ZASADY

ARYTMETYKI OGÓLNEJ

UŁOŻYŁ

Henryk Lisowski

Wydanie drugie poprawione i uzupełnione.

Wszelką liczbę można tylko zmniejszyć lub zwiększyć i więcej nic z nią zrobić nie można.

WARSZAWA.
J. LISOWSKA
MARSZAŁKOWSKA 101.

1908.

OMYŁKI W DRUKU.

strona,	wiersz,	zamiast,	powinno być.
31	3 z dołu	60	63.
33	6 z góry	ilorazy	ilorazu.
41	8 z dołu	552	522.
55	5 z „	2.2.2.4.5.5.7	2.2.2.3.5.5.7.
90	4 z góry	proporcyonalnej	proporcyonalne.
96	5 z dołu	tylko	—
97	2 z góry	59 kg.	50 kg.
105	1 z „	326	336.
106	2 z „	$^1/_3$	$^1/_2$.
107	11 z „	22 : 22	21 : 22.
107	2 z dołu	24 : 27	24 : 10.
116	1 z góry	(7 . 7)	(7.7.7).
118	10 z „	09902	0,9902.

Drukarnia L. Bogusławskiego, Ś-to Krzyska 11.

Ułożone przeze mnie „Zasady arytmetyki" przedstawiają krótki i treściwy podręcznik do arytmetyki ogólnej. Mając na względzie, że liczby mianowane tem się tylko różnią od liczb oderwanych, że stosunek między ich jednościami bywa inny, niż dziesiętny, — liczby mianowane oraz ułamki dziesiętne, o ile tylko można było, łączyłem z liczbami całkowitemi. W ten sposób zmniejszyła się liczba działów arytmetyki ogólnej. Takie uogólnienie może się wydać komuś za trudnem. Zważywszy jednak, iż przy początkowem nauczaniu arytmetyki nie należy dzieciom dawać podręczników z teorją wogóle i że pod względem metodycznym nauczania korzysta się z zupełnej swobody, uważam układ ten za odpowiedni, gdyż dopiero przy powtarzaniu arytmetyki uczący się korzystają z podręczników.

Wszędzie trzymałem się metody ściśle naukowej, z wyjątkiem §§ 19, 28 i 29, gdzie podane tylko sposoby działań skróconych, używanych przy rachunkach handlowych.

Henryk Lisowski.

Warszawa
d. 1/V. 1906 r.

ARYTMETYKA.

WSTĘP.

§ 1. Wszystko, co może być mierzone, zliczone, nazywa się **wielkością**. Tak pojęte wielkości są przedmiotem badań matematycznych. Każda wielkość (łokieć, funt, godzina, koń, człowiek, myśl i t. p.) wzięta pojedyńczo, sama jedna zowie się **jednością**. Nie da się ściśle określić jedności; pojęcie o niej jest poniekąd pojęciem przyrodzonem, jak zapach róży, którego określić nie możemy, lubo wiemy jaki to jest zapach. Wielkości czyli jedności mogą być jednego gatunku, jak sążeń i stopa, chociaż nie są to jedności jednakowe, gdy tymczasem stopa i trzy stopy nie tylko że są jednościami jednego gatunku, wyrażając pojęcie o długości, lecz są zarazem jednościami **jednorodnemi**, gdyż są jednakowe.

Skupienie jedności jednorodnych tworzy **liczbę**; zatem jedność jest to materjał, z którego liczby powstają. Przedmiotem badań arytmetycznych są jedności jednorodne. Odróżniają liczby **całkowite** od **ułamków**, rozumiejąc pod pierwszemi skupienie całkowitych jedności, a pod drugiemi — skupienie jednakowych części jedności.

Liczbę zowią **oderwaną**, jeżeli przy niej nie jest, lub nie może być postawione miano (nazwa) jednostki. Np.: mój ogródek jest **trzy** razy większy od twego.

Jeżeli przy liczbie jest oznaczone miano jednostki, wtedy zowie się **konkretną** czyli **przedmiotową**, np.: trzy jabłka, pięć koni, jedna myśl.

Liczba, której jedności wyrażają **miary**, służące do mierzenia przestrzeni, ciężaru, czasu i t. p. zowie się **mianowaną**. Liczba mianowana, złożona z różnych co do wielkości, lecz jednego i tego samego gatunku jedności, zowie się **wieloraką**. Np. dwie godziny, dziesięć minut i pięć sekund — liczba mianowana wieloraka.

Wszelką liczbę można tylko zmniejszyć lub zwiększyć i więcej nic z nią zrobić niepodobna. Zwiększać lub zmiejszać liczbę możemy o kilka jedności, albo kilka razy.

§ **2.** Liczby powstają przez dołączenie jednej jedności do każdej liczby poprzedzającej. Jeżeli do dziesięciu dodamy nową jedność, otrzymamy nową liczbę jedynaście. Liczb rozmaitych jest nieskończenie wiele. Szereg liczb, powstały przez dołączenie jedności do liczby poprzedzającej, zowie się **szeregiem liczb naturalnych** i jest nieograniczony. Pomiędzy jedną a drugą z liczb w tym szeregu mieści się nieograniczona liczba ułamków. Wymawianie liczb kolejno nazywa się **liczeniem**; do przedstawienia liczb na piśmie jest tylko **dziesięć znaków rozmaitych**, które się zowią **cyframi**, a te są:

1 — (jeden), 2 — (dwa), 3 — (trzy), 4 — (cztery),

5 — (pięć), 6 — (sześć), 7 — (siedem), 8 — (osiem) 9 — (dziewięć) i 0 — (zero).

Każda z tych dziewięciu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jest znaczącą, przedstawia bowiem skupienie kilku jedności czyli liczbę, znak zaś 0 jest to cyfra nieznacząca i służy tylko do zajęcia nieoznaczonego miejsca przy pisaniu liczb.

§ 3. **SYSTEMAT DZIESIĄTKOWY.** Zasada na podstawie której wszelkie liczby mogą być przedstawione przez dziesięć powyższych cyfr, polega na tem, że **jedności cyfry napisanej od strony lewej dziesięć razy są większe od jedności cyfry napisanej od strony prawej**, i odwrotnie: **jedności cyfry napisanej od strony prawej dziesięć razy są mniejsze od jedności cyfry napisanej obok tamtej od strony lewej.**

Mamy np. napisane obok siebie dwie takie cyfry: 35. Na podstawie zasady powyższej czyli na podstawie przyjętego przez narody ucywilizowane systematu dziesiątkowego pisania liczb wypada, że każda jedność cyfry 3, jako napisanej od strony lewej, jest dziesięć razy większa od każdej jedności cyfry 5, jako napisanej od strony prawej, t. j. każda jedność cyfry 3 jest jakby wiązanką z dziesięciu takich jedności, z jakich składa się cyfra 5. Jeżeli jedności cyfry 5 oznacza-ją jedności zwyczajne, wtedy każda jedność cyfry 3 wyraża dziesięć takich samych jedności, czyli **dziesiątek**. Zatem liczba 35 składa się: z 5 jedności i 3 dziesiątków, czyta się: trzydzieści pięć.

Uwaga. Gdyby np. jedności cyfry 5 oznaczały każda tysiąc, wtedy każda jedność cyfry 3 oznaczać będzie dziesięć tysięcy. I tak: dziesięć jedności stanowią **dziesiątek**, dziesięć dziesiątków stanowią **setkę**, dziesięć setek **tysiąc** i t. d.

Jeżeli więc napiszemy obok siebie trzy cyfry, np. 435, to na zasadzie systematu dziesiątkowego będziemy mieli: cztery setki, trzy dziesiątki i pięć jedności, czyli: czterysta trzydzieści pięć.

Gdyby liczba dana nie zawierała np. dziesiątków, a tylko jedności i setki, to dla oznaczenia tego na piśmie na miejscu dziesiątków piszemy cyfrę nieznaczącą 0.

Np.: Czterysta pięć na piśmie tak się przedstawi: 405.

Liczby utworzone przez jedną cyfrę są **jednocyfrowe**, przez dwie cyfry — **dwucyfrowe**, przez wiele cyfr — **wielocyfrowe**.

§ 4. Z tego cośmy powiedzieli, wnioskujemy, że cyfry obok siebie napisane oznaczają: pierwsza — **jedności**, druga (od strony lewej) —**dziesiątki**, trzecia — **setki**, czwarta—**tysiące**, piąta—**dziesiątki tysięcy**, szósta— **setki tysięcy**, siódma — **miljony** i t d.

Jeżeli na piśmie potrzeba wyrazić, że np. cyfra 1 oznacza tysiąc, należy postawić ją na miejscu czwartem od strony prawej, zajmując trzy miejsca przed nią przez cyfrę nieznaczącą przez 0, i wówczas tysiąc tak napiszemy: 1000.

Przy czytaniu i pisaniu liczb większych należy je podzielić od strony prawej na grupy trzycyfrowe (ostatnia grupa może zawierać niekiedy dwie lub jedną cyfrę), pamiętając, iż grupa pierwsza od strony prawej oznacza jedności zwyczajne, druga grupa — tysiące, trzecia — miljony, czwarta —miljardy i t. d.

Grupy	VI miljardy	III miljony	II tysiące	I jedności
	Np.	1	3 0 7	2 4 6

Jeden miljon, trzysta siedem tysięcy, dwieście czterdzieści sześć.

Ze sposobu pisania liczb łatwo zrozumieć, że liczba wielocyfrowa, np, 1307246, przedstawiająca same jedności daje:

dziesiątków	130724
setek	13072
tysięcy	1307
dziesiątków tysięcy . . .	130
setek tysięcy	13
miljonów	1

Uwaga. Aby się dowiedzieć ile z danej liczby wielocyfrowej można utworzyć dziesiątków całkowitych, odcinamy z prawej strony **jedną** cyfrę, jako nietworzącej dziesiątka; pozostałe cyfry z lewej strony będą wyrażały same dziesiątki; odcinając z prawej strony **dwie** cyfry, otrzymamy z lewej strony setki i t. d.

§ 5. **UŁAMEK DZIESIĘTNY.** Systemat dziesiątkowy pisania liczb powiada, że jedności cyfry stojącej od strony prawej dziesięć razy mniejsze od jedności cyfry stojącej od strony lewej.

Jeżeli zatem cyfra 5 oznacza jedności zwyczajne i jeżeli obok od strony prawej napiszemy jakąkolwiek cyfrę np. 6, to jedności tej ostatniej powinny być **dziesięć razy mniejsze** od jedności cyfry 5, czyli że każda jedność cyfry 6 stanowi tylko jedną dziesiątą część jedności zwyczajnej, a wszystkie razem — sześć dziesiątych, co się nazywa **liczbą dziesiętną** albo poprostu **ułamkiem dziesiętnym.** Na piśmie cyfry ułamków dziesiętnych oddzielają się od liczb całkowitych **przecinkiem** i dlatego

5,6

oznacza: 5 jedności całkowitych i 6 dziesiętnych.

Jeżeli do liczby powyższej od strony prawej dopiszemy jeszcze jakąkolwiek cyfrę, np. 2, to jedności tej ostatniej będą dziesięć razy mniejsze od dziesiątych części jedności, czyli że będą już częściami **setnemi.**

Zatem 5,62 oznacza: 5 jedności całkowitych, 6 dziesiątych i 2 setnych. Razem zaś 5 całości i 62 setnych.

Ztąd wnosimy, że w liczbach dziesiętnych znaczenie jedności cyfr zmniejszają się dziesięć razy w miarę oddalania ich na prawo od jedności całkowitych. I dla tego, żeby np. napisać jedną tysiączną jako liczbę dziesiętną, należy 1 umieścić na trzecim miejscu na prawo od przecinka, zajmując dwa miejsca niezajęte przez zera, a również przez 0 oznaczyć i liczbę całkowitą, jeżeli jej niema, wtedy 0,001 oznacza jedną tysiączną, 0,01 — jedną setną, 0,1 — jedną dziesiątą.

§ 6. **UŁAMEK ZWYCZAJNY.** Przy rachunkach mamy często do czynienia z najrozmaitszemi częściami jedności. Jeżeli te części nie są dziesiąte, nie są setne, nie są tysiączne...., a jakieś inne, wtedy taki ułamek zowie się **zwyczajnym**, mowa o nim będzie niżej.

Działania arytmetyczne.

Działaniami arytmetycznemi zowią się sposoby, za pomocą których znajdujemy liczbę **niewiadomą** na podstawie kilku liczb danych.

DODAWANIE.

§ 7. Przy dodawaniu liczby dane zowią się **składnikami**, liczba niewiadoma—**sumą**. Dodać dwie liczby, znaczy do pierwszej liczby dołączyć tyle jedności, ile jest ich w drugiej. Zatem **dodawanie jest to działanie arytmetyczne, za pomocą którego z kilku liczb danych (składników) odnajdujemy liczbę nową** (sumę), **zawierającą tyle jedności, ile ich razem zawierają liczby dane.**

Znak dodawania + (plus) oznacza więcej.

Niech np. liczby dane są 5 i 3, potrzeba znaleźć sumę ich, t. j. liczbę niewiadomą, zawierającą tyle jedności, ile ich jest w 5 i 3.

Wiemy, iż wszelka liczba jest to skupienie jedności jednorodnych, zatem:

$$\begin{array}{rl} 5 = & 1+1+1+1+1 \\ +\ \ 3 = & 1+1+1 \\ \hline 5+3 = & \underbrace{1+1+1+1+1}_{5}+\underbrace{1+1+1}_{3} \end{array}$$

Liczba nowa czyli suma daje nam skupienie 1+1+1+1+1+1+1+1 ośmiu jedności, t.j. 5+3 = 8.

Ponieważ suma 3 + 5 = 8 również przedstawia skupienie ośmiu jedności, więc:

$$5 + 3 = 3 + 5$$

t. j. **suma nie zależy od porządku składników.**

Jest to główna własność dodawania. Ztąd wnioski:

a) Żeby dodać do sumy, można dodać do jednego ze składników.

b) Żeby dodać sumę kilku liczb, można dodawać jedną liczbę za drugą.

c) Wszelką liczbę można uważać jako skróconą sumę pewnej ilości jedności. Np.:
$234 = 200 + 30 + 4 = 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 4$

§ 8. **DODAWANIE LICZB WIELOCYFROWYCH.** Możemy dodawać tylko jedności jednorodne, bo inaczej liczba otrzymana od dodania nie będzie przedstawiała skupienia jedności jednorodnych. Mamy np. do dodania:

$$2568 + 3393 + 1069 + 170 + 85$$

Ponieważ suma nie zależy od porządku składników, więc składniki dane możemy grupować jak się podoba: wszystkie jedności możemy połączyć do jednej grupy, wszystkie dziesiątki do drugiej, wszystkie setki do trzeciej i t. d. tak, że w każdej grupie będziemy mieli do dodania tylko liczby jednoznaczne. Dla udogodnienia podpisujemy składniki jedne pod drugimi tak, żeby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami i t. d. Pod ostatnim składnikiem prowadzimy kreskę poziomą i rozpoczynamy dodawanie od jedności najmniejszych, dla tego, że od dodania jedności mniejszych możemy ich tyle otrzymać, że z nich można utworzyć jedną lub kilka jedności większych, żeby potem nie czynić poprawek.

a)
$$+\begin{array}{r} 2568 \\ 3393 \\ 1069 \\ 170 \\ 85 \\ \hline 7285 \end{array}$$

albo **b)**
$$+\begin{array}{r} 25 \\ 36 \\ 9 \\ 6 \\ \hline 7285 \end{array}$$

Dodając jedności: $8+3+9+0+5 = 25$ otrzymujemy dwa dziesiątki i 5 jedności. Jedności podpisujemy pod kolumną jedności, 2 dziesiątki zaś dodajemy do kolumny dziesiątków:

$$6+9+6+7+8 \text{ i } +2 = 38$$

otrzymujemy 38 dziesiątków, z których 8 podpisujemy pod dziesiątkami, a z 30 dziesiątków otrzymujemy 3 setki, które dodajemy do kolumny setek i t. d. Słowem, jeżeli z dodawania jednej kolumny wypadnie nie więcej niż 9 jedności, to wypadek podpisujemy pod kolumną cyfr danych, jeżeli zaś wypadnie więcej niż 9, to z otrzymanej liczby oddzielamy dziesiątki, setki...., pozostałe jedności po prawej stronie podpisujemy pod kolumną cyfr dodanych, a cyfrę dziesiątków, setek...., dołączamy do cyfr kolumny następującej.

W ten sposób otrzymaliśmy 7285—sumę danych składników.

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać wypisując sumy, jakie otrzymujemy z dodawania każdej kolumny oddzielnie, jak to pokazano na przykładzie **b**.

Korzyść z takiego dodawania polega na tem, że przy sprawdzaniu, gdy znajdujemy sumę odmienną pewnej kolumny, tylko ją sprawdzamy. Przy sumowaniu długich szeregów liczb, możemy szereg podzielić na grupy lub stronicy i każdą dodawać osobno.

Najprostsza próba dodawania polega na **powtórnem dodaniu** w porządku odwrotnym: raz z góry na dół, drugi raz od dołu do góry. Albo wszystkie liczby dodać raz na piśmie, drugi — na przyrządzie do liczenia (szczotach). Jeżeli w obu razach wypadnie suma jednakowa, możemy uważać ją za dobrą.

Zupełnie tak samo dodają się **liczby dziesiętne i wielorakie**, byle jedne pod drugiemi były odpowiednio podpisane.

Np. **a)** 0.705 + 3,8 + 1,047 + 15,004.

$$\begin{array}{r} 0,705 \\ 3,800 \\ 1,047 \\ 15,004 \\ \hline 20,506 \end{array}$$

b)

2	godz. + 10	minut + 30	sekund
4	„ + 18	„ + 20	„
7	„ + 25	„ + 6	„
„	„ + 40	„ + 15	„
14	godz. + 34	minut + 11	sekund

gdyż: 30 + 20 + 6 + 15 = 71 sek. = 1 min. + 11 sek.
10 + 18 + 25 + 40 i 1 = 94 min. = 1 godz. + 34 min.
2 + 4 + 7 + i 1 = 14 godzin.

ODEJMOWANIE.

§ **9** Odjąć jedną liczbę od drugiej znaczy od liczby pierwszej odjąć tyle jedności, ile ich jest w liczbie drugiej. Zatem, **odejmowanie jest to działanie, gdzie, mając sumę i jeden ze składników, znajdujemy drugi składnik.**

Suma dana zowie się **odjemną**, składnik dany—**odjemnikiem**, a składnik niewiadomy, którego szukamy—**resztą** albo **różnicą**. Znak odejmowania—(minus) mniej.

Niech np. dane są:
suma 8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 i jeden ze składników 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Wydzielając czyli odejmując od sumy tyle jedności, ile ich zawiera składnik dany

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1} + 1 + 1 + 1$$

uważamy iż pozostaje 1 + 1 + 1, t. j. trzy jedności które mają stanowić składnik drugi.

Tak więc: 8 − 5 = 3 (reszta); czyli że 8 większa od 5 o 3 jedności.

Z tąd: 8 = 5 + 3 t. j. jeżeli do reszty doliczymy jedności odrzucone, otrzymamy odjemną, czyli, że **odjemna równa się odjemnikowi więcej reszta.** Jest to główna własność odejmowania, z której wypływają wnioski:

a) Żeby odjąć jakąś liczbę od sumy, dosyć odjąć ją od jednego ze składników. Np.:
7 + 6 − 2 = 7 + 4 = 11; albo: (7 − 2) + 6 = 5 + 6 = 11

b) Żeby zaś odjąć sumę, można odejmować jeden składnik za drugim. Np.: 10 − (2 + 3) = 8 − 3 = 5.

§ 10. ODEJMOWANIE LICZB WIELOCYFROWYCH.

Odejmować możemy tylko jedności jednorodne, bo inaczej rezultat nie będzie miał sensu.

Mamy np. do odjęcia 4075 — 2835.

Dla udogodnienia podpisujemy odjemnik pod odjemną tak, żeby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami i t. d. Pod odjemnikiem prowadzimy kreskę poziomą i rozpoczynamy odejmowanie od jedności najmniejszych:

$$\begin{array}{rl} 4075 & \text{odjemna} \\ -\ 2835 & \text{odjemnik} \\ \hline 1240 & \text{reszta.} \end{array}$$

Odejmując jedności 5—5 otrzymujemy 0 jedności, które podpisujemy pod kolumną jedności. Odejmując następnie dziesiątki 7—3 otrzymujemy 4 dziesiątki, które podpisujemy pod kolumną dziesiątków. Odejmując teraz setki 0—8, działania tego arytmetycznie wykonać nie możemy, i dlatego musimy wydzielić jedną jedność rzędu wyższego, w danym wypadku tysiąc od 4 tysięcy i zamiast 0 setek w odjemnej możemy napisać 10 setek, pamiętając, iż przy tem tysięcy pozostało tylko 3. Teraz dopiero odejmujemy setki 10—8 otrzymujemy 2 setki, które podpisujemy pod kolumną setek i t. d. Słowem, jeżeli która z cyfr odjemnika jest większa od odpowiedniej cyfry odjemnej to tę cyfrę odjemnej powiększamy o 10, stojącą zaś obok od strony lewej zmniejszamy o 1.

Uwaga. Ponieważ odjemna mieści w sobie odjemnik i resztę, więc możemy napisać wszystkie cyfry reszty, znajdując ile jedności trzeba dodać do cyfr każdego rzędu odjemnika, aby otrzymać odpowiednią cyfrę odjemnej.

Np. 4075
—2685
1390

Rozumujemy tak: aby otrzymać 5 jedności odjemnej do jedn. odjemnika trzeba dodać 0, piszemy to 0 na miejsce jedności; aby otrzymać 17 dziesiątków odjemnej do 8 dzies. trzeba dodać 9 i t. d.

§ 11. **Próba dodawania.** Odejmowanie jest działanie odwrotne dodawaniu, więc jedno działanie można próbować przez drugie. Przy **sprawdzeniu dodawania** można powtórnie dodać wszystkie składniki bez jednego i sumę nową odjąć od ogólnej, jeżeli otrzymamy resztę równą temu składnikowi, który nie wchodzi

do nowej sumy, to ogólną sumę możemy uważać za dobrą.

Próba odejmowania odbywa się na zasadzie głównej własności tego działania przez dodanie różnicy do odjemnika; jeżeli suma równa się odjemnej, znalezioną różnicę możemy uważać za dobrą. Odejmowanie można też sprawdzić w inny sposób.

§ 12 Zupełnie tak samo jak liczby całkowite odejmują się **liczby dziesiętne** i **wielorakie**, byle jedna pod drugą były podpisane odpowiednio.

Np. **a)** 7,56 — 0,483.

7,560
— 0,483
6,077 sześć całości i 77 tysięczn.

b) 4 godz. + 18 min. + 20 sek.
— 2 „ + 10 „ + 30 „
2 godz. + 7 min. + 50 sek.

30 sek. od 20 sek. odjąć nie możemy, zapożyczamy od 18 jedną minutę, która ma 60 sek., dołączając do 20 sek., otrzymamy 80 sek. i teraz 30 sek. możemy odjąć od 80 sek.

Szczególniejszej uwagi i oględności wymagają zadania na obliczanie czasu.

Np. od 5 mies. 8 dni odjąć 3 mies. 21 dni; możemy to tak napisać:

$$\frac{8\text{ dni}}{5\text{ mies.}} - \frac{21\text{ dni}}{3\text{ mies.}} = \frac{38\text{ dni}}{4\text{ mies.}} - \frac{21\text{ dni}}{3\text{ mies.}}$$

ponieważ 21 dni nie można odjąć od 8 dni, zapożyczamy jeden miesiąc czyli 30 dni. Teraz odejmujemy osobno dni i osobno miesiące, t. j.

$$\frac{38 \text{ dni}}{4 \text{ mies.}} - \frac{21 \text{ dni}}{3 \text{ mies.}} = \frac{17 \text{ dni}}{1 \text{ mies.}} = 47 \text{ dni}$$

Jeszcze przykłady: 1) pewna osoba przyszła na świat w dniu 27 listopada 1850 roku o 6-ej godzinie z rana, a umarła 15 maja 1907 roku o 10-ej wieczorem. Jak długo ta osoba żyła?

Rozw. Gdy osoba ta umierała podług kalendarza był rok 1907, lecz nie skończony; upłynęło zaś wtedy od Narodzenia Chrystusa 1906 lat, 4 miesiące, 14 dni 22 godziny; (gdyż od północy do 12-ej południa jest 12 godzin, a od południa do 10-ej wieczora jeszcze 10 godzin, razem 22 godziny).

Tak samo gdy osoba ta przyszła na świat od N. Chr. upłynęło: 1849 lat, 10 miesięcy, 26 dni i 6 godzin.—Pozostaje teraz od liczby mianowanej pierwszej odjąć drugą: 1906 lat + 4 mies. + 14 dni + 22 godz.

	1906 lat	+ 4 mies.	+ 14 dni	+ 22 godz.
−	1849 „	+ 10 „	+ 26 „	+ 6 „
	56 „	+ 5 „	+ 18 „	+ 16 „

Odpow. 56 lat, 5 mies., 18 dni i 16 godzin.

2) Ktoś 2-go kwietnia 1904 roku o 9-ej z rana wyruszył w podróż naokoło świata i podróżował 2 lata, 11 miesięcy, 23 dni i 16 godzin. Kiedyż wrócił?

