\delta C) - \check{C}]x - \check{C}_{max}} - 1, & x \in \left[0, \frac{1}{1+\delta C}\right[ \\ \frac{V(\omega)}{\check{C}} - 1, & x \in \left[\frac{1}{1+\delta C}, 1\right] \end{cases}. \quad (45)$$

W przypadku 1b)  $OFRR = (r_g, r_f)$ , gdzie  $r_f$  i  $r_g$  są dane odpowiednio wzorami (12) i (13).

Dla przypadku następnego (2a) na podstawie wzorów: (11), (9) oraz (10) dostajemy  $OFRR = (r_f, r_g)$ , gdzie:

$$r_f = \begin{cases} V(\omega) \frac{x\delta C - 1}{(\check{c}_{min}(1+\delta C) - \check{c})x - \check{c}_{min}} - 1, & x \in \left[0, \frac{1}{1+\delta C}\right[ \\ \frac{V(\omega)}{\check{c}} - 1, & x \in \left[\frac{1}{1+\delta C}, 1\right] \end{cases}, \quad (46)$$

$$r_g = V(\omega) \frac{x\delta C - (1+\delta C)}{[\check{c}_{max}(1+\delta C) - \check{c}]x - \check{c}_{max}(1+\delta C)} - 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (47)$$

W sytuacji 2b) skierowana rozmyta stopa zwrotu  $OFRR = (r_g, r_f)$ , gdzie  $r_f$  i  $r_g$  są dane odpowiednio za pomocą wzorów (14) i (15).

Dla rozmytej behawioralnej wartości bieżącej BPV zorientowanej dodatnio skierowana rozmyta stopa zwrotu OFRR jest zorientowana ujemnie. Podobnie dla behawioralnej wartości bieżącej BPV zorientowanej ujemnie, skierowana rozmyta stopa zwrotu jest zorientowana dodatnio. Oznacza to, że przypuszczenie o wzroście ceny rynkowej pociąga za sobą przypuszczenie o spadku stopy zwrotu. Analogicznie, przypuszczenie o spadku ceny rynkowej implikuje przypuszczenie o wzroście stopy zwrotu. Jest to zgodne z ogólną teorią finansów. Stopa zwrotu zachowuje zasady zapisu domniemanego zwrotu trendu. Stanowi to przyczynek do stwierdzenia, że zastosowanie skierowanych liczb rozmytych może być przydatne w finansach.

**Przykład 2.** Dla instrumentu opisanego w przykładzie 1. skierowana rozmyta stopa zwrotu na mocy wzorów (12) i (13) jest równa  $OFRR = (r_f, r_g)$  w przypadku, gdy spodziewamy się, że cena rynkowa wzrośnie i  $OFRR = (r_g, r_f)$ , gdy spodziewamy się, że cena rynkowa spadnie, gdzie:

$$r_f = V(\omega) \frac{13-x}{36x+1404} - 1, \quad x \in [0, 1], \quad (48)$$

$$r_g = \begin{cases} V(\omega) \frac{x-12}{354x-1656} - 1, & x \in \left[0, \frac{12}{13}\right[ \\ \frac{V(\omega)}{120} - 1, & x \in \left[\frac{12}{13}, 1\right] \end{cases}. \quad (49)$$

#### 4. Podsumowanie

Behawioralna wartość bieżąca została przedstawiona za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Liczbie rozmytej, która opisuje BPV, nadano orientację dodatnią w przypadku, gdy spodziewano się na podstawie własnych, subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa wzrośnie, natomiast w sytuacji, kiedy spodziewano się na podstawie subiektywnych przesłanek, że cena rynkowa zmaleje – orientację ujemną. Przy oczywistym założeniu, że wartość przyszła jest zmienną losową, wyznaczona stopa zwrotu została opisana jako skierowany rozmyty zbiór probabilistyczny. Nieprecyzyjność, przedstawiono

tutaj przez rozmycie, nie zastąpiła (nie była substytutem) losowości, ale była uzupełnieniem. Stopa zwrotu stała się stochastyczną stopą zwrotu.

Model skierowanej behawioralnej wartości bieżącej może być dobrym narzędziem w analizie i modelowaniu ekonomicznym. Wartością dodaną opisanego modelu jest możliwość uwzględnienia subiektywnych przewidywań zwrotu dalszego trendu ceny. Pozwala to przypuszczać, że uzyskane wyniki będzie można wykorzystać do analizy portfelowej. W kolejnej pracy autorka skupi się na wyznaczeniu oczekiwanej skierowanej rozmytej stopy zwrotu i ocenie ryzyka obarczającego tę stopę.

### Literatura

- Buckley I. J., 1987, *The fuzzy mathematics of finance*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 21.
- Calzzi M. L., 1990, *Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 35.
- Dubois D., Prade H., 1978, *Operation on fuzzy numbers*, "Int. J. System Science", vol. 9.
- Dubois D., Prade H., 1979, *Fuzzy real algebra: some results*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 2.
- Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy set and systems: theory and applications*, Academic Press, New York.
- Greenhut J. G., Norman G., Temponi C. T., 1995, *Towards a fuzzy theory of oligopolistic competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS, Washington.
- Gutierrez I., 1989, *Fuzzy numbers and Net Present Value*, "Scandinavian Journal of Management", vol. 5, iss. 2.
- Klir G. J., 1993, *Developments in uncertainty-based information*, Advances in Computers 36, Academic Press, San Diego.
- Kacprzak D., 2010, *Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznym*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Kacprzak D., 2012, *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 6.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002, *Fuzzy numbers with algebraic operations: algorithmic approach*, [in:] *Advances in Soft Computing*, Proc. of the Sixth Int. Conference on Neural Networks and Soft Computing, Zakopane, Poland June 11-15.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered fuzzy numbers*, "Bulletin of the Polish Academy of Sciences", vol. 51, no 3.
- Kosiński W., 2006, *On fuzzy number calculus*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science", vol. 16.
- Kuchta D., 2000, *Fuzzy capital budgeting*, "Fuzzy Set and Systems", vol. 111.
- Lesage C., 2001, *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*, „European Journal of Economic and Social System”, vol. 15, no 2.
- Peccati L., 1972, *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma.
- Piasecki K., 2011a, *Behavioral Present Value*, "SSRN Electronic Journal" 1, DOI: 10.2139/ssrn.1729351.



- Piasecki K., 2011b, *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.
- Piasecki K., 2014, *Behavioralna wartość bieżąca – nowe podejście*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 1 (67).
- Piasecki K., 2016, *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo edu-Libri, Kraków-Legionowo.
- Piasecki K., Siwek J., 2015, *Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – a New Approach*, “Folia Oeconomica Stetinensia”, vol. 15, iss. 2.
- Sheen J. N., 2005, *Fuzzy financial profitability analyses of demand side management alternatives from participant perspective*, “Information Sciences”, vol. 169.
- Stirling W. C., 2003, *Satisficing Games and Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ward T. L., 1985, *Discounted fuzzy cash flow analysis*, Fall Industrial Engineering Conference Precedings, Warszawa.
- Zadeh L., 1965, *Fuzzy sets*, “Information and Control”, vol. 8.

**dr Grzegorz TARCZYŃSKI**

Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
e-mail: grzegorz.tarczynski@ue.wroc.pl

**dr Michał JAKUBIAK**

Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu  
e-mail: michal.jakubiak@ue.wroc.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.10

## **WPLYW KOMPLETACJI STREFOWEJ, SKŁADOWANIA TOWARÓW I METODY WYZNACZANIA TRASY MAGAZYNIERA NA EFEKTYWNOŚĆ PROCESU KOMPLETACJI ZAMÓWIEŃ**

### **Streszczenie**

W artykule przedstawiono wyniki analizy wpływu różnych czynników na efektywność procesu kompletacji strefowej mierzoną za pomocą średnich czasów kompletacji zamówień i współczynnika wykorzystania stref. W badaniach rozważono dwa rodzaje kompletacji strefowej, tj.: sekwencyjną i synchroniczną. Eksperymenty przeprowadzono z użyciem symulacji i programu Warehouse Real-Time Simulator. Wyniki wskazują, że kompletacja strefowa musi być dobrze zorganizowana. Niewłaściwe dobranie metody składowania towarów do heurystyki wyznaczania trasy przy podziale na strefy może spowodować, że czasy kompletacji będą dłuższe, niż przy magazynie jednostrefowym. Prawidłowe dopasowanie sprawia, że heurystyki dla większości zamówień generują trasy optymalne. Jeżeli towary szybko rotujące są rozłożone równomiernie w strefach, to problem nierównowagi nakładu pracy w strefach dla kompletacji sekwencyjnej prawie nie występuje, a dla kompletacji synchronicznej nie przekracza 20%.

**Słowa kluczowe:** kompletacja strefowa, składowanie towarów, wyznaczanie trasy, symulacje

### **IMPACT OF ZONE PICKING, STORING AND ROUTING ON AVERAGE ORDER-PICKING TIME**

#### **Summary**

The paper presents the results of an analysis of the influence of different factors on zone picking efficiency, as measured by the average order-picking times and the average utilization of zone pickers. The study considers two versions of zone picking: sequential and synchronized. The research was performed using simulations and the Warehouse-Real Time Simulator. The results indicate that zone picking has to be well organized. Improper choice of storage policy to routing method while zone picking may lengthen order-picking times as compared to those without zone division. However, proper selection can ensure optimal routes. When fast moving items are similarly distributed in all zones, the problem of imbalance of zone utilization for sequential picking hardly exists, and for synchronized picking does not exceed 20%.

**Key words:** zone picking, storage assignment, picker routing, simulations

**JEL:** C53

## 1. Wstęp

Podstawową miarą oceny efektywności magazynowej jest średni czas kompletacji zamówień. Istnieje pięć podstawowych grup czynników, które wpływają na czasy kompletacji, tj.: układ magazynu (*layout*), czyli liczba i długość alejek, liczba poprzecznych korytarzy, umiejscowienie punktu I/O, w którym magazynier zaczyna i zazwyczaj kończy kompletację zlecenia; sposób składowania towarów (*storage location assignment*), sposób wyznaczania trasy magazyniera (*order routing*); podział magazynu na strefy (*zoning*) oraz tworzenie zleceń łączonych (*order batching*) [Yu, de Koster, 2009, s. 480-490]. De Koster i inni [2007, s. 481-501] przedstawili krótki opis metod pozwalających na rozwiązanie wymienionych problemów i szczegółowy przegląd literatury.

Artykuł jest poświęcony sposobom kompletacji zamówień przy podziale magazynu na strefy kompletacyjne. Frazelle i Apple [1994, s. 22.1-22.36] wyróżnili trzy takie metody, a mianowicie: sekwencyjną (*sequential*), strefową zleceń łączonych (*batch zone*) i falową (*wave picking*). Kompletacja sekwencyjna (w literaturze funkcjonują również inne nazwy, takie jak: *pick-and-pass* i *progressive*) polega na kompletacji pojedynczych zamówień w rozbiciu na strefy. Towary są zbierane najpierw w jednej strefie, a następnie pojemnik z pobranymi już artykułami trafia do dalszych stref, gdzie uzupełnia się go kolejnymi wyrobami. Takie rozwiązanie nie wymaga konieczności sortowania wyrobów. Po przejściu wszystkich niezbędnych stref magazynowych, w pojemniku znajduje się zestaw towarów z jednego zamówienia. Z kolei, strefowa kompletacja zleceń łączonych w literaturze jest raczej określana jako kompletacja synchroniczna (*synchronized*, ale równocześnie funkcjonują nazwy *parallel* i *simultaneous*). Polega ona na tworzeniu zleceń kompletacyjnych złożonych z więcej niż jednego zamówienia. Zlecenie jest pobierane do osobnych pojemników w każdej ze stref w tym samym czasie. Rozpoczęcie kompletacji nowego zlecenia wymaga zakończenia kompletacji poprzedniego we wszystkich strefach. Taka organizacja pracy powoduje, że wyroby po pobraniu będą musiały być posortowane. Również pojawia się tutaj niebezpieczeństwo nierównowagi nakładu pracy w strefach. Ostatnia z wymienionych metod, kompletacja falowa, stanowi odmianę kompletacji synchronicznej, w której zlecenia kompletacyjne powstają poprzez połączenie bardzo dużej liczby zamówień. Petersen [2000, s. 319-335] stwierdził, że długość fal wynosi zazwyczaj od 30 minut do 2 godzin. W artykule Petersena można także znaleźć informacje na temat podstawowych zalet i wad zaprezentowanych koncepcji.

Przedstawiony opis nie jest precyzyjny. Yu i de Koster [2009, s. 480-490] rozważyli na przykład kompletację sekwencyjną zleceń łączonych. Takie rozwiązanie wymusza zainstalowanie w magazynie sortowni, nierzadko automatycznej.

Badaniem efektywności kompletacji sekwencyjnej zajmowali się m.in.: de Koster [1994, s. 558-573], Petersen [2000, s. 319-335], Yu i de Koster [2008, s. 1054-1069; 2009, s. 480-490], Melacini i inni [2010, s. 841-854], Gaast i inni [2012, s. 1-27]. Kompletacji strefowej synchronicznej poświęcono artykuły: Petersena [2000, s. 319-335], Jane'a i Laiha [2005, s. 489-496] oraz Le Duca i de Koster [2005, s. 1-28]. Według wiedzy autorów, w literaturze brakuje badań łączących wybór metody kompletacji strefowej ze sposobem składowania towarów, a zarazem problemem doboru heurystyki wyznaczającej trasę magazyniera. Temu właśnie zagadnieniu jest poświęcony ten artykuł.

## 2. Parametry procesu kompletacji zamówień wykorzystane w badaniach

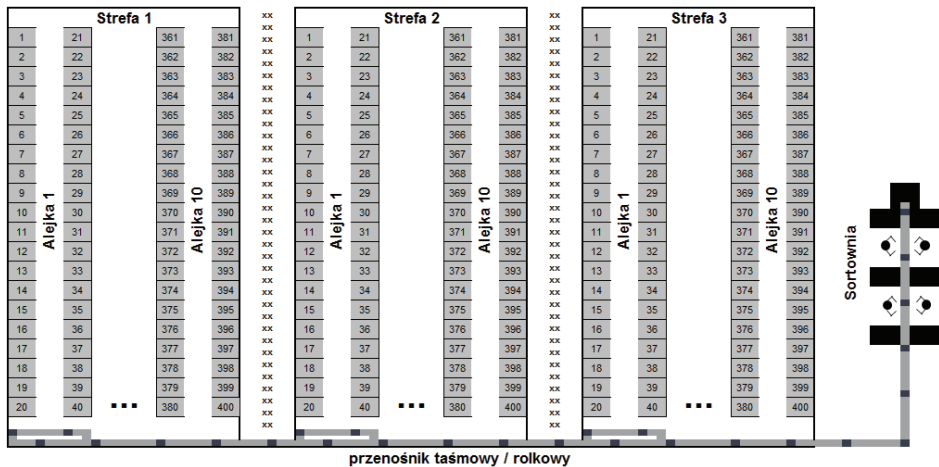
W badaniach empirycznych sprawdzono wzajemny wpływ: wyboru sposobu podziału na strefy i metody kompletacji strefowej, polityki składowania towarów szybko rotujących oraz heurystyki wyznaczania trasy magazyniera na efektywność procesu kompletacji zamówień mierzoną za pomocą średnich czasów kompletacji oraz współczynników wykorzystania stref wyrażających nierównowagę nakładu pracy w strefach. Przyjęto następujące parametry:

- układ magazynu (rysunek 1.): jednoblokowy, prostokątny z 30 alejkami (zbadano trzy warianty, tj.: bez podziału na strefy, z 3 strefami po 10 alejek, z 5 strefami po 6 alejek);
- punkt I/O, z którego magazynierzy pobierają pojemniki i ewentualnie (wobec braku urządzeń elektronicznych) zlecenia kompletacyjne, znajduje się w rogu magazynu. Wzdłuż dolnego korytarza jest ulokowany przenośnik taśmowy (rolkowy), na który są odkładane pojemniki po skompletowaniu towarów w strefie. W przypadku kompletacji synchronicznej pojemniki są transportowane do sortowni, gdzie zamówienia są sortowane i scalane. W przypadku kompletacji sekwencyjnej pojemniki oznaczone kodami kreskowymi są transportowane do kolejnych stref, gdzie są skanowane i – w razie potrzeby – w automatyczny sposób odstawiane na specjalnie wydzielony dla każdej strefy fragment przenośnika (tworzący bufor), skąd pojemniki są pobierane celem uzupełnienia towarów. Przyjmuje się nieograniczoną pojemność bufora (de Koster zauważył, że jeżeli istnieje ryzyko przepelnienia bufora, można poinstruować pracowników, aby tymczasowo zdjęli pojemniki z przenośnika i umieścili je na podłodze [de Koster, 1994, s. 558-573]);
- rozkłady towarów szybko rotujących w każdej ze stref są takie same;
- każde zamówienie składa się z 10 różnych towarów (w przypadku kompletacji strefowej synchronicznej zlecenia w poszczególnych strefach są scalane tak, aby magazynier podczas jednego cyklu odwiedzał co najwyżej 10 lokalizacji); liczba pobieranych wyrobów tego samego typu jest pomijana w analizie;
- sposoby rozmieszczenia towarów szybko rotujących w magazynie: całkowicie losowo oraz na podstawie klasyfikacji ABC (*class-based storage assignment*), polityka *within aisle* (towary z klasy A umieszcza się w sposób losowy w alejkach najbliższych punktowi I/O), polityka *across aisle* (towary z klasy A umieszcza się losowo we wszystkich alejkach na lokalizacjach najbliższych korytarzowi, przy którym jest umieszczony przenośnik);
- metody wyznaczania trasy magazyniera: trasa optymalna (wytoczona zgodnie z algorytmem Ratliffa i Rosenthala [1983, s. 507-521]) i heurystyki: *s-shape*, *midpoint*, *return*, *largest gap*, *combined* (szczegółowy opis metod można znaleźć np. w pracy Tarczyńskiego [2012, s. 105-120]);
- dla magazynu bez podziału na klasy oraz przy kompletacji strefowej synchronicznej stosuje się kompletację bezpośrednią zamówień 1:1 i 1:n; przy kompletacji strefowej sekwencyjnej tworzy się zlecenia poprzez połączenie zamówień w rozbiciu na strefy (kompletacja *m:n*);

- parametry techniczne magazynu: szerokość regału 2,65 m, szerokość alejek 3 m, szerokość głównych korytarzy 3,4 m, średnia prędkość poruszania się magazyniera 5 m/s, czas pobrania towaru 10 s.

## RYSUNEK 1.

## Magazyn z trzema strefami połączonymi przenośnikiem taśmowym z sortownią



Źródło: opracowanie własne.

Metodą badawczą wykorzystaną do badań są symulacje komputerowe. Obliczenia zostały wykonane z wykorzystaniem programu **Warehouse Real-Time Simulator** [Tarczyński, 2013, s. 1-18]. Dla każdego badanego wariantu decyzyjnego wykonano 20 tys. replikacji (jedna replikacja oznacza jedno zamówienie, które należy skompletować).

### 3. Badanie efektywności kompletacji strefowej – wyniki obliczeń

Zostały wyznaczone średnie czasy kompletacji dla 90 wariantów decyzyjnych z wykorzystaniem narzędzi symulacyjnych (tabela 1.). Wszystkie warianty porównano z wariantem, w którym kompletacja odbywała się bez podziału na strefy, towary składowano w sposób całkowicie losowy, a trasę magazynierów ustalono z wykorzystaniem heurystyki *s-shape*, którą zdecydowanie najczęściej stosuje się w praktyce. Dzięki właściwemu składowaniu towarów jest możliwe poprawienie wyników o 26,93%, bez konieczności zmiany metody wyznaczania trasy. Gdyby magazynierzy poruszali się po najkrótszej trasie, to redukcja średnich czasów kompletacji wyniosłaby 41,03%. Zastosowanie kompletacji strefowej sekwencyjnej, zarówno dla magazynu trzystrefowego, jak i pięciostrefowego, powoduje dalszą redukcję, ale już nie tak wyraźną, o kilka punktów procentowych. Najlepsze wyniki – skrócenie czasu o blisko 70% w stosunku do wariantu wzorcowego – uzyskano dla kompletacji synchronicznej. Wariantem najkorzystniejszym jest ten, w którym wyróżniono 5 stref, towary składowano zgodnie z polityką *within-aisle*, a magazynierzy

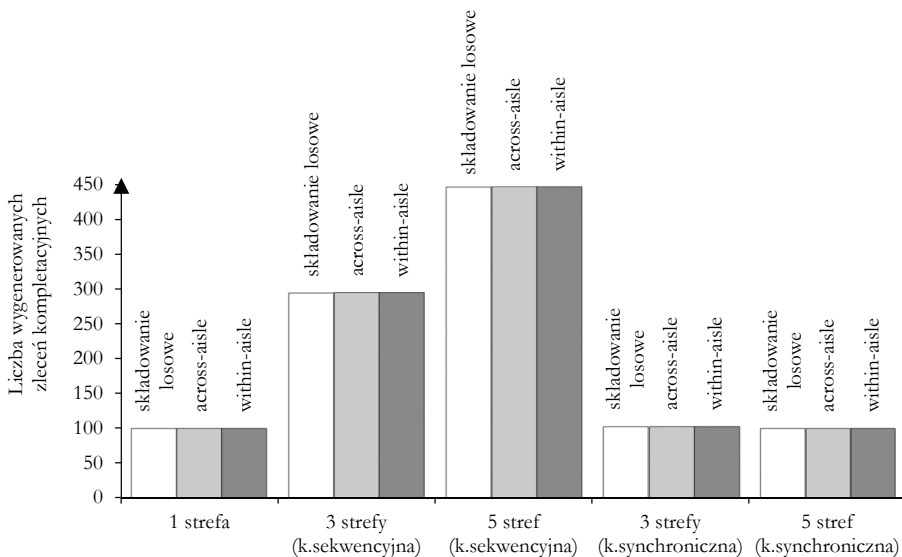
poruszali się po najkrótszej trasie – poprawa wyniku o 69,12%. Tylko niewiele gorsze rezultaty uzyskano dla metod wyznaczania trasy, które są łatwe do zastosowania w praktyce, a mianowicie: heurystyki *s-shape* z polityką *within aisle* (65,03%) oraz heurystyki *return* z polityką *across-aisle* (64,58%). Jednak należy pamiętać, że strefowa kompletacja zleceń łączonych wymaga dodatkowego nakładu pracy w sortowni lub dużych nakładów finansowych na zainstalowanie sortowni automatycznej.

