

Pedagogiczna  
Biblioteka Wojewódzka  
w Białymstoku

b.5235



*Hoborski - Wysokie Matematyki*

JAN ZYDLER

CZYTELNIĄ

Z A R Y S  
GEOMETRII ANALITYCZNEJ  
NA PŁASZCZYŹNIE

PODREČNIK SZKOLNY

WYDANIE TRZECIE, ZE 102 RYSUNKAMI W TEKŚCIE



1922

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE  
POZNAN — LWÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — WILNO

*użył*



CZYTELNIA



516/0253

## PRZEDMOWA.

Nigdzie może bardziej matematyka swoim pięknem nie jaśnieje, jak w geometrii analitycznej, tem wspianiałem skojarzeniu dwóch jej zasadniczych działów: analizy i geometrii. A jeżeli napisanie podręcznika nie jest rzeczą łatwą, to z tej dziedziny jest tem trudniejszą, że autor nie może się pozbyć obawy, aby szaty wykładu szkolnego nie tylko jej wdzięków nie przyćmiły, ale je raczej uwypukliły.

Z obawą więc do pracy niniejszej przystępowałem, a bodźcem mi jedynie było pragnienie spełnienia obowiązku, ciężącego na każdym z nas, ten przedmiot wykładających, ile ze swojskiego podręcznika dotąd z tej dziedziny nie mamy <sup>1)</sup>.

Jak się z tego zadania wywiązałem, nie moja, oczywiście, jest rzeczą sądzić — *faciant meliora potentes*. — Zamiarem moim było opracowanie podręcznika, dostosowanego do potrzeb szkoły średniej, więc też cały wykład w ramach tej szkoły jest utrzymany, gdzie nigdzie zaledwie dodane są uwagi, dające sposoby rozwiązania omawianej kwestji przez zastosowanie rachunku wyższego. Te ustępy, oraz niektóre jeszcze, wprowadzie dające zupełniejszy pogląd na naukę, ale które, ze względu na niewielki stosunkowo czas, przeznaczony na tę naukę w programie szkolnym (np. o biegunie i biegunowej przecięć stożkowych, o ich kole krzywizny, o liniach krzywych wyższego rzędu), są odbite pismem drobniejszym i mogą być, w razie potrzeby, a bez uszczerbku dla całości, przez nauczyciela opuszczone.

<sup>1)</sup> Już po oddaniu pracy niniejszej do druku doszła ręk moich „Geometria” Dr. A. Łomnickiego (Lwów, 1912), której część IV zawiera Geometrię analityczną.



W pracy niniejszej były mi pomocne, między innemi, następujące dzieła:

A. Tresse et A. Thybaut, Cours de Géométrie analytique, Paris, 1904.

O. Fort und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie, VII Auflage, Leipzig, 1904.

Dr. H. Ganter und Dr. F. Rudio, Die Elemente der analytischen Geometrie, VII Auflage, Leipzig, 1910.

Pr. Dr. Max Simon, Analytische Geometrie der Ebene, Leipzig, 1911.

H. Weber und J. Wellstein, Encyklopädie der elementaren Geometrie, Leipzig 1907.

E. Beutel, Algebraische Kursen, Leipzig, 1911.

Dr. W. Zajaczkowski, Geometria analityczna, Warszawa, 1884.

E. Пржевальский, Аналитическая геометрия, Москва, 1905.

Po każdym prawie rozdziale podany jest szereg ćwiczeń w liczbie, wystarczającej do utrwalenia nabytych przez ucznia wiadomości, a wiele do nich materiału zaczerpnałem z cennego dla nauczyciela artykułu p. R. Fischer'a, p. t. „Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene” (*Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht*, 42 Jahrgang), poza tem posiłkowałem się także zbiorami zadań, np.

Prof. O. Th. Bücklen, Aufgabensammlung zur anal. Geometrie, Leipzig, 1912.

Fr. Graefe, Aufgaben und Lehrsätze aus der anal. Geometrie, Leipzig, 1885.

Autor.

Warszawa, w październiku 1912.

## TREŚĆ.

|                 |   |
|-----------------|---|
| Wstęp . . . . . | 1 |
|-----------------|---|

### Rozdział I. Punkt. Układy współrzędnych.

|                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 1. Układ współrzędnych prostokątny . . . . .                               | 2  |
| § 2. Układ ukośnokątny . . . . .                                             | 3  |
| § 3. Układ biegunowy . . . . .                                               | 4  |
| § 4. Odległość pomiędzy dwoma punktami . . . . .                             | 4  |
| § 5. Podział odcinka w stosunku danym . . . . .                              | 5  |
| § 6. Warunek, pod którym trzy punkty leżą na jednej prostej . . . . .        | 6  |
| § 7. Pole trójkąta w zależności od współrzędnych jego wierzchołków . . . . . | 7  |
| § 8. O zmianie współrzędnych . . . . .                                       | 7  |
| § 9. Przesunięcie równoległe osi współrzędnych . . . . .                     | 8  |
| § 10. Obrót osi współrzędnych . . . . .                                      | 8  |
| § 11. Zmiana ogólna osi współrzędnych . . . . .                              | 9  |
| § 12. Przejście od układu prostokątnego do biegunowego . . . . .             | 9  |
| § 13. Zadania . . . . .                                                      | 10 |

### Rozdział II. Równania o dwóch zmiennych i ich znaczenie geometryczne.

|                                                                            |    |
|----------------------------------------------------------------------------|----|
| § 14. Równanie linii . . . . .                                             | 11 |
| § 15. Przykłady na równania danych linii . . . . .                         | 12 |
| § 16. Miejsce geometryczne równania o dwóch zmiennych. Przykłady . . . . . | 15 |
| § 17. Klasyfikacja linii . . . . .                                         | 18 |

### Rozdział III. Linja prosta.

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 18. Równanie linii prostej . . . . .                                                                 | 19 |
| § 19. Uwagi nad równaniem linii prostej . . . . .                                                      | 21 |
| § 20. Obraz geometryczny równania: $Ax + By + C = 0$ . . . . .                                         | 22 |
| § 21. Wykreślić prostą, której równanie jest dane . . . . .                                            | 24 |
| § 22. Równanie prostej, przechodzącej przez punkt dany . . . . .                                       | 25 |
| § 23. Równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty dane . . . . .                               | 26 |
| § 24. Punkt przecięcia się dwóch prostych . . . . .                                                    | 26 |
| § 25. Kąt między dwiema prostymi . . . . .                                                             | 28 |
| § 26. Równanie prostej, która przechodzi przez punkt dany i jest równoległa do prostej danej . . . . . | 30 |



|       |                                                                                           |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 27. | Odległość punktu od prostej . . . . .                                                     | 30 |
| § 28. | Równanie normalne linii prostej . . . . .                                                 | 31 |
| § 29. | Doprowadzenie ogólnego równania linii prostej do postaci normalnej . . . . .              | 32 |
| § 30. | Odległość punktu od prostej . . . . .                                                     | 34 |
| § 31. | Równanie dwusiecznej kąta . . . . .                                                       | 36 |
| § 32. | Trzy proste, przecinające się w jednym punkcie . . . . .                                  | 37 |
| § 33. | Zastosowanie twierdzenia o trzech prostych, przecinających się w jednym punkcie . . . . . | 38 |
| § 34. | Równanie biegunowe linii prostej . . . . .                                                | 40 |
| § 35. | Zadania . . . . .                                                                         | 40 |

## Rozdział IV. Koło.

|       |                                                                   |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------|----|
| § 36. | Równanie koła . . . . .                                           | 45 |
| § 37. | Roztrzaskanie równania koła . . . . .                             | 45 |
| § 38. | Koło i linia prosta . . . . .                                     | 46 |
| § 39. | Dwa koła . . . . .                                                | 47 |
| § 40. | Niektóre określenia . . . . .                                     | 49 |
| § 41. | Równanie stycznej do koła . . . . .                               | 50 |
| § 42. | Równanie normalnej . . . . .                                      | 51 |
| § 43. | Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej . . . . . | 51 |
| § 44. | Potęga punktu względem koła. Linia potęgowa dwóch kół . . . . .   | 52 |
| § 45. | Biegun i biegunowa . . . . .                                      | 54 |
| § 46. | Równanie biegunowe koła . . . . .                                 | 55 |
| § 47. | Zadania . . . . .                                                 | 56 |

## Rozdział V. Elipsa.

|       |                                                                              |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 48. | Określenie i równanie elipsy . . . . .                                       | 59 |
| § 49. | Roztrzaskanie równania elipsy . . . . .                                      | 60 |
| § 50. | Sposoby wykreślenia elipsy . . . . .                                         | 62 |
| § 51. | Twierdzenie o rzędnej elipsy i koła . . . . .                                | 63 |
| § 52. | Długość promieni wodzących elipsy . . . . .                                  | 64 |
| § 53. | Kierownice elipsy . . . . .                                                  | 65 |
| § 54. | Równanie stycznej . . . . .                                                  | 66 |
| § 55. | Równanie normalnej . . . . .                                                 | 68 |
| § 56. | Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej . . . . .            | 68 |
| § 57. | Własność stycznej i normalnej . . . . .                                      | 70 |
| § 58. | Wykreślenie stycznej . . . . .                                               | 71 |
| § 59. | Równanie elipsy, odniesione do jednego z jej wierzchołków głównych . . . . . | 72 |
| § 60. | Równanie biegunowe elipsy . . . . .                                          | 73 |
| § 61. | Średnice elipsy . . . . .                                                    | 73 |
| § 62. | Średnice sprzężone . . . . .                                                 | 75 |
| § 63. | Biegun i biegunowa . . . . .                                                 | 77 |
| § 64. | Koło krzywizny elipsy . . . . .                                              | 78 |
| § 65. | Pole elipsy . . . . .                                                        | 82 |
| § 66. | Zadania . . . . .                                                            | 83 |

## Rozdział VI. Hyperbola.

|       |                                                                        |     |
|-------|------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 67. | Określenie i równanie hyperboli . . . . .                              | 86  |
| § 68. | Roztrzaskanie równania hyperboli . . . . .                             | 87  |
| § 69. | Sposoby wykreślenia hyperboli . . . . .                                | 90  |
| § 70. | Długość promieni wodzących hyperboli . . . . .                         | 90  |
| § 71. | Kierownice hyperboli . . . . .                                         | 91  |
| § 72. | Asymptoty hyperboli . . . . .                                          | 92  |
| § 73. | Równanie stycznej i normalnej . . . . .                                | 94  |
| § 74. | Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej . . . . .      | 94  |
| § 75. | Własność stycznej . . . . .                                            | 95  |
| § 76. | Wykreślenie stycznej . . . . .                                         | 95  |
| § 77. | Równanie hyperboli, odniesione do jednego z jej wierzchołków . . . . . | 96  |
| § 78. | Równanie biegunowe hyperboli . . . . .                                 | 97  |
| § 79. | Średnice hyperboli . . . . .                                           | 97  |
| § 80. | Średnice sprzężone . . . . .                                           | 98  |
| § 81. | Biegun i biegunowa . . . . .                                           | 99  |
| § 82. | Koło krzywizny hyperboli . . . . .                                     | 100 |
| § 83. | Zadania . . . . .                                                      | 101 |

## Rozdział VII. Parabola.

|       |                                                                    |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-----|
| § 84. | Określenie i równanie paraboli . . . . .                           | 104 |
| § 85. | Roztrzaskanie równania . . . . .                                   | 105 |
| § 86. | Sposoby wykreślenia paraboli . . . . .                             | 106 |
| § 87. | Długość promienia wodzącego . . . . .                              | 106 |
| § 88. | Równanie stycznej i normalnej . . . . .                            | 106 |
| § 89. | Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej . . . . .  | 107 |
| § 90. | Własność stycznej . . . . .                                        | 108 |
| § 91. | Wykreślenie stycznej . . . . .                                     | 109 |
| § 92. | Elipsa, hyperbola i parabola, wyrażone w jednym równaniu . . . . . | 109 |
| § 93. | Równanie biegunowe paraboli . . . . .                              | 110 |
| § 94. | Średnice paraboli . . . . .                                        | 110 |
| § 95. | Biegun i biegunowa . . . . .                                       | 112 |
| § 96. | Koło krzywizny paraboli . . . . .                                  | 113 |
| § 97. | Pole odcinka paraboli . . . . .                                    | 114 |
| § 98. | Zadania . . . . .                                                  | 115 |

## Rozdział VIII. Rozbiór ogólny linii krzywych 2-go rzędu.

|        |                                                                      |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------|-----|
| § 99.  | Uwagi wstępne . . . . .                                              | 118 |
| § 100. | Poszukiwanie środka linii krzywej . . . . .                          | 119 |
| § 101. | Poszukiwanie osi linii krzywej, posiadającej środek . . . . .        | 121 |
| § 102. | Przekształcenie równania linii krzywej, nie mającej środka . . . . . | 127 |
| § 103. | Zestawienie otrzymanych wyników . . . . .                            | 130 |
| § 104. | Ogólne równanie stycznej do linii krzywej 2-go rzędu . . . . .       | 131 |
| § 105. | Przecięcia stożkowe . . . . .                                        | 134 |
| § 106. | O graficznem rozwiązywaniu równań algebraicznych . . . . .           | 137 |
| § 107. | Zadania . . . . .                                                    | 141 |



## Rozdział IX. O niektórych krzywych wyższego rzędu oraz przestępnych.

|                   |                                 |     |
|-------------------|---------------------------------|-----|
| § 108.            | Wiadomości ogólne               | 143 |
| § 109.            | Kardioida                       | 143 |
| § 110.            | Cissoida Dioklesa               | 144 |
| § 111.            | Lemniskata                      | 146 |
| § 112.            | Ślimak Pascala                  | 147 |
| § 113.            | Ewoluty przecięć stożkowych     | 149 |
| § 114.            | Cykloida                        | 150 |
| § 115.            | Hipocykloida                    | 151 |
| § 116.            | Linja spiralna Archimedes'a     | 152 |
| § 117.            | Uwaga o krzywych wyższego rzędu | 154 |
| Rozwiązania zadań |                                 | 156 |

## WSTĘP.

Geometria analityczna, jak sama nazwa wskazuje, jest połączeniem analizy z geometrią i ma za przedmiot badanie i wykrywanie własności utworów geometrycznych zapomocą rachunku. Jej metoda polega na tem, że utwory geometryczne, więc linie, powierzchnie, przedstawiamy zapomocą równania i przez roztrząsanie równania badamy własności linii lub powierzchni. Na tej właśnie wzajemności: na algebraicznym odzwierciedleniu własności utworu geometrycznego i na geometrycznej interpretacji związku algebraicznego, polega istota geometrii analitycznej.

Ponieważ figury geometryczne mogą być płaskie i przestrzenne, więc i geometria analityczna dzieli się na dwie części: płaską i przestrzenną. Niniejszy wykład dotyczy linii płaskich.

Twórcą geometrii analitycznej jest znakomity matematyk i słynny filozof *René Descartes*, zwany także *Kartezjuszem* (1596 — 1650). Wprawdzie już u starożytnych matematyków greckich można odnaleźć przebliski myśli połączenia analizy z geometrią, wszakże dopiero od czasów *Viète'a* (1540—1603), kiedy algebra zaczęła się posługiwać liczbami ogólnymi, mogła być naprawdę mowa o stosowaniu jej metod do badań geometrycznych, a genjuszowi *Descartes'a* zawdzięczamy istotne skojarzenie tych dwóch gałęzi matematyki. On to właśnie w wydanej r. 1637 swojej „Geometrii” stworzył nową metodę ujęcia linii geometrycznej w równaniu, dając w ten sposób znakomite narzędzie do badań geometrycznych. W części I „Geometrii” podaje Descartes sposoby geometrycznego przedstawienia zasadniczych działań arytmetycznych, następnie wykreślanie obrazów geometrycznych równań 1-go i 2-go stopnia, oraz daje po raz pierwszy wyjaśnienie pierwiastków ujemnych równania. W części II traktuje o liniach krzywych, przedstawiając je równaniami, w III zaś, ostatniej, części zajmuje się słynnymi w starożytności zadaniami: o podwojeniu sześciennu i trysekcji kąta. Descartes pierwszy daje określenie stycznej, jako granicy siecznej, nie poprzestając na pojęciu stycznej starożytnych matematyków, jako prostej, która ma z krzywą tylko jeden punkt wspólny.

Współcześnie, a jak dowodzą niektórzy, w rzeczywistości nawet od Descartes'a, bo w 1629 r., wpadł na ten sam pomysł głośny także matematyk francuski *Fermat*, jednakże jego dzieło opublikowane było dopiero w r. 1660 (a więc w 27 lat po „Geometrii” Descartes'a) i niema dostatecznego powodu do odmańwania Kartezjuszowi zasługi pierwszeństwa.

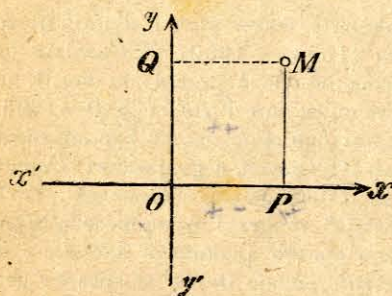
Descartes i współcześni mu matematycy traktowali geometrię analityczną tylko na płaszczyźnie, dopiero *Parent* (1666—1716) i *Clairaut* (1713—1765) rozszerzyli ją na utwory przestrzenne, a kiedy dzięki genialnym odkryciom *Newtona* oraz *Leibniza* można było stosować rachunek nieskończonościowy, geometria analityczna olbrzymimi krokami posuwać się zaczęła naprzód i zajęła obecnie bardzo poczesne miejsce w rzędzie nauk matematycznych.



## ROZDZIAŁ I.

### Punkt. Układy współrzędnych.

§ 1. Układ współrzędnych prostokątny. *Spółrzednemi* punktu nazywają się takie wielkości, które wyznaczają w zupełności położenie punktu na danej płaszczyźnie.



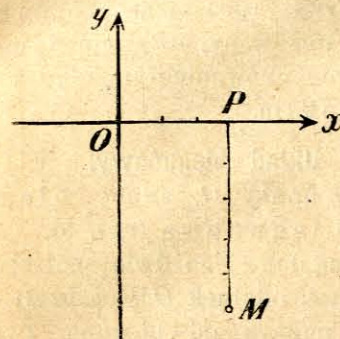
Rys. 1.

Niech będzie dany pewien punkt  $M$  (rys. 1). Aby wyznaczyć jego położenie na płaszczyźnie, kreślimy dwie do siebie prostopadłe proste  $xx'$  i  $yy'$ ; wtedy dwa odcinki  $MP$  i  $MQ$ , z których pierwszy wyraża odległość danego punktu od prostej  $xx'$ , a drugi—odległość od prostej  $yy'$  ( $MP \perp xx'$  i  $MQ \perp yy'$ ), wyznaczają położenie punktu  $M$  na płaszczyźnie.

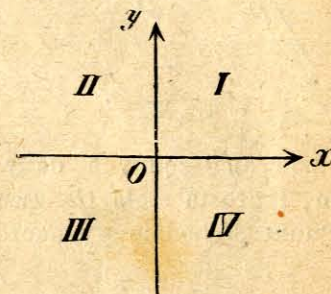
Odcinki  $OP(=MQ)$  i  $MP(=OQ)$  nazywają się współrzednemi punktu  $M$ , proste  $xx'$  i  $yy'$  — osiami współrzędnych; odcinek  $OP$ , lub liczbę, oznaczającą jego długość, nazywamy odciętą, a odcinek  $MP$ , lub liczbę, oznaczającą jego długość — rzędną danego punktu. Prosta  $xx'$  nazywa się osią odciętych, prosta  $yy'$  — osią rzędnych, a punkt  $O$  — początkiem układu współrzędnych, inaczej punktem zerowym.

Oczywiście, sama długość odcinków nie wystarcza do wyznaczenia punktu, trzeba mieć jeszcze kierunek, w którym te długości należy odmierzać. Jeżeli nie zrobiono innych zastrzeżeń, to zwykle odcięte, odmierzane na prawo od początku układu, uważa się za dodatnie, na lewo — za ujemne; rzędne zaś liczymy w górę od początku układu za dodatnie, na dół — za ujemne. Dodatni kierunek osi współrzędnych oznacza się często strzałką (jak naprz. na rys. 2 i następnych).

Na zasadzie powyższego łatwo już będzie wyznaczyć punkt, mając jego współrzedne. Niech np. trzeba będzie wyznaczyć punkt, którego współrzedne są:  $+3$  i  $-5$ , czyli, jak się zwykle pisze: punkt  $(+3, -5)$ . Kreślimy prostokątny układ osi współrzędnych  $xOy$  (rys. 2) i, licząc od punktu  $O$ , odmierzamy na osi odciętych na prawo od odcinek  $OP$ , równy trzem pewnym jednostkom długości, z punktu  $P$



Rys. 2.



Rys. 3.

wystawiamy prostopadłą do  $Ox$  i odmierzamy na niej na dół odcinek  $PM$  równy pięciu obranym jednostkom, otrzymujemy punkt  $M$ .

Osi współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery tak zwane ćwiartki, których kolej jest wskazana na rys. 3.

Z tego, co było powiedziane wyżej, wynika, że dla punktów, położonych:

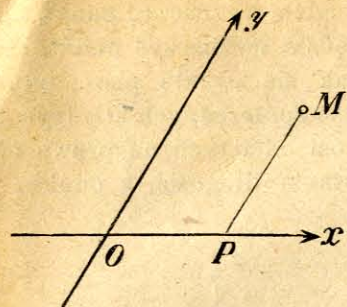
- w I ćwiartce, obie współrzedne są dodatnie,
- w II ćwiartce, odcięta jest ujemna, rzędna dodatnia,
- w III ćwiartce, obie współrzedne są ujemne i
- w IV ćwiartce, odcięta jest dodatnia, rzędna ujemna.

Widzimy więc, że dwie liczby, wzięte z właściwymi znakami, wystarczają w zupełności do wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie i odtąd, jeżeli powiemy, że punkt jest dany, rozumieć przez to będziemy, że jego współrzedne są dane.

Wartości współrzędnych oznaczane są zwykle liczbami oderwanymi, bez wskazania jednostki miary; robiąc więc wykreślenie, należy przedewszystkiem obrać jednostkę długości (1 cm., lub  $\frac{1}{2}$  cm., i t. p.); najdogodniej jest posługiwać się papierem milimetrowym, biorąc za skalę jedną, dwie lub więcej przedziałek na papierze.

§ 2. Układ ukośnokątny. Położenie punktu jest odniesione do dwóch osi współrzędnych:  $xx'$  i  $yy'$  (rys. 4), które tworzą z sobą pewien kąt. Dla wyznaczenia punktu  $M$ , wykreślamy  $MP \parallel Oy$ , wtedy odcinek  $OP$  nazywa się odciętą punktu  $M$ , a odcinek  $MP$  — jego





Rys. 4.

układzie współrzędnych dany jest stały punkt  $O$ , zwany biegunem, i prosta stała  $Oz$ , zwana osią biegunową (rys. 5).

Punkt  $M$  będzie wyznaczony, jeżeli są dane jego dwie współrzędne biegunowe: odcinek  $OM = \rho$ , czyli odległość punktu od bieguna, zwana promieniem wodzącym, i kąt  $MOz = \varphi$ , zwany anomalją, albo amplitudą, który tworzy promień wodzący z dodatnim kierunkiem osi biegunowej.

Anomalja  $\varphi$  zmieniać się może od  $0$  do  $360^\circ$  (i dalej) i liczy się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegarowej, a promień wodzący może przybierać wszelkie wartości dodatnie.

W dalszym wykładzie, o ile nie będzie wyraźnego omówienia, zawsze będziemy mieli na myśli prostokątny układ współrzędnych.

§ 4. Zadanie 1. Znaleźć odległość pomiędzy dwoma punktami danymi.

Dany jest prostokątny układ współrzędnych  $xOy$  (rys. 6) i dwa punkty:  $A$ , którego współrzędne są:  $OC = x_1$  i  $AC = y_1$  oraz punkt  $B$ , którego współrzędne są:

$$OD = x_2 \text{ i } BD = y_2.$$

Długość  $\delta$  odcinka  $AB$  obliczymy z  $\triangle ABE$ , w którym  $AE \parallel Ox$ :

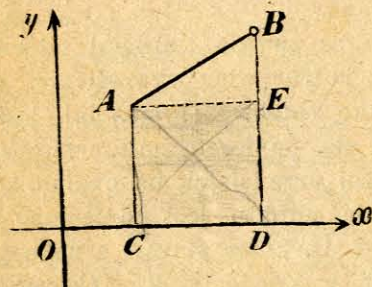
$$AB^2 = AE^2 + BE^2,$$

$$\text{czyli } \delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$\text{a więc } \delta = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

W przypadku szczególnym, kiedy jednym z punktów danych jest początek układu współrzędnych, otrzymamy:

$$\delta = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$



Rys. 6.

Taka jest odległość punktu  $(x_1, y_1)$  od początku układu.

§ 5. Zadanie 2. Znaleźć współrzędne punktu, który łącznie dwóch punktów danych dzieli w stosunku danym  $(m:n)$ .

Niech będą (rys. 7) dane dwa punkty:

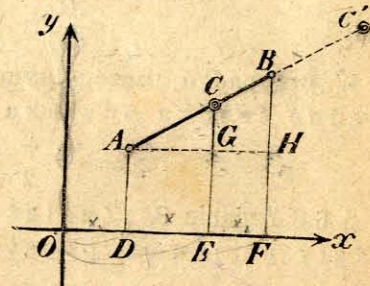
$A(x_1, y_1)$  i  $B(x_2, y_2)$ , punktem żądanym niech będzie  $C(x, y)$ .

Wykreślmy współrzędne tych trzech punktów i poprowadźmy  $AH \parallel Ox$ , wtedy z podobieństwa trójkątów  $ABH$  i  $ACG$  mamy:

$$\frac{AG}{GH} = \frac{AC}{CB}$$

$$\text{czyli } \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{stad zaś } nx - nx_1 &= mx_2 - mx, \\ (m+n)x &= nx_1 + mx_2, \\ x &= \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \end{aligned}$$



Rys. 7.

W podobny sposób otrzymamy:

$$\frac{CG}{BH} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{czyli } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{m}{m+n},$$

$$\begin{aligned} \text{stad zaś } (m+n)y &= ny_1 + my_2, \\ y &= \frac{ny_1 + my_2}{m+n}. \end{aligned}$$

W ten sposób punkt  $C$  został wyznaczony; ale, jak wiemy z planimetrii, istnieje jeszcze jedno rozwiązanie zadania: niech drugim punktem żądanym będzie  $C'$  ( $x', y'$ ), leżący na przedłużeniu odcinka  $AB$ . Zauważmy przedewszystkiem, że odległości  $AC'$  i  $C'B$  mają kierunki przeciwne, a zatem musimy napisać

$$\frac{AC'}{C'B} = -\frac{m}{n}.$$

Dokonawszy przeróbkę, podobnych do poprzednich znajdziemy

$$x' = \frac{nx_1 - mx_2}{n-m}; \quad y' = \frac{ny_1 - my_2}{n-m},$$

gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami bezwzględniemi.

O punktach  $C$  i  $C'$  mówimy, że pierwszy z nich dzieli odcinek  $AB$  w stosunku  $m:n$  wewnątrz, drugi — zewnątrz, a oba dzielą go harmonicznie w stosunku  $m:n$ . Punkty  $C$  i  $C'$  są ze sobą harmonicznie sprzężone; łatwo się przekonać, że tak samo będzie

$$\frac{CB}{BC'} = -\frac{CA}{AC'}.$$







b) Obrót układu prostokątnego dokoła początku, czyli zmiana kierunku osi przy zachowaniu tego samego początku.

c) Zmiana jednoczesna początku układu i kierunku osi prostokątnych.

d) Przejście od układu prostokątnego do biegunowego.

§ 9. Przesunięcie równoległe osi współrzędnych. Układ osi  $xOy$  (rysunek 10) pragniemy zastąpić nowym układem  $x'O'y'$ , którego osi są równoległe do poprzednich, a początek  $O'$  ma współrzędne:

$$ON = a \text{ i } O'N = b.$$

Wykreślmy współrzędne dowolnego punktu  $M(x, y)$ , wtedy mamy:

$$\begin{aligned} x &= OP = ON + O'Q = a + x', \\ y &= MP = O'N + MQ = b + y', \end{aligned}$$

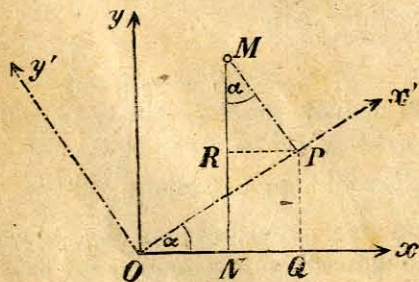
gdzie  $x'$  i  $y'$  są współrzędnymi punktu  $M$  w nowym układzie osi  $x'O'y'$ .

A więc na przejście od danego układu do nowego mamy wzory:

$$\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned} \quad (1)$$

§ 10. Obrót osi współrzędnych. Układ osi  $xOy$  (rys. 11) pragniemy teraz zastąpić układem  $x'O'y'$ , którego odpowiednie osi tworzą z poprzednimi kąt  $\alpha$ , a początek  $O$  pozostaje bez zmiany.

Wykreślmy współrzędne dowolnego punktu  $M$  w pierwszym i drugim układzie, poprowadźmy



Rys. 11.

ktu  $M$  w nowym układzie współrzędnych.

A zatem mamy

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad (2)$$

W podobny sposób będziemy mieli:

$$y = MN = PQ + MR = OP \cdot \sin \alpha + MP \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{czyli} \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (2')$$

Dla przejścia przeciwnego: od układu  $x'O'y'$  do  $xOy$ , pomnożmy wzór (2) przez  $\cos \alpha$ , a (2') przez  $\sin \alpha$  i dodajmy je do siebie, wtedy będzie

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

tak samo

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

§ 11. Zmiana początku układu i kierunku osi. Ażeby od układu  $xOy$  (rys. 12) przejść do  $x'O'y'$ , wyobraźmy sobie układ pomocniczy

$$x''O'y'',$$

wtedy na przejście od układu danego do pomocniczego będziemy mieli wzory

$$x = a + x'';$$

$$y = b + y'',$$

gdzie  $a$  i  $b$  są współrzędnymi punktu  $O'$  w układzie pierwszym.

Na przejście zaś od układu  $x''O'y''$  do  $x'O'y'$  mamy wzory

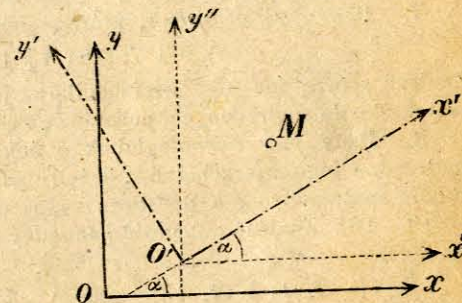
$$x'' = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y'' = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

a zatem na przejście od układu  $xOy$  do  $x'O'y'$  będą wzory:

$$x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (3)$$



Rys. 12.

§ 12. Przejście od układu prostokątnego do biegunowego. Ograniczymy się do przypadku najprostszego, kiedy oś odciętych jest zarazem osią biegunową (rys. 13) i za biegun wzięto początek układu prostokątnego.

Wykreślmy współrzędne

$$OP = x \text{ i } MP = y$$

dowolnego punktu  $M$ , z  $\triangle OMP$  mamy

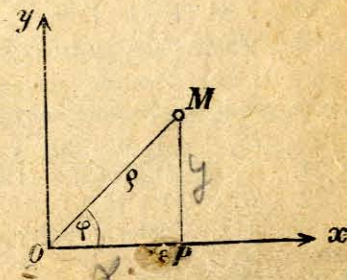
$$OP = OM \cdot \cos (\sphericalangle MOx);$$

$$MP = OM \cdot \sin (\sphericalangle MOx);$$

oznaczymy współrzędne biegunowe punktu  $M$ :

$$OM = \rho \text{ i } \sphericalangle MOx = \varphi,$$

$$\text{wtedy } x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi \quad (4)$$



Rys. 13.



Dla przejścia przeciwnego będzie:

$$\text{tang } \varphi = \frac{y}{x},$$

a podnosząc oba poprzednie wzory do kwadratu i dodając, otrzymamy

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

stąd

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

### § 13. Zadania.

(1 — 2). Wyznaczyć położenie następujących punktów:

1.  $(-3, 2)$ ;  $(-4, 5)$ ;  $(6, -3)$ ;  $(-3, -4)$ .

2.  $(0, -3)$ ;  $(4, 0)$ ;  $(-5, 0)$ ;  $(0, 2)$ .

(3 — 6). Wykreślić trójkąt  $ABC$ , mając spólrzędne jego wierzchołków:

3.  $A(-3, 2)$ ;  $B(5, 0)$ ;  $C(-4, 3)$ .