Roz. Gdy wyjeżdżał od N. Chr. upłynęło:

	1903 lat	+ 3 mies.	+ 1 dni	+ 9 godzin
+	2 „	+ 11 „	+ 23 „	+ 16 „
Dodając:	1905 „	+ 14 „	+ 24 „	+ 25 „
albo:	1906 „	+ 2 „	+ 25 „	+ 1 „

tyle upłynęło od N. Chr. w chwili powrotu; podług zaś kalendarza liczył się wtedy rok 1907, miesiąc trzeci czyli 26 marca o 1-ej po północy.

Uwaga. Dopełnieniem arytmetycznem liczby danej nazywamy różnicę między najbliższą z większych liczb, utworzonych przez 1 z zerami, a liczbą daną. Np.: Dopełnienie liczby 4075 jest różnica 10000—4075 = 5925. Dopełnienie liczby 98 jest różnica 100 — 98 = 2.

MNOŻENIE.

§ 13. Pomnożyć jedną liczbę przez drugą znaczy liczbę pierwszą powtórzyć składnikiem tyle razy, ile jest jedności w liczbie drugiej.

Liczby dane do pomnożenia zowią się: jedna **mnożną**, druga **mnożnikiem**, albo też obydwie zowią się **czynnikami**, a liczba szukana zowie się **iloczynem**. Zatem, **mnożenie jest to działanie, za pomocą którego z mnożnej tworzymy nową liczbę—iloczyn tak, jak mnożnik został utworzony z jedności.**

A więc pomnożyć jedną liczbę przez drugą znaczy: powtórzyć ją składnikiem tyle razy, ile druga zawiera jedności.

Znak mnożenia × (krzyżyk ukośny) albo . (kropka).

Uwaga. Mnożnik wskazuje **ile razy** mamy wziąć mnożną jako składnik; więc **mnożnik** zawsze jest liczbą **oderwaną**, a iloczyn może być liczbą oderwaną i mianowaną. Jeżeli jest mianowaną to wyraża takie same jednostki co mnożna.

Niech np. liczby dane do pomnożenia są 5 i 3. Potrzeba znaleźć ich iloczyn — liczbę niewiadomą. Dla tego z 5 należy utworzyć nową liczbę tak, jak 3 zostało utworzone z 1.

Ponieważ 3 = 1 + 1 + 1 t. j. jedność powtórzona składnikiem trzy razy, więc i 5 należy powtórzyć tyleż razy składnikiem dla utworzenia liczby niewiadomej t. j. 5 + 5 + 5.

Główna własność mnożenia. Ponieważ $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ i te **pięć** jedności należy powtórzyć składnikiem **trzy** razy, zatem otrzymujemy:

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1+1 \\ +1+1+1+1+1 \\ +1+1+1+1+1 \end{array}$$

Czy weźmiemy ugrupowanie poziome 5 powtórzone 3 razy, czy też pionowe 3 powtórzone 5 razy, zawsze wszystkich jedności jest 15, czyli

$$5 \times 3 = 3 \times 5$$

t. j. **iloczyn nie zależy (nie zmieni się) od porządku czynników.**

Jest to główna własność mnożenia, z której wypływają następujące wnioski:

a) Mamy do pomnożenia iloczyn $5 . 3$ przez 4.

Pierwsze mnożenie tak się przedstawia:

$$5 + 5 + 5$$

sumę tę należy powtórzyć składnikiem **cztery razy**, t. j.

$$\begin{array}{r} 5+5+5 \\ +5+5+5 \\ +5+5+5 \\ +5+5+5 \end{array}$$

Biorąc ugrupowanie poziome, mamy 5 powtórzone 3 razy i następnie powtórzone 4 razy; biorąc zaś ugrupowanie pionowe, mamy 5 powtórzone 4 razy i następnie powtórzone 3 razy, t. j.

$$(5 . 3) . 4 = (5 . 4) . 3$$

co wyraża: **żeby pomnożyć iloczyn** $(5 . 3)$ **dwóch lub więcej czynników, dosyć pomnożyć jednego z nich.**

Uwaga. Dla pokazania, że mnożenie lub dzielenie potrzeba wypełnić jednocześnie nad kilku liczbami, zawieramy te liczby znakiem ( ), który się zowie **nawiasem.**

b) Ponieważ iloczyn nie zmienia się od porządku czynników, więc wyrażenie ostatnie możemy tak napisać:

$$3 . 5 . 4 = 3 . (5 . 4)$$

t. j. **żeby liczbę** (3) **pomnożyć przez jedną liczbę** (5), **następnie przez drugą** (4), **jedno i to samo co odrazu pomnożyć przez iloczyn** $(5 . 4)$.

§ 14. Mamy **do pomnożenia sumę:** $2 + 6 + 7$ przez 3, to znaczy, że sumę tę należy powtórzyć jako składnik **trzy** razy:

$$\begin{array}{r} 2+6+7 \\ +2+6+7 \\ +2+6+7 \end{array}$$

ztąd: $2 + 2 + 2 + 6 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7$

czyli: $2 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 3$

więc $(2 + 6 + 7) \times 3 = 2 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 3$,

to jest **żeby sumę pomnożyć przez pewną liczbę, można każdy składnik sumy pomnożyć przez tę liczbę.**

Równość ostatnia na zasadzie głównej własności mnożenia może być napisaną i tak:

$$3 \times (2 + 6 + 7) = 3 \times 2 + 3 \times 6 + 3 \times 7$$

żeby pomnożyć liczbę (3) **przez sumę, można ją pomnożyć przez każdy składnik i otrzymane iloczyny dodać.**

§ 15. Mamy teraz **do pomnożenia liczbę wielocyfrową przez jednocyfrową.**

Np. 762×4.

Ponieważ mnożna 762 przedstawia sumę trzech składników, t. j.

762 = 700 + 60 + 2 = 7 set. + 6 dzies. + 2 jedn., którą mnożymy przez 4. Aby to uskutecznić, należy (na zasadzie § 14) wszystkie składniki pomnożyć przez 4.

Rozpoczynając mnożenie od jedności najmniejszych, mówimy: 2 jedności pomnożone przez 4 czynią 8 jedności, ktore piszemy w iloczynie na miejscu jedności; następnie 6 dziesiątków pomnożone przez cztery czyni 24 dziesiątków, z których 4 piszemy w iloczynie na miejscu dziesiątków, pozostałe zaś 20 dziesiątków, stanowiące 2 setki dodamy do iloczynu powstałego od mnożenia 7 setek przez cztery, co czyni 28 setek, a jeszcze 2 setki czyli razem 30 setek, które już wszystkie piszemy w iloczynie na miejscach odpowiednich, gdyż więcej jedność do mnożenia nie mamy. Zwykle mnożnik podpisujemy pod mnożną:

762 mnożna
× 4 mnożnik

3048 iloczyn

i przeprowadzamy pod mnożnikiem kreskę poziomą. Mnożymy, zaczynając od strony prawej, każdą cyfrę znaczącą mnożnej przez mnożnik; jeżeli z takiego mnożenia częściowego wypadnie iloczyn nie większy od 9, to podpisujemy go pod mnożną cyfrą mnożnej; jeżeli zaś ten iloczyn jest większy od 9, to z otrzymanej liczby oddzielamy dziesiątki, a pozostałą część podpisujemy pod mnożoną cyfrą mnożnej, cyfrę zaś dziesiątków dodamy do iloczynu powstałego z mnożenia

następującej cyfry mnożnej przez mnożnik; na niezajętych miejscach, jeżeli będą, piszemy zera.

§ 16. Mamy do **pomnożenia jakąkolwiek liczbę przez jedność z zerami.**

Np. 437 × 10

to znaczy, że każda jedność z tych 437 jedności, wzięta jako składnik 10 razy, stanie się sumą dziesięciu jedności czyli **dziesiątkiem**. Otrzymujemy więc 437 dziesiątków, które trzeba napisać tak, aby cyfra 7 była na miejscu drugiem od strony prawej, dla tego na pierwszem miejscu umieszczamy 0 i otrzymamy:

437 × 10 = 4370.

Przy mnożeniu 437 przez 100, należy z prawej strony dopisać dwa zera, aby pokazać, że cyfra 7 jest setkami, gdyż od powtórzenia 437 jedności 100 razy, każda jedność staje się **setką**; zatem

437 × 100 = 43700.

§ 17. Tak samo postępujemy przy mnożeniu liczby **przez jakąkolwiek cyfrę znaczącą z zerami**, gdyż liczba taka może być przedstawioną jako iloczyn z cyfry znaczącej przez jedność z zerami. Np.

437 × 500 = 437 × 5 × 100 = 2185 × 100 = 218500.

Więc, aby wogóle **pewną liczbę pomnożyć przez cyfrę znaczącą z zerami, mnożymy ją naprzód przez tę cyfrę znaczącą, a do otrzymanego iloczynu dopisujemy z prawej strony tyle zer, ile ich jest w mnożniku.**

§ 18. Mamy do **pomnożenia liczbę wielocyfrową przez wielocyfrową.**

Np. 3805×247.

Przedstawimy mnożnik 247 jako sumę składników:

$$247 = 200 + 40 + 7$$

i liczbę 3805 mnożymy przez tę sumę, t. j.

$$3803 \times 247 = 3805 \times (200 + 40 + 7).$$

Aby liczbę daną pomnożyć przez sumę kilku liczb, można liczbę daną pomnożyć przez każdy ze składników tej sumy i otrzymane iloczyny dodać (§ 14), a więc $3805 \times (200 + 40 + 7) = 3805 \cdot 200 + 3805 \cdot 40 + 3805 \cdot 7 =$ $= 761000 + 152200 + 26635 = 939835$.

Zwykle mnożnik podpisujemy pod mnożną:

```
   3805 . . . . mnożna
 × 247  . . . . mnożnik
 ------
  26635 |
 15220  | . . . iloczyny częściowe
 7610   |
 ------
 939835 . . . . . iloczyn.
```

Zamiast wypisywania iloczynów częściowych ze wszystkiemi zerami, podkreślamy i mnożymy mnożną po kolei przez każdą znaczącą cyfrę mnożnika, poczynając od strony prawej. Otrzymane iloczyny częściowe podpisujemy jeden pod drugim tak, iżby pierwsza od strony prawej liczba każdego iloczynu częściowego była pod tą cyfrą mnożnika, przez którą mnożyliśmy mnożną, a następnie tak wypisane te iloczony dodajemy, domyślając się zer na miejscach niezajętych.

Uwaga. Iloczyn dwóch liczb ma albo tyle cyfr, ile ich jest w mnożnej i mnożniku razem, albo o jedną cyfrę mniej.

Np.: Iloczyn 3805×247 może mieć albo 7 cyfr, albo 6.

W rzeczy samej, biorąc liczbę jedność z zerami najbliższą większą i najbliższą mniejszą liczb danych, mamy:

$$^{*)}\quad \begin{array}{r} 10000 > 3805 > 1000 \\ \times\ 1000 > 247 > \times\ 100 \\ \hline 10{,}000{,}000 > 3805 \times 247 > 100{,}000 \end{array}$$

czyli, że szukany iloczyn mniejszy od 10,000,000 i większy od 100,000.

Każda mniejsza liczba od 10,000,000 jest 7-miocyfrowa, a każda liczba większa od 100,000 jest albo 6-ciocyfrowa, albo 7-miocyfrowa, więc iloczyn szukany może mieć 6 albo 7 cyfr.

§ 19. **SKRÓCENIA PRZY MNOŻENIU. a)** Przy mnożeniu posługują się **tablicami i gotowymi iloczynami**, przez co robota się skraca i unika się błędów. Iloczyny liczb jednocyfrowych tworzą tak zwaną tabliczkę mnożenia Pitagorasa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

*) Znak $>$ oznacza *większy*, znak $<$ *mniejszy*.

którą można i tak napisać:

$2\times2=4$	$3\times3=9$	$4\times4=16$	$5\times5=25$	$6\times6=36$	$8\times8=64$
$2\times3=6$	$3\times4=12$	$4\times5=20$	$5\times6=30$	$6\times7=42$	$8\times9=72$
$2\times4=8$	$3\times5=15$	$4\times6=24$	$5\times7=35$	$6\times8=48$	—
$2\times5=10$	$3\times6=18$	$4\times7=28$	$5\times8=40$	$6\times9=54$	$9\times9=81$
$2\times6=12$	$3\times7=21$	$4\times8=32$	$5\times9=45$	—	$10\times10=100$
$2\times7=14$	$3\times8=24$	$4\times9=36$	—	$7\times7=49$	—
$2\times8=16$	$3\times9=27$	—	—	$7\times8=56$	—
$2\times9=18$	--	—	—	$7\times9=63$	—
—	—	—	—	—	—

b) Przy mnożeniu pamięciowem dogodniej mnożyć wpierw jedności wyższego rzędu.

Np. $746\times5=700\times5+40\times5+6\times5=$
$=3500+200+30=3730.$

c) Przy mnożeniu liczby wielocyfrowej przez 11 można odrazu pisać iloczyn, stawiając na pierwszem miejscu cyfrę jedności liczby danej, a następnie (od strony lewej) rezultaty od dodawania cyfry jedności z cyfrą dziesiątków, cyfrę dziesiątków z cyfrą setek, cyfrę setek z cyfrą tysiąców i t. d.

Np.: $2875\times11=31625$ (jedności 5 piszemy na pierwszem miejscu); potem $5+7=1(2)$; $7+1=8$; $8+8=1(6)$; $8+1=9$; $9+2=1(1)$; $2+1=3$.

d) Przy mnożeniu liczby wielocyfrowej przez 9, 99...., przez 98, 998...., przez 19, 29, 39...., przez 18, 28 38.... łatwiej i prędzej pomnożyć przez 10, 100, 1000...., przez 20, 30, 40...., a potem odjąć liczbę daną powtórzoną raz albo więcej razy.

Np. $746\times99=746\times(100-1)=$
$=74600-746=73854$

albo $746\times98=746\times(100-2)=$
$=74600-746\,.\,2=74600-1492=73108.$

Tak samo: $746\times28=746\times(30-2)=$
$=22380-746\,.\,2=22380-1492=20888.$

e) Przy mnożeniu liczb dwucyfrowych, których **dziesiątki są jednakowe**, postępujemy tak: do jednej z liczb dodajemy jedności drugiej, do wypadku dopisujemy w myśli 0, następnie mnożymy jedności obydwóch liczb i iloczyn dodajemy do wyniku z zerem.

Naprzykład:

I) $17\times19=(17+9=26,\ 260,\ 7\times9=63, 260+63)=323.$

Pierwszy wypadek — sumę podwajamy, lub potrajamy...., jeżeli dziesiątki są wyrażone przez 2, 3...

II) $24\times27=(24+7=31,\ 31\times2=\ 620+4\times7)=\ 648.$

III) $54\times59=(54+9=63,\ 63\times5=3150+4\times9)=3186.$

f) Przy mnożeniu **liczb zakończonych na 1** postępujemy tak: na miejscu jedności będzie zawsze 1, na miejscu dziesiątków suma dziesiątków liczb danych (jeżeli ta suma jednocyfrowa, w razie przeciwnym na miejscu dziesiątków piszemy jedności tej sumy, dziesiątki zaś dodajemy do setek), na miejscu setek — iloczyn z dziesiątków liczb danych. Np.

I) $41\times51=(4+5=9$ dz., $4\times5=20$ set. i $1)=2091.$

$61\times71=(6\times7=42,\ 6+7=13,\ 42+1=43,\ 3$ i $1)=4331.$

II) $251\times321=(25\times32=800$ set., $25+32=57$ dziest. z których 5 dodajemy do setek i $1)=80571.$

g) Przy mnożeniu liczby zakończonej **na 5 przez siebie samą** postępujemy tak: Mnożymy dziesiątki jednej przez dziesiątki drugiej zwiększone o 1 i do wyniku dopisujemy z prawej strony iloczyn $5\times5=25$.

Np.: I) $65 \times 65 = (6 \times 7 = 42$ i $25) = 4225$.

II) $345 \times 345 = (34 \times 35 = 1190$ i $25) = 119025$.

h) Zauważymy jeszcze własność liczby 37, a mianowicie, że $37 \times 3 = 111$, więc

37×3 (3 . 1) = 111
37×6 (3 . 2) = 222
37×9 (3 . 3) = 333
37×12 (3 . 4) = 444
37×15 (3 . 5) = 555
37×18 (3 . 6) = 666
37×21 (3 . 7) = 777
37×24 (3 . 8) = 888
37×27 (3 . 9) = 999

DZIELENIE.

§ **20**. Podzielić jedną liczbę przez drugą można w sposób dwojaki:

a) Znaleźć ile razy w liczbie pierwszej mieści się druga, takie dzielenie przedstawia **mieszczenie**.

Np.: Ile koszul można uszyć z 17 łokci płótna, jeżeli na każdą koszulę potrzeba 5 łokci?

Oczywista, iż koszul będzie tyle, ile razy od danego kawałka płótna można odciąć kawałki po 5 łokci. Od 17 łokci płótna będziemy mogli 3 razy odciąć kawałki po 5 łokci i pozostanie reszta 2 łokcie, czyli że 5 mieści się w 17 **trzy** razy, co się na piśmie przedstawia tak: $17 : 5 = 3$ i reszta 2.

b) Albo: znaleźć jak jest wielką każda część, jeżeli liczbę pierwszą rozłożymy na tyle równych części, ile jedności jest w drugiej; takie dzielenie przedstawia **dzielenie na równe części.**

Np.: 20 jabłek potrzeba rozłożyć do 5 koszyków porówno, ile też jabłek będzie w każdym koszyku?

Biorąc po jednym jabłku od tych 20-u i rzucając je do każdego z 5-ciu koszyków, z łatwością przekonamy się, iż czynność ową potrzeba będzie powtórzyć 4 razy; wówczas w każdym koszyku będziemy mieli po cztery jabłka, czyli od dzielenia 20 przez 5 otrzymujemy 4, co na piśmie tak się przedstawia: $20 : 5 = 4$.

§ **21**. W jednym i drugim wypadku, t. j. czy dzielenie przedstawia mieszczenie czy też dzielenie na równe części, liczba **pierwsza**, którą dzielimy, zowie się **dzielną; druga**, przez którą dzielimy, zowie się **dzielnikiem**, wynik zaś dzielenia—**ilorazem**. Przy dzieleniu otrzymujemy czasami **resztę**, która jest mniejszą od dzielnika.

Znak dzielenia : (dwie kropki) albo — (kreska pozioma). $20 : 5 = \frac{20}{5}$.

Z przykładów powyższych wnioskujemy, że iloraz powtórzony składnikiem tyle razy, ile jedności zawiera dzielnik z dodatkiem reszty, zawsze daje dzielną. Np. składając razem kawałki płótna po 5 łokci, gdy tych kawałków jest 3 i dodając resztę 2 łokci, otrzymamy dany kawałek płótna 17 łokci, czyli

$$5 + 5 + 5 + 2 = 5 \times 3 + 2 = 17.$$

Zatem dzielną możemy uważać jako iloczyn, dwóch czynników: dzielnika i ilorazu, z których drugi jest poszukiwany. Ztąd dla dzielenia można dać wogóle takie określenie:

Dzielenie jest to działanie, gdzie mając iloczyn dwóch czynników i jeden z tych czynników, znajdujemy drugi czynnik.

Mamy np. iloczyn dwóch czynników (dzielną) 20 i jeden z tych czynników (dzielnik) 5 potrzeba znaleźć drugi czynnik (iloraz). Oczewista, iż tym drugim czynnikiem jest liczba 4, t. j.

dzielna		dzielnik		iloraz
20	:	5	=	4

gdyż $5 \times 4 = 20$.

$$17 : 5 = 3 \text{ i reszta } 2,$$

gdyż $5 \times 3 + 2 = 17$.

Ztąd wynika główna własność dzielenia:

Dzielna równa się dzielnikowi, pomnożonemu przez iloraz więcej reszta, jeżeli jest.

Uwaga. Dzielenie liczby mianowanej przez mianowaną przedstawia mieszczenie, przy tem iloraz jest liczbą oderwaną, np. 100 funt. : 25 funt. = 4. Dzielenie liczby mianowanej przez oderwaną przedstawia podział na równe części, przy tem iloraz tegoż mianowania co dzielna, np. 100 funt. : 4 = 25 funt.

§ 22. Z głównej własności dzielenia wypływają wnioski następujące:

a) **Żeby podzielić iloczyn, można podzielić jeden z czynników.**

W rzeczy samej:

$$(28 . 15) : 7 = 420 : 7 = 60$$
$$(28 : 7) = 4 ; 4 . 15 = 60.$$

Jeden i ten sam wynik **60** otrzymaliśmy z dwojakiego dzielenia, więc:

$$(28 . 15) : 7 = (28 : 7) . 15.$$

b) **Podzielić przez iloczyn, to samo co podzielić przez jeden czynnik, a rezultat przez drugi.**

W rzeczy samej:

$$90 : (2 \times 3) = 90 : 6 = 15$$
$$(90 : 2) : 3 = 45 : 3 = 15.$$

Jeden i ten sam wynik **15** otrzymaliśmy z dwojakiego dzielenia, więc:

$$90 : (2 \times 3) = (90 : 2) : 3.$$

c) **Jeżeli każdy składnik sumy dzieli się przez jakąkolwiek liczbę bez reszty, to i suma podzieli się przez tę samą liczbę.**

Np.: $28 + 42 + 56$.

Każdy składnik tej sumy dzieli się bez reszty przez 7 i mieści się: w pierwszym składniku 4 razy, w drugim—6 razy i w trzecim—8 razy, czyli że w całej sumie 7 powinno się mieścić 18 razy.

W rzeczy samej:

$$28 + 42 + 56 = 7 . 4 + 7 . 6 + 7 . 8 = 7 (4 + 6 + 8) = 7 . 18.$$

d) Jeżeli wiadomo, że wszystkie składniki oprócz jednego dzielą się bez reszty, to jaką resztę otrzymuje się od tego składnika, takąż resztę otrzyma się od dzielenia całej sumy.

Dzieląc sumę $28 + 42 + 53$ przez 7 otrzymamy od dzielenia 53 resztę 4, która jest resztą całej sumy. W rzeczy samej:

$$(28 + 42 + 53) : 7 = 123 : 7 = \text{ilor. } 17 + \text{reszt. } 4.$$

§ 23. **DZIELENIE LICZBY WIELOCYFROWEJ PRZEZ JEDNOCYFROWĄ i PRZEZ WIELOCYFROWĄ.** Wszelka liczba może być przedstawiona jako suma składników, ugrupowanych w sposób zupelnie dowolny. Mamy np. do podzielenia 18540 przez 60.

Liczbę daną rozkładamy na takie składniki, któreby się dzieliły bez reszty, a ilorazy przedstawiały jedności tylko jednego rzędu. Jedności wyższego rzędu liczby 18540 są dziesiątki tysięcy. Żeby iloraz mógł przedstawiać całkowite dziesiątki tysięcy, potrzeba ich mieć co najmniej 63, my zaś mamy tylko 1 dziesiątek tysięcy. Zamieniamy ten dziesiątek tysięcy na jedności następne niższego rzędu, t. j. na tysiące i otrzymujemy 10 tysięcy, a jeszcze 8 tysięcy razem więc 18 tysięcy, lecz żeby iloraz przedstawiał tysiące potrzeba ich mieć co najmniej 63, my zaś mamy tylko 18 tysięcy, czyli, że 18 tysięcy nie można podzielić przez 63 w ten sposób, aby iloraz przedstawiał **liczbę całkowitą** tysięcy, lubo w sposób inny 18 tysięcy, można podzielić przez 63.

Żeby mieć dostateczną ilość jedności do podzielenia przez 63, zamieniamy te 18 tysięcy na jedności następne niższego rzędu, t. j. na setki otrzymujemy 180 setek, a jeszcze mamy 5 setek, czyli razem 185 setek, które już można podzielić przez 63 w ten sposób, aby w ilorazie otrzymać całkowitą liczbę setek, które będą jednościami wyższego rzędu poszukiwanego ilorazu.

Powiadamy, że 63 w 185 mieści się 2 razy. Cyfra 2 przedstawia setki ilorazu. Powtarzając je 63 razy, otrzymamy 126 setek, które odejmując od 185, otrzymamy 59 setek. Lecz tych 59 setek nie możemy podzielić przez 63 w ten sposób, aby w ilorazie otrzymać całkowitą liczbę setek i dla tego zamieniamy je na jedności następne niższego rzędu, t. j. na dziesiątki i otrzymamy 590 dziesiątków, do których dołączamy 4 dziesiątki, mamy razem 594 dziesiątków dzieląc je przez 63, otrzymamy w ilorazie 9 dziesiątków. Powtarzając 9 dziesiątków 63 razy, otrzy-

mamy 567 dziesiątków, które odejmując od 594, otrzymamy 27 dziesiątków, co znowu zamieniając na jedności niższego rzędu, zamiast 27 dziesiątków, otrzymamy 270 jedności, które można podzielić przez 63. Powiadamy, że 63 w 270 mieści się 4 razy. Cyfra 4 przedstawia jedności ilorazy, powtarzając je 63 razy i odejmując od 270, otrzymamy resztę 18 jedności, której nie można podzielić przez 63 w ten sposób, aby w ilorazie otrzymać jeszcze liczbę całkowitą jedności.