Heurystyki: *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined* najefektywniej funkcjonowały przy składowaniu zgodnym z polityką *across-aisle*. Z kolei, metoda *s-shape* była najskuteczniejsza w sytuacji, gdy wdrożono politykę składowania towarów *within-aisle*. Warte uwagi jest pewna prawidłowość, która cechowała heurystykę *s-shape* w magazynach podzielonych na strefy. W tych przypadkach składowanie towarów na podstawie klasyfikacji ABC przyniosła bardzo niewielką poprawę wyników w porównaniu ze składowaniem losowym.

Rysunek 2. obrazuje zmiany liczby wygenerowanych zleceń (list kompletacyjnych) dla poszczególnych wariantów. Dla kompletacji strefowej sekwencyjnej liczba wygenerowanych zleceń wyniosła około 295% wariantu podstawowego przy magazynach trzy-strefowych i blisko 450% dla magazynów pięciostrefowych. Kompletacja synchroniczna powodowała, że zamówienia w ramach stref były łączone, czego następstwem było to, że liczba zleceń dla 3 stref stanowiła około 102,6%, a dla 5 stref około 100,2% liczby pierwotnych zamówień.

RYSUNEK 2.

### Liczba zleceń realizowanych przy różnych wariantach organizacji stref kompletacji



Źródło: opracowanie własne.

TABELA 1.

Średnie czasy kompletacji dla różnych wariantów (w nawiasach podano procentową poprawę czasu względem wariantu jednostrefowego z losowym rozmieszczeniem towarów i heurystyką *s-shape*)

Podział na strefy	Składowanie	Metoda wyznaczania trasy					
		s-shape	midpoint	return	largest gap	combined	optimal
1 strefa	losowe	27:14 (0,00%)	22:13 (18,44%)	28:56 (-6,27%)	22:01 (19,17%)	24:15 (10,92%)	21:05 (22,60%)
	across-aisle	26:30 (2,70%)	17:06 (37,23%)	17:07 (37,14%)	17:04 (37,34%)	17:09 (37,02%)	16:38 (38,90%)
	within-aisle	19:54 (26,93%)	18:08 (33,44%)	22:34 (17,16%)	17:37 (35,31%)	18:17 (32,87%)	16:04 (41,03%)
3 strefy kompletacja sekwencyjna	losowe	18:54 (30,61%)	18:46 (31,06%)	21:08 (22,41%)	18:23 (32,50%)	17:59 (33,98%)	16:51 (38,13%)
	across-aisle	24:07 (11,44%)	15:52 (41,71%)	15:49 (41,89%)	15:51 (41,81%)	15:50 (41,83%)	15:35 (42,76%)
	within-aisle	18:43 (31,27%)	18:39 (31,52%)	20:52 (23,37%)	18:15 (32,96%)	17:49 (34,56%)	16:45 (38,48%)
5 stref kompletacja sekwencyjna	losowe	19:53 (26,97%)	20:07 (26,13%)	22:00 (19,18%)	19:54 (26,90%)	19:28 (28,54%)	18:59 (30,31%)
	across-aisle	21:57 (19,42%)	14:53 (45,36%)	14:50 (45,55%)	14:52 (45,43%)	14:51 (45,49%)	14:41 (46,07%)
	within-aisle	19:51 (27,11%)	20:08 (26,05%)	22:01 (19,16%)	19:55 (26,84%)	19:28 (28,51%)	18:59 (30,29%)
3 strefy kompletacja synchroniczna	losowe	11:48 (56,68%)	12:48 (52,97%)	14:31 (46,69%)	12:12 (55,21%)	11:23 (58,21%)	10:11 (62,63%)
	across-aisle	18:03 (33,72%)	11:42 (57,06%)	11:37 (57,31%)	11:37 (57,32%)	11:37 (57,36%)	11:10 (58,98%)
	within-aisle	11:38 (57,26%)	12:42 (53,35%)	14:17 (47,57%)	12:06 (55,59%)	11:15 (58,72%)	10:06 (62,90%)
5 stref kompletacja synchroniczna	losowe	9:34 (64,86%)	10:35 (61,12%)	12:19 (54,76%)	10:12 (62,52%)	9:04 (66,74%)	8:26 (69,02%)
	across-aisle	13:53 (49,01%)	9:47 (64,06%)	9:39 (64,58%)	9:41 (64,43%)	9:36 (64,72%)	9:14 (66,12%)
	within-aisle	9:31 (65,03%)	10:32 (61,30%)	12:18 (54,85%)	10:11 (62,61%)	8:59 (67,02%)	8:24 (69,12%)

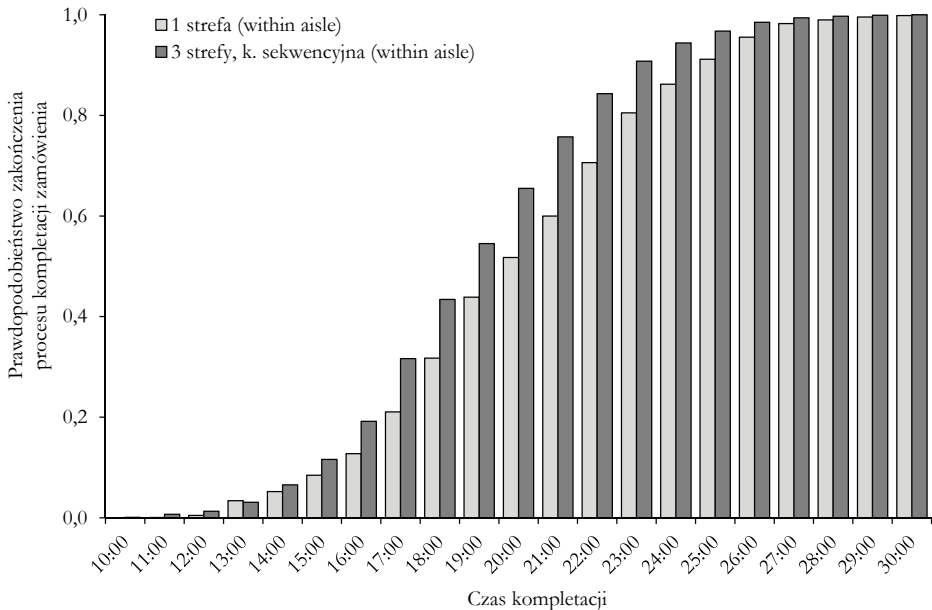
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3. przedstawiono wykresy dystrybuanty czasów kompletacji zamówień dla często stosowanej w praktyce heurystyki *s-shape* w magazynie jednostrefowym i sekwencyjnym trzystrefowym. Dla drugiego wariantu średni czas kompletacji był krótszy o 5,9%. Różnica z pozoru niewielka, ale w przypadku magazynu trzystrefowego największa liczba zamówień (12,47%) była kompletowana w czasie od 16 do 17 minut, a dla magazynu jednostrefowego było to 12,11% i przedział o dwie minuty dłuższy. Dla magazynu jednostrefowego połowa zamówień została skompletowana w czasie 19:48, a w przypadku trzech stref w 18:37. Co ciekawe, dla zamówień, dla których czasy kompletacji były najkrótsze, lepsze wyniki uzyskano przy kompletacji jednostrefowej. Dla 3% najszybciej kompletowanych zamówień średni czas kompletacji był lepszy o około 2%, jeśli nie dokonano podziału na strefy. Dzieje się tak, gdy wszystkie pobierane towary znajdują się w dwóch pierwszych alejkach. W przypadku podziału na strefy rośnie szansa na to, że wyroby trzeba będzie pobierać z kilku stref, co zwiększy czas obsługi zlecenia. Jeśli

porówna się czasy kompletacji pojedynczych zamówień (rysunek 4.), to można zaobserwować, że dla 65,32% zamówień czasy kompletacji w magazynie trzystrefowym były krótsze niż przy braku podziału na strefy, dla 0,43% takie same, a dla pozostałych 34,25% dłuższe. Dla zamówień, dla których wariant jednostrefowy był lepszy, różnica czasów była stosunkowo niewielka. Przykładowo tylko dla 1,77% zamówień czas kompletacji w magazynie jednostrefowym był krótszy o co najmniej 5 minut niż w przypadku, gdy były one kompletowane w trzech strefach, natomiast aż dla 10,56% zamówień różnica czasów wynosiła co najmniej 5 minut na korzyść magazynu trzystrefowego.

### RYSUNEK 3.

#### Dystrybuanta czasów kompletacji zamówień dla heurystyki *s-shape* i najlepszych wariantów w magazynie jednostrefowym (składowanie *within aisle*) i sekwencyjnym trzystrefowym (składowanie *within aisle*)



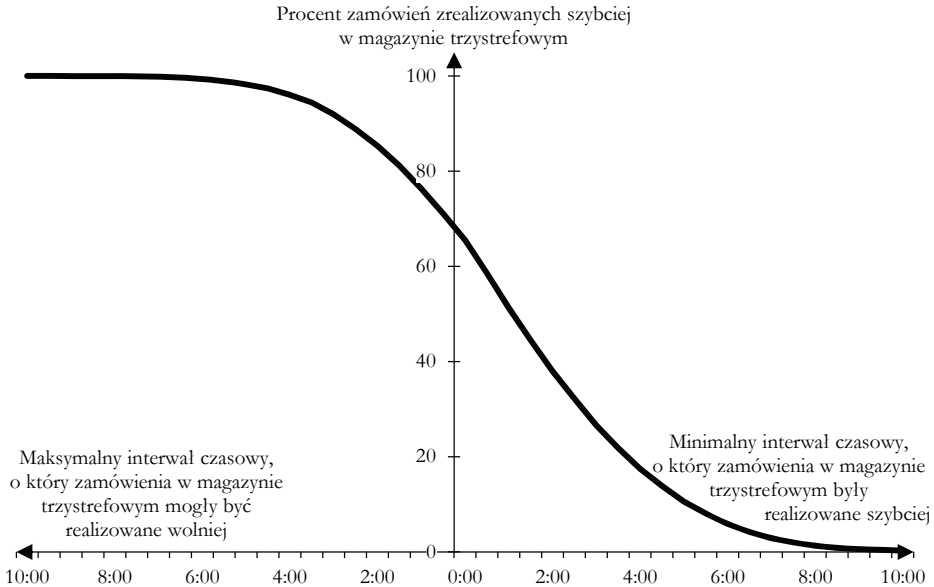
Źródło: opracowanie własne.

Drugą heurystyką, łatwą do wdrożenia, jest heurystyka *return*. Kompletacja, zgodnie z tą metodą, daje bardzo dobre wyniki, ale tylko w połączeniu z polityką składowania *across-aisle*. Na rysunku 5. przedstawiono porównanie czasów kompletacji poszczególnych zamówień dla heurystyki *return* w magazynie jednostrefowym i sekwencyjnym pięciostrefowym. Dla około 76,60% zamówień wariant trzystrefowy okazał się lepszy, a dla 23,06% gorszy (0,34% zamówień zostało skompletowanych w takim samym czasie). Tylko 2,05% zamówień było kompletowanych w jednej strefie szybciej o co najmniej 5 minut niż przy trzech strefach. Z kolei, dla aż 19,92% zamówień czasy w magazynie trzystrefowym były krótsze o co najmniej 5 minut.



## RYSUNEK 4.

Porównanie czasów kompletacji zamówień dla heurystyki *s-shape* i najlepszych wariantów w magazynie jednostrefowym (składowanie *within aisle*) i sekwencyjnym trzystrefowym (składowanie *within aisle*)

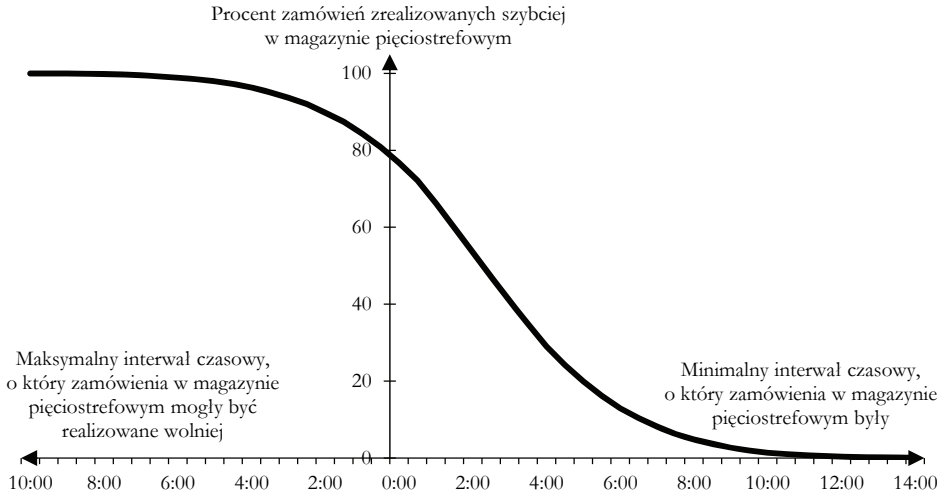


Źródło: opracowanie własne.

Rozkłady prawdopodobieństwa czasów kompletacji zamówień w magazynie pięciostrefowym dla kompletacji synchronicznej i różnych polityk składowania towarów przedstawiono na rysunkach 6. i 7. Wyznaczając trasę zgodnie z heurystyką *s-shape* i przy składowaniu *within-aisle*, najwięcej zamówień, gdyż 32,59%, zostało pobranych w bardzo krótkim czasie od 6 do 8 minut, a aż 97,86% w czasie 6-14 minut. Stosując politykę *across-aisle*, czas kompletacji dla aż 54,96% zamówień wynosił od 12 do 14 minut, a dla 27,65% 16-18 minut. Zupełnie inne wyniki uzyskano dla heurystyki *s-shape*. Czas pobrania, aż 87,70%, zamówień wyniósł od 6 do 12 minut, z czego 42,01% od 8 do 10 minut, ale przy składowaniu *across-aisle*. Dla polityki *within-aisle* wyniki były dużo gorsze: 56,67% zamówień kompletowano w czasie 10-14 minut, a 24,35% jeszcze dłużej. Krótkich czasów kompletacji zamówień nie da się więc osiągnąć ani przez samo składowanie towarów szybko rotujących, ani przez dobór trasy magazyniera. Tylko połączenie tych dwóch elementów gwarantuje poprawę wyników. Z wykresów jeszcze wynika, że dla heurystyk: *midpoint*, *return*, *larger gap* i *combined* rozkłady prawdopodobieństwa zakończenia procesu kompletacji w określonym czasie były do siebie bardzo zbliżone, a także bliskie czasom optymalnym.

RYSUNEK 5.

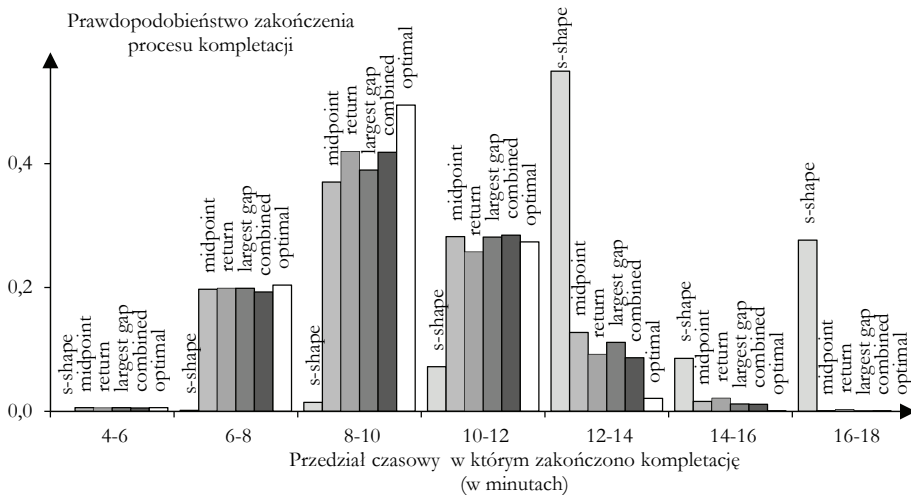
Porównanie czasów kompletacji zamówień dla heurystyki *return* i najlepszych wariantów w magazynie jednostrefowym (składowanie *across aisle*) i sekwencyjnym pięciostrefowym (składowanie *across aisle*)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 6.

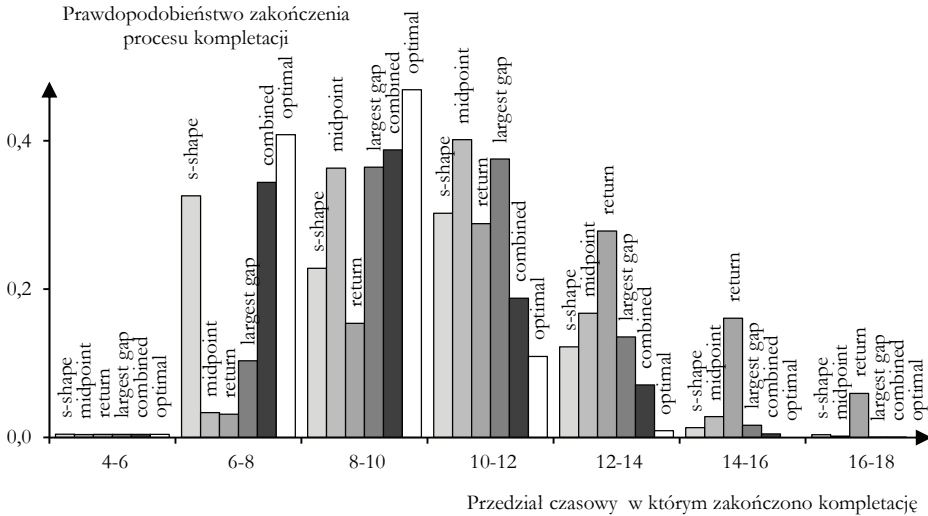
Rozkłady prawdopodobieństwa czasu kompletacji w przeliczeniu na pojedyncze zamówienie dla kompletacji synchronicznej pięciostrefowej, składowania *across-aisle* i różnych sposobów wyznaczania trasy



Źródło: opracowanie własne.

## RYSUNEK 7.

Rozkłady prawdopodobieństwa czasu kompletacji w przeliczeniu na pojedyncze zamówienie dla kompletacji synchronicznej pięciostrefowej, składowania *within-aisle* i różnych sposobów wyznaczania trasy



Źródło: opracowanie własne.

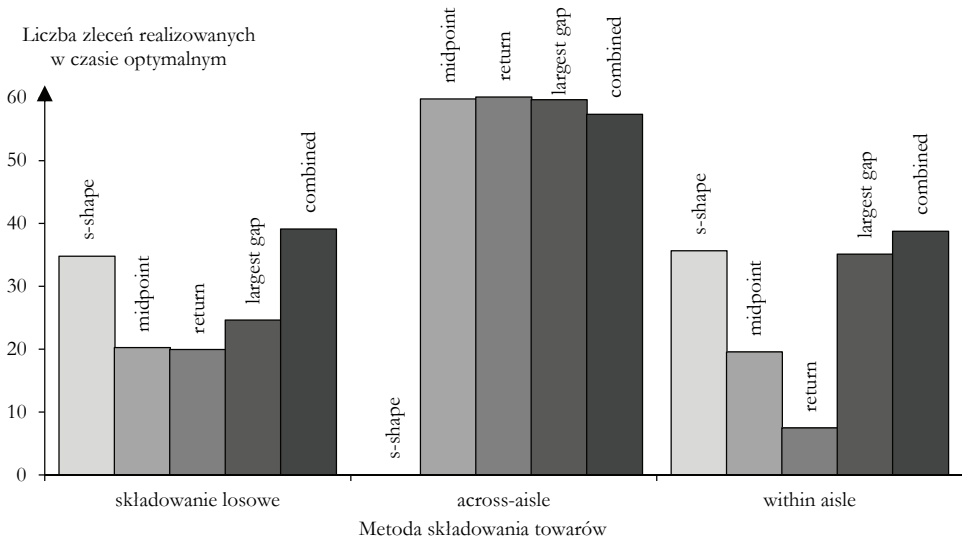
Na rysunkach: 8. i 9. pokazano, dla jakiego procentu zamówień trasa wygenerowana za pomocą poszczególnych heurystyk w magazynach trzystrefowych była optymalna. Dla heurystyk: *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined* w połączeniu ze składowaniem *across-aisle* dla blisko 60% zleceń przy kompletacji sekwencyjnej i około 50% przy kompletacji synchronicznej wygenerowane trasy przejścia były najkrótsze z możliwych. Oznacza to, że nie ma potrzeby wdrażania w magazynie systemu, który kieruje magazynierów na drogę optymalną. Zbliżone efekty można uzyskać za pomocą prostych heurystyk w połączeniu z właściwym składowaniem towarów szybko rotujących.