4.  $A(-5, 3)$ ;  $B(2, 1)$ ;  $C(1, -3)$ .

5.  $A(-3, 4)$ ;  $B(-4, -4)$ ;  $C(2, -2)$ .

6.  $A(2, 4)$ ;  $B(2, -3)$ ;  $C(-5, -3)$ .

7. Dany jest prostokąt, którego boki są:

a) 5 i 7; b)  $4\frac{1}{2}$  i 3 c) 12 i 5.

Znaleźć spólrzędne jego wierzchołków, jeżeli jeden z nich jest wzięty za początek układu spólrzędnego, podstawa za oś odciętych, a wysokość za oś rzędnych.

8. Dany jest równoległobok o bokach:  $a$  i  $b$  i kącie  $= 45^\circ$ . Znaleźć spólrzędne jego wierzchołków, jeżeli jeden z nich jest wzięty za początek układu spólrzędnego, a podstawa za oś odciętych.

(9—16). Znaleźć odległość pomiędzy dwoma punktami, których spólrzędne są dane:

9.  $(-2, 1)$  i  $(3, 13)$ .

10.  $(3, -2)$  i  $(11, 13)$ .

11.  $(1, 2)$  i  $(4, 6)$ .

12.  $(\frac{3}{2}, 1)$  i  $(5, 13)$ .

17. Dany jest punkt:

13.  $(1, \frac{2}{3})$  i  $(9, 3)$ .

14.  $(1, 2)$  i  $(5, -1)$ .

15.  $(3, -2)$  i  $(-12, 6)$ .

16.  $(1, \frac{2}{3})$  i  $(-7, -\frac{5}{3})$ .

a)  $(-3, 4)$ ; b)  $(5, -12)$ ; c)  $(-15, 8)$ .

Znaleźć jego odległość od początku układu spólrzędnego.

(18 — 19). Biorąc skalę 1 cm. (lub 2 cm.), wykreślić na papierze milimetrycznym następujące odcinki:

18.  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{3}$ .

19.  $\sqrt{20}$ ;  $\sqrt{13}$ ;  $\sqrt{10}$ .

(20 — 22) Znaleźć spólrzędne punktu, który łącznie dwóch punktów danych dzieli w stosunku danym:

20.  $(5, 10)$  i  $(35, 20)$  w stosunku 1 : 2.

21.  $(-3, 8)$  i  $(12, -12)$  „ 3 : 2.

22.  $(7, -8)$  i  $(6, 6)$  „ 4 : 3.

(23—24). Znaleźć spólrzędne środka odcinka, mając spólrzędne jego końców:

23.  $(3, -8)$  i  $(-7, 2)$ .

24.  $(-4, -6)$  i  $(-6, -2)$ .

(25—30). Dane są spólrzędne wierzchołków trójkąta. Obliczyć: 1) długość boków, 2) spólrzędne środków wszystkich trzech boków i 3) pole trójkąta:

25.  $(-15, 7)$ ;  $(13, -14)$ ;  $(-3, 16)$ .

26.  $(-6, 18)$ ;  $(9, -18)$ ;  $(15, -10)$ .

27.  $(12, 8)$ ;  $(-18, -8)$ ;  $(3, 20)$ .

28.  $(4\frac{1}{2}, 6)$ ;  $(-8, 6)$ ;  $(8, -6)$ .

29.  $(4\frac{1}{2}, 6)$ ;  $(-8, 6)$ ;  $(0, 0)$ .

30.  $(-12, 9)$ ;  $(0, 0)$ ;  $(12, 16)$ .

(31—35). Dane są spólrzędne wierzchołków trójkąta. Obliczyć: 1) długość linii środkowych, oraz 2) środek ciężkości trójkąta:

31.  $(16, 14)$ ;  $(-10, -10)$ ;  $(-3, 10)$ .

32.  $(-5, -5)$ ;  $(8, 7)$ ;  $(-\frac{3}{2}, 5)$ .

33.  $(7, 8)$ ;  $(2, -\frac{4}{3})$ ;  $(-6, -\frac{20}{3})$ .

34.  $(-4, -8)$ ;  $(5, -\frac{4}{3})$ ;  $(8, \frac{40}{3})$ .

35.  $(-\frac{11}{4}, -2)$ ;  $(11, \frac{20}{3})$ ;  $(-\frac{3}{2}, \frac{20}{3})$ .

(36—39). Przekonać się, czy leżą na jednej prostej trzy punkty dane:

36.  $(6, 6)$ ;  $(3, 5)$ ;  $(-6, 2)$ .

37.  $(1, 2)$ ;  $(6, 19)$ ;  $(-4, -15)$ .

38.  $(7, 10)$ ;  $(-4, 7)$ ;  $(0, 8)$ .

39.  $(a, -b)$ ;  $(a+b, a-b)$ ;  $(a+2b, 2a-b)$ .

40. Znaleźć odległość pomiędzy dwoma punktami w zależności od ich spólrzędnego biegunowych.

## ROZDZIAŁ II.

### Równania o dwóch zmiennych i ich znaczenie geometryczne.

§ 14. Równanie linii. O linii mówimy, że jest geometrycznie wyznaczona, jeżeli jest znane prawo, na mocy którego można wykreślić dowolną liczbę jej punktów. To prawo daje możność, mając odciętą jakiegokolwiek punktu danej linii, wykreślić jego rzędną, a więc daje pewną stałą zależność, która istnieje między spólrzędnymi wszystkich punktów tej linii, jako ich miejsca geometrycznego. Jeżeli tę zależność zdołamy wyrazić równaniem między zmiennymi  $x$  i  $y$  spólrzędnymi punktów, to otrzymamy w ten sposób równanie linii, którego postać będzie zależała od własności samej linii.

Jeżeli np. dana linia ma taką własność, że dla każdego jej punktu rzędna jest równa odciętej, to równaniem tej liczby będzie

$$y = x.$$

Jeżeli linia ma taką własność, że dla każdego jej punktu rzędna jest w stałym stosunku do odciętej, to jej równaniem będzie

$$y = ax,$$

gdzie  $a$  jest liczbą stałą.



Wogóle, jeżeli zależność między  $x$  i  $y$ , t. j. między „bieżącymi” spólrzędniemi punktów danej linii może być wyrażona w ten sposób, że każdej poszczególnej wartości na  $x$  odpowiada pewna oznaczona (jedna lub więcej) wartość na  $y$ , to mówimy, że zmienna  $y$  jest funkcją zmiennej  $x$  i oznaczamy to, pisząc

$$y = f(x),$$

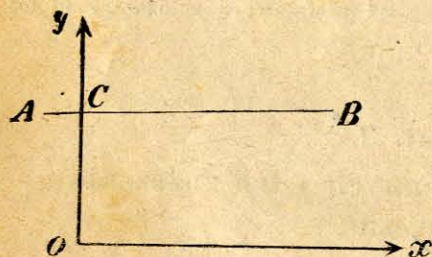
albo  $F(x, y) = 0.$

A więc, jeżeli linia jest wyznaczona geometrycznie, to równanie  $y = f(x)$ , lub  $F(x, y) = 0$ , które wyraża stały związek, jaki istnieje między spólrzędniemi każdego punktu tej linii, jest analitycznym przedstawieniem linii, czyli jest jej równaniem.

### § 15. Przykłady na równania danych linii.

*Przykład 1.* Znaleźć równanie prostej równoległej do osi odciętych i poprowadzonej w odległości  $a$  od niej.

Niech będzie (rys. 14) układ osi  $xOy$  i prosta  $AB$  równoległa do osi odciętych, odcinek  $OC = a$ .



Rys. 14.

Obierzmy na danej prostej szeregi dowolnych punktów; widzimy, że jakkolwiek punkt weźmiemy na  $AB$ , ze zmianą odciętej, rzędna zachowuje zawsze tę samą wartość  $a$ , a więc wogóle dla każdego punktu danej prostej będzie

$$y = a$$

i to jest właśnie równaniem prostej  $AB$ .

W szczególnym przypadku, je-

żeli odległość  $OC = 0$ , otrzymamy

$$y = 0,$$

t. j. równanie osi odciętych.

W podobny sposób możemy otrzymać

$$x = b,$$

równanie prostej równoległej do osi rzędnych i poprowadzonej w odległości  $b$  od niej.

W szczególnym znowu przypadku, kiedy  $b = 0$ , otrzymamy

$$x = 0,$$

t. j. równanie osi rzędnych.

*Przykład 2.* Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez początek układu spólrzędnych i jest nachylona do osi odciętych pod kątem  $45^\circ$ .

Niech będzie układ osi  $xOy$  (rysunek 15) i prosta  $OA$ , która z dodatnim kierunkiem osi odciętych tworzy kąt  $= 45^\circ$ .

Obierzmy na tej prostej dowolny punkt  $M$ , którego spólrzędne niech będą:  $OP = x_1$  i  $MP = y_1$ ; z  $\triangle OMP$  mamy:  $MP = OP$ , czyli

$$y_1 = x_1.$$

Dla jakiegokolwiek innego punktu  $(x_2, y_2)$  tej prostej będzie

$$y_2 = x_2,$$

a więc dla każdego punktu  $(x, y)$  danej prostej mamy

$$y = x,$$

i to jest równaniem prostej  $OA$ .

*Przykład 3.* Znaleźć równanie prostej, która na osiach spólrzędnych odmierza odcinki dane.

Niech będzie układ spólrzędnych  $xOy$  (rys. 16) i prosta  $KL$ , która na osiach odmierza odcinki:

$$OA = a \text{ i } OB = b.$$

Obierzmy na  $KL$  dowolny punkt  $M$ , którego spólrzędne niech będą,

$$OP = x \text{ i } MP = y;$$

z podobieństwa trójkątów  $AMP$  i  $AOB$  mamy:

$$\frac{AP}{AO} = \frac{MP}{OB}.$$

ale

$$AP = OA - OP = a - x; \quad AO = a; \quad MP = y; \quad OB = b,$$

a zatem

$$\frac{a - x}{a} = \frac{y}{b},$$

czyli

$$1 - \frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

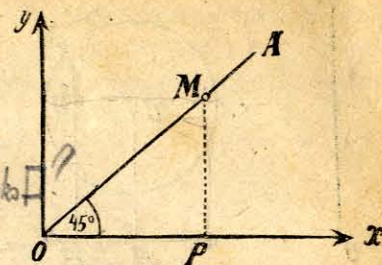
ostatecznie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

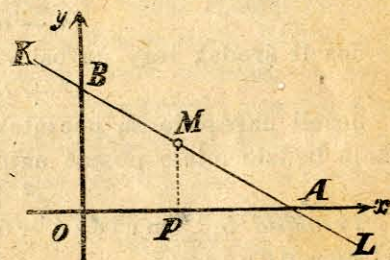
Ponieważ punkt  $M$  był zupełnie dowolny, więc dla każdego punktu prostej  $KL$  będziemy mieli taką zależność, a zatem otrzymaliśmy równanie danej prostej.

*Przykład 4.* Znaleźć równanie okręgu koła.

Dane jest koło (rys. 17), którego środkiem jest  $C$ . Układ osi obierzmy dowolnie i spólrzędne środka  $C$  niech będą:  $(a, b)$ , a okrąg

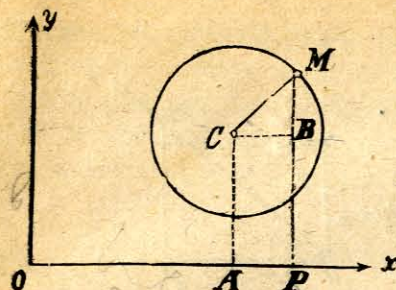


Rys. 15.



Rys. 16.





Rys. 17.

a więc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Otrzymaliśmy równanie, które wyraża stałą zależność między spólrzędnymi punktów okręgu koła, czyli równanie koła (dokładniej, równanie okręgu koła).

Jeżeli układ spólrzędnych obrać w taki sposób, żeby oś odciętych przechodziła przez środek koła, to wtedy będzie  $b = 0$  i równanie będzie miało postać prostszą:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Jeżeli środek leży na osi rzędnych, to równanie koła będzie:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Jeżeli nareszcie za początek układu wziąć środek koła, to równanie będzie miało postać najprostszą:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

**Przykład 5.** Znaleźć równanie konchoidy (muszli) Nikomedesa.

Sposób wykreślenia tej linii jest następujący:

Dana jest prosta stała  $KL$  (rys. 18) i pewien stały punkt  $O$ , z którego wyprowadzamy szereg promieni, przecinających prostą  $KL$  w punktach  $A, A', A'' \dots$  Odmierzając

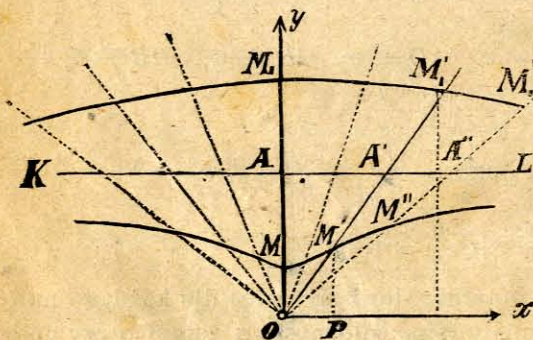
$$AM = AM_1 = a;$$

$$A'M' = A'M'_1 = a;$$

$$A''M'' = A''M''_1 = a;$$

i t. d., wyznaczamy szereg punktów:  $M, M', M'', \dots$  i  $M_1, M'_1, M''_1 \dots$ , które

po połączeniu utworzą dwie gałęzie linii krzywej, zwanej konchoidą (lub muszlą) Nikomedesa.



Rys. 18.

Aby otrzymać równanie konchoidy, za początek układu spólrzędnych obierzmy dany punkt  $O$ , za oś odciętych prostą równoległą do  $KL$ ; spólrzędne dowolnego punktu  $M'$  konchoidy niech będą  $OP = x$  i  $M'P = y$ . Z podobieństwa trójkątów  $OAA'$  i  $OM'P$

mamy 
$$\frac{OA'}{OM'} = \frac{OA}{M'P}$$

stad zaś 
$$\frac{OA' - OM'}{OM'} = \frac{OA - M'P}{M'P},$$

ale 
$$OA' - OM' = A'M' = a,$$
  

$$OM' = \sqrt{OP^2 + M'P^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$
  

$$M'P = y,$$

zaś odległość  $OA$  jest wiadoma i  $= b$ , więc

$$OA - M'P = b - y.$$

Mamy zatem 
$$\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b - y}{y},$$

czyli 
$$(x^2 + y^2)(b - y)^2 = a^2 y^2.$$

Oto jest równanie konchoidy.

**§ 16.** Miejsce geometryczne równania o dwóch zmiennych. Równanie o dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  ma ogólną postać:  $F(x, y) = 0$ . Ponieważ to równanie jest nieoznaczone, więc możemy jednej ze zmiennych nadawać wartości dowolne i rozwiązując równanie, odnaleźć odpowiednie wartości drugiej zmiennej, a więc możemy otrzymać nieskończoną ilość par liczb, zadość czyniących danemu równaniu. Jeżeli teraz te liczby (rzeczywiste) uważać będziemy za poszczególne wartości spólrzędnych w pewnym układzie, to otrzymamy nieskończony szereg punktów na płaszczyźnie, których spólrzędne zadość czynią równaniu  $F(x, y) = 0$ . Połączywszy z sobą te punkty, otrzymamy linię (wogóle krzywą), która nazywa się miejscem geometrycznym lub obrazem danego równania.

Ponieważ każda para rzeczywistych liczb, czyniących zadość równaniu  $F(x, y) = 0$ , wyznaczać będzie pewien punkt na płaszczyźnie, więc oczywiście, im więcej par takich liczb znajdziemy, tem większą wyznaczymy liczbę punktów żadanego miejsca geometrycznego.

W szczególnych przypadkach zdarzyć się może, że dane równanie albo wcale nie ma miejsca geometrycznego, albo przedstawia jeden lub więcej punktów, nie linię.

Np. równanie  $x^2 + y^2 + 25 = 0$  nie ma żadnego obrazu geometrycznego, dlatego że niema takich liczb rzeczywistych, któreby mu zadość czyniły.

Równanie  $5x^2 + 3y^2 = 0$



ma jedno rozwiązanie:  $x = 0$  i  $y = 0$ , a więc przedstawia jeden punkt  $(0, 0)$ , t. j. początek układu współrzędnych.

Następujących kilka przykładów da nam możliwość zapoznania się ze sposobem wykreślania obrazów geometrycznych danych równań, czyli wykreślania linii, której równanie jest dane.

**Przykład 1.** Wykreślić obraz geometryczny równania

$$y = 3x - 2.$$

Dany jest układ 'spółrzędnych  $xOy$  (rys. 19).

Nadajmy zmiennej  $x$  w danym równaniu kolejno szereg wartości:

$$0, 1, 2, 3, \dots,$$

wtedy z równania otrzymamy na  $y$ :

$$-2, 1, 4, 7, \dots,$$

a więc otrzymamy szereg punktów:

$$M(0, -2); M'(1, 1);$$

$$M''(2, 4); \dots$$

Zakładając teraz

$$x = -1, -2, -3, \dots,$$

otrzymujemy

$$y = -5, -8, -11, \dots,$$

i wyznaczmy znowu szereg punktów:

$$N(-1, -5); N'(-2, -8);$$

$$N''(-3, -11); \dots$$

Połączywszy z sobą te punkty, otrzymamy linię  $KL$ , która będzie obrazem geometrycznym danego równania.

Można się przekonać, że linia  $KL$  jest prosta. W tym celu obierzmy na niej trzy dowolne punkty:

$$M(0, -2); M'(1, 1); M''(2, 4)$$

i zobaczmy, czy będzie spełniony warunek (patrz § 6):

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

W danym razie mamy:

$$0 \cdot (1 - 4) + 1 \cdot (4 - 2) + 2 \cdot (-2 - 1) = 0 + 6 - 6 = 0,$$

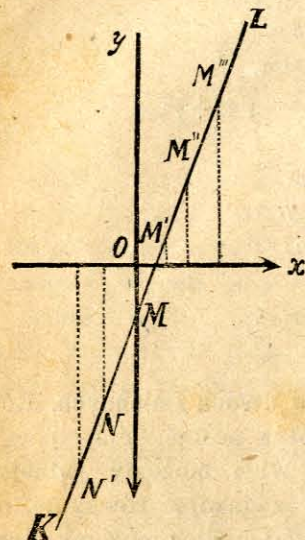
a zatem linia  $KL$  jest prosta.

**Przykład 2.** Wykreślić linię:  $x^2 + y^2 = 16$ .

Z równania mamy:

$$y = \pm \sqrt{16 - x^2},$$

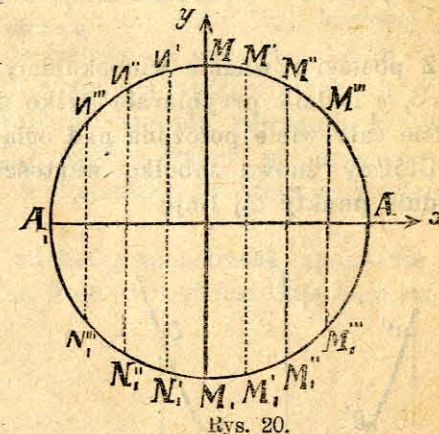
a więc każdej wartości na  $x$  odpowiadają po dwie wartości na  $y$ , które się różnią od siebie tylko znakiem, czyli przy tej samej odciętej otrzymamy dwa punkty, symetrycznie położone względem osi  $x$ .



Rys. 19.

Nadając zmiennej  $x$  szereg dowolnych wartości, otrzymamy szereg odpowiednich wartości na  $y$ , wyznaczających punkty żadanego miejsca geometrycznego; zapiszmy liczby w kolumnach dla tem łatwiejszego orjentowania się i ułożmy tabelkę:

| $x$ | $y$             | Punkty na rys. 20 |
|-----|-----------------|-------------------|
| 0   | $\pm 4$         | $M$ i $M_1$       |
| 1   | $\pm \sqrt{15}$ | $M'$ i $M_1'$     |
| 2   | $\pm \sqrt{12}$ | $M''$ i $M_1''$   |
| 3   | $\pm \sqrt{7}$  | $M'''$ i $M_1'''$ |
| 4   | 0               | $A$               |
| -1  | $\pm \sqrt{15}$ | $N'$ i $N_1'$     |
| -2  | $\pm \sqrt{12}$ | $N''$ i $N_1''$   |
| -3  | $\pm \sqrt{7}$  | $N'''$ i $N_1'''$ |
| -4  | 0               | $A_1$             |

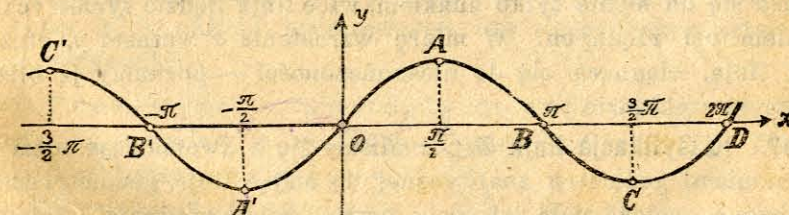


Rys. 20.

Wykreśliwszy punkty:  $M, M', M''$  i t. d. i połączywszy je z sobą, otrzymamy obraz geometryczny danego równania i jak łatwo się przekonać, będzie nim okrąg koła.

**Przykład 3.** Wykreślić miejsce geometryczne równania

$$y = \sin x.$$



Rys. 21.

| $x$               | $y$ | Punkt |
|-------------------|-----|-------|
| 0                 | 0   | $O$   |
| $\frac{1}{2}\pi$  | 1   | $A$   |
| $\pi$             | 0   | $B$   |
| $\frac{3}{2}\pi$  | -1  | $C$   |
| $2\pi$            | 0   | $D$   |
| $-\frac{1}{2}\pi$ | -1  | $A'$  |
| $-\pi$            | 0   | $B'$  |
| $-\frac{3}{2}\pi$ | 1   | $C'$  |
| $-2\pi$           | 0   | $D'$  |

| $x$               | $y$ | Punkt |
|-------------------|-----|-------|
| 0                 | 0   | $O$   |
| $-\frac{1}{2}\pi$ | -1  | $A'$  |
| $-\pi$            | 0   | $B'$  |
| $-\frac{3}{2}\pi$ | 1   | $C'$  |
| $-2\pi$           | 0   | $D'$  |

Ułożmy tabelkę odpowiednich wartości na  $x$  i  $y$  i wyznaczmy odpowiednie punkty (rys. 21):

Wykreśliwszy otrzymane punkty i połączywszy je z sobą, otrzymamy linię krzy-



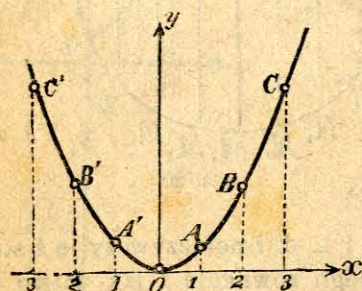
wą, która się składa z nieskończonej liczby części sobie równych, przecinających oś odciętych i położonych naprzemian to nad nią, to pod nią. Otrzymana linja nazywa się *sinusoidą* i przedstawia obraz zmienności wstawy trygonometrycznej.

**Przykład 4.** Wykreślić miejsce geometryczne równania  

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Z postaci równania wnioskujemy, że przy zmianie  $x$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ ,  $y$  będzie przybierało tylko dodatnie wartości, a więc linja będzie całkowicie położona nad osią odciętych.

Ułożmy znowu tabelkę wartości na  $x$  i  $y$  i wyznaczmy odpowiednie punkty tej linji;



Rys. 22.

Każdej dodatniej wartości  $y$  odpowiadają po dwie wartości na  $x$ , różniące się od siebie tylko znakiem, więc linja będzie symetryczna względem osi rzędnych. W miarę wzrastania  $x$  wzrasta  $y$ , otrzymamy linję, ciągnącą się do nieskończoności — poznamy ją bliżej w dalszym wykładzie.

**§ 17. Klasyfikacja linji.** Zapoznaliśmy się z dwoma zasadniczymi zagadnieniami geometrii analitycznej: 1) mając linję, geometrycznie wyznaczoną, znaleźć stałą zależność pomiędzy spółrzednymi jej punktów, czyli znaleźć jej równanie i 2) nawzajem: wykreślić linję, której równanie jest dane. Oba te zagadnienia nawzajem się uzupełniają i mają na celu rozpoznanie własności pewnej linji.

Linje, ze względu na postać równania, które je przedstawia, dzielą się na dwie gromady: linje algebraiczne i linje przestępne; do pierwszej gromady należą takie linje, których równanie, odniesione do kartezjańskiego układu spółrzednych, jest funkcją algebraiczną zmiennych  $x$  i  $y$ , a więc w których równaniu zmienne  $x$  i  $y$  nie są uzależnione znakiem wykładnika potęgi, logarytmu, funkcji trygonometrycznej i t. p.; wszystkie pozostałe linje należą do przestępnych.

| $x$          | $y$            | Punkty     |
|--------------|----------------|------------|
| 0            | 0              | O          |
| $\pm 1$      | $\frac{1}{2}$  | A i A'     |
| $\pm 2$      | 2              | B i B'     |
| $\pm 3$      | $4\frac{1}{2}$ | C i C'     |
| —            | —              | —          |
| $\pm \infty$ | $+\infty$      | w $\infty$ |

Z linij, które poznaliśmy z poprzednich przykładów, do algebraicznych należą: linja prosta, koło, konchoida; do przestępnych: sinusoida.

Linje algebraiczne, ze względu na stopień ich równania, dzielą się na linje 1-go, 2-go, 3-go rzędu i t. d. Rząd linji krzywej jest jej cechą charakterystyczną i nie zależy od wyboru układu spółrzednych, lecz od jej własności, a zmiana spółrzednych nie może wpłynąć na podniesienie lub obniżenie stopnia równania krzywej, dlatego że, jak widzieliśmy (§ 11), ogólne wzory na przejście od jednego układu do drugiego są funkcjami 1-go stopnia względem spółrzednych.

Z pomiędzy linij, z którymi mieliśmy sposobność zapoznania się, prosta należy do linij 1-go rzędu, koło (okrąg) jest linją 2-go rzędu, konchoida 4-go rzędu i t. d.

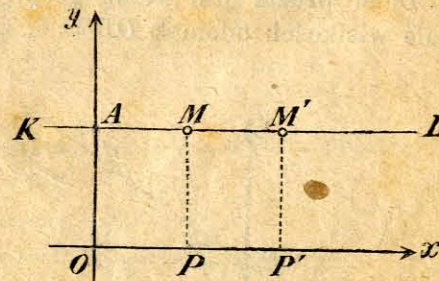
### ROZDZIAŁ III.

#### Linja prosta.

**§ 18.** Przystępujemy do szczegółowego rozbioru linij pierwszego i drugiego rzędu, rozpoczynając od linji prostej.

**Równanie linji prostej.** Aby wyprowadzić równanie prostej, odniesiemy ją do układu spółrzednych  $xOy$  i rozróżnimy cztery możliwe przypadki:

1) Prosta jest równoległa do osi odciętych. Niech prosta  $KL$  przecina oś rzędnych w punkcie  $A$  (rys. 23). Odcinek  $OA = k$ ; obierzmy na danej prostej dowolny punkt  $M$ , widzimy, że jego rzędna  $MP = k$  i wogóle, dla jakiegokolwiek wartości odciętej  $x$ , rzędna zachowuje zawsze tę samą wartość  $k$ , czyli

$$y = k$$


Rys. 23.

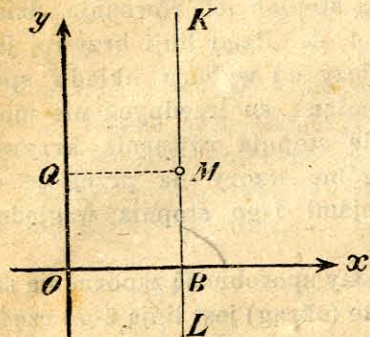
jest równaniem danej prostej.

2) Prosta jest równoległa do osi rzędnych.

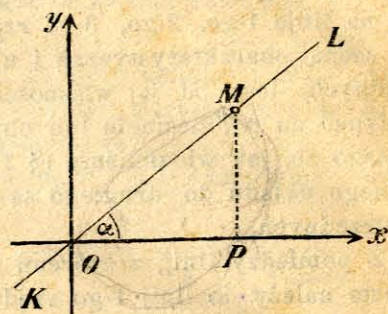
Niech prosta  $KL$  (rys. 24) przecina oś  $x$  w punkcie  $B$ , odcinek  $BO = l$ , wtedy obrawszy dowolny punkt na danej prostej, widzimy, że jego odcięta  $= l$ , a więc dla



jakiegokolwiek wartości rzędnej odcięta będzie miała zawsze tę samą wartość  $l$ , czyli  $x = l$  jest równaniem danej prostej.



Rys. 24.



Rys. 25.

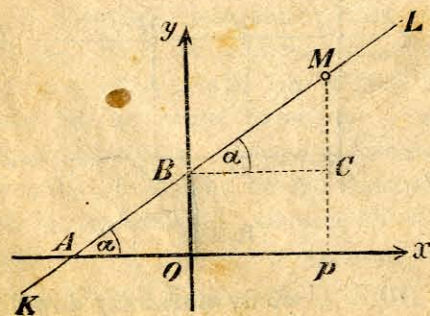
3) Prosta przechodzi przez początek układu. Prosta  $KL$  będzie geometrycznie wyznaczona, jeżeli jest wiadomy kąt  $\alpha$ , który tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych (rys. 25).

Obierzmy na prostej  $KL$  dowolny punkt  $M$ , którego współrzędne niech będą:  $OP = x$  i  $MP = y$ , wtedy z  $\triangle$  prostokątnego  $OMP$  mamy  $MP = OP \cdot \tan \alpha$ ,  
czyli  $y = x \cdot \tan \alpha$ .

Oto jest równanie prostej  $KL$ . Wprowadźmy oznaczenie  $\tan \alpha = m$ ,  
otrzymamy równanie  $y = mx$ .

4) Przypadek ogólny: prosta  $KL$  nie jest równoległa do żadnej z osi współrzędnych i nie przechodzi przez początek układu (rys. 26).

Dana prosta jest teraz geometrycznie wyznaczona przez dwie stałe wielkości: odcinek  $OB = b$ , który odmierza na osi rzędnych, i kąt  $\alpha$ , który tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych.



Rys. 26.

Obierzmy na prostej  $KL$  dowolny punkt  $M$ , którego współrzędne niech będą:  $OP = x$  i  $MP = y$ , poprowadźmy  $BC \parallel Ox$ , wtedy z  $\triangle BMC$  mamy  $MC = BC \cdot \tan \alpha$ ,  
ale  $MC = MP - OB = y - b$ ,  
 $BC = OP = x$ ,  
więc  $y - b = x \cdot \tan \alpha$ ,  
czyli  $y = x \tan \alpha + b$ .

Wprowadźmy znowu oznaczenie

$$\tan \alpha = m,$$

wtedy równanie prostej będzie

$$y = mx + b \quad \dots \quad (1)$$

§ 19. Uwagi nad równaniem prostej. Otrzymane równanie (1), dla odróżnienia od innych, które mogą również przedstawiać linię prostą, będziemy nazywali równaniem zwykłym linii prostej. Zauważmy tu przedewszystkiem, że:

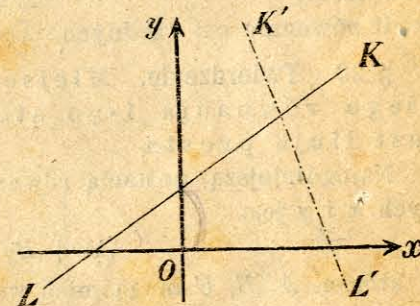
1) W równaniu występują dwie stałe wielkości:  $m (= \tan \alpha)$  i  $b$ , z których pierwsza wyznacza kierunek prostej i dlatego nazywa się stałą kierunkową lub współczynnikiem kątowym i przybierać może wszelkie wartości (kąt  $\alpha$  zmienia się od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ ), a druga jest równa odcinkowi, który dana prosta odmierza na osi rzędnych, i nazywa się rzędną początkową.

Widzimy więc, że równanie prostej jest zależne od dwóch wielkości stałych, co się tłumaczy geometrycznie w ten sposób, że do wyznaczenia prostej konieczne i dostateczne są dwa warunki (np. prosta przechodzi przez dwa punkty dane, albo przez jeden punkt i jest równoległa do prostej danej i t. p.).

2) Jak dopiero co powiedzieliśmy, w równaniu

$$y = mx + b,$$

odniesionem do układu współrzędnych  $xOy$  (rys. 27), dwie stałe  $m$  i  $b$  wyznaczają prostą, czyli, mając dane  $m$  i  $b$ , możemy wykreślić prostą, ale tylko jedną ( $KL$ ). Inna jakakolwiek prosta, np.  $K'L'$ , w tym samym układzie współrzędnych będzie wyznaczona przez dwie inne stałe, np.  $m'$  i  $b'$ , więc jej równanie będzie  $y = m'x + b'$ .