Na praktyce dzielenie to przedstawiamy tak:

```
dzielna  dzielnik
18540 : 63 = 294 iloraz
— 126
-------
  594
— 567
-------
   270
 — 252
-------
  = 18 reszta
```

t. j. aby podzielić jedną liczbę wiolocyfrową przez drugą, piszemy naprzód dzielną, a obok niej, z prawej strony dzielnik, oddzielając go kreską albo dwiema kropkami. Odcinamy od strony lewej dzielnej tyle cyfr ile ma ich dzielnik, jeżeli zaś cyfry odcięte dają liczbę mniejszą niż dzielnik, wtedy od dzielnej odcinamy o jedną cyfrę więcej. Szukamy teraz takiej największej cyfry, przez którą mnożąc dzielnik, otrzymalibyśmy iloczyn nie większy od tej odciętej liczby. Ta cyfra będzie pierwszą cyfrą ilorazu. Mnożymy przez nią dzielnik i otrzymany iloczyn odejmujemy od owej liczby odciętej od dzielnej. Do wypadłej z tego odejmowania reszty przypisujemy następującą cyfrę dzielnej i znowu, mając tak powstałą liczbę, nie mniejszą od dzielnika, w taki sam sposób wyznaczamy następującą cyfrę ilorazu i t. d.

Jeżeli przypisawszy do którejkolwiek reszty następującą cyfrę dzielnej, mamy liczbę mniejszą od dzielnika, to w ilorazie piszemy 0, a do owej liczby przypisujemy jeszcze następującą cyfrę dzielnej. w celu wyznaczenia następującej cyfry ilorazu W ten sposób otrzymamy wszystkie cyfry ilorazu. Ostatnia reszta będzie resztą dzielenia.

§ 24. **Ilość cyfr ilorazu** zależy od tego czy (dla odnalezienia pierwszej cyfry) odcinamy od dzielnej tyle cyfr, ile ma dzielnik, czy też o jedną cyfrę więcej; w każdym razie, oprócz wyznaczonej pierwszej cyfry iloraz będzie miał cyfr jeszcze tyle, ile ich pozostało nie odciętych, a więc: **w ilorazie otrzymujemy tyle cyfr, o ile jest ich więcej w dzielnej niż w dzielniku, albo o jedną cyfrę więcej.**

Np. 18540 : 63.

Dzielna ma 5 cyfr, a dzielnik 2, rożnica między niemi $5 - 2 = 3$, a więc iloraz będzie miał 3 cyfry, lecz tylko w tym wypadku, gdy dla odnalezienia pierwszej cyfry odcinamy o jedną cyfrę więcej, niż ma dzielnik. Gdy zaś odcinamy tyle cyfr ile ma dzielnik, np. 75,540 : 63 wtedy iloraz będzie miał cyfr nie $5 - 2 = 3$, lecz o jedną cyfrę więcej, t. j. $3 + 1 = 4$.

§ 25. Gdy mamy podzielić przez siebie **liczby zakończone zerami**, możemy jednakową ilość zer końcowych w dzielnej i dzielniku opuścić, przypisując tylko do reszty, jeżeli ona będzie, tyleż zer ileśmy ich opuścili.

Np. $558\cancel{00} : 7\cancel{00} = 79$

$$\begin{array}{r} -49 \\ \hline 68 \\ -63 \\ \hline 500 \end{array}$$

gdyż reszta 5 przez zakreślenie dwóch zer dzielnej została zmniejszoną 100 razy, a więc teraz do niej należy dopisać dwa zera, aby była prawdziwą.

§ 26. Przy dzieleniu liczb przez 10, 100, 1000... odcinamy tylko z prawej strony tyle cyfr, ile ma zer dzielnik, **pozostałe liczby** przedstawiają **iloraz**, a **odcięte—resztę**. Bo właściwie, dzieląc liczbę przez 10, albo przez 100, przez 1000..., szukamy ile też liczba dana przedstawia albo dziesiątków, albo setek, albo tysięcy..

Np. 12365 : 100.

Jedności pierwszego i drugiego rzędu 65 nie czynią setki, dopiero jedności trzeciego, czwartego i t. d. rzędów przedstawiają całkowite setki, których w danym przykładzie jest 123, a więc $123{,}65 : 100 = 123$ i reszta 65.

§ 27. **PRÓBA MNOŻENIA i DZIELENIA.** Dzielenie jest działaniem odwrotnem mnożeniu, zatem próba jednego działania odbywa się przez drugie.

a) Próba mnożenia odbywa się przez dzielenie iloczynu przez którykolwiek z danych czynników; jeżeli w ilorazie otrzymamy drugi czynnik to iloczyn możemy uważać za dobry.

Np. $3805 \times 247 = 939835$

dzieląc $939835 : 3805 = 247$.

Albo też próby można dokonać przez mnożenie czynników w porządku odwrotnym, t. j.

$$247 \times 3805.$$

b) Próba dzielenia odbywa się mnożeniem ilorazu przez dzielnik (lub odwrotnie) i do wypadku dodaje się reszta; jeżeli otrzymana suma równa się dzielnej to iloraz możemy uważać za dobry; wynika to z głównej własności dzielenia.

Np. Dzielenie $1234520 : 2341 = 527$ i reszta 813.
Próba: $2341 \times 527 + 813 = 1233707 + 813 = 1234520.$

Albo też próby można dokonać, dzieląc dzielnę przez iloraz, w rezultacie powinniśmy otrzymać liczbę równą dzielnikowi.

§ 28. SPOSÓB SKRÓCONEGO DZIELENIA ZA POMOCĄ DOPEŁNIENIA. Bywa czasami dogodniej liczbę daną dzielić nie przez dzielnik, lecz za pomocą jego dopełnienia, zwłaszcza przy zamianie miar drobniejszych na większe.

Np. mamy do podzielenia $1767976 : 964$.
Dopełnienie dzielnika jest $1000 - 964 = 36$.

Wypisujemy dopełnienie to nad dzielnikiem, lecz cyfry ilorazu znajdujemy zwykłym sposobem, t. j. znajdujemy każdym razem cyfrę wskazującą ile razy dzielnik dany mieści się w liczbie utworzonej z wydzielonych cyfr dzielnej. Mówimy: 964 w 1767 mieści się 1 raz. Znalezioną cyfrę ilorazu mnożymy przez dopełnienie i iloczyn dodajemy do wydzielonych cyfr dzielnej. Jeżeli ostatnia na lewo cyfra tej sumy jest taką samą, jaką jest cyfra ilorazu, to oznacza, że ta cyfra jest dobrą. W przeciwnym razie cyfrę

ilorazu potrzeba zmienić. I tąk: $36 \times 1 = 36$, dodajemy $1767 + 36 = 1803$. Ostatnią cyfrę 1 na lewo owej sumy zakreślamy, a do cyfr pozostałych 803 ściągamy następną cyfrę dzielnej 9. I znowu mówimy: 964 w 8039 mieści się 8 razy. Przez tę cyfrę mnożymy dopełnienie 36, iloczyn 288 dodajemy do 8039; w sumie 8327 ostatnią na lewo cyfrę zakreślamy, do cyfr pozostałych 327 ściągamy następną cyfrę dzielnej 7... aż nie otrzymamy w sumie zera po zakreśleniu ostatniej cyfry na lewo, co wskazuje na dzielenie bez reszty

$$\begin{array}{lr}
 & 36 \\
\text{A więc:} & 1767,976 : 964 = 1834. \\
36 \times 1 = & +\ 36 \\
\hline
 & 1\ 8039 \\
36 \times 8 = & +\ 288 \\
\hline
 & 8\ 3277 \\
36 \times 3 = & +\ 108 \\
\hline
 & 3\ 3856 \\
36 \times 4 = & +\ 144 \\
\hline
 & 4\ 000
\end{array}$$

Jeszcze przykład:

$$\begin{array}{lr}
 & 4 \\
 & 475,20 : 96 = 495. \\
4 \times 4 = & +\ 16 \\
\hline
 & 4\ 912 \\
4 \times 9 = & +\ 36 \\
\hline
 & 9\ 480 \\
4 \times 5 = & +\ 20 \\
\hline
 & 5\ 00
\end{array}$$

§ 29. PRÓBA DZIAŁAŃ ARYTMETYCZNYCH PRZEZ CYFRĘ 9 polega na tem, że wszelka liczba podzielona przez 9 daje taką samą resztę, jaka się otrzymuje od dzielenia sumy cyfr tej liczby przez 9.

Np. Jeżeli liczbę 7285 podzielimy przez 9, to resztę otrzymamy taką samą, jaka się otrzymuje od podzielenia $7+2+8+5=22$ przez 9. Dzieląc 7285 lub 22 przez 9, otrzymamy tę samą resztę 4.

Aby otrzymać resztę od dzielenia jakiejkolwiek liczby przez 9, nie ma potrzeby wykonywać dzielenia, dosyć wziąć sumę cyfr tej liczby. Jeżeli zaś suma ta okaże się większą od 9, czyli będzie liczbą dwuznaczną, bierzemy znowu sumę cyfr tej ostatniej, dopóki nie otrzymamy liczby jednoznacznej, która to będzie **resztą poszukiwaną**.

Np. Suma cyfr liczby 2011856 jest 23, a suma cyfr tej ostatniej jest 5, więc i reszta poszukiwana od podzielenia liczby danej przez 9 jest 5.

a) Aby sprawdzić **dodawanie** przez cyfrę 9, należy znaleźć sposobem wyżej wskazanym resztę każdego składnika i następnie wziąć sumę tych reszt, którą również potrzeba dzielić, jeżeli się okaże większą od 9, czyli poprostu reszty składników dodawać do siebie dopóki nie otrzymamy liczby jednoznacznej, która to liczba powinna być taką samą, jaką jest reszta od podzielenia sumy ogólnej przez 9. Jeżeli wypada, że obydwie liczby te są sobie równe, wtedy dodawanie, a raczej sumę ogólną możemy uważać za dobrą.

Np.	2568	$2+5+6+8=21,$	$2+1=3$
	3393	$3+3+9+3=19,$	$1+8=9$
	1069	$1+0+6+9=16,$	$1+6=7$
	170	$1+7+0=8,$	$8=8$
	85	$8+5=13,$	$1+3=\underline{4}$
	7285	$7+2+8+5=22$	31.
		$2+2=\underline{4}$	$3+1=\underline{4}.$

Liczby obydwie są sobie równe 4.

b) Próba **odejmowania** robi się tak samo: bierze się różnicę reszt odjemnej i odjemnika, i jeżeli ta różnica równa się reszcie, pochodzącej od dzielenia reszty ogólnej przez 9, wtedy odejmowanie, a raczej resztę ogólną możemy uważać za dobrą.

Np.	4075	$4+0+7+5=16,$	$1+6=7$
	-2835	$2+8+3+5=18,$	$1+8=9.$
	1240	$1+2+4+0=\underline{7}$	$16;\ 1+6=\underline{7}.$

c) Przy próbie **mnożenia** iloczyn reszt, (pod postacią liczb jednoznacznych) od mnożnej i mnożnika powinien się równać reszcie pochodzącej od dzielenia iloczynu ogólnego przez 9.

Np. 2835×746.

2835	$2+8+3+5=18,$	$1+8=9$
$\times$ 746	$7+4+6=17,$	$1+7=8$
17010		$9\times 8=72,\ 7+2=\underline{9}$
11340		
19845		
2114910;	$2+1+1+4+9+1+0=18,$	$1+8=\underline{9}.$

d) Przy próbie **dzielenia** iloczyn reszt (pod postacią liczb jednoznacznych) od dzielnika i ilorazu więcej reszta, pochodzącej od dzielenia przez 9 reszty dzielenia powinna dać resztę, jaka pochodzi od dzielenia dzielnej przez 9. Jeżeli liczby te są sobie równe, wtedy dzielenie, a raczej iloraz można uważać za dobry.

Np. 12345,20 : 2341 = 527 iloraz
11705
6402
4682
17200
16387
813 reszta.

Dzielnik	2341,	$2+3+4+1=10$,	$1+0=1$.
Iloraz	527,	$5+2+7=14$,	$1+4=5$.
Reszta	813,	$8+1+3=12$,	$1+2=3$.

Iloczyn reszt od dzielnika i ilorazu więcej reszta od reszty $= 1 \times 5 = 5 + 3 = \underline{8}$.

Dzielna 1234520, $1+2+3+4+5+2+0=17$ $1+7=\underline{8}$.

Uwaga. Równość reszt jest warunkiem **niezbędnym** aby działanie było dobrem, a jednak **niedostatecznym.** W każdej bowiem liczbie możemy przestawiać cyfry, a suma ich będzie jednakową. Zaleta próby działań przez 9 polega na jej prędkości.

§ **30.** Przy **dzieleniu pamięciowem** liczbę daną rozkładamy na dwie grupy: jedna większa, którąby

się dzieliła bez reszty przez dzielnik dany i druga mniejsza może dawać resztę. Np. 4127 : 8.

Rozkładając na grupy $4127 = 4000 + 120 + 7$. $4127 : 8 = (4000 + 120 + 7) : 8 = 500 + 15$ i reszta 7, czyli 515 i reszta 7.

Przy dzieleniu uproszczeń niewiele.

a) Zamiast dzielić przez 5, możemy dzielną pomnożyć przez 2 i podzielić przez 10.

Np. $4273 : 5 = (4273 \times 2) : 10 = 8546 : 10 = 854$ i niedokładna reszta 6, bo pomnożona przez 2; żeby więc otrzymać resztę dokładną należy podzielić ją przez 2. Zatem $4273 : 5 + 854$ i reszta 3.

b) Zamiast dzielić przez 25, możemy liczbę daną pomnożyć przez 4 i podzielić przez 100, jeżeli przy tem otrzymamy resztę, to ją należy podzielić przez 4 aby była dokładną.

Np. $42736 : 25 = (42736 \times 4) : 100 = 170944 : 100 = 1709{,}44$ czyli $= 1709$ i reszta 11.

c) Niekiedy bywa korzystnie rozłożyć dzielnik na mnożniki i dzielić przez te mnożniki pokolei. Jeżeli przytem liczba dana dzieli się bez reszty tylko przez jeden czynnik, to resztę otrzymaną od podzielenia ilorazu przez czynnik drugi należy pomnożyć przez czynnik pierwszy aby była dokładną.

Np. $522 : 42 = 552 : (6 \times 7)$; $522 : 6 = 87$; $87 : 6 = 12$ i reszta 3, którą należy pomnożyć przez 6, więc $522 : 42 = 12$ i reszta 18.

d) Mamy np. do podzielenia 4127 przez 25. Aby jakąkolwiek liczbę podzielić przez 25, należy wszystkie setki liczby danej pomnożyć przez 4, gdyż $100 : 25 = 4$, a odcięte jedności z dziesiątkami podzielić przez 25, t. j. $4127 : 25 = (41 \text{ set.} \times 4 + 27) : 25 = 84 + 1$

i reszta 2. Przy mnożeniu liczby przez 25, można ją pomnożyć przez 100, a iloczyn podzielić przez 4.

Np. $342 \times 25 = 342 \times 100 : 4 = 34200 : 4 = 8550$.

Niektóre własności sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

§ 31. **WŁASNOŚCI SUMY.** **a)** Jeżeli do jednego ze składników dodamy pewną liczbę, czyli, że jeden ze składników powiększymy o pewną ilość jedności, to o taką samą ilość jedności powiększy się suma.

Np. $5 + 3 = 8$.
$5 + (3 + 2) = 5 + 5 = 10$; $10 - 8 = 2$.

b) Jeżeli od jednego ze składników odejmiemy pewną liczbę, czyli, że jeden ze składników zmniejszymy o pewną ilość jedności, to o taką samą ilość jedności zmniejszy się i suma.

Np. $5 + 3 = 8$.
$(5 - 2) + 3 = 3 + 3 = 6$; $8 - 6 = 2$.

c) Ztąd wniosek: jeżeli jednocześnie do jednego ze składnikow dodamy, a od innego odejmiemy tę samą liczbę, to suma się nie zmienia.

Np. $5 + 3 = 8$.
$(5 - 2) + (3 + 2) = 3 + 5 = 8$.

§ 32. **WŁASNOŚĆ RESZTY.** **a)** Jeżeli do odjemnej dodamy lub od niej odejmiemy pewną liczbę, nie zmieniając odjemnika, to reszta się powiększa lub zmniejsza o tę samą liczbę.

Np. $15 - 8 = 7$.
$(15+2)-8=17-8=9$; różnica powiększyła się $9-7=2$.
$(15-2)-8=13-8=5$, różnica zmniejszyła się $7-5=2$.

b) Jeżeli odjemnej nie zmieniamy, a do odjemnika dodamy pewną liczbę lub od niego odejmiemy pewną liczbę, to reszta się zmniejsza albo się powiększa o tę samą liczbę.

Np. $15 - 8 = 7$.

$15-(8+2)=15-10=5$; różnica się zmniejszyła $7-5=2$.
$15-(8-2)=15-6=9$; różnica się powiększyła $9-7=2$.

c) Ztąd wniosek: jeżeli jednocześnie do odjemnej i do odjemnika dodamy lub odejmiemy tę samą liczbę, to i reszta się nie zmienia.

Np. $15 - 8 = 7$.
$(15 + 2) - (8 + 2) = 17 - 10 = 7$.
$(15 - 2) - (8 - 2) = 13 - 6 = 7$.

§ 33. **WŁASNOŚCI ILOCZYNU.** **a)** Jeżeli jeden z czyników pomnożymy przez pewną liczbę, czyli, że jeden z czynników powiększymy przez pewną ilość razy, to tę samą ilość razy powiększy się iloczyn.

Np. $15 \times 4 = 60$.

$(15 \times 2) \times 4 = 30 \times 4 = 120$. $15 \times (4 \times 2) = 15 + 8 = 120$	W jednym i w drugim wypadku iloczyn powiększył się 2 razy, gdyż $120 : 60 = 2$.

b) Jeżeli jeden z czynników podzielimy przez pewną liczbę, czyli, że jeden z czynników zostanie zmniejszony pewną ilość razy, to tę samą ilość razy zmniejszy się iloczyn.

Np. $15 \times 4 = 60$.
$(15:3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$; iloczyn się zmniejszył $60:20 = 3$ r.
$15 \times (4:2) = 15 \times 2 = 30$; iloczyn się zmniejszył $60:30 = 2$ r.

c) Ztąd wniosek: jeżeli jeden czynnik mnożymy przez pewną liczbę, a inny czynnik dzielimy jednocześnie przez też samą liczbę, to iloczyn się nie zmienia.

Np. $15 \times 4 = 60$.
$(15 \times 2) \times (4:2) = 30 \times 2 = 60$.
$(15:3) \times (4 \times 3) = 5 \times 12 = 60$.

§ 34. **WŁASNOŚCI ILORAZU.** **a**) Jeżeli dzielnę mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, nie zmieniając dzielnika, to iloraz tyle się razy powiększa lub zmniejsza, ile jedności zawiera ta liczba przez którą mnożymy lub dzielimy.

Np. $48:12 = 4$.
$(48 \times 2):12 = 96:12 = 8$; iloraz powięk. $8:4 = 2$ razy
$(48:2):12 = 24:12 = 2$; iloraz zmniejsz. $8:4 = 2$ razy.

b) Jeżeli dzielnej nie zmieniamy, a dzielnik mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę, to iloraz tyle się razy zmniejsza lub powiększa, ile jedności zawiera ta liczba, przez którą mnożymy lub dzielimy dzielnik.

Np. $48:12 = 4$.
$48:(12 \times 2) = 48:24 = 2$; iloraz się zmn. $4:2 = 2$ razy.
$48:(12:2) = 48:6 = 8$, iloraz się powięk. $8:4 = 2$ razy.

c) Ztąd wniosek: jeżeli dzielną i dzielnik jednocześnie mnożymy albo dzielimy przez tę samą liczbę, to iloraz się nie zmienia.

Np. $48:12 = 4$.
$(48 \times 2):(12 \times 2) = 96:24 = 4$.
$(48:2):(12:2) = 24:6 = 4$.

§ 34. **WŁASNOŚCI LICZB DZIESIĘTNYCH.** (ułamków dziesiętnych).

a) Liczba dziesiętna się nie zmieni, jeżeli po przecinku z prawej strony ostatniej cyfry znaczącej dopiszemy lub zakreślimy kilka zer.

W rzeczy samej, mamy np. liczbę dziesiętną 3,64, dopiszemy z prawej strony trzy zera, otrzymujemy nową liczbę 3,64000, która tak samo jak poprzednia, przedstawia 3 całkowitych, 6 dziesiątych i 4 setnych, więc nic się nie zmieniło, gdyż wartość liczby 64000, stotysięcznych jest ta sama co wartość liczby 64 setnych.

b) Liczbę dziesiętną powiększamy 10, 100, 1000... razy, jeżeli przecinek przesuwamy o 1, 2, 3.... miejsca odpowiednio na prawo.

W rzeczy samej, przesuwając przecinek o dwa miejsca na prawo w liczbie 3,64, czyli po prostu opuszczając przecinek, powiększamy liczbę daną 100 razy, gdyż jedności każdej cyfry nowej liczby 364 stają się 100 razy większe od jedności cyfr odpowiednich liczby 3,64, t. j. 3 jedności stały się w liczbie nowej setkami, a np. 4 setne — jednościami i t. d.

b) Liczba dziesiętna zmniejsza się 10, 100, 1000... razy, gdy przecinek przesuwamy o 1, 2, 3... miejsca odpowiednio na lewo.

W rzeczy samej, przesuwając przecinek na lewo w liczbie 364 (przecinek się domyśla po stronie prawej) o jedno miejsce na lewo, zmniejszamy liczbę daną 10 razy, gdyż jedności każdej cyfry nowej liczby 36,4 stają się 10 razy mniejsze od jedności cyfr odpowiednich liczby 364.

§ 35. **MNOŻENIE LICZB DZIESIĘTNYCH** zasadza się na tej własności iloczynu, że gdy jeden z czynników pomnożymy przez pewną liczbę, to iloczyn powiększy się tyle razy, ile jedności zawiera ta liczba, przez którą mnożymy ów czynnik.

Mamy np. do pomnożenia 3,64 przez 0,5. Przesuwając przecinki na prawo w mnożnej o dwa miejsca, w mnożniku o jedno miejsce, czyli poprostu opuszczając przecinki, mnożnę powiększamy 100 razy, a mnożnik 10 razy; zatem iloczyn zostanie powiększony $100 \times 10 = 1000$ razy; t. j. $364 \times 5 = 1820$ jest iloczynem powiększonym. Aby otrzymać iloczyn prawdziwy, należy iloczyn 1820 zmniejszyć 1000 razy, czyli przecinek (który się domyśla po prawej stronie) przesunąć o 3 miejsca na lewo, wówczas $3{,}64 \times 0{,}5 = 1{,}820$ jest iloczynem prawdziwym.

Tak więc, aby pomnożyć przez siebie dwie liczby dziesiętne, należy je mnożyć, nie zważając na przecinki, jak gdyby były liczbami całkowitemi, a w otrzymanym iloczynie oddzielić przecinkiem z prawej strony tyle cyfr, ile ich było w mnożnej i mnożniku razem.

§ 36. Przy **DZIELENIU LICZBY DZIESIĘTNEJ PRZEZ CAŁKOWITĄ** nie zważamy na przecinek i dzielimy ją jak gdyby była całkowitą; w ilorazie kładziemy przecinek po cyfrze, którą wyznaczyliśmy przy pomocy ostatniej cyfry części całkowitej dzielnej, t. j. jak tylko do reszty z liczb całkowitych dopisujemy cyfrę dziesiętną lub zero; następne cyfry ilorazu już będą dziesiętne, które od całkowitych powinny być oddzielone przecinkiem.

Np. 341,64 : 6 = 56,94
```
341,64 : 6 = 56,94
30
--
 41
 36
 --
  56
  54
  --
   24
   24
   --
    0
```

Albo 3,1 : 6 = 0,516...
```
3,1 : 6 = 0,516...
30
--
 10
  6
 --
 40
 36
 --
 --
```

Wogóle dzielenie liczby dziesiętnej przez całkowitą zasadza się na tej własności ilorazu, że jeżeli dzielnę mnożymy lub dzielimy przez pewną liczbę nie zmieniając dzielnika, iloraz tyleż razy się powiększa lub zmniejsza.

Np.: Mamy do podzielenia 0,003 przez 4. Opuszczając przecinek mnożymy dzielnę przez 1000 i wtedy mamy:

```
3 : 4 = 0,75
30
28
--
 20
 20
 --
```

Lecz iloraz 0,75 jest powiększony 1000 razy, aby otrzymać prawdziwy, należy go zmniejszyć 1000 razy, czyli przesunąć przecinek na lewo o trzy miejsca, a wówczas: 0,003 : 4 = 0,00075.

§ 37. **DZIELENIE LICZBY DZIESIĘTNEJ PRZEZ DZIESIĘTNĄ** lub całkowitej przez dziesiętną zasadza się na tej własności ilorazu, że jeżeli dzielnę i dzielnik jednocześnie mnożymy przez tę samą liczbę, to iloraz się nie zmienia.

Mamy np. do podzielenia 0,49536 przez 0.032.

Najpierw zrównamy liczbę znaków dziesiętnych, przypisując do dzielnika dwa zera z prawej strony, t. j. 0,49536 : 0,03200.

Mając w dzielnej i dzielniku jednakową liczbę cyfr dziesiętnych, opuszczamy przecinki, przez co dzielnę i dzielnik mnożymy przez 100000, a iloraz się nie zmieni. W ten sposób dzielenie liczb dziesiętnych sprowadziliśmy do dzielenia liczb całkowitych:

```
49536 : 3200 = 15,48.
3200
-----
17536
16000
------
 15360
 12800
 ------
  25600
  25600
  -----
    00
```

Jeszcze przykład:

4 : 0,5
4,0 : 0,5
40 : 5 = 8

I tak, aby podzielić liczbę dziesiętną przez liczbę dziesiętną, albo liczbę całkowitą przez dziesiętną, najpierw dopisujemy z prawej strony odpowiednią ilość zer dla zrównania liczby znaków dziesiętnych, opuszczamy następnie przecinki i dzielimy liczby dane jako liczby całkowite, albo jak liczbę dziesiętną przez całkowitą, gdy do reszty dopisujemy zera.