Niezwykle istotne jest właściwe ułożenie w magazynie towarów szybko rotujących. Przy kompletacji sekwencyjnej i podziale na trzy strefy zastosowanie polityki *across-aisle* powodowały, że czasy kompletacji dla większości heurystyk, takich jak: *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined*, były bliskie optymalnym, a mianowicie średnie wartości były gorsze od optymalnych o 1,52% do 1,83%. Dla metody *s-shape* ułożenie towarów szybko rotujących wzdłuż głównego korytarza przyniosło pogorszenie wyników w stosunku do rozmieszczenia losowego. Tutaj najlepsze wyniki uzyskała polityka *within-aisle*, a czas kompletacji był dłuższy od optymalnego dla tej polityki o 11,71% i tylko o trochę lepszy niż przy rozmieszczeniu losowym towarów. Przy podziale na pięć stref i wdrożeniu polityki *across-aisle* dla kompletacji sekwencyjnej średnie czasy kompletacji dla heurystyk (za wyjątkiem *s-shape*) także były bliskie wartościom optymalnym (były gorsze od 0,98% do 1,32%). *S-shape* w połączeniu z rozmieszczeniem *within-aisle* przy pięciu strefach dało

już czasy kompletacji niemal optymalne, a średnio dłuższe o 4,55%. Również dla kompletacji strefowej synchronicznej heurystyki: *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined* przyniosły najlepsze rezultaty (i bliskie wartościom optymalnym) w połączeniu z polityką *across-aisle* (czasy kompletacji przekroczyły najkrótsze możliwe wartości o 3,93%-4,66% dla 3 stref i 4,13%-6,07% dla 5 stref). Dla heurystyki *s-shape* duża liczba towarów na zleceniu, którą implikują wymagania kompletacji strefowej synchronicznej, spowodowała, że wdrożenie składowania zgodnego z polityką *within-aisle* w bardzo niewielkim stopniu skróciło czas kompletacji.

## RYSUNEK 8.

**Odsetek zleceń, dla których trasa kompletacji odpowiadała trasie optymalnej przy kompletacji sekwencyjnej trzystrefowej, dla różnych heurystyk wyznaczania trasy i metod składowania towarów**



Źródło: opracowanie własne.

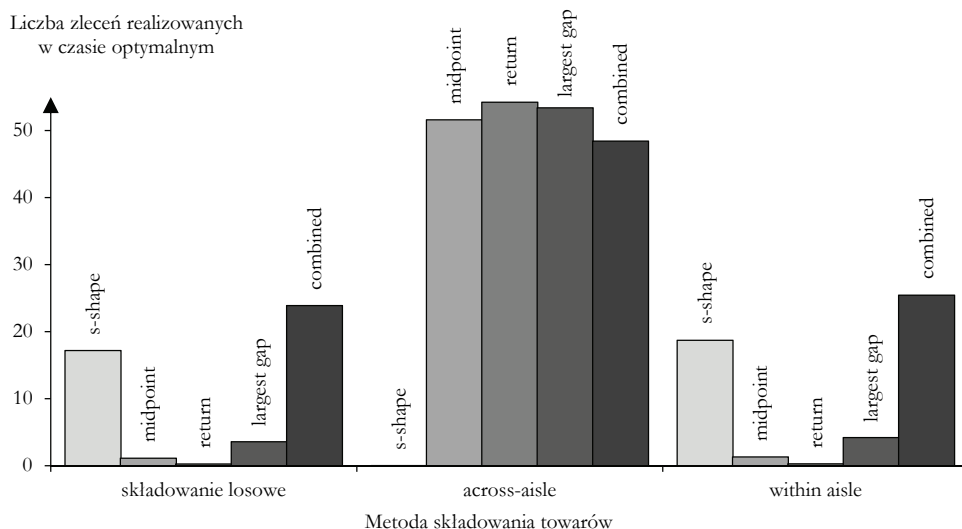
Największe redukcje czasu kompletacji zamówień dla najpopularniejszych i najłatwiej implementowanych heurystyk: *s-shape* i *return*, w porównaniu z najlepszymi wariantami przy magazynie jednostrefowym, uzyskano przy kompletacji synchronicznej i podziale na 5 stref. Przy takiej organizacji pracy magazynu metoda *s-shape* w połączeniu ze składowaniem losowym albo zgodnym z polityką *within-aisle* dała podobne wartości średnich czasów kompletacji co metoda *return* z polityką *across-aisle* i były one lepsze od wariantu jednostrefowego o około 52% dla *s-shape* i blisko 44% dla *return*. Oczywiście, najbardziej byłoby korzystne wdrożenie metody wyznaczającej najkrótszą trasę lub chociaż heurystyki *combined*. Wykorzystanie w praktyce zarówno algorytmu Ratliffa i Rosenthala, jak i metody *combined* nie jest jednak proste i może powodować wiele innych niedogodności.

Drugim kryterium oceny kompletacji strefowej, obok średnich czasów kompletacji, jest współczynnik wykorzystania stref, który obrazuje przez jaki czas magazynierzy

kompletują zamówienia (jako procent całkowitego czasu ich pracy). Pozostały czas to czas oczekiwania na zlecenie. Dla kompletacji sekwencyjnej problem nierównowagi wykorzystania stref w praktyce nie wystąpił – minimalna wartość to ponad 97% (tabela 2.). Założono, że bufory w strefach są nieograniczone, dlatego magazynierzy ze strefy pierwszej nie musieli czekać z rozpoczęciem kompletacji zlecenia, aż pracownicy z kolejnych stref zakończą poprzednie zlecenia. Stąd współczynnik wykorzystania pierwszej strefy wyniósł 100%. Wysokie wartości w kolejnych strefach wynikają z tego, że przyjęto zbliżone rozkłady towarów szybko rotujących we wszystkich strefach.

### RYSUNEK 9.

**Odsetek zleceń, dla których trasa kompletacji odpowiadała trasie optymalnej przy kompletacji synchronicznej trzystrefowej, dla różnych heurystyk wyznaczania trasy i metod składowania towarów**



Źródło: opracowanie własne.

Dla kompletacji synchronicznej, gdzie najpierw zamówienia dzielono na strefy, a następnie scalano, tworząc końcowe zlecenia, problem nierównowagi wykorzystania stref wystąpił w większym stopniu (tabela 3.). Współczynniki wykorzystania stref wyniosły od 81% do 91%, mimo że przyjęto założenie, iż średnia liczba towarów kompletowanych z każdej strefy jest zbliżona. Najgorzej sytuacja wyglądała przy podziale na 5 stref i heurystykach: *s-shape*, *return* i *combined* w połączeniu ze składowaniem losowym lub polityką *within-aisle* – aż 19% czasu magazynierzy spędzali na oczekiwaniu na nowe zlecenie. Problem nierównowagi w najmniejszym stopniu miał miejsce dla 3 stref, metody *s-shape* i polityki *across-aisle* – tutaj było marnotrawione 9% czasu pracy. Jane i Laih [2005, s. 489-496] podali przykład rzeczywistego magazynu, gdzie współczynniki wykorzystania stref nawet nie przekraczały 50%, co było spowodowane znaczną różnicą w średnich liczbach towarów pobieranych w poszczególnych strefach.

TABELA 2.

**Współczynniki wykorzystania stref kompletacyjnych przy kompletacji sekwencyjnej**

Liczba stref	Metoda wyznaczenia trasy	Metoda składowania towarów	Współczynnik wykorzystania strefy (w %)				
			Strefa 1.	Strefa 2.	Strefa 3.	Strefa 4.	Strefa 5.
3	<i>s-shape</i>	losowe	100,00	97,22	99,97	–	–
3	<i>midpoint</i>	losowe	100,00	97,59	99,97	–	–
3	<i>return</i>	losowe	100,00	97,70	99,98	–	–
3	<i>largest gap</i>	losowe	100,00	97,70	99,98	–	–
3	<i>combined</i>	losowe	100,00	97,56	99,98	–	–
3	<i>optimal</i>	losowe	100,00	97,72	99,98	–	–
3	<i>s-shape</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,67	99,78	–	–
3	<i>midpoint</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,50	99,84	–	–
3	<i>return</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,56	99,88	–	–
3	<i>largest gap</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,48	99,84	–	–
3	<i>combined</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,54	99,83	–	–
3	<i>optimal</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,56	99,84	–	–
3	<i>s-shape</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,45	99,73	–	–
3	<i>midpoint</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	98,73	99,55	–	–
3	<i>return</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,10	99,69	–	–
3	<i>largest gap</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	98,88	99,68	–	–
3	<i>combined</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,36	99,83	–	–
3	<i>optimal</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,29	99,85	–	–
5	<i>s-shape</i>	losowe	100,00	99,98	97,31	99,70	99,51
5	<i>midpoint</i>	losowe	100,00	99,97	97,05	99,58	99,40
5	<i>return</i>	losowe	100,00	99,96	97,52	99,59	99,44
5	<i>largest gap</i>	losowe	100,00	99,98	97,08	99,59	99,47
5	<i>combined</i>	losowe	100,00	99,97	97,19	99,64	99,45
5	<i>optimal</i>	losowe	100,00	99,98	97,46	99,72	99,39
5	<i>s-shape</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,18	99,20	98,48	98,18
5	<i>midpoint</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,80	99,08	98,88	98,52
5	<i>return</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,77	99,01	98,86	98,40
5	<i>largest gap</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,79	99,02	98,89	98,48
5	<i>combined</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,78	98,99	98,88	98,47
5	<i>optimal</i>	<i>across-aisle</i>	100,00	99,77	98,99	98,87	98,44
5	<i>s-shape</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,81	99,01	99,02	98,85
5	<i>midpoint</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,73	98,85	99,01	98,55
5	<i>return</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,58	99,11	98,72	98,34
5	<i>largest gap</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,80	98,92	98,98	98,55
5	<i>combined</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,81	98,93	99,09	98,75
5	<i>optimal</i>	<i>within-aisle</i>	100,00	99,80	99,02	99,03	98,64

Źródło: opracowanie własne.

TABELA 3.

**Współczynniki wykorzystania stref kompletacyjnych przy kompletacji synchronicznej**

Liczba stref	Metoda składowania towarów	Średni współczynnik wykorzystania strefy (w %) dla metody wyznaczania trasy					
		<i>s-shape</i>	<i>midpoint</i>	<i>return</i>	<i>largest gap</i>	<i>combined</i>	<i>optimal</i>
3	losowe	85,19	88,19	85,02	88,20	85,86	87,43
3	<i>across-aisle</i>	91,08	87,81	87,58	88,00	87,96	90,05
3	<i>within-aisle</i>	85,13	88,06	85,33	88,03	85,74	87,36
5	losowe	81,11	84,51	81,15	84,41	81,41	85,10
5	<i>across-aisle</i>	87,21	82,31	82,12	82,70	83,34	86,41
5	<i>within-aisle</i>	81,06	84,93	81,24	84,52	81,57	85,36

Źródło: opracowanie własne.

#### 4. Podsumowanie

Wdrożenie kompletacji strefowej w magazynie pozwala na redukcję średnich czasów kompletacji zamówień, ale tylko wtedy, gdy równocześnie zadba się o właściwe składowanie towarów szybko rotujących i dobór heurystyki wyznaczania trasy. Wydaje się, że te dwa ostatnie czynniki mają dużo większe znaczenie niż sam podział na strefy. Przeprowadzone eksperymenty świadczą o tym, że nieprawidłowo przeprowadzona kompletacja strefowa może nawet spowodować wydłużenie średnich czasów kompletacji zamówień. Heurystyki: *midpoint*, *return*, *largest gap* i *combined* powinny być stosowane w połączeniu z polityką składowania *across-aisle*, a heurystyka *s-shape* z polityką *within-aisle*. Wówczas nawet dla ponad 50% zamówień trasa wygenerowana przez te heurystyki była optymalna.

Oprócz średnich czasów kompletacji, drugie kryterium stosowane przy ocenie kompletacji strefowej stanowiło wykorzystanie stref kompletacyjnych. W pracy założono, że rozkład towarów szybko rotujących we wszystkich strefach jest zbliżony do siebie. Mimo to można było zauważyć problem nierównowagi nakładu pracy w strefach przy kompletacji synchronicznej, gdzie dla określonych wariantów w niektórych strefach pracownicy nawet przez blisko 20% czasu pozostawali beczynni, czekając na nowe zlecenie. Dla kompletacji sekwencyjnej problem ten wystąpił w minimalnym stopniu. powinny być kontynuowane badania dotyczące stopnia wykorzystania stref. Interesujące byłoby określenie przybliżonego rozkładu czasu obciążenia stref, przyjmując, że rozkłady czasów kompletacji w strefach są znane, ale nie są zbliżone do siebie (jak założono w artykule). Inne problemy badane już przez naukowców, jednak wymagające, zdaniem autorów, dalszej analizy, to: ustalenie sposobu przydziału towarów do stref tak, aby równocześnie osiągnąć dwa cele, a mianowicie: minimalizację średniego czasu kompletacji i maksymalizację wykorzystania stref [Jane, Lai, 2005, s. 489-496], jak również tworzenie zleceń łączonych i ich harmonogramowanie w celu zapewnienia płynniejszej realizacji procesu kompletacji strefowej [Hong i in. 2012, s. 557-570].

### Wkład autorów w opracowanie artykułu

dr Grzegorz Tarczyński – opracowanie koncepcji badań, współudział w przeprowadzeniu badań i opracowaniu wyników – 60%

dr Michał Jakubiak – opracowanie koncepcji badań, współudział w przeprowadzeniu badań i opracowaniu wyników – 40%

### Literatura

- de Koster R., 1994, *Performance approximation of pick-to-belt orderpicking systems*, “European Journal of Operational Research”, no. 72(3), DOI 10.1016/0377-2217(94)90423-5.
- de Koster R., Le-Duc T., Roodbergen K.J., 2007, *Design and control of warehouse order picking: A literature review*, “European Journal of Operational Research”, no. 182(2), DOI 10.1016/j.ejor.2006.07.009.
- Frazelle E.H., Apple J.M., 1994, *Warehouse operations*, [in:] *The Distribution Management Handbook*, J.A. Tompkins (ed.), McGraw-Hill, Nowy Jork.
- Hong S., Johnson A., Peters B., 2012, *Batch picking in narrow-aisle order picking systems with consideration for picker blocking*, “European Journal of Operational Research”, 221(3), DOI 10.1016/j.ejor.2012.03.045.
- Jane C.C., Laih Y.W., 2005, *A clustering algorithm for item assignment in a synchronized zone order picking system*, “European Journal of Operational Research”, no. 166(2), DOI 10.1016/j.ejor.2004.01.042.
- Le-Duc T., de Koster R., 2005, *Determining number of zones in a pick-and-pack orderpicking system*, ERIM Report Series Reference No. ERS-2005-029-LIS, <https://ssrn.com/abstract=800205> (data wejścia: 19.11.2016).
- Melacini M., Perotti S., Tumino A., 2011, *Development of a framework for pick-and-pass order picking system design*, “The International Journal of Advanced Manufacturing Technology”, no. 53(9-12), DOI 10.1007/s00170-010-2881-2.
- Ratliff H.D., Rosenthal A.S., 1983, *Order-picking in a rectangular warehouse: a solvable case of the traveling salesman problem*, “Operations Research”, no. 31(3), DOI 10.1287/opre.31.3.507.
- Tarczyński G., 2012, *Analysis of the impact of storage parameters and the size of orders on the choice of the method for routing order picking*, “Operations Research and Decisions”, no. 4(2012).
- Tarczyński G., 2013, *Warehouse Real-Time Simulator – How to Optimize Order Picking Time*, Working Paper, <http://ssrn.com/abstract=2354827> (data wejścia: 19.11.2016).
- Van der Gaast J., de Koster R., Adan I., Resing J., 2012, *Modeling and performance analysis of sequential zone picking systems*, Working Paper, <http://alexandria.tue.nl/repository/books/751517.pdf> (data wejścia: 19.11.2016).
- Yu M., de Koster R., 2008, *Performance approximation and design of pick-and-pass order picking systems*, “IIE Transactions”, no. 40(11), DOI 10.1080/07408170802167613.
- Yu M., de Koster R., 2009, *The impact of order batching and picking area zoning on order picking system performance*, “European Journal of Operational Research”, no. 198(2), DOI 10.1016/j.ejor.2008.09.011.



**dr Aleksandra WÓJCICKA**

Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
e-mail: aleksandra.wojcicka@ue.poznan.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.11

## **CLASSIFICATION OF TRADE SECTOR ENTITIES IN CREDIBILITY ASSESSMENT USING NEURAL NETWORKS**

### **Summary**

One of the most valid tasks in credit risk evaluation is the proper classification of potential good and bad customers. Reduction of the number of loans granted to companies of questionable credibility can significantly influence banks' performance. An important element in credit risk assessment is a prior identification of factors which affect companies' standing. Since that standing has an impact on credibility and solvency of entities. The research presented in the paper has two main goals. The first is to identify the most important factors (chosen financial ratios) which determine company's performance and consequently influence its credit risk level when granted financial resources. The question also arises whether the line of business has any impact on factors that should be included in the analysis as the input. The other aim was to compare the results of chosen neural networks with credit scoring system used in a bank during credit risk decision-making process.

**Key words:** credit risk, default, bankruptcy, neural networks

**JEL:** C45, G33, G11

### **1. Introduction**

Running a business is a constant process of decision making. Those decisions are always accompanied by risk which can be characterised by a different scale. Ultimately that risk takes a form of a financial dimension. In market economy risk is a common phenomenon. However, it affects various branches, and decisions made within them, to a different extent. The branch which is exposed to a financial and credit risk the most is the financial sector (banks, financial institutions etc.).

The history of bank systems indicates that the main reason of decreasing potential profits or bank's own capital and the occurrence of financial difficulties was inefficient credit granting policy, faulty credit procedures, of credit norms and regulations as well as insufficient collateral of a loan. The mentioned difficulties often lead to a loss of credibility and liquidity which, in turn, to banks' default and bankruptcy. Banks cannot be too reckless in granting financial resources, on the other hand, however, they cannot be too restrictive, either. The first situation leads to granting loans to investors of low

credibility and, in turn, to financial losses. The other one (a very conservative bank) to a lower profit due to a smaller number of awarded loans (so-called lost opportunities).

Accordingly, the efficient classification of bank's customers to an appropriate risk group is a fundamental principle for banks or other financial institution. As a result of the rapid increase of the amount of insolvent companies (debtors) and a credit risk level (in relative and absolute values) in the past 30 years, the interest in methods of identifying factors which influence credit risk, classifying customers of banks into defined groups and consequently reducing the level of credit risk, grew significantly.

Banks use different methods to assess customers' creditability (i.e. the probability that the customer will pay back the full amount of credit and all other contractual payments in a pre-determined time). Usually those methods are credit scoring methods combined with financial ratios analysis and models of discriminative analysis, the objective of which is to assign the potential debtor to one of two groups: "good" or "bad" customer [Wójcicka, Wójtowicz, 2009]. However, despite being actively developed, some of these methods still are not flexible enough when compared to constantly changing economy conditions. Therefore, a growing interest in solutions like artificial neural networks (ANN<sup>1</sup>) and their applications in credit risk assessment is noticeable and every, even the smallest improvement in accuracy, is a significant accomplishment [West, 2000]. This interest is due to the fact that neural networks have a built-in capacity to adapt their synaptic weights to changes in the surrounding environment. In particular, a neural network trained to operate in a specific environment can be easily retrained to deal with minor changes in the operating environmental conditions [Haykin, 2011, p. 3].

## 2. Methods

The study can be classified in applied studies group and the research strategy is descriptive. Neural network technique (NN) – also called artificial neural network (ANN) – is used.

The research focuses on investigating and comparing the results of two different structures of neural networks – the most common Multi-Layer Perceptron (MLP) and Radial Basis Function neural network (RBF).

Main similarities and differences between the two NN structures are presented in Table 1.

The collected data was obtained from a bank operating on Polish market, the Commercial Court in Poznań, Poland (the data is confidential therefore the names of the companies cannot be revealed) and from NOTORIA SERWIS. The data cover a period of six years (2009 – 2014). The sample contains financial statements of companies which include a balance sheet, an income statement, a cash flow statement and a statement of changes in equity.

---

<sup>1</sup> In this paper the acronym ANN and NN will be used alternatively to define artificial neural networks.

**TABLE 1.**  
**Similarities and differences between MLP and RBF neural networks.**

	<b>MLP</b>	<b>RBF</b>
signal transmission	feedforward	feedforward
process of building the model	one stage	two different, independent stages – at the first stage by means of radial basis functions the probability distribution is established; the network learns the relations between input x and output y at the second stage. On the contrary to MLP the lag is only visible in RBF in the output layer.
threshold	yes	no
type of parameters	weights and thresholds	<ul style="list-style-type: none"> <li>• location and width of basis function and</li> <li>• weights binding basis functions with output</li> </ul>
functioning time	faster	slower (bigger memory required)
learning time	slower	faster

Source: own elaboration based on [Kowalski, 2011; Gaudart et al., 2004; Nigrin, 1993; *Statistica Help SANN*].

The other purpose of the research is to determine those endogenous factors which affect the level of company's credit risk. It is important to identify which of the factors have the biggest impact and which are unnecessary and therefore can be removed from future analysis [Wójcicka, 2012; Wójciak, Wójcicka, 2008; Wójciak, Wójcicka, 2009].

The implemented tool is STATISTICA Neural Networks (SANN). Variables are divided into dependent and independent ones. Independent variables are the financial ratios of various groups which banks find the most significant in credit risk analysis and use them in their models. The dependent variable was identified as a "good" or "bad" company. A "good" company was the one which was (or would be) granted financial resources and, consequently, the "bad" enterprise was the one that was denied funding. However, it must be stressed that the fact that a bank classified the company as a good debtor and was willing to grant the financial means is not unequivocal with final entering into the contract of a loan.

