PRZYCZYNEK DO TEORYI MNOGOŚCI

napisał

WACŁAW SIERPIŃSKI

W pracy niniejszej podam pewne twierdzenie z teoryi mnogości punktowych i wyprowadzę z niego kilka wniosków.

Będziemy oznaczali tym samym symbolem liczbę rzeczywistą oraz punkt prostej, będący jej obrazem. Mówić będziemy, że punkt p należy do przedziału $\delta = (a, b)$, jeżeli $a \leqslant p \leqslant b$, zaś że punkt p leży wewnątrz tego przedziału, jeżeli $a < p < b$.

Niech P oznacza dany zbiór punktów prostej (ograniczony lub nie). Dany punkt g prostej nazywamy, jak wiadomo, miejscem skupienia zbioru P (Cantor), jeżeli przy wszelkiem $\alpha < g$ oraz wszelkiem $\beta > g$ wewnątrz przedziału (α, β) zawiera się nieskończenie wiele punktów zbioru P, oraz miejscem kondensacyi tego zbioru (Lindelöf), jeżeli wewnątrz każdego takiego przedziału (α, β) zawiera się nieprzeliczalna mnogość punktów zbioru P. Jeżeli, w szczególności przy wszelkich $\alpha < g$ oraz $\beta > g$, mamy nieskończenie wiele — względnie nieprzeliczalną mnogość — punktów zbioru P wewnątrz każdego z przedziałów (α, g) oraz (g, β), to punkt g nazywać będziemy obustronnem miejscem skupienia — względnie kondensacyi — zbioru P.

Twierdzenie. Jeżeli każdy punkt zbioru P należy do jednego przynajmniej z przedziałów, tworzących zbiór Δ, to mnogość wszystkich tych punktów zbioru P, które nie leżą wewnątrz żadnego z przedziałów zbioru Δ, jest co najwyżej przeliczalną.

Dowód. Oznaczmy przez Q zbiór tych wszystkich punktów zbioru P, które nie leżą wewnątrz żadnego z przedziałów zbioru Δ; każdy punkt zbioru Q, jako części zbioru P, należeć będzie, w myśl założenia, do jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ. Oznaczmy przez Δ_n zbiór wszystkich tych przedziałów zbioru Δ, które są większe od $\frac{1}{n}$, zaś przez Q_n zbiór wszystkich tych punktów zbioru Q, które należą do jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ_n. Będzie oczywiście

$$Q = Q_1 + (Q_2 - Q_1) + (Q_3 - Q_2) + (Q_4 - Q_3) + \dots \qquad (*)$$

Powiadam, że każdy ze zbiorów Q_n jest co najwyżej przeliczalnym.

W samej rzeczy, podzielmy prostą na odcinki o długości $\frac{1}{n}$: okażemy, że na każdym z nich leżą co najwyżej dwa punkty zbioru Q_n. Załóżmy w tym celu, że na jednym z naszych odcinków leżą trzy różne punkty q_1, q_2, q_3 zbioru Q_n. Jeżeli $q_1 < q_2 < q_3$, to będziemy oczywiście mieli $q_2 - q_1 < \frac{1}{n}$, oraz $q_3 - q_2 < \frac{1}{n}$. Oznaczmy przez δ przedział zbioru Δ_n, do którego należy q_2: skoro q_2 należy do przedziału $\delta > \frac{1}{n}$, a nie leży wewnątrz tego przedziału, więc musi być jednym z jego końców. Jeżeli q_2 jest lewym końcem przedziału δ, to oczywiście q_3 leży wewnątrz δ, jeżeli zaś prawym, to q_1 leży wewnątrz δ. W obu przypadkach wpadamy w sprzeczność z założeniem, że punkty q_1 i q_3 należą do Q.

Dowiedliśmy więc, że podzieliwszy prostą na przeliczalną mnogość odcinków o długości $\frac{1}{n}$, mamy na każdym z nich co najwyżej dwa punkty zbioru Q_n: zbiór ten jest więc co najwyżej przeliczalnym. Wobec wzoru (*) wynika stąd natychmiast, że i zbiór Q jest co najwyżej przeliczalnym, co było do udowodnienia.

Wniosek 1. Każdy zbiór punktów posiada co najwyżej przeliczalną mnogość miejsc skupienia, które nie są obustronnemi.

Dowód. Oznaczmy przez Q zbiór wszystkich tych miejsc skupienia danego zbioru P, które nie są obustronnemi. Jeżeli q jest jednem z nich, to istnieje odpowiedni przedział δ, którego (lewym lub prawym) końcem jest q, i wewnątrz którego niema żadnego punktu zbioru P, a więc też żadnego miejsca skupienia tego zbioru. Żaden zatem punkt zbioru Q nie może leżeć wewnątrz przedziału δ. Możemy więc względem zbioru Q oraz odpowiedniego zbioru Δ wszystkich przedziałów δ zastosować dowiedzione twierdzenie, skąd wynika, że zbiór Q jest co najwyżej przeliczalnym.