Rys. 27.

Uwaga. Prosta  $KL$ , odniesiona do innego układu współrzędnych  $x'O'y'$ , miałaby równanie:  $y' = mx' + b$ .

3) Jeżeli w równaniu  $y = mx + b$  stała  $b = 0$ , to otrzymamy  $y = mx$ , a więc otrzymamy prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

4) Jeżeli w równaniu (1) współczynnik kątowy  $m = 0$ , to otrzymujemy  $y = b$ ,  
równanie prostej, równoległej do osi odciętych.



5) Jeżeli obiedwie stałe są równe zeru, to otrzymujemy

$$y = 0,$$

czyli równanie osi odciętych.

6) Z równania (1) nie można wprost otrzymać prostej równoległej do osi rzędnych, dlatego, że wtedy kąt  $\alpha = 90^\circ$ , a więc  $m = \tan \alpha = \infty$  i  $b = \infty$ . Wtedy z  $\triangle ABO$  (rys. 26) mamy

$$BO = AO \cdot \tan \alpha,$$

czyli, oznaczając  $AO = -k$ ,

$$b = -km,$$

wstawiając tę wartość  $b$  w równanie (1), mamy

$$y = mx - km,$$

stąd

$$\frac{y}{m} = x - k.$$

Zakładając teraz  $m = \infty$  ( $\alpha = 90^\circ$ ), otrzymujemy

$$x - k = 0, \text{ czyli } x = k,$$

t. j. równanie prostej równoległej do osi rzędnych.

7) Jeżeli w równaniu (1) będzie  $m = \infty$  i  $b = 0$ , to napisawszy je naprzód w postaci

$$x = \frac{y}{m} - \frac{b}{m},$$

$$x = 0.$$

otrzymamy

czyli równanie osi rzędnych.

§ 20. Twierdzenie. Miejscem geometrycznem wszelkiego równania 1-go stopnia o dwóch zmiennych jest linia prosta.

Najogólniejszą postacią równania 1-go stopnia o dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  jest

$$Ax + By + C = 0. \dots \dots \dots (2)$$

w którym  $A, B, C$  mogą mieć wszelkie wartości, a więc, dla dowiedzenia twierdzenia, należy rozważyć wszystkie możliwe przypadki.

1) Załóżmy naprzód, że  $A = 0$ , wtedy mamy równanie

$$By + C = 0, \text{ czyli } y = -\frac{C}{B},$$

albo oznaczając  $-\frac{C}{B} = k$ ,

$$y = k,$$

gdzie  $k$  jest liczbą stałą.

Z postaci otrzymanego równania wnosimy, że zmiennej  $x$  można nadawać wszelkie wartości, wtedy  $y$  będzie zachowywało zawsze tę samą wartość  $k$ , a więc miejscem geometrycznem otrzymanego równania będzie prosta równoległa do osi odciętych.

2) Jeżeli  $B = 0$ , to otrzymujemy

$$Ax + C = 0; \quad x = -\frac{C}{A},$$

czyli, oznaczając  $-\frac{C}{A} = l$ ,

$$x = l,$$

gdzie  $l$  jest liczbą stałą.

Rozumując tak samo, jak w przypadku poprzednim, wywnioskujemy, że obrazem geometrycznym równania jest prosta równoległa do osi rzędnych.

3) Niech teraz będzie  $C = 0$ , wtedy mamy równanie

$$Ax + By = 0,$$

stąd

$$By = -Ax,$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{A}{B},$$

czyli

$$\frac{y}{x} = m,$$

gdzie  $m$  jest liczbą stałą.

Jeżeli teraz zmiennej  $x$  nadamy szereg dowolnych wartości

$$x_1, x_2, x_3, \dots \dots \dots,$$

to na  $y$  otrzymamy odpowiednio takie wartości

$$y_1, y_2, y_3, \dots \dots \dots,$$

że

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \dots \dots \dots = m.$$

Wykreślmy teraz (rys. 28)

punkty:

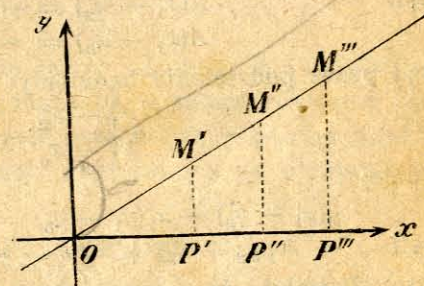
$$M'(x_1, y_1); \quad M''(x_2, y_2);$$

$$M'''(x_3, y_3); \dots \dots$$

wtedy mamy

$$\frac{MP'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} =$$

$$= \frac{M'''P'''}{OP'''} = \dots \dots \dots,$$



Rys. 28.

a zatem otrzymamy szereg trójkątów:

$OMP', OM''P'', OM'''P''', \dots \dots$ , które mają po dwa boki proporcjonalne, a kąty między nimi zawarte  $= 90^\circ$ , a więc będą to trójkąty podobne, stąd zaś wynikać będzie

$$\sphericalangle M'Ox = \sphericalangle M''Ox = \sphericalangle M'''Ox = \dots \dots \dots,$$

to zaś dowodzi, że punkty  $M', M'', M''', \dots \dots$  leżą na jednej prostej.



A zatem równanie  $Ax + By = 0$  przedstawia prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych.

4) Jeżeli będzie  $A = 0$  i  $C = 0$ , wtedy mamy równanie

$$By = 0,$$

czyli

$$y = 0,$$

które jest równaniem osi odciętych.

5) Jeżeli  $B = 0$  i  $C = 0$ , to otrzymamy

$$Ax = 0,$$

czyli

$$x = 0$$

t. j. równanie osi rzędnych.

6) Niech nareszcie żaden ze współczynników równania

$$Ax + By + C = 0$$

nie jest równy zeru.

Obierzmy na linii, która jest miejscem geometrycznym tego równania, trzy dowolne punkty:  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$  i  $(x_3, y_3)$ . Jeżeli te punkty leżą na poszukiwanej linii, to ich współrzędne muszą zadośćczynić jej równaniu, a więc, wstawiając w równanie za  $x$  i  $y$  kolejno  $x_1$  i  $y_1$ ,  $x_2$  i  $y_2$ , oraz  $x_3$  i  $y_3$ , otrzymamy tożsamości:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0.$$

Odejmując teraz od 1-ej z tych tożsamości naprzód 2-gą, a potem 3-cią, mamy:

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0,$$

$$A(x_1 - x_3) + B(y_1 - y_3) = 0,$$

czyli

$$A(x_1 - x_2) = -B(y_1 - y_2),$$

$$A(x_1 - x_3) = -B(y_1 - y_3).$$

Stąd przez podzielenie będziemy mieli

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3},$$

a dalej

$$x_1(y_1 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) = x_1(y_1 - y_2) - x_3(y_1 - y_2),$$

czyli

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

a to dowodzi, że obrane trzy punkty leżą na jednej prostej (patrz § 6).

Twierdzenie udowodnione; z niego widzimy, że istnieje jedyna linia 1-go rzędu, mianowicie linia prosta.

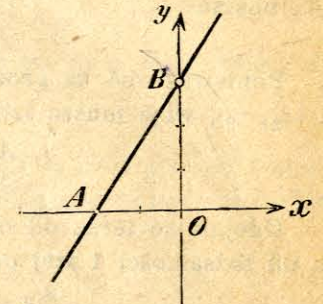
§ 21. Zadanie 1. Wykreślić prostą, której równanie jest dane.

Ponieważ prosta jest w zupełności wyznaczona przez dwa punkty, więc dość będzie znaleźć dwie pary liczb rzeczywistych, zadość-

czyniących danemu równaniu i przez otrzymane w ten sposób dwa punkty poprowadzić prostą. Najłatwiej bywa za takie punkty obrać te, w których prosta przecina się z osiami współrzędnych, biorąc w równaniu naprzód  $y = 0$ , a potem  $x = 0$ .

Niech, np., trzeba będzie wykreślić prostą:  $3x - 2y + 6 = 0$ ; układ osi  $xOy$  (rys. 29).

Zakładając w równaniu  $y = 0$ , otrzymujemy:  $3x = -6$ ;  $x = -2$  (punkt A); zakładając  $x = 0$ , mamy:  $2y = 6$ ;  $y = 3$  (punkt B); żadaną prostą jest  $AB$ .



Rys. 29.

§ 22. Zadanie 2. Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt dany.

Dany jest punkt  $(x_1, y_1)$ . Równanie wszelkiej prostej, a więc i żądanej, możemy napisać w postaci  $y = mx + b$ , ale że punkt  $(x_1, y_1)$  ma leżeć na tej prostej, jego współrzędne powinny zadośćczynić jej równaniu, czyli musi istnieć tożsamość

$$y_1 = mx_1 + b.$$

Widzimy zatem, że pomiędzy stałymi  $m$  i  $b$ , wyznaczającymi prostą, istnieją dwie zależności, z których możemy wyrugować jedną z tych stałych. Wyrugujemy  $b$ , odejmując od siebie napisane równości, wtedy otrzymamy

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \dots \quad (3)$$

i to będzie równanie żądane.

Widzimy, że otrzymane równanie zależy od stałej  $m$  i dopóki  $m$  nie jest dane, prosta nie będzie wyznaczona, a zatem równanie (3) przedstawia wogóle pęk linii prostych, przechodzących przez punkt dany, dla każdej zaś poszczególnej wartości na  $m$  otrzymamy pewną prostą.

Jeżeli posługiwać się ogólnem równaniem prostej

$$Ax + By + C = 0,$$

to rozumując, jak poprzednio, napiszemy naprzód tożsamość

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

a następnie przez odejmowanie, otrzymamy równanie żądane:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0, \quad \dots \quad (3')$$

zależne pozornie od dwóch stałych:  $A$  i  $B$ , wystarczy jednak podzielić równanie przez jedną z nich (np.  $A$ ), aby się przekonać, że ono zależy tylko od jednej stałej  $\left(\frac{B}{A}\right)$ .



§ 23. Zadanie 3. Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty dane.

Dane są dwa punkty:  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , a więc żądana prosta powinna być jedyna. Równanie wszelkiej prostej, a więc i żądanej, ma postać

$$Ax + By + C = 0.$$

Ponieważ zaś ta prosta ma przechodzić przez punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , więc muszą istnieć tożsamości:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0.$$

Odejmując teraz od ogólnego równania prostej tożsamość 1-szą, a od tożsamości 1-szej odejmując 2-gą, otrzymujemy:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

$$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0.$$

stąd zaś

$$B(y - y_1) = -A(x - x_1),$$

$$B(y_1 - y_2) = -A(x_1 - x_2).$$

Dzieląc przez siebie te dwa równania, mamy

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}.$$

Oto jest żądane równanie. Napiszmy je w innej nieco postaci, uwidoczniając współczynnik katowy:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \dots \quad (4)$$

§ 24. Zadanie 4. Znaleźć punkt przecięcia się dwóch prostych.

Dane są dwie proste

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x + B'y + C' = 0.$$

Punkt przecięcia się tych prostych leży jednocześnie na jednej z nich i na drugiej, więc jego współrzędne powinny zadośćczynić obu danym równaniom, a zatem te współrzędne odnajdziemy, rozwiązując równania względem  $x$  i  $y$ .

Rugując  $y$ , otrzymujemy

$$(AB' - A'B)x + (B'C - BC') = 0,$$

rugując zaś  $x$ , mamy

$$(AB' - A'B)y + (AC' - A'C) = 0.$$

A więc

$$x = \frac{B'C - B'C'}{AB' - A'B}, \quad y = \frac{A'C - AC'}{AB' - A'B} \quad \dots \quad (5)$$

Jeżeli równania prostych są dane w postaci zwykłej:

$$y = mx + b,$$

$$y = m'x + b',$$

to, rozwiązując je względem  $x$  i  $y$ , mamy

$$x = \frac{b' - b}{m - m'}, \quad y = \frac{b'm - bm'}{m - m'}; \quad \dots \quad (5')$$

Wniosek 1. Jeżeli mianownik otrzymanych na  $x$  i  $y$  wartości (5) jest równy zeru:

$$AB' - A'B = 0,$$

a żaden z liczników zerem nie jest, wtedy  $x = \infty$  i  $y = \infty$  i równania nie będą miały rozwiązań wspólnych, a proste będą do siebie równoległe.

Wtedy mamy  $AB' - A'B = 0$ , czyli

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \dots \quad (6)$$

A zatem: jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to w ich równaniach współczynniki zmiennych  $x$  i  $y$  są odpowiednio do siebie proporcjonalne i nawzajem.

Np. z równań

$$6x - 15y = 4 \text{ i } 2x - 5y = 8$$

widać, że dane proste są do siebie równoległe.

Jeżeli równania prostych dane są w postaci zwykłej, to, jak widzimy z wartości (5'), warunkiem równoległości będzie:

$$m = m', \quad \dots \quad (6')$$

czyli: jeżeli dwie proste są do siebie równoległe, to współczynniki katowe ich równań są sobie równe.

Np. dwie proste:  $y = 3x + 8$  i  $y = 3x - 5$  są do siebie równoległe.

Wniosek 2. Jeżeli w otrzymanych na  $x$  i  $y$  wartościach (5) mianownik i jeden z liczników staje się zerem:

$$AB' - A'B = 0$$

$$BC' - B'C = 0,$$

to łatwo się przekonać, że wtedy i drugi licznik będzie równy zeru.

Istotnie, z pierwszego warunku mamy

$$AB' = A'B, \text{ czyli } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

z drugiego

$$BC' = B'C, \text{ czyli } \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$



stad  $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$ , czyli  $A'C - AC' = 0$ ,

o co właśnie chodziło.

Wtedy otrzymujemy  $x = \frac{0}{0}$  i  $y = \frac{0}{0}$ , to znaczy, że dane proste do siebie przystają, czyli tworzą jedną prostą; a zatem możemy powiedzieć, że jeżeli w równaniach dwóch prostych

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

to dane równania przedstawiają jedną i tę samą linię prostą i nawzajem.

§ 25. Zadanie 5. Znaleźć kąt między dwiema prostymi.

Dane są dwie proste (rys. 30):  $KL$ , która z osią odciętych tworzy kąt  $\alpha$  i  $K'L'$ , która z tą osią tworzy kąt  $\alpha'$ ; równania tych prostych niech będą:

$$y = mx + b, \\ y = m'x + b',$$

gdzie  $m = \tan \alpha$  i  $m' = \tan \alpha'$ .

Kąt  $\varphi$  między temi prostymi można znaleźć z zależności

$$\varphi = \alpha - \alpha'.$$

skąd

$$\tan \varphi = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha'}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \alpha'}$$

czyli

$$\tan \varphi = \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \dots (7)$$

Wniosek. Jeżeli w otrzy-

manej na  $\tan \varphi$  wartości (7) mianownik jest równy zeru:

$$1 + mm' = 0,$$

czyli

$$m' = -\frac{1}{m}, \dots (8)$$

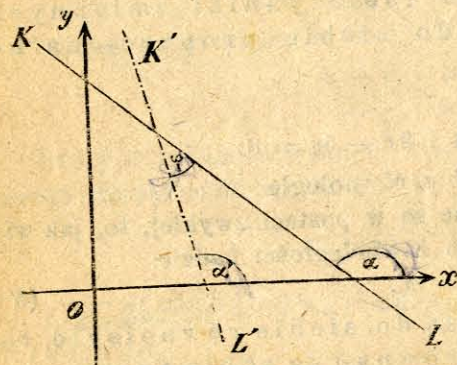
to  $\tan \varphi = \infty$ , kąt  $\varphi = 90^\circ$  i proste są do siebie prostopadłe, a więc

dwie proste są do siebie prostopadłe, jeżeli współczynnik kątowy w równaniu jednej prostej jest równy odwrotności współczynnika kątowego drugiej, ze znakiem zmienionym.

Np. dwie proste

$$y = 2x - 5 \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + 3$$

są do siebie prostopadłe.



Rys. 30.

Jeżeli równania dwóch prostych są dane w postaci ogólnej:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

to ich współczynniki kątowe można otrzymać, napisawszy równania w postaci:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

$$y = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'},$$

wtedy

$$m = -\frac{A}{B}; \quad m' = -\frac{A'}{B'},$$

a więc warunkiem prostopadłości danych prostych będzie

$$-\frac{A}{B} = +\frac{B'}{A'},$$

czyli

$$AA' + BB' = 0.$$

Np. proste:

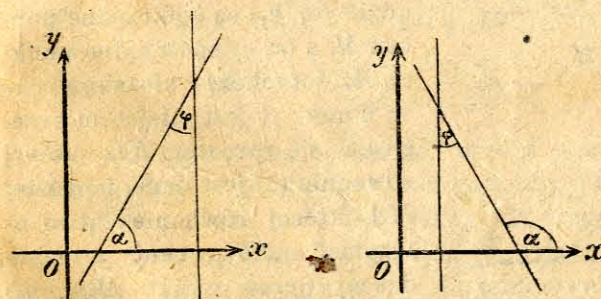
$$3x + 4y - 15 = 0 \text{ i } 4x - 3y + 1 = 0$$

są do siebie prostopadłe, gdyż  $3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$ .

Jeżeli w otrzymanej na  $\tan \varphi$  wartości (7) licznik  $m - m' = 0$ , to wtedy  $\varphi = 0$  i proste są do siebie równoległe, więc warunkiem równoległości dwóch prostych jest  $m = m'$ , o czym wiemy już z poprzedniego zadania.

Uwaga. Jeżeli są dane dwie proste:

$$y = mx + b, \quad x = k,$$



Rys. 31.

to wzoru (7) na obliczenie kąta między nimi zawartego zastosować wprost nie można, ale wtedy z postaci równania widzimy, że 2-ga prosta tworzy z osią odciętych kąt prosty, a więc kąt  $\varphi = 90^\circ - \alpha$ , jeżeli

kąt, utworzony z tą osią przez pierwszą prostą, jest ostry (rys. 31); jeżeli zaś kąt  $\alpha$  jest rozwarty, to otrzymamy  $\varphi = \alpha - 90^\circ$ , co jest widoczne z samego rysunku.



§ 26. Zadanie 6. Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt dany i jest równoległa do prostej danej.

Dany jest punkt  $(x_1, y_1)$  i prosta

$$y = mx + b.$$

Żadaną prostą wyznaczają dwa warunki:

1) prosta ma przechodzić przez punkt  $(x_1, y_1)$ , a zatem jej równanie będzie miało postać

$$y - y_1 = m'(x - x_1),$$

2) ma być równoległa do prostej danej, więc

$$m' = m,$$

i równaniem żądanej prostej będzie

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

W podobny sposób znajdziemy równanie prostej, która przechodzi przez punkt  $(x_1, y_1)$  i jest prostopadła do danej prostej:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1).$$

§ 27. Zadanie 7. Znaleźć odległość danego punktu od prostej danej.

Dany jest (rys. 32) punkt  $M(x_1, y_1)$  i prosta  $KL$ :

$$Ax + By + C = 0 \quad \dots \quad (1)$$

Poprowadźmy  $MA \perp KL$  i zadanie rozwiążemy, odnajdując odległość  $MA$ :

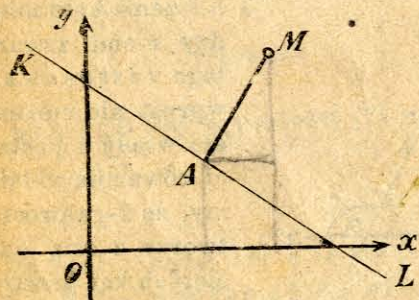
$$\delta = MA = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \quad \dots \quad (2)$$

gdzie  $(x_1, y_1)$  są współrzędne punktu  $M$ , a  $(x, y)$  współrzędne punktu  $A$ , dotychczas nieznanego.

Punkt  $A$  jest miejscem przecięcia się prostej  $KL$ , której równanie (1) jest dane, i prostej  $MA$ , której równanie łatwo otrzymać, jako prostej, przechodzącej przez punkt  $M(x_1, y_1)$  i prostopadłej do  $KL$ .

Napiszmy równanie (1) w postaci:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$



Rys. 32.

współczynnik kątowy  $= -\frac{A}{B}$ , a więc współczynnik kątowy prostej  $MA$  będzie  $+\frac{B}{A}$ , a równanie tej linii będzie

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \quad \dots \quad (3)$$

Rozwiązując teraz równanie (1) i (3) względem  $x$  i  $y$ , otrzymamy współrzędne punktu  $A$ .

Z równania (3) mamy

$$y = y_1 + \frac{B}{A}(x - x_1),$$

wstawmy tę wartość w równanie (1):

$$Ax + By_1 + \frac{B^2}{A}(x - x_1) + C = 0,$$

czyli

$$A^2x + AB y_1 + B^2x - B^2x_1 + AC = 0,$$

$$(A^2 + B^2)x = B^2x_1 - AB y_1 - AC,$$

$$x = \frac{B^2x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2}.$$

Znajdźmy jeszcze  $(x - x_1)$ , gdyż we wzorze (2) występują różnice:  $(x - x_1)$  i  $(y - y_1)$ :

$$x - x_1 = -\frac{A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}.$$

Z równania (3) otrzymamy teraz

$$y - y_1 = -\frac{B(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2},$$

a więc

$$\delta^2 = \frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2},$$

ostatecznie

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \dots \quad (4)$$

Ponieważ  $\delta$  oznacza odległość, więc z pomiędzy dwóch znaków przed pierwiastkiem należy wybrać taki, aby  $\delta$  było dodatnie.

Otrzymany wzór na  $\delta$  jest łatwy do zapamiętania: licznikiem jest lewa strona równania prostej, w którym za  $x$  i  $y$  wstawiono współrzędne danego punktu  $(x_1, y_1)$ , a mianownikiem jest pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów współczynników obu zmiennych danego równania.

§ 28. Równanie normalne linii prostej. Dana jest prosta  $KL$  (rys. 33) i układ osi  $xOy$ . Ta prosta jest geometrycznie wyznaczona: 1) długością  $OC = p$  prostopadłej, spuszczonej z początku



układu na  $KL$ , oraz 2) kątem  $COx = \beta$ , który ta prostopadła tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych. Znajdźmy teraz równanie prostej  $KL$  w zależności od tych dwóch stałych.

Obierzmy na danej prostej dowolny punkt  $M(x, y)$ ; z podobieństwa trójkątów  $MPA$  i  $OCA$  mamy:

$$\frac{MP}{PA} = \frac{OC}{CA},$$

czyli  $MP \cdot CA = OC \cdot PA$ ,

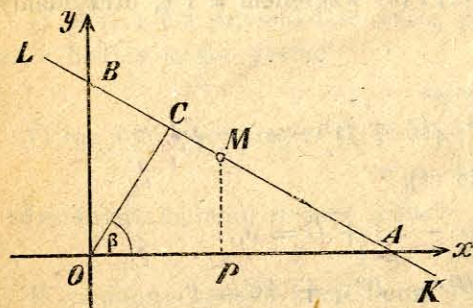
ale  $MP = y$ ;  $OC = p$ ;

$$PA = OA - OP = \frac{p}{\cos \beta} - x,$$

$$CA = OC \cdot \tan \beta = p \cdot \tan \beta,$$

a zatem

$$py \cdot \tan \beta = p \left( \frac{p}{\cos \beta} - x \right),$$



Rys. 33.

$$\frac{y \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{p}{\cos \beta} - x,$$

$$y \sin \beta = p - x \cos \beta,$$

ostatecznie  $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0.$

Oto jest normalne równanie linii prostej, zwane także równaniem Hesse'go; kąt  $\beta$  może przybierać wartości od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ , a odcinek  $p$  od 0 do  $\infty$ .

Jeżeli dane proste są do siebie równoległe, to ich równania normalne będą się różniły tylko długością odcinka  $p$ , kąt zaś  $\beta$  zachowa dla obu tę samą wartość, a więc normalne równania dwóch prostych równoległych będą miały postać:

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0,$$

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p' = 0.$$

§ 29. Sprowadzenie ogólnego równania prostej do postaci normalnej. Jak się niebawem przekonamy, normalne równanie prostej ma pewne ważne zastosowanie, zachodzi więc potrzeba przekształcenia równania ogólnego na normalne.

Niech będzie ogólne równanie

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

które pragniemy doprowadzić do postaci

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0. \quad (2)$$

Jeżeli te dwa równania mają przedstawiać tę samą prostą, to powinno być (patrz § 24):

$$\frac{\cos \beta}{A} = \frac{\sin \beta}{B} = -\frac{p}{C},$$

albo, oznaczając wartość każdego z tych stosunków przez  $\lambda$ :

$$\cos \beta = A\lambda$$

$$\sin \beta = B\lambda \quad \dots \quad (3)$$

$$-p = C\lambda$$

Wtedy zamiast równania (2) mamy następujące:

$$A\lambda x + B\lambda y + C\lambda = 0,$$

które otrzymamy z równania ogólnego (1), mnożąc je przez czynnik  $\lambda$ .

Dla wyznaczenia tego czynnika, podnieśmy pierwsze dwie z równości (3) do kwadratu i dodajmy je do siebie:

$$(A^2 + B^2)\lambda^2 = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1,$$

stąd 
$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

i widzimy, że wartość czynnika  $\lambda$  może być znaleziona dla wszelkich rzeczywistych wartości  $A$  i  $B$ .

Aby teraz wiedzieć, jaki znak położyć przed pierwiastkiem kwadratowym, posilkujemy się ostatnią z równości (3):

$$C\lambda = -p,$$

która wskazuje, że  $\lambda$  powinno mieć znak przeciwny, niż  $C$ , gdyż  $-p$  jest zawsze liczbą ujemną.

A zatem, aby ogólne równanie prostej

$$Ax + By + C = 0$$

doprowadzić do postaci normalnej, należy je pomnożyć przez

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

i otrzymamy równanie normalne

$$\pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Jeżeli równanie linii prostej ma postać zwykłą

$$y = mx + b,$$

to napisawszy je w postaci

$$-mx + y - b = 0,$$

widzimy, że  $A = -m$ ;  $B = 1$ ;  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$

i równanie normalne będzie

$$\pm \frac{y - mx - b}{\sqrt{1 + m^2}} = 0.$$



Przykład 1. Równanie

$$3x - 4y - 10 = 0$$

doprowadzić do postaci normalnej.

W danym razie:

$$A = 3; B = -4; C = -10;$$

$$\lambda = + \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = + \frac{1}{5},$$

więc normalne równanie będzie

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

O kierunku prostej można nabrać pojęcia stąd, że będzie

$$\cos \beta = + \frac{3}{5}; \sin \beta = - \frac{4}{5},$$

więc kąt  $\beta$  będzie należał do 4-ej ćwiartki.

Przykład 2. Doprowadzić do postaci normalnej równanie

$$5x - 12y + 65 = 0.$$

W danym razie

$$A = 5; B = -12; C = +65;$$

$$\lambda = - \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = - \frac{1}{13}$$

i równanie będzie

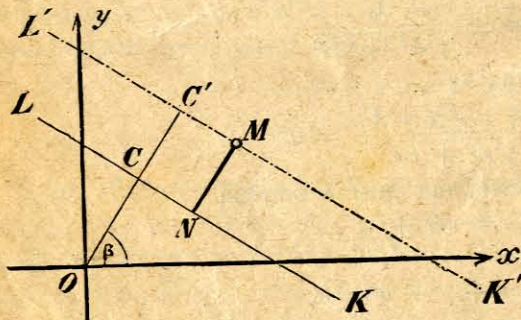
$$- \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 5 = 0.$$

Prostopadła  $p$  będzie położona w 2-ej ćwiartce.

§ 30. Odległość punktu od prostej. Powróćmy jeszcze raz do zadania o odległości punktu  $M(x_1, y_1)$  (rys. 34) od prostej  $KL$ , której równanie niech będzie teraz dane w postaci normalnej:

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0,$$

gdzie  $p = OC$ ,  $\beta = \angle COx$ .



Rys. 34.

Aby rozwiązać zadanie, poprowadźmy przez punkt  $M$  prostą

$$K'L' \parallel KL;$$

normalne równanie tej prostej, jako równoległej do  $KL$ , będzie:

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p' = 0,$$

gdzie  $p' = OC'$ , a kąt  $\beta$  pozostaje bez zmiany.

Z rysunku mamy

$$OC' = OC + CC',$$

czyli

$$p' = p + \delta,$$

a więc równanie prostej  $K'L'$  będzie

$$x \cos \beta + y \sin \beta - (p + \delta) = 0.$$

Ponieważ punkt  $M(x_1, y_1)$  leży na  $K'L'$ , więc musi istnieć tożsamość

$$x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p - \delta = 0,$$

stąd

$$\delta = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p.$$

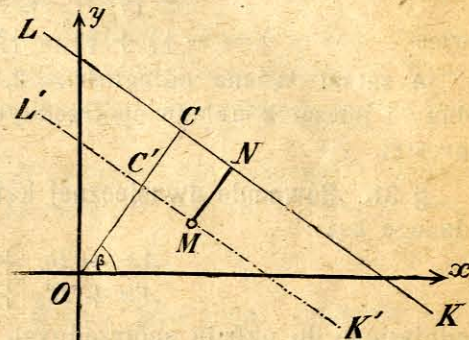
Jeżeli punkt  $M(x_1, y_1)$  leży z tej samej strony prostej  $KL$ , co początek układu (rys. 35), to w równaniu prostej  $K'L'$  będzie  $p' = p - \delta$  i na odległość  $\delta$  otrzymamy wzór

$$\delta = - (x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p).$$

A więc wogóle

$$\delta = \pm (x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p).$$

Stąd widzimy, że odległość punktu od prostej równa się lewej stronie równania normalnego tej prostej, w którym za  $x$  i  $y$  są wstawione współrzędne danego punktu.



Rys. 35.

Jeżeli teraz dany jest punkt  $(x_1, y_1)$  i prosta

$$Ax + By + C = 0,$$

to, pragnąc znaleźć odległość  $\delta$ , doprowadźmy naprzód równanie do postaci normalnej:

$$\pm \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

i wtedy żądana odległość będzie

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Znak przed ułamkiem będzie zależał, jak widzieliśmy, od położenia danego punktu. Taki sam rezultat otrzymaliśmy przedtem (§ 27) sposobem więcej zawiłym.

Przykład 1. Znaleźć odległość punktu  $(2, 7)$  od prostej

$$3x + 4y - 14 = 0.$$

Doprowadźmy naprzód równanie do postaci normalnej:

$$A = 3; B = 4; C = -14; \lambda = + \frac{1}{\sqrt{25}} = + \frac{1}{5};$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{14}{5} = 0.$$

Wstawiając teraz  $x = 2$ ,  $y = 7$ , mamy

$$\delta = \frac{6}{5} + \frac{28}{5} - \frac{14}{5} = \frac{20}{5} = +4.$$

Znak  $+$  przed 4 wskazuje, że punkt dany i początek układu współrzędnych leżą z różnych stron prostej.



**Przykład 2.** Znaleźć odległość punktu (3, 3) od prostej

$$15x - 8y + 13 = 0.$$

$$A = 15; B = -8; C = +13; \lambda = -\frac{1}{\sqrt{289}} = -\frac{1}{17}.$$

Równanie normalne będzie

$$-\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y - \frac{13}{17} = 0,$$

$$\text{więc } \delta = -\frac{15}{17} + \frac{24}{17} - \frac{13}{17} = -\frac{3}{17} = -2.$$

A zatem żądana odległość = 2, zaś znak — wskazuje, że punkt dany i początek układu współrzędnych leżą z tej samej strony danej prostej.

§ 31. Równanie dwusiecznej kąta. Niech będą równania ramion danego kąta:

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x + B'y + C' = 0,$$

odniesione do układu współrzędnych  $xOy$ .

Jeżeli pewien punkt  $(x_1, y_1)$  leży na dwusiecznej kąta, to jego odległości od obu ramion powinny być sobie równe, znajdziemy więc te odległości i przyrównamy je do siebie.

Odległość  $\delta_1$  punktu  $(x_1, y_1)$  od 1-go ramienia kąta obliczymy, doprowadzwszy równanie do postaci normalnej i wstawiwszy

$$x = x_1 \text{ i } y = y_1:$$

$$\delta_1 = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

tak samo odległość  $\delta_2$  tego punktu od 2-go ramienia kąta będzie

$$\delta_2 = \pm \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

a zatem

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x_1 + B'y_1 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Podobna zależność będzie istniała dla jakiegokolwiek innego punktu, położonego na dwusiecznej, a zatem równanie dwusiecznej, jako miejsca geometrycznego takich punktów, będzie

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \dots (1)$$

Równaniu (1) można nadać postać znacznie prostszą (symboliczną), jeżeli się umówimy równanie ogólne linii prostej pisać w skróconej postaci:  $P=0$ , gdzie  $P=Ax + By + C$ , a to samo równanie, doprowadzone do postaci normalnej, pisać w skróceniu:  $N=0$ .