The data set was divided into three groups in a following manner:

- learning group (80% of data set),
- testing group (10% of data set),
- validation / holdout group (10% of data set).

For building models, different variants of hidden layers were used.

### 3. Research and findings

The first goal of the research was to identify the optimal set of financial indices from a global set of 25 most popular financial indexes. The whole set of ratios is presented in Table 2.

**TABLE 2.**

**A list of ratios used in the research**

1	Current ratio	14	Financial surplus rate
2	Quick ratio	15	Long-term debt ratio
3	Receivables ratio	16	Current assets turnover ratio
4	Stock turnover ratio	17	Short-term investments
5	Receivables to liabilities	18	Operating activity profitability
6	Gross profit margin ratio	19	Assets profitability index
7	Net profit margin ratio	20	Equity profitability index
8	Sale profitability index	21	Costs increase ratio
9	Costs level ratio	22	Sales dynamics
10	Total debt ratio	23	Operating ratio
11	Equity debt ratio	24	Self-financing ratio
12	Financial leverage	25	EBITDA/Financial expenses
13	Debt/EBITDA		

Source: own on the basis of [Bragg, 2010].

The initial set of 25 indices was used as the entry data in NN learning process. In each step 20 NN of the chosen artificial neural network models – MLP and RBF, were estimated to state whether the analysed company is “good” or “bad” and to classify them in an appropriate group. Then the process of reducing the set of entry data began. It was conducted iteratively. The first step was to calculate the correlation between each pair of ratios. Next, the pair of the highest level of correlation was chosen. From that pair this ratio was rejected which had the highest average level of correlation with the remaining indexes. The obtained set of 24 indices was then implemented as entry data into the NN learning system. Then another index was rejected and once again, a new, limited set of entry data was applied to NN. This process was continued until the set got to 3 indices. Then, the whole process was stopped.

It appears that the best set of indices for MLP neural networks architecture consists of 7 following indices: Current ratio, Total debt ratio, Financial leverage, Financial surplus rate, Equity profitability index, Equity debt ratio, Sale profitability index. Rating of the results (MLP) is presented in Table 3.

TABLE 3.

## Best five neural networks of MLP architecture

No.	Neural network	Quality (learning) %	Quality (testing) %	Error function	Activation (hidden layer)	Activation (output)
1	MLP 7-11-1	96.67	90.00	Entropy	Sinus	Softmax
2	MLP 7-12-1	95.00	91.67	Entropy	Sinus	Softmax
3	MLP 7-10-1	93.33	88.33	SOS	Logistic	Linear
4	MLP 7-13-1	86.67	80.00	SOS	Exponential	Sinus
5	MLP 7-9-1	81.67	78.33	SOS	Tanh	Exponential

Source: own calculations; SANN.

However, RBF networks include a slightly wider set (7-9 indices). Seven ratios are accompanied by two following ones: EBITDA/Financial expenses and Current assets turnover ratio. Rating of the results (MLP) is presented in Table 4.

TABLE 4.

## Best five neural networks of RBF architecture

No.	Neural network	Quality (learning) %	Quality (testing) %	Error function	Activation function (hidden layer)	Activation (output)
1	RBF 7-13-1	95.00	91.67	Entropy	Gaussian	Softmax
2	RBF 7-12-1	93.33	91.67	Entropy	Gaussian	Softmax
3	RBF 7-10-1	88.33	83.33	Entropy	Gaussian	Softmax
4	RBF 8-14-1	88.33	81.67	Entropy	Gaussian	Softmax
5	RBF 9-12-1	85.00	81.67	Entropy	Gaussian	Softmax

Source: own calculations; SANN.

Concerning the results in a learning group it is certainly MLP 7-11-1 network which performs better than RBF, reaching 96.67% accuracy in comparison to 95.00%. However, level of accuracy in RBF 5 best networks is quite steady (the gap reaches just 10.00%) while in the same group of MLP 5 best networks this gap is bigger (15.00%) which indicates a certain instability of possible results. Yet an opposite situation occurs when concerning testing group. A conclusion is justified that in case of testing group, RBF neural networks do a little better than MLP. Just one of the MLP networks exceeded the level of 90.00% in testing group (7-12-1), while in case of RF 7-13-1 and 7-12-1 exceeded that level (91.67%). However, also the lowest level of testing quality was reached among MLP networks (78.33%, MLP 7-9-1) which proves the gap between the best and worst network to be relatively wide (13.34%) while in case of RBF it is merely 10.00%. It is worth stressing that almost all 5 best neural networks, in case of both types of NN, are in the range level above 80.00% when concerning the best networks in learning and testing sets.

Testing the neural networks on separate set of data (validation group) proved that both types of NN show good results, however, MLP performs slightly better than RBF. Table 5 presents the results obtained in validation group, for both types of tested NN, in comparison to a real bank credit scoring model (further referred to as BCSM).

**TABLE 5.**

**Comparison of MLP and RBF neural networks and BCSM**

Type of NN	Quality (%)
MLP 7-11-1	83.33
MLP 7-12-1	83.33
BCSM	81.67
RBF 7-13-1	76.67
RBF 7-12-1	76.67

Source: own calculations.

Comparison of MLP and RBF results with a banking credit scoring method, on the same set of data, is very encouraging. MLP architecture of neural networks slightly exceeds the performance of BCSM. BCSM uses 6 indices (respectively best MLP and RBF architecture use 7 and 7-9 indices) for making credit-granting decisions which are invariable irrespective of the line of business. This, in authors' opinion, can have an adverse impact on a final outcome of the decisions made, as it is very often too static and does not follow the latest trends in rapidly changing economy and market conditions or it does not distinguish some subtle factors. It is also important to stress that BCSM is usually only a part of the whole process of granting or rejecting loans and it is often followed by the expert's or analyst's opinion supported by the results of BCSM.

Although the differences between implemented methods can seem marginal, still they can be observed and eventually may decide not only about bank's performance but in extreme cases, about its survival.

Comparison of current and previous research (for construction sector [Wójcicka, 2016b] and industrial sector [Wójcicka, 2016a]) proved that the line of business influences the optimum set of input data (financial ratios) as they vary depending on a particular branch of business. The ratios used in analysed sectors are presented in Table 6.

Only two ratios appear in case of three analysed sectors, therefore, they can be tentatively considered as universal. It means that they can be used regardless of the line of business of the assessed company. However, it is worth stressing that 8 out of 25 initial input ratios do not appear at all in any of neural networks cases, therefore, they can be omitted in any analysis. Moreover, BCSM shares four (in case of construction sector) and 5 (in case of industrial sector) of all 6 initial ratios it uses. However, its results are not better than the ones of the best neural networks. It proves that too narrow set of input data negatively influences the outcome. It can be assumed that it would be beneficial to supplement this basic set of BCSM 6 ratios by chosen ratios indicated by neural networks as useful in the case of a specific business sector.

**TABLE 6.**

**Comparison of ratios used for the analysis of trade, construction and industrial sectors**

No.	Ratios	Trade sector		Construction sector		Industrial sector	
		MLP	RBF	MLP	RBF	MLP	RBF
1	Current ratio	x	x	x	x		
2	Receivables ratio			x	x	x	x
3	Operating activity profitability index			x	x	x	x
4	<b>Financial surplus rate</b>	x	x	x	x	x	x
5	<b>Total debt ratio</b>	x	x	x	x	x	x
6	Costs level ratio			x	x		
7	Assets profitability index			x	x	x	x
8	Financial leverage	x	x	x	x		x
9	Operating activity profitability index				x	x	x
10	Current assets turnover ratio		x		x	x	x
11	Quick ratio					x	x
12	Stock turnover ratio						
13	Receivables to liabilities ratio					x	x
14	Equity profitability index	x	x				
15	Equity debt ratio	x	x				
16	Sale profitability index	x	x				
17	EBITDA/Financial expenses		x				

Source: own calculations.

The comparison of research for construction and industrial sector with the current research also proved the tendency of MLP performing slightly better than RBF. However, one fact remains disturbing. Depending on the sector the results of accuracy, that neural network achieved, vary significantly. Some sectors reach the results visibly higher than the other and that should be further investigated. This can be related to the fact that construction sector is quite homogenous, while industrial sector covers a wide variety of activities. However, the trade sector also covers a wide range of businesses but its results were comparable with construction sector. Therefore, it should be considered in future research whether it is justified to analyse sectors as the whole or whether it would be more beneficial to single out separate branches.

#### 4. Conclusions

Credit risk estimation and correct classification of customers is a valid, up-to-day, significant issue. Therefore, methods are being constantly developed to improve the

process of decision-making and new models are being created. The methods cover a wide range of various approaches. Their utility is checked daily in bank practice. The objective of used methods is increased accuracy which means that more creditworthy applicants are granted a loan, thereby increasing bank's profits. Consequently, those accounts which are not creditworthy are denied the loan and, thus avoiding unnecessary losses.

The paper analysed two types of neural networks: Multi-Layer Perceptron (MLP) and Radial Basis Function (RBF). The choice of those types of neural network architecture was dictated by their popularity.

In the research, they both proved to be highly useful in credit risk decision-making process. The obtained results show that, irrespective of the model and data set, the accuracy is not less than 80% (among the best ones).

The research on decreasing input data (set of financial indices) showed that there is no need to excessively increase the number of indexes, for the best results were obtained for subsets of approximately 7-9 indices. It also showed that it is justified to use a smaller subset of universal ratios, regardless the line of business (2 ratios proved to be universal in case of trade, construction and industrial sectors). However, they should be combined with other subsets of ratios – specific for the particular sector.

In the author's opinion, it would also be essential to implement other methods of including and excluding the variables – preferably, independently for each method and branch of economy.

Moreover, one of the further directions of currently ongoing research, may lead to broadening the set of exogenous factors which, in the author's opinion, significantly influence credit risk.

The alternative direction of research, with respect to this analysis, bases on comparative analysis among neural networks and other approaches to categorising clients (popular credit scoring methods, Z-score models, other classification methods – classification trees, regression etc.) and amid different types of neural networks as well.

## Bibliography

- Bragg S. M., 2010, *Wskaźniki w analizie działalności przedsiębiorstwa*, Oficyna Wolters Kluwer Business
- Gaudart J., Giusiano B., Huiart L., 2004, *Comparison of the Performance of Multi-Layer Perceptron and Linear Regression for Epidemiological Data*, "Computational Statistics & Data Analysis" vol. 44.
- Haykin S., 2011, *Neural Networks and Learning Machines. Third Edition*, PHI Learning Private Limited, New Dehli-110001
- Kowalski P.A., 2011, *An Evolutionary Strategy for Fuzzy Flip-Flop Neural Networks Learning*, XIII Krajowa Konferencja, Algorytmy Ewolucyjne i Optymalizacja Globalna, (KAEiOG 2011), Warsaw (Poland), 21-22 September 2011
- Nigrin A., 1993, *Neural Networks for Pattern Recognition*, Massachusetts Institute of Technology. STATISTICA HELP <http://documentation.statsoft.com/>.



- West D., 2000, *Neural Network Credit Scoring Models*, "Computers and Operations Research", vol. 27.
- Wójciak M., Wójcicka A., 2008, *Zdolności dyskryminacyjne wskaźników finansowych w ocenie kondycji finansowej podmiotów gospodarczych*, [in] *Taksonomia 15: Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
- Wójciak M., Wójcicka A., 2009, *The Discriminative Ability of Financial Ratios to Evaluate the Credit Risk Level* [in]: *Metody matematyczne, ekonometryczne i komputerowe w finansach i ubezpieczeniach 2007*, ed. P. Chrzan, T. Czernik, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej (AE) w Katowicach
- Wójcicka A., 2012, *Calibration of a Credit Rating Scale for Polish Companies*, "Operations Research and Decisions", no. 3.
- Wójcicka A., 2016a, *Credit-Risk Decision Process Using Neural Networks in Industrial Sectors*, referat wygłoszony w dniu 21.10.2016 na konferencji International Conference on Accounting, Finance and Financial Institutions. Theory Meets Practice, Poznań 19-21.10.2016.
- Wójcicka A., 2016b, *Neural Networks in Credit Risk Evaluation of Construction Sector*, referat wygłoszony w dniu 16.09.2016 na: Econometric Research in Finance Workshop w Warszawie.
- Wójcicka A., Wójtowicz T., 2009, *Wykorzystanie analizy wskaźnikowej w ocenie zdolności kredytowej przedsiębiorstwa - szanse i zagrożenia*, „Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego (SGGW) w Warszawie: Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej”, nr 78.

**dr inż. Michał Dominik STASIAK**  
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu  
e-mail: [michal.stasiak@ue.poznan.pl](mailto:michal.stasiak@ue.poznan.pl)

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.12

## **ANALIZA FALOWA KURSU USD/PLN W REPREZENTACJI BINARNEJ**

### **Streszczenie**

Kurs pary walutowej można zobrazować w postaci reprezentacji binarnej. Algorytm binaryzacji zamienia kurs reprezentowany przez dane tikowe na odpowiedni ciąg binarny. Podstawą algorytmu jest dyskretyzacja kursu, w której każdej zmianie wartości, równej zadanej jednostce dyskretyzacji, jest przypisywana wartość binarna zgodna z kierunkiem zmiany kursu. Badania statystyczne przeprowadzone przez autora potwierdziły istnienie zależności w binarnej reprezentacji kursu między historycznymi zmianami a dalszym kierunkiem zmian. Reprezentowany binarnie kurs może być zatem wykorzystany do wyznaczania kierunku i zakresu przyszłych zmian, a w konsekwencji budowy systemów HFT charakteryzujących się dodatnią stopą zwrotu. Jedną z podstawowych metod analizy technicznej jest analiza falowa. W artykule przedstawiono zastosowanie analizy falowej dla reprezentacji binarnej. W tym celu zaproponowano algorytmy pozwalające na detekcję fal, następnie dokonano analizy odpowiednich parametrów fal oraz ich wpływu na kierunek przyszłych zmian kursu walutowego USD/PLN. Proces binaryzacji kursu i algorytm wyznaczania fal został przeprowadzony na podstawie oprogramowania napisanego przez autora w języku MQL4 i C++.

**Słowa kluczowe:** rynek walutowy, FOREX, analiza techniczna, analiza falowa

### **BINARY REPRESENTATION OF USD/PLN EXCHANGE RATE: A WAVE ANALYSIS**

#### **Summary**

The exchange rate of a currency pair can be represented in a binary form. The binarization algorithm converts rates presented in tick data into an appropriate binary string. The basis for this algorithm is provided by an exchange rate discretization, in which each change in value equal to a given discretization unit is assigned a binary value, which corresponds to the direction of change. Statistical research performed by the author confirms dependencies of previous changes and future change of direction in binary representation of exchange rates. Thus, the binary representation can be applied in appointing the direction and scope of future changes, and consequently in the construction of HFT systems with positive rates of return. Wave analysis is one of the basic methods of technical analysis. The paper presents the application of wave analysis for binary representation. For this purpose, algorithms for wave detection are proposed, followed by the analysis of relevant wave parameters and their impact on the direction of future changes in the USD / PLN exchange rate. The binarization process and algorithm for appointing pairs is performed based on the author's proprietary software written in the MQL4 and C++ language.

**Key words:** currency market, FOREX, technical analysis, wave analysis

**JEL:** F31, G11, G14, C49

## 1. Wstęp

Kursy par walutowych zwyczajowo są prezentowane w formie wykresu świecowego. Każdej zmianie kursu w określonym okresie są przypisywane cztery wartości, takie jak: wartość max, min, otwarcia i zamknięcia. Taka reprezentacja jest wykorzystywana w metodach wizualnych analizy technicznej. Wskaźniki analizy technicznej również są wyznaczone na podstawie parametrów lub wybranego parametru świecy [Murphy, 1999; Schlossberg, 2006; Yazdi, Lashkari, 2013; Valcu, 2004; Neely, Weller, 2011]. Stosowanie reprezentacji świecowej prowadzi do utraty wartości informacyjnej dotyczącej zmienności kursu wewnątrz świecy. Zastosowanie reprezentacji binarnej kursu walutowego umożliwia bardziej precyzyjną i skuteczniejszą analizę kursu walutowego. Takie podejście eliminuje w analizie technicznej okresy braku zmienności, np. noce, a jednocześnie zachowuje informację o kierunku i poziomie zmian, która dla potencjalnego inwestora jest najbardziej istotna.

Kurs USD/PLN w reprezentacji binarnej został poddany analizie statystycznej w celu zbadania istnienia możliwych zależności pomiędzy danymi historycznymi a aktualnymi zmianami ceny. W analizie statystycznej posłużono się zestawem testów z pakietu SP800-22 [Rukhin i in. 2010], wykorzystywanych m.in. przez National Institute of Standards and Technology (NIST) do badania generatorów liczb pseudolosowych oraz certyfikacji modułów kryptograficznych.

Możliwość zastosowania reprezentacji binarnej kursu walutowego do budowy modeli predykcyjnych była rozważana w pracy Stasiaka [2016], w której zaproponowano stanowy model reprezentacji binarnej SMBR (ang. State Model of Binary Representatin). Model pozwala na określenie prawdopodobieństw przyszłych zmian kursu.

Większość metod analizy technicznej wykorzystuje zależności falowe, np.: analizę formacji, analizę trendu itd. lub popularną wśród analityków teorię fal Elliotta [Bickford, 2007; Murphy, 1999; Schlossberg, 2006; Frost, Prechter, 1995]. W metodach tych brakuje sprecyzowanych warunków detekcji początku i końca poszczególnych fal. Detekcji fali dokonuje analityk lub inwestor w sposób indywidualny. W konsekwencji uniemożliwia to jednoznaczną weryfikację istnienia zależności falowych na rynku walutowym.

Celem artykułu jest propozycja algorytmów detekcji fal pozwalających na jednoznaczną analizę charakteru występujących fal oraz wykazanie na przykładzie badanej pary walutowej istnienia zależności między parametrami fali a prawdopodobieństwem kierunku przyszłej zmiany kursu walutowego.

W artykule poddano analizie dwa algorytmy, które służą precyzyjnemu wyznaczeniu fal w reprezentacji binarnej. Przedstawiono także przykład analizy parametrów fal występujących w pięcioletnich notowaniach kursu USD/PLN z okresu 01.01.2010-01.01.2015. W analizie posłużono się tиковymi danymi pochodzącymi od brokera Dukascopy.

Artykuł składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale drugim ukazano reprezentację binarną. W rozdziale trzecim opisano dwa algorytmy detekcji fal oraz na ich podstawie analizę badanej pary walutowej. Artykuł kończy podsumowanie zawierające wnioski z tych badań.

## 2. Reprezentacja binarna kursu walutowego

Na rynku walutowym kursy zmieniają się średnio co sekundę. Tak wysoka częstotliwość zmian w rzeczywistości uniemożliwia prezentację danych tikowych. W celu analizy kursu w dłuższych przedziałach czasowych, kurs walutowy praktycznie przedstawiają wszystkie platformy brokerskie (np.: MetaTrader, JForex itd.) w formie wykresu świecowego dla danego interwału czasowego. W reprezentacji świecowej kurs opisuje się dzięki czterem parametrom tworzącym świecę (cena otwarcia, cena zamknięcia, cena maksymalna oraz cena minimalna) dla danego okresu. Kurs w reprezentacji świecowej jest wykorzystywany przez techniki wizualnej analizy technicznej. Kurs w takiej reprezentacji (lub jeden z parametrów świecy, np. kurs zamknięcia) jest również wykorzystywany jako dana wejściowa przez wskaźniki analizy technicznej (np.: MACD, RSI) [Murphy, 1999; Schlossberg, 2006; Yazdi, Lashkari, 2013; Valcu, 2004; Neely, Weller, 2011]. Reprezentacja świecowa – będąca przekształceniem danych tickowych<sup>1</sup> na dziedzinę czasu – prowadzi do utraty części informacji dotyczących zmienności kursu i trudności interpretacyjnych. Jednocześnie mogą występować zmiany o dużej amplitudzie trwające kilka minut (np. podczas prezentacji danych makroekonomicznych), a także wielogodzinne – wielokrotnie mniejsze – wahania podczas nocy [Murphy, 1999; Schlossberg, 2006]. Taki charakter analizowanych danych przyczynia się do dużej złożoności modeli określonych w dziedzinie czasu.