Gdybyśmy powtórzyli powyższy dowód, oznaczając przez Q

zbiór wszystkich punktów zbioru P, które nie są jego obustronnemi miejscami skupienia, to wnioskowalibyśmy, iż każdy zbiór punktów zawiera co najwyżej przeliczalną mnogość punktów, które nie są jego obustronnemi miejscami skupienia. Stąd natychmiast wynika

Wniosek 2. Każdy nieprzeliczalny zbiór punktów zawiera nieprzeliczalną mnogość punktów, które są jego obustronnemi miejscami skupienia.

Wniosek 3. Każdy zbiór punktów posiada co najwyżej przeliczalną mnogość miejsc kondensacyi, które nie są obustronnemi.

Dowód. Dla każdego miejsca kondensacyi q danego zbioru, które nie jest obustronnem, istnieje przedział δ, którego końcem jest q i wewnątrz którego zawiera się co najwyżej przeliczalna mnogość punktów danego zbioru. Żadne zatem miejsce kondensacyi nie może leżeć wewnątrz δ. Stąd natychmiast słuszność naszego wniosku.

Wniosek 4. Każdy zbiór liczb rzeczywistych, który uporządkowany według wielkości jest dobrze uporządkowanym, musi być co najwyżej przeliczalnym.

Dowód. Gdyby nasz zbiór był nieprzeliczalnym, posiadałby w myśl wniosku 2-go miejsce obustronnego skupienia. Możnaby więc z jego elementów zbudować ciąg nieskończony typu $^*\omega$, co przeczy założeniu, że zbiór jest dobrze uporządkowanym.

Wniosek 5. Wśród każdej nieprzeliczalnej mnogości miejsc nieciągłości funkcyi $f(x)$ w danym przedziale istnieje nieprzeliczalna mnogość punktów, w których $f(x)$ posiada z obu stron nieciągłość rodzaju 2-go[1].

Dowód. Niech P oznacza nieprzeliczalny zbiór punktów nieciągłości funkcyi $f(x)$. Oznaczmy przez $\omega(x)$ oscylacyę funkcyi $f(x)$ w punkcie x[2]. Gdyby przy wszelkiem naturalnem n zbiór P_n wszystkich, należących do P rozwiązań nierówności $\omega(x) \geqslant \frac{1}{n}$ był przeliczalnym, to i zbiór P musiałby, wbrew założeniu, być przeliczalnym. Jest więc przy pewnem n zbiór P_n nieprzeliczalnym. W zbiorze P_n

[1] Pojęcie dwóch rodzajów nieciągłości wprowadził Dini. Zob. Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Leipzig 1892.

[2] Definicyę tego pojęcia zob. n. p. u Baire'a: Leçons sur les fonct. discontinues. Paris 1905.

istnieje zatem, w myśl wniosku 2-go, nieprzeliczalna mnogość punktów, które są jego obustronnemi miejscami skupienia. Niech p będzie jednem z nich; z uwagi, że p jest obustronnem miejscem skupienia punktów, dla których $\omega(x) \geqslant \frac{1}{n}$, wynika w jednej chwili, że p jest dla $f(x)$ punktem nieciągłości z obu stron 2-go rodzaju.

Wniosek nasz został więc udowodnionym; z niego wynika natychmiast

Wniosek 6. W każdym przedziale istnieje co najwyżej przeliczalna mnogość miejsc, w których funkcya jest z jednej strony ciągłą, a z drugiej nieciągłą.

Jeżeli dla danej liczby g istnieje w danym zbiorze P ciąg nieskończony, wzrastający, zmierzający do g, to g nazwiemy prawostronnem miejscem skupienia tego zbioru. Zbiór, zawierający wszystkie swe prawostronne miejsca skupienia, nazwiemy prawostronnie zamkniętym.

Wniosek 7. Zbiór prawostronnie zamknięty różni się od swojej pochodnej co najwyżej o przeliczalną mnogość punktów.

Dowód. Niech F oznacza dany zbiór prawostronnie zamknięty. Połóżmy $F = F_1 + F_2$, oznaczając przez F_1 zbiór wszystkich tych punktów zbioru F, które nie są jego miejscami skupienia; zbiór F_1 będzie, jak wiemy, co najwyżej przeliczalnym, wszystkie zaś punkty zbioru F_2 będą zarazem elementami zbioru pochodnego F'.

Oznaczmy przez Q zbiór wszystkich tych elementów zbioru F', które nie są elementami zbioru F. Ponieważ ten ostatni jest zamkniętym prawostronnie, więc punkty zbioru Q będą lewostronnemi tylko miejscami skupienia dla F, i zbiór Q będzie zatem co najwyżej przeliczalnym. Mamy też oczywiście $F' = F_2 + Q$. Jest więc

$$F + Q = F_1 + F'$$

skąd, wobec wniosku o mocy zbiorów Q i F_1 wynika słuszność naszego twierdzenia.