A zatem, jeżeli ogólne równania ramion kąta są:

$$P_1 = 0 \text{ i } P_2 = 0,$$

a ich równania normalne:

$$N_1 = 0 \text{ i } N_2 = 0,$$

to równanie dwusiecznej danego kąta będzie

$$N_1 = \pm N_2, \text{ albo } N_1 \mp N_2 = 0 \dots (2)$$

Co do podwójnego znaku w równaniu (1) lub (2), należy pamiętać uwagę zrobioną poprzednio przy obliczaniu odległości  $\delta$ . W zastosowaniu do obecnego zagadnienia, można będzie powiedzieć, co następuje:

1) Jeżeli początek układu współrzędnych leży wewnątrz danego kąta (lub kąta wierzchołkiem przeciwległego), to równanie dwusiecznej ma postać

$$N_1 = + N_2,$$

dlatego, że obie odległości od ramion kąta będą dodatnie (lub obie ujemne).

2) Jeżeli początek układu współrzędnych leży wewnątrz kąta przyległego do danego, to równanie dwusiecznej będzie

$$N_1 = - N_2,$$

dlatego, że jedna z odległości będzie dodatnia, a druga ujemna.

3) Z poprzedniego wynika, że jakkolwiek jest położony początek układu współrzędnych, jeżeli równanie dwusiecznej danego kąta jest

$$N_1 = + N_2,$$

to równanie dwusiecznej kąta przyległego będzie

$$N_1 = - N_2.$$

§ 32. Trzy proste, przecinające się w jednym punkcie. Dane są dwie proste:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

znajdziemy równanie 3-ej prostej, któraby przechodziła przez punkt przecięcia się dwóch danych.

Jeżeli tym punktem jest  $(x_0, y_0)$ , to jego współrzędne muszą zadośćczynić obu równaniom danym, czyli trójmiany  $Ax + By + C$  i  $A'x + B'y + C'$  przy  $x=x_0$  i  $y=y_0$  powinny stać się równymi zeru.

Jeżeli więc przez ten sam punkt  $(x_0, y_0)$  ma przechodzić i trzecia prosta, to lewa strona jej równania powinna się stawać zerem przy  $x=x_0$  i  $y=y_0$ , a zatem równanie 3 ej prostej można napisać w postaci:  $\lambda(Ax + By + C) + \lambda'(A'x + B'y + C') = 0$ , gdzie  $\lambda$  i  $\lambda'$  są liczbami dowolnymi.



To samo można wyrazić krócej, jeżeli użyjemy symbolicznego oznaczenia równań: niech będą dane dwie proste

$$F_1 = 0 \text{ i } P_2 = 0,$$

wtedy wszelka prosta, która przechodzi przez punkt przecięcia się dwóch danych, będzie miała równanie:

$$P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 = 0, \dots \dots \dots (1)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są liczbami dowolnymi.

W rzeczywistości jeden tylko czynnik będzie dowolny  $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$ , o czym łatwo się przekonać, dzieląc równanie (1) przez jeden z nich, np.  $\lambda_1$ .

Stąd wynika, nawzajem, twierdzenie następujące:

Jeżeli dla równań trzech prostych

$$P_1 = 0; P_2 = 0; P_3 = 0$$

istnieją takie czynniki  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , że

$$P_3 = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2^1),$$

to trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

Twierdzenie jest oczywiste na zasadzie poprzedniego rozumowania.

Ażeby np. przekonać się, że trzy proste

$$3x - 5y + 2 = 0,$$

$$2x + y - 3 = 0,$$

$$x + 7y - 8 = 0,$$

przecinają się w jednym punkcie, pomnóżmy 1-sze równanie przez  $\lambda_1 = -1$ , drugie przez  $\lambda_2 = 2$  i dodajmy je do siebie, otrzymamy

$$x + 7y - 8 = 0,$$

czyli równanie 3-cie, a zatem, na mocy poprzedniego twierdzenia, utrzymujemy, że trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

§ 33. Zastosowanie twierdzenia o trzech prostych, przecinających się w jednym punkcie. Zobaczmy teraz, jak na zasadzie otrzymanego twierdzenia, można łatwo dowieść niektórych twierdzeń geometrycznych.

1) Wszystkie trzy dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Obierzmy początek układu współrzędnych gdziekolwiek wewnątrz trójkąta; równania boków, doprowadzone do postaci normalnej, niech będą:

$$N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0,$$

wtedy równania dwusiecznych będą:

$$N_1 - N_2 = 0; N_2 - N_3 = 0; N_1 - N_3 = 0.$$

<sup>1)</sup> Czytaj:  $P_3$  jest toż samościowo (lub identycznie) równe i t. d.

Jeżeli teraz pierwsze dwa równania dodamy do siebie ( $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 1$ ), to otrzymamy  $N_1 - N_3 = 0$ , czyli 3-cie równanie, a to dowodzi twierdzenia.

2) Dwusieczna jednego z kątów wewnętrznych trójkąta i dwusieczne dwóch kątów zewnętrznych, do pierwszego nieprzyległych, przecinają się w jednym punkcie.

Obierzmy początek układu współrzędnych, jak poprzednio; normalne równania boków niech będą:

$$N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0,$$

wtedy równania dwusiecznych (jedna kąta wewnętrznego i dwie kątów zewnętrznych) będą:

$$N_1 - N_2 = 0; N_2 + N_3 = 0; N_1 + N_3 = 0.$$

Wystarczy znowu dodać do siebie pierwsze dwa równania, aby otrzymać trzecie, a to dowodzi twierdzenia.

3) Środkowe wszystkich trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dany jest trójkąt  $ABC$  (rys. 36).

Dla ułatwienia, za początek układu współrzędnych obierzmy wierzchołek  $A$ , za oś odciętych kierunek boku  $AB$ ; współrzędne wierzchołków trójkąta niech będą:

$$A(0, 0); B(x_1, 0); C(x_2, y_2).$$

Znajdźmy teraz równania wszystkich trzech środkowych.

Równanie środkowej  $AK$ , jako prostej, przechodzącej przez początek układu i przez punkt  $K$ , którego współrzędne są:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_2}{2},$$

będzie

$$y = \frac{\frac{1}{2}y_2}{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)} \cdot x,$$

czyli

$$(x_1 + x_2)y - y_2x = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Środkowa  $BL$  przechodzi przez dwa punkty, których współrzędne są:

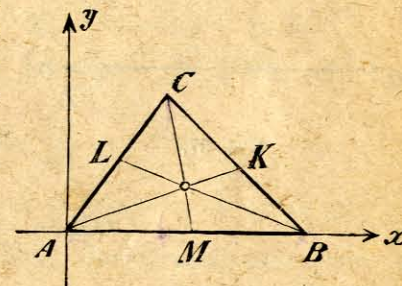
$$B(x_1, 0); L(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}y_2),$$

a więc jej równanie będzie

$$y - 0 = \frac{\frac{1}{2}y_2 - 0}{\frac{1}{2}x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

czyli

$$(x_2 - 2x_1)y - y_2x + x_1y_2 = 0 \dots \dots \dots (2)$$



Rys. 36.



Równanie środkowej  $CM$  znajdziemy, jako równanie prostej, przechodzącej, przez dwa punkty:

$$C(x_2, y_2); M(\frac{1}{2}x_1, 0),$$

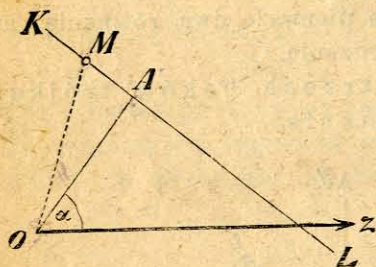
a zatem będzie

$$y - y_2 = \frac{y_2 - 0}{x_2 - \frac{1}{2}x_1} \cdot (x - x_2),$$

czyli  $(2x_2 - x_1)y - 2x_2y_2 + x_1y_2 = 2y_2x - 2x_2y_2,$   
 $(2x_2 - x_1)y - 2y_2x + x_1y_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

Jeżeli znowu dodamy do siebie równania (1) i (2), to otrzymamy (3), a to dowodzi twierdzenia.

§ 34. Równanie biegunowe linii prostej. Dana jest prosta  $KL$  (rys. 37), biegun  $O$ , oś biegunowa  $Oz$ . Prosta będzie wyznaczona długością  $p$  prostopadłej  $OA$ , spuszczonej z bieguna na prostą i kątem  $AOz = \alpha$ , który tworzy ta prostopadła z osią biegunową.



Rys. 37.

Obierzmy na danej prostej dowolny punkt  $M$ , którego współrzędne biegunowe są: promień wiodący  $OM = \rho$  i anomalia  $MOz = \varphi$ ; z  $\triangle OAM$  otrzymujemy

$$OM = \frac{OA}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

czyli

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

to jest równanie biegunowe linii prostej.

### § 35. Zadania.

(1—2). Znaleźć równanie prostej, która z osią odciętych tworzy kąt  $\alpha$ , a na osi rzędnych odmierza odcinek  $= b$ :

1.  $\alpha = 45^\circ$ ;  $b = -3$ .      2.  $\alpha = 30^\circ$ ;  $b = 2$ .

(3—8). Wykreślić prostą, której równanie jest dane:

3.  $y = x - 5$ .      6.  $y = x$ .  
 4.  $y = 2x - 3$ .      7.  $y = 3x$ .  
 5.  $y = -2x + 5$ .      8.  $y = \frac{1}{2}x$ .

(9—16). Wykreślić następujące proste:

9.  $x = 5$ .      13.  $4x - 3y + 24 = 0$ .  
 10.  $y = -4$ .      14.  $2x + 5y - 10 = 0$ .  
 11.  $x = -3$ .      15.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ .  
 12.  $x - y = 2$ .      16.  $\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$ .

(17—20). Następujące równania linii prostej doprowadzić do postaci zwykłej:

17.  $3x - 4y = 12$ .      19.  $3x + 4y + 11 = 0$ .  
 18.  $5x - y - 3 = 0$ .      20.  $4x - 7y - 18 = 0$ .

(21—26). Znaleźć kąt, który tworzą z osią odciętych następujące proste:

21.  $y = x$ .      24.  $x + 2y - 24 = 0$ .  
 22.  $y = -x + 5$ .      25.  $8x + 15y - 21 = 0$ .  
 23.  $x\sqrt{3} - y - 4 = 0$ .      26.  $3x - 5y + 8 = 0$ .

(27—30). Znaleźć odcinki, odmierzane na osiach współrzędnych przez prostą, której równanie jest dane:

27.  $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ .      29.  $3x - 2y - 10 = 0$ .  
 28.  $3x + 4y = 12$ .      30.  $2x + 5y + 20 = 0$ .

31. Który z punktów:

$(1, -1)$ ;  $(-2, 3)$ ;  $(-1, -2)$

leży na prostej:

$2x - 3y - 4 = 0$ ?  $5x + 4y = 1$ ?  $8x - 9y + 43 = 0$ ?

(32—37). Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez dwa punkty dane:

32.  $(5, 3)$  i  $(7, 4)$ .      35.  $(0, 0)$  i  $(8, 3)$ .  
 33.  $(-2, 8)$  i  $(-5, 5)$ .      36.  $(0, 2)$  i  $(-\frac{2}{3}, -3)$ .  
 34.  $(7, 0)$  i  $(2, -3)$ .      37.  $(1, \frac{2}{3})$  i  $(-6, -\frac{5}{3})$ .

(38—41). Znaleźć równania środkowych trójkąta, którego współrzędne wierzchołków są dane:

38.  $(-3, 2)$ ;  $(5, 0)$ ;  $(-4, -3)$ .  
 39.  $(-5, 3)$ ;  $(2, 1)$ ;  $(1, -3)$ .  
 40.  $(2, 4)$ ;  $(2, -3)$ ;  $(-5, -3)$ .  
 41.  $(-3, 4)$ ;  $(-4, -4)$ ;  $(2, -2)$ .

(42—45). Znaleźć punkt, w którym przecinają się proste.

42.  $3x + 5y - 28 = 0$ ;  $11x + 3y + 20 = 0$ .  
 43.  $8x - 3y - 5 = 0$ ;  $24x - 9y + 10 = 0$ .  
 44.  $x + y - 1 = 0$ ;  $2x - y + 4 = 0$ .  
 45.  $5x + 3y - 11 = 0$ ;  $4x - 5y + 6 = 0$ .



(46 — 49). Znaleźć współrzędne wierzchołków trójkąta, którego równania boków są dane:

$$\begin{aligned} 46. \quad & 2x - y - 1 = 0, \\ & x - y + 6 = 0, \\ & 3x - 2y + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48. \quad & x + 2y - 5 = 0, \\ & 5x - 2y + 11 = 0, \\ & 3x - 2y + 11 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 47. \quad & x - y + 4 = 0, \\ & 8x - 5y - 19 = 0, \\ & 5x - 2y - 13 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 49. \quad & x + y = 3, \\ & x + 8y + 11 = 0, \\ & 2x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

50. Znaleźć odległość początku układu współrzędnych od punktu przecięcia się prostych:

$$2x + y + 4 = 0; \quad 2y - 3x - 34 = 0.$$

51. Dwie proste:  $x + y - 1 = 0$  i  $2x - y + 4 = 0$  przecinają się w punkcie  $A$ , a dwie proste:  $3x - y = 0$  i  $2x + y - 10 = 0$  w punkcie  $B$ . Znaleźć długość odcinka  $AB$ .

(52 — 55). Znaleźć kąt między dwiema prostymi:

$$\begin{aligned} 52. \quad & x - 2y + 4 = 0; \quad 3x + y - 9 = 0. \\ 53. \quad & 3x - 2y + 6 = 0; \quad 3x - 4y = 0. \\ 54. \quad & 6x + 7y = 4; \quad 5x - 6y + 2 = 0. \\ 55. \quad & 3x - y - 7 = 0; \quad 5x - y + 8 = 0. \end{aligned}$$

(56 — 57). Obliczyć kąty trójkąta, którego równania boków są dane:

$$\begin{aligned} 56. \quad & 5x + 7y + 3 = 0, \\ & x + 2y = 5, \\ & 2x - y + 5 = 0. \\ 57. \quad & 3x + 4y = 11, \\ & 7x - 24y = 33, \\ & 5y - 12x = 25. \end{aligned}$$

58. Rozpoznać, które z dwóch danych prostych są do siebie równoległe:

$$\begin{aligned} a) \quad & y = 2x - 5; \quad y = 2x + 1. \\ b) \quad & 3x + 4y - 5 = 0; \quad 6x + 8y + 3 = 0. \\ c) \quad & 12x - 9y + 1 = 0; \quad 4x - 3y + 10 = 0. \\ d) \quad & 2x - 5y - 3 = 0; \quad 4x + 10y + 15 = 0. \end{aligned}$$

59. Rozpoznać, czy są do siebie prostopadłe dwie proste, których równania są dane:

$$\begin{aligned} a) \quad & y = -\frac{1}{2}x + 5; \quad y = 2x - 3. \\ b) \quad & x + 3y + 6 = 0; \quad 3x - y + 1 = 0. \\ c) \quad & 2x + 5y - 5 = 0; \quad 5x - 2y - 4 = 0. \\ d) \quad & 4x - 3y - 2 = 0; \quad 3x - 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

(60 — 66). Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt dany i jest do danej prostej: a) równoległa, b) prostopadła:

$$\begin{aligned} 60. \quad & (5, 6); \quad 7x + 4y - 12 = 0. \\ 61. \quad & (4, -3); \quad 9x - 11y = 0. \\ 62. \quad & (4, -2); \quad y = 3x - 8. \\ 63. \quad & (0, -8); \quad 2x - 5y + 15 = 0. \\ 64. \quad & (3, 5); \quad 7x + 11y + 4 = 0. \end{aligned}$$

$$65. \quad (-1, -2); \quad 2x - 3y = 0.$$

$$66. \quad (a, 2b); \quad (a + b)x + (a - b)y - c = 0.$$

67. Dowiedzieć, że łącznica dwóch boków trójkąta jest równoległa do trzeciego boku i równa jego połowie.

(68 — 71). Znaleźć równania wszystkich trzech wysokości trójkąta, którego współrzędne wierzchołków są dane:

$$68. \quad (2, 1); \quad (3, -2); \quad (-4, -1).$$

$$69. \quad (-16, 19); \quad (8, 1); \quad (-12, 22).$$

$$70. \quad (-3, 2); \quad \left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right); \quad \left(\frac{3}{4}, -3\right).$$

$$71. \quad \left(-\frac{9}{25}, \frac{47}{50}\right); \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right); \quad \left(-3, \frac{1}{2}\right).$$

72. Biorąc liczby z poprzednich zadań (68—71), znaleźć równania prostopadłych, wystawionych ze środków boków trójkąta.

73. Dowiedzieć, że przekątne rombu są do siebie prostopadłe.

(74 — 81). Doprowadzić do postaci normalnej następujące równania:

$$74. \quad 4x + 3y - 12 = 0.$$

$$78. \quad 3x - 4y + 5 = 0.$$

$$75. \quad 12x + 5y = 65.$$

$$79. \quad 2x - y - 1 = 0.$$

$$76. \quad 15x + 8y + 51 = 0.$$

$$80. \quad 2x - 5y + 10 = 0.$$

$$77. \quad 5x - 12y + 26 = 0.$$

$$81. \quad 3x - 2y + 1 = 0.$$

(82 — 89). Znaleźć odległość danego punktu od prostej danej:

$$82. \quad (4, 1); \quad 3x - 4y + 12 = 0.$$

$$83. \quad (2, 8); \quad 5x - 12y + 60 = 0.$$

$$84. \quad (0, 6\frac{1}{2}); \quad 12y = 5x.$$

$$85. \quad (5, 8); \quad x - 2y + 4 = 0.$$

$$86. \quad (-3, -1); \quad x - 7y - 10 = 0.$$

$$87. \quad (5, 8); \quad 11x - 2y = 22.$$

$$88. \quad (-4, -6); \quad 7x + 24y + 84 = 0.$$

$$89. \quad (-2, -1); \quad 3x - 2y + 1 = 0.$$

(90 — 93). Znaleźć odległość między dwiema równoległymi prostymi:

$$90. \quad 6x + 8y - 11 = 0; \quad 3x + 4y - 20\frac{1}{2} = 0.$$

$$91. \quad 7x + 24y + 10 = 0; \quad 7x + 24y - 35 = 0.$$

$$92. \quad 3x + 2y - 5 = 0; \quad 6x + 4y + 7 = 0.$$

$$93. \quad 5x + 12y - 65 = 0; \quad 15x + 36y + 26 = 0.$$

(94 — 97). Obliczyć wysokości trójkąta, którego współrzędne wierzchołków są dane:

$$94. \quad (12, 8); \quad (-18, -8); \quad (3, 20).$$

$$95. \quad (11, 4); \quad (-4, -4); \quad (17, -4).$$

$$96. \quad (8, 12); \quad (2, 20); \quad (-13, -16).$$

$$97. \quad (-6, 18); \quad (9, -18); \quad (15, -10).$$

98. Przez punkt przecięcia się prostych:

$$4x + 7y - 15 = 0; \quad 9x - 14y - 4 = 0$$

doprowadzić prostą:

a) równoległą do osi odciętych,

b) równoległą do osi rzędnych,



- c) równoległe do prostej:  $2x - 3y - 9 = 0$ ,  
d) prostopadłe do pierwszej z danych prostych.

(99 — 102). Znaleźć równania wysokości trójkąta, którego równania boków są dane:

$$\begin{aligned} 99. \quad & 3x + 4y = 0, \\ & x - 7 = 0, \\ & 7x - 24y = 25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101. \quad & 3x + 4y = 0, \\ & x - 1 = 0, \\ & 7x - 24y + 25 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100. \quad & 4x - 3y - 12 = 0, \\ & 4x + 3y + 6 = 0, \\ & 3x + 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 102. \quad & 4x - 3y = 30, \\ & 4x + 3y = 10, \\ & 12x + 5y = 6. \end{aligned}$$

103. Przez punkt (5, 1) poprowadzić prostą, która łącznie punktów: (2, 7), i (4, — 3) dzieli na połowy.

104. Znaleźć równanie prostej, jeżeli odcinki przez nią odmierzane na osiach współrzędnych są w stosunku 2 : 3, a pole utworzonego trójkąta prostokątnego = 12.

(105—107). Pomiedzy dwiema przecinającymi się prostymi leży punkt A, z którego wyprowadzono prostopadłe do tych prostych; obliczyć pole utworzonego czworokąta:

$$105. \quad x - 2y - 1 = 0; \quad 3x - y + 7 = 0; \quad A(2, 3).$$

$$106. \quad 3x - 2y - 1 = 0; \quad y + 5 = 0; \quad A(4, 1).$$

$$107. \quad x + 5y + 24 = 0; \quad 3x + 2y + 20 = 0; \quad A(3, 5).$$

(108 — 111). Znaleźć równanie dwusiecznej kąta, którego równania ramion są dane:

$$\begin{aligned} 108. \quad & 4x + 3y - 12 = 0, \\ & 12x - 5y + 60 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 110. \quad & 3x - 4y - 12 = 0, \\ & 3x + 4y - 24 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 109. \quad & 15x + 8y = 0, \\ & 3x - 4y + 24 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 111. \quad & 2y + 11y - 22 = 0, \\ & 2x - y + 4 = 0. \end{aligned}$$

(112 — 114). Znaleźć równania dwusiecznych kątów trójkąta, którego równania boków są dane:

$$\begin{aligned} 112. \quad & 4x + 3y + 6 = 0, \\ & 4x - 3y - 12 = 0, \\ & 3x + 4y + 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 113. \quad & 4x - 3y + 48 = 0, \\ & 4x + 3y - 72 = 0, \\ & 8x - 15y + 24 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 114. \quad & 3x + 4y + 17 = 0, \\ & 15x + 8y - 83 = 0, \\ & 3x - 4y + 73 = 0. \end{aligned}$$

(115 — 116). Dowieść, że trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie:

$$\begin{aligned} 115. \quad & 5x - 4y - 8 = 0, \\ & 3x + 6y - 10 = 0, \\ & 9x - 24y - 4 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 116. \quad & 2x + 8y - 15 = 0, \\ & 5y - y - 3 = 0, \\ & 11x - 19y + 21 = 0. \end{aligned}$$

117. Mając współrzędne wierzchołków trójkąta:

$$(-7, -1); (-2, -9); (9, 10),$$

dowieść, że wszystkie trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie.

118. Mając współrzędne wierzchołków trójkąta:

$$(2, 11); (15, 3); (7, -8),$$

dowieść, że wszystkie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie.

119. Mając dane współrzędne wierzchołków trójkąta:

$$(-7, -1); (-2, -9); (9, 10),$$

dowieść, że wszystkie trzy prostopadłe, wystawione ze środków boków, przecinają się w jednym punkcie.

120. Mając dane równania boków trójkąta:

$$\begin{aligned} & 3x + 4y + 17 = 0, \\ & 15x + 8y - 83 = 0, \\ & 3x - 4y + 73 = 0, \end{aligned}$$

dowieść, że dwusieczne wszystkich trzech kątów przecinają się w jednym punkcie.

## ROZDZIAŁ IV.

### K o ł o.

§ 36. Równanie koła. Koło jest geometrycznie wyznaczone, jeżeli są dane współrzędne jego środka ( $a, b$ ) oraz promień  $r$ .

W dowolnym układzie współrzędnych równanie koła, jak już widzieliśmy (patrz § 15), jest

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Jeżeli środek koła leży na osi odciętych, to równanie ma postać

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2,$$

jeżeli zaś środek leży na osi rzędnych, to będzie

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

jeżeli nareszcie za początek układu wziąć środek koła, to równanie ma postać najprostsza:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

§ 37. Roztrząsanie równania koła. Jakkolwiek linia kołowa jest już znana z geometrii elementarnej, to jednak wykażmy niektóre jej własności na zasadzie równania, aby się zapoznać z metodą roztrząsania, którą nadal stosować nam wypadnie.

Dla ułatwienia zadania, weźmy równanie koła w postaci najprostszej:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

kiedy za początek układu wzięty jest środek koła.



1) Z równania mamy

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

$$x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}.$$

A więc każdej wartości na  $x$  odpowiadają po dwie wartości na  $y$ , liczebnie równe, ale różne co do znaku, a zatem okrąg koła jest linią symetryczną względem osi  $Ox$ , przechodzącej przez środek koła, to znaczy, że jeżeli zgiąć rysunek wzdłuż tej prostej, to obie części okręgu do siebie przystaną. W podobny sposób przekonamy się, że okrąg jest również symetryczny względem osi  $Oy$  (i wogóle względem wszelkiej prostej, przechodzącej przez środek koła).

2) Widzimy dalej, że graniczną wartością na  $x$  jest  $\pm r$  (wtedy  $y = 0$ ) i graniczną wartością na  $y$  jest również  $\pm r$  (wtedy  $x = 0$ ), a dla wszelkich wartości  $x > r$ ,  $y$  staje się urojonem, podobnie  $x$  staje się urojonem dla  $y > r$ . A zatem okrąg koła jest linią skończoną.

3) Jeżeli równanie napiszemy w postaci

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

to wstawiając za  $x$  i  $y$  współrzędne jakiegokolwiek punktu, położonego na okręgu, otrzymamy tożsamość; jeżeli zaś wstawimy współrzędne punktu, położonego zewnątrz koła, to będzie:

$$x^2 + y^2 - r^2 > 0,$$

a dla punktu, położonego wewnątrz koła, będzie

$$x^2 + y^2 - r^2 < 0,$$

dlatego że  $r^2$  jest kwadratem odległości punktu okręgu od środka, odległość zaś punktu zewnętrznego będzie większa, a wewnętrznego mniejsza od promienia  $r$ .

§ 38. Koło i linia prosta. Niech będzie równanie koła w postaci najprostszej

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots \dots \dots (1)$$

i równanie prostej w postaci normalnej

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0, \dots \dots \dots (2)$$

gdzie  $p$ , jak wiadomo, oznacza odległość prostej od początku układu współrzędnych.

Znajdźmy punkty, w których prosta przecina się z okręgiem, rozwiązując równania (1) i (2) względem  $x$  i  $y$ .

Wartość  $y$  z równania (2):

$$y = \frac{p - x \cos \beta}{\sin \beta}$$

wstawmy w równanie (1):

$$x^2 \sin^2 \beta + p^2 - 2p x \cos \beta + x^2 \cos^2 \beta = r^2 \sin^2 \beta,$$

czyli

$$x^2 - 2p x \cos \beta + (p^2 - r^2 \sin^2 \beta) = 0 \dots \dots (3)$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe względem  $x$  i rzeczywistość jego pierwiastków będzie zależała od znaku następującego wyrażenia:

$$p^2 \cos^2 \beta - p^2 + r^2 \sin^2 \beta = (r^2 - p^2) \cdot \sin^2 \beta,$$

a więc od znaku  $(r^2 - p^2)$ .

A zatem: 1) prosta przecina się z okręgiem w dwóch rzeczywistych i różnych punktach, jeżeli  $p < r$ , czyli jeżeli jej odległość od środka koła jest mniejsza od promienia;

2) ma jeden punkt wspólny z okręgiem koła, jeżeli  $p = r$ , więc jeżeli jej odległość od środka koła równa się promieniowi, i

3) nie przecina okręgu, jeżeli jej odległość od środka koła jest większa od promienia.

Z równania (3) mamy jeszcze:

$$x_1 + x_2 = 2p \cdot \cos \beta,$$

a więc

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = p \cdot \cos \beta$$

będzie odciętą środka cięciwy, którą koło odcina od prostej danej, a rzędna będzie

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = p \cdot \sin \beta,$$

(znajduje się z równania (2), wstawiając wartość na  $x$ ).

Przez podzielenie mamy

$$y = x \cdot \tan \beta.$$

Stąd widzimy, że środek cięciwy leży na prostopadłej, spuszczonej na nią ze środka koła.

Ponieważ dla cięciw równoległych kąt  $\beta$  pozostaje bez zmiany, więc stąd wynika także, że środki cięciw równoległych leżą na prostopadłej, spuszczonej na nie ze środka koła.

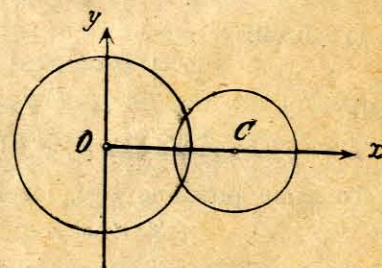
§ 39. Dwa koła. Dane są dwa koła (rys. 38) o promieniach  $r$  i  $r'$ , przytem niech będzie  $r > r'$ .

Za początek układu współrzędnych obierzmy środek pierwszego koła, za oś odciętych linię środków, wtedy równania tych kół będą:

$$x^2 + y^2 = r^2, \dots \dots \dots (1)$$

$$(x - c)^2 + y^2 = r'^2, \dots \dots \dots (2)$$

jeżeli  $OC = c$ .



Rys. 38.



Znajdźmy wspólne punkty okręgów tych kół, rozwiązując ich równania względem  $x$  i  $y$ .

Odejmując je od siebie, otrzymamy

$$x^2 - (x - c)^2 = r^2 - r'^2,$$

$$2cx - c^2 = r^2 - r'^2,$$

$$\text{stad } x = \frac{c^2 + r^2 - r'^2}{2c} \dots \dots \dots (3)$$

Wstawmy tę wartość na  $x$  w równanie (1):

$$\frac{(c^2 + r^2 - r'^2)^2}{4c^2} + y^2 = r^2,$$

stad

$$\begin{aligned} y^2 &= r^2 - \frac{(c^2 + r^2 - r'^2)^2}{4c^2} = \frac{4c^2r^2 - (c^2 + r^2 - r'^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2cr + c^2 + r^2 - r'^2)(2cr - c^2 - r^2 + r'^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{1}{4c^2}[(c + r)^2 - r'^2] \cdot [r'^2 - (c - r)^2], \end{aligned}$$

stad

$$y = \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(c + r + r')(c + r - r')(c + r' - r)(r' + r - c)} \dots (4)$$

Z otrzymanych wartości na  $x$  i  $y$  widzimy, że jeżeli wspólne punkty danych okręgów istnieją, to jest ich dwa, oraz że będą leżały w równych odległościach od linii środków kół.

Aby jednak te punkty istniały, musi iloczyn pod pierwiastkiem w wyrażeniu (4) być dodatnim. Od czegoż to będzie zależało?

Pierwszy z czynników jest niewątpliwie dodatni, drugi jest również dodatni na mocy założenia  $r > r'$ , rzecz więc polegać będzie na znaku ostatnich dwóch czynników. A mianowicie:

1) Jeżeli

$$c + r' - r > 0 \text{ i } r' + r - c > 0$$

czyli

$$r - r' < c < r + r',$$

to okręgi przecinają się z sobą.

To samo powinno być, jeżeli

$$c + r' - r < 0 \text{ i } r' + r - c < 0,$$

ale wtedy byłoby

$$c < r - r' \text{ i } c > r + r',$$

co jest niedorzecznością, bo  $c$ ,  $r$  i  $r'$  są liczbami dodatnimi.

2) Jeżeli  $c + r' - r = 0$ , czyli  $c = r - r'$ ,

albo jeżeli  $r' + r - c = 0$ , czyli  $c = r + r'$ ,

to okręgi mają tylko jeden punkt wspólny, t. j. są do siebie styczne.

3) Jeżeli nareszcie

$$c + r' - r < 0 \text{ i } r' + r - c > 0,$$

skąd

$$c < r - r',$$

(oczywiście, będzie także  $c < r + r'$ ), albo jeżeli

$$c + r' - r > 0 \text{ i } r' + r - c < 0,$$

skąd

$$c > r + r'$$

(oczywiście także  $c > r - r'$ ), to na  $y$  otrzymamy wartości urojone, a więc okręgi nie mają punktów wspólnych.

Otrzymaliśmy twierdzenia, znane już z planimetrii.

§ 40. Określenia. Podamy tu pewne określenia, z których część, zwłaszcza dotycząca koła, jest już znana z geometrii elementarnej, jednakże z uwagi na to, że te same pojęcia spotkamy dalej, mówiąc wogóle o krzywych 2-go rzędu, przytoczymy je tu w formie ogólniejszej, mającej zastosowanie do linii 2-go rzędu wogóle.

Cięciwą nazywa się odcinek, który łączy jakiegokolwiek dwa punkty linii krzywej.

Środkiem linii krzywej nazywa się taki punkt, w którym dzieli się na połowy cięciwy, przezeń poprowadzone.

Średnicą nazywa się miejsce geometryczne środków cięciw, poprowadzonych równoległe do pewnej prostej; mówimy wtedy, że ta średnica jest sprzężona z kierunkiem danej prostej (lub cięciw do niej równoległych). Dwie średnice, z których każda dzieli na połowy cięciwy równoległe do drugiej, nazywają się średnicami sprzężonymi z sobą.