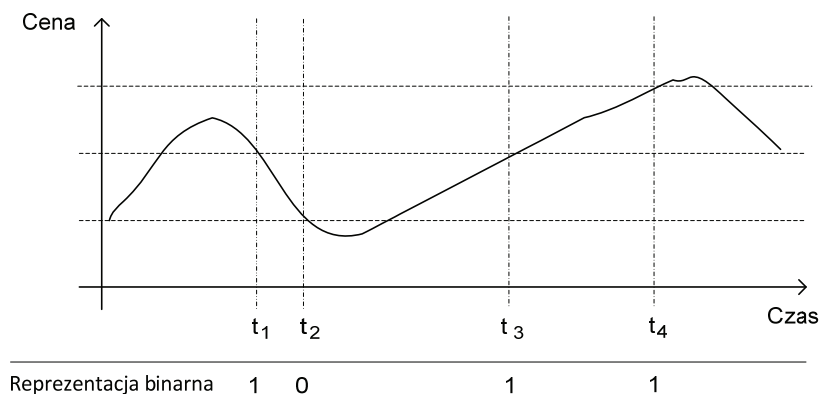
Analizowanie danych tickowych jest skomplikowane ze względu na wielkość danych oraz fakt rejestracji parametrów, które nie mają wartości informacyjnej, takich jak losowe fluktuacje kursu. Stosując reprezentację binarną, przedstawiono kurs w zależności od wielkości zmian, a nie czasu, jak w przypadku reprezentacji świecowej [Stasiak, 2015]. W reprezentacji binarnej kluczowa jest zmiana kursu, natomiast czas jej trwania całkowicie pomija się. Każdej zmianie kursu o przyjętą jednostkę dyskretyzacji przypisano wartości binarną 0 lub 1. Algorytm dyskretyzacji dla początkowej wartości kursu określa górną i dolną granicę zmiany. Jest ona równa dodatniemu i ujemnemu przyrostowi kursu o zadaną jednostkę dyskretyzacji. Jeśli kurs spadnie poniżej dolnej granicy, algorytm przypisuje wartość binarną równą zero (0), zaś w przypadku wzrostu ceny powyżej górnej granicy, algorytm przypisuje wartość binarną równą jeden (1). W następnych krokach algorytm wyznacza kolejne wartości graniczne w stosunku do aktualnego kursu. W efekcie działania algorytmu kurs pary walutowej ukazuje się w postaci ciągu binarnego (np. 01011101) [Stasiak, 2015]. Na rysunku 1. zobrazowano przykładową zamianę kursu na ciąg binarny. Jeśli wystąpią luki cenowe, np. po weekendach, algorytm sprawdza, która wartość zostałaby osiągnięta i zwraca odpowiedni rezultat. Następnie kolejne wartości graniczne są określane w odniesieniu do pierwszej ceny po luce cenowej.

---

<sup>1</sup> Dane tickowe (ang. *tick data*) to najbardziej precyzyjne dane, w których są zarejestrowane wszystkie zmiany (nawet o najmniejszą możliwą wartość) kursu walutowego.

## RYSUNEK 1.

## Przykład reprezentacji binarnej kursu walutowego



Źródło: [Stasiak, 2016].

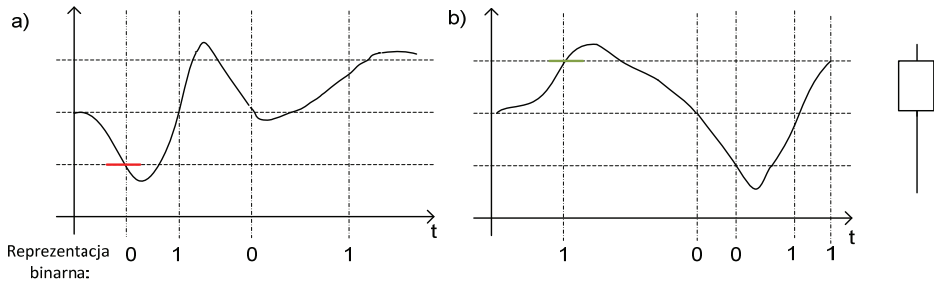
### 2.1. Zalety stosowania reprezentacji binarnej

W analizie świecowej, np. o interwale godzinnym, szereg zmian o zasięgu kilkudziesięciu pipsów<sup>2</sup> może być reprezentowanych przez jedną świecę. W konsekwencji powoduje to utratę wielu informacji dotyczących częstotliwości i kierunku pojedynczych ruchów ceny. Na podstawie kursu przedstawionego w reprezentacji świecowej, w wielu przypadkach trudno jest zweryfikować, czy dana transakcja zakończyłaby się zyskiem, czy stratą inwestora. Sytuacja taka została przedstawiona na rysunku 2. W pierwszym przypadku (rysunek 2a) inwestor osiągnąłby zysk, natomiast w drugim (rysunek 2b) poniósłby stratę, choć oba notowania obrazuje taka sama świeca. W sytuacji zastosowania reprezentacji binarnej, najważniejsze dla analizy technicznej informacje – kierunek oraz zasięg zmian – są rejestrowane. Czas trwania zmiany w reprezentacji binarnej jest pomijany, ponieważ ten parametr dla inwestora ma znaczenie drugorzędne (w przypadku zastosowania kilkudziesięciu pipsowych jednostek dyskretyzacji czas zmiany jest liczony w minutach lub godzinach). Reprezentacja binarna posiada zatem większą wartość informacyjną dla inwestora i w następstwie umożliwia precyzyjną analizę kursu walutowego.

<sup>2</sup> Pips to podstawowa jednostka zmiany kwotowań kursu walutowego. W przypadku kursu walutowego USD/PLN wynosi 0,0001.

## RYSUNEK 2.

Przykład dwóch różnych zmian kursu generujących stratę (a) lub zysk (b) z transakcji, reprezentowanych przez tę samą świecę



Źródło: opracowanie własne.

## 2.2. Uzasadnienie możliwości zastosowania reprezentacji binarnej

Najważniejszym parametrem reprezentacji binarnej jest właściwy dobór jednostki dyskretyzacji. W zależności od przyjętej wartości otrzymany przebieg zmian kursu może mieć różny charakter. Wybór zbyt małej jednostki dyskretyzacji powoduje rejestrację losowych fluktuacji, tzw. szumu. Rejestracja losowych fluktuacji może prowadzić do trudności w analizie przedstawionego kursu (problem istnienia i filtracji szumu był wielokrotnie poruszany w kontekście analizy technicznej [Lo, Mamaysky, Wang, 2000; Logue, Sweeney, 1977; Neely, Weller, 2011]). Jednocześnie wybór zbyt dużej jednostki dyskretyzacji spowoduje rejestrację tylko dużych, bardzo rzadkich zmian, co w konsekwencji przyczyni się do utraty wielu cennych informacji dotyczących zmienności kursu. Optymalna wielkość jednostki dyskretyzacji powinna uwzględniać kwestie praktyczne, np.: wielkość spreadu, możliwość zawierania transakcji (w których TP i SL są oddalone od ceny o jednostkę dyskretyzacji). Biorąc pod uwagę powyższe rozważania, w artykule przyjęto jednostkę dyskretyzacji na poziomie 40 pipsów dla badanej pary walutowej.

W celu dalszej analizy kursu, w reprezentacji binarnej z przyjętą jednostką dyskretyzacji należy określić charakter otrzymanego ciągu binarnego. W związku z tym zweryfikowano, czy ciąg binarny ma charakter losowy, tzn. czy występowanie kolejnych zmian jest niezależne od historii przebiegu. W przypadku potwierdzenia hipotezy losowości dalsza analiza kursu w reprezentacji binarnej dla zadanej jednostki dyskretyzacji byłaby bezcelowa. Weryfikacji hipotezy losowości posłużył zestaw czterech testów statystycznych pakietu SP800-22 [Rukhin i in. 2010], zalecanych przez NIST. Wybrano następujące testy: pojedynczych bitów, pokerowy, serii, długich serii w bloku. Jednoczesny wynik pozytywny pozwala na zakwalifikowanie danych jako losowe. W badaniach przyjęto poziom istotności równy 0.05.

Badaniu poddano dane historyczne kursu USD/PLN w reprezentacji binarnej otrzymane dla przyjętej 40-pipsowej jednostki dyskretyzacji z okresu 5 lat (01.01.2011-01.01.2016). Hipoteza losowości została potwierdzona jedynie przez test pojedynczych bitów, co oznacza porównywalną liczbę zer i jedynek w badanym okresie [Rukhin i in. 2010; Chung, 2012]. Trzy pozostałe testy odrzuciły hipotezę losowości. Rezultat ten można interpretować jako możliwość istnienia pewnych prawidłowości dotyczących różnych częstotliwości występowania określonych wzorców sekwencji zerojedynkowych [Godbole, Papastavridis, 1994; Menezes, Oorschot, Vanstone, 1996]. Podobne rezultaty otrzymano dla innych wartości jednostek dyskretyzacji [Stasiak, 2015]. Podsumowując, wyniki testów statystycznych wskazują na możliwość istnienia zależności między historycznymi przebiegami a przyszłym kierunkiem zmian. Taki charakter danych uzasadnia dalsze badania nad analizą zmian kursu przedstawioną w reprezentacji binarnej.

### 3. Fale w reprezentacji binarnej

Pojęcie fali występuje w większości technik analizy kursów [Bickford, 2007; Murphy, 1999; Schlossberg, 2006]. Na przykład w wizualnej analizie wykresu kolejne fale o danych parametrach tworzą formację itd. W teorii Elliotta (powszechnie stosowanej przez analityków rynku walutowego w analizie technicznej) sformułowano szereg zależności pomiędzy parametrami kolejnych fal [Frost, Prechter, 1995]. Obecność fal na rynku walutowym można również uzasadnić analizą zachowania inwestorów [Oberlechner, 2005]. Większe ruchy na rynku są rezultatem publikacji ważnych danych makroekonomicznych, np. stóp procentowych lub nagłych zmian politycznych, np. dymisji w rządzie. W takich przypadkach inwestorzy zawierający transakcję kierują się otrzymanymi informacjami jeszcze przez określony czas, tworząc fale o określonym zasięgu i czasie trwania.

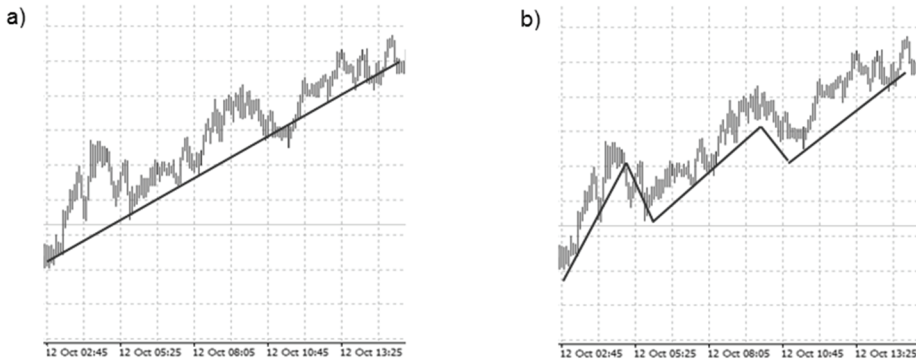
#### 3.1. Definicje i rodzaje fal

Podstawą dotychczasowych metod analizy technicznej, opartych na badaniu fal i ich parametrów, jest wizualna analiza wykresu świecowego [Frost, Prechter 1995; Murphy, 1999]. Pomijając fakt utraty wartości informacyjnej wykresu świecowego, efektywność danej techniki zależy od indywidualnej oceny analityka. Bez określonych, precyzyjnych zasad detekcji fal, weryfikacja istnienia potencjalnych zależności falowych na rynku walutowym oraz analiza parametrów fal z wykorzystaniem danych historycznych jest niemożliwa. Na rysunku 3. zobrazowano dwie (z wielu różnych) możliwości wyznaczenia fal przez analityka bądź inwestora dla danego wykresu kursu.

Chcąc zweryfikować obecne teorie i metody analizy technicznej, bazujące na analizie fal, albo zaproponować nowe metody modelowania rynku z wykorzystaniem zależności falowych, konieczne jest precyzyjne zdefiniowanie algorytmu detekcji początku i końca danej fali, którego działanie będzie uniezależnione od wiedzy i indywidualnych preferencji inwestora.

## RYSUNEK 3.

## Różne możliwości wizualnej detekcji fal: a) jedna fala, b) pięć fal



Źródło: opracowanie własne.

### 3.2. Algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej (ADFRB)

W większości teorii (np. w teorii Elliotta) i metod analizy technicznej kurs może znajdować się aktualnie w fali wzrostowej lub spadkowej [Frost, Prechter, 1995; Murphy, 1999]. Koniec fali spadkowej jest równoznaczny z początkiem fali wzrostowej i na odwrót. Analogiczne podejście zastosowano w przedstawionym algorytmie. Podstawą detekcji fal w reprezentacji binarnej jest przekroczenie określonych progów wartości średnich wzrostów bądź spadków kursu walutowego. W algorytmie detekcji fal w reprezentacji binarnej definiuje się dwa wejściowe parametry, od których zależy dokładność algorytmu. Są to:

- liczba analizowanych zmian historycznych  $m$ ;
- poziom średniej liczby wzrostów/spadków w  $m$  poprzedzających zmianach kursu rozpoczynających falę  $p$ .

Algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej wyznacza średnią wartość spadków oraz wzrostów w  $m$  ostatnich zmianach kursu. Jeśli średnia wartość wzrostów przekracza zadany próg  $p$ , rozpoczyna się fala wzrostowa. Jeśli z kolei wartość spadków przekracza założony próg  $p$ , rozpoczyna się fala spadkowa. Jeżeli średnia wzrostów i średnia spadków nie przekracza progu  $p$ , to zakłada się, że trwa kontynuacja bieżącej fali. Algorytm detekcji fali w reprezentacji binarnej przypisuje każdej zmianie rodzaj fali. Algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej można zapisać w poniższy sposób.

- 1) Wyznaczenie średniej liczby wzrostów  $w$  oraz spadków  $s$  w  $m$  poprzedzających zmianach:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}, \quad s = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - 1|}{m},$$

gdzie  $x_i$  to  $i$ -ta zmiana w reprezentacji binarnej.



- 2) Jeżeli:
  - $w > p$  to początek lub kontynuacja fali wzrostowej,
  - $s > p$  to początek lub kontynuacja fali spadkowej.
- 3) Jeżeli:
  - $w < p$  i  $s < p$  to kontynuacja bieżącej fali.

Działanie algorytmu detekcji fal, jego dokładność, częstotliwość rejestrowanych fal itd. zależą od parametrów  $m$  i  $p$ . Od ich wartości również zależy charakter związków pomiędzy parametrami kolejno następujących fal.

### 3.3. Algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej z uwzględnieniem okresów konsolidacji (ADFRBK)

W analizie kursów walutowych, a także innych instrumentów można wyodrębnić okresy charakteryzujące się bardzo małymi wahaniami cen [Murphy, 1999]. Przykładem mogą być godziny nocne na rynku walutowym, np. kurs USD/PLN podczas godzin nocnych w Polsce cechuje się bardzo małymi wahaniami. Założenie, że kurs może znajdować się w fali wzrostowej albo spadkowej powoduje, że okresy konsolidacji są automatycznie klasyfikowane jako kontynuacja danej fali. Takie podejście przyczynia się do pogorszenia jakości modelowania kursu z wykorzystaniem fal. Stąd w artykule zaproponowano algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej z uwzględnieniem okresów konsolidacji. W tym modelu wprowadzono trzeci rodzaj fali – tzw. fali neutralnej – która odpowiada okresowi konsolidacji na rynku. Podobnie jak w przypadku algorytmu ADFRB, w proponowanym algorytmie również wykorzystano poziomy średnich wzrostów i spadków do detekcji danego rodzaju fali. W algorytmie zdefiniowano trzy wejściowe parametry, a mianowicie:

$m$  – liczba analizowanych poprzedzających zmian kursu;

$n$  – poziom średniej liczby wzrostów/spadków w  $m$  poprzedzających zmianach kursu, rozpoczynający falę neutralną;

$p$  – poziom średniej liczby wzrostów/spadków w  $m$  poprzedzających zmianach kursu rozpoczynających falę,

Algorytm detekcji fal w reprezentacji binarnej można zapisać w poniższy sposób.

- 1) Wyznaczenie średniej liczby wzrostów  $w$  oraz spadków  $s$  w  $m$  poprzedzających zmianach:

$$w = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}, \quad s = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - 1|}{m},$$

gdzie  $x_i$  oznacza  $i$ -tą zmianę w reprezentacji binarnej.

- 2) Jeżeli:
  - $w > p$  to początek lub kontynuacja fali wzrostowej,
  - $s > p$  to początek lub kontynuacja fali spadkowej.
- 3) Jeżeli:
  - $w < n$  i  $s < p$  i trwa fala wzrostowa to początek fali neutralnej,
  - $s < n$  i  $w < p$  i trwa fala spadkowa to początek fali neutralnej,
  - w pozostałych przypadkach kontynuacja bieżącej fali.

Algorytm detekcji fal przypisuje każdej zmianie kursu o jednostkę dyskretyzacji odpowiedni rodzaj fali (neutralnej, wzrostowej bądź spadkowej). Podobnie jak w przypadku poprzedniego algorytmu ADFRB, dokładność i częstotliwość rejestrowanych fal zależą od przyjętych parametrów:  $m$ ,  $n$  i  $p$ . Od ich wartości zależy również charakter związków pomiędzy parametrami kolejno pojawiających się fal.

### 3.4. Reprezentacja binarno-falowa

Po każdej zmianie kursu o przyjętą jednostkę dyskretyzacji można jednoznacznie określić, w jakiej aktualnej fali znajduje się kurs. Można w tym celu wykorzystać jeden z dwóch zaproponowanych w artykule algorytmów. W reprezentacji binarno-falowej każda zmiana kursu o przyjętą jednostkę dyskretyzacji jest reprezentowana przez parę dwóch parametrów. Pierwszy to kierunek zmiany (0 dla spadku, 1 dla wzrostu), analogicznie jak w przypadku reprezentacji binarnej. Drugi parametr przedstawia rodzaj aktualnej fali i jest wyznaczony na podstawie odpowiedniego algorytmu detekcji. W przypadku zastosowania pierwszego algorytmu (ADFRB) parametr ten może przyjąć dwie wartości: 1 dla fali wzrostowej, 0 dla fali spadkowej, natomiast w przypadku zastosowania drugiego proponowanego algorytmu (ADFRBK) parametr może przyjąć trzy wartości: 1 dla fali wzrostowej, 0 dla fali spadkowej i 2 dla fali neutralnej (ukazującej okresy konsolidacji rynku). Reprezentacja binarno-falowa zależy zatem od zastosowanej jednostki dyskretyzacji, przyjętych parametrów i rodzaju algorytmu detekcji fal. Na rysunku 4. zobrazowano przykład reprezentacji binarno-falowej fragmentu kursu, wynikającej z zastosowanego algorytmu detekcji fali.

#### RYSUNEK 4.

#### Reprezentacja binarno-falowa kursu walutowego

0	1	1	1	0	1
0	2	2	1	1	1

reprezentacja binarna kursu  
(0-spadek/1-wzrost)

rodzaj aktualnej fali  
(0-spadkowa, 1-wzrostowa dla ADFRB)  
(0-spadkowa, 1-wzrostowa, 2-neutralna dla ADFRBK)

Źródło: opracowanie własne.

### 3.5. Analiza parametrów fal dla kursu walutowego USD/PLN

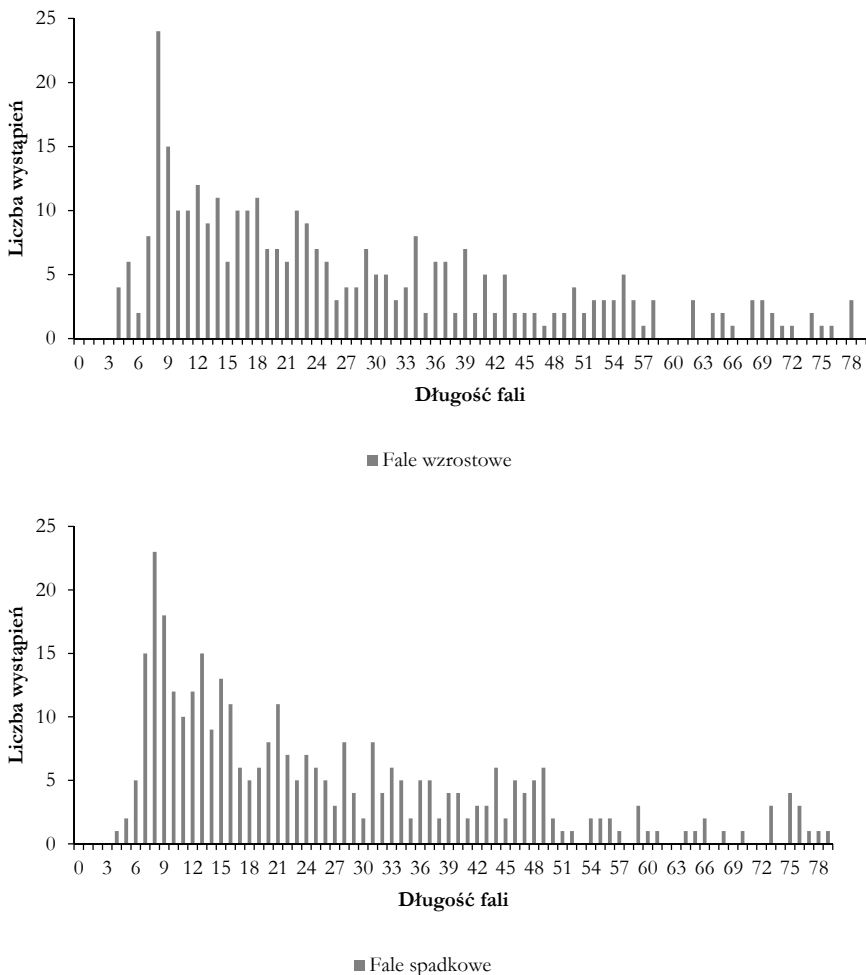
Prawidłowości dotyczące występowania oraz parametry rozkładu długości fal zależą od charakterystyk danej pary walutowej, jak również rodzaju i przyjętych parametrów

algorytmu detekcji fal. W artykule przedstawiono analizę fal występujących w kursie walutowym USD/PLN. Badaniom poddano notowania historyczne z okresu 5 lat. Przyjęto w nich 40-pipsową jednostkę dyskretyzacji.

Rysunek 5. obrazuje zależność liczby wystąpień fal wzrostowych i spadkowych od ich długości, wyrażoną w liczbie zmian kursu o jednostkę dyskretyzacji. W badaniach zastosowano algorytm detekcji fali w reprezentacji binarnej, pozwalający na zarejestrowanie fali wzrostowej i spadkowej (ADFRB) z parametrami  $m=8$  i  $p=0.7$ . Otrzymane rezultaty potwierdziły zbieżny charakter rozkładów długości fal wzrostowych i spadkowych.