Jeszcze prędzej otrzymamy ten sam rezultat przy dzieleniu 0,49536 : 0.032 jeżeli dzielnik przyjmiemy za liczbę całkowitą i odpowiednio powiekszymy dzielnę, w danym wypadku należy dzielnę powiększyć 1000 razy, wtedy dzielenie powyższe tak się przedstawi:


```
495,36 : 32 = 15,48
32
---
175
160
---
 153
 128
 ---
  256
  256
  ---
   0
```

Dzielenie zaś całkowitej z ułamkiem dziesiętnym przez dzielnik całkowity nie przedstawia żadnych trudności.

§ 38. Przy **DZIELENIU LICZB MIANOWANYCH** są dwa przypadki:

a) **Gdy dzielna i dzielnik są liczbami mianowanemi,** dzielenie wtedy przedstawia **mieszczenie.** Jeżeli dzielna i dzielnik są liczbami wielorakiemi, wyrażamy je wpierw jako liczby mianowane proste w tej samej jednostce i następnie dzielimy jako liczby zwyczajne

Mamy np. do podzielenia 2 wiorst 492 sążni 6 stóp przez 39 sążni 2 stóp; t. j. chcemy się dowiedzieć **ile razy** druga liczba mieści się w pierwszej więc:

2 wior. 492 sąż. $= 2 \times 500 + 492 = 1492$ sąż.
1492 sąż. 6 stóp $= 1492 \times 7 + 6 = 10444 + 6 = 10450$ stóp
39 sążni 2 stóp $= 39 \times 7 + 2 = 273 + 2 = 275$ stóp.
(2 w. 492 sąż. 6 st.) : (39 sąż. 2 st.) = 10450 st. : 275 st. = 38.

b) Gdy **dzielna jest liczbą wieloraką a dzielnik liczbą oderwaną**, dzielenie wtedy przedstawia dzielenie na **równe części**. Wyrażając liczbę wieloraką jako liczbę mianowaną prostą, sprowadzimy dzielenie do dzielenia liczb zwyczajnych, lub też naprzód wyznaczamy część ilorazu wyrażoną przy pomocy największej jednostki; pozostałą resztę dzielnej w następującej mniejszej jednostce i wyznaczamy odpowiednią część ilorazu i t. d.

Np.: 2 pud. 13 funt. 4 łuty podzielić przez 5.
2 × 40 = 80 + 13 = 93 f. × 32 = 2976 + 4 = 2980 łutów.
2980 łut. : 5 = 596 łut. = 18 funt. 20 łut.

Albo : (2 p. 13 f. 4 ł.) : 5 = 18 f. 20 ł.

```
× 40
----
  80
  13
----
  93
  90
----
  3 f.
× 32
----
  96
   4
----
 100 ł.
 100
----
   0
```

W danym wypadku **iloraz** jest zawsze liczbą **mianowaną** i przedstawia jedności tego samego rodzaju co dzielna, — gdy w pierwszym – **iloraz** jest liczbą **oderwaną**.

Cechy podzielności liczb.

§ **39.** Jeżeli jedna liczba dzieli się bez reszty przez drugą, to ta druga zowie się jej **dzielnikiem**. Np. 24 dzieli się bez reszty przez 6, 4, 3 i 2; każda z tych liczb jest dzielnikiem 24. Jeżeli mamy jakikolwiek jeden z dzielników liczby danej np. 3, to **iloraz** otrzymany od dzielenia 24 przez 3 t. j. 8 zowie się dzielnikiem **dopełniającym.**

Ogólna cecha podzielności liczb: jeżeli mamy sumę kilku składników i każdy z nich dzieli się bez reszty przez jakikolwiek dzielnik, to i suma tych składników podzieli się bez reszty przez ten sam dzielnik.

Np.: $24 + 72 = 4 . 6 + 12 . 6.$

Ztąd widzimy, iż każdy ze składników danych dzieli się bez reszty przez 6, a więc i suma ich $24 + 72 = 96$ powinna tak samo podzielić się przez 6.
W rzeczy samej:

$$96 = 24 + 72 = 4 . 6 + 12 . 6 = (4 + 12)\, 6 = 16 . 6.$$

Ponieważ suma 96 dała się rozłożyć na dwa czynniki 16 . 6, z których jeden jest 6, więc ta suma się dzieli przez 6; w ilorazie otrzymamy 16—dzielnik dopełniający.

§ **40.** Na tej zasadzie wyprowadzamy ważniejsze cechy podzielności liczb mianowicie:

a) Jeżeli się chcemy przekonać, czy liczba dana dzieli się bez reszty przez 2, 5 i 10, przedstawiamy ją jako sumę złożoną z dziesiątków i cyfry ostatniej.

Np.: 736 = 73 dzies. + 6 jedn.

Ponieważ pierwszy składnik — dziesiątki dzieli się zawsze bez reszty przez 2, 5 i 10, więc **jeżeli** drugi składnik, czyli **cyfra ostatnia dzieli się bez reszty przez 2, 5 i 10**, to i liczba dana podzieli się bez reszty przez te same dzielniki.

Ztąd wnosimy: jeżeli ostatnia cyfra liczby danej jest **parzysta** lub 0, to liczba dana dzieli się bez reszty przez 2; jeżeli ostatnia cyfra jest 5 lub 0 — dzieli się przez 5; przez 10 dzieli się wtedy, gdy ostatnia cyfra jest 0.

b) Jeżeli się chcemy przekonać, czy liczba dana dzieli się bez reszty przez 4, przedstawiamy ją jako sumę złożoną z dwóch składników: z setek i części wyrażonej przez dwie cyfry ostatnie.

$$\text{Np.}\quad 736 = 7 \text{ set.} + 36.$$

Ponieważ pierwszy składnik — setki dzieli się zawsze przez 4, więc **jeżeli** drugi składnik 36, **czyli dwie cyfry ostatnie dzielą się bez reszty przez 4, to i liczba dana podzieli się bez reszty przez ten sam dzielnik.**

c) Rozumując w sposób podobny, przekonamy się, że **dla podzielności liczby danej przez 8, potrzeba, aby trzy cyfry ostatnie dzieliły się bez reszty przez 8,** gdyż tysiące zawsze się dzielą bez reszty przez 8.

d) Aby znaleźć cechy podzielności przez 3 i 9, zauważymy, wpierw że:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1000 &= 999 + 1 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

tu pierwszy ze składników dzieli się bez reszty przez 3 i 9, a drugi 1 nie dzieli się. Chcemy zbadać np.,

czy liczba 5748 podzielna przez 3 i 9, możemy ją przedstawić tak:

$$\begin{aligned} 5748 &= 5000 + 700 + 40 + 8 = \\ &= 1000 \,.\, 5 + 100 \,.\, 7 + 10 \,.\, 4 + 8 = \\ &= (999 + 1) \,.\, 5 + (99 + 1) \,.\, 7 + (9 + 1) \,.\, 4 + 8 = \\ &= \underbrace{999 \,.\, 5 + 5}_{} + \underbrace{99 \,.\, 7 + 7}_{} + \underbrace{9 \,.\, 4 + 4}_{} + 8 = \\ &= \underbrace{999 \,.\, 5 + 99 \,.\, 7 + 9 \,.\, 4}_{} + \underbrace{5 + 7 + 4 + 8}_{} \end{aligned}$$

wszystkie składniki rozmieściliśmy na dwie grupy: jedna z nich $999 \,.\, 5 + 99 \,.\, 7 + 9 \,.\, 4$ dzieli się bez reszty przez 3 i 9, gdyż każdy ze składników dzieli się przez te dzielniki; druga grupa $5 + 7 + 4 + 8$ może się dzielić bez reszty przez 3 i 9 lub nie. Jeżeli się dzieli, to i liczba dana podzieli się bez reszty przez te same dzielniki. Ponieważ grupa druga przedstawia sumę cyfr liczby danej 5748 więc **dla podzielności liczby przez 3 i 9, potrzeba, aby suma cyfr liczby danej dzieliła się bez reszty przez 3 i 9.** Np. suma cyfr liczby 5748 jest $5 + 7 + 4 + 8 = 24$ dzieli się bez reszty przez 3, a więc i 5748 dzieli się przez 3.

Suma cyfr liczby 157284 jest

$$1 + 5 + 7 + 2 + 8 + 4 = 27.$$

dzieli się przez 9, więc i liczba 157284 dzieli się przez 9.

e) Liczby podzielne przez 2 i 3 są podzielne przez 6.

Liczby podzielne przez 3 i 4 są podzielne przez 12 i t. d.

Np. 48 dzieli się bez reszty przez 6 i przez 12, gdyż jest podzielna przez 3 i 2, 3 i 4.

§ 41. **ROZKŁAD LICZB NA CZYNNIKI PIERWSZE CZYLI PROSTE.** Każdą liczbę można przedstawić jako iloczyn dwóch różnych czynników.

Np. $24 = 6 . 4$; $13 = 1 . 13$; $5 = 1 . 5$

czyli drugiemy słowy: **każda liczba ma co na mniej dwa dzielniki.**

Liczby podzielone tylko przez samą siebie i jedność zowią się **liczbami pierwszemi** czyli **prostemi.**

A te są: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101... Wszystkie inne liczby (nie proste) oprócz siebie i jedności dzielą się jeszcze przez inne liczby. Np. 24 dzieli się przez 24, 12, 6, 8, 4, 3, 2 i 1. Takie liczby zowią się **złożone.**

§ 42. **Rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze, czyli proste jest to znaleźć wszystkie liczby pierwsze, których iloczyn da tę samą liczbę.**

Aby liczbę daną rozłożyć na czynniki pierwsze czyli proste, dzielimy ją, na podstawie cech podzielności, najpierw przez liczbę najmniejszą z pierwszych, jeżeli iloraz jest liczbą złożoną, to go dzielimy przez najmniejszą liczbę pierwszą, przez którą on jest podzielny; jeżeli nowy iloraz nie jest liczbą pierwszą, należy znowu go dzielić... dopóki nie otrzymamy ilorazu, będącego liczbą pierwszą.

Samo dzielenie kolejne przedstawiają w ten sposób:

Np.	7056	2
	3528	2
	1764	2
	882	2
	441	3
	147	3
	49	7
	7	7
	1	

Zatem, $7056 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 7 . 7$,

albo w skróceniu $7056 = 2^4 . 3^2 . 7^2$

Iloczyn wszystkich tych dzielników przedstawia rozkład liczby danej na czynniki pierwsze.

Uwaga. Jeżeli dostrzegamy, że liczba dana jest iloczynem kilku liczb znanych, to można postępowanie uprościć, rozkładając każdą z tych liczb oddzielnie.

Np. $4200 = 42 . 100$

$42 = 3 . 2 . 7$; $100 = 2 . 2 . 5 . 5$

zatem $4200 = 2 . 3 . 7 . 2 . 2 . 5 . 5$

§ **43.** Zauważymy jeszcze, iż każda liczba wogóle tylko w jeden sposób może być rozłożona na czynniki pierwsze, a więc żadna liczba nie podzieli się bez reszty przez drugą, jeżeli ta druga zawiera inne lub więcej czynników pierwszych, niż liczba dana.

Np.: Jedna liczba $4200 = 2 . 2 . 2 . 4 . 5 . 5 . 7$, liczba druga $156 = 2 . 2 . 3 . 13$.

Liczba 4200 nie podzieli się bez reszty przez 156, gdyż ta ostatnia zawiera czynnik 13, którego nie posiada liczba pierwsza. Gdy zaś ta sama liczba 4200 jest podzielną przez $252 = 2 . 2 . 3 . 3 . 7$, gdyż czynniki pierwsze liczby 252 wszystkie są pomiędzy takimiż czynnikami liczby 4200.

Więc jedna liczba podzieli się bez reszty przez drugą tylko wtedy, kiedy ta druga nie zawiera więcej czynników od liczby pierwszej i kiedy te czynniki nie są różne od czynników tejże liczby.

Największy wspólny dzielnik kilku liczb.

§ 44. Liczba, która jednocześnie dzieli bez reszty kilka liczb danych, zowie się **wspólnym dzielnikiem**. Liczba największa, która jednocześnie dzieli bez reszty kilka liczb danych, zowie się **największym wspólnym dzielnikiem tychże liczb**.

Np.: Liczby dane są: $1260 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7$; $420 = 2 . 2 . 3 . 5 . 7$ i $168 = 2 . 2 . 2 . 3 . 7$.

Wspólnym dzielnikiem tych liczb mogą być 2. 4, 12, 28, 60 i t. d., lecz największym wspólnym dzielnikiem jest tylko jeden iloczyn: $2 . 2 . 3 . 7 = 84$, gdyż on jeden zawiera takie czynniki pierwsze, jakie zawiera każda z liczb danych.

Liczby, które nie mają żadnego prócz jedności wspólnego dzielnika, zowią się liczbami pierwszemi względem siebie.

Np.: $8 = 2 . 2 . 2 . 1$, $35 = 5 . 7 . 1$, $23 = 23 . 1$ są liczbami pierwszemi względem siebie, gdyż żadnego czynnika wspólnego nie mają prócz 1.

§ 45. Jeżeli z dwóch liczb **jedna jest podzielna przez drugą**, to mniejsza jest największym wspólnym dzielnikiem tych dwóch liczb.

Np. Największy wspólny dzielnik liczb 280 i 35 jest liczba mniejsza 35.

Jeżeli z dwóch liczb **jedna nie jest przez drugą podzielna**, to one mają ten sam **największy wspólny dzielnik, co mniejsza z tych liczb i reszta** z podzielenia większej z nich przez mniejszą.

W rzeczy samej, chcemy np. znaleźć największy wspólny dzielnik liczb 2220 i 518. Próbujemy czy 518 nie jest największym wspólnym dzielnikiem, t. j. 2220 dzielimy przez 518.

$$\begin{array}{r} 2220 : 518 = 4 \\ -\ 2072 \\ \hline 148 \end{array} \qquad \text{ztąd } 2220 = 4 . 518 + 148.$$

Ta liczba, która będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb 518 i 148, będzie zarazem największym wspólnym dzielnikiem liczby 2220.

Dla tego probujemy

$$\begin{array}{r} 518 : 148 = 3 \\ -\ 444 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\text{ztąd: } 518 = 3 . 148 + 74$$

i znowu liczba, która będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb 148 i 74, będzie zarazem największym wspólnym dzielnikiem liczb 518 i 2220 i t. d.

Samo dzielenie kolejne tak się przedstawia:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 2220 & 518 \\ & & 2072 & 4 \\ & 518 & 148 & \\ & 444 & 3 & \\ 148 & 74 & & \\ 148 & 2 & & \\ \hline 0 & & & \end{array}$$

		4	3	2
Albo:	2220	518	148	74
	2072	444	148	
	148	74	0	

Aby więc znaleźć największy wspólny dzielnik dwóch liczb należy: liczbę większą podzielić przez mniejszą, mniejszą — przez resztę pierwszą, resztę pierwszą — przez resztę drugą i t. d. dopóki nie wypadnie reszta 0; wtedy **ostatni dzielnik** jest poszukiwanym **największym wspólnym dzielnikiem** (74).

W rzeczy samej, z przykładu powyższego mamy (§ 20):

$$2220 = 4 \, . \, 518 + 148$$
$$418 = 3 \, . \, 148 + 74$$
$$148 = 2 \, . \, 74.$$

Wiemy, że jeżeli wszystkie składniki dzielą się bez reszty przez jakąkolwiek liczbę, to i suma jest podzielna przez tę samą liczbę.

148 dzieli się przez 74 bez reszty (§ 39), suma $3 \, . \, 148 + 74$ jest podzielna przez 74. Również suma $4 \, . \, 518 + 148$ jest podzielna przez 74, a więc i liczba 2220 jest podzielna przez 74.

Uwaga. Aby znaleźć największy wspólny dzielnik trzech lub więcej liczb, należy: po znalezieniu go dla dwóch danych poszukiwać następnie dla liczby trzeciej i znalezionego już wspólnego dzielnika i t. d. Ostatni wspólny dzielnik będzie najw. wspólnym dzielnikiem liczb danych.

Najmniejsza wspólna wielokrotna.

§ **46**. Liczba, która się dzieli bez reszty przez drugą liczbę, nazywa się jej **wielokrotną**.

Np. Liczby 70, 105, 140 są wielokrotne liczby 35, gdyż każda z nich dzieli się bez reszty przez 35.

Liczba, która się dzieli przez kilka liczb danych bez reszty, zowie się **wspólną wielokrotną danych.**

Np. 300 jest wspólną wielokrotną liczb 6, 20, 25.

Iloczyn liczb danych jest ich wspólną wielokrotną. Wspólnych wielokrotnych dla liczb danych istnieje nieskończenie wiele. Dosyć jedną z nich mnożyć stopniowo przez 2, 3, 4... aby otrzymać cały szereg nowych wielokrotnych. Dla tego największa wspólna wielokrotna nie istnieje, lecz istnieje najmniejsza wielokrotna liczb danych.

Najmniejszą, zatem, **wielokrotną liczb danych nazywamy najmniejszą ze wszystkich wielokrotnych,** t. j. liczbę najmniejszą, która się dzieli przez liczby dane bez reszty.

§ **47.** Najmniejszą wielokrotną znajdujemy w sposób następujący:

a) Jeżeli liczby dane wszystkie są proste czyli pierwsze względem siebie, to najmniejsza ich wielokrotna jest iloczyn tych liczb. Np. liczby 8, 35 i 27 są pierwszemi względem siebie, zatem najmniejsza wielokrotna ich jest: $8 \, . \, 35 \, . \, 27 = 7560$

b) Jeżeli największa z liczb danych jest podzielna przez resztę liczb, to ona jest najmniejszą wielokrotną wszystkich danych.

Np. Liczby dane są: 2520, 36, 35 i 18. Największa z nich 2520 jest podzielna przez 36, 35 i 18, a więc jest najmniejszą wielokrotną wszystkich danych, gdyż jest podzielną i przez samą siebie

c) Jeżeli największa z liczb danych nie jest podzielna przez resztę liczb i jeżeli liczby dane mają wspólne czynniki, to najmniejszą wielokrotną ich można otrzymać przez rozkład liczb danych na czynniki pierwsze i przez wypisanie każdego z nich tyle razy, ile razy najwięcej on się powtarza w każdym rozkładzie. Iloczyn wypisanych w ten sposób czynników da najmniejszą wielokrotną.

Np. liczby dane są: 630, 300 i 240.

Rozkładając każdą na czynniki pierwsze, mamy 630=2 3.3.5.7; 300=2.2.3.5.5; 240=2.2.2.2.3.5

Widzimy, iż czynnik 2 powtarza się najwięcej w liczbie 240; czynnik 3 w liczbie 630; czynnik 5 w liczbie 300 i czynnik 7 tylko w liczbie 630.

Wypisujemy każdy z tych czynników ile razy najwięcej powtarza się przy rozkładzie liczb danych, a więc mamy:

2.2.2.2.3.3 5.5.7 = 25200 iloczyn,

który przedstawia najmniejszą wielokrotną liczb danych.

Porównywając czynniki pierwsze liczb danych z takimiż czynnikami najmniejszej wielokrotnej, widzimy, iż dzielniki dopełniające liczbę 630 są: 2.2.2.5 t. j. te, których brakuje liczbie 630; dzielniki dopełniające liczbę 240 są: 3.5.7.

Jeżeli zatem najmniejszą wielokrotną 25200 podzielimy przez którąkolwiek z liczb danych, np. 240, to otrzymamy iloraz równy iloczynowi z dzielników dopełniających, t. j. 3.3.5.7 = 105

Aby więc odnaleźć najmniejszą wielokrotną kilku liczb danych, można, rozłożywszy je na czynniki pierwsze, każdy z czynników wziąć tyle razy, ile razy on

najwięcej wchodzi do któregokolwiek z tych rozkładów; iloczyn zaś tych czynników daje najmniejszą wielokrotną liczb danych. Rozkładając odrazu wszystkie liczby dane, otrzymamy wszystkie czynniki pierwsze potrzebne do utworzenia najmniejszej wielokrotnej liczb danych. Np.

28,	56,	100,	125	2
14	28	50	125	2
7	14	25	125	2
7	7	25	125	2
7	7	5	25	5
7	7	1	5	5
7	7	—	1	5
1	1	—	—	7

Najmniejsza wielokrotna jest: 2.2.2.5.5.5.7=7000.

W rzeczy samej:

7000 : 28 = 250; 7000 : 56 = 125.

7000 : 100 = 70; 7000 : 125 = 56

Liczby ułamkowe.

§ **48.** Liczby które otrzymujemy przez liczenie równych części lub równych podziałek jedności, nazywają się **liczbami ułamkowemi**. Np. jedna trzecia funta i jedna trzecia funta, razem dają dwie trzecie funta.

Każda wielkość czyli jedność może być, albo możemy sobie wyobrazić, że jest podzieloną na równe części, równe podziałki. Wówczas jedna podziałka stanowi jedną część jedności, dwie podziałki — dwie części jedności, siedem podziałek – siedem części jedności i t. d. Ponieważ części te pochodzą od dzielenia jedności, więc i oznacza się je znakiem dzielenia czyli kreską.

I tak: jedna trzecia oznacza się $\frac{1}{3}$, dwie trzecie — $\frac{2}{3}$, siedem dwunastych — $\frac{7}{12}$ i t. d. są to ułamki. Więc **ułamek jest to jedna lub więcej razem wziętych części, otrzymanych z rozłożenia jedności na części równe.**

Uwaga. Jak niezawodnym warunkiem każdej liczby całkowitej jest **jednorodność** jedności, z liczenia których liczby powstają, tak samo każdy ułamek tworzy się tylko **z równych**, jednakowych (jednorodnych) części jedności.

§ 49. Liczba, którą wskazuje na ile równych części jedność została podzieloną, nazywa się **mianownikiem** ułamka, a liczba, która wskazuje ile takich części wzięto — **licznikiem** ułamka. Np. w ułamku $\frac{5}{12}$ mianownikiem jest liczba 12 (pisze się pod kreską), a licznikiem — liczba 5 (pisze się nad kreską).

§ **50. DRUGIE OKREŚLENIE UŁAMKA.** Ułamek możemy uważać **jako dzielenie wskazane** (niewykonane), **w którym dzielną jest licznik, dzielnikiem mianownik, a ilorazem wartość ułamka.**

W rzeczy samej, dano np. do podzielenia 5 jedności przez 12, Żeby wykonać to działanie, każdą z tych 5 jedności rozkładamy na 12 równych części, których otrzymamy $5 . 12 = 60$ części równych. Teraz

60 części z łatwością mogą być podzielone przez 12 otrzymamy iloraz 5 części, z których każda jest dwunastą częścią jedności. Na piśmie oznacza się to przez $\frac{5}{12}$.

I tak więc, **ułamek jest to iloraz otrzymany z podzielenia licznika przez mianownik.** Z określenia tego wynika, że 5 jedności podzielone przez 12 oznacza to samo co pięć dwunastych części jednej jedności. Jest to jedna z ważniejszych własności ułamków. Te 5 dwunastych możemy otrzymać, biorąc 5 części od jednej jedności, lub biorąc po 1 części od 5 jedności.

Z powyższego określenia wypływa i druga własność ułamka, a mianowicie: **Licznik i mianownik ułamka możemy mnożyć i dzielić przez tę samą liczbę i wartość ułamka się nie zmienia**, gdyż ułamek jest ilorazem.

Niezależnie od tego. możemy i tak rozumować: mamy ułamek $\frac{5}{12}$. Jeżeli każdą część tego ułamka rozłożymy np. na trzy równe podziałki, to w 5 częściach będziemy mieli $3 . 5 = 15$ drobniejszych, a w całej jedności $3 . 12 = 36$ tych samych części drobniejszych, więc zamiast ułamka danego $\frac{5}{12}$ otrzymaliśmy równy mu ułamek $\frac{15}{36}$ tylko z części drobniejszych utworzony.

Czyli $\frac{15}{12} = \frac{5 . 3}{12 . 3} = \frac{15}{36}$ i naodwrót: $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$, to ostatnie otrzymamy, jeżeli $\frac{15:3}{36:3} = \frac{5}{12}$ czyli możemy licznik i mianownik dzielić przez tę samą liczbę i wartość ułamka się nie zmienia.

§ **51.** Ułamek, który zawiera **mniej** części, niż ich zawiera jedność, zowie się **ułamkiem właściwym.** Np. $\frac{5}{12}$.

Ułamek, który zawiera **tyle** części, ile ich zawiera jedność, albo **więcej**, zowie się **ułamkiem niewłaściwym**. Np. $\frac{12}{12}$; $\frac{100}{12}$.

Liczba z całkowitych jedności i ułamka składająca się nosi miano **całkowitej z ułamkiem** albo **liczby mieszanej**. Np. $3\frac{5}{12}$.

§ **52.** Ułamki można przekształcać, nie zmieniając ich wartości.

a) **Wyciąganie całkowitej z ułamka niewłaściwego** otrzymuje się za pomocą dzielenia licznika przez mianownik; iloraz niezupełny przedstawia całkowitą, do której dopisuje się reszta, jeżeli jest, z tym samym mianownikiem.

Np. $\frac{49}{11}$; $\begin{array}{l}49:11=4;\\ \underline{44}\\ \;\;5\end{array}$ $\frac{49}{11} = 4\frac{5}{11}$; albo $\frac{36}{12} = 3$.

b) **Włączenie całkowitej albo całkowitej z ułamkiem w ułamek niewłaściwy** otrzymuje się za pomocą mnożenia całkowitej przez mianownik ułamka danego; do iloczynu dodaje się licznik ułamka danego i pod sumą podpisuje się jego mianownik.