Średnica, prostopadła do cięciw z nią sprzężonych, nazywa się średnicą główną lub osią linii krzywej, a punkty, w których oś przecina się z krzywą, nazywają się wierzchołkami głównymi, albo krócej, wierzchołkami tej krzywej.

Styczną do linii krzywej nazywa się graniczne położenie siecznej, kiedy jej obydwie punkty przecięcia z krzywą nieskończenie do siebie się zbliżają. Odcinek stycznej, liczony od punktu styczności do punktu, w którym styczna przecina się z osią odciętych, nazywa się długością stycznej.

Normalną nazywa się prosta, która przechodzi przez punkt styczności i jest prostopadła do stycznej. Długością normalnej nazywa się jej odcinek, liczony od punktu styczności do punktu w którym normalna przecina oś odciętych.



Podstyczną nazywa się rzut długości stycznej na oś odciętych, a podnormalną — rzut długości normalnej na tę oś.

§ 41. Równanie stycznej do koła. Dane jest koło

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, \dots \dots \dots (1)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są współrzędnymi środka, a  $r$  — promień, i dany jest punkt  $(x_1, y_1)$  na jego okręgu.

Jeżeli przez punkt  $(x_1, y_1)$  poprowadzimy prostą, przecinającą okrąg koła, a następnie będziemy ją obracali dokoła tego punktu, to jej drugi punkt przecięcia z okręgiem będzie się zbliżał do punktu  $(x_1, y_1)$  i kiedy oba punkty przecięcia zbiegną się w jednym, prosta ma z okręgiem koła jeden („podwójny”) punkt wspólny i nazywa się styczną do koła.

Ażeby znaleźć równanie stycznej w punkcie  $(x_1, y_1)$  okręgu, znajdziemy najprzód równanie siecznej, która przecina okrąg danego koła w dwóch punktach:  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ . Jest to przedewszystkiem prosta, która przechodzi przez dwa punkty dane, a więc jej równanie powinno mieć postać

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1), \dots \dots \dots (2)$$

ale punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  leżą na okręgu koła, a zatem

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2,$$

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2.$$

Odejmijmy od siebie te dwie tożsamości:

$$(x_1 - a)^2 - (x_2 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - (y_2 - b)^2 = 0,$$

czyli

$$x_1^2 - 2ax_1 - x_2^2 + 2ax_2 = - (y_1^2 - 2by_1 - y_2^2 + 2by_2),$$

$$(x_1^2 - x_2^2) - 2a(x_1 - x_2) = - [(y_1^2 - y_2^2) - 2b(y_1 - y_2)].$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2a) = - (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 - 2b).$$

Stąd mamy 
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = - \frac{x_1 + x_2 - 2a}{y_1 + y_2 - 2b}.$$

Wstawiając otrzymaną wartość w równanie (2), mamy równanie siecznej:

$$y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2 - 2a}{y_1 + y_2 - 2b} \cdot (x - x_1).$$

Aby teraz otrzymać równanie stycznej, weźmy  $x_2 = x_1$  i  $y_2 = y_1$ , wtedy będzie

$$y - y_1 = - \frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1). \dots \dots \dots (3)$$

Temu równaniu można nadać inną postać, łatwiejszą do zapamiętania, napisawszy je najprzód, po zniesieniu ułamków, w postaci

$$(y - y_1)(y_1 - b) = - (x - x_1)(x_1 - a),$$

czyli 
$$(x - x_1)(x_1 - a) + (y - y_1)(y_1 - b) = 0;$$

dodając tożsamość  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ ,

otrzymamy

$$(x - x_1)(x_1 - a) + (x_1 - a)^2 + (y - y_1)(y_1 - b) + (y_1 - b)^2 = r^2,$$

ostatecznie  $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2 \dots \dots \dots (3')$

Takie jest równanie stycznej do koła w punkcie  $(x_1, y_1)$  okręgu. Równanie łatwe do zapamiętania, jeżeli je porównamy z równaniem koła, od którego tem się różni, że zamiast  $(x - a)^2$  czyli  $(x - a)(x - a)$  jest  $(x - a)(x_1 - a)$ ; to samo w drugim wyrazie.

Jeżeli równanie koła ma postać uproszczoną

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

to dokonawszy poprzednich przeróbek, otrzymamy równanie stycznej:

$$y - y_1 = - \frac{x_1}{y_1} (x - x_1) \dots \dots \dots (4)$$

lub w postaci łatwiejszej do zapamiętania

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \dots \dots \dots (4')$$

Zanotujmy tu jeszcze z równania (3) współczynnik kątowy stycznej

$$m = - \frac{x_1 - a}{y_1 - b},$$

a z równania (4):

$$m = - \frac{x_1}{y_1}.$$

§ 42. Równanie normalnej do koła. Ograniczymy się tu do przypadku, kiedy dane jest równanie koła w postaci uproszczonej

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Normalna przechodzi przez punkt styczności  $(x_1, y_1)$ , a więc jej równanie będzie

$$y - y_1 = m'(x - x_1),$$

a że jest prostopadła do stycznej, więc

$$m' = - \frac{1}{m} = + \frac{y_1}{x_1},$$

a zatem równanie normalnej będzie

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1} (x - x_1),$$

czyli

$$y = \frac{y_1}{x_1} x.$$

Z postaci tego równania wnioskujemy, że normalna oś koła przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc przez środek koła.

§ 43. Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej. Dane jest koło (rys. 39):  $x^2 + y^2 = r^2$  i punkt  $M(x_1, y_1)$  na okręgu.



Poprowadźmy styczną  $MT$  i normalną  $MO$ . Długością stycznej jest odcinek  $MT$ , który można obliczyć z  $\triangle MPT$ :

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2},$$

gdzie  $MP = y_1$ , a  $PT = OT - OP =$   
 $= OT - x_1$ .

Odcinek  $OT$  znajdziemy, jako odciętą punktu, w którym styczna przecina się z osią odciętych; a więc, jeżeli napiszemy równanie stycznej

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

i założymy w niem  $y = 0$ , to otrzymamy

$$xx_1 = r^2; \quad x = OT = \frac{r^2}{x_1}$$

$$\text{A zatem } PT = OT - x_1 = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1},$$

bo, oczywiście,  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ .

Długość stycznej

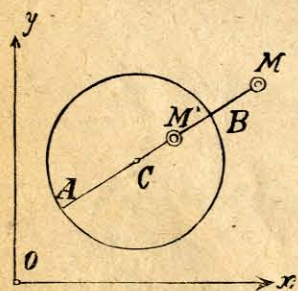
$$MT = \sqrt{y_1^2 + \frac{y_1^4}{x_1^2}} = \frac{y_1}{x_1} \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{y_1 r}{x_1}.$$

Długość normalnej  $MO = r$ .

Podstyczna  $PT$ , jak widzieliśmy,  $= \frac{y_1^2}{x_1}$ .

Podnormalna  $OP = x_1$ .

§ 44. Potęga punktu względem koła. Linja potęgowa dwóch kół. Niech będzie dane koło (rys. 40):



Rys. 40.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$  i punkt  $M(x_1, y_1)$ .

Potęga tego punktu względem danego koła jest, jak wiadomo, równa iloczynowi jego obu odległości od okręgu koła, czyli

$$II = MA \cdot MB,$$

inaczej

$$II = (MC + r)(MC - r) = MC^2 - r^2,$$

ale  $MC^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$ ,

a zatem

$$II = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2.$$

Widzimy więc, że potęga danego punktu względem koła równa się lewej stronie równania koła (prawą jest 0), w którym za  $x$  i  $y$  są wstawione współrzędne danego punktu.

Jeżeli punkt  $M(x_1, y_1)$  leży wewnątrz koła, to jego potęga jest ujemna:

$$II = MA \cdot MB = (r + MC)(r - MC) = \\ = r^2 - MC^2 = -[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2].$$

Jeżeli punkt leży na okręgu koła, to jego potęga jest równa zero, bo wtedy  $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ .

Niech teraz będą dwa koła:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = r'^2.$$

Odejmijmy od siebie te równania:

$$-2ax + 2a'x + a^2 - a'^2 - 2by + 2b'y + b^2 - b'^2 - r^2 + r'^2 = 0,$$

czyli

$$2(a' - a)x + 2(b' - b)y + [(a^2 + b^2 - r^2) - (a'^2 + b'^2 - r'^2)] = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie 1-go stopnia względem  $x$  i  $y$ , a więc jego miejscem geometrycznym jest linja prosta. Cóż to za prosta?

Oznaczmy, dla skrócenia, równania danych kół

$$K_1 = 0; \quad K_2 = 0,$$

wtedy równanie tej prostej będzie

$$K_1 - K_2 = 0.$$

Ale  $K_1$  jest potęgą pewnego punktu względem 1-go z danych kół,  $K_2$  zaś jest jego potęgą względem 2-go koła (jeżeli za  $x$  i  $y$  wstawimy współrzędne tego punktu), a więc równanie  $K_1 - K_2 = 0$ , czyli  $K_1 = K_2$  jest równaniem miejsca geometrycznego takich punktów, których potęgi względem obu kół danych są sobie równe. To miejsce geometryczne nazywa się linią potęgową kół danych.

Jeżeli otrzymane poprzednio równanie linii potęgowej napiszemy w postaci

$$y = -\frac{a' - a}{b' - b}x - \frac{(a^2 + b^2 - r^2) - (a'^2 + b'^2 - r'^2)}{2(b' - b)},$$

to widzimy, że jej współczynnik kątowy jest

$$m = -\frac{a' - a}{b' - b}.$$

Napiszmy jeszcze równanie linii środków kół danych, jako prostej, przechodzącej przez dwa punkty:  $(a, b)$  i  $(a', b')$ :

$$y - b = \frac{b' - b}{a' - a}(x - a),$$

jej współczynnik kątowy jest

$$m' = \frac{b' - b}{a' - a}.$$

Widzimy zatem, że linja potęgowa dwóch kół jest prostopadła do ich linii środków.

Niech teraz będą dane trzy koła:

$$K_1 = 0; \quad K_2 = 0; \quad K_3 = 0;$$



równania linii potęgowych kół 1-go i 2-go, 2-go i 3-go oraz 1-go i 3-go będą:

$$K_1 - K_2 = 0; \quad K_2 - K_3 = 0; \quad K_1 - K_3 = 0.$$

Jeżeli pierwsze dwa z tych równań do siebie dodamy, to otrzymamy trzecie, a zatem linie potęgowe trzech kół przecinają się w jednym punkcie (środek potęgowy).

§ 45. Biegun i biegunowa. Niech będą dwa punkty:  $P_1(x_1, y_1)$  i  $P_2(x_2, y_2)$  oraz koło:  $x^2 + y^2 = r^2$  (rys. 41). Jeżeli przez te punkty poprowadzimy prostą, to odcinek  $P_1P_2$  będzie przez okrąg koła podzielony w pewnym stosunku, np.  $\lambda : 1$  i spólrzędne punktów przecięcia  $M$  i  $N$  znajdziemy ze wzorów (patrz § 5).

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Ale te spólrzędne muszą zadośćczynić równaniu koła, a zatem:

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 = r^2,$$

czyli

$$\lambda^2(x_2^2 + y_2^2 - r^2) + 2\lambda(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2) + (x_1^2 + y_1^2 - r^2) = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie 2-go stopnia względem  $\lambda$ ; jeżeli założymy

$$x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = 0,$$

to otrzymamy z równania  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , i wtedy punkty  $P_1, P_2$  oraz dwa punkty przecięcia z kołem  $M$  i  $N$  stanowią harmoniczną czwórke.

Przypuśćmy teraz, że  $P_1$  jest punktem stałym, wyprowadzmy z niego szereg promieni, przecinających okrąg koła w punktach  $M$  i  $N$ , i dla każdej trójki punktów  $P_1, M$  i  $N$  odnajdźmy czwarty harmoniczny  $P_2$ . Spólrzędne punktu  $P_2$ , na zasadzie poprzedniego rozumowania będą zadośćczyniały równaniu

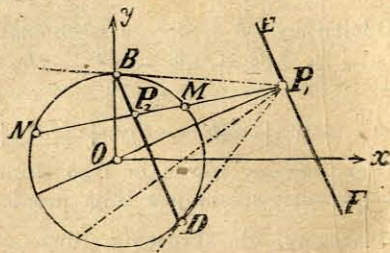
$$x_1x + y_1y = r^2 \quad \dots \quad (1)$$

(spólrzędne  $x_2$  i  $y_2$  będą zmienne) i nawzajem: punkty, których spólrzędne czynią zadość temu równaniu, będą czwartymi harmonicznymi do  $P_1, M$  i  $N$ .

Ale równanie (1), jako pierwszego stopnia względem  $x$  i  $y$  przedstawia linię prostą, więc:

jeżeli z pewnego stałego punktu wyprowadzić szereg promieni do koła i do obu otrzymanych punktów przecięcia oraz danego punktu znaleźć czwarty harmoniczny, to miejscem geometrycznym tych punktów czwartych harmonicznych jest linia prosta.

Ta prosta nazywa się biegunową danego punktu  $P_1$ , a punkt dany — biegunem prostej (1).



Rys. 41.

Z otrzymanego równania biegunowej

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

wniosujemy, co następuje:

1) Jeżeli dany punkt  $P_1(x_1, y_1)$  leży zewnątrz koła, to biegunowa przecina koło w dwóch punktach rzeczywistych, a że pomiędzy promieniami, które z danego punktu można wyprowadzić do koła, będą i dwie styczne, więc biegunowa punktu zewnętrznego przechodzi przez punkty styczności, czyli jest tak zw. cięciwą styczności.

2) Jeżeli dany punkt  $P_1(x_1, y_1)$  leży wewnątrz koła, to punkt czwarty harmoniczny leży na zewnątrz, biegunowa nie przecina koła ( $EF$ ).

3) Jeżeli punkt  $(x_1, y_1)$  leży na okręgu koła, to biegunowa jest styczna do koła, co wreszcie jest odrazu widoczne z postaci równania (1).

4) Łatwo się przekonać, że biegunowa jest prostopadła do średnicy, poprowadzonej przez punkt dany.

Istotnie: równaniem tej średnicy będzie

$$y = \frac{y_1}{x_1}x,$$

jej spólczynnik kątowy  $m = \frac{y_1}{x_1}$ , a spólczynnik kątowy biegunowej,

jak widać z równania (1), jest  $m' = -\frac{x_1}{y_1}$ .

§ 46. Równanie biegunowe koła. Dane jest koło (rys. 42), którego środkiem jest  $C$ , a promień  $= r$ . Za biegun układu obierzmy dowolny punkt  $O$ , za oś biegunową  $Oz$ ; weźmy dowolny punkt  $M$  na okręgu, jego spólrzędne biegunowe niech będą: promień wodzący  $OM = \rho$  i anomalja  $MOz = \varphi$ ; niech jeszcze odległość  $OC = a$  i stały kąt  $COz = \alpha$ .

Z  $\triangle OCM$  mamy:

$$CM^2 = OC^2 + OM^2 - 2OM \cdot OC \cdot \cos(\angle COM),$$

czyli  $r^2 = a^2 + \rho^2 - 2ap \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ .

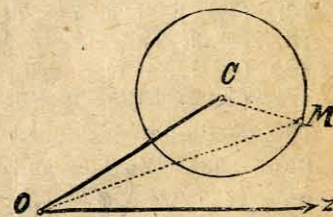
Takie jest równanie biegunowe koła.

Jeżeli środek koła leży na osi biegunowej, to wtedy kąt  $\alpha = 0$  i równanie koła będzie:

$$a^2 + \rho^2 - 2ap \cos \varphi = r^2.$$

Jeżeli zaś za biegun wziąć środek, to wtedy  $a = 0$  i równanie koła będzie miało postać najprostszą:

$$\rho = r.$$



Rys. 42.



# § 47. Zadania.

(1 — 4). Napisać równanie koła, mając współrzędne jego środka  $C$  i promień  $r$ :

1.  $C(3, 4)$ ;  $r = 7$ .
2.  $C(-5, 0)$ ;  $r = 6$ .
3.  $C(-4, -6)$ ;  $r = 3$ .
4.  $C(0, -2)$ ;  $r = 5$ .

5. Znaleźć punkty, w których koła, dane w zadaniach poprzednich (1—4), przecinają się.

6. Dane jest koło:  $x^2 + y^2 = 17$  i punkty:

$(-4, 1)$ ;  $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ ;  $(-2, -1)$ ;  $(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ ;  $(-4, 3)$ .

Które z tych punktów leżą na okręgu danego koła, które wewnątrz, lub zewnątrz niego?

(7 — 10). Znaleźć współrzędne środka i promień koła, którego równanie jest dane:

7.  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ .
8.  $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$ .
9.  $x^2 + y^2 - 5y - 6 = 0$ .
10.  $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}y^2 + 10x + 7y - \frac{1}{4} = 0$ .

11. Znaleźć równanie koła, którego okrąg przechodzi przez dwa punkty:  $(11, 2)$  i  $(7, -2)$ , a środek leży na prostej:  $y = 3x - 19$ .

12. Znaleźć równanie koła, którego okrąg przechodzi przez punkt  $(15, 25)$  i jest styczny do osi odciętych w początku układu współrzędnych.

(13 — 18). Znaleźć równanie koła, którego okrąg przechodzi przez trzy punkty dane:

13.  $(0, 0)$ ;  $(1, -2)$ ;  $(2, 1)$ .
14.  $(1, 2)$ ;  $(13, 7)$ ;  $(1, 7)$ .
15.  $(-3, 2)$ ;  $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ ;  $(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{5})$ .
16.  $(-4, -1)$ ;  $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ ;  $(\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$ .
17.  $(1, 2)$ ;  $(3, 4)$ ;  $(5, 6)$ .
18.  $(7, 1)$ ;  $(8, 1)$ ;  $(2, 3)$ .

19. W ilu punktach prosta może się przecinać z okręgiem koła i dlaczego? (20 — 23). Znaleźć punkty wspólne koła i prostej:

20.  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x + y = \sqrt{2}$ .
21.  $5x^2 + 5y^2 + 24x - 12y + 16 = 0$ ,  
 $3x - 4y + 12 = 0$ .

22.  $x^2 + y^2 = 49$ ,  
 $x = 2y$ .
23.  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ,  
 $3x + 4y = 35$ .

24. Znaleźć równanie koła o promieniu  $= 50$ , które na osi odciętych odmierza cięciwę długości  $= 28$  i którego okrąg przechodzi przez punkt  $(0, 8)$ .

(25 — 28). Znaleźć długość cięciwy, którą dane koło odcina od prostej danej:

25.  $x^2 + y^2 = 20$ ;  $5x - 12y + 44 = 0$ .
26.  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $3x - 4y = 7$ .
27.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ ;  $15x - 20y = 118$ .
28.  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 21 = 0$ ;  $5x - 12y + 9 = 0$ .

(29—34). Napisać równanie stycznej i normalnej w punkcie, danym na okręgu koła:

29.  $x^2 + y^2 = 17$ ;  $(-4, -1)$ .
30.  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $(-3, -4)$ .
31.  $x^2 + y^2 = 26$ ;  $(5, -1)$ .
32.  $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 48 = 0$ ;  $(-2, 6)$ .
33.  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$ ;  $(2, 2)$ .
34.  $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ ;  $(-1, 2)$ .

35. Biorąc liczby z poprzednich zadań (29 — 31), obliczyć długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej w danym punkcie okręgu koła.

(36—41). Z danego punktu wyprowadzić styczne do koła:

36.  $(5, 0)$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ .
37.  $(5, 1)$ ;  $x^2 + y^2 = 13$ .
38.  $(3, 5)$ ;  $x^2 + y^2 = 17$ .
39.  $(4, 3)$ ;  $x^2 + y^2 = 20$ .
40.  $(1, 7)$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ .
41.  $(4, 6)$ ;  $x^2 + y^2 = 26$ .

(42 — 49). Znaleźć równanie stycznej do koła, poprowadzonej: a) równoległe, b) prostopadłe do prostej danej:

42.  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $3x - 4y - 12 = 0$ .
43.  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $12x + 5y - 30 = 0$ .
44.  $x^2 + y^2 = 13$ ;  $3x - 2y - 12 = 0$ .
45.  $x^2 + y^2 = 13$ ;  $x + 18y - 9 = 0$ .
46.  $x^2 + y^2 = 16$ ;  $4x + 3y - 24 = 0$ .
47.  $x^2 + y^2 = 16$ ;  $5x - 12y - 30 = 0$ .
48.  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $4x - 3y - 12 = 0$ .
49.  $x^2 + y^2 = 25$ ;  $5x + 12y + 30 = 0$ .

50. Znaleźć równanie koła o promieniu  $= 53$ , które jest styczne do prostej:  $45x + 28y = 1433$  w punkcie, którego odcięta  $= 25$ .

51. Znaleźć równanie koła, którego środkiem jest punkt  $(6, 7)$  i do którego prosta:  $y = \frac{5}{12}x - 2$  jest styczną.

(52 — 55). Znaleźć równanie koła, opisanego na trójkącie, którego współrzędne wierzchołków są dane:

52.  $(2, 3)$ ;  $(4, 5)$ ;  $(6, 1)$ .
53.  $(0, 0)$ ;  $(2, 2)$ ;  $(1, 2)$ .
54.  $(7, 1)$ ;  $(8, 1)$ ;  $(2, 3)$ .
55.  $(7, 1)$ ;  $(3, 1)$ ;  $(1, 5)$ .

(56—59). Znaleźć równanie koła, wpisanego w trójkąt, którego równania boków są dane:

56.  $4x - 3y - 12 = 0$ ,  
 $4x + 3y + 6 = 0$ ,  
 $3x + 4y + 1 = 0$ .
57.  $4x - 3y = 30$ ,  
 $4x + 3y = 10$ ,  
 $12x + 5y = 6$ .
58.  $3x + 4y = 0$ ,  
 $x - 1 = 0$ ,  
 $7x - 24y + 25 = 0$ .
59.  $y = 0$ ,  
 $y = \frac{3}{4}x + 3$ ,  
 $y = -\frac{5}{12}x + \frac{2}{3}$ .

60. Znaleźć równanie koła, stycznego do osi odciętych, którego okrąg przechodzi przez punkty:  $(7, 1)$  i  $(-1, 5)$ .

(61—64). Znaleźć równania wspólnych stycznych do dwóch kół danych:

61.  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ;  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ .
62.  $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ ,  
 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ .



63.  $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 16$ ; 64.  $(x-4)^2 + (y+7)^2 = 49$ ;  
 $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$ .  $(x+7)^2 + y^2 = 36$ .

65. Przez punkty wspólne dwóch kół:

$$x^2 + y^2 + 24x - 14 = 0; \quad x^2 + y^2 = 24$$

poprowadzić koło o promieniu = 5.

66. Przez punkty wspólne dwóch kół:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0;$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0,$$

poprowadzić koło, którego środek leży na prostej:  $8x - 3y - 2 = 0$ .

(67—70). Z danego punktu wyprowadzono obie styczne do koła, znaleźć równanie cięciwy stycznosci:

67.  $(5, 0)$ ;  $x^2 + y^2 = 9$ .

69.  $(3, 5)$ ;  $x^2 + y^2 = 17$ .

68.  $(4, 3)$ ;  $x^2 + y^2 = 20$ .

70.  $(x_0, y_0)$ ;  $x^2 + y^2 = r^2$ .

(71—74). Znaleźć potęgę danego punktu względem koła danego (oraz obliczyć długość stycznej).

71.  $(4, 1)$ ;  $x^2 + y^2 = 17$ .

72.  $(4, 3)$ ;  $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 7 = 0$ .

73.  $(-5, -2)$ ;  $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 21 = 0$ .

74.  $(4, -3)$ ;  $x^2 - 6x + y^2 + 10y - 30 = 0$ .

(75—78). Znaleźć równanie linii potęgowej dwóch kół danych:

75.  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ ; 77.  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ ;

$(x+1)^2 + (y+6)^2 = 9$ .  $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9$ .

76.  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ ; 78.  $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 25$ ;

$(x+7)^2 + (y+7)^2 = 16$ .  $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 4$ .

(79—80). Znaleźć środek potęgowy trzech kół danych:

79.  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ ; 80.  $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 49$ ;

$(x+1)^2 + (y+6)^2 = 9$ ;  $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 16$ ;

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ .  $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 16$ .

(81—86). Znaleźć równanie biegunowej danego punktu względem koła danego:

81.  $(3, 4)$ ;  $x^2 + y^2 = 144$ . 83.  $(3, 5)$ ;  $x^2 + y^2 = 7$ .

82.  $(0, -6)$ ;  $x^2 + y^2 = 144$ . 84.  $(4, 3)$ ;  $x^2 + y^2 = 20$ .

85.  $(1, 3)$ ;  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$ .

86.  $(8, 3)$ ;  $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 10$ .

(87—90). Znaleźć biegun danej prostej względem koła danego:

87.  $4x + 3y = 7$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ .

88.  $4x + y = 3$ ;  $x^2 + y^2 = 25$ .

89.  $7x - 5y + 12 = 0$ ;  $x^2 + y^2 = 36$ .

90.  $Ax + By + C = 0$ ;  $x^2 + y^2 = r^2$ .

91. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, dla których suma kwadratów odległości od dwóch punktów danych jest stała.

Uwaga. Za początek układu współrzędnych obrać środek łącznicy punktów danych, a za oś odciętych tę łącznicę.

92. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, dla których stosunek odległości od dwóch punktów danych jest stały (patrz uwagę poprzednią).

## ROZDZIAŁ V.

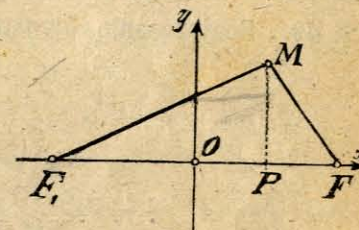
### E l i p s a.

§ 48. Określenie i równanie elipsy. Elipsą nazywa się miejsce geometryczne punktów mających taką własność, że suma ich odległości od dwóch punktów danych jest stała.

Dwa punkty dane nazywają się ogniskami elipsy, a odcinki, które łączą ogniska z punktem elipsy — promieniami wodzącymi danego punktu elipsy.

Na zasadzie przytoczonego określenia elipsy można wyprowadzić jej równanie:

Niech będą dwa punkty dane:  $F$  i  $F_1$  (rys. 43), czyli ogniska elipsy, za początek układu współrzędnych oberzmy środek  $O$  odcinka  $FF_1$ , za oś odciętych prostą  $OF$ .



Rys. 43.

Przypuścmy, że punkt  $M(x, y)$  należy do elipsy, wtedy na mocy określenia tej linii mamy

$$MF + MF_1 = 2a,$$

gdzie  $2a$  oznacza liczbę stałą, której znaczenie geometryczne wkrótce poznamy.

Poprowadźmy  $MP \perp Ox$ , wtedy

$$MF = \sqrt{MP^2 + PF^2},$$

$$MF_1 = \sqrt{MP^2 + PF_1^2}.$$

Niech znana odległość  $F_1F = 2c$ , czyli  $OF = OF_1 = c$ ; zauważmy że  $OP = x =$  odciętej, zaś  $MP = y =$  rzędnej punktu  $M$ , wtedy będzie

$$MF = \sqrt{y^2 + (c-x)^2},$$

$$MF_1 = \sqrt{y^2 + (c+x)^2},$$

a więc

$$\sqrt{y^2 + (c-x)^2} + \sqrt{y^2 + (c+x)^2} = 2a,$$

czyli

$$\sqrt{y^2 + (c+x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (c-x)^2}.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do kwadratu:

$$y^2 + (c+x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c-x)^2} + y^2 + (c-x)^2$$

czyli

$$4a\sqrt{y^2 + (c-x)^2} = 4a^2 - 4cx,$$



skróćmy przez 4 i znowu podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$\begin{aligned} a^2(y^2 + c^2 + x^2 - 2cx) &= (a^2 - cx)^2, \\ a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 - 2a^2cx &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Zauważmy z  $\triangle F_1MF$ , że

$$MF_1 + MF > F_1F, \text{ czyli: } 2a > 2c, \text{ więc: } a > c,$$

a zatem  $a^2 - c^2$  jest niewątpliwie liczbą dodatnią; oznaczmy

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

wtedy mamy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \dots \dots (1)$$

Otrzymaliśmy równanie, któremu zadośćczynią współrzędne każdego punktu elipsy, a więc jest to równanie elipsy.

§ 49. Roztrzaskanie równania elipsy. Z równania (1) wyznaczmy  $y$ :

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2},$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \dots \dots \dots (2)$$

Wyznaczmy jeszcze  $x$ :

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2 - y^2}{b^2},$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2),$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \dots \dots \dots (3)$$

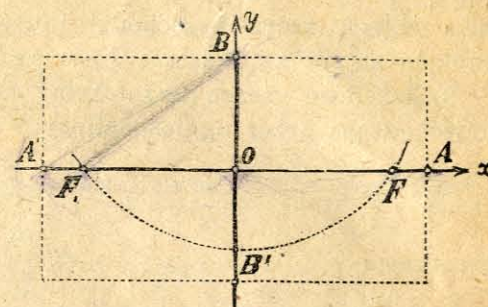
1) Z otrzymanego wzoru (2) widzimy, że każdej wartości na  $x$  odpowiadają po dwie wartości na  $y$  liczebnie równe, ale różne co do znaku, stąd wnosimy, że elipsa jest krzywą symetryczną względem prostej, obranej przez nas za oś odciętych. Tak samo ze wzoru (3) wnioskujemy, że osią symetrii elipsy jest również prosta  $Oy$ . Widzimy więc, że proste  $Ox$  i  $Oy$  dzielą elipsę na cztery równe ćwiartki.

2) Ze wzorów (2) i (3) widzimy dalej, że na  $y$  i  $x$  będziemy otrzymywali wartości rzeczywiste dopóty, dopóki nie stanie się  $x > a$  i  $y > b$ , czyli graniczną wartością na  $x$  jest  $\pm a$ , zaś na  $y$  jest  $\pm b$ , a zatem elipsa jest krzywą skończoną.

3) Jeżeli we wzorze (3) założymy  $y = 0$ , to otrzymamy  $x = \pm a$ , więc odmierzywszy na osi odciętych  $OA = OA' = a$ , otrzymamy dwa punkty  $A$  i  $A'$  (rys. 44), w których elipsa przecina oś odciętych.

Tak samo ze wzoru (2), zakładając  $x = 0$ , otrzymamy  $y = \pm b$ , więc odmierzywszy na osi rzędnych odcinki  $OB = OB' = b$ , otrzymamy dwa punkty  $B$  i  $B'$ , w których elipsa przecina oś rzędnych.

Punkty:  $A, A', B$  i  $B'$  nazywają się wierzchołkami głównymi, albo poprostu, wierzchołkami elipsy, a odcinki  $AA'$  i  $BB'$  jej osiami, z nich  $AA' = 2a$  nazywa się osią wielką,  $BB' = 2b$  — osią małą elipsy.



Rys. 44.

A zatem suma promieni wodzących każdego punktu elipsy jest równa jej osi wielkiej.

4) Ponieważ pomiędzy  $a, b$  i  $c$  istnieje zależność

$$a^2 - c^2 = b^2, \text{ czyli } a^2 - b^2 = c^2,$$

więc, mając obie osi elipsy, łatwo wyznaczyć położenie ognisk: z punktu  $B$  zatoczyć łuk promieniem  $OA = a$ , jego przecięcia z  $AA'$  będą ogniskami (rys. 44).

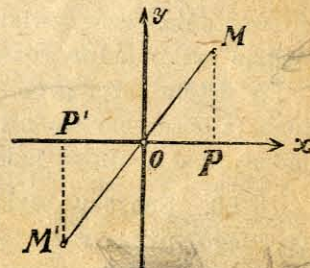
5) Ze wzoru (2) widzimy, że nadając zmiennej  $x$  wartości rosnące od  $-a$  do  $0$ , otrzymamy na  $y$  wartości również rosnące od  $0$  do  $b$ , dalej zaś, kiedy  $x$  otrzymywać będzie wartości rosnące od  $0$  do  $+a$ ,  $y$  będzie się zmniejszała, dążąc do zera. A zatem elipsa zawrze się całkowicie wewnątrz prostokąta o bokach:  $AA' = 2a$  i  $BB' = 2b$  (rys. 44).

6) Stosunek

$$\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} = e,$$

który, oczywiście, jest liczbą mniejszą od 1 ( $c < a$ ), nazywa się mimośrodem elipsy i od jego wartości zależy kształt krzywej; jeżeli  $c = 0$ , a więc jeżeli ogniska wypadają w punkcie  $O$ , wtedy  $e = 0$  i elipsa staje się kołem.