### RYSUNEK 5.

#### Zależność liczby wystąpień fal wzrostowych i spadkowych od ich długości w reprezentacji binarno-falowej – ADFRB ( $m=8, p=0.7$ )

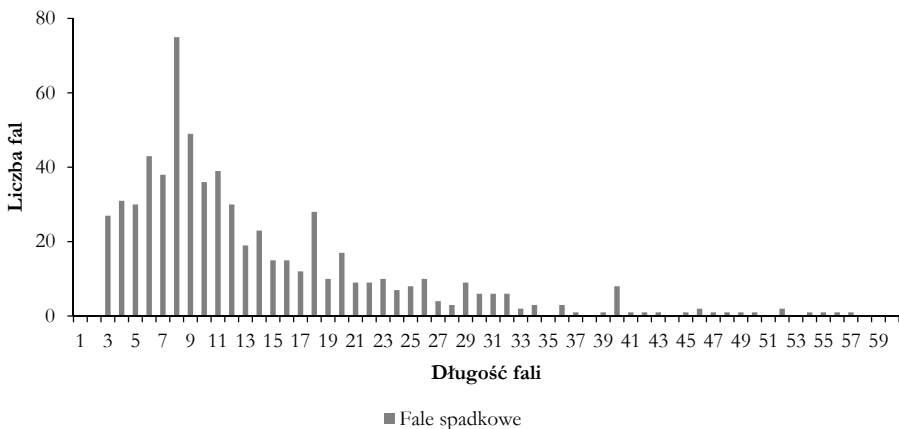
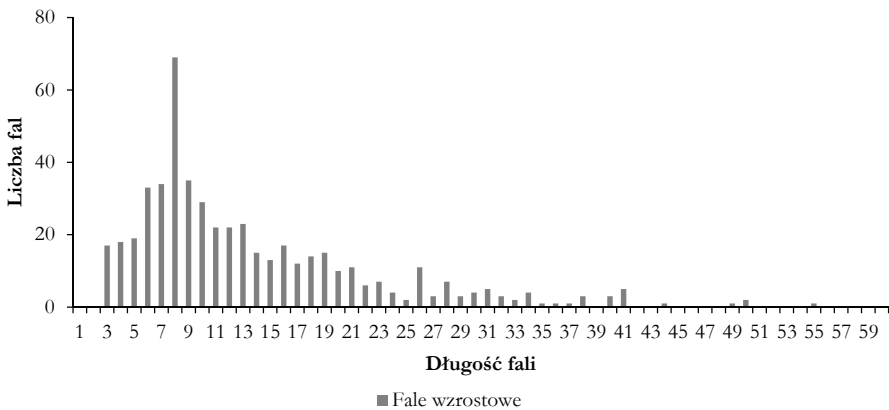


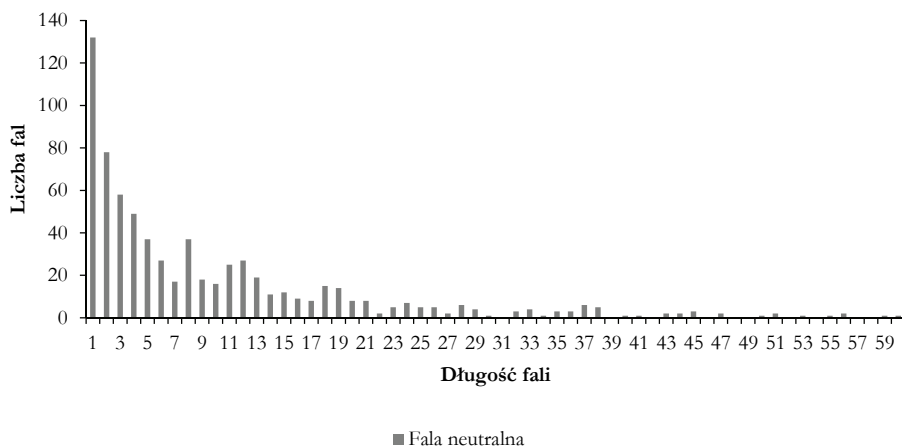
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 6. zilustrowano wyniki analogicznej analizy występowania fal o danej długości związane z zastosowaniem algorytmu detekcji fal w reprezentacji binarnej ADFRBK z następującymi parametrami:  $m=8$ ,  $p=0.7$ ,  $n=0.4$ . Na podstawie tych rezultatów można skonstatować, że fale o określonej długości występują częściej bądź rzadziej. Taka wiedza może zostać wykorzystana do predykcji dalszego kierunku zmian kursu walutowego USD/PLN, opartego na ocenie aktualnej długości fali. Rezultaty potwierdziły podobny kształt wykresów dla fal wzrostowych i spadkowych, co z kolei wskazuje na analogiczne zależności pomiędzy odpowiednimi falami (np. prawdopodobieństwo przełamania fali wzrostowej o długości 10 może mieć wartość bliską prawdopodobieństwu przełamania fali spadkowej o tej samej długości). Fale neutralne, reprezentujące okresy konsolidacji, charakteryzowały się natomiast krótszą długością średnią niż fale spadkowe i wzrostowe.

### RYSUNEK 6.

**Zależność liczby wystąpień fal wzrostowych, spadkowych i neutralnych od ich długości w reprezentacji binarno-falowej – ADFRBK ( $m=8$ ,  $p=0.7$ ,  $n=0.4$ )**

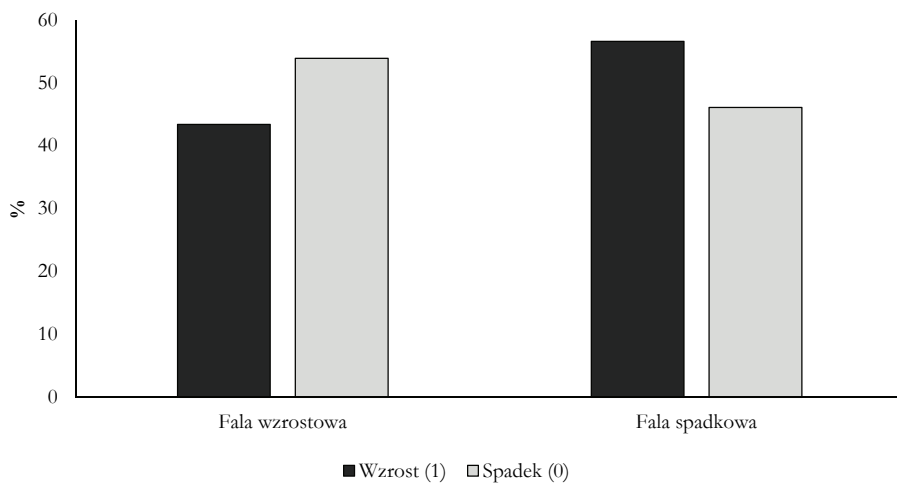




Źródło: opracowanie własne.

W celu zweryfikowania wpływu aktualnej przynależności do fali na kierunek przyszłej zmiany kursu przeprowadzono analizę prawdopodobieństwa wzrostu lub spadku w zależności od rodzaju fali i jej długości.

**RYSUNEK 7.**  
**Prawdopodobieństwo kierunku kolejnej zmiany dla fali o długości 10**  
 – ADFRBK ( $m=8, p=0.7, n=0.4$ )



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 7. zobrazowano prawdopodobieństwo wzrostu lub spadku, gdy aktualny kurs znajduje się w fali wzrostowej bądź spadkowej o długości równej 10. Rezultaty określono na podstawie modelu o parametrach:  $m=8$ ,  $p=0.7$ ,  $n=0.4$ . Otrzymane wyniki wskazują, że przyszły kierunek zmian kursu jest zależny od długości i rodzaju bieżącej fali. Oznacza to, że analiza falowa może być wykorzystana do konstrukcji modeli predykcyjnych, wspierających podejmowanie decyzji inwestycyjnych. Stąd warto rozważyć przykład najprostszego systemu HFT opartego na prezentowanych powyżej parametrach. System zawiera następujące transakcje: transakcję kupna (o parametrach TP (ang. *Take Profit*)= $\text{cena}+\text{JD}$ , SL (ang. *Stop Loss*)= $\text{cena}-\text{JD}$ ) w przypadku detekcji fali spadkowej o długości 10 oraz transakcję sprzedaży (o parametrach TP= $\text{cena}-\text{JD}$ , SL= $\text{cena}+\text{JD}$ ) w przypadku detekcji fali wzrostowej o długości równej 10 są zawierane automatycznie. Tak skonstruowany system w badanym okresie zawierałby około 58% zyskowych transakcji, generując dodatnią stopę zwrotu. Przykład ten dowodzi możliwości praktycznego wykorzystania analizy falowej oraz uzasadnia dalsze badania zależności falowych w celu polepszenia rezultatów predykcji.

#### 4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono dwa algorytmy detekcji fal w reprezentacji binarnej. Pierwszy algorytm ADFRB pozwolił na detekcję fal wzrostowych i spadkowych, natomiast drugi ADFRBK umożliwił detekcję fal wzrostowych, spadkowych i neutralnych (reprezentujących okresy konsolidacji). W dalszej części artykułu zaproponowano nową, binarno-falową reprezentację kursu walutowego, w której każdej zmianie kursu przypisano rodzaj bieżącej fali, określony na podstawie działania zaproponowanych algorytmów detekcji fal.

W artykule pokazano przykład analizy falowej dla danych historycznych pary walutowej USD/PLN z okresu 5 lat. Rezultaty tych badań wskazują na duże podobieństwo charakterystyk fal spadkowych i wzrostowych. Jednocześnie zauważono, że fale neutralne były zdecydowanie krótsze od fal wzrostowych i spadkowych. W artykule przeprowadzono także analizę wpływu rodzaju i parametrów bieżącej fali na kierunek przyszłych zmian kursu. Podstawą rozważań podjętych w artykule była analiza kursu pary walutowej USD/PLN. Ukazane wyniki potwierdziły falową strukturę badanego kursu oraz istnienie statystycznych zależności między parametrami fal a prawdopodobieństwem kierunku przyszłej zmiany. Wartość tego prawdopodobieństwa dla przykładów zamieszczonych w artykule posłużyła budowie systemów HFT o dodatniej stopie zwrotu. W celu wyprowadzenia uogólnionych wniosków, w przyszłych badaniach jest planowana szersza analiza porównawcza zależności falowych w reprezentacji binarno-falowej dla innych par walutowych.

### Literatura

- Bickford J. L., 2007, *Forex Wave Theory-A Technical Analysis for Spot and Futures Currency Traders*, The Mc-Graw-Hill Companies, New York.
- Chung K. L., 2012, *Elementary probability theory with stochastic processes*, Springer, New York.
- Frost A. J., Prechter R. R., 1995, *Teoria fal Elliotta*, Wig-Press, Warszawa.
- Godbole A. P., Papastavridis S. G., 1994, *Runs and patterns in probability: Selected papers*, "Springer Science & Business Media", vol. 283.
- Lo A. W., Mamaysky H., Wang J., 2000, *Foundations of technical analysis: Computational algorithms, statistical inference, and empirical implementation*, "The Journal of Finance", no. 55(4).
- Logue D. E., Sweeney R. J., 1977, *White noise in imperfect markets: the case of the franc/dollar exchange rates*, "The Journal of Finance", no. 32(3).
- Menezes A. J., Van Oorschot P. C., Vanstone S. A., 1996, *Handbook of applied cryptography*, CRC Press, London.
- Murphy J. J., 1999, *Analiza techniczna rynków finansowych*, WIG-Press, Warszawa.
- Neely C. J., Weller P. A., 2011, *Technical analysis in the foreign exchange market*, Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper, No. 2011-001B.
- Oberlechner T., 2005, *The psychology of the foreign exchange market*, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex.
- Rukhin A., Soto J., Nechvatal J., Barker E., Leigh S., Levenson M., Smid M., 2010, *Statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications*, NIST Special Publication 800-22, Greensboro Drive McLean, VA 22102.
- Schlossberg B., 2006, *Technical Analysis of the Currency Market*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- Stasiak M. D., 2015, *Kurs USD/PLN w ujęciu binarnym*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice (przyjęty do publikacji).
- Stasiak M. D., 2016, *Modelling of currency exchange rates using a binary representation*, Information Systems Architecture and Technology: Proceedings of 37th International Conference on Information Systems Architecture and Technology – ISAT, Springer.
- Valcu D., 2004, *Using The Heikin-Asbi Technique*, "Technical Analysis of Stock and Commodities Magazine", no. 22(2).
- Yazdi S. H. M., Lashkari Z. H., 2013, *Technical analysis of Forex by MACD Indicator*, "International Journal of Humanities and Management Sciences" (IJHMS), no. 1(2).

**mgr Grzegorz SZCZERBAK**

Wydział Informatyki i Komunikacji, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

e-mail: g.szczerbak@outlook.com

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.13

## **WYKORZYSTANIE MODELI GARCH W ANALIZIE RYZYKA FINANSOWEGO SPÓŁEK AKCYJNYCH NOTOWANYCH NA GPW**

### **Streszczenie**

Celem niniejszego artykułu jest odpowiedź na pytanie, czy możliwe jest skuteczne prognozowanie wartości ryzyka rynkowego w warunkach polskiego rynku kapitałowego. Do analizy tego zagadnienia wykorzystano szeregi dziennych stóp zwrotu spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie w latach 2000-2015. W części badawczej pracy przyjęto założenie, iż analizowane szeregi czasowe są realizacją procesu GARCH, co pozwoliło na modelowanie charakterystycznych właściwości spotykanych w empirycznych szeregach czasowych stóp zwrotu akcji giełdowych. Pomiaru ryzyka dokonano posługując się popularnymi miarami zagrożenia. Została również podjęta próba wyboru optymalnej spośród najpopularniejszych metod estymacji ryzyka.

**Słowa kluczowe:** GARCH, Value at Risk, Expected Shortfall, Median Shortfall, RiskMetrics

### **FINANCIAL RISK ANALYSIS IN POLISH STOCK MARKET USING GARCH MODELS**

#### **Summary**

The aim of this paper is to investigate whether it is possible to successfully forecast market risk in the Polish capital market. To answer this question, daily time series of the stock prices listed on the Warsaw Stock Exchange between 2000-2015 are analysed. In the research part of the paper, it is assumed that the analysed time series are the realisation of the GARCH process, which allows the author to model the characteristic properties among the empirical data. The risk is assessed with the use of popular quantile risk measures. Additionally, an attempt is made to establish the optimal method of risk estimation.

**Key words:** GARCH, Value at Risk, Expected Shortfall, Median Shortfall, RiskMetrics

**JEL:** C22, C53, C58, G17, G32

## **1. Wstęp**

Ryzyko jest nieodzownym aspektem każdej inwestycji. Chcąc alokować swój kapitał na giełdzie, potencjalny inwestor będzie narażony na wiele jego różnych odmian.



Spośród tych najczęściej spotykanych warto wymienić: ryzyko zmiany stopy procentowej, zmiany kursów walut, inflacji, braku płynności, bankructwa oraz ryzyko rynkowe będące głównym tematem niniejszego artykułu. Posługując się definicją z pracy Jajugi [2004, s. 99-100], ryzyko rynku (*market risk*) można zdefiniować jako występowanie zależności między ogólną sytuacją na giełdzie a trendami i zmianami cen poszczególnych akcji. Główny aspekt pracy został poświęcony właśnie analizie owego ryzyka w kontekście dynamicznych zmian zachodzących w finansowych szeregach czasowych.

W pierwszym rozdziale zaprezentowano miary wykorzystywane do oceny ryzyka finansowego. Prezentację rozpoczęto od wprowadzenia odchylenia standardowego. Była to pierwsza miara ryzyka inwestycyjnego, którą w 1952 roku zaproponował Henry Markowitz [1952]. Następnie zaprezentowano miary kwantylowe. Rekomendowany przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego – Value at Risk [*An international model-based approach...*, 1995] oraz wprowadzony przez zespół pod kierownictwem Phillippe Atznera: Expected Shortfall [Artzner i in. 1999]. W 2013 roku Komitet Bazylejski zarekomendował również Expected Shortfall jako miarę ryzyka inwestycyjnego [*Consultative Document...*, 2013]. Ostatnią, przedstawioną w tym rozdziale miarą, jest Median Shortfall, będąca rozwinięciem idei koherentnych miar ryzyka [Kou i in. 2013] stworzonej w 1999 roku.

Rozdział drugi w całości poświęcono metodom modelowania ryzyka finansowego. W pierwszej kolejności wprowadzono prostsze metody w postaci symulacji historycznej oraz zaproponowanej przez bank J.P. Morgan metody "RiskMetrics" [*RiskMetrics – Technical Document*, 1999]. W dalszej części rozdziału zarekomendowano wykorzystanie, stworzonych przez Engle'a [1982] i Bollersleva [1986], modeli klasy (G)ARCH. Modele te wprowadzono ponad trzy dekady temu, jednakże wciąż znajdują one zastosowanie w empirycznych badaniach własności finansowych szeregów czasowych. Łatwość parametryzacji, czytelna konstrukcja oraz prostota ich rozbudowywania, pozwalająca uwzględnić charakterystyczne właściwości stóp zwrotu instrumentów finansowych, sprawiają, że cieszą się one dużym zainteresowaniem zarówno ze strony statystyków, jak i ekonometryków.

W ostatnim fragmencie artykułu zaprezentowano empiryczne badania stóp zwrotu akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W badaniu tym dokonano próby oceny skuteczności metod prognozowania ryzyka finansowego oraz jakości trzech, przedstawionych w części metodologicznej pracy, miar ryzyka. Zastosowanie trzech odmiennych metod modelowania ryzyka umożliwiło porównanie ich skuteczności oraz uwidocznilo różnice w uwzględnianiu charakterystycznych właściwości badanych szeregów czasowych.

Pomimo obszernych publikacji poruszających problematykę przedstawioną w niniejszym artykule, tematyka analizy ryzyka inwestycyjnego wciąż pozostaje aktualnym zagadnieniem. Kwestia ta jest szczególnie istotna w sytuacji nowo powstających kryzysów finansowych, rosnącej aktywności algorytmów handlujących instrumentami finansowymi czy też występowania nowych aktywów inwestycyjnych. Obszerna próba badawcza w połączeniu z szerokim wyborem kwantylowych miar ryzyka oraz potraktowaniem różnych specyfikacji modeli GARCH, jako jednej metody analitycznej, nadaje niniejszemu artykułowi wartość pracy oryginalnej.

## 2. Analiza ryzyka

Jak już wspomniano we wstępie, ryzyko jest nieodłącznym aspektem każdej inwestycji, a potencjalny inwestor, podejmując racjonalne decyzje inwestycyjne, zmuszony jest określić prawdopodobieństwo wielu, czasami ekstremalnych i odmiennych, zdarzeń. W naukach ekonomicznych wyróżnia się najczęściej dwa podstawowe podejścia do ryzyka: ryzyko negatywne i ryzyko pozytywne. Niniejsza praca skupia się wyłącznie na negatywnych aspektach ryzyka inwestycyjnego. Jednakże warto nadmienić, iż inwestorzy skłonni do ryzyka bądź też spekulanci są w znacznym stopniu zdeterminowani do podejmowania owego ryzyka w nadziei na większą, oczekiwaną stopę zwrotu. Pierwsze badania prowadzone przez Henryego Markowitza [1952] dowiodły, iż możliwe jest użycie odchylenia standardowego lub też semi-odchylenia jako miary ryzyka inwestycyjnego. Podejście to nie wytrzymało jednak próby czasu i tym samym zarzutów o nieuwzględnianie niejednorodności wariancji w czasie czy też braku rozróżnienia siły wpływu negatywnych i pozytywnych zmian wartości badanych instrumentów na ich ryzyko. Jako alternatywę zaczęto wykorzystywać Value at Risk (VaR). Była to na tyle dobra alternatywa, że zaczął ją rekomendować, a nawet wymagać jej stosowania, Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego. Pomimo swych niezaprzeczalnych zalet, szybko okazało się, iż możliwe jest zbudowanie lepszej miary ryzyka. Zadania tego podjął się zespół matematyków pod przewodnictwem Philippe Artznera [1999], który zaprezentował koherentną miarę ryzyka – Expected Shortfall. W literaturze można również spotkać się z określeniem *tail conditional expectation* – TCE lub *conditional Value at Risk* – cVaR. Rozdział ten rozpoczyna się od przedstawienia najczęściej spotykanej kwantylowej miary ryzyka – VaR. Wyjaśniono kryteria niezbędne do uznania miary za koherentną, by następnie przytoczyć dwie koherentne miary ryzyka, czyli wspomniany wcześniej Expected Shortfall oraz odporny odpowiednik owej miary – Median Shortfall. Zaprezentowane w tym rozdziale miary ryzyka można uznać za najczęściej wykorzystywane w kontekście ryzyka finansowego, choć warto zaznaczyć, iż oprócz koherentnych miar kwantylowych, również istnieją: wypukłe [Föllmer, Shied, 2002; Frittelli, Rosazza, 2002], spektralne [Acerbi, 2002; Szegő, 2002] i transformujące miary ryzyka [Wang, 2002]. W literaturze polskiej transformujące miary ryzyka zostały zaprezentowane w pracach Trzpiot [2004; 2012; 2014]. Nie są one jednak przedmiotem niniejszej pracy.