Np. $4\frac{5}{11} = \frac{4.11+5}{11} = \frac{44+5}{11} = \frac{49}{11}$;

$10 = \frac{10.4}{4} = \frac{40}{4}$.

c) **Skrócenie ułamków** otrzymuje się za pomocą dzielenia licznika i mianownika przez wspólny dzielnik, przytem wartość ułamka się nie zmienia.

Np. $\frac{9:9}{27:9} = \frac{1}{3}$; albo $\frac{\overset{4}{124}}{168} = \frac{31}{42}$.

d) **Sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika** otrzymuje się za pomocą mnożenia licznika i mianownika przez jeden i ten sam mnożnik, (a raczej przez czynniki dopełniające mianownik dany do wspólnego mianownika t. j. przez iloraz od dzielenia wspólnego mianownika przez dany). W tym celu odnajdujemy najmniejszą wspólną wielokrotną mianowników danych, którą przyjmujemy za wspólny mianownik. Najmniejszą tę wielokrotną dzielimy przez każdy z danych mianowników, otrzymujemy każdym razem czynnik dopełniający (iloraz § 39), przez ktory się mnoży licznik i mianownik ułamka odpowiedniego. Ponieważ rezultat od mnożenia mianowników przez czynniki dopełniające wiadomy, więc mnożymy tylko liczniki ułamków danych, podpisując pod ich iloczynami najmniejszą wielokrotną mianowników, która będzie wspólnym mianownikiem.

Np. Ułamki dane: $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$ i $\frac{11}{36}$ należy sprowadzić je do wspólnego mianownika. Najmniejsza wielokrotna mianowników danych jest:

12,	20,	36	2	
6	10	10	2	
3	5	9	3	2 . 2 . 3 . 3 . 5 = 180.
1	—	3	3	
	—	1	5	
	1			

Czynniki dopełniające dla mianownika pierwszego $180 : 12 = 15$, dla drugiego $180 : 20 = 9$, i dla trzeciego $180 : 36 = 5$. Mnożymy liczniki ułamków danych przez odpowiednie czynniki dopełniające, podpisując pod każdym iloczynem 180.

$\frac{5}{12} = \frac{5 . 15}{180} = \frac{75}{180}$; $\frac{7}{20} = \frac{7 . 9}{180} = \frac{63}{180}$; $\frac{11}{36} = \frac{11 . 5}{180} = \frac{55}{180}$.

Jeszcze przykład: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{7}$.

Najmniejsza wielokrotna mianowników: $3.5.7=105$. Czynniki dopełniające dla mianownika pierwszego $5 . 7$, dla drugiego $3 . 7$ i dla trzeciego $3 . 5$

a więc: $\frac{1}{3} = \frac{1.5.7}{105} = \frac{35}{105}$; $\frac{1}{5} = \frac{1.3.7}{105} = \frac{21}{105}$ i $\frac{1}{7} = \frac{1.3.5}{105} = \frac{15}{105}$.

§ 53 DODAWANIE UŁAMKÓW. Możemy dodawać wielkości tylko jednorodne, więc jeżeli mianowniki ułamków danych są różne, należy wpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika, a potem dodać liczniki, podpisując pod sumą ten sam wspólny mianownik.

Np. Dane $\frac{5}{12} + \frac{7}{20} + \frac{11}{36} = \frac{5 . 15 . + 7 . 9 + 11 . 5 . 5}{180} = \frac{75 + 63 + 55}{180} = \frac{193}{180} = 1\frac{13}{180}$.

Uwaga. Gdy mianowniki są jednakowe, wtedy odrazu się dodają liczniki i pod sumą podpisuje się wspólny mianownik.

Jeżeli do dodania mamy całkowite z ułamkami, dodajemy osobno ułamki i osobno całkowite. Gdy suma ułamków jest ułamkiem niewłaściwym, wyciągamy całkowitą, którą dodajemy do sumy całkowitych.

Np. Dane $7\frac{3}{5} + 2\frac{4}{15} + 1\frac{7}{12} = (7+2+1)+(\frac{3}{5}+\frac{4}{15}+\frac{7}{12}) = 10 + \frac{31 + 16 + 35}{60} = 10 + \frac{87}{60} = 10 + 1\frac{27}{60} = 11\frac{27}{60} = 11\frac{9}{20}$.

§ 54. **ODEJMOWANIE UŁAMKÓW.** Odejmować możemy również tylko wielkości jednorodne. Jeżeli więc mianowniki ułamków danych są różne, należy wpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika, a potem odejmować liczniki, podpisując pod resztą ten sam wspólny mianownik.

Np. dane $\frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{9 - 4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Przy odejmowaniu całkowitych z ułamkami uważamy czy ułamek odejmnika nie jest większy od ułamka odjemnej; jeżeli jest większy, to całkowitą odjemnej zmniejszamy o jedność, którą z ułamkiem odjemnej włączamy w ułamek niewłaściwy; to samo czynimy, jeżeli odjemna jest liczbą całkowitą (bez ułamka), t. j. zmniejszamy uprzednio tę całkowitą o jedność, którą przedstawiamy w postaci ułamka z takim mianownikiem, jaki ma ułamek odjemnika.

Np. **a)** $6\frac{5}{24} - 2\frac{1}{3} = 6\frac{5}{24} - 2\frac{8}{24} = 5\frac{29}{24} - 2\frac{8}{24} = 3\frac{21}{24} =$

$= 3\frac{7}{8}.$

b) $6 - \frac{7}{8} = 5\frac{8}{8} - \frac{7}{8} = 5\frac{1}{8}.$

§ 55. **MNOŻENIE UŁAMKA PRZEZ CAŁKOWITĄ.** Chcemy np. $\frac{2}{5}$ pomnożyć przez 3. Na podstawie określenia mnożenia (§ 13) $\frac{2}{5}$ pomnożyć przez 3 oznacza, że $\frac{2}{5}$ należy powtórzyć składnikiem 3 razy,

t. j. $\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2+2}{5} = \frac{2.3}{5} = \frac{6}{5}$

$\frac{2}{5} \times 3 = \frac{2.3}{5} = \frac{6}{5}.$

Ztąd **aby ułamek pomnożyć przez całkowitą, należy jego licznik pomnożyć przez tę całkowitą.**

§ 56. **DZIELENIE UŁAMKA PRZEZ CAŁKOWITĄ.** Mamy np. do podzielenia $\frac{5}{11}$ przez 4. Na podstawie głównej własności ułamków (§ 50) możemy licznik i mianownik ułamka mnożyć lub dzielić przez tę samą liczbę i wartość ułamka się nie zmienia. Mnożymy więc licznik i mianownik ułamka danego przez 4, t. j.

$\frac{5}{11} = \frac{5.4}{11.4} = \frac{20}{44}.$

Mamy teraz zamiast 5 części do podzielenia 20 części, lubo mniejszych niż dane, które jednak łatwo już podzielić przez 4.

W rzeczy samej $20 : 4 = 5$, tylko że te 5 części nie są jedynastemi, lecz 44-mi, na piśmie zaś oznacza się to tak:

$\frac{5}{11} : 4 = \frac{5.4}{11.4} : 4 = \frac{20}{44} : 4 = \frac{20:4}{44} = \frac{5}{44},$

więc $\frac{5}{11} : 4 = \frac{5}{44}$ albo $= \frac{5}{11.4}.$

Ztąd, **aby ułamek podzielić przez całkowitą, należy jego mianownik pomnożyć przez tę całkowitą.**

§ **57.** Przytoczone prawidła mnożenia i dzielenia ułamka przez całkowitą bezwarunkowo mogą być stosowane zawsze. W razach zaś wyjątkowych można korzystać i z innych prawideł. I tak:

a) Gdy przy mnożeniu mianownik ułamka dzieli się bez reszty przez mnożnik, to zamiast mnożenia licznika możemy dzielić jego mianownik.

Np. zamiast $\frac{7}{16} . 4 = \frac{\overset{4}{28}}{16} = \frac{7}{4}$

możemy odrazu $\frac{7}{16} : 4 = \frac{7}{16:4} = \frac{7}{4}.$

b) Gdy przy dzieleniu licznik ułamka dzieli się bez reszty przez dzielnik, to zamiast mnożenia mianownika możemy dzielić licznik.

Np. zamiast $\frac{28}{19} : 4 = \frac{\overset{4}{28}}{76} = \frac{7}{19}.$

możemy odrazu $\frac{28}{19} : 4 = \frac{28:4}{19} = \frac{7}{19}.$

Uwaga. Przy mnożeniu i dzieleniu ułamków **całkowite z ułamkami zamieniamy na ułamki niewłaściwe.**

§ **58**. Znając mnożenie i dzielenie ułamka przez całkowitą możemy rozwiązać dwa następujące zadania:

I. **Mając daną całość, trzeba znaleźć daną jej część.**

a) Mamy np. całość 56 i chcemy znaleźć $\frac{4}{7}$ od tych 56.

Cała więc całość ma być podzielona na 7 równych części,

t. j. 7 części = 56

zatem 1 część czyli $\frac{1}{7}$ całości $= 56 : 7 = \frac{56}{7}$

zatem 4 części czyli $\frac{4}{7}$ całości $= \frac{56}{7} . 4 = 8 . 4 = 32.$

b) Mamy np. $\frac{5}{13}$ i chcemy znaleźć $\frac{4}{7}$ od tych $\frac{5}{13}$. Rozumując w sposób powyższy, mamy:

Całość czyli 7 części $= \frac{5}{13}$

1 część czyli $\frac{1}{7}$ całości $= \frac{5}{13} : 7 = \frac{5}{91}$

4 części czyli $\frac{4}{7}$ całości $= \frac{5}{91} . 4 = \frac{20}{91}.$

II. **Mając daną tylko część całości, znaleźć całość.**

a) Mamy np. tylko $\frac{5}{7}$ całości, co stanowi 6. Znaleźć całość t. j. $\frac{7}{7}$

5 części czyli $\frac{5}{7}$ niewiadomej = 6.

1 część czyli $\frac{1}{7}$ niewiadomej $= 6 : 5 = \frac{6}{5}$

a całość t. j. $\frac{7}{7}$ niewiadomej $= \frac{6}{5} . 7 = \frac{42}{5} = 8 \frac{2}{5}.$

b) Mamy np. $\frac{3}{4}$ całości co stanowi $1\frac{7}{10}$, znaleźć całość. Rozumując w sposób powyższy, mamy:

3 części czyli $\frac{3}{4}$ niewiadomej $= 1\frac{7}{10} = \frac{17}{10}$

1 część czyli $\frac{1}{4}$ niewiadomej $= \frac{17}{10} : 3 = \frac{17}{30}$

a całość t. j. $\frac{4}{4}$ niewiadomej $= \frac{17}{30} . 4 = \frac{34}{15}.$

§ **59. MNOŻENIE UŁAMKA PRZEZ UŁAMEK.** Chcemy np. $\frac{4}{11}$ pomnożyć przez $\frac{3}{7}$, to znaczy, że z $\frac{4}{11}$ należy utworzyć nową liczbę tak, jak $\frac{3}{7}$ utworzony z jedności.

Ułamek $\frac{3}{7}$ został utworzony z jedności w ten sposób: $\frac{1}{7}$ część jedności powtórzono składnikiem 3 razy t. j. $\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$. Dla tego należy wziąć 7-mą część od $\frac{4}{11}$, czyli $\frac{4}{11}$ podzielić przez 7 (§ 58. I), otrzymamy $\frac{4}{11 . 7}$ i tę siódmą część powtórzyć składnikiem trzy razy, t. j.

$$\frac{4}{11} . \frac{3}{7} = \frac{4}{11 . 7} + \frac{4}{11 . 7} + \frac{4}{11 . 7} = \frac{4+4+4}{11 . 7} = \frac{4 . 3}{11 . 7}$$

$$\text{więc } \frac{4}{11} . \frac{3}{7} = \frac{4 . 3}{11 . 7} = \frac{12}{77}.$$

Ztąd, **aby ułamek pomnożyć przez ułamek, należy pomnożyć licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik i iloczyn pierwszy podzielić przez drugi.**

§ 60. **MNOŻENIE CAŁKOWITEJ PRZEZ UŁAMEK.** Ponieważ wszelką liczbę całkowitą możemy uważać jako ułamek, którego licznikiem jest owa liczba, a mianownikiem 1, więc mnożenie całkowitej przez ułamek sprowadza się do mnożenia ułamka przez ułamek.

Mamy np. do pomnożenia 5 przez $\frac{3}{7}$, możemy to napisać tak:

$$5 \times \frac{3}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}.$$

Uwaga. Zauważmy, że mnożenie przez ułamek jest to samo, co znalezienie kilku części od całości. Ponieważ część zawsze jest mniejszą od całości, więc i rezultat mnożenia przez ułamek właściwy jest zawsze mniejszy od wielkości danej do pomnożenia. W przykładzie powyższym rezultat mnożenia $2\frac{1}{7}$ jest mniejszy od 5.

§ 61. **DZIELENIE UŁAMKA PRZEZ UŁAMEK.** Mamy np. do podzielenia $\frac{5}{7}$ przez $\frac{3}{8}$, to znaczy trzeba znaleźć iloraz, który pomnożony przez dzielnik $\frac{3}{8}$ dałby dzielną $\frac{5}{7}$.

Nazwiemy ten iloraz przez x (dla nas nieznany), wówczas $\frac{5}{7} : \frac{3}{8} = x$.

Ponieważ dzielna równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz (§ 20), więc mamy: $\frac{5}{7} = \frac{3}{8} \cdot x$ czyli, że mając $\frac{3}{8}$ liczby niewiadomej, możemy znaleźć całkowitą (§ 58. II), a to się tak znajduje:

$$\frac{3}{8} x = \frac{5}{7}$$

$$\frac{1}{8} x = \frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{3 \cdot 7}$$

$$\text{całość } x = \frac{8}{8} x = \frac{5}{3 \cdot 7} \cdot 8 = \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 7} = \frac{40}{21}$$

$$\text{zatem } \frac{5}{7} : \frac{3}{8} = x = \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 7} = \frac{40}{21}$$

t. j. **aby podzielić ułamek przez ułamek, należy licznik dzielnej pomnożyć przez mianownik dzielnika, a mianownik dzielnej pomnożyć przez licznik dzielnika i iloczyn pierwszy podzielić przez iloczyn drugi.**

§ 62. **DZIELENIE CAŁKOWITEJ PRZEZ UŁAMEK.** Ponieważ wszelką liczbę całkowitą możemy uważać jako ułamek, którego licznikiem jest liczba dana, a mianownikiem 1, więc dzielenie całkowitej przez ułamek sprowadza się do dzielenia ułamka przez ułamek.

$$\text{Np. } 6 : \frac{5}{7} = \frac{6}{1} : \frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 5} = \frac{42}{5} = 8\frac{2}{5}$$

$$\text{ztąd } 6 : \frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 7}{5}$$

czyli **przy dzieleniu całkowitej przez ułamek należy całkowitą pomnożyć przez mianownik i iloczyn podzielić przez licznik danego ułamka.**

Uwaga 1. Gdy liczniki albo mianowniki dzielnej i dzielnika mają wspólne czynniki, to najpierw robimy skrócenie, dzieląc albo liczniki, albo mianowniki przez swój dzielnik wspólny, a potem ułamki dzielimy.

Np. $\frac{5}{11} : \frac{5}{7} = \frac{1}{11} : \frac{1}{7} = \frac{7}{11}$

$\frac{5}{12} : \frac{1}{8} = \frac{5}{3} : \frac{1}{2} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Uwaga 2. Zauważmy jeszcze, że dzielenie przez ułamek jest to samo, co znalezienie całości, mając jej część; całość zaś jest większa od swej części. Zatem, dzieląc jakąkolwiek wielkość przez ułamek właściwy, zwiększamy ją.

§ 63. **WYRAŻENIE UŁAMKÓW ZWYCZAJNYCH W POSTACI DZIESIĘTNYCH.** Aby ułamek zwyczajny wyrazić jako liczbę dziesiętną, dzielimy licznik przez mianownik. Jeżeli licznik jest mniejszy od mianownika, to piszemy zamiast części całkowitej zero, a licznik uważamy dalej jako resztę dzielenia, do której przypisujemy 0 i wyznaczamy pierwszą cyfrę dziesiętną; do nowej reszty, jeżeli jest, dopisujemy 0 i wyznaczamy drugą cyfrę dziesiętną i t. d.

Np. $\frac{3}{7}$ można wyrazić przez $3{,}0 : 7 = 0{,}42...$

$\frac{3}{7} = 0{,}42...$

$\frac{3}{40} = 0{,}075$

$$\begin{array}{r} \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 6 \end{array}$$

Teraz pytanie: kiedy przy wyrażeniu ułamków zwyczajnych w postaci dziesiętnych otrzymujemy ułamek skończony, a kiedy nieskończony?

W tym celu mianownik ułamka danego rozkładamy na czynniki pierwsze.

Np. $\frac{3}{40} = \frac{5}{2.2.2.5}$.

Aby mianownik ten zamienić przez jedność z zerami, t. j. aby otrzymać ułamek dziesiętny, należy doń tyle wprowadzić czynników 2 lub 5, żeby liczba **dwójek** i **piątek** była jednakową. W wypadku danym do mianownika należy wprowadzić tylko dwie piątki, lecz mnożąc mianownik przez 5 . 5, należy przez te same czynniki pomnożyć i licznik, żeby się wartość ułamka nie zmieniła, a więc

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2.2.2.5} = \frac{3.5.5}{2.2.2.5.5.5} = \frac{75}{1000} = 0{,}075$$

otrzymujemy ułamek skończony.

Jeżeli zaś ułamek dany jest nieskracalny i do jego mianownika wchodzą inne czynniki niż 2 i 5, to nie możemy przekształcić go tak, żeby mianownik przedstawiał jedność z zerami.

Np $\frac{3}{7} = \frac{3.2.2.5.5}{7.2.2.5.5} = \frac{300}{700} = 0{,}42...$ otrzymujemy ułamek nieskończony.

Ztąd: **a)** Jeżeli mianownik ułamka w postaci nieskracalnej nie zawiera innych czynników pierwszych oprócz 2 i 5, to otrzymamy ułamek dziesiętny **skończony.**

b) Jeżeli mnianownik ułamka w postaci nieskracalnej zawiera inne czynniki niż 2 i 5, to otrzymamy ułamek dziesiętny **nieskończony**.

§ **64. WYRAŻENIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH PRZEZ ZWYCZAJNE.** Aby ułamek dziesiętny skończony wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy pod liczbą dziesiętną, znajdującą się od prawej strony przecinka, podpisać jedność z tylu zerami, ile w danem ułamku jest wszystkich znaków dziesiętnych i następnie skrócić, jeżeli można.

Np. $0{,}075 = \frac{\overset{25}{\cancel{75}}}{1000} = \frac{3}{40}$. $6{,}31 = 6\frac{31}{100}$ i t. p.

Ułamki perjodyczne czyli okresowe.

§ **65.** Wiemy iż dzieląc licznik ułamka nieskracalnego przez mianownik, otrzymujemy ułamek dziesiętny.

Np. $\frac{13}{37} = 13:37 = 0{,}351....$

```
130
111
---
 190
 185
 ---
  50
  37
  --
  13
```

Otrzymaliśmy 351 tysięcznych i resztę 13 tysięcznych,

Dzielenie powyższe można i tak napisać:

$$\frac{13}{37} = \frac{13 \,.\, 1000}{37 \,.\, 1000} = \frac{13000}{37 \,.\, 1000} = \frac{12987 + 13}{37 \,.\, 1000} =$$

$$= \frac{12987}{37 \,.\, 1000} + \frac{13}{37 \,.\, 1000} = \frac{351}{1000} + \frac{13}{37 \,.\, 1000}$$

albo $\frac{13}{37} = 0{,}351 + \frac{13}{1000 \,.\, 37}$.

W dalszym ciągu dzieląc resztę 13 tysięcznych przez 37, otrzymamy 351 miljonowych i znowu resztę 13 miljonowych. Słowem że od dzielenia 13 przez 37 otrzymujemy dziesiętny ułamek nieskończony, to jest $\frac{13}{37} = 0{,}351\ 351\ 351....$, w którym pewna grupa cyfr (351) powtarza się nieskończoną ilość razy,

Taki nieskończony ułamek dziesiętny zowie się **perjodycznym** czyli **okresowym**, a liczba (351) wyrażona przez powtarzającą się grupę cyfr zowie się **okresem**.

Zatem ułamek $\frac{13}{37}$ może być tak przedstawiony:

$\frac{13}{37} = 0{,}351 + \frac{13}{1000 \,.\, 37}$ albo $\frac{13}{37} = 0{,}351\ 351 + \frac{13}{1000000 \,.\, 37}$

Ztąd widzimy, iż z każdym nowym okresem różnica między $\frac{13}{37}$ a pierwszym składnikiem drugiej części staje się coraz mniejszą; raz była $\frac{13}{1000 \,.\, 37}$ drugi $\frac{13}{1000000 \,.\, 37}$, aż nareszcie może się stać mniejszą od wszelkiej wielkości danej. Tak iż z powiększeniem liczby okresów ułamek **okresowy** coraz się bardziej zbliża do wielkości stałej $\frac{13}{37}$, która jest **granicą** wielkości zmiennej 0,351....

Ułamek, w którym okres zaczyna się zaraz za przecinkiem, naz. **prostym**.

Np. $0{,}351\,351\ldots = 0{,}(351)$, albo $3{,}777\ldots = 3{,}(7)$.

Ułamek, w którym okres zaczyna się po jednej lub kilku cyfrach za przecinkiem, naz. **mieszanym**.

Np. $0{,}033\ldots$ albo $4{,}153737\ldots$

§ 66. WYRAŻENIE UŁAMKÓW PERJODYCZNYCH PRZEZ UŁAMKI ZWYCZAJNE. Mamy np. ułamek perjodyczny $0{,}351\,351\ldots$ i chcemy go wyrazić przez ułamek zwyczajny, który wiadomym nam nie jest; nazwiemy go przez x (t. j. granicę do której się zbliża ułamek perjodyczny), wtedy

$$x = 0{,}351\,351\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Przenosząc przecinek do drugiego okresu $351{,}351\,351\ldots$ ułamek okresowy zwiększamy 1000 razy; aby go teraz uczynić równym ułamkowi zwyczajnemu, należy ten ostatni również zwiększyć 1000 razy t. j.

$$1000\,.\,x = 351{,}351351\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Odejmując teraz wyrażenie (I) od (II), otrzymujemy:

$$\begin{array}{rcl} 1000\,.\,x &=& 351{,}351351\ldots\ldots \\ -\;x &=& 0{,}351351\ldots\ldots \\ \hline 1000\;x - x &=& 351{,}000000\ldots\ldots \end{array}$$

Od równych wielkości odejmując równe, reszty otrzymamy równe.

$$\text{czyli } 999\;x = 351$$

$$\text{ztąd } x = \frac{351}{999}$$

$$\text{zatem } 0{,}351351\ldots\ldots = \frac{351}{999},$$

t. j. **ułamek okresowy prosty równa się zwyczajnemu którego licznikiem jest okres, a mianownikiem cyfra 9 powtórzona tyle razy, ile cyfr ma okres.**

Uwaga. Właściwie ułamek $\frac{351}{999}$ jest granicą do której zbliża się nieskończenie ułamek perjodyczny $0{,}351\,351\ldots\ldots$

Weźmiemy teraz ułamek okresowy mieszany. Np. $0{,}74567567\ldots\ldots$

Przenosząc przecinek do drugiego okresu, zwiększamy ten ułamek mieszany 100,000 razy t. j. jeżeli

$$x = 0{,}74567567\ldots\ldots$$

to

$$100000\,.\,x = 74567{,}567567\ldots\ldots \quad \text{(III)}.$$

Przenosząc zaś przecinek do pierwszego okresu, mamy

$$100\,.\,x = 74{,}567567\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Odejmując teraz wyrażenie (IV) od (III), otrzymujemy:

$$\begin{array}{rcl} 100000\;x &=& 74567{,}567567 \\ -\;100\;x &=& 74{,}567567 \\ \hline 100000\;x - 100\;x &=& 74567 - 74 \end{array}$$

$$99900\;x = 74493 \text{ ztąd } x = \frac{74493}{99900},$$

$$\text{zatem } 0{,}74567567\ldots\ldots = \frac{74567 - 74}{99900} = \frac{74483}{99900}$$

t. j. **aby ułamek okresowy mieszany wyrazić jako ułamek zwyczajny, należy od liczby wyrażonej przez cyfry do drugiego okresu odjąć liczbę wyrażoną przez cyfry do pierwszego okresu i resztę podzielić przez liczbę złożoną z cyfry 9 tyle razy, ile cyfr ma okres, dopisując tyle zer ile cyfr do pierwszego okresu.**

Te same prawidła można otrzymać drogą rozumowania następującego:

Zauważymy że:

$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}111\ldots = 0{,}(1).$

$\frac{1}{99} = 1 : 99 = 0{,}0101\ldots = 0{,}(01).$

$\frac{1}{999} = 1 : 999 = 0{,}001001\ldots = 0,\,(001).$

. . . .

I tak

$0{,}(1) = \frac{1}{9}$

$0{,}(01) = \frac{1}{99}$

$0{,}(001) = \frac{1}{999}$

Ułamek okresowy prosty, który za okres ma jedynkę albo jedynkę z poprzedzającemi zerami, równa się takiemu ułamkowi zwyczajnemu, który za licznik ma 1, a za mianownik cyfrę 9 powtórzoną tyle razy, ile cyfr w okresie ułamka danego.

(I). Jeżeli chcemy zamienić np. 0,(351) na ułamek zwyczajny, dzielimy go przez okres 351, otrzymujemy iloraz 0,001. A że dzielna 0,(351) równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz, zatem $0{,}(351) = 351 \cdot 0{,}(001) = 351 \cdot \frac{1}{999} = \frac{351}{999}$, gdyż $0{,}(001) = \frac{1}{999}$

Tak samo $0{,}(567) = 567 \cdot 0{,}(001) = \frac{567}{999}$

$0{,}(4) = 4 \cdot 0{,}(1) = \frac{4}{9}$ i t. d.

(II). Aby zamienić ułamek okresowy mieszany 0,74(567) przez ułamek zwyczajny, przenosimy najpierw przecinek do pierwszego okresu i otrzymamy:

$$74{,}(567) = 74\tfrac{567}{999}, \text{ gdyż } 0{,}(567) = \frac{567}{999}.$$

Lecz liczbę $74\frac{567}{999}$ należy zmniejszyć przez 100,

przez przeniesienie bowiem przecinka powiększyliśmy ją tyleż razy, zatem:

$$0{,}74(567) = 74\tfrac{567}{999} : 100 = \frac{74 \cdot 999 + 567}{999 \cdot 100} = \frac{74493}{99900}$$

wynik jaki otrzymaliśmy wyżej przez odejmowanie cyfr do pierwszego okresu.

Ułamki przybliżone.

§ **67**. Przy dzieleniu liczb otrzymujemy czasami iloraz z nieskończoną liczbą cyfr dziesiętnych.

Np. $2 : 7 = 0{,}285714285714\ldots$

Przy rachunkach musimy się ograniczać tylko pewną liczbą cyfr dziesiętnych, gdyż poprostu nie mamy możności wykonania rachunku nad liczbą nieskończoną cyfr.

Ułamki dziesiętne, zawierające nie wszystkie, lecz tylko kilka pierwszych cyfr dziesiętnych zowią się ułamkami **przybliżonymi**.

Naprzykład: ułamek 0,28 jest przybliżonym danego 0,285714285714...

Na ułamkach przybliżonych musimy poprzestać w pewnych razach nawet wtedy, kiedy ułamek dziesiętny jest ułamkiem skończonym.

Naprz.: Kupiono 100 funtów herbaty za rb. 256 i kop. 75 czyli za 256,75 rb. Ile też kosztuje jeden funt herbaty?

Jeżeli 100 funtów kosztują 256,75 rb., to 1 funt kosztuje 2,5675 rub.

Lecz jedna z najdrobniejszych monet (rosyjskich) w obiegu będących jest setna część rubla czyli kopiejka, więc za 1 funt herbaty możemy zapłacić tylko przybliżoną jej wartość, t. j. 2,56 albo 2,57 rb.

Aby się przekonać, która z tych przybliżonych wartości jest dokładniejszą, więcej zbliżoną do rzeczywistej 2,5675 rb., należy wziąć różnicy pomiędzy przybliżonemi wartościami a rzeczywistą, t. j.

I) $2{,}5675 - 2{,}56 = 0{,}0075$.

II) $2{,}57 - 2{,}5675 = 0{,}0025$.

Widzimy ztąd, że w drugim wypadku różnica jest mniejszą, zatem ułamek 2,57 jest bardziej zbliżony do rzeczywistego niż ułamek 2,56. Różnice zaś 0,0075 i 0,0025 są mniejsze niż 0,01, a większe niż 0,001, a więc dokładność ułamka przybliżonego 2,57 albo 2,56 równa się 0,01.

Przy rachunkach z ułamkami nieskończonemi stopień przybliżenia czyli dokładność oznacza się naprzód. Liczba cyfr dziesiętnych dla ułamka przybliżonego zależy od stopnia dokładności: jeżeli ta będzie 0,01, bierzemy **dwie** cyfry, jeżeli 0,001 — **trzy** i t. d. Przy tem, jeżeli pierwsza z cyfr odrzuconych jest 5 lub większa od 5, to ostatnią cyfrę ułamka przybliżonego **powiększamy o jedność**.

Np.: Mamy ułamek nieskończony

0,285714285714...

Ułamek przybliżony z dokładnością 0,001 będzie 0,286 (ostatnia cyfra 5 powiększona o 1). Ułamek przybliżony z dokładnością 0,0001 będzie 0,2857 (ostatnia cyfra się nie powiększa, gdyż po niej następuje cyfra 1 mniejsza niż 5).

Stosunki i proporcye.

§ 68. **STOSUNKI.** Porównanie dwóch liczb między sobą zowie się **stosunkiem**. Jeżeli liczby dane porównywamy przez odejmowanie, otrzymujemy **stosunek arytmetyczny**, jeżeli zaś porównywamy przez dzielenie dwóch liczb—otrzymujemy **stosunek geometryczny**, który w geometryi ma duże zastosowanie i dla tego tylko o stosunku geometrycznym mówić będziemy.

Pierwsza liczba stosunku zowie się **poprzednikiem**, druga — **następnikiem**, a wynik z ich porównania — **wykładnikiem stosunku**.

Poprzednik w stosunku geometrycznym odpowiada dzielnej, następnik — dzielnikowi, a wykładnik ilorazowi.

Dwa stosunki, w których następnik jednego jest poprzednikiem drugiego i nawzajem, nazywają się **odwrotnymi**; iloczyn ich wykładników równa się 1.

Np.: $\left.\begin{array}{r} 15 : 5 = 3 \\ 5 : 15 = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ iloczyn $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Wogóle dwie liczby, których iloczyn równa się 1, są **odwrotnościami** jedna drugiej, jak $\frac{7}{5}$ i $\frac{5}{7}$.

§ 69. **WŁASNOŚCI STOSUNKU GEOMETRYCZNEGO.** Ponieważ stosunek geometryczny jest to dzielenie jednej liczby przez drugą, więc własności stosunku np.

poprz. następ. wykł.

24 : 6 = 4

w zupełności odpowiadają własnościom dzielenia (§ 34):

a) Poprzednik równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik, t. j.

$$24 = 6 \,.\, 4.$$

Następnik zaś równa się poprzednikowi podzielonemu przez wykładnik, t. j.

$$6 = 24 : 4.$$

b) Wykładnik stosunku się nie zmieni, jeżeli poprzednik i następnik pomnożymy albo podzielimy przez tę samą liczbę, t. j.

$$24 : 6 = 4$$
$$(24 \,.\, 2) : (6 \,.\, 2) = 4$$
$$(24 : 2) : (6 : 2) = 4$$

c) Jeżeli poprzednik pomnożymy albo następnik podzielimy przez jakąkolwiek liczbę, to wykładnik mnoży się przez tę samą liczbę

$$24 : 6 = 4$$
$$(24 \,.\, 2) : 6 = 8$$
$$24 : (6 : 2) = 8$$

Jeżeli poprzednik podzielimy albo następnik pomnożymy przez jakąkolwiek liczbę, to wykładnik dzieli się przez tę samą liczbę

$$(24 : 2) : 6 = 2$$
$$24 : (6 \,.\, 2) = 2$$

d) Jeżeli do poprzednika dodamy następnik, to wykładnik zwiększy się o 1.

Np. $24 : 6 = 4$

$(24 + 6) : 6 = 5$

Jeżeli od poprzednika odejmiemy następnik, to wykładnik zmniejszy się o 1.

Np. $24 : 6 = 4.$

$(24 - 6) : 6 = 3.$

§ **70. PROPORCYE.** Stosunki mające ten sam wykładnik są równe, jak:

$$\frac{24}{6} = 4 \text{ i } \frac{32}{8} = 4.$$

Połączenie znakiem równania dwóch równych stosunków zowie się **proporcyą**.

Np. $\frac{24}{6} = \frac{32}{8}$ albo $24 : 6 = 32 : 8.$

Cztery liczby wtedy tworzą proporcyą czyli są proporcyonalne, kiedy stosunek dwóch z nich równa się stosunkowi dwóch drugich.

Proporcya zatem ma cztery wyrazy: dwa poprzedniki (24 i 32) i dwa następniki (6 i 8). Oprócz tego, wyrazy pierwszy i czwarty proporcyi zowią się **skrajnymi**, drugi i trzeci — **średnimi.**

Główna własność proporcyi: **iloczyn skrajnych równa się iloczynowi średnich**.

Mamy np. proporcyą

$$24 : 6 = 32 : 8.$$

Wykładnik dla obydwóch stosunków jest 4. Na podstawie własności stosunków mamy:

$$24 = 6 . 4 \text{ i } 32 = 8 . 4.$$

Weźmiemy teraz iloczyn skrajnych 24 . 8 i iloczyn średnich 6 . 32 i zastąpimy 24 i 32 przez równe wielkości.

$$\left.\begin{array}{r} 24 . 8 = (6 . 4) . 8 \\ 6 . 32 = 6 . (8 . 4) \end{array}\right\}$$ Drugie części tych równań 6 . 4 . 8 są jednakowe więc i pierwsze muszą być równe, t. j. 24 . 8 = 6 . 32.

§ 71. **ROZWIĄZANIE PROPORCYI.** Własność główna proporcyi daje nam możność znalezienia jednego wyrazu proporcyi, jeżeli trzy inne są wiadome.

Np. $x : 6 = 32 : 8$

$$8 . x = 6 . 32$$

$$x = \frac{6 . 32}{8} = 24$$

t. j. **niewiadomy skrajny równa się iloczynowi średnich podzielonemu przez wiadomy skrajny.**

Jeżeli zaś niewiadomy średni, np.

$$24 : 6 = x : 8$$

$$6 . x = 24 . 8$$

$$\text{to } x = \frac{24 . 8}{6} = 32$$

t. j. **niewiadomy średni równa się iloczynowi skrajnych podzielonemu przez wiadomy średni.**

§ 72. Z głównej własności proporcyi wynika: jeżeli mamy iloczyn dwóch liczb równy iloczynowi drugich dwóch liczb, to z nich można utworzyć proporcyę, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego — za wyrazy średnie.

Np. $2 . 10 = 5 . 4$
więc $2 : 5 = 4 : 10.$

Jeżeli proporcyę mamy prawidłową, to wyrazy jej możemy przestawiać: skrajny ze skrajnym, średni ze średnim otrzymamy 8 proporcyj, w których główna własność zostanie zachowaną, t. j. w każdej proporcyi iloczyn skrajnych równa się iloczynowi średnich,

$$\text{jak } \left.\begin{array}{r} 2 : 5 = 4 : 10 \\ 2 : 4 = 5 : 10 \\ 5 : 2 = 10 : 4 \\ 5 : 10 = 2 : 4 \\ 4 : 2 = 10 : 5 \\ 4 : 10 = 2 : 5 \\ 10 : 5 = 4 : 2 \\ 10 : 4 = 5 : 2 \end{array}\right\} 2 . 10 = 5 . 4.$$

§ **73.** Jeszcze niektóre własności proporcyj:

a) Jeżeli w proporcyi wyrazy jednego lub drugiego stosunku wyrażone są przez jednakowe liczby mianowane, to można odrzucić nazwę jedności.

Np.: 24 stóp : 6 stóp = 32 funty : 8 funtów możemy napisać 24 : 6 = 32 : 8.

b) Możemy mnożyć lub dzielić jednocześnie przez tę samą liczbę każdy wyraz skrajny z każdym średnim, proporcya pozostanie prawidłową.

$$24 : 6 = 32 : 8$$

$$(24 : 2) : 6 = (32 : 2) : 8$$

$$12 : 6 = 16 : 8$$

$$12 . 8 = 6 . 16.$$

c) Z kilku proporcyj, z równymi wykładnikami, przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie odpowiednich wyrazów otrzymujemy nową proporcyą, która zowie się **złożoną**.

Np. mamy dwie proporcye:

$$24 : 6 = 32 : 8$$
$$20 : 5 = 8 : 2.$$

Złożone z tych proporcyj są:

1) $(24 + 20) : (6 + 5) = (32 + 8) : (8 + 2)$.
2) $(24 - 20) : (6 - 5) = (32 - 8) : (8 - 2)$.
3) $(24 . 20) : (6 . 5) = (32 . 8) : (8 . 2)$.
4) $\frac{24}{20} : \frac{6}{5} = \frac{32}{8} : \frac{8}{2}$.

Wszystkie te złożone proporcye są prawidłowe, gdyż w każdej iloczyn skrajnych równa się iloczynowi średnich.

d) Proporcya która się otrzymuje od danej za pomocą pewnych działań arytmetycznych, zowie się **pochodną**.

Np. $\frac{24}{6} = \frac{32}{8}$ proporcya dana.

Dodając i odejmując od niej 1, otrzymujemy

$$\frac{24}{6} \pm 1 = \frac{32}{8} \pm 1.$$

$$\frac{24 \pm 6}{6} = \frac{32 \pm 8}{8} \text{ proporcya pochodna.}$$

Przestawiając w niej wyrazy średnie, otrzymujemy także proporcyę pochodną

$$\frac{24 \pm 6}{32 \pm 8} = \frac{6}{8} \text{ albo } = \frac{24}{32}, \text{ albowiem}$$

z proporcyi danej $\frac{6}{8} = \frac{24}{32}$.

Ostatnia pochodna oznacza, że **suma lub różnica stosunku pierwszego tak się ma do sumy lub różnicy stosunku drugiego, jak się mają do siebie następniki lub poprzedniki proporcyi danej.**

e) Jeżeli w proporcyi danej $24 : 6 = 32 : 8$ przestawimy wyrazy skrajne, t. j.

$$8 : 6 = 32 : 24$$

i weźmiemy pochodną

$$\frac{8 \pm 6}{6} = \frac{32 \pm 24}{24}$$

i znowu przestawiamy skrajne

$$\frac{32 \pm 24}{8 \pm 6} = \frac{24}{6},$$

to otrzymujemy taką regułę:

Suma lub różnica poprzedników tak się ma do sumy lub różnicy następników, jak którykolwiek ze stosunków danych.

Jeżeli więc mamy szereg stosunków równych jak

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \ldots.$$

to $$\frac{1 + 3 + 4 + 5 + \ldots}{2 + 6 + 8 + 10 + \ldots} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \ldots.$$

§ 74. **O PROPORCYONALNOŚCI.** Jeżeli zwiększając lub zmniejszając wartość wielkości jednego rodzaju, tyleż razy zwiększają się lub zmniejszają wartości drugiego rodzaju, to wielkości takie zowią się **proporcyonalnemi**.

Np.: **Robocizna i zapłata** są wielkości proporcyonalnej przy stałej cenie: im więcej jakiejś roboty zrobiono, tem większa należy się zapłata.

Czas i **przestrzeń** przy ruchu jednostajnym są wielkościami również proporcyonalnemi: w czasie dłuższym przebywa się przestrzeń większą.

Jeżeli np. pociąg na godzinę robi 40 wiorst, to w ciągu 3-ch godzin zrobi wiorst trzy razy więcej, czyli 120 wiorst.

Wielkości zowią się **odwrotnie proporcyonalnemi**, jeżeli zwiększając lub zmniejszając wartość wielkości jednego rodzaju, a wartość wielkości drugiego rodzaju jednocześnie zmniejsza się lub zwiększa tyleż razy.

Np. Zapas żywności wystarcza na 12 dni dla pewnej liczby osób; gdy liczba osób zostanie podwojoną lub potrojoną, to przy tych samych porcjach, zapasu tego starczy na liczbę dni mniejszą dwa lub trzy razy. Tu **liczba dni** jest odwrotnie proporcyonalną do **liczby osób**; t. j. liczba dni jest tem mniejszą, im liczba osób wiekszą.

Pewna liczba robotników może ukończyć określoną robotę w ciągu 20 dni; gdy liczbę robotników podwoimy lub potroimy, to tę samą robotę i przy tych że warunkach pracy robotnicy ci ukończą prędzej niż w ciągu 20 dni, t. j. dla podwojonej liczby robotników dni potrzeba dwa razy mniej, dla potrojonej — trzy razy mniej. Tu liczba dni jest odwrotnie proporcyonalna do liczby robotników.

Szerokość i **długość** materyi na tę samą ilość

ubrania są wielkościami odwrotnie proporcyonalnemi: w danym wypadku im szerokość jest mniejsza, tem długość powinna być większą.

Reguła trzech.

§ 75. **OKRESLENIE REGUŁY TRZECH.** Jeżeli mamy nieparzystą liczbę danych i jedną niewiadomą, i jeżeli między niemi istnieją zależność wprost lub odwrotnie proporcyonalna, to sposób znalezienia niewiadomej przy pomocy trzech danych przedstawia **zwyczajną regułę trzech**; sposób znalezienia niewiadomej przy pomocy 5, 7 i t. danych przedstawia **regułę trzech składaną** albo **złożoną**.

Zadania na regułę trzech można rozwiązywać albo za pomocą proporcyj, albo metodą sprowadzania do jedności.

ZADANIE NA REGUŁĘ TRZECH PROSTĄ. 24 robotników wykopali rów w ciągu 21 dni. W ciągu ilu dni ten sam rów wykopią 36 robotników?

Wypisujemy warunki zadania:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dla 24 robot. potrzeba 21 dni}\\ \text{,, \ 36 \ ,, \ \ ,, \ \ } x \text{ ,,}\end{array}\right\}\ (A)$$

Niewiadoma liczba dni $= x$.

Przedewszystkiem roztrzygamy pytanie: czy x jest większe lub mniejsze od jednorodnej z nim liczby 21 dni?

Oczywista rzecz, iż dla wykopania jednego i tegoż rowu 36 robotników będą potrzebowali mniej dni, niż 24 robotników, zatem, x tyle razy jest mniejsze od 21, ile razy 24 jest mniejsze od 36.

Piszemy więc proporcyę:

$$x : 21 = 24 : 36$$

$$x = \frac{21 \cdot 24}{36} = 14 \text{ dni (odpowiedź).}$$

Rozwiązanie zadania powyższego sposobem **sprowadzenia do jedności.**

Wypisujemy warunki zadania *(A)*:

24 robot. — 21 dni
36 „ — x „

Ztąd widzimy, że gdyby w drugim wypadku 24 robotników pracowało, mielibyśmy x równe 21 dniom; gdyby zaś zamiast 24 robotników był tylko jeden robotnik: to potrzebowałby dni 24 razy więcej, t. j. 21 . 24 dni. A ponieważ zamiast jednego robotnika mamy ich 36, więc dla wykopania tego samego rowu potrzeba dla nich dni 36 razy mniej, niż dla jednego robotnika,

$$\text{t. j. } x = \frac{21 \cdot 4}{36} = 14 \text{ dni.}$$

§ 76. ZADANIE NA REGUŁĘ TRZECH ZŁOŻONĄ.

24-ch robotników pracując 8 godzin dziennie mogą wykopać rów w ciągu 21 dni. Ile dni potrzeba do wykopania tegoż rowu dla 36 robotników, którzy będą pracowali po 4 godziny dziennie?

Wypisujemy warunki zadania:

Dla 24 robot. — po 8 godzin 21 dni
„ 36 „ — „ 4 „ x „

Rozwiązujemy sposobem sprowadzenia do jedności i rozumujemy w ten sposób: gdyby w drugim wypadku było 24 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, to mielibyśmy $x = 21$ dni. Gdyby w tym drugim wypadku był tylko jeden robotnik, to x byłoby 24 razy większe, t. j. 21 . 24. Ponieważ zaś robotników jest 36, a więc potrzeba dla nich 36 razy mniej dni dla wykończenia tej samej roboty, to jest $\frac{21 \cdot 24}{36}$. dni przy 8 godzinach pracy dziennie; przy 1 godzinie pracy dni potrzeba 8 razy więcej, to jest $\frac{21 \cdot 24}{36} \cdot 8$ .dni, przy 4 zaś godzinach pracy dziennie potrzeba dni 4 razy mniej, t. j.

$$x = \frac{21 \cdot 24 \cdot 8}{36 \cdot 4} = 28 \text{ dni (odpowiedź).}$$

Widzimy ztąd, iż, rozumując logicznie, za pomocą metody sprowadzania do jedności wszystkie zadania odnoszące się do reguły trzech bardzo łatwo i prędko się rozwiązują.

Uwaga. Aby sprawdzić rozwiązanie zadania, należy zmienić jego treść, t.j. zamiast niewiadomej wstawić znalezioną jej wielkość, a za niewiadomę przyjąć którąkolwiek z danych i następnie rozumować, jak wyżej:

x robot. — 8 godz. — 21 dni
36 „ — 4 „ — 28 „

$$x = \frac{36 \cdot 28 \cdot 4}{21 \cdot 8} = 24 \text{ robot. (odpowiedź).}$$

Dla wprawy jeszcze jedno **zadanie**:

15 mężczyzn i 12 kobiet, pracując codziennie po $10\frac{1}{2}$ godzin, uprzątnęli z pola zboże przez 12 dni.

W ciągu **ilu dni** 21 mężczyzn i 8 kobiet, pracując codziennie 8,4 godzin uprzątną zboże z pola, długość którego tak się ma do długości pierwszego, jak $0{,}3 : \frac{1}{5}$ a szerokość tak się ma do szerokości pierwszego, jak 0,51 : 0,5(6), — jeżeli przytem wiadomo, że siła mężczyzny tak się ma do siły kobiecej, jak 0,2(6) : 0,1(9)?

Rozwiązanie. Zastępując ułamki dziesiętne i okresowe przez zwyczajne, wypisujemy warunki zadania:

$$\left.\begin{array}{llllll} 15 \text{ mż. } & 12 \text{ kb. } \frac{21}{2} & \text{gdzie } 12 \text{ dn } & \frac{1}{5} \text{ dłg.} & \frac{51}{90} \text{szer.} \\ 21 \;" & 8 \;" \;\frac{42}{5} \;" & x \;" & \frac{3}{10} \;" & \frac{51}{100} \;" \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{siła męż. : siła kob.} = \\ = \frac{24}{90} : \frac{18}{90}\end{array}$$

Ostatnia proporcya daje nam możność wyrażenia siły mężczyzny przez siłę kobiety; w rzeczy samej s. męż. : s. kob. $= \frac{24}{90} : \frac{18}{90}$, albo s. męż. : s. kob.—24 : 18, ztąd 18 s. męż. = 24 s. kob. i 1 s. męż. $= \frac{24}{18}$ s. kob. $= \frac{4}{3}$ s. kob.

Wnosimy to do warunków zadania, wtedy:

15 męż. $= \frac{4}{3} \cdot 15 = 20$ kob., a jeszcze 12, razem 32 kob.
21 męż. $= \frac{4}{3} \cdot 21 = 28$ kob., a jeszcze 8, razem 36 kob.
co upraszcza znacznie rozwiązanie zadania

$$\begin{array}{llllll} 32 \text{ kob } & \frac{21}{2} \text{ godz } & 12 \text{ dn. } & \frac{1}{5} \text{ dł. } & \frac{51}{90} \text{ szer.} \\ 36 \;" & \cdot \frac{42}{5} \;" & x \;" & \frac{3}{10} \;" & \frac{51}{100} \;" \end{array}$$

Sprowadzając do jedności, mamy:

$$x = \frac{12 \cdot 32 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 51}{36 \cdot 2 \cdot 42 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 51 \cdot 100} = 18 \text{ dni.}$$

Uwaga. Jeżeli do warunków zadania wchodzą ułamki, to przy rozumowaniu, w razach wątpliwych, ułamki chwilowo zastępujemy przez liczby całkowite.

Reguła łańcuchowa.

§ 77. Zadania na regółę trzech, zwłaszcza te, gdzie każde dwie wielkości sobie odpowiadające (przy zamianie miar jednego kraju na miary drugiego), są wielkościami **wprost proporcyonalnemi**, mogą być rozwiązywane bardzo szybko za pomocą tak zwanej metody **łańcuchowej**, która polega na tem, że dane liczby zadania wypisujemy w dwóch kolumnach i to w taki sposób: w pierwszej kolumnie na początku piszemy niewiadomą x, a w drugiej wielkość jej odpowiadającą, następnie każdy wiersz pierwszej kolumny rozpoczyna się od wartości tej samej wielkości, jaką się kończy wiersz poprzedni. Utworzy się w ten sposób łańcuch równań gdzie ostatni wiersz kończy się tą samą wartością, jaka jest wartość niewiadomej, od której się łańcuch rozpoczyna. Opuszczając nazwę przy liczbach, mnożymy oddzielnie wszystkie liczby kolumny pierwszej i oddzielnie — kolumny drugiej, otrzymamy dwa iloczyny: do pierwszego wchodzi niewiadoma x, a do drugiego nie wchodzi. Zatem, **niewiadoma x równa się iloczynowi liczb, do którego nie wchodzi niewiadoma, podzielonemu przez iloczyn liczb, gdzie ta niewiadoma wchodzi.**

Zadanie. Ile marek kosztuje 1 kilo herbaty, jeżeli w Londynie 1 funt herbaty kosztuje 20 fenigów i jeżeli 5 kilo = 11 funt., 2 pensy = 17 fenigów i 100 fenigów = 1 marek?

Rozwiąz. Wypisujemy wszystkie liczby zadania w dwóch kolumnach w sposób wyżej wskazany, i rozumowanie rozpoczynamy z dołu.

x marek	=	1 kilo
5 kilo	=	11 funtów
1 funt	=	20 pensów
2 pensy	=	17 fenigow
100 fenig.	=	1 marek

$$x \,.\, 5 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 100 = 1 \,.\, 11 \,.\, 20 \,.\, 17 \,.\, 1.$$

$$x = \frac{1 \,.\, 11 \,.\, 20 \,.\, 17 \,.\, 1}{5 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 100} = \frac{374}{100} = 3{,}74.$$

x = 3,74 marek (odpowiedź).

Uwaga Gdy do reguły łańcuchowej wchodzi ułamek, to licznik pozostawiamy na miejscu, a mianownik piszemy w kolumnie przeciwnej. Przed wypisaniem iloczynów można robić skrócenia, zakreślając liczby równe w jednej i drugiej kolumnie. Handlowcy przy obliczaniu towarów, zamianie miar, wag i monet jednego kraju na miary drugiego najchętniej posługują się regułą łańcuchową. Oczywiście, iż podobne zadania mogą być rozwiązywane jak zwykle zadania na regułę trzech, w inny tylko sposób warunki zadania potrzeba tylko wypisać.

Np. **Zadanie**. Ile też w Lipsku potrzeba zapłacić za 1000 kg. pszenicy, jeżeli 1 ćwierć w Rosyi kosztuje $13^1/_2$ rb.; 1 ćwierć = $9^3/_4$ pud.; 122 ℔ rosyjsk. = 50 kg.; 100 rb. = 375 marek?

Rozwiązanie:

x mar.	=	1000 kg.	albo	x mar.	=	1000 kg.
59 kg.	=	122 ℔ ros.		50 kg.	=	122 ℔
40 ℔ ros.	=	1 pud.		40 ℔	=	1 pud.
$9^3/_4$ pud.	=	1 ćw.		39 pud.	=	1 . 4 ćw.
1 ćw.	=	$13\frac{1}{2}$ rb.		1 . 2 ćw.	=	27 rb.
100 rub.	=	275 mar.		100 rb.	=	275 mar.

$$x = \frac{1000 \,.\, 122 \,.\, 4 \,.\, 27 \,.\, 285}{50 \,.\, 40 \,.\, 39 \,.\, 2 \,.\, 100} = \frac{6039}{26} = 232.27 \text{ m.}$$

Reguła procentu.

§ 78. **OKREŚLENIE PROCENTU**. Przy rachunkach często mamy do czynienia z powiększeniem lub zmniejszeniem nie całej liczby, lecz każdej jej setki.

Procentem **(pro centum)** zowie się jedna setna lub kilka setnych części liczby danej. Np $\frac{1}{100}$ liczby 27 jest $27 \,.\, \frac{1}{100} = 0{,}27$ stanowi jeden procent. Albo $\frac{5}{100}$ liczby 27 jest $27 \,.\, \frac{5}{100} = \frac{135}{100} = 1{,}35$ stanowi pięć procent liczby 27. — Znak procentu $^0/_0$.

Czasami procentem zowiemy liczbę jedności, która wchodzi w skład setki jednakowych jedności. Np. Na 100 jedności wagi powietrza jest $79^0/_0$ azotu i $21^0/_0$ tlenu.

Przy zadaniach na regułę procentu spotykamy się z terminologją handlową:

Rabat = ustępstwo na rzecz kupującego.

Prowizya lub **komisowe** = wynagrodzenie za wykonanie pewnego zlecenia.

Kurtaż = wynagrodzenie maklerowi giełdowemu za pośrednictwo w interesie.

Dywidenda = zysk z przedsiębiorstwa, przypadający do podziału.

Ażjo = różnica przy zamianie monety złotej na inne.

Tara = waga opakowania towaru.

Netto = waga towaru bez opakowania (lub wartość towaru bez procentu).

Brutto = Netto + Tara (lub wartość towaru z procentem).

W praktyce reguła procentu stosuje się bardzo często, największe zaś ma zastosowanie przy załatwianiu obrotów handlowych i pieniężnych.

Pieniądze, które się puszcza w obieg, zowią **kapitałem początkowym**; zysk, jaki się otrzymuje od 100 rubli przez jeden rok, stanowi tak zwaną **stopę procentową**, a zysk otrzymany od całego kapitału zowią **odsetkami** albo **interesem**.

Kapitał początkowy złożony z odsetkami nazywa się **kapitałem zwiększonym**, kapitał zaś początkowy zmniejszony o sumę odsetek zowią **kapitałem zmniejszonym**.

§ **79.** Do zadań na regułę procentu wchodzą cztery wielkości: **kapitał**, **stopa procentowa**, **odsetki** i **czas**.

Zadania więc na regułę procentu mogą być czterech rodzajów, stosownie do tego która z wielkości powyższych jest niewiadomą:

a) Niewiadome odsetki.

Zadanie. Jaki dochód będziemy mieli od kapitału rubli 3600, oddanego na $5\frac{1}{2}\%$ po upływie 2 lat i 8 miesięcy?

Rozw. Wypisujemy warunki zadania w dwóch wierszach jak przy regule trzech, zamieniając lata na miesiące albo miesiąc na lata.

Kapitał 100 rb. — 12 mies — $5\frac{1}{2}$ rb.

„ 3600 „ — 32 „ — x

Zastosowując sposób sprowadzenia do jedności, mamy

$$x = \frac{11 \cdot 3600 \cdot 32}{2 \cdot 100 \cdot 12} = \frac{52800}{100} = 528 \text{ rb}$$

Uwaga. W praktyce życiowej najczęściej obliczamy odsetki od kapitału, w tym celu należy kapitał pomnożyć przez stopę procentową i iloczyn podzielić przez 100. Np. W sklepie sprzedano towaru za rb. 86 i kop. 54 z ustępstwem $7{,}5\%$. Ile należy pobrać?

Rozw. $\frac{86{,}45 \cdot 7{,}5}{100} = \frac{648{,}375}{100} = 6{,}48$ w przybliżeniu). Należy się więc $86{,}45 - 6{,}48 = 79{,}97$ rb.

b) Niewiadomy kapitał.

Zadanie. Jaki kapitał należy oddać na $5\frac{1}{2}\%$, aby po upływie 2 lat i 8 miesięcy otrzymać dochodu 528 rubli?

Rozw. Kapitał 100 rb. — 12 mies. — $\frac{11}{2}$ rb.

„ x — 32 „ — 528 „

Gdyby w drugim wypadku liczba miesięcy i odsetek była taka sama, co w pierwszym, więc i kapitał powinien być 100 rubli. Gdyby zamiast 12 miesięcy pozostawał w obiegu kapitał tylko jeden miesiąc, to, aby otrzymać tę samą liczbę odsetek kapitał potrzeba mieć 12 razy większy, a jeżeli będzie w obiegu 32 miesięcy—kapitał potrzeba mieć mniejszy 32 razy.

Zatem $x = \frac{100 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 528}{32 \cdot 11} = 100 \cdot 3 \cdot 12 = 3600$ rb.

c) Niewiadoma stopa procentowa.

Zadanie. Na jaki procent należy oddać kapitał 3600 rubli, aby po upływie 2 lat i 8 miesięcy otrzymac dochodu 528 rubli?

Rozw. Kapitał 3600 rb. — 32 mies. — 528 rb.

„ 100 „ — 12 „ — x

$$x \frac{528 \cdot 100 \cdot 12}{3600 \cdot 22} = \frac{11 \cdot 100}{100 \cdot 2} = \frac{11}{2} \text{ rb.}$$

d) Niewiadomy czas.

Zadanie. Po upływie jakiego czasu kapitał 3600 rubli, oddany na $5^1/_2{}^0/_0$ da 528 rubli odsetek?

Rozw. Kapitał 100 rb — 12 mies. — $\frac{11}{2}$ rb.

„ 3600 „ — x „ — 528 „

Gdyby w drugim wypadku dane były te same co w pierwszym, to i czasu byłoby potrzeba 12 miesięcy; jeżeli zaś kapitał w drugim wypadku będzie 1 rubel, to aby mieć te same odsetki co od 100 rubli, czasu potrzeba 100 razy więcej. przy kapitale 3600 rubli — czasu potrzeba mniej 3600 razy. Aby otrzymać odsetek $\frac{11}{2}$ rubli czasu potrzeba 12 miesięcy, żeby zaś otrzymać odsetek 1 rubel, czasu potrzeba

mniej $\frac{11}{2}$ razy, ażeby otrzymać odsetek 528 rubli,— czasu potrzeba więcej 528 razy,

t. j. $x = \frac{12 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 528}{3600 \cdot 11} = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ miesięcy.

§ **80**. Czasami się zdarza, iż mając kapitał zwiększony, szukamy pierwotny.

Zadanie. Jaki kapitał był oddany na $5^1/_2{}^0/_0$, jeżeli po 2 latach i 8 miesiąc, urósł do 4128 rubli?

Rozw. Odsetki od kapitału 100 rubli po upływie 32 miesięcy wynoszą $\frac{11 \cdot 32}{2 \cdot 12} = \frac{44}{4} = 14\frac{2}{3}$.

Zatem, kapitał 100 rb. po upływie 32 mies. — $114\frac{2}{3}$ rb.

„ x „ 4128 „

$$x = \frac{100 \cdot 3 \cdot 4128}{344} = 3600 \text{ rb.}$$

Uwaga. Jeżeli po upływie roku odsetki doliczamy do kapitału i następnie obliczamy procent od kapitału razem z odsetkami, to procent taki zowie się **składanym**, lecz zadania tego rodzaju daleko łatwiej rowiązują się sposobem algebraicznym, niż arytmetycznym.

Reguła dyskonta weksli.

§ **81. OKREŚLENIA. Wekslem** zowie się zobowiązanie pieniężne, na mocy którego osoba podpisująca weksel — czyli dłużnik (debitor), jest obowiązany w oznaczonym terminie zapłacić pewną sumę osobie, która otrzymuje weksel (kredytor). Suma, na którą wystawiono weksel, zowie się **walutą**. Kwota, jaką się potrąca z waluty przy sprzedaży weksla przed terminem płatności, zowie się **dyskontem**, a suma, za jaką się kupuje weksel — **ceną weksla**. W ten sposób waluta = cena weksl. + dyskont. Jeżeli kredytor chce spieniężyć weksel przed terminem płatności, to może się udać do banku lub do innej osoby z propozycyą dyskontowania weksla i, jeżeli weksel, a raczej osoby, które podpisały weksel, przedstawiają gwarancyę wypłacalności, to bank zazwyczaj weksel przyjmuje i wypłaca sumę, jaka wypadnie po potrąceniu z waluty odsetek za czas pozostały do terminu płatności. Przy tem stopę procentową ustanawia sam bank.

Stosownie do tego, czy walutę przyjmujemy za kapitał początkowy (bez odsetek) czy też za kapitał zwiększony (z odsetkami), dyskont weksli bywa dwojaki: **handlowy** i **matematyczny**. W praktyce tylko dyskont handlowy bywa używany.

Zadanie. Dyskontować weksel na 5000 rubli za 3 miesięcy do terminu płatności po 8%.

Rozwiązanie:

Z waluty 100 rb. za 12 mies. należy potrącić 8 rb.
„ 5000 „ 3 „ x

$$\text{dyskont } x = \frac{8 \cdot 5000 \cdot 3}{100 \cdot 12} = 100 \text{ rb.}$$

Zatem cena weksla jest 5000 — 100 = 4900 rb.

Uwaga. Przy dyskoncie matematycznym do sumy pożyczonej dopisują się procenty, przypadające za czas trwania pożyczki. Np. Jeżeli zaciągamy pożyczkę 5000 rb. na 6 miesięcy po 8%, to weksel wy-

stawiamy na sumę 5200 rubli, gdyż procent od tej sumy za 6 miesięcy wynosi $\frac{8 \cdot 6 \cdot 500}{12 \cdot 100} = 200$ rb.

Teraz dyskontujemy ten weksel na 5200 rb. za 3 mies. do terminu płatności po 8% sposobem matematycznym.

Dyskonto za 3 mies. do terminu płatności wynosi $\frac{8 \cdot 3}{12} = 2$ rubli.

Zatem z waluty 102 rb. 3 mies. — 2 rub.
5200 „ „ x

$$x = \frac{2 \cdot 5200}{102} = 101{,}96 \text{ rb.}$$

Dla nabywcy weksla dyskont handlowy jest dogodniejszy.

§ 82. Przy rozwiązywaniu zadań na regułę dyskonta weksli mogą się zdarzyć rozmaite pytania, jak i przy zadaniach na regułę procentu: może być niewiadomym albo **dyskont**, albo waluta, albo **stopa procentowa**, albo wreszcie **czas** do terminu płatności.

Przy dyskoncie handlowym przyjmuje się, iż rok ma 360 dni.

Zadanie. Weksel na 5000 rubli płatny 1 sierpnia został sprzedany 10 maja za 4910 rubli. Znaleźć stopę procentową dyskonta!

Rozw. Czas od 10 maja do 1 sierpnia wynosi 20 + 30 + 31 = 81 dni, co zwykle tak się oblicza:

$$\frac{1}{\text{VIII}} - \frac{10}{\text{V}} = \frac{31}{\text{VII}} - \frac{10}{\text{V}} = \frac{21}{\text{II}} = 81 \text{ dni}$$

licznik wskazuje liczbę dni, mianownik — liczby miesięcy. U nas nie bierze się w rachubę ani dnia wystawienia weksla, ani dnia jego płatności, zatem 10 maja i 1 sierpnia nie liczą się. Dyskont 5000 — 4910 = 90 rb.

Piszemy więc:

Z waluty 5000 rb. za 81 dni dyskont. 90 rb.
„ 100 „ 360 „ „ x „

$$x = \frac{90 \cdot 100 \cdot 360}{5000 \cdot 81} = \frac{40}{5} = 8 \text{ rb.}$$

Reguła proporcyonalnego podziału czyli reguła spółki.

§ 83. Jeżeli wynagrodzenie za pracę lub dochód od kapitałów dzielimy pomiędzy uczestnikami w ten sposób, że każdy dostaje tylko część wynagrodzenia ogólnego w stosunku do udziału w pracy lub w stosunku do wielkości kapitału, to podział taki nazywa się **proporcyonalnym**.

Zadanie. Trzech ludzi zarobiło razem 336 rub. Pierwszy z nich pracował 3 tygodnie, drugi - 5 i trzeci—8. Ile też rubli każdemu z nich wypada z ogólnego zarobku?

Rozw. Oczywista rzecz, iż 336 rb. trzeba podzielić na trzy części nierówne tak, aby pierwsza zawierała 3 takich części, jakich druga 5, a trzecia 8, t. j. 336 trzeba podzielić na części proporcyonalne do liczb 3, 5 i 8. W tym celu dodajemy $3 + 5 + 8 = 16$ i liczbę daną dzielimy przez 16, znajdujemy, że jedna część wynosi $336 : 16 = 21$ rb., więc każdy z robotników otrzyma:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = 21 \cdot 3 = 63 \\ \mathrm{II} = 21 \cdot 5 = 105 \\ \mathrm{III} = 21 \cdot 8 = 168 \end{array}\right\} = 336.$$

W ten sposób 326 podzieliliśmy na trzy części, które między sobą pozostają w stosunku 3 : 5 : 8, t. j.

$$63 : 105 : 168 = 3 : 5 : 8.$$

Ztąd wypływa takie prawidło: **aby jakąkolwiek liczbę podzielić proporcyonalnie do liczb danych należy podzielić ją przez sumę liczb danych i otrzymany iloraz mnożyć przez każdą z nich**. Jeżeli liczby, proporcyonalnie do których dzielimy liczbę daną, są ułamkowe, to wpierw stosunek ułamków zamieniamy na stosunek liczb całkowitych.

Zadanie. Liczbę 333 podzielić proporcyonalnie do liczb $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{10}$.

Rozw. $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{7}{10}$.

Sprawdzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{8}{20} : \frac{15}{20} : \frac{14}{20}.$$

Stosunek tych liczb się nie zmieni, jeżeli mianowniki odrzucimy (czyli każdy stosunek mnożymy przez 20). Wówczas otrzymamy zadanie:

Liczbę 333 podzielić proporcyonalnie do liczb 8, 15 i 14, a takie zadanie rozwiązywać już umiemy.

Tak samo postępujemy, jeżeli liczbę daną potrzeba podzielić odwrotnie proporcyonalnie do liczb danych.

Zadanie. Liczbę 700 podzielić na trzy części proporcyonalnie do liczb odwrotnych: 2, 3 i $\frac{1}{5}$.

Rozw. liczby odwrotne do danych są:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ i } 5.$$

a więc podział ma być taki:

$$I : II : III = \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : 5.$$

Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika i opuszczając go, mamy

$$I : II : III = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} : \frac{30}{6}$$

$$\text{albo } I : II : III = 3 : 2 : 30.$$

$$\text{ztąd } 3 + 2 + 30 = 35$$

$$\text{i } I = \frac{700}{35} \cdot 3 = 60$$

$$II = \frac{700}{35} \cdot 2 = 40$$

$$III = \frac{700}{35} \cdot 30 = 600.$$

Podział ten w rzeczy samej jest odwrotnie proporcyonalny, gdyż, jak widzimy, część III, odpowiadającą $\frac{1}{5}$ wynosi 600, gdy zaś II odpowiadająca 3 wynosi 40 i t. d.

§ 84. Jeżeli zależność pomiędzy liczbami, proporcyonalnie do których dzieli się liczbę daną, jest wyrażona przez dwa lub więcej stosunków, to sprowadza się je do stosunku wspólnego.

Zadanie. Liczbę 220 podzielić na takie trzy części, iż by pierwsza miała się do drugiej, jak 7 : 4, a druga do trzeciej, jak 6 : 11.

Rozw. Wypisujemy warunki:

$$I : II = 7 : 4$$

$$II : III = 6 : 11.$$

Tu nie możemy twierdzić, iż I zawiera 7 takich części, jakich III zawiera 11, części te są bowiem nie

jednakowe. W pierwszym wypadku $I = \frac{7}{4}$ II są one czwarte drugiej, a w drugim są one szóste, gdyż $III = \frac{11}{6}$ II. Żeby dwa stosunki powyższe sprowadzić do stosunku wspólnego, znajdujemy dla 4 i 6 liczb, odpowiadających II-ej części, najmniejszą wielokrotną, jest nią liczbą 12. W tym celu mnożymy stosunek pierwszy 7 : 4 przez 3, a stosunek drugi 6 : 11 przez 2, otrzymujemy:

$$I : II = 21 : 12$$

$$II : III = 12 : 22$$

Ztąd widzimy, że i I : III = 22 : 22 czyli, że I : II : III = 21 : 12 : 22, t. j. liczbę 220 wypada podzielić na części proporcyonalne do 21, 12 i 22.

Zadanie. Liczbę 1025 podzielić na cztery części tak, aby

$$I : II = \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

$$I : III = 6 : \frac{5}{2}$$

$$III : IV = 15 : 11.$$

Rozw. Usuwając z warunków mianowniki, otrzymujemy:

$$I : II = 8 : 9$$

$$I : III = 12 : 5$$

$$III : IV = 15 : 11$$

Dla części I-ej odpowiadają liczby i 8 i 12, sprowadzając je do najmniejszej wielokrotnej, będziemy mieli:

$$I : II = 24 : 27$$

$$I : III = 24 : 27$$

$$III : IV = 15 : 11.$$

Teraz dla liczb 10 i 15, odpowiadających części III-ej znajdujemy najmniejszą wielokrotną 30. W tym celu dostatecznie jest drugi stosunek pomnożyć przez 3, a trzeci przez 2. Lecz mnożymy i pierwszy stosunek przez 3, aby dla części I-ej odpowiadały jednakowe liczby. Zatem, mamy:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 72 : 81$$
$$\mathrm{I} : \mathrm{III} = 72 : 30$$
$$\mathrm{III} : \mathrm{IV} = 30 : 22.$$

Ztąd widzimy, iż liczbę 1025 należy podzielić proporcyonalnie do liczb 72, 81, 30 i 22,

$$\text{t. j. } \frac{1025}{72+81+30+22} = \frac{1025}{205} = 5.$$

więc:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 5 \,.\, 72 = 360 \\ \mathrm{II} &= 5 \,.\, 81 = 405 \\ \mathrm{III} &= 5 \,.\, 30 = 150 \\ \mathrm{IV} &= 5 \,.\, 22 = 110 \end{aligned}\right\} = 1025.$$

Zadanie. Spółka (artel) złożona z czterech robotników w ciągu tygodnia zarobiła w fabryce 22 rb. i 77 kop. Przytem pierwszy pracował 6 dni, mając płacę dzienną 1,20 rb., drugi 5 dni, mając płacę dzienną 1,00 rb., trzeci 7 dni i płaca jego 80 kop. i czwarty 4 dni, mając płacę dzienną 50 kop. Tygodniowy zarobek należy podzielić pomiędzy robotnikami w stosunku do liczby dni pracy każdego i wysokości ich płac dziennych.

Rozw. Z warunków zadania wypływa, że:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 1{,}20 \,.\, 6 = 720 \\ \mathrm{II} &= 1{,}00 \,.\, 5 = 500 \\ \mathrm{III} &= 80 \,.\, 7 = 560 \\ \mathrm{IV} &= 50 \,.\, 4 = 200. \end{aligned}\right\} = 1980 \text{ części.}$$

Zatem, $\frac{22{,}77}{1980} = 1{,}15$ kop. przypada na jedną część.

A więc:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= 1{,}15 \,.\, 720 = 8{,}28 \\ \mathrm{II} &= 1{,}15 \,.\, 500 = 5{,}75 \\ \mathrm{III} &= 1{,}15 \,.\, 560 = 6{,}44 \\ \mathrm{IV} &= 1{,}15 \,.\, 200 = 2{,}30 \end{aligned}\right\} = 22{,}77 \text{ rb.}$$

Reguła mieszaniny.

§ **84.** Zadania na regułę mieszaniny można podzielić na dwie kategorje:

A) Szukamy **jakość mieszaniny**, jeżeli są wiadome: jakość i ilość każdego z materjałów, wchodzących do mieszaniny.

B) Szukamy **ilość każdego z materjałów**, użytych do mieszaniny, jeżeli są wiadome: jakość mieszaniny i jakość każdego z materjałów.

Uwaga. Próbą metalu (mieszaniny) nazywamy liczbę części kruszcu szlachetnego na 96 części mieszaniny. Np. srebro 84 próby zawiera 84 części srebra czystego i 12 części kompozycyi (miedzi z ołowiem).

Stopniem spirytusu nazywamy każdą **setną część** czystego spirytusu, jaka wchodzi do mieszaniny z wodą. Np. jeżeli wódka ma 57°, oznacza to, że na wiadro mieszaniny przypada: $\frac{57}{100}$ wiadra spirytusu i $\frac{43}{100}$ wiadra wody.

A) Określenie jakości mieszaniny.

Zadanie. Stopiono razem 6 funtów srebra 84 próby, 8 f. srebra 56°, 2 f. czystego srebra i 1 f. miedzi. Jakiej próby wypadnie mieszanina tych kruszców?

Rozwiązanie. Liczba funtów mieszaniny wynosi: $6+8+3+1=18$. W tych czystego srebra jest: $84.6+56.8+96.3=504+448+288=1240$ zołotników. Zatem, każdy funt tej mieszaniny zawierać będzie srebra czystego $\frac{1240}{18}=68\frac{16}{18}=68\frac{8}{9}$ zoł., czyli, że mieszanina wypadła $68\frac{8^0}{9}$ próby.

B) Określenie ilości materjałów użytych do mieszaniny.

Zadanie. Z dwóch gatunków herbaty po 8 i 3 ruble funt potrzeba zrobić mieszaninę, żeby funt jej kosztował 5 rubli. Ile funtów potrzeba wziąć każdego z tych gatunków herbaty?

Rozw. Wypisujemy wszystkie ceny, znajdujemy stratę i zysk na jednym funcie, a następnie ilość funtów przypadająca na jeden rubel straty i na jeden rubel zysku.

	Cena mieszaniny	— strata		
I) gatunek 8 rb.	5 rb.	−3 rb.	−1 rb.	na $^1/_3$ funt.
II) gatunek 3 rb.		+2 „	+1 „	na $^1/_2$ „
		zysk +		

Żeby nie było ani straty, ani zysku można wziąć $^1/_3$ f. I $+ ^2/_2$ f. II $=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$; czyli, że ilość I i II-go gatunku są proporcyonalne do liczb $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, to jest

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{6} : \frac{3}{6}$$

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 2 : 3.$$

Na 5 funt. mieszaniny należy wziąć 2 funty I-go gatunku i 3 funty II-go, czyli że poszukiwane **ilości** towaru, wchodzące do mieszaniny, są **odwrotnie proporcyonalne** do różnic pomiędzy ceną towarów, a ceną mieszaniny.

Zadanie to jest **nieokreślonem**. Jeżeli zaś w zadaniu oprócz warunków powyższych podana jest **ilość mieszaniny**, np.: Ile funtów herbaty po 8 i 3 ruble potrzeba wziąć do utworzenia 60 funtów mieszaniny po rb. 5 za funt? Zadanie wtedy staje się określonem, gdyż wypada tylko 60 funt. podzielić na dwie części proporcyonalne do 2 i 3,

t. j. $\mathrm{I} : \mathrm{II} = 2 : 3$

$$\text{jedna część} = \frac{60}{2+3} = 12$$

I tak:

$$\mathrm{I} = 12 \times 2 = 24 \text{ f.}$$

$$\mathrm{II} = 12 \times 3 = 36 \text{ f.}$$

Zadanie z trzema gatunkami. Kupiec chce zmieszać trzy gatunki okowity: 90^0, 57^0 i 45^0 w ten sposób ażeby otrzymać okowitę na 60^0. Ile okowity każdego gatunku powinien wziąć?

Rozw. Gatunki:	Wartość mieszaniny	— strata	Jedna część	na
I) 90^0	60^0	−30	−1	$^1/_{30}$ wiadr.
II) 57^0		+3	+1	$^1/_3$ „
III) 45^0		+15	+1	$^1/_{15}$ „
		zysk +		

Żeby nie było ani straty, ani zysku, potrzeba, aby liczby jedności strat i zysków były jednakowe; zatem można wziąć: I-go gatunku 2 części, a II i III-go po jednej części, t. j.

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 2 \cdot \frac{1}{30} : \frac{1}{3} : \frac{1}{15}$$

albo $$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{1}{15} : \frac{1}{3} : \frac{1}{15} = \frac{1}{15} : \frac{5}{15} : \frac{1}{15}$$

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 1 : 5 : 1.$$

Ztąd: $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = 1 + 5 + 1 = 7$ wiader.

Odpowiedź: na 7 wiader mieszaniny można wziąć I-go gatunku 1 wiadro, II-go — 5 wiader i III-go — 1 wiadro.

W rzeczy samej:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} = 90^0 \times 1 = 90^0 \\ \mathrm{II} = 57^0 \times 5 = 285^0 \\ \mathrm{III} = 45^0 \times 1 = 45^0 \end{array}\right\} + $$
$$60^0 \times 7 = 420^0$$

Uwaga. Rozwiązania zadań na regułę mieszanin kategoryi **B** wtedy tylko są możliwe, jeżeli wartości gatunków są wyższe i niższe od wartości mieszaniny.

DODATEK.

§ 86. SYSTEM METRYCZNY. Oprócz miar własnych, jakie posiada każde państwo, obecnie coraz więcej wchodzą w ogólne użycie **miary metryczne**

Za podstawę tego systemu przyjęto $\frac{1}{10000000}$ część ćwierci południka ziemskiego, którą nazwano **metrem**.

Metr przedstawia zatem **jedność długości**, która jak bardziej dokładne pomiary wykazały, równa $\frac{1}{10.004700}$ części ćwierci południka ziemskiego.

Podział metra jest **dziesiętny**. Dla oznaczenia miar metrycznych dłuższych od metra użyto wyrazów greckich: **deka** (dziesięć), **hecto** (sto), **kilo** (tysiąc), a dla miar krótszych od metra — wyrazów łacińskich: **deci** (dziesiąta), **centi** (setna), **mili** (tysiączna) i t. d.

A) Miary długości.

km. Kilometr	*Hm.* Hektometr	*Dam.* Dekametr	*m.* Metr	*dm.* Decymetr	*cm.* Centymetr	*mm.* Milimetr
0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000
		1	10	100	1000	10000
	1	10	100	1000	10000	100000
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Długości drożne zwykle się mierzą: kilometrem = 1000 metrów.

1 **mila morska** $= \frac{1}{60}$ stopnia $= \frac{1}{3}$ mili geogr. $= 1852$ metr.

1 węzeł $= \frac{1}{120}$ mil morsk. $= 15^m,435$.

B) Miary powierzchni.

Zwykłą miarą powierzchni jest **metr kwadratowy** i jego podziałki.

Dla pomiarów gruntów używa się dekametr kwadratowy czyli **ar**, mający 10 m. dług. i 10 m. szer.

Hektar *Ha*	*a* **Ar**	*Ca* **Centlar**
	1	100
1	100	10000

C) **Miary objętości (kubiczne czyli sześcienne).**

Zwykłą miarą objętości jest metr **kubiczny** czyli **ster** i jego podziałki.

Mq. Ster.	*dec.* Decyster.	*Ctr.* Centyster
1	1000	1000000

Do mierzenia ładunków okrętowych używają metra kubicznego pod nazwą **tonna** = 1000 kilogram.

D) **Miary dla płynów i ciał sypkich.**

Zwykłą miarą płynów i ciał sypkich jest **decymetr kubiczny** = $\frac{1}{1000}$ m. kb. i nazywa się **litrem**.

Hl. Hektolitr	*Dl.* Dektalitr	*L.* Litr	*dcl.* Decylitr	*cl.* Centylitr
0,01	0,1	1	10	100
	1	10	100	1000
1	10	100	1000	10000

E) **Miary wagi.**

Za jednostkę wagi w systemie metrycznym przyjęto **ciężar centymetra kubicznego wody** dystylowanej przy temperaturze 4°,4 C i nazwano **gramem**.

Ciężar 1000 gramów tejże wody, albo litr nazwano **kilogramem**.

kgr. Kilogram.	*hgr.* Hektogram	*dagr.* Dekagram	*gr.* Gram	*dgr.* Decygram	*cgr.* Centygram
0,001	0,01	0,1	1	10	100
		1	10	100	1000
	1	10	100	1000	10000
1	10	100	1000	10000	100000

Uwaga. W systemie metrycznym otrzymujemy rozmaite miary przez przestawienienie przecinka albo dopisanie lub odrzucenie zer.

§ 87. MIARY UŻYWANE w PAŃSTWIE ROSYJSKIEM.

A) **Długości (linijne).**

Mila = 7 wiorst
Wiosta = 500 sażeni
Sażeń = 3 arszyny

albo: Sażeń = 7 stóp
Stopa = 12 cali
Cal = 10 linij
Arszyn = 16 werszków.

B) **Powierzchni (kwadratowe).**

Sażeń kw. = (3 . 3) = 9 arsz. kw.
Arszyn kw. = (16 . 16) = 256 wersz. kw.
albo: Sażeń kw. = (7 . 7) = 49 stóp kw.
Stopa kw = (12 . 12) = 144 cali kw.
Cal kw. = (10 . 10) = 100 linij kw.

Do mierzenia gruntów używa się.
diesiatina = (80 . 30) = (60 . 40) = 2400 sażeni □.

C) **Objętości (kubiczne).**

Sażeń kub. = (3.3.3) = 27 arsz. kub.
Arszyn kb. — (16.16.16) = 4096 wersz. kb.

albo: Sażeń kb. = (7 . 7) = 343 stóp kb.
Stopa kb. = (12 . 12 . 12) = 1728 cali kb.
Cal kb. = (10 . 10 . 10) = 1000 linij kb.

D) **Dla ciał sypkich.**

Łaszt = 12 czetwerti
Czetwert'=8 czetwerikow
Czetweryk = 8 garncy.

E) **Dla płynów.**

Beczka = 40 wiader
Wiadro = 10 sztofów
Sztof = 2 półsztofa
Półsztof = 10 czarek.

F) **Wag handlowych.**

Berkowiec 10 pudów
Pud = 40 funtów
Funt = 32 łuty = 96 zołotn.
Łut = 3 zołotniki
Zołotnik = 96 doli.

G) **Wag aptecznych.**

Funt (℔) = 12 uncyj (blizko 84 zołotn.)
Uncya (℥ j) = 8 drachm
Drachma (ʒ j) = 3 skrupuły
Skrupuł (℈j) = 20 gran. (gr j).

H) **Miary dla papieru.**

Ryza = 20 liber Libra = 24 arkuszy

I) **Miary czasu.**

Wiek = 100 lat
Rok = 12 miesięcy
Miesiąc = 4 tygodnie (prawie)
Tydzień = 7 doby.
Doba = 24 godziny
Godzina = 60 minut
Minuta = 60 sekund

Uwaga. Czas potrzebny dla jednego obrotu ziemi koło swej osi nazywamy **dobą** — jednostką czasu.

K) **Pieniądze.**

Jednostką pieniężną w państwie rosyjskiem jest **rubel** srebrny (900⁰), który się dzieli na 100 kopiejek.

Monety złote (900⁰) są: 15 rubli (imperjał), 10 rubli, 7 rubli i 50 kop. i 5 rubli.

Srebne: rubel, 50 kop., 25 kop. (900⁰), 20 kop., 15 kop., 10 kop., 5 kop. (500⁰).

Miedziane: 5, 3, 2, 1, $^1/_2$ i $^1/_4$ kop.

Papierowe: 500 rb., 100 rb., 25 r., 10, 5, 3 i 1 rb.

L) **Wartość monet cudzoziemskich** najwięcej używanych wyrażona przez ruble:

1 funt sterlingów . . .	= 9,45	rubli
1 frank.	= 0,37	„
1 marka niemiecka . .	= 0,46	„
1 gulden holenderski .	= 0,78	„
1 korona austryacka .	= 0,39	„
1 korona szwedzka . .	= 0,52	„
1 lira turecka	= 8,53	„
1 dolar amerykański .	= 1,94	„
1 jena japońska . . .	= 0,96	„

§ 88. MIARY DAWNIEJSZE KRÓLESTWA POLSKIEGO.

A) **Długości.**

Sążeń = 3 łokcie = 6 stóp
Łokieć = 24 cale
Stopa = 12 cali
Cal = 12 linij.

B) **Gruntowe.**

Włóka = 30 mórg
Morga = 300 prętów □
Pręt = 225 stóp □
Pręt=10 pręcików=7½ łokci.

C) **Do płynów.**

Beczka = 25 garncy
Garniec = 4 kwarty
Kwarta = 4 kwaterki.

D) **Do ciał sypkich.**

Łaszt = 30 korcy
Korzec = 4 ćwierci
Ćwierć = 8 garncy.

E) Wagi.

Centnar = 4 kamienie = 100 funtów
Kamień = 25 funtów
Funt = 32 łuty.

F) Zamiana jednych miar przez drugie.

1 Sążeń = 0,7099 sażeni
1 Łokieć = 0,8099 arszyn.
1 Stopa = 0,9449 stóp rosyjs.
1 Mórg = 0,5125 diesiatin
1 Funt = 09902 funt. rosyjsk.
1 Metr = 1,406 arsz. = 0,469 sażeni
1 Sażeń = 2,1336 metry
1 Hektar = 0,9153 diesiatin
1 Diesiatina = 1,0925 hektary
1 Kilogram = 2,4419 funtów
1 Funt = 0,4095 kilogram
1 Garniec = 3,280 litry.

§ 89. PRZYKŁADY DO DZIAŁAŃ ARYTMETYCZNYCH.

1. Przeczytać i napisać liczby: 1325, 703, 920, 9200, 5001, 5010, 4009 i 57705.

2. Ile jedności, dziesiątków, setek i tysięcy zawiera każda z liczb powyższych?

3. Dodać: **a)** 4706 + 10299 + 716 = 15721.

b)

2 pud.	+ 4 funt.	+ 15 lut.	
4 „	+ 12 „	+ 11 „	
+ 1 „	+ 24 „	+ 16 „	
8 „	+ 1 „	+ 10 „	

c)

4 lat	+ 120 doby	+ 4 godz.	+ 5 min.
8 „	+ 12 „	+ 15 „	+ 6 „
+ 1 „	+ 20 „	+ 21 „	+ 40 „
3 „	+ 14 „	+ 18 „	+ 30 „
16 „	+ 168 „	+ 21 „	+ 21 „

4. Odjąć: **a)** (8003 — 1954) — (12003 — 9704) = 6049 — — 2299 = 3750.

b)

26 ryz	+ 15 liber	+ 5 arkuszy
— 14 „	+ 16 „	+ 8 „
11 „	+ 18 „	+ 21 „

c) 1 doba — (1 godz. + 1 min. + 1 sek.) = 22 g. + + 58 m + 59 s.

5.) Pomnożyć: **a)** 3458 × 273 = 944034.

b) (29 funt. + 18 łut. +2 zołot.) × 23 = = 17 pud. + 13 łut. + 1 zoł.

c) (1 ryza + 18 lib. + 9 ark.) × 8 = 15 ryz + 7 liber

6. Podzielić; **a)** 154960 : 745 = 208.

b) (10 sąż. + 3 stop. + 4 cal.) : 8 = = 1 sąż. + 2 st. + 2 cal.

c) (44 sąż. + 2 arsz. + 6 wersz.) : (4 sąż. + + 1 arsz. + 7 wersz.) = 10.

d) (25 min. + 48 sek.) : (6 min. + 27 sek.) = **4.**

7. Wykonać działania:

a)(2169 : 9) × 15 — [(2107 : 7) + (405 + 203)] : 8 = = 2413.

b) [(91 rub. + 5 kop.) : 15 + (140 rub. + + 5 kop.) : 5] : (4 rub. + 26 kop.) = 8.

c) [(11 sąż. + 3 stop.) — (15 sąż. + 1 arsz. + + 2 cal.) : 10] . 50 + (2 wior. + 125 sąż.) : 210 = = 1 wiorsta

8. Znaleźć największy dzielnik wspólny:

a) 105 i 280. Odp. 35.

b) 615o i 7380. Odp. 1230.

c) 1633, 2059 i 2627. Odp. 71.

9. Znaleźć najmniejszą wielokrotną:

a) 6, 12, 18, 28. Odp. 252.
b) 54, 90, 7200. Odp. 108000.
c) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Odp. 2520.

10. a) Ile w 5 jednościach połówek, trzecich i czwartych części? Odp. 10, 15 i 20.

b) Ile jest dziewiątych w 2, 3, 4 i 12 jednościach? Odp. 18, 27, 36 i 108.

11. Wyciągnąć liczbę całkowitą z ułamków niewłaściwych:

$\frac{12}{5}$; $\frac{30}{6}$; $\frac{99}{8}$ i $\frac{327}{19}$. Odp. $2\frac{2}{5}$, 5, $12\frac{3}{8}$ i $16\frac{13}{19}$.

12. Zamienić liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:

$1\frac{2}{3}$; $8\frac{5}{9}$; $105\frac{3}{4}$; $1000\frac{7}{17}$. Odp. $\frac{5}{3}$, $\frac{77}{9}$, $\frac{423}{4}$ i $\frac{17007}{17}$.

13 Który jest największy, a który najmniejszy z ułamków:

a) $\frac{3}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{2}{15}$?
b) $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{7}{25}$?

14. Znaleźć:

a) $\frac{1}{5}$ i $\frac{3}{5}$ liczby 45. Odp. 9 i 27.
b) $\frac{3}{5}$ liczby $6\frac{2}{3}$. Odp. 4
c) $\frac{5}{7}$ liczby $5\frac{1}{}$. Odp. $3\frac{17}{21}$.

15. Znaleźć liczby:

a) $\frac{3}{5}$ której = 12. Odp. 20.
b) $\frac{7}{9}$ której = 2. Odp, $2\frac{4}{7}$.
c) $\frac{5}{14}$ której = $13\frac{1}{3}$. Odp. $37\frac{1}{3}$

16. Skrócić ułamki:

a) $\frac{100}{250}$; $\frac{60}{144}$; $\frac{1243}{3905}$; $\frac{1224}{3672}$. Odp. $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{113}{355}$ i $\frac{1}{3}$

b) Skrócić wyrażenia ułamków:

$\frac{19 \cdot 20 \cdot 54}{38 \cdot 100 \cdot 18}$ i $\frac{12 \cdot 14 \cdot 35}{33 \cdot 14 \cdot 180}$. Obp. $\frac{3}{10}$ i $\frac{7}{99}$.

17. Dodać ułamki:

a) $\frac{9}{40} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{17}{160} + \frac{11}{80} = 1\frac{93}{160}$.
b) $\frac{5}{7} + \frac{17}{21} + \frac{3}{35} = 1\frac{64}{105}$.
c) $\frac{9}{20} + \frac{14}{15} + \frac{8}{9} + \frac{23}{30} + \frac{59}{180} = 3\frac{11}{30}$.

18. Odjąć ułamki:

a) $\frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{1}{24}$.
b) $12\frac{1}{9} - 8\frac{16}{21} = 3\frac{22}{63}$.
c) $\left(132\frac{3}{4} - 72\frac{72}{18}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16}\right) = 60\frac{53}{144}$.

19 Pomnożyć:

a) $4\frac{1}{5} \times 6 = 25\frac{1}{5}$.
b) $45 \times 3\frac{1}{15} = 46$.
c) $3\frac{5}{9} \times 4\frac{7}{8} = 17\frac{1}{3}$.
d) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{24}$.

20 Podzielić:

a) $\frac{1}{6} : 5 = \frac{1}{30}$.

b) $4 : \frac{5}{7} = 5\frac{3}{5}$.

c) $19 : \frac{1}{2} = 38$.

d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{6} = 3$.

e) $8\frac{2}{5} : 1\frac{1}{20} = 8$.

21. Wykonać działania:

a) $\left[(2 : 10) + \frac{3}{6} . 30 - 10\right] . \frac{7}{105} = \frac{7}{20}$.

b) $\left[10 : 2\frac{2}{3}) + (7 : 10)\right] \times \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{12}\right) - (157 : 360\right] = 1$.

22. Wykonać działania nad ułamkami dziesiętnymi:

a) $3{,}04 \times 0{,}6 + 8{,}176 - (5{,}53727 + 0{,}001 \times 462{,}73) = 4$.

b) $[(50000 - 1397{,}3) : (20{,}4 + 33{,}603) + (42{,}63 : 10{,}3 + 0{,}06534 : 0{,}011)] = 910$.

c) $\frac{5{,}2 + 17{,}25 - (3{,}36 : 0{,}3)}{(2{,}7 : 0{,}18) + (0{,}65 : 0{,}13)} : 0{,}05 = 11{,}25$.

d) $\frac{(0{,}51 : 125 + \frac{5}{6} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}) \times 3}{(1{,}5 + {}^1/_4) : 18{}^1/_3} = 20\frac{2}{3}$.

24. Zamienić ułamki zwyczajne na dziesiętne.

a) $\frac{5}{16} = 0{,}3125$; $\frac{3}{20} = 0{,}15$; $\frac{363}{200} = 1{,}815$.

b) $\frac{2}{3} = 0{,}(6)$; $\frac{113}{11} = 10{,}(27)$; $\frac{11}{37} = 0{,}(297)$.

24. Zamienić ułamki dziesiętne i okresowe na zwyczajne

a) $0{,}45 = {}^1/_4$; $0{,}008 = \frac{1}{125}$; $6{,}48 = 6\frac{12}{25}$.

b) $0{,}(21) = \frac{7}{33}$; $5{,}(441) = 5\frac{49}{111}$; $3{,}23555\ldots = 3\frac{53}{225}$.

$4{,}3181818\ldots = 4\frac{7}{22}$.

25. Wykonać działania:

a) $\frac{(0{,}333\ldots \times 0{,}1212\ldots) . \frac{1}{15} + 0{,}(18)}{0(0{,}3)} = 6\frac{4}{11}$

b) $\frac{[5{,}0(8) - 4{,}0(6] . 30}{1{,}333} - \frac{4{,}25 : 0{,}85 + 1 : 0{,}5}{(5{,}56 - 4{,}06) : 3} = 9$.

c) $\frac{\left[\left(0{,}27 . \frac{5}{9} + \frac{7}{20} - \frac{1}{3}\right) : 0{,}75\right] + \frac{7}{9}}{\left(\frac{3}{5} : 0{,}15\right) - 3} = 1$.

26. Znaleźć wyrazy niewiadome w proporcyach:

a) $1\frac{2}{3} : 1{,}(4) = \frac{7}{13} : x$

b) $\frac{2}{3} x : \frac{1}{5} = 3\frac{1}{6}$

c) $0{,}3 : x = 0{,}48 : 0{,}4$.

d) $\frac{5}{8} : 1\frac{1}{4} = \frac{5}{16} x : 20$.

27. Ile procentów ma kapitał:

a) 1576 rb. przy 4% przez 3 lata? (odp. 189).

b) 2150 „ „ 6% „ $3\frac{1}{3}$ „ (odp. 430).

c) 3548 „ 5% przez $3\frac{2}{3}$ lata. (odp. 780, 56).

28. Jaki też kapitał przynosi dochodu:

a) 728,25 rb. przez 5 lat przy 3%.
(Odp. 4855).

b) 388,5 rb. przez 2 lata i 1 miesiąc przy 6%.
(Odp. 3108).

c) 26,88 rb. przez 48 dni przy 8,4%.
(Odp. 2400).

29. Na jaką sumę zamieni się kapitał:

a) 900 rb. przy $7\frac{1}{5}$% przez $3\frac{1}{2}$
(Odp. 1126,80).

b) 15540 rb. przy 6% przez 2 lata i 1 mies
(Odp. 17485).

c) 3605 rb. przy 8,4% przez 3 lata.

30. Przy jakiej stopie procentowej (po ile od 100) można mieć dochodu?

a) 730,05 rb. od kapitału 3893,6 rb. przez $3\frac{3}{4}$ lat.
(Odp. 5%).

b) 5780,45 rb. od kapitału 74079,36 rb. przez $1\frac{1}{4}$ lat.
(Odp. $6\frac{1}{4}$%).

c) 408 rb. od kapitału 36000 rb. przez 48 dni.
(Odp. $8\frac{1}{2}$%).

31. W ciągu jakiego czasu można mieć dochód:

a) 149 rb. od kapitału 2384 rb. przy 5%.
(Odp. $1\frac{1}{2}$ lat.)

b) 292,26 rb. od kapitału 3896, 80 rb. przy 10%.
(Odp. 9 mies.).

c) 97,95 od kapitału 6530 przy 4%.
(Odp. $4\frac{1}{2}$ mies.).

32. Znaleźć dyskonto wekslu:

a) 2500 rb. za 9 miesięcy przed terminem przy 8%.
(Odp. 150).

b) 2835 rb. za 8 miesięcy przed terminem przy 6%.
(Odp. 113,4)

c 5760 rb. za $4\frac{3}{5}$ mies. przed terminem przy 8%.
(Odp. 176,64).

33. Ile się należy za weksel, czyli dyskontować weksel na sumę:

a) 3680 rb. przz 8% za 3 miesiące przed terminem.
(Odp. 3606,40).

b) 5000 rb. przy 6% za 36 dni przed terminem.
(Odp. 4970).

c) 1440 rb przy 4% za 7 miesięcy przed terminem.
(Odp. 1406,40).

24. Znaleźć walutę wekslu, jeżeli za weksel zapłacono:

a) 7810 rb. przy $9\frac{1}{2}$% za 3 miesiące przed terminem.
(Odp. 8000).

b) 6664 rb. przy 8% za 3 miesiące przed terminem.
(Odp. 6800).

c) 2145 rb przy $8\frac{1}{2}$% za $1\frac{1}{4}$ lat. przed terminem.
(Odp. 2400).

35. Przy jakiej stopie procentowej dysknotowano weksel jeżeli za weksel zapłacono:

a) 1710 rb. zamiast 1800 rb. za 10 mies. przed ter.
(Odp. 6).

b) 765 rb. zamiast 800 rb. za 63 dni przed terminem.
(Odp. 25).

c) 2488.5 rb. zamiast 2520 rb. za 100 dni przed ter.
(Odp. $4\frac{1}{2}$).

36. Na jaki czas przed terminem został sprzedany weksel za:

a) 1335,4 rb. zamiast 1517,5 rb. przy 6%.
(Odp 2 lata).

b) 18857,93 rb. zamiast 19016,4 rb. przy $7\frac{1}{2}\%$.
(Odp. 40 dni).

c) 2778,66 rb. zamiast 2902,5 przy $6\frac{2}{5}\%$.
(Odp. 8 miesięcy).

37. **Podział proporcyonalny:**

a) Trzech kapitalistów, tworząc spółkę dla pewnego przedsiębiorstwa, weszli do niej: pierwszy z kapitałem 12100 rb. przez czas 0,8(3) lat; drugi z kapitałem 10000 rb. przez 0,91(6) lat i trzeci z kapitałem 15000 rb. przez $5\frac{1}{2}$ mies. Przedsiębiorstwo to dało zysku 8550 rb. Ile na każdego przypada?
(Odp. 3300, 3000, i 2250 rb.).

b) Trzech kupców założyło spółkę handlową. Pierwszy z nich na początku dał 4000 rb., po 8 miesiącach dodał jeszcze 2000 rb.; drugi początkowo włożył 6400 rb. lecz po 6 miesiącach wycofał 1200 rb. i trzeci początkowo włożył 8000 rb. lecz po 3 miesiącach wycofał 2000 rb. Spółka trwała rok i 4 miesięcy i przyniosła 2034 rb. czystego zysku. Ile każdy z kupców ma otrzymać? (Odp. 600, 669 i 765 rb.).

38. **Reguła mięszanin. A.**

a) Kupiec zmięszał 2 gatunki tytoniu: po 2 rb. 40 k. 1 rb. 80 kop. za funt. przy tem gatunku pierwszego użył 13 funtów. Sprzedał całkowitą mięszaninę za 87, 75 kop. i otrzymał $12\frac{1}{2}\%$ zysku. Ile też funtów drugiego gatunku weszło do tej mięszaniny?
(Odp. 26. f.)

b) Jubiler przetopił 12 zołotników złota 93°, $4\frac{1}{2}$ zołot. 88° i $4\frac{1}{2}$ zołot. miedzi. Jakiej próby wypadł stop.?
(Odp. 72°).

39. **Reguła mięszanin B.**

a) Kupiec zmięszał 2 gatunki mąki i otrzymał 55 f. mięszaniny po kop 11 za funt. Ile mąki każdego gatunku użyto do tej mięszaniny, jeżeli funt 1-go gatunku kosztuje $12\frac{1}{2}$ kop. a funt 2-go gatunku — $9\frac{3}{4}$?
(Odp. 25 f. i 30 funt.).

b) Żąda się utworzyć 36 funtów mięszaniny z dwóch gatunków soli tak, aby funt mięszaniny, bez straty i zysku kosztował 2,75 kop. Funt gatunku 1-go kosztuje $4\frac{1}{2}$ kop., a cena gatunku 2-go o 50% jest mniejszą od 1-go. Ile funtów każdego z tych gatunków należy wziąć do tej mięszaniny?
(Odp. 8 f. i 28 f.).

c) Na tuzin łyżeczek srebrnych 84-ej próby majster stopił dwa kawałki srebra: 87-ej 65-ej próby. Ile zołotników wzięto jednego i drugiego, jeżeli każda łyżeczka waży $7\frac{1}{3}$ zołot. (Odp. 76 zoł. i 12 zoł.)

K O N I E C.

SPIS RZECZY.