7) Niech punkt  $M(x_1, y_1)$  należy do elipsy (rys. 45). Przedłużmy  $MO$  i odmierzymy  $OM' = OM$ , wtedy z trójkątów prostokątnych  $OMP$  i  $OMP'$  wynikać będzie, że  $OP' = OP$  i  $M'P' = MP$  i współrzędne punktu  $M'$  będą:  $OP' = -x_1$



Rys. 45.



i  $MP' = -y_1$ , a że one zadośćczynią równaniu (1) elipsy, więc punkt  $M'$  należy do elipsy, a prosta  $MM'$  jest cięciwą. Ponieważ punkt  $M'$  był obrany zupełnie dowolnie na elipsie, więc każda cięciwa elipsy, która przechodzi przez punkt  $O$ , dzieli się w tym punkcie na połowy, a zatem  $O$  jest środkiem elipsy (patrz § 40).

8) Jeżeli we wzorze (2) założymy  $x = OF = c$ , otrzymamy rzędną, przechodzącą przez ognisko elipsy:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b^2}{a};$$

oznaczając 
$$p = \frac{b^2}{a},$$

widzimy, że długość cięciwy, prostopadłej do osi wielkiej elipsy i przechodzącej przez ognisko, jest

$$2p = \frac{2b^2}{a}.$$

Wielkość  $2p$  nazywa się parametrem elipsy.

9) Ze wzoru (2) wnioskujemy jeszcze, że dla każdego punktu, położonego zewnątrz elipsy, będzie

$$y > \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1,$$

a dla punktu, położonego wewnątrz elipsy:

$$y < \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

i nawzajem.

10) Aby znaleźć punkty przecięcia się elipsy z linią prostą, należy rozwiązać równania tych linii:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y = mx + n.$$

Jeżeli wartość na  $y$  wstawimy w 1-sze z napisanych równań, to otrzymamy równanie 2-go stopnia, które będzie miało wogóle dwa rozwiązania—rzeczywiste, lub urojone, w szczególnym zaś przypadku będzie tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste, czyli dwa równe.

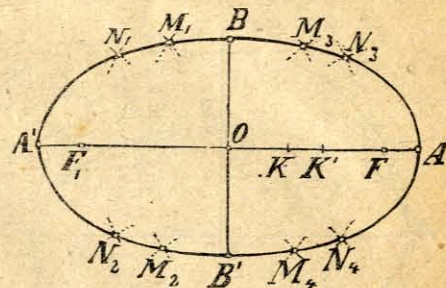
A zatem linia prosta może się przecinać z elipsą w 2-ch punktach (albo wcale się nie przecina), w szczególnym przypadku prosta może mieć z elipsą jeden (podwójny) punkt wspólny.

§ 50. Sposoby wykreślania elipsy. Droga dochodzenia analitycznego, przez roztrząsanie równania, wykryliśmy własności elipsy i jej kształt, zapoznamy się teraz ze sposobami jej wykreślania.

1) Wyznaczanie poszczególnych punktów elipsy. Dane są: oś wielka  $AA'$  i oś mała  $BB'$  (rys. 46).

Wyznamy naprzód ogniska, zataczając z punktu  $B$  łuk promieniem  $= OA$ .

Obierzmy na osi wielkiej dowolny punkt  $K$ , z ogniska  $F$  promieniem  $A'K$ , a z ogniska  $F_1$  promieniem  $KA$  zatoczmy łuk, te łuki przetną się w punktach  $M_1$  i  $M_2$ , należących do elipsy, gdyż  $M_1F_1 + M_1F = A'K + KA = A'A$ . Powtarzając takie same wykreślenie względem  $F_1$ , otrzymamy jeszcze dwa punkty elipsy:  $M_3$  i  $M_4$ .



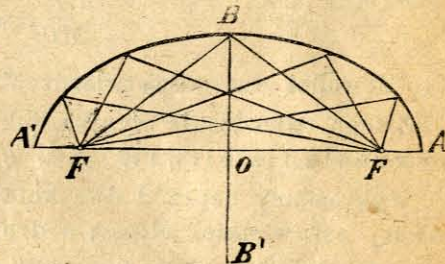
Rys. 46.

Jeżeli na  $AA'$  obierzemy inny dowolny punkt  $K'$  i dokonamy takich samych wykreśleń, otrzymamy nowe cztery punkty elipsy:  $N_1, N_2, N_3, N_4$ . W ten sposób możemy wyznaczyć dowolną liczbę punktów, które, połączysz linją ciągłą, otrzymamy elipsę.

2) Sposób praktyczny.

Dane są obie osi elipsy; wyznaczmy naprzód ogniska (rys. 47).

W obu ogniskach umocowujemy końce nitki, której długość jest równa osi wielkiej elipsy, następnie nitkę wyprężamy końcem ołówka, którym posuwając po papierze, wykreślimy połowę elipsy; przerzucając nitkę na drugą stronę, wykreślamy drugą połowę elipsy. Oczywiście jest rzecz, że nateżając nitkę, spełniamy warunek, żeby suma promieni wodzących była równa osi wielkiej elipsy.



Rys. 47.

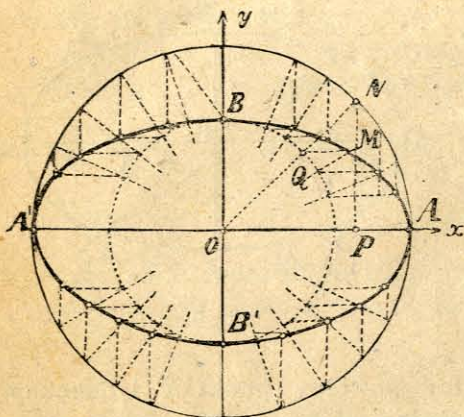
§ 51. Twierdzenie. Jeżeli na osi wielkiej elipsy, jako średnicy, wystawić półkole, to prostopadła, spuszczone z punktu okręgu na tę średnicę, tak się ma do swej części, odciętej przez elipsę, jak oś wielka elipsy ma się do osi małej.

Niech będzie elipsa (rys. 48), której oś wielka  $AA' = 2a$ , a oś mała  $BB' = 2b$ ; wystawmy na średnicy  $AA'$  półkole; układ osi współrzędnych wskazany na rysunku.



Obierzmy na okręgu dowolny punkt  $N$  i spuśćmy  $NP \perp AA'$ , odciętą punktu  $N$  jest  $OP$ , a rzędną  $NP$ ; równaniem wykreślonego koła jest

$$x^2 + y^2 = a^2,$$



Rys. 48.

stąd  $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ ,

a więc rzędna punktu  $N$ , czyli prostopadła  $NP$ , będzie

$$NP = \sqrt{a^2 - OP^2} \dots \dots (1)$$

Punkt  $M$  elipsy ma współrzędne:  $OP$  i  $MP$ ; z równania elipsy mamy

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

a więc rzędna punktu  $M$ , czyli odcinek  $MP$ , będzie

$$MP = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - OP^2} \dots \dots (2)$$

Dzieląc teraz równość (1) przez (2), otrzymamy

$$\frac{NP}{MP} = \frac{a}{b},$$

a to dowodzi słuszności twierdzenia.

Z tego twierdzenia wynika, jako wniosek, następujący sposób wykreślania elipsy:  $NP:MP = a:b = R:r$  (promienie koła).

Wykreślamy naprzód dwa koła współśrodkowe: jedno o średnicy równej osi wielkiej elipsy, a drugie o średnicy = osi małej. Na okręgu pierwszego koła obieramy dowolny punkt  $N$  (rys. 48), prowadzimy  $NO$  i  $NP \perp A'A$ , a z punktu  $Q$ , w którym  $ON$  przecina się z mniejszym okręgiem, prowadzimy  $QM \parallel A'A$ , wtedy otrzymujemy punkt  $M$  elipsy. Obierając na większym okręgu ilekolwiek punktów i powtarzając wskazane wykreślenie, otrzymamy dowolną liczbę punktów elipsy.

§ 52. Długość promieni wodzących elipsy. Niech będzie elipsa o osiach:  $AA' = 2a$  i  $BB' = 2b$ , układ współrzędnych poprzedni (rysunek 49).

Obierzmy na elipsie pewien punkt  $M(x_1, y_1)$ ; poprowadźmy jego promienie wodzące  $MF$  i  $MF_1$ , wtedy mamy

$$MF_1^2 = y_1^2 + (c + x_1)^2,$$

$$MF^2 = y_1^2 + (c - x_1)^2,$$

gdzie  $c = OF = OF_1$  jest odległością ogniskową. Dalej otrzymujemy  $MF_1^2 - MF^2 = y_1^2 + (c + x_1)^2 - y_1^2 - (c - x_1)^2$ , czyli

$$MF_1^2 - MF^2 = 4cx_1.$$

Ale

$$MF_1 + MF = 2a,$$

więc, dzieląc otrzymane dwie równości przez siebie, mamy

$$MF_1 - MF = \frac{4cx_1}{2a} = 2ex_1,$$

gdzie  $e = \frac{c}{a}$  jest mimośrodem elipsy. Odnajdując teraz  $MF_1$  i  $MF$  z wiadomej ich sumy i różnicy, otrzymujemy

$$MF_1 = a + ex_1,$$

$$MF = a - ex_1.$$

Na mocy tych wzorów można obliczyć długość obu promieni wodzących dla każdego punktu elipsy.

§ 53. Kierownice elipsy. Niech będzie elipsa o osiach  $AA' = 2a$  i  $BB' = 2b$  (rys. 50). Obierzmy na elipsie dowolny punkt  $M$ , przedłużmy oś wielką i przez pewien, tymczasem nie wyznaczony, punkt  $D$  poprowadźmy  $KK' \perp A'A$ .

Znajdźmy teraz stosunek  $MF:MC$ , t. j. stosunek odległości punktu  $M$  od ogniska i od prostej  $KK'$ .

Z poprzedniego § wiemy, że długość promienia wodzącego

$$MF = a - ex_1,$$

w danym razie

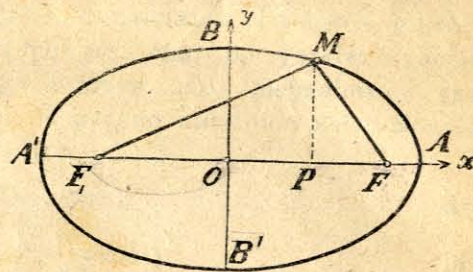
$$MF = a - e \cdot OP,$$

ale

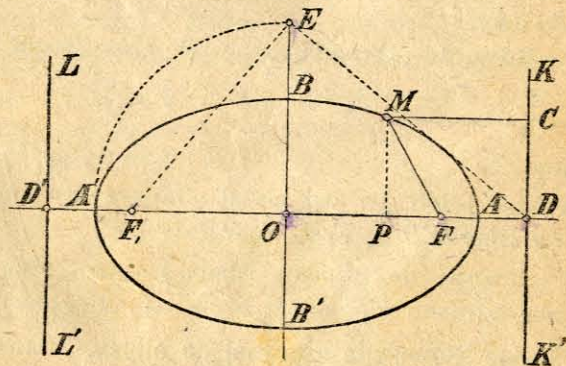
$$OP = OD - PD = OD - MC,$$

więc

$$MF = a - e \cdot (OD - MC),$$



Rys. 49.



Rys. 50.



czyli  $MF = a - e \cdot OD + e \cdot MC$ ,

a stąd 
$$\frac{MF}{MC} = e + \frac{a - e \cdot OD}{MC}$$

Z tej równości widzimy, że stosunek  $MF : MC$  jest wogóle zmienny, zależny od położenia punktu  $M$  na elipsie, t. j. od  $MC$  (przy niezmiennem  $OD$ ); wartość tego stosunku będzie stała dla jakiegokolwiek położenia punktu  $M$ , jeżeli

$$a - e \cdot OD = 0,$$

czyli  $a = e \cdot OD$ ,

skąd 
$$OD = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

Jeżeli więc dotychczas dowolny punkt  $D$  obrać na przedłużeniu osi wielkiej elipsy w odległości

$$\delta = \frac{a^2}{c} \quad \dots \quad (1)$$

od środka elipsy, to stosunek  $MF : MC$  będzie stały dla jakiegokolwiek punktu elipsy, a mianowicie będzie

$$\frac{MF}{MC} = e$$

t. j. równy mimośrodkowi elipsy.

Prosta  $KK'$ , poprowadzona w takiej właśnie odległości od środka elipsy, nazywa się jej kierownicą. Widzimy więc, że stosunek odległości każdego punktu elipsy od ogniska i od jej kierownicy jest stały i równy mimośrodkowi elipsy.

Równość (1) podaje sposób wykreślenia kierownicy elipsy:

$$\delta = \frac{a^2}{c}.$$

stąd  $c : a = a : \delta$ , *(5 EO ~ \Delta OED)*

a więc jeżeli na osi małej odmierzymy odcinek  $OE = a$  i poprowadzimy  $ED \perp F_1E$ , to  $OD = \delta$ .

Oczywiście, elipsa posiada jeszcze jedną kierownicę, odpowiadającą ognisku  $F_1$ , w takiej samej odległości od środka elipsy.

**54. Równanie stycznej do elipsy.** Dana jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

i punkt  $(x_1, y_1)$ , na niej, przez który jest poprowadzona styczna.

Powołując się na określenie stycznej (§ 40), obierzmy na elipsie jeszcze jeden punkt  $(x_2, y_2)$  i znajdziemy równanie siecznej, przeci-

nającej elipsę w tych dwóch punktach. Równanie siecznej, jako prostej, przechodzącej przez dwa punkty dane, ma postać:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \dots \quad (2)$$

ale że punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  leżą na elipsie, więc z równania (1) otrzymamy tożsamości:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Stąd przez odejmowanie mamy

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0,$$

a dalej

$$a^2(y_1^2 - y_2^2) = -b^2(x_1^2 - x_2^2),$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}.$$

Wstawiając otrzymaną wartość współczynnika kąтового w równanie (2), mamy równanie siecznej

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1) \quad \dots \quad (3)$$

Aby teraz otrzymać równanie stycznej w punkcie  $(x_1, y_1)$ , należy w równaniu (3) wziąć  $x_2 = x_1$  i  $y_2 = y_1$ , wtedy będzie

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \quad \dots \quad (4)$$

Takie jest równanie stycznej. Można mu nadać postać dogodniejszą do zapamiętania, przekształciwszy je w następujący sposób:

$$a^2yy_1 - a^2y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2x_1^2,$$

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2,$$

a po podzieleniu przez  $a^2b^2$ :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2},$$

ale prawa strona tego równania = 1, bo punkt  $(x_1, y_1)$  leży na elipsie, a zatem ostatecznie mamy

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (5)$$

Jeżeli chodzi o współczynnik kątowy stycznej, to łatwiej go odnaleźć z równania (4):

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$



§ 55. Równanie normalnej. Równanie normalnej znajdziemy, jako prostej, przechodzącej przez punkt  $(x_1, y_1)$  i prostopadłej do stycznej. Współczynnik kątowy normalnej będzie

$$-\frac{1}{m} = + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1},$$

a zatem jej równanie jest:

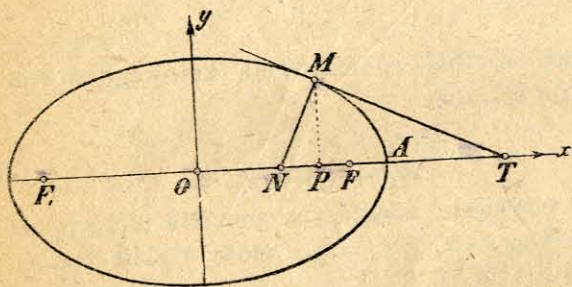
$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

§ 56. Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej.

Niech będzie elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt  $M(x_1, y_1)$ , na niej (rys. 51). Przez ten punkt poprowadzono styczną  $MT$  i normalną  $MN$ .



Rys. 51.

Aby obliczyć żądane odcinki, wykreślmy współrzędne punktu  $M$ :  $OP = x_1$  i  $MP = y_1$  i znajdziemy naprzód długość odcinka  $OT$ , jako odciętą punktu, w którym styczna przecina oś odciętych. Równanie stycznej jest

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

a równanie osi odciętych

$$y = 0,$$

więc, rozwiązując te dwa równania, otrzymamy

$$\frac{xx_1}{a^2} = 1,$$

$$xx_1 = a^2,$$

$$x = \frac{a^2}{x_1} = OT.$$

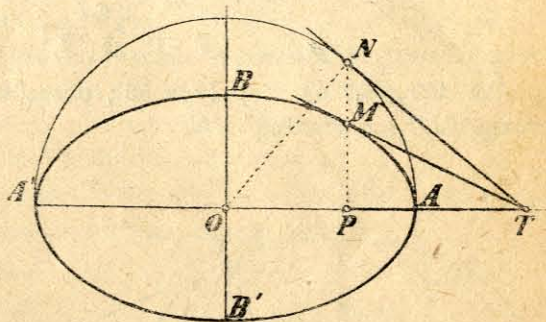
Mając długość  $OT$ , łatwo już obliczyć podstyczną:

$$PT = OT - OP = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}.$$

Stąd widzimy, że podstyczna nie zależy od osi małej elipsy, a więc, gdyby na tej samej osi wielkiej  $A'A$  wykreślić elipsę o in-

nej osi małej, to podstyczna nie zmieni się, o ile odcięta punktu zostaje bez zmiany, innymi słowy: jeżeli na tych dwóch elipsach wziąć punkty o tej samej odciętej, to ich styczne przetną oś  $x$  w tym samym punkcie  $T$ . Idąc dalej i pamiętając, że koło jest tylko szczególnym przypadkiem elipsy, możemy stąd wyciągnąć łatwy sposób wykreślenia stycznej do elipsy:

Dana jest elipsa o osi wielkiej  $AA'$  (rys. 52) i punkt  $M$  na niej, na osi wielkiej wystawiamy półkoło i prostopadłą  $MP$  przedłużamy aż do przecięcia się z okręgiem w punkcie  $N$ ; przez ten punkt prowadzimy styczną do koła, wykreślając  $NT \perp ON$ , następnie łączymy punkty  $T$  i  $M$  i otrzymujemy styczną do elipsy.



Rys. 52.

Długość stycznej obliczamy z  $\triangle PMT$  (rysunek 51):

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} =$$

$$= \sqrt{y_1^2 + \frac{(a^2 - x_1^2)^2}{x_1^2}}.$$

Znajdźmy teraz długość odcinka  $ON$ , jako odciętą punktu, w którym normalna przecina oś odciętych. Równanie normalnej jest

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

biorąc więc  $y = 0$ , otrzymamy

$$-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

$$-b^2 x_1 = a^2 x - a^2 x_1,$$

$$a^2 x = (a^2 - b^2) x_1,$$

$$x = \frac{(a^2 - b^2) x_1}{a^2} = ON.$$

A więc podnormalna

$$PN = OP - ON = x_1 - \frac{(a^2 - b^2) x_1}{a^2} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

Długość normalnej obliczymy z  $\triangle MNP$ :

$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}.$$



Niekiedy dogodniejszy bywa inny wzór na  $MN$ : przekształćmy wyrażenie podpierwiastkowe:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2; \quad a^4y_1^2 = a^4b^2 - a^2b^2x_1^2,$$

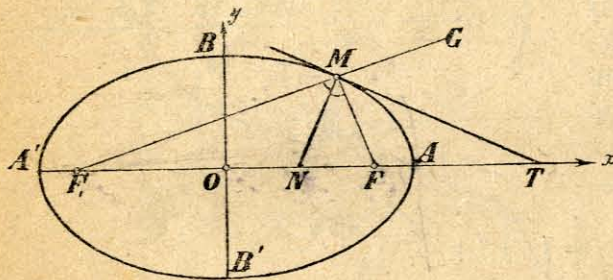
więc 
$$a^4y_1^2 + b^4x_1^2 = a^4b^2 - a^2b^2x_1^2 + b^4x_1^2 = b^2(a^4 - c^2x_1^2) = a^2b^2(a^2 - e^2x_1^2),$$

wtedy będzie 
$$MN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2x_1^2}.$$

§ 57. Własności stycznej i normalnej. Dana jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej (rys 53); przez ten punkt poprowadzono styczną  $MT$  i normalną  $MN$ .



Rys 53.

Połączmy punkt  $M$  z ogniskami elipsy, wtedy można dowieść, że w  $\triangle F_1MF$  prosta  $MN$  jest dwusieczną kąta  $F_1MF$ .

Obliczmy odcinki:  $F_1N$ ,  $NF$ ,  $MF_1$  i  $MF$  i przekonajmy się, czy się ziści proporcja

$$F_1N : NF = MF_1 : MF \quad (1)$$

Z poprzedniego § wiemy, że

$$ON = \frac{(a^2 - b^2)x_1}{a^2} = \frac{c^2x_1}{a^2} = e^2x_1,$$

gdzie  $e = \frac{c}{a}$  = mimośrodkowi elipsy, a więc

$$F_1N = F_1O + ON = c + e^2x_1 = e(a + ex_1),$$

dlatego że  $\frac{c}{e} = \frac{c}{c/a} = a$ .

Tak samo będzie

$$NF = OF - ON = c - e^2x_1 = e(a - ex_1),$$

a więc  $F_1N : NF = (a + ex_1) : (a - ex_1).$

Odcinki  $MF_1$  i  $MF$  są promieniami wodzącymi punktu  $(x_1, y_1)$ ,

a zatem (§ 52):

$$MF_1 = a + ex_1; \quad MF = a - ex_1.$$

Widzimy więc, że proporcja (1) ziściła się, a to dowodzi, że normalna dzieli na połowy kąt, utworzony przez promienie wodzące danego punktu elipsy.

Stąd wynika, że promienie wodzące punktu styczności tworzą ze styczną kąty równe.

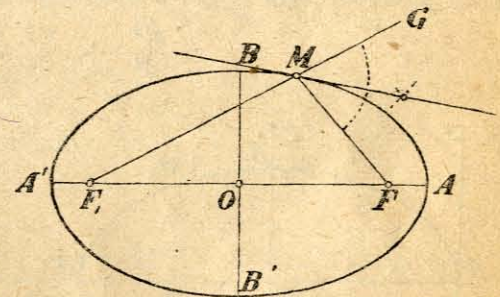
Jeżeli zaś jeden z promieni wodzących, np.  $MF_1$  przedłużymy do dowolnego punktu  $G$ , to będzie  $\angle FMT = \angle GMT$ , a więc styczna do elipsy dzieli na połowy kąt utworzony przez jeden z promieni wodzących punktu styczności i przedłużenie drugiego.

Te własności stycznej tłumaczą znane zjawisko fizyczne: jeżeli na powierzchnię eliptyczną wklęsłą padają z ogniska promienie światła, to po odbiciu się od powierzchni zbierają się w drugim ognisku (kąt padania równa się kątowi odbicia).

§ 58. Wykreślanie stycznej. Trzeba tu rozważyć dwa przypadki, czyli rozwiązać dwa następujące zagadnienia:

1) Poprowadzić styczną w danym punkcie elipsy. Niech będzie elipsa i punkt  $M$  na niej (rys. 54).

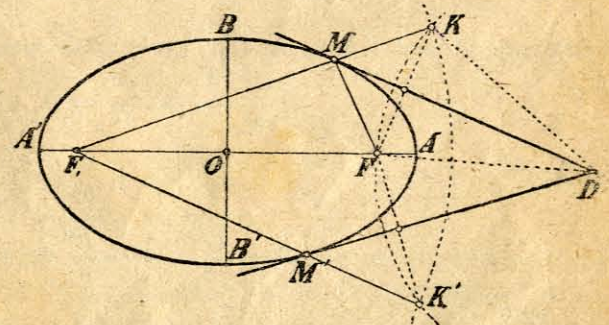
Połączmy ten punkt z obu ogniskami, przedłużmy promień wodzący  $MF_1$  do dowolnego punktu  $G$  i podzielmy kąt  $GMF$  na połowy, dwusieczna będzie żadaną styczną.



Rys. 54.

2) Wyprowadzić styczną do elipsy z punktu zewnętrznego. Dana jest elipsa i punkt zewnętrzny  $D$  (rys. 55).

Przypuśćmy, że żadaną styczną jest  $DM$ . Poprowadźmy promień wodzący punktu  $M$ , przedłużmy  $MF_1$  i odmierzymy  $MK = MF$ , wtedy  $\triangle FMK$  jest równoramienny i styczna  $DM$  jest dwusieczną kąta przy wierzchołku  $M$ , a zatem  $DM$  jest prostopadłą, wystawioną ze środka odcinka  $KF$ , stąd zaś wynika, że  $FD = KD$ .



Rys. 55.



Teraz już widoczny jest sposób wykreślenia: wyznaczmy naprzód punkt  $K$ , jako przecięcie się dwóch łuków, z których jeden jest zatoczony z danego punktu  $D$  odległością  $FD$  (oczywiście, znaną), a drugi z punktu  $F_1$  promieniem  $F_1K = F_1M + MF = A'A$ . Mając punkt  $K$ , łączymy go z ogniskiem  $F$ , a następnie przez środek odcinka  $FK$  i punkt dany  $D$  kreślimy prostą  $DM$ , która będzie żadaną styczną.

Dwa łuki, które zataczaliśmy dla wyznaczenia punktu  $K$ , przecinają się jeszcze w jednym punkcie  $K'$ , a więc zadanie ma dwa rozwiązania:  $DM$  i  $DM'$ .

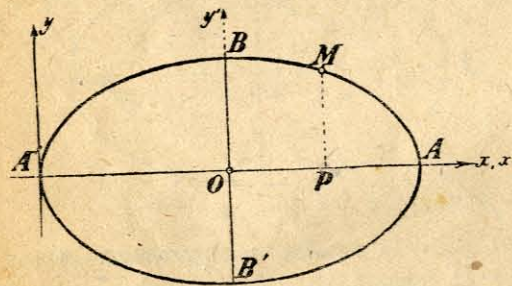
§ 59. Równanie elipsy, odniesione do jednego z jej wierzchołków głównych. Dana jest elipsa o osiach  $2a$  i  $2b$  (rys. 56).

Za początek układu współrzędnych obierzmy wierzchołek  $A'$ , za oś odciętych kierunek osi wielkiej  $A'A$ ; aby znaleźć równanie elipsy w takim układzie współrzędnych, napiszmy naprzód równanie w układzie pomocniczym  $x'Oy'$ , którego początkiem jest środek elipsy:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

Jeżeli teraz obierzmy na elipsie dowolny punkt  $M$ , którego współrzędne w układzie danym są:  $A'P = x$  i  $MP = y$ , a w układzie pomocniczym:  $OP = x'$  i  $MP = y'$ , to z rysunku widzimy, że

$$OP = x' = x - a, \\ MP = y' = y;$$



Rys. 56.

wstawiając teraz w równanie (1) otrzymane wartości na  $x'$  i  $y'$ , mamy

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

czyli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1 + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} x^2,$$

ale  $\frac{2b^2}{a} = 2p$  = parametrowi elipsy, więc ostatecznie będzie

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2 \quad \dots \quad (2)$$

Z tego równania widzimy, że kwadrat, wystawiony na rzędnej jakiegokolwiek punktu elipsy, jest mniejszy od prostokąta, który ma za podstawę odciętą tego punktu, a za wysokość parametr elipsy (dlatego że drugi wyraz prawej strony równania (2) jest liczbą dodatnią).

§ 60. Równanie biegunowe elipsy. Dana jest elipsa o osiach:  $AA' = 2a$  i  $BB' = 2b$  (rys. 57).

Układ współrzędnych obierzmy w sposób następujący: za biegun obierzmy ognisko  $F$ , za oś biegunową oś wielką elipsy, licząc jej dodatni kierunek od ogniska ku najbliższemu wierzchołkowi  $A$ , wtedy współrzędne dowolnego punktu  $M$  elipsy będą:  $MF = \rho$  i  $\sphericalangle MFz = \varphi$ .

Wykreślmy  $MP \perp A'A$ , wtedy mamy

$$MF = a - e \cdot OP$$

(patrz § 52), ale z rysunku widzimy, że

$$OP = OF - PF = c - PF,$$

a z  $\triangle PMF$ :

$$PF = MF \cdot \cos (\sphericalangle MFO) = \rho \cdot \cos (180^\circ - \varphi) = -\rho \cdot \cos \varphi,$$

więc

$$OP = c + \rho \cos \varphi,$$

a zatem

$$MF = \rho = a - e(c + \rho \cos \varphi),$$

czyli

$$\rho = a - ce - e\rho \cos \varphi,$$

$$\rho + e\rho \cos \varphi = a - ce,$$

ale

$$a - ce = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p,$$

więc

$$\rho(1 + e \cos \varphi) = p,$$

stąd ostatecznie

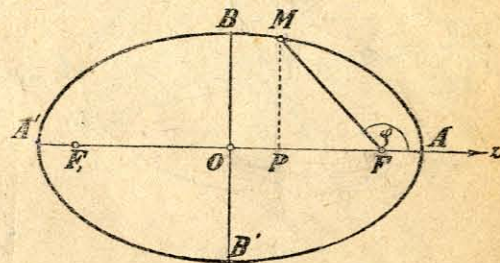
$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Takie jest równanie biegunowe elipsy.

§ 61. Średnice elipsy. Średnicą elipsy nazywa się miejsce geometryczne środków cięciw, równoległych do siebie i poprowadzonych w pewnym kierunku (patrz § 40).

Niech będzie dana elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$



Rys. 57.



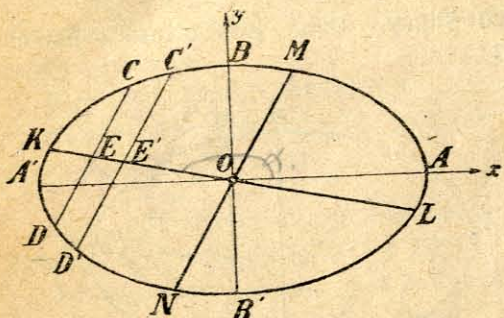
poprowadźmy dowolną cięciwę  $CD$  (rys. 58), której równanie jest  $y = mx + n$ .

Aby znaleźć równanie średnicy, znajdziemy naprzód współrzędne  $(x, y)$  środka  $E$  cięciwy  $CD$ ; jeżeli współrzędne punktu  $C$  są  $(x_1, y_1)$ , a punktu  $D$   $(x_2, y_2)$ , to

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ale  $C$  i  $D$  są punktami przecięcia się cięciwy  $CD$  z elipsą, więc, rozwiązując równania tych dwóch linii względem  $x$  i  $y$ , znajdziemy współrzędne punktów  $C$  i  $D$ . Wstawiając  $y = mx + n$



Rys. 58.

w równanie elipsy, mamy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2 + 2mnx + n^2}{b^2} = 1,$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Zamiast rozwiązywać otrzymane równanie, napiszmy

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mn}{b^2 + a^2m^2},$$

a więc odcięta punktu  $E$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2mn}{b^2 + a^2m^2}$$

Wstawiając tę wartość na  $x$  w równanie cięciwy, mamy

$$y = mx + n = -\frac{a^2m^2n}{b^2 + a^2m^2} + n,$$

czyli

$$y = \frac{b^2n}{b^2 + a^2m^2}.$$

Jeżeli teraz punkt  $E$  połączymy ze środkiem elipsy, to równaniem prostej  $EO$  będzie

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \quad \dots \quad (1)$$

Otrzymane równanie nie zależy od  $n$ , jeżeli więc poprowadzimy cięciwę  $C'D' \parallel CD$ , której równanie jest

$$y = mx + n',$$

i jej środek  $E'$  połączymy ze środkiem elipsy, to równaniem prostej  $E'O$  będzie to samo równanie (1), a zatem ono jest równaniem miej-

scą geometrycznego środków wszystkich cięciw równoległych do  $CD$ , czyli równaniem średnicy  $KL$ , sprzężonej z kierunkiem cięciwy  $CD$ .

Z postaci równania (1) wnioskujemy, że w elipsie każda średnica przechodzi przez jej środek.

§ 62. Średnice sprzężone. Niech będzie elipsa (rys. 59), poprowadźmy dowolną cięciwę  $CD$ , wtedy średnicę  $KL$ , z nią sprzężoną, otrzymamy, łącząc środek cięciwy  $E$  ze środkiem elipsy; jeżeli teraz wykreślimy  $MN \parallel CD$ , to średnice  $KL$  i  $MN$  będą z sobą sprzężone, to znaczy, że jedna z nich dzieli na połowy cięciwy, równoległe do drugiej.

Aby się o tem przekonać, przez punkt  $D$  poprowadźmy średnicę  $DG$  i punkt  $G$  połączmy z  $C$ . Wtedy z  $\triangle CDG$  widzimy, że punkt  $E$  jest środkiem boku  $CD$ , punkt  $O$  środkiem boku  $DG$ , a więc  $EO \parallel CG$ , czyli cięciwa  $CG$  jest równoległa do średnicy  $KL$ . Ponieważ zaś  $MN$  przechodzi przez środek boku  $DG$  i jest równoległa do boku  $CD$ , więc dzieli bok  $CG$  na połowy, a to dowodzi, że średnice  $KL$  i  $MN$  są z sobą sprzężone.

Na zasadzie poprzedniego § i w tym samym układzie współrzędnych, równaniem średnicy  $MN$  jest

$$y = mx, \quad \dots \quad (1)$$

jeżeli równanie cięciwy  $CD$  było

$$y = mx + n,$$

równanie zaś średnicy sprzężonej  $KL$  jest

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x \quad \dots \quad (2)$$

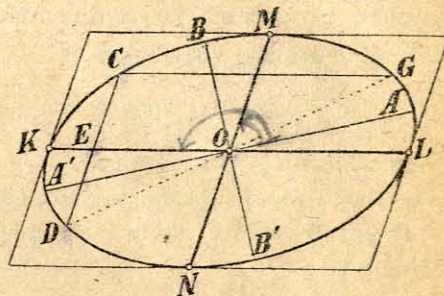
Z równań (1) i (2) wyciągamy następujące wnioski:

1) Jeżeli kąt, który z osią wielką elipsy tworzy średnica  $MN$ , oznaczmy  $\alpha$ , a kąt, który tworzy z tą osią średnica sprzężona  $KL$ , oznaczmy  $\alpha'$ , to współczynniki kątowe tych średnic są:

$$\tan \alpha = m; \quad \tan \alpha' = -\frac{b^2}{a^2m}$$

stąd mamy

$$\tan \alpha \cdot \tan \alpha' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \dots \quad (3)$$



Rys. 59.



więc iloczyn współczynników kątowych dwóch średnic sprzężonych elipsy jest stały i mając  $\alpha$ , zawsze można wyznaczyć  $\alpha'$ , a zatem dla każdej średnicy można wykreślić średnicę z nią sprzężoną.

2) Z równości (3) widzimy, że jej prawa strona jest liczbą ujemną, a więc jeżeli kąt  $\alpha$  jest ostry, to  $\alpha'$  musi być rozwarty, innymi słowy: dwie średnice sprzężone elipsy leżą zawsze w różnych jej ćwiartkach.

3) Z równości (3) mamy

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{b_2}{a^2 \operatorname{tang} \alpha},$$

jeżeli więc  $\alpha = 0$ , to  $\operatorname{tang} \alpha' = -\infty$ ,  $\alpha' = 90^\circ$ , otrzymujemy wtedy dwie średnice sprzężone prostopadłe do siebie, czyli *osi elipsy*.

4) Jeżeli mamy dwie średnice sprzężone  $MN$  i  $KL$ , których równania są

$$y = mx; \quad y = -\frac{b^2}{a^2 m} x,$$

to poprowadziwszy w punkcie  $M$  styczną do elipsy, łatwo będzie udowodnić, że ta styczna jest równoległa do średnicy  $KL$ .

Niech współrzędne punktu  $M$  będą  $(x_1, y_1)$ , wtedy równanie stycznej w tym punkcie jest

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1),$$

a więc współczynnik kątowy stycznej

$$m' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Zauważmy teraz, że współczynnik kątowy średnicy  $MN$  jest

$$m = \frac{y_1}{x_1},$$

bo  $MN$  przechodzi przez punkt  $M(x_1, y_1)$ ; współczynnik kątowy średnicy sprzężonej  $KL$  jest

$$m'' = -\frac{b^2}{a^2 m} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

stad widzimy, że

$$m'' = m',$$

a to dowodzi, że omawiana styczna jest równoległa do średnicy  $KL$ .

Tak samo styczna w punkcie  $L$  jest równoległa do średnicy  $MN$ , a więc wogóle można powiedzieć, że styczne do elipsy, poprowadzone przez końce dwóch średnic sprzężonych, są do tych średnic równoległe.

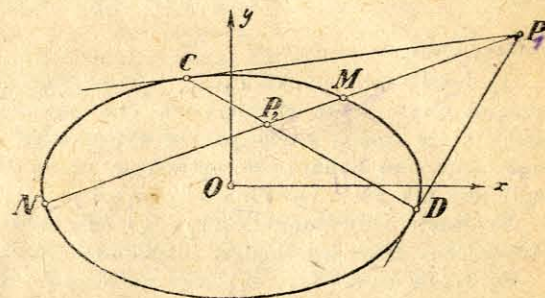
§ 63. Biegun i biegunowa. Niech będzie dana elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(rys. 60) i dwa punkty:  $P_1(x_1, y_1)$  i  $P_2(x_2, y_2)$ . Jeżeli przez te punkty poprowadzimy prostą, to jej punkty przecięcia się z elipsą podzielą odcinek  $P_1 P_2$  w pewnym stosunku  $\lambda : 1$ , a współrzędne punktów przecięcia będą:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$



Rys. 60.

Ale te współrzędne muszą zadośćczynić równaniu elipsy, a zatem:

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left( \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right)^2 = 1,$$

czyli

$$\lambda^2 \left( \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 \right) + 2\lambda \left( \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 \right) + \left( \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 \right) = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe względem  $\lambda$ , którego pierwiastki  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  wyznaczają dwa stosunki, w jakich punkty przecięcia się z elipsą dzielą odcinek  $P_1, P_2$ . Jeżeli założymy w tem równaniu

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} = \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 = 0,$$

to otrzymamy  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , wtedy punkty  $P_1$  i  $P_2$  oraz punkty przecięcia stanowią harmoniczną czwórkę.

Przypuśćmy teraz, że  $P_1$  jest punktem stałym; wyprowadźmy z niego szereg promieni, przecinających elipsę w punktach  $M$  i  $N$  i dla każdej trójki punktów:  $P_1, M$  i  $N$  odnajdźmy czwarty harmoniczny  $P_2$ . Współrzędne punktu  $P_2$ , na zasadzie poprzedniego rozumowania, będą zadośćczyniły równaniu

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

(współrzędne  $x_2$  i  $y_2$  będą zmienne) i nawzajem: punkty, których współrzędne zadośćczynią temu równaniu, będą czwartymi harmonicznymi do  $P_1, M$  i  $N$ .

Ale równanie (1), jako pierwszego stopnia względem  $x$  i  $y$ , przedstawia linię prostą, więc

jeżeli z pewnego punktu stałego wyprowadzić szereg promieni do elipsy i do obu otrzymanych za każdym razem punktów przecięcia oraz danego punktu znaleźć czwarty harmoniczny, to miejscem geometrycznym tych punktów harmonicznych sprzężonych jest linia prosta.



Ta prosta nazywa się *biegunową* danego punktu  $F_1$ , a punkt dany — *biegunem* prostej (1).

Z otrzymanego równania biegunowej.

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

wniosujemy, co następuje:

1) Jeżeli dany punkt  $P_1(x_1, y_1)$  leży zewnątrz elipsy, to jego biegunowa przecina elipsę w dwóch punktach (rzeczywistych), a że pomiędzy promieniami, które można z tego punktu wyprowadzić do elipsy, będą i dwie styczne, więc biegunowa punktu zewnętrznego przechodzi przez punkty styczności, czyli jest tak zw. cięciwą styczności.

2) Jeżeli dany punkt  $P_1(x_1, y_1)$  leży wewnątrz elipsy, to punkt czwarty harmoniczny leży nazewnątrz, biegunowa elipsy nie przecina.

3) Jeżeli punkt  $(x_1, y_1)$  leży na elipsie, to jego biegunowa jest styczną do koła, co jest wprost widoczne z równania (1).

4) Ponieważ punkty  $P_1$  i  $P_2$  są z sobą harmonicznie sprzężone, więc jeżeli punkt  $P_2$  leży na biegunowej punktu  $P_1$ , to nawzajem punkt  $P_1$  leży na biegunowej punktu  $P_2$ . Stąd wynika:

5) Jeżeli pewien punkt porusza się po prostej, to jego biegunowa obraca się dookoła bieguna tej prostej i nawzajem: jeżeli pewna prosta obraca się dookoła punktu, to jej biegun porusza się po biegunowej tego punktu.

6) Biegunowa punktu, położonego na średnicy elipsy, jest równoległa do średnicy z nią sprzężonej, o czym łatwo się przekonać z równań średnic sprzężonych oraz równania (1).

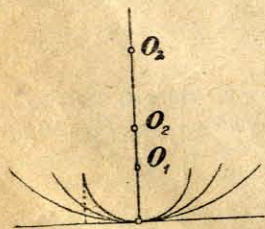
7) Biegun średnicy elipsy leży w nieskończenie dalekim punkcie średnicy sprzężonej. Stąd wynika nawzajem, biorąc pod uwagę to, co było wyżej powiedziane, że biegunową środka elipsy jest prosta nieskończenie daleka.

8) Biegunowa ogniska jest kierownicą elipsy, dlatego, że, wstawiając w równanie (1) współrzędne ogniska  $(c, 0)$ , otrzymamy:

$$\frac{cx}{a^2} = 1, \quad \text{czyli } x = \frac{a^2}{c},$$

czyli odległość kierownicy od środka elipsy (patrz § 53).

§ 64. *Koło krzywizny elipsy.* Okrąg koła ma taką właściwość, że może być po sobie dowolnie przesuwany i wszystkie jego punkty będą do siebie przystawały, a jeżeli w różnych punktach okręgu poprowadzimy styczne, to zauważymy, że koło jest wszędzie jednakowo odchylone od stycznej i dlatego mówimy, że krzywizna koła jest stała. Im mniejszy jest promień koła, tem ono jest więcej odchylone od linii prostej (stycznej) i przeciwnie (patrz rys. 61), dlatego też za miarę krzywizny koła uważa się, podług Newton'a, odwrotność jego promienia. Na tej zasadzie powiemy, że krzywizna linii prostej = 0, dlatego, że prostą można uważać za okrąg koła o nieskończenie wielkim promieniu.



Rys. 61.

Jakakolwiek inna linja krzywa takiej własności nie posiada i wogóle w każdym punkcie swoim ma inną krzywiznę. Aby znaleźć jej miarę w danym punkcie,

obieramy na krzywej jeszcze dwa punkty, sąsiednie z danym; te trzy punkty wyznaczają pewne koło, a jeżeli oba sąsiednie punkty nieskończenie się zbliżą do danego, otrzymamy koło styczne do krzywej (styczność w punkcie potrójnym, czyli styczność 2-go stopnia; porównaj ze stycznością 1-go stopnia, czyli w punkcie podwójnym, linii prostej z kołem). To koło nazywa się *kołem krzywizny* w danym punkcie linii krzywej, jego środek i promień nazywają się *środkiem* i *promieniem* krzywizny.

Niech teraz będzie dana elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Obierzmy na niej trzy dostatecznie bliskie punkty i poprowadźmy przez nie okrąg koła. Środek tego koła będzie leżał na przecięciu się prostopadłych, wystawionych ze środków dwóch cięciw, łączących wzięte punkty elipsy; jeżeli potem założymy, że odległość pomiędzy temi punktami nieskończenie maleje, to otrzymamy koło krzywizny.

Nazwijmy współrzędne środka pierwszej cięciwy  $(x_1, y_1)$ , a drugiej —  $(x_2, y_2)$ . Jeżeli końce cięciwy są niezmiernie bliskie, to za prostopadłą, wystawioną ze środka cięciwy, można wziąć normalną do elipsy w punkcie  $(x_1, y_1)$ , więc jej równaniem będzie

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

czyli

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1. \quad (1)$$

Tak samo drugą prostopadłą będzie normalna w punkcie  $(x_2, y_2)$  elipsy:

$$y - y_2 = \frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} (x - x_2),$$

czyli

$$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2. \quad (2)$$

Rozwiązując teraz równania (1) i (2) względem  $x$  i  $y$ , otrzymamy współrzędne środka krzywizny:

$$x = \frac{(a^2 - b^2)(y_1 - y_2) \cdot x_1 x_2}{a^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)},$$

ale że

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2,$$

więc będzie

$$x = \frac{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

Zauważmy teraz, że

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = x_2(y_1 - y_2) - y_2(x_1 - x_2),$$

więc

$$\frac{1}{x} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)} = \frac{1}{e^2 x_1} - \frac{y_2(x_1 - x_2)}{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)}.$$

Ponieważ punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  będą leżały na elipsie, więc

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$



stad

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} = -\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2},$$

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = -\frac{a^2(y_1 + y_2)}{b^2(x_1 + x_2)},$$

więc będzie

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e^2 x_1} + \frac{y_2 \cdot a^2(y_1 + y_2)}{e^2 x_1 x_2 \cdot b^2(x_1 + x_2)}.$$

Zakładając teraz  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , mamy

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e^2 x_1} + \frac{a^2 y_1^2}{e^2 b^2 x_1^3},$$

czyli

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{b^2 e^2 x_1^3} = \frac{a^2}{e^2 x_1^3},$$

ostatecznie

$$x = \frac{e^2 x_1^3}{a^2} \dots \dots \dots (3)$$

Wstawiając otrzymaną wartość w równanie (1) normalnej, mamy

$$e^2 x_1^3 y_1 - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1,$$

czyli

$$b^2 y = e^2 x_1^2 y_1 - c^2 y_1 = e^2 y_1 (x_1^2 - a^2),$$

stad zaś

$$y = \frac{e^2 y_1 (x_1^2 - a^2)}{b^2}.$$

Znajdźmy jeszcze  $(x_1^2 - a^2)$  z równania elipsy:

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 1 - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{b^2 - y_1^2}{b^2},$$

$$x_1^2 - a^2 = -\frac{a^2 y_1^2}{b^2},$$

a zatem

$$y = -\frac{a^2 e^2 y_1^3}{b^4} \dots \dots \dots (4)$$

Oto są współrzędne środka krzywizny w punkcie  $(x_1, y_1)$  elipsy.

Promień krzywizny znajdziemy z równania

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

więc będzie naprzód:

$$x - x_1 = \frac{e^2 x_1^3}{a^2} - x_1 = \frac{x_1}{a^2} (e^2 x_1^2 - a^2).$$

$$y - y_1 = -\frac{a^2 e^2 y_1^3}{b^4} - y_1 = -\frac{y_1}{b^4} (a^2 e^2 y_1^2 + b^4)$$

$$= -\frac{y_1}{b^2} (a^2 - e^2 x_1^2) = \frac{y_1}{b^2} (e^2 x_1^2 - a^2).$$

A zatem

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (a^2 - e^2 x_1^2)^2 \cdot \left( \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} \right) = \\ &= \frac{(a^2 - e^2 x_1^2)^2 \cdot (b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)}{a^4 b^4}. \end{aligned}$$

a po dokonaniu uproszczeń  $\rho^2 = \frac{(a^2 - e^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2}.$

Przypomnijmy jeszcze, że długość normalnej

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x_1^2},$$

stad

$$a^2 - e^2 x_1^2 = \frac{a^2 N^2}{b^2},$$

więc

$$\rho^2 = \frac{a^4 N^6}{b^3} = \frac{N^6}{p^4},$$

gdzie  $p = \frac{b^2}{a}$ , ostatecznie zatem

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Geometrycznie można wyznaczyć środek krzywizny w sposób następujący:

Odcięta środka krzywizny jest

$$x = \frac{e^2 x_1^3}{a^2} = e^2 x_1 \cdot \left( \frac{x_1}{a} \right)^2.$$

W punkcie  $M(x_1, y_1)$  elipsy (rys. 62) wykreślmy normalną, wtedy będzie (patrz § 56):

$$ON = e^2 x_1.$$

Jeżeli teraz na osi wielkiej elipsy wystawimy półkole, wyznaczmy punkt  $M'$ , odpowiedni do  $M$ , poprowadzimy  $NK \perp OM'$ , następnie  $KL \perp OA$ , to będzie  $OL = x$ .

Istotnie:

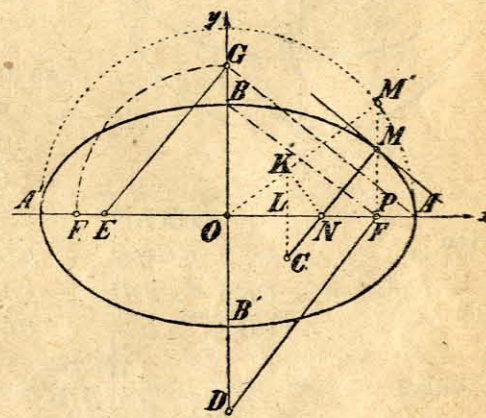
$$\frac{x_1}{a} = \frac{OP}{OM'} =$$

$$= \cos (\sphericalangle POM') = \cos \alpha,$$

gdzie  $\alpha = \sphericalangle POM'$ , więc mamy

$$x = OL = OK \cdot \cos \alpha = ON \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\text{czyli } x = e^2 x_1 \cdot \left( \frac{x_1}{a} \right)^2.$$



Rys. 62.

Jeżeli teraz przedłużymy normalną  $MN$  do przecięcia się z  $KL$ , to punkt  $C$  będzie środkiem, a  $MC$  — promieniem krzywizny w punkcie  $M$  elipsy.

Środki krzywizny wierzchołków głównych wykreślić można łatwo w sposób następujący:

Spółrzędne wierzchołka  $A$  są  $(a, 0)$ , a zatem dla tego punktu będzie

$$x = \frac{e^2 a^3}{a^2} = \frac{c^2}{a}; \quad y = 0.$$



Odmierzmy więc  $OG = c$  i wystawmy  $GE \perp GA$ , wtedy

$$OE = \frac{OG^2}{OA} = \frac{c^2}{a} = x.$$

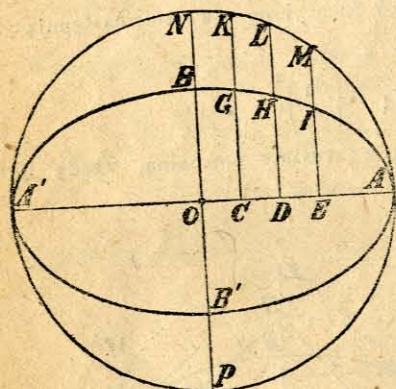
Tak samo dla wierzchołka  $B$  będzie

$$x = 0; y = -\frac{a^2 e^2 l^3}{b^4} = -\frac{c^2}{b}$$

i w podobny sposób znajdziemy

$$OD = \frac{OF^2}{OB} = \frac{c^2}{b} = y.$$

§ 65. Pole elipsy. Dana jest elipsa o osiach  $2a$  i  $2b$ ; na osi wielkiej wystawmy koło (rys. 63).



Rys. 63.

Podzielmy  $OA$  na  $n$  części równych, przez punkty podziału poprowadźmy prostopadłe:  $KC, LD, ME, \dots$  i przypuśćmy, że liczba  $n$  jest dostatecznie wielka, aby otrzymane łuki elipsy i okręgu koła można było uważać za odcinki prostej, a figury:

$ONKC$  i  $OBGC$ ,  
 $CKLD$  i  $CGHD$  i t. d.

za trapezy.

Wtedy pola trapezów:

$$CKLD = \frac{1}{2} (CK + LD) \cdot CD,$$

$$CGHD = \frac{1}{2} (CG + HD) \cdot CD,$$

więc

$$\frac{CKLD}{CGHD} = \frac{CK + LD}{CG + HD}$$

ale

$$\frac{CK}{CG} = \frac{LD}{HD} = \frac{CK + LD}{CG + HD} = \frac{a}{b},$$

a zatem

$$\frac{CKLD}{CGHD} = \frac{a}{b}.$$

Tak samo będzie

$$\frac{ONKC}{OBGC} = \frac{a}{b}$$

i wogóle

$$\frac{ONKC}{OBGC} = \frac{CKLD}{CGHD} = \frac{DLME}{DHIE} = \dots = \frac{a}{b},$$

a stąd

$$\frac{ONKC + CKLD + DLME + \dots}{OBGC + CGHD + DHIE + \dots} = \frac{a}{b}.$$

Jeżeli teraz liczba punktów  $C, D, E, \dots$  rośnie nieskończenie, to suma

$$ONKC + CKLD + DLME + \dots$$

dąży do swojej granicy, t. j.  $\frac{1}{4}$  pola koła, czyli  $\frac{1}{4}\pi a^2$ , a suma

$$OBGC + CGHD + DHIE + \dots$$

dąży do granicy, którą jest  $\frac{1}{4}$  pola elipsy, czyli  $\frac{1}{4}S$ , a więc

$$\frac{S}{\pi a^2} = \frac{b}{a},$$

stąd pole elipsy

$$S = \pi ab.$$

## § 66. Zadania.

1. Dane są punkty:

$$(6, 1); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); (-6, -2); \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); (2, -3);$$

które z nich leżą na elipsie:  $x^2 + 2y^2 = 38$ ? które leżą zewnątrz elipsy, które wewnątrz niej?

2. Przekonać się, czy leżą na elipsie:  $4x^2 + 9y^2 = 36$  następujące punkty:  $(-6, 2); (-3, -4); (5, -1); (-\frac{5}{2}, \frac{2}{5}); (2, 1)$ ?

(3 — 8). Znaleźć  $a, b, c, e$  (połowę osi wielkiej, małej, odległość ogniskową i mimośród) elipsy danej:

$$3. 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

$$6. 2x^2 + 3y^2 = 30.$$

$$4. 4x^2 + 9y^2 = 144.$$

$$7. 16x^2 + 25y^2 = 400.$$

$$5. 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

$$8. 3x^2 + 5y^2 = 120.$$

(9 — 10). Wykreślić elipsę, której równanie jest dane:

$$9. 16x^2 + 25y^2 = 400.$$

$$10. 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

11. Napisać równanie elipsy, której oś wielka jest wzięta za oś rzędnych, a oś mała za oś odciętych.

12. Napisać równanie elipsy o osiach:  $2a$  i  $2b$ , jeżeli jej środek leży w punkcie  $(m, n)$ , oś odciętych jest równoległa do osi wielkiej, a oś rzędnych do osi małej elipsy.

(13 — 15). Osi współrzędnych są odpowiednio równoległe do osi elipsy; znaleźć współrzędne środka oraz obie osi elipsy, której równanie jest dane:

$$13. 25x^2 + 9y^2 - 50x - 54y - 119 = 0.$$

$$14. 9x^2 + 4y^2 - 6x + 10y - 15 = 0.$$

$$15. 4x^2 + 25y^2 - 40x + 150y - 225 = 0.$$

(16 — 17). Znaleźć długość cięciwy, którą elipsa odcina od prostej:

$$16. \text{elipsa: } 4x^2 + 9y^2 = 144; \text{ prosta: } 20x - 15y + 24 = 0.$$

$$17. \text{,, } 4x^2 + 3y^2 = 16; \text{,, } y = 3x - 1.$$

18. Znaleźć na elipsie punkty, położone w jednakowej odległości od osi współrzędnych.

19. Znaleźć punkty przecięcia się elipsy z okręgiem koła, którego środek leży w środku elipsy.



20. Znaleźć równanie elipsy, która przechodzi przez punkt (4, 1) i której odległość ogniskowa  $c = 3$ .

(21 — 24). Znaleźć długość promieni wodzących danego punktu elipsy:

21. elipsa:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ ; punkt:  $(3, -\frac{1}{5})$ .

22. „  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; „  $(-\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ .

23. „  $16x^2 + 25y^2 = 400$ ; „  $(3, \frac{1}{5})$ .

24. „  $4x^2 + 9y^2 = 144$ ; „  $(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})$ .

(25 — 28). Znaleźć równania kierownic elipsy:

25.  $3x^2 + 5y^2 = 120$ .

27.  $4x^2 + 9y^2 = 180$ .

26.  $x^2 + 2y^2 = 18$ .

28.  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .

(29 — 34). Dana jest elipsa i punkt na niej położony. Znaleźć: a) równanie stycznej, b) równanie normalnej, c) długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej:

29. elipsa:  $9x^2 + 100y^2 = 900$ ; punkt:  $(-6, \frac{1}{5})$ .

30. „  $25x^2 + 49y^2 = 1225$ ; „  $(-\frac{2}{5}, -3)$ .

31. „  $9x^2 + 20y^2 = 180$ ; „  $(\frac{1}{3}, -2)$ .

32. „  $20x^2 + 45y^2 = 900$ ; „  $(-6, 2)$ .

33. „  $9x^2 + 16y^2 = 288$ ; „  $(4, -3)$ .

34. „  $16x^2 + 25y^2 = 360$ ; „  $(\frac{9}{2}, \frac{6}{5})$ .

(35 — 38). Dana jest elipsa. Znaleźć równanie stycznej, poprowadzonej równoległe do prostej danej:

35. elipsa:  $3x^2 + 5y^2 = 120$ ; prosta:  $x + 3y + 6 = 0$ .

36. „  $2x^2 + 3y^2 = 30$ ; „  $x + y = 5$ .

37. „  $4x^2 + 9y^2 = 180$ ; „  $4x - 3y = 12$ .

38. „  $9x^2 + 25y^2 = 225$ ; „  $9x - 20y = 0$ .

(39 — 42). Dana jest elipsa. Znaleźć równanie stycznej, poprowadzonej prostopadłe do prostej danej:

39. elipsa:  $x^2 + 2y^2 = 18$ ; prosta:  $x - 2y + 4 = 0$ .

40. „  $x^2 + 2y^2 = 38$ ; „  $x - 3y + 6 = 0$ .

41. „  $3x^2 + 5y^2 = 120$ ; „  $x + y - 6 = 0$ .

42. „  $16x^2 + 25y^2 = 400$ ; „  $3x - y + 6 = 0$ .

(43 — 48). Dana jest elipsa. Znaleźć równania obu stycznych, wyprowadzonych z danego punktu zewnętrznego, oraz obliczyć kąt między stycznymi, t. j. kąt, pod którym widać elipsę z danego punktu:

43. elipsa:  $3x^2 + 4y^2 = 48$ ; punkt:  $(-2, 5)$ .

44. „  $4x^2 + 9y^2 = 180$ ; „  $(0, -5)$ .

45. „  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; „  $(1, 2)$ .

46. „  $3x^2 + 5y^2 = 120$ ; „  $(1, 5)$ .

47. „  $9x^2 + 25y^2 = 225$ ; „  $(2, 3)$ .

48. „  $3x^2 + 4y^2 = 48$ ; „  $(4, 1)$ .

49. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których elipsę:  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  widać pod kątem prostym.

50. Znaleźć warunek, pod którym prosta:  $y = mx + n$  jest styczną do elipsy:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

51. Znaleźć warunek, pod którym prosta:  $y = mx + n$  jest normalną do elipsy:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

(52 — 53). Znaleźć równanie (odniesione do środka) elipsy, która jest styczna do prostej danej w punkcie, którego odcięta  $= x_1$ :

52. prosta:  $4x + 5y - 25 = 0$ ;  $x_1 = 4$ .

53. „  $x + 2y - 10 = 0$ ;  $x_1 = \frac{1}{5}$ .

(54 — 55). Znaleźć równanie (odniesione do środka) elipsy, do której są styczne dwie proste dane:

54.  $x + 2y - 10 = 0$ ;  $8x - 9y + 60 = 0$ .

55.  $x + y - 8 = 0$ ;  $x + 3y + 16 = 0$ .

56. Dana jest elipsa:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Znaleźć równanie cięciwy, która łączy dwa punkty elipsy:  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ .

(57 — 60). Dana jest elipsa i punkt zewnątrz niej położony. Znaleźć równanie cięciwy styczności (cięciwy, która łączy punkty styczności dwóch stycznych, wyprowadzonych z tego punktu):

57. elipsa:  $3x^2 + 4y^2 = 48$ ; punkt:  $(2, 5)$ .

58. „  $3x^2 + 5y^2 = 120$ ; „  $(1, 5)$ .

59. „  $3x^2 + 4y^2 = 48$ ; „  $(4, 1)$ .

60. „  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; „  $(1, 2)$ .

61. Dowieść, że normalna w jakimkolwiek punkcie elipsy  $= \frac{b}{a} \sqrt{rr'}$ , gdzie  $r$  i  $r'$  są promieniami wodzącymi tego punktu. Znaleźć największą wartość normalnej.

62. Znaleźć odległość środka elipsy od normalnej w punkcie  $(x_1, y_1)$  tej elipsy.

63. Dowieść, że jeżeli odcinek pewnej stałej długości porusza się w ten sposób, że jego końce poruszają się po osiach współrzędnych, to dowolny punkt tego odcinka opisuje elipsę, której  $a$  i  $b$  są odpowiednio równe odległościom punktu od obu końców odcinka. (Na tej zasadzie jest zbudowany przyrząd, zwany elipsografem).

(64 — 65). Napisać równanie elipsy, odniesione do jej wierzchołka głównego, mając obie osi:  $2a$  i  $2b$ :

64. 1)  $a = 4$ ;  $b = 3$ ; 2)  $a = 6$ ;  $b = 4$ .

65. 1)  $a = 5$ ;  $b = 3$ ; 2)  $a = 5$ ;  $b = 4$ .

(66 — 69). Dana jest elipsa. Znaleźć równania dwóch średnic sprzężonych, z których jedna przecina elipsę w punkcie danym:

66. elipsa:  $3x^2 + 5y^2 = 120$ ; punkt:  $(5, 3)$ .

67. „  $4x^2 + 9y^2 = 180$ ; „  $(-3, 4)$ .

68. „  $9x^2 + 25y^2 = 225$ ; „  $(4, \frac{9}{5})$ .

69. „  $16x^2 + 25y^2 = 400$ ; „  $(4, \frac{1}{5})$ .

(70 — 73). Dana jest elipsa i jedna z jej średnic. Znaleźć równania stycznych, poprowadzonych przez końce średnicy danej i z nią sprzężonej:

70. elipsa:  $x^2 + 4y^2 = 72$ ; średnica:  $7x - 2y = 0$ .

71. „  $4x^2 + 9y^2 = 72$ ; „  $2x + 3y = 0$ .



72. elipsa:  $9x^2 + 16y^2 = 144$ ; średnica  $2x + 5y = 0$ .  
 73. „  $5x^2 + 9y^2 = 180$ ; „  $4x - 3y = 0$ .

74. Dowieść, że suma kwadratów dwóch średnic sprzężonych elipsy jest stała i równa sumie kwadratów osi elipsy (twierdzenie Apolonjusza).  
 75. Dowieść, że trójkąt, którego wierzchołkami są: środek elipsy i końce dwóch średnic sprzężonych, ma pole stałe.

76. Dana jest elipsa:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  i pewien punkt  $(x_1, y_1)$ , położony zewnątrz, lub wewnątrz niej. Znaleźć równanie średnicy, sprzężonej z prostą, która łączy dany punkt ze środkiem elipsy.  
 77. Znaleźć pole czworokąta, utworzonego przez połączenia końców dwóch średnic sprzężonych elipsy.

78. Dowieść, że elipsy spółogniskowe przecinają się pod kątem prostym (styczne w punkcie wspólnym są do siebie prostopadłe).

79. Biorąc liczby z zadań (57—60), znaleźć równanie biegunowej danego punktu względem elipsy.

80. Znaleźć biegun prostej:  $Ax + By + C = 0$  względem elipsy:  
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

## ROZDZIAŁ VI.

### Hyperbola.

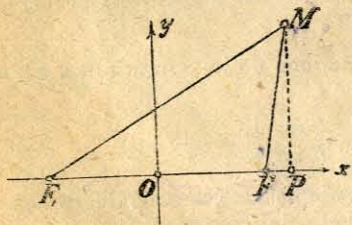
§ 67. Określenie i równanie hyperboli. Hyperbolą nazywa się miejsce geometryczne punktów, mających taką własność, że różnica ich odległości od dwóch punktów danych jest stała.

Dwa punkty dane nazywają się ogniskami hyperboli, a odcinki, które łączą ogniska z punktem hyperboli — promieniami wodzącymi danego punktu hyperboli.

Na zasadzie przytoczonego określenia hyperboli można wyprowadzić jej równanie:

Niech będą dwa punkty dane:  $F$  i  $F_1$  (rys. 64), czyli ogniska hyperboli, za początek układu współrzędnych obierzmy środek  $O$  odcinka

$F_1F$ , za oś odciętych prostą  $OF$ . Przypuśćmy, że  $M(x, y)$  jest punktem hyperboli, wtedy, na mocy określenia tej krzywej, mamy  
 $MF_1 - MF = 2a$ ,  
 gdzie  $2a$  oznacza liczbę stałą, której znaczenie geometryczne wkrótce poznamy.



Rys. 64.

Poprowadźmy  $MP \perp Ox$ , wtedy

$$MF_1 = \sqrt{MP^2 + F_1P^2},$$

$$MF = \sqrt{MP^2 + FP^2},$$

Niech odległość  $F_1F = 2c$ , czyli  $OF = OF_1 = c$ , zauważmy, że  $OP = x =$  odciętej punktu  $M$ , zaś  $MP = y =$  jego rzędnej, wtedy będzie

$$MF_1 = \sqrt{y^2 + (c + x)^2},$$

$$MF = \sqrt{y^2 + (c - x)^2},$$

a więc 
$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a,$$

czyli 
$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (c - x)^2}.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do kwadratu i znieśmy następnie jeszcze raz pierwiastek:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2,$$

$$-4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 - 4cx,$$

$$a^2(y^2 + c^2 + x^2 - 2cx) = (a^2 - cx)^2,$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Zauważmy z  $\triangle F_1MF$ , że  $F_1F > MF_1 - MF$ , czyli  $2c > 2a$ , więc  $c > a$  i oznaczmy

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

otrzymamy

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

ostatecznie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (1)$$

Oto jest równanie hyperboli.

§ 68. Roztrząsanie równania hyperboli. Z równania (1) wyznaczmy  $y$ :

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2},$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \dots \quad (2)$$

Wyznaczmy jeszcze  $x$ :

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{y^2 + b^2}{b^2},$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \quad \dots \quad (3)$$

1) Z otrzymanego wzoru na  $y$  widzimy, że hyperbola jest krzywą symetryczną względem osi  $Ox$ , a ze wzoru (3) wnosimy, że jest również symetryczna względem osi  $Oy$ .



2) Z otrzymanych wzorów (2) i (3) widzimy dalej, że zmiennej  $x$  można nadawać dowolne wartości dodatnie, lub ujemne, aby tylko było  $x \geq a$ , zaś  $y$  może przybierać wszelkie wartości od  $-\infty$  do  $\infty$ , bez żadnych zastrzeżeń, stąd wnosimy, że hyperbola jest krzywą nieskończoną.

3) Jeżeli we wzorze (3) założymy  $y = 0$ , to otrzymamy  $x = \pm a$ , więc odmierzywszy na osi odciętych dwa odcinki  $OA = OA' = a$ , otrzymamy dwa punkty:  $A$  i  $A'$  (rys. 65). Jeżeli teraz we wzorze (2) weźmiemy  $x = 0$ , to otrzymamy

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2} = \pm bi,$$

czyli wartość urojoną, a zatem hyperbola nie przecina osi rzędnych. Odmierzmy jednak na osi rzędnych odcinki:  $OB = OB' = b$ , otrzymamy punkty  $B$  i  $B'$ .

Punkty  $A$  i  $A'$  nazywają się wierzchołkami głównymi hyperboli, odcinek  $AA'$  — osią rzeczywistą, a odcinek  $BB'$  — osią urojoną hyperboli.

A zatem różnica promieni wodzących każdego punktu hyperboli jest równa jej osi rzeczywistej.

4) Ponieważ pomiędzy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  istnieje zależność

$$c^2 - a^2 = b^2, \text{ czyli } c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

więc, mając obie osi hyperboli, można wyznaczyć jej ogniska: połączyć punkty  $A$  i  $B$  i odmierzyć  $OF = AB$ . Nawzajem: znając  $a$  i  $c$ , można znaleźć  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

5) Ze wzoru (2) widzieliśmy już, że  $x$  może przybierać wartości bez ograniczeń, poczynając od  $\pm a$ . Przedstawmy tu obszar zmienności  $x$  i odpowiednich wartości na  $y$ :

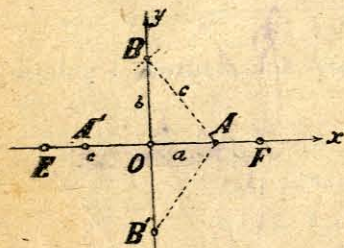
$$x = -\infty, \dots, -a, \text{ — }, +a, \dots, +\infty.$$

$$y = \pm \infty, \dots, 0, \text{ — }, 0, \dots, \pm \infty.$$

Rozejrzawszy się w tych szeregach wartości na  $x$  i  $y$ , wnosimy, że hyperbola, przecinając oś odciętych w odległości  $a$  od punktu  $O$ , w miarę wzrastania  $x$ , będzie coraz bardziej się odchylała od osi rzędnych z jednej i drugiej jej strony, a więc hyperbola składa się z dwóch gałęzi, symetrycznych względem osi rzędnych i ciągnących się do nieskończoności.

6) Stosunek

$$\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} = e,$$

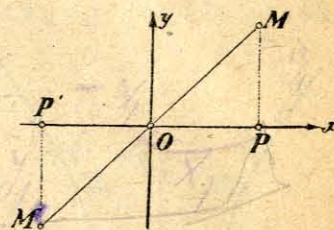


Rys. 65.

który, jak widzimy, jest liczbą większą od 1 ( $c > a$ ), nazywa się mimośrodem hyperboli i jego wartość cechuje kształt krzywej.

7) Niech punkt  $M(x_1, y_1)$  należy do hyperboli (rys. 66).

Jeżeli przedłużymy  $OM$  i odetniemy  $OM' = OM$ , to z trójkątów prostokątnych  $OMP$  i  $OM'P'$  wynikać będzie, że  $OP' = OP$  i  $M'P' = MP$ , czyli spólrzędne punktu  $M'$  będą:  $OP' = -x_1$  i  $M'P' = -y_1$ , a że one zadośćczynią równaniu (1), więc punkt  $M'$  należy do hyperboli, a  $MM'$  jest jej cięciwą. Ponieważ punkt  $M$  hyperboli był obrany zupełnie dowolnie, więc możemy powiedzieć, że każda cięciwa hyperboli, przechodząca przez  $O$ , dzieli się w tym punkcie na połowy, a zatem ten punkt jest środkiem hyperboli (§ 40).



Rys. 66.

8) Jeżeli we wzorze (2) założymy  $x = OF = c$ , otrzymamy rzędną, przechodzącą przez ognisko hyperboli:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \pm \frac{b^2}{a};$$

oznaczając

$$p = \frac{b^2}{a},$$

widzimy, że długość cięciwy, prostopadłej do osi rzeczywistej hyperboli i przechodzącej przez ognisko, jest

$$2p = \frac{2b^2}{a}.$$

Wielkość  $2p$  nazywa się parametrem hyperboli.

9) Ze wzoru (2) wnioskujemy, że dla punktów, położonych między gałęziami hyperboli, będzie

$$y > \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

dla punktów, położonych na hyperboli

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a dla wszystkich pozostałych

$$y < \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ czyli } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

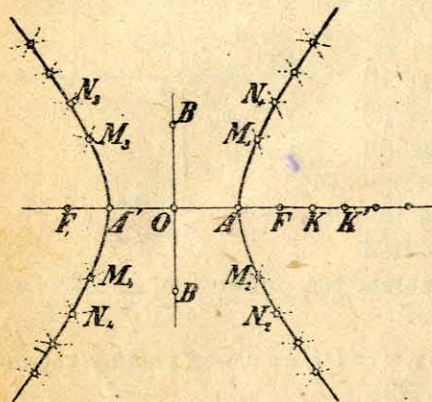
Hyperbola, która ma  $a = b$ , t. j. której oś rzeczywista jest równa osi urojonej, nazywa się równoboczną i jej równanie będzie

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

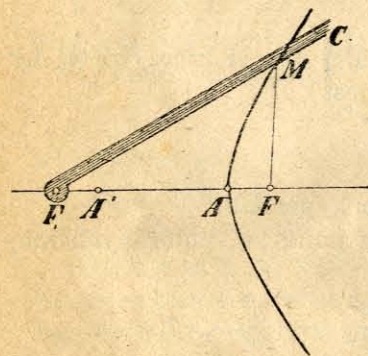


10) Ponieważ równanie hyperboli jest 2-go stopnia względem  $x$  i  $y$ , wnosimy, że wszelka prosta  $y = mx + n$  przecina się z hyperbolą co najwyżej w 2-ach punktach.

§ 69. Sposoby wykreślania hyperboli. 1) Wyznaczanie poszczególnych punktów hyperboli. Dana jest oś rzeczywista hyperboli  $AA'$  (rys. 67) i ogniska  $F$  i  $F_1$ . Obierzmy na  $AA'$  dowolny punkt  $K$ , z ogniska  $F_1$  promieniem  $A'K$ , a z ogniska  $F$  promieniem  $AK$  zatoczmy łuki, które się przetną w punktach  $M_1$  i  $M_2$ , należących do hyperboli, gdyż  $M_1F_1 - M_1F = A_1K - AK = A'A$ . Powtarzając takie samo wykreślenie względem ogniska  $F$ , a potem  $F_1$ , otrzymamy dwa nowe punkty hyperboli:  $M_3$  i  $M_4$ .



Rys. 67.



Rys. 68.

nitkę do linii, posuwać się będziemy wzdłuż linii  $F_1C$ , to ołówek wykreśli na papierze hyperbolę, dlatego że zawsze będzie

$$MF_1 - MF = CF_1 - (CM + MF) = A'A.$$

§ 70. Długość promieni wodzących hyperboli. Niech będzie hyperbola o osi rzeczywistej  $AA' = 2a$  i urojonej  $BB' = 2b$  (rys. 69), układ współrzędnych poprzedni.

Obierzmy na hyperboli dowolny punkt  $M(x_1, y_1)$ , poprowadźmy jego promienie wodzące  $MF_1$  i  $MF$ , wtedy będzie

$$MF_1^2 = y_1^2 + (c + x_1)^2,$$

$$MF^2 = y_1^2 + (c - x_1)^2,$$

gdzie  $c = OF = OF_1$ . Stąd mamy

$$MF_1^2 - MF^2 = 4cx_1,$$

ale

$$MF_1 - MF = 2a,$$

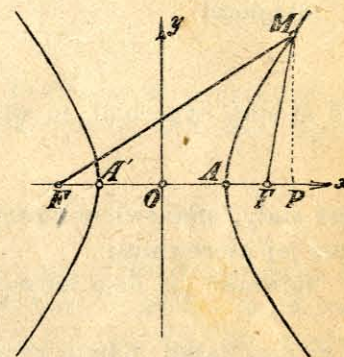
więc

$$MF_1 + MF = \frac{4cx_1}{2a} = 2ex_1,$$

gdzie  $e = \frac{c}{a}$  jest mimośrodem hyperboli.

$$\begin{aligned} A \text{ zatem } MF_1 &= ex_1 + a, \\ MF &= ex_1 - a. \end{aligned}$$

Na mocy tych wzorów można obliczyć długość obu promieni wodzących dla każdego punktu hyperboli.

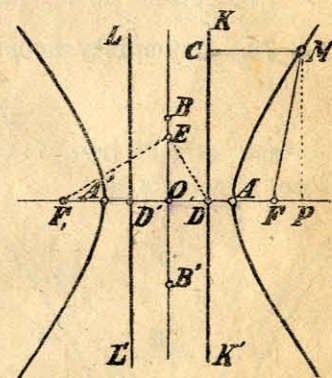


Rys. 69.

§ 71. Kierownice hyperboli. Dana jest hyperbola o osiach:  $A'A = 2a$  i  $BB' = 2b$  (rys. 70).

Kierownicą hyperboli nazywa się prosta, prostopadła do osi rzeczywistej, która ma taką własność, że stosunek odległości każdego punktu hyperboli od ogniska i od tej prostej jest stały.

Aby się przekonać, że taka prosta istnieje i znaleźć wartość tego stosunku, obierzmy na hyperboli dowolny punkt  $M$  i przez pewien, tymczasem nieoznaczony, punkt  $D$  na osi  $AA'$  wykreślmy  $KK' \perp AA'$ , poprowadźmy jeszcze  $MC \perp KK'$  i znajdziemy stosunek  $MF : MC$ .



Rys. 70.

Wiadomo, że promień wodzący

$$MF = e \cdot OP = a,$$

ale

$$OP = OD + DP = OD + MC,$$

więc

$$MF = e \cdot OD + e \cdot MC = a,$$

a stąd

$$\frac{MF}{MC} = e + \frac{e \cdot OD - a}{MC}.$$



Z otrzymanej równości widzimy, że stosunek  $\frac{MF}{MC}$  jest wogóle zmienny, zależny od  $MC$  (przy niezmiennem  $OD$ ), t. j. od położenia  $M$  na hyperboli, wartość tego stosunku będzie stała, jeżeli

$$e \cdot OD = a, \\ OD = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

skąd  
Jeżeli więc dotychczas nieoznaczony punkt  $D$  obierzemy na  $A'A$  w odległości

$$\delta = \frac{a^2}{c} \dots \dots \dots (1)$$

od środka hyperboli, to wtedy stosunek

$$\frac{MF}{MC} = e$$

jest stały, mianowicie równy mimośrodui hyperboli, a prosta  $KK'$  est jej kierownicą.

Równość (1) daje możność wykreślenia kierownicy:

$$c : a = a : \delta,$$

a zatem, jeżeli odmierzymy  $OE = a$  i wykreślimy  $ED \perp EF$ , to  $OD = \delta$ .

Oczywiście, istnieje druga kierownica hyperboli,  $LL'$ , w takiej jej odległości od środka.

§ 72. Asymptoty hyperboli. Dana jest hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

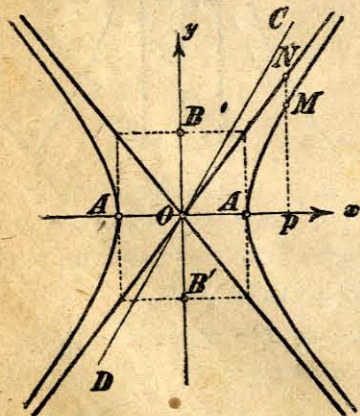
o osiach  $2a$  i  $2b$  (rys. 71). Poprowadźmy przez środek prostą  $CD$ , której równanie jest

$$y = mx$$

i szukajmy jej punktów przecięcia się z hyperbolą.

W tym celu należy rozwiązać równania tych dwóch linii względem  $x$  i  $y$ , wstawiając więc wartość  $y$  w równanie hyperboli, otrzymamy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2}{b^2} = 1, \\ (b^2 - a^2 m^2) x^2 = a^2 b^2, \\ x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m^2}$$



Rys. 71.

a zatem

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, \\ y = \pm \frac{abm}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}.$$

Widzimy, że prosta  $CD$  przecinać będzie hyperbolę w dwóch punktach, o ile  $b^2 > a^2 m^2$ , jeżeli zaś  $b^2 < a^2 m^2$ , prosta hyperboli nie przetnie.

Na wyróżnienie zasługuje przypadek, kiedy

$$b^2 = a^2 m^2, \text{ czyli } m = \pm \frac{b}{a},$$

wtedy otrzymamy  $x = \pm \infty$ ,  $y = \pm \infty$ , to znaczy, że prosta będzie miała z hyperbolą punkty wspólne w nieskończonej odległości, równaniem takiej prostej będzie

$$y = \pm \frac{b}{a} x, \dots \dots \dots (1)$$

a więc będą to dwie proste, przechodzące przez środek hyperboli, symetrycznie położone względem osi rzędnych. Wykreślić te proste łatwo, jeżeli wystawić prostokąt, którego boki są:  $2a$  i  $2b$ , wtedy jego przekątne będą wyznaczały kierunek tych prostych.

Aby nabrać bliższego pojęcia o tych prostych, weźmy na hyperboli dowolny punkt  $M$  i znajdziemy różnicę pomiędzy jego rzędną a rzędną odpowiedniego punktu  $N$  jednej z tych prostych. Jeżeli współrzędne punktu  $M$  są  $(x_1, y_1)$ , to z równania hyperboli będzie

$$MP^2 = y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - a^2),$$

a z równania prostej

$$NP^2 = y_2^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2,$$

stąd

$$y_2^2 - y_1^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - \frac{b^2}{a^2} (x_1^2 - a^2) = b^2,$$

a więc

$$y_2 - y_1 = \frac{b^2}{y_1 + y_2} \dots \dots \dots (2)$$

Ponieważ w miarę wzrastania  $x$ , rośnie również  $y_1$  i  $y_2$ , więc prawa strona równości (2) będzie się zmniejszała i kiedy  $x = \pm \infty$ , będzie również  $y_1 = \pm \infty$  i  $y_2 = \pm \infty$ , a prawa strona równości (2) stanie się zerem, a zatem będzie  $y_2 - y_1 = 0$ , t. j. hyperbola z prostą będzie miała punkt wspólny w nieskończoności. Taka prosta, która do krzywej zbliża się nieskończenie, mając z tą krzywą punkt wspólny w nieskończoności, nazywa się jej asymptotą.



A więc hyperbola ma dwie asymptoty, przechodzące przez jej środek, i ich równania są

$$y = + \frac{b}{a} x \text{ i } y = - \frac{b}{a} x.$$

Warto zauważyć, że każda gałąź hyperboli mieści się całkowicie wewnątrz kąta, utworzonego przez obie asymptoty.

§ 73. Równanie stycznej i normalnej. Dana jest hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt  $(x_1, y_1)$  na niej. Rozumując zupełnie tak samo, jak to było zrobione odnośnie do elipsy, znajdziemy równanie stycznej do hyperboli:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1),$$

lub w postaci, dogodniejszej do zapamiętania:

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Tak samo, równanie normalnej będzie

$$y - y_1 = - \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

Spółczynnik kątowy stycznej jest

$$m = + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

§ 74. Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej. Dana jest hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej (rys. 72). Przez ten punkt poprowadzono styczną  $MT$  i normalną  $MN$ .

Równanie stycznej jest

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

biorąc w niem  $y = 0$ , otrzymamy odcinek  $OT$ :

$$x = OT = \frac{a^2}{x_1},$$

a więc podstyczna

$$PT = OP - OT = x_1 - \frac{a^2}{x_1} = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$$

a styczna

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y_1^2 + \frac{(x_1^2 - a^2)^2}{x_1^2}}.$$

W podobny sposób znajdziemy podnormalną

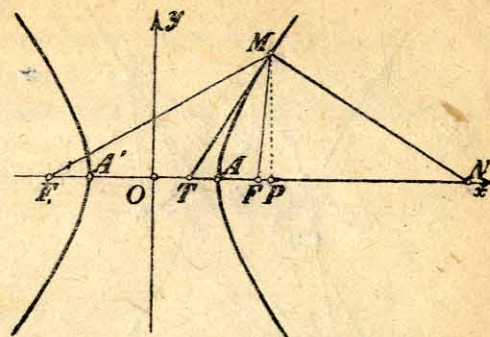
$$PN = \frac{b^2 x_1}{a^2}$$

i normalną

$$MN = \sqrt{y_1^2 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4}},$$

czyli

$$MN = \frac{b}{a} \sqrt{e^2 x_1^2 - a^2}.$$



Rys 72.

§ 75. Własność stycznej. Niech będzie znowu hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej, przez który poprowadzono styczną  $MT$  (rys. 72).

Połączmy punkt  $M$  z ogniskami, wtedy można dowieść, że w  $\triangle F_1MF$  prosta  $MT$  jest dwusieczną kąta  $F_1MF$ . Obliczmy naprzód odcinki  $F_1T$  i  $TF$ :

$$F_1T = F_1O + OT = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(ex_1 + a),$$

$$TF = OF - OT = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(ex_1 - a),$$

a więc

$$F_1T : TF = (ex_1 + a) : (ex_1 - a),$$

czyli

$$F_1T : TF = MF_1 : MF,$$

a to dowodzi, że styczna do hyperboli dzieli na połowy kąt, utworzony przez promienie wodzące punktu styczności.

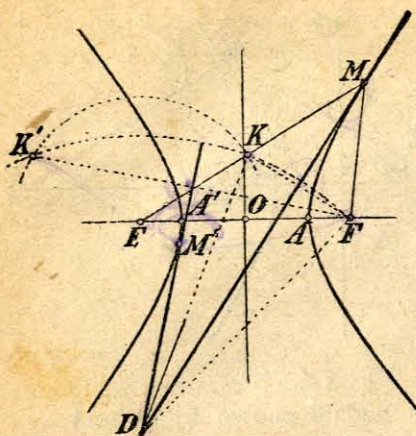
§ 76. Wykreślanie stycznej. Mamy tu do rozwiązania dwa zagadnienia:

1) Poprowadzić styczną w danym punkcie hyperboli. Niech będzie hyperbola i punkt  $M$  na niej (rys. 73).

Połączmy ten punkt z obu ogniskami i podzielmy kąt  $F_1MF$  na połowy — zadanie rozwiązane.

2) Z punktu danego wyprowadzić styczną do hyperboli. Przypuśćmy, że żadaną styczną jest  $DM$ . Poprowadźmy promienie wodzące punktu  $M$  i odmierzymy  $MK = MF$ , wtedy  $\triangle KMF$  będzie równoramienny, a  $MD$  będzie prostopadłą, wystawioną ze środka odcinka  $KF$ , a zatem będzie także  $DK = DF$ .





Rys. 73.

Teraz już jest widoczny sposób wykreślenia: wyznaczamy naprzód punkt  $K$ , jako przecięcie się dwóch łuków, z których jeden jest zatończony z danego punktu  $D$  odległością  $DF$ , a drugi z ogniska  $F_1$  odległością  $F_1K = MF_1 - MF = 2a = A'A$ . Mając punkt  $K$ , łączymy go z ogniskiem  $F$ , a następnie kreślimy prostą  $DM$  przez punkt  $D$  i przez środek odcinka  $KF$ .

Dwa łuki, które zataczaliśmy z punktów  $D$  i  $F_1$ , przecinają się jeszcze w punkcie  $K'$ , a więc zadanie ma dwa rozwiązania:  $DM$  i  $DM'$ .

§ 77. Równanie hyperboli, odniesione do jednego z jej wierzchołków. Dana jest hyperbola o osiach  $2a$  i  $2b$  (rys. 74). Za początek układu współrzędnych obierzmy wierzchołek  $A$ , za oś odciętych — oś rzeczywistą; aby znaleźć równanie hyperboli w takim układzie współrzędnych, napiszmy naprzód jej równanie w układzie pomocniczym  $x'Oy'$ , którego początkiem jest środek hyperboli:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Jeżeli teraz obierzmy na hyperboli dowolny punkt  $M$ , którego współrzędne w układzie pomocniczym są:  $OP = x'$  i  $MP = y'$ , a w układzie danym:  $AP = x$  i  $MP = y$ , to z rysunku mamy

$$x' = x + a; \quad y' = y;$$

a więc równanie hyperboli będzie

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

czyli

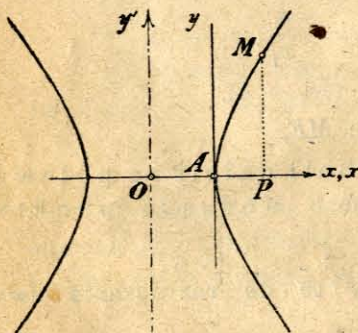
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} + 1 - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

stad

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2a^2}{a^2},$$

ale  $\frac{2b^2}{a} = 2p = \text{parametrowi hyperboli, więc ostatecznie}$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$



Rys. 74.

§ 78. Równanie biegunowe hyperboli. Dana jest hyperbola o osiach  $2a$  i  $2b$  (rys. 75); za biegun obieramy ognisko  $F$ , za oś biegunową  $FA'$ , licząc kierunek dodatni od ogniska ku najbliższemu wierzchołkowi  $A$  hyperboli ( $Fz$ ), wtedy współrzędne biegunowe dowolnego punktu  $M$  hyperboli będą:

$$MF = \rho \text{ i } \angle MFz = \varphi.$$

Wykreślimy  $MP \perp A'A$ , wtedy (§ 70):

$$MF = e \cdot OP - a,$$

ale z rysunku mamy:

$$OP = OF + FP = c + FP,$$

$$FP = MF \cdot \cos(\angle MFP) = \rho \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$$

$$= -\rho \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{więc } OP = c - \rho \cos \varphi,$$

a zatem

$$\rho = e(c - \rho \cos \varphi) - a,$$

$$\rho = ec - e\rho \cos \varphi - a,$$

$$\rho(1 + e \cos \varphi) = ec - a,$$

$$\rho = \frac{ec - a}{1 + e \cos \varphi},$$

$$\text{a że } ec - a = \frac{c^2}{a} - a = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p,$$

więc ostatecznie

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

§ 79. Średnice hyperboli. Podobnie, jak w elipsie, dowiedzimy, że każda średnica hyperboli przechodzi przez jej środek.

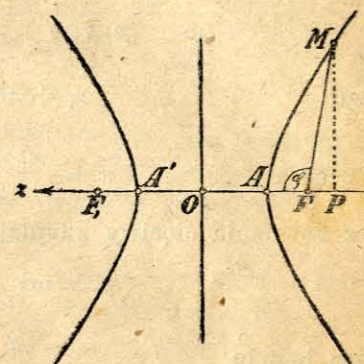
Niech będzie hyperbola (rys. 76).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

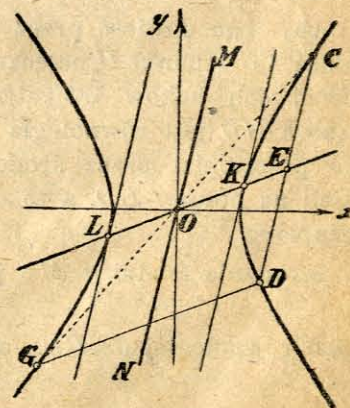
poprowadźmy dowolną cięciwę  $CD$ , której równanie jest  $y = mx + n$ .

Znajdźmy współrzędne  $(x, y)$  środka  $E$  tej cięciwy; oznaczając współrzędne punktów:  $C(x_1, y_1)$  i  $D(x_2, y_2)$ , mamy

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Rys. 75.



Rys. 76.



Trzeba zatem odnaleźć współrzędne punktów  $C$  i  $D$ , jako punktów przecięcia się cięciwy  $CD$  z hyperbolą:

$$y = mx + n,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2 + 2mnx + n^2}{b^2} = 1,$$

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2(b^2 + n^2) = 0.$$

Stąd

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2mn}{b^2 - a^2m^2},$$

a więc

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2},$$

a z równania cięciwy znajdziemy

$$y = mx + n = \frac{b^2n}{b^2 - a^2m^2},$$

więc będzie

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2m}.$$

Jeżeli teraz przez punkt  $E$  i środek hyperboli poprowadzimy prostą, to jej równanie będzie

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x.$$

Ponieważ to równanie nie zależy od  $n$ , więc jakkolwiek cięciwę poprowadzimy  $\parallel$  do  $CD$  i jej środek połączymy ze środkiem hyperboli, otrzymamy tę samą prostą  $EO$ , a zatem  $KL$  jest średnicą, odpowiadającą cięciwie  $CD$ .

§ 80. Średnice sprzężone. Jeżeli przez środek hyperboli poprowadzimy prostą  $MN \parallel CD$ , to otrzymamy dwie średnice:  $KL$  i  $MN$  z sobą sprzężone (rys. 76).

Aby tego dowieść, przez punkt  $C$  poprowadźmy średnicę pomocniczą  $CG$  i punkt  $G$  połączmy z  $D$ , wtedy  $OE$ , jako łącznica środków dwóch boków trójkąta  $GCD$ , jest równoległa do  $GD$ , a więc cięciwa  $GD$  jest równoległa do średnicy  $KL$ . Ponieważ zaś średnica  $MN$  przechodzi przez środek boku  $GC$  równolegle do  $CD$ , więc dzieli na połowy  $GD$ , a to dowodzi, że średnice  $KL$  i  $MN$  są z sobą sprzężone.

Równanie średnicy  $MN$  jest

$$y = mx \quad \dots \quad (1)$$

(jako równoległej do  $CD$ ), a równanie średnicy  $KL$  będzie

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x \quad \dots \quad (2)$$

Z równań (1) i (2) można wyciągnąć następujące wnioski:

1) Jeżeli kąty, które tworzą średnice  $MN$  i  $KL$  z osią rzeczywistą hyperboli nazwiemy  $\alpha$  i  $\alpha'$ , to

$$\operatorname{tang} \alpha = m; \quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{b^2}{a^2m},$$

stąd

$$\operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha' = \frac{b^2}{a^2} \quad \dots \quad (3)$$

więc iloczyn współczynników kątowych dwóch średnic sprzężonych hyperboli jest stały i mając  $\alpha$ , zawsze można wyznaczyć  $\alpha'$ , a zatem dla każdej średnicy można wykreślić średnicę z nią sprzężoną.

2) Z równania (3) widzimy, że jego prawa strona jest zawsze dodatnia, a więc dwie średnice sprzężone hyperboli leżą w tej samej ćwiartce.

Dalej z tego samego równania widzimy, że jeżeli  $\operatorname{tang} \alpha < \frac{b}{a}$ , to wtedy  $\operatorname{tang} \alpha' > \frac{b}{a}$ , a że granicznym położeniem prostej  $y = mx$ , przecinającej hyperbolę, jest asymptota, której współczynnik kątowy =  $\frac{b}{a}$ , więc z dwóch średnic sprzężonych tylko jedna przecina hyperbolę.

3) Z równania (3) mamy

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tang} \alpha},$$

jeżeli więc  $\alpha = 0$ , to  $\alpha' = 90^\circ$ , otrzymujemy wtedy średnice sprzężone, do siebie prostopadłe, czyli osi hyperboli.

4) Jeżeli są dwie średnice sprzężone  $KL$  i  $MN$  i przez punkt  $K$  poprowadzić styczną do hyperboli, to łatwo udowodnić, że tak samo, jak w elipsie, styczne do hyperboli, poprowadzone przez końce jednej z dwóch średnic sprzężonych, są równoległe do drugiej średnicy.

§ 81. Biegun i biegunowa. Niech będzie hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Powtarzając to samo, co było powiedziane odnośnie do elipsy (§ 63) o podziale odcinka przez tę krzywą (biorąc tylko  $-b^2$  zamiast  $b^2$ ), powiemy:

jeżeli z pewnego punktu stałego wyprowadzić szereg promieni do hyperboli i do obu otrzymanych punktów przecięcia oraz danego punktu znaleźć czwarty harmo-



niczny, to miejscem geometrycznym tych punktów czwartych harmonicznych jest linia prosta:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Otrzymana prosta nazywa się biegunową danego punktu  $P_1(x_1, y_1)$ , a punkt dany — biegunem tej prostej.

Jeżeli przeprowadzić dyskusję otrzymanego równania, to, jako wnioski, otrzymamy własności biegunowej analogiczne do tych wszystkich, które były wypowiedziane odnośnie do elipsy. Do nich dołączyć można jeszcze:

biegunowa punktu, położonego na asymptocie, jest do niej równoległa.

§ 82. Koło krzywizny hyperboli. Środek koła krzywizny wyznaczymy, jak w elipsie, rozwiązując względem  $x$  i  $y$  równania dwóch normalnych w punktach  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  hyperboli:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

$$y - y_2 = -\frac{a^2 y_2}{b^2 x_2} (x - x_2),$$

czyli

$$a^2 y_1 x + b^2 x_1 y = (a^2 + b^2) x_1 y_1,$$

$$a^2 y_2 x + b^2 x_2 y = (a^2 + b^2) x_2 y_2.$$

Rugując z tych równań naprzód  $y$ , a potem  $x$ , otrzymamy

$$a^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)x = (a^2 + b^2)(y_1 - y_2)x_1 x_2,$$

$$b^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)y = -(a^2 + b^2)(x_1 - x_2)y_1 y_2,$$

stąd

$$x = \frac{(a^2 + b^2)(y_1 - y_2)x_1 x_2}{a^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} = \frac{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

$$y = -\frac{(a^2 + b^2)(x_1 - x_2)y_1 y_2}{b^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)} = -\frac{a^2 e^2 y_1 y_2 (x_1 - x_2)}{b^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)}.$$

ale że

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = x_2(y_1 - y_2) - y_2(x_1 - x_2),$$

więc

$$\frac{1}{x} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)} = \frac{1}{e^2 x_1} - \frac{y_2(x_1 - x_2)}{e^2 x_1 x_2 (y_1 - y_2)},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{b^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{a^2 e^2 y_1 y_2 (x_1 - x_2)} = \frac{b^2}{a^2 e^2 y_1} - \frac{b^2 x_2 (y_1 - y_2)}{a^2 e^2 y_1 y_2 (x_1 - x_2)}.$$

wstawiając jeszcze z równania hyperboli:

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{a^2(y_1 + y_2)}{b^2(x_1 + x_2)},$$

mamy

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e^2 x_1} - \frac{a^2 y_2 (y_1 + y_2)}{b^2 e^2 x_1 x_2 (x_1 + x_2)},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{b^2}{a^2 e^2 y_1} - \frac{b^4 x_2 (x_1 + x_2)}{a^4 e^2 y_1 y_2 (y_1 + y_2)}.$$

Zakładając teraz  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , otrzymujemy

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e^2 x_1} - \frac{a^2 y_1^2}{b^2 e^2 x_1^3} = \frac{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}{b^2 e^2 x_1^3} = \frac{a^2}{e^2 x_1^3},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{b^2}{a^2 e^2 y_1} - \frac{b^4 x_1^2}{a^4 e^2 y_1^3} = -\frac{b^2(b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)}{a^4 e^2 y_1^3} = -\frac{b^4}{a^2 e^2 y_1^3},$$

a więc ostatecznie

$$x = \frac{e^2 x_1^3}{a^2}; \quad y = -\frac{a^2 e^2 y_1^3}{b^4}.$$

Wobec tego promień krzywizny będzie miał taką samą wartość, jak w elipsie