### 2.1. Value at Risk

Value at Risk nazywany także wartością zagrożoną jest najczęściej stosowaną miarą zagrożenia. Ze względu na łatwość interpretacji, sumaryczny sposób przedstawiania możliwej straty i prostotę implementacji jest on stosowany w większości instytucji finansowych. Formalnie VaR jest wyrażany jako oczekiwana wartość straty instrumentu finansowego, przy założeniu, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia jest równe arbitralnie przyjętemu poziomowi istotności:

$$\rho(W_{t+1} \leq W_t - VaR) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie:

$W_t$  – wartość kapitału w chwili  $t$ ,

$\rho$  – prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia,

$VaR$  – Value at Risk,

$\alpha$  – arbitralnie przyjęty poziom istotności ( $1 - \alpha$  – poziom ufności).

Głównymi wadami VaR jako miary ryzyka jest niespełnienie założeń o subaddytywności, duża zależność wyników od przyjętej metody estymacji oraz brak informacji o oczekiwanych poziomach strat w przypadku przekroczenia wartości zagrożonej. Szczegółowy opis różnorodnych metod estymacji VaR wraz z praktycznymi wskazówkami dotyczącymi przeprowadzania obliczeń znaleźć można w pracy Besta [2000].

## 2.2. Koherentne miary ryzyka

W 1999 roku zespół matematyków pod przewodnictwem Philippe Artznera [1999] zaprezentował szereg aksjomatów, które z matematycznego punktu widzenia powinna spełniać dobra miara ryzyka.

1. Translacja inwariantna:

$$\rho(X + \alpha r_0) = \rho(X) - \alpha \quad \forall X \in G, \alpha \in R^+, \quad (2)$$

gdzie:

$r_0$  – stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka,

$G$  – zbiór wszystkich ryzyk,

$X, Y$  – rozkłady stóp zwrotu instrumentów finansowych,

$R^+$  – przestrzeń dodatnich liczb rzeczywistych.

Jeśli część zysku z instrumentu  $X$  zostanie określona jako stała z prawdopodobieństwem wystąpienia równym 100% i zapisana w postaci  $\alpha r_0$ , to ryzyko tego instrumentu zmaleje o współczynnik  $\alpha$ . W skrajnym przypadku, gdy  $\rho(X) = \alpha$ , otrzymuje się instrument wolny od ryzyka.

2. Monotoniczność:

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in G. \quad (3)$$

Relacja stóp zwrotu dwóch składników przekłada się na relację pomiędzy ryzykiem owych instrumentów finansowych. Jeżeli stopa zwrotu instrumentu  $Y$  jest większa od stopy zwrotu instrumentu  $X$ , to ryzyko instrumentu  $Y$  jest większe niż instrumentu  $X$ .

3. Subaddytywność:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \forall X, Y \in G. \quad (4)$$

Ryzyko portfela aktywów maleje wraz ze wzrostem jego dywersyfikacji. Ryzyko portfela nie powinno przekraczać sumy ryzyka jego składowych.

4. Dodatnia homogeniczność:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \forall X \in G \quad \lambda \geq 0, \quad (5)$$

gdzie:

$\lambda$  – zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

Ryzyko  $\lambda$  instrumentów  $\mathbf{X}$  jest równoważne z ryzykiem instrumentu  $\mathbf{X}$  przemnożonym przez współczynnik  $\lambda$ .

Miarę spełniającą wszystkie opisane powyżej wymogi nazywa się koherentną. Jako przykład takiej miary Philippe Artzner podał Expected Shortfall, wyznaczany jako oczekiwana wartość strat po przekroczeniu poziomu określonego przez Value at Risk. Formalny zapis tej miary można przedstawić w następujący sposób:

$$ES_\alpha = E(X | X \leq VaR_\alpha(X)). \quad (6)$$

Jednocześnie warto zauważyć, iż popularne odchylenie standardowe nie jest miarą koherentną, gdyż nie posiada własności translacji inwariantnej i monotoniczności [Trzpiot, 2004]. W przypadku miar budowanych na podstawie semiwariancji również nie jest spełniony warunek monotoniczności miary ryzyka. Value at Risk nie spełnia natomiast wymogu subaddytywności. Główną wadą zaprezentowanej miary mogą być trudności związane z jej estymacją dla rzadziej spotykanych rozkładów prawdopodobieństwa. Wzory wyprowadzone na podstawie funkcji gęstości najczęściej stosowanych rozkładów można znaleźć w pracy Nadarajaha i innych [2014].

W 2013 roku jako alternatywą dla klasycznych już miar zagrożenia Kou zdefiniował Median Shortfall (MS) [Kou i in. 2013]. Analogicznie jak w przypadku ES, wyznacza się ją jako wartość oczekiwaną strat po przekroczeniu VaR, z tą różnicą, iż średnią zastępuje tutaj mediana. Za sprawą tego prostego zabiegu miara ta cechuje się szeregiem pozytywnych właściwości, z których do najważniejszych należą: łatwość oszacowania oraz odporność na błędy estymacji wynikające z nieprawidłowej specyfikacji modelu. Formalny zapis tej miary przedstawiono we wzorze (7):

$$MS_\alpha = \text{mediana}[X | X \leq VaR_\alpha(X)] = VaR_{\frac{\alpha}{2}}(X). \quad (7)$$

W przypadku estymacji miarę tę można konstruować w sposób identyczny jak VaR ( $MS_{1\%}$  jest równe wartości zagrożonej przy odpowiednio mniejszym poziomie istotności:  $VaR_{0,5\%}$ ). Fakt ten jest szczególnie istotny, jeśli zachodzi konieczność testowania wstecznego (*backtesting*) lub wyznaczania miary ryzyka na podstawie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. W przypadku Median Shortfall procedura ta przebiega w sposób identyczny jak to ma miejsce w Value at Risk i jest znacznie prostsza do estymacji Expected Shortfall

### 3. Modelowanie ryzyka

Istnieje wiele metod wykorzystywanych do modelowania ryzyka finansowych stóp zwrotu. W literaturze zazwyczaj wyróżnia się dwa odmienne podejścia. Pierwsze zakłada, iż zmienność w kolejnych dniach prognozy jest stała. Założenie to nie jest jednak

zgodne z empirycznymi właściwościami finansowych szeregów czasowych. W niniejszej pracy przyjęto alternatywną koncepcję zakładającą, iż w szeregach tych występuje zmienność warunkowa wynikająca z przeszłych informacji. W zaprezentowanym rozdziale pracy skupiono się przede wszystkim na deterministycznym podejściu zakładającym jednoznaczne oszacowanie parametru zmienności. Alternatywą w tym przypadku mogą być modele zmienności stochastycznej (*Stochastic Volatility* – SV), w których przyjmuje się, iż prognoza zmienności nie może być dokładnie oszacowana na podstawie informacji dostępnych w dniu przeprowadzenia prognozy. Obszerne opracowania dotyczące wykorzystania metod SV w modelowaniu ryzyka finansowego można znaleźć w pracach: [Melle, Fabio, 2000; Pajor, 2003, 2010; Taylor, 1986]. Innym alternatywnym podejściem, cieszącym się coraz większą popularnością, są sieci neuronowe, których porównanie ze standardowymi modelami GARCH zostało przedstawione w pracy Hossaina i Nassera [2011]. Warto jednakże pamiętać, iż badania przeprowadzone w pracy Fiszedera [2009] dowodzą, że prognozy generowane przez modele SV, pomimo generalnie lepszego dopasowania wewnątrz próby, są mniej trafne, niż te generowane z wykorzystaniem modeli GARCH.

W pierwszej części tego rozdziału zaprezentowano najprostszą metodę modelowania ryzyka w postaci symulacji historycznej. Wprowadzono ją do pracy zarówno w celach porównawczych w stosunku do bardziej zaawansowanych metod, jak również jako potwierdzenie jej niewielkiej skuteczności. Następnie w dwóch osobnych wariantach przedstawiono miarę RiskMetrics. Zastosowanie wariantu z parametryzacją odpowiednią dla amerykańskiego rynku kapitałowego posłużyło weryfikacji wpływu błędnej specyfikacji modelu na otrzymywane wyniki. Ostatnia część rozdziału została poświęcona czterem odmiennym specyfikacjom modelu GARCH. Różnorodność owych wersji pozwoli na uwzględnienie odmiennych właściwości charakterystycznych dla finansowych szeregów czasowych w modelowanym procesie.

### 3.1. Symulacja historyczna

Metoda symulacji historycznej jest jedną z prostszych metod wyznaczania wartości zagrożonej. W najprostszej postaci VaR jest wyznaczany na podstawie dolnego kwantyla historycznych stóp zwrotu. Głównymi zaletami tej metody jest jej nieparametryczność, łatwość implementacji oraz brak założeń dotyczących rozkładu stóp zwrotu. W przypadku występowania niestacjonarności, jak to często ma miejsce w szeregach finansowych, wątpliwe jest jednak przyjmowanie założenia, iż przyszłe wartości ryzyka mogą być wyznaczone jedynie na podstawie jego przeszłych realizacji. Częściowym rozwiązaniem tego problemu może być połączenie metod symulacji historycznej z metodami Monte Carlo. W pracy Fiszedera [2009] metoda szacowania wartości zagrożonej na podstawie symulacji historycznej uplasowała się na ostatnich miejscach pod względem jakości otrzymywanych prognoz w rankingu stosowanych metod.

### 3.2. RiskMetrics

Metoda ta została zaproponowana przez analityków z banku JP Morgan. Zauważyli oni, iż najnowsze obserwacje w większym stopniu wpływają na przyszłe wartości ryzyka, niż te pochodzące z bardziej odległych okresów. W celu modelowania tego typu zjawiska zaczęli oni wykorzystywać metodę wyrównywania wykładniczego dla wariancji (EWMA), zapisywaną formalnie w następujący sposób:

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1 - \lambda) \sigma_t^2, \quad (8)$$

$\lambda$  – parametr modelu ( $0 < \lambda < 1$ ),

$\sigma^2$  – wariancja,

$t$  – okres.

Analiza danych, dotyczących spółek giełdowych notowanych na giełdzie w Nowym Jorku, wykazała, iż dla dziennych stóp zwrotu najlepsze wyniki uzyskuje się dzięki zastosowaniu parametru  $\lambda=0,94$ , wykorzystując do tego celu dane z dwudziestu pięciu dni poprzedzających okres prognozy. W pracy Fiszdera [2009] zaproponowano odmienne podejście. Wartość parametru została wyznaczona symulacyjnie na podstawie danych z próby, w celu minimalizacji pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE). Obliczeń symulacyjnych można dokonać dzięki przedstawieniu modelu RiskMetrics jako IGARCH(1,1) bez dryfu. W takim przypadku wartość parametru  $\lambda$  może zostać oszacowana wraz z resztą parametrów modelu za pomocą metody największej wiarygodności. Podczas stosowania tej miary warto mieć jednak na uwadze to, iż badania przeprowadzone na polskim rynku kapitałowym w pracy Fiszdera [2009] dowodzą, iż miara ta systematycznie nie doszacowuje ryzyka.

### 3.3. Modele GARCH

Obecnie modele klasy GARCH są najczęściej stosowanymi modelami, służącymi do modelowania i prognozowania zmienności stóp zwrotu instrumentów finansowych. Ich niezwykła popularność przede wszystkim wynika z możliwości modelowania najczęściej spotykanych właściwości stóp zwrotu instrumentów finansowych, tj.: grubych ogonów, leptokurtyczności, grupowania zmienności, powrotu do średniej, asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję oraz długoterminowej zależności danych. W praktycznych badaniach finansowych szeregów czasowych najczęściej wykorzystuje się modele GARCH(1,1), rzadziej GARCH(1,2) lub GARCH(2,1). Popularne jest również łączenie modeli zmienności z modelami autoregresyjnymi, tworząc w ten sposób modele zagnieżdżone typu AR-GARCH. W pracy Piontek [2004] została także postawiona teza, iż modele AR są w tym przypadku znacznie częściej wykorzystywane i bardziej intuicyjne, niż ARMA, ARIMA czy ARFIMA<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Obszerny opis poszczególnych modeli klasy GARCH można znaleźć w pracach: [Doman, Doman, 2004; Tsay, 2005; Osińska, 2006; Fiszder, 2009; Francq, Zakoïan, 2010; Andersen i in. 2009; Gouriéroux, 1997; Ardá, 2008; Asteriou, Hall, 2006; Mayers, 2009]. Przykłady wykorzystania modeli GARCH w analizie ryzyka

W pracy badawczej wykorzystano poniższe specyfikacje modeli GARCH.

1. GARCH(P, Q):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2. \quad (9)$$

Zaproponowany w 1986 roku przez Bollersleva [1986] model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej wciąż cieszy się ogromną popularnością w modelowaniu zmienności instrumentów finansowych. Głównymi zaletami przemawiającymi na korzyść stosowania modelu GARCH są: jego skuteczność w prognozowaniu zmienności, łatwa rozszerzalność oraz możliwość opisu za jego pomocą najczęściej spotykanych właściwości instrumentów finansowych. Natomiast najpoważniejszym zarzutem są słabe podstawy teoretyczne wyjaśniające zmienność warunkowych stóp zwrotu. Jednocześnie przytacza się argumenty, iż modele te jedynie opisują zmienność szeregów czasowych, nie wyjaśniając przyczyn owej zmienności.

2. EGARCH(P, Q):

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \{\theta z_{t-i} + \gamma[|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|)]\}, \quad (10)$$

gdzie:

$\alpha_0, \theta$  – stałe,

$y_1 \equiv 1$ ,

$E(|z_{t-i}|) = \sqrt{2/\pi}$  – dla rozkładu normalnego [Fiszeder, 2009, s. 27].

Model ten jest rozszerzeniem standardowego modelu GARCH. Jego zastosowanie umożliwia modelowanie odmiennego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję (asymetrii informacji). Dodatkową zaletą, wynikającą z przyjęcia logarytmicznej postaci wariancji warunkowej, jest również brak konieczności nakładania ograniczeń na parametry modelu w celu zapewnienia dodatnich wartości wariancji warunkowej, co znacznie ułatwia estymację modelu. Wprowadzenie zmiennej standaryzowanej  $\mathbf{z}_t$  w miejsce powszechnie stosowanej  $\epsilon_t$  pozwala w dodatkowy sposób ograniczyć wpływ wartości nietypowych na wariancję warunkową modelu.

3. GJR-GARCH(P, Q):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \omega_i I_{t-i} \epsilon_{t-i}^2. \quad (11)$$

Model ten, analogicznie jak EGARCH, służy modelowaniu efektu dźwigni (asymetrii informacji). Zasadniczą jego zaletą jest natomiast znacznie mniej skomplikowana postać wzorów na bezwarunkową wartość oczekiwaną wariancji procesu.

## 4. APARCH(P, Q):

$$h_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j (|\epsilon_{t-j}| + \omega_j \epsilon_{t-j})^\delta + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i}^\delta, \quad (12)$$

gdzie:

$\omega$  – dodatnia liczba naturalna (dla  $\omega = 0$  model redukuje się do EGARCH).

W empirycznych badaniach finansowych zdarza się, iż wartości bezwzględne stóp zwrotu są ze sobą silniej skorelowane niż ich kwadraty. Właściwość tę można wykorzystać dzięki zastosowaniu Asymmetric Power GARCH, który umożliwia jednocześnie modelowanie skośności.

W pracy badawczej wszystkie przedstawione powyżej specyfikacje modeli były rozważane z następującymi rozkładami warunkowymi stóp zwrotu:

1. normalny,
2. t-Studenta,
3. skośny t-Studenta,
4. uogólniony rozkład błędu,
5. uogólniony rozkład hiperboliczny,
6. Johnsona,
7. odwrotny rozkład gaussowski.

Jednocześnie warto w tym momencie zauważyć, że wyniki analiz VaR z wykorzystaniem modeli GARCH, przedstawione w pracy Fiszedera [2009, s. 250], wskazują, że specyfikacja rozkładu warunkowego w żaden sposób nie wpływa na wyniki otrzymywanych prognoz. Fakt ten nie jest jednak zgodny z badaniami przeprowadzonymi w pracy Piontek [2002], w której dowiedziono, iż w przypadku gdy VaR jest równy 0,05, rozkład normalny sprawdza się doskonale. Natomiast zastosowanie rozkładów o grubszych ogonach (t-Studenta) może skutkować niedoszacowaniem ryzyka i zwiększoną liczbą przekroczeń ustalonego poziomu ryzyka. Sytuacja ta ulega odwróceniu przy mniejszym poziomie istotności równym 0,01.

#### 4. Analiza empiryczna

W części badawczej pracy przeanalizowano dane dotyczące wszystkich spółek akcyjnych notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Z podstawowego zbioru usunięto instrumenty, które nie zachowały ciągłości notowań w okresie od 1 stycznia 2000 roku do 1 stycznia 2015 roku. Z analizy wyłączono również 30% najmniej płynnych spółek i walory spekulacyjne, których cena w analizowanym okresie spadła poniżej kwoty 1 zł. Dla tak dobraneo zbioru danych według wzoru (13) wyznaczono logarytmiczne stopy zwrotu, które następnie poddano badaniu na obecność heteroskedastyczności:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (13)$$

gdzie:

$r_t$  – stopa zwrotu instrumentu w chwili  $t$ ,

$P_t$  – cena instrumentu w chwili  $t$ .



Analizy efektu ARCH dokonano wykorzystując zaproponowane w pracy Doman i Doman [2009] testy Engle'a [1982] oraz Mcleoda-Li [1983], przyjmując opóźnienia na poziomie 4% długości badanego szeregu finansowego. Dodatkowo, ze względu na wielokrotne posługiwanie się tymi testami statystycznymi, zastosowano poprawkę Bonferroniego [Bonferroni, 1936]. Wyniki obydwu testów potwierdziły istnienie 36 spółek giełdowych, których szeregi logarytmicznych stóp zwrotu w analizowanym okresie charakteryzowały się występowaniem efektu ARCH przy poziomie istotności wynoszącym 0,01. W rezultacie otrzymano zbiór wymienionych poniżej spółek giełdowych, których analizy dokonano w dalszej części pracy, a mianowicie: Agora, Amica, Ulma, Bank Handlowy, Mbank, Budimex, Sygnity, Dębica, Efekt, Elbudowa, CNT, Forte, Hydrotor, Indykpol, INstalKrak, Groclin, Kęty, KGHM, Kompap, ALMA, Pelion, Mostostal Plock, Mostostal Warszawa, Muza, Novita, Orbis, Pekao, PKN Orlen, Polnord, Prochem, Projprzem, REMAK, Ropczyce, Stalprodukt, WAWEL i WISTIL.

#### 4.1. Metodologia

Właściwe analizy rozpoczęto od skrócenia szeregu czasowego. Modele GARCH, zastosowane do poprawnej estymacji parametrów, wymagają długich szeregów. Posługując się wynikami badań Ng i Lam [2006], minimalna długość szeregu czasowego dla modelu GARCH powinna być nie mniejsza niż 1 000 obserwacji. Logarytmiczne stopy zwrotu zawarte w przedziale czasowym od 1 stycznia 2000 roku do 1 grudnia 2004 roku zostały więc wykorzystane jako zbiór treningowy dla estymowanych modeli. Właściwe analizy, dotyczące ryzyka finansowego, zostały przeprowadzone jedynie dla okresu od 1 stycznia 2005 roku do 1 stycznia 2015 roku. Estymacji ryzyka dokonano za pomocą poniższych metod.

1. Metoda symulacji historycznej

Dla pierwszego dnia każdego miesiąca w analizowanym okresie został wyznaczony dolny 5%-owy kwantyl rozkładu stóp zwrotu. Następnie dla pozostałych dni każdego miesiąca (od 27 do 30) wyznaczano prognozy dzienne, wykorzystując regułę pierwiastka kwadratowego.

2. RiskMetrics

Prognoz przyszłych wartości ryzyka tą metodą dokonano dzięki budowie dwóch typów modeli. Pierwszy z nich polegał na budowie modelu IGARCH z parametrem  $\lambda = 0,94$  i warunkowym rozkładem normalnym. W drugim natomiast wykorzystano metodę największej wiarygodności do estymacji wszystkich parametrów modelu IGARCH(P,Q) z rozkładami warunkowymi przytoczonymi w rozdziale 3. Prognozy ryzyka skonstruowano analogicznie jak w przypadku metody symulacji historycznej. Dla pierwszego dnia każdego roku został oszacowany model z optymalnymi parametrami (P,Q). Następnie modele te zostały wykorzystane, by każdego miesiąca (uwzględniając najnowsze dane historyczne) stworzyć 27-30 (w zależności od miesiąca) dziennych prognoz. Wszystkie prognozy ryzyka zostały skonstruowane na podstawie metody bootstrap zaprezentowanej w pracach Pascuala i innych [2006] i Shimizu

[2010]. W modelach, w których były szacowane wszystkie parametry modelu, zastosowano identyczne procedury selekcji i testowania jak w przypadku opisanych poniżej modeli AR-GARCH.

### 3. AR-GARCH

Szacowanie modeli AR-GARCH rozpoczęto od wyznaczenia parametru AR dla każdej analizowanej spółki giełdowej na pierwszy dzień każdego roku kalendarzowego w analizowanym okresie. Ze względu na niejednoznaczność wyników funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej procedura ta została wykonana dzięki budowie modeli autoregresyjnych z uwzględnieniem metody największej wiarygodności. Stosując kryterium informacyjne AIC, wybrano model najlepiej opisujący zachowanie stóp zwrotu, a parametrem AR posłużono się podczas estymacji łącznej modelu zagnieżdżonego AR-GARCH. Wykorzystując oszacowany uprzednio stopień autokorelacji szeregu czasowego, dokonano estymacji modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności. Modele te były konstruowane według następującego schematu: dla każdej z trzydziestu sześciu analizowanych spółek oraz dla każdego z jedenastu analizowanych lat stworzono cztery warianty modeli AR-GARCH. Modele te przedstawiono we wzorach: (9), (10), (11), (12). Każdy z tych wariantów został również oszacowany w szesnastu wersjach z parametrami  $P < 4$  i  $Q < 4$  oraz siedmioma, przedstawionymi w rozdziale trzecim, warunkowymi rozkładami stóp zwrotu. Oznacza to, iż dla każdej z trzydziestu sześciu spółek stworzono 4 982 modeli. Kolejnym etapem analizy była redukcja zmiennych statystycznie nieistotnych. Wykorzystano w tym celu test Nybloma [1989] na stabilność parametrów modelu, zaproponowany przez Doman i Doman [2004]. Przyjmując poziom istotności równy 0,05, dokonano usunięcia zmiennych statystycznie nieistotnych w każdym ze 177 408 modeli. W przypadku gdy dalsza redukcja zmiennych nie była już możliwa, a model wciąż zawierał zmienne statystycznie nieistotne, zostawał on usunięty z puli wariantów akceptowalnych dla dalszych analiz. Następne kryterium selekcji stanowił test Kupca [1995], który jest bezpośrednio związany z przytaczanymi w niniejszej pracy miarami ryzyka. Na ostatnim etapie selekcji zastosowano kryterium informacyjne BIC. Jeśli i to kryterium okazało się nierozstrzygające, preferowano modele prostsze (typu GARCH) wobec bardziej złożonych alternatyw.

Oszacowany, na początku każdego roku, optymalny model AR-GARCH następnie wykorzystano pierwszego dnia każdego kolejnego miesiąca w danym roku (uwzględniając dane historyczne z poprzednich miesięcy), w celu skonstruowania 27-30 (w zależności od miesiąca) dziennych prognoz. Skonstruowane i wyselekcjonowane w ten sposób modele charakteryzowały się sporą stabilnością. Ich specyfikacje na przestrzeni lat zmieniały się tylko w niewielkim stopniu. Świadczy to tak o dobrym doborze modeli wyjściowych, jak i ich stabilności, która może przekładać się na wyniki otrzymywanych prognoz. Analogicznie jak w przypadku modeli IGARCH stosowanych w metodologii RiskMetrics, do konstrukcji prognoz wykorzystano metody bootstrap.

Wyniki tych analiz zobrazowano poniżej. W tabeli 1. i 2. zaprezentowano wyniki dotyczące liczby otrzymanych (po procesie selekcji) modeli z podziałem zarówno na typ skonstruowanego modelu, jak i wykorzystywany, warunkowy rozkład prawdopodobieństwa.

**TABELA 1.**  
**Liczba oszacowanych modeli GARCH z uwzględnieniem ich typu**

Model	GARCH	EGARCH	GJR-GARCH	APARCH
Liczba	284	16	11	10

Źródło: opracowanie własne.

Analiza frakcji wystąpień poszczególnych typów modeli wykazała, iż najczęściej stosowany w badaniach empirycznych model GARCH zdecydowanie zdominował pozostałe modele.

**TABELA 2.**  
**Liczba oszacowanych modeli GARCH z uwzględnieniem rozkładu warunkowego**

Rozkład	Norm	NIG	GED	t-Stud	Jsu	Ghyp	s t-Stud
Liczba	150	64	49	24	19	9	6,

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku analizy frakcji liczebności poszczególnych modeli w przeprowadzonym badaniu, z uwagi na typ warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa, wyniki są znacznie bardziej zróżnicowane. Zaskoczeniem może być fakt, iż w przypadku analizy instrumentów finansowych, w których niejednokrotnie założenie o normalności nie jest spełnione, rozkładem najczęściej występującym w badaniu był właśnie rozkład normalny. Popularność drugiego pod względem popularności rozkładu można natomiast wyjaśnić zwiększoną liczbą jego parametrów, co w rezultacie umożliwiło lepsze dopasowanie do danych empirycznych.

Uśrednione dla wszystkich analizowanych spółek wyniki rocznego poziomu przekroczeń, ryzyka i pierwiastka błędu średniokwadratowego dla przyjętych miar ryzyka zamieszczono w tabelach: 3.-5.

TABELA 3.

## Analiza metod estymacji Value at Risk

Metoda estymacji	Symulacja historyczna	RiskMetrics $\lambda = 0.94$	RiskMetrics -IGARCH	AR-GARCH
Średnia liczba przekroczeń w roku	1,41	13,47	12,14	9,89
Ryzyko	-13,31%	-4,27%	-4,38%	-4,06%
RMSE	0,1461	0,0503	0,0503	0,0430

Źródło: opracowanie własne.

Analiza metod estymacji ryzyka na podstawie  $VaR_{5\%}$  wykazała, iż najmniejszą liczbę przekroczeń (średnio 1,41 przekroczenia poziomu ryzyka rocznie na spółkę) zanotowano w odniesieniu do estymacji metodą historyczną. Głównym powodem takiego stanu rzeczy jest jednak znacznie przeszacowany średni poziom ryzyka oraz słaba jakość dopasowania otrzymanych prognoz w stosunku do rzeczywistego poziomu zmienności. W przypadku metod RiskMetrics obserwowana jakość dopasowania była identyczna. W metodzie, w której parametr  $\lambda$  był wyznaczany metodą największej wiarygodności, zaobserwowano zmniejszoną liczbę przekroczeń przy przyjętym poziomie VaR. Wynik ten jest zgodny z analizą porównawczą tych dwóch metod przeprowadzoną przez Fiszedera [2009], w której to również symulacyjne wyznaczanie parametru skutkowało lepszą jakością oceny ryzyka. Najlepsze wyniki otrzymano dzięki zastosowaniu modeli GARCH. Znamienne jest tutaj fakt, iż spadek liczby przekroczeń w żaden sposób nie był spowodowany wzrostem oszacowanego poziomu ryzyka, które w tym przypadku był na najniższym poziomie. Analiza porównawcza jakości dopasowania otrzymanych prognoz do rzeczywistego poziomu ryzyka także umożliwia uznanie metody estymacji wartości zagrożonej z wykorzystaniem modeli GARCH za najlepszą.

TABELA 4.

## Analiza metod estymacji Expected Shortfall

Metoda estymacji	Symulacja historyczna	RiskMetrics $\lambda = 0.94$	RiskMetrics -IGARCH	AR-GARCH
Średnia liczba przekroczeń w roku	0,38	7,76	6,47	3,96
Ryzyko	-20,81%	-5,36%	-5,50%	-5,05%
RMSE	0,2300	0,0625	0,0625	0,0524

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku analizy ryzyka z wykorzystaniem Expected Shortfall, jako miary ryzyka, sytuacja wygląda analogicznie jak dla VaR. Zarówno jakość dopasowania, jak i liczba

przekroczeń sugeruje wykorzystanie metody GARCH jako optymalnej metody estymacji poziomu ryzyka rynkowego. Warto również zauważyć, iż w modelach GARCH, przy wzroście ryzyka średniorocznego o 1 punkt procentowy w stosunku do VaR, zanotowano spadek liczby przekroczeń przyjętego poziomu o połowę. Wśród pozostałych metod estymacji zaobserwowano podobną tendencję, co może przemawiać za lepszymi właściwościami Expected Shortfall jako miary ryzyka. W przypadku RiskMetrics z estymowanym parametrem  $\lambda$  był widoczny spadek liczby przekroczeń (średnio o jedno przekroczenie rocznie), przy nieznacznie zwiększonym poziomie ryzyka.

TABELA 5.

## Analiza metod estymacji Median Shortfall

Metoda estymacji	Symulacja historyczna	RiskMetrics $\lambda = 0.94$	RiskMetrics - IGARCH	AR- GARCH
Przekroczenia	0,61	8,91	7,55	5,1
Ryzyko	-17,94%	-5,09%	-5,22%	-4,81%
RMSE	0,1975	0,0595	0,0596	0,0501

Źródło: opracowanie własne.

Jednocześnie w odniesieniu do Median Shortfall stwierdzono znaczący spadek liczby przekroczeń w porównaniu z Value at Risk. Jednakże spadek ten nie był tak drastyczny, jak w stosunku do ES. Zanotowano również lepsze dopasowanie prognoz do danych empirycznych wraz z jednoczesnym zmniejszeniem wartości prognozowanego ryzyka. Fakt ten może przemawiać za zmniejszonym błędem szacunku ryzyka i dokładniejszymi prognozami.

Zarówno ES, jak i MS wypadły w tym badaniu zdecydowanie lepiej niż VaR. Różnice pomiędzy tymi dwiema miarami, choć wciąż zauważalnie, nie były już tak drastyczne. Mniejszy poziom ryzyka i lepsze dopasowanie prognoz do empirycznych szeregów czasowych w przypadku MS były efektem konstrukcji tej miary. Ze względu na zastosowanie mediany, miara ta była bardziej odporna na pojawienie się wartości odstających. Powodowało to, iż wszystkie jej odchylenia od średniej (równej 0) były słabsze niż w odniesieniu do Expected Shortfall. Z tą samą przyczyną dotyczącą ES wiązała się mniejsza liczba przekroczeń przyjętego poziomu ryzyka w porównaniu z MS. Obecna w finansowych szeregach czasowych ujemna autokorelacja pierwszego stopnia sprawia, iż bardziej prawdopodobne jest wystąpienie po sobie dwóch stóp zwrotu z odmiennymi znakami, niż kolejnych dwóch wzrostów/spadków. W przypadku stóp zwrotu akcji spółek giełdowych zdarzenia ekstremalne i wartości odstające są dość powszechnym zjawiskiem. Potencjalny inwestor będzie starał się uchronić przed prawdopodobną serią dwóch lub trzech przekroczeń poziomu ryzyka z rzędu, które to zostałyby prędzej wychwycone przez ES. Z tego właśnie powodu wybór ES może być bardziej zasadny dla inwestora z wysoką awersją do ryzyka.

Z racji specyfikacji przyjętej w metodologii estymacji ryzyka z wykorzystaniem modeli GARCH zweryfikowano również istnienie lub brak zależności między liczbą miesięcy,

która upłynęła od wyboru optymalnej specyfikacji zastosowanego modelu (1 stycznia każdego roku), a wartością ryzyka mierzonego zaprezentowanymi w pracy miarami. Wyniki przeprowadzonych analiz zamieszczono w tabelach: 6. i 7.

**TABELA 6.**  
**Analiza średniego poziomu ryzyka w poszczególnych miesiącach roku**

Miesiąc	Ryzyko		
	VaR	ES	MS
Styczeń	-4,06%	-5,06%	-4,83%
Luty	-4,06%	-5,06%	-4,81%
Marzec	-4,00%	-5,09%	-4,81%
Kwiecień	-3,98%	-5,03%	-4,82%
Maj	-3,98%	-4,92%	-4,68%
Czerwiec	-4,02%	-5,00%	-4,80%
Lipiec	-4,01%	-5,04%	-4,80%
Sierpień	-4,07%	-5,08%	-4,81%
Wrzesień	-4,20%	-5,12%	-4,87%
Październik	-4,14%	-5,16%	-4,93%
Listopad	-4,01%	-5,05%	-4,82%
Grudzień	-4,04%	-5,05%	-4,82%

Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując test korelacji liniowej Pearsona z 1895, dokonano analizy korelacji między liczbą miesięcy, które upłynęły od momentu oszacowania optymalnego modelu GARCH (styczeń), a wartością ryzyka w kolejnych miesiącach otrzymaną dla każdej z trzech zastosowanych miar. Uzyskane wyniki świadczą o braku statystycznie istotnej korelacji między liczbą miesięcy a otrzymanymi poziomami ryzyka.

Dla średniego poziomu liczby przekroczeń również zweryfikowano hipotezę o występowaniu korelacji liniowej. Jedynie w przypadku miary VaR otrzymany wynik sugerował występowanie jednostronnej korelacji liniowej ( $\rho = 0,41, p = 0,09$ ). Jednakże, ze względu na małą liczbę obserwacji w przeprowadzonym teście, badanie to powtórzono z wykorzystaniem permutacyjnego testu korelacji Pearsona. Uzyskany w ten sposób wynik ( $\rho = 0,29, p = 0,177$ ) sugeruje także i w tym przypadku brak statystycznie istotnej korelacji liniowej.

**TABELA 7.**  
**Analiza średniego poziomu przekroczeń w poszczególnych miesiącach roku**

Miesiąc	Ryzyko		
	VaR	ES	MS
Styczeń	8	3	4
Luty	7	3	4
Marzec	9	3	5
Kwiecień	7	3	3
Maj	10	4	5
Czerwiec	8	3	4
Lipiec	11	4	6
Sierpień	13	6	6
Wrzesień	8	3	4
Październik	10	4	5
Listopad	11	4	5
Grudzień	8	3	4

Źródło: opracowanie własne.

## 5. Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonej analizy są zgodne z wynikami badań przeprowadzonych w pracy Piontek [2002]. Najdokładniejsze estymatory ryzyka dla zaprezentowanych miar kwantylowych otrzymano dzięki wykorzystaniu modeli GARCH. Przy szacowaniu miar opartych na  $VaR_{5\%}$  do estymowania jest wystarczające (w większości przypadków) wykorzystanie standardowych modeli GARCH z rozkładem Gaussowskim. Tendencja ta zapewne zostanie odwrócona w przypadku bardziej restrykcyjnych poziomów istotności. Dla  $VaR_{1\%}$  lub  $VaR_{0,1\%}$  zastosowanie rozkładów o grubszych od normalnego ogonach może prowadzić do lepszej jakości prognoz. Spośród wszystkich przeanalizowanych miar ryzyka VaR okazał się najmniej skuteczną miarą. Pozostałe dwie miary cechowały się podobnymi charakterystykami. Ze względu na szybsze dostosowywanie się ES do aktualnej sytuacji rynkowej możliwe jest utrzymanie z większym prawdopodobieństwem wyznaczonego poziomu ryzyka. Wiąże się to oczywiście z niewielkim wzorem błędnych szacunków i przyjętego poziomu ryzyka. Jednakże w aspekcie inwestycji finansowych jest to koszt pozwalający z góry otrzymać niezbędne informacje o wzroście ryzyka spowodowanym nieoczekiwanymi i ekstremalnymi zmianami cen akcji. Informacja ta, jak również jej wpływ i znaczenie mogłyby w przypadku MS zostać pominięte.

W kwestii skuteczności zaprezentowanych modeli (miar), wykorzystywanych do modelowania (oceny) ryzyka inwestycyjnego, średnią wartość czterech przekroczeń rocznie w przypadku ES należy uznać za bardzo dobry wynik. Szczególnie przy uwzględnieniu, iż horyzontem prognozy było 30 jednodniowych okresów, a sam model był estymowany raz do roku. Stabilność otrzymanych specyfikacji modeli, niewielka liczba przekroczeń

przyjętego poziomu ryzyka oraz stabilny jego poziom można uznać za sukces przeprowadzonych badań i pozytywną odpowiedź na pytanie, czy jest możliwe skuteczne prognozowanie, modelowanie i zarządzanie ryzykiem finansowym.

### Literatura

- Acerbi C., 2002, *Risk Aversion and Coherent Risk Measures: A Spectral Representation Theorem*, "Journal of Banking and Finance", no. 7.
- Andersen T. G., Davis R. A., Kreiß J.-P., Mikosch T., 2009, *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Berlin.
- Ardia D., 2008, *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, Springer, Berlin.
- Ardia D., Hoogerheide L. F., 2014, *GARCH models for daily stock returns: Impact of estimation frequency on Value-at-Risk and Expected Shortfall forecasts*, "Economic Letters", vol. 123, iss. 2.
- Asteriou D., Hall S., G., 2007, *Applied Econometrics: A modern Approach using EViews and Microfit Revised Edition*, MacMillan, Palgrave.
- Basel Committee on Banking Supervision, 1995, *An international model-based approach to market risk capital requirements*, Bank for International Settlements, <http://www.bis.org/publ/bcbs17.pdf> (data wejścia: 04.07.2017).
- Basel Committee on Banking Supervision, 2013, *Consultative Document: Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*, Bank for International Settlements, <http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf> (data wejścia: 04.07.2017).
- Best P., 2000, *Wartość narażona na ryzyko: obliczanie i wdrażanie modelu VaR*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Bollerslev T., 1986, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, "Journal of Econometrics", no. 31.
- Bonferroni C.E., 1936, *Teoria statistica delle classi a calcolo delle probabilita*, "Pubblicazioni del R Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze".
- Deacle S., Elyasiani E., 2014, *Real estate investment by Bank Holding Companies and their risk and return: nonparametric and GARCH procedures*, "Applied Financial Economics", vol. 24, no. 13.
- Doman M., Doman R., 2004, *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
- Doman M., Doman R., 2009, *Modelowanie zmienności i ryzyka: metody ekonometrii finansowej*, Wolters, Kraków.
- Engle R. F., 1982, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of the United Kingdom Inflation*, "Econometrica", no. 50.
- Föllmer H., Shied A., 2002, *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, "Finance Stoch", no. 6(4).
- Furió D., Climent F. J., 2013, *Extreme value theory versus traditional GARCH approaches applied to financial data: a comparative evaluation*, "Quantitative Finance", vol. 13, no. 1.



- Fritelli M., Rosazza G.E., 2002, *Putting Order in Risk Measures*, "Journal of Banking and Finance", no. 26(7).
- Gouriéroux C., 1997, *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, New York.
- J.P Morgan/Reuters, 1996, *RiskMetrics – Technical Document*, <https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ace2-3449d5c7e95a> (data wejścia: 04.07.2017).
- Melle A., Fornari F., 2000, *Stochastic Volatility in Financial Markets: Crossing the bridge to continuous time*, Springer Science + Business Media, miejsce?.
- Mayers R., A., 2009, *Complex Systems in Finance and Econometrics*, Springer, New York.
- Ng H., Lam K., 2006, *How does Sample Size Affect GARCH Models?*, "Information Sciences 2006", Kaohsiung.
- Fiszeder P., 2009, *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- Francq C., Zakoian J., 2010, *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, WILEY, Hoboken.
- Hossain A., Nasser M., 2011, *Comparison of the finite mixture of ARMA-GARCH, back propagation neural networks and support-vector machines in forecasting financial returns*, "Journal of Applied Statistics", vol. 38, no. 3.
- Jajuga K., Jajuga T., 2004, *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kou S., Peng X., Heyde C., 2013, *External Risk Measures and Basel Accords*, "Mathematics of Operations Research", vol. 38, no. 3.
- Kupiec P., 1995, *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, "Journal of Derivatives", no. 2.
- Lama A., Jha G. K., Paul R. K., Gurung B., 2015, *Modelling and Forecasting of Price Volatility: An Application of GARCH and EGARCH Models*, "Agricultural Economics Research Review", vol. 28 (no. 1).
- McLeod A.I., Li W.K., 1983, *Diagnostic Checking ARMA Time Series Model Using Squared Residual Autocorrelations*, "Journal of Time Series Analysis", no. 4.
- Markowitz H., 1952, *Portfolio Selection*, "The Journal of Finance", vol. 7, no. 1.
- Nadarajah, S., Zhang, B., & Chan, S., 2014, *Estimation methods for expected shortfall*, "Quantitative Finance", no. 14(2).
- Nyblom J., 1989, *Testing for the Constancy of Parameters over Time*, "Journal of the Statistical Society B 54".
- Osińska M., 2006, *Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Pajor A., 2003, *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Pajor A., 2010, *Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Pascual L., Romo J., Ruiz E., 2006, *Bootstrap prediction for returns and volatilities in GARCH models*, "Computational Statistics and Data Analysis", vol. 50, no. 9.
- Piontek K., 2001, *Heteroskedastyczność rozkładu stop zwrótu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR*, „Modelowanie preferencji a ryzyko”, Ustroń.

- Piontek K., 2002, *Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z „grubymi ogonami*, „Materiały Konferencyjne Uniwersytetu Szczecińskiego część II”, Międzyzdroje.
- Piontek K., 2004, *Zastosowanie modeli klasy ARCH do opisu własności szeregu stóp zwrotu indeksu WIG*, „Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1021”, Wrocław.
- Shimizu K., 2010, *Bootstrapping Stationary ARMA-GARCH Models*, „Vieweg+Teubner”, Wiesbaden.
- Smolović J.C., Lipovina-Božović, M., Vujošević S., 2017, *GARCH models in value at risk estimation: empirical evidence from the Montenegrin stock exchange*, „Economic Research-Ekonomska Istraživanja”.
- Szegö G., 2002, *Measures of risk*, „Journal of Banking & finance 26”, Italy.
- Taylor S.J., 1986, *Modelling financial time series*, Chichester, New York.
- Trzpiot G., 2004, *O wybranych własnościach miar ryzyka*, „Badania Operacyjne i Decyzje, nr 3-4, Katowice.
- Trzpiot G., 2012, *O własnościach transformujących miar ryzyka*, „Analiza Szeregów Czasowych a Statystyczny Pomiar Ryzyka”, Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.
- Trzpiot G., 2014, *Optymalizacja portfela z wykorzystaniem koherentnych transformujących miar ryzyka*, „Studia Ekonomiczne”, nr 208.
- Tsay R., 2005, *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, Hoboken.
- Wang S.S., 2002, *A Risk a Measure that Goes beyond Coherence*, „Actuarial Approach to Financial Risks”, Colloquium.
- Wang Y.-J., Chung H., Guo J.-H., 2012, *A value-at-risk analysis of carry trades using skew-GARCH models*, „Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics”, vol. 17, no. 4.
- Zhu D., Galbraith J. W., 2011, *Modelling and forecasting expected shortfall with the generalized asymmetric Student-t and symmetric exponential power distributions*, „Journal of Empirical Finance”, vol. 18, Issue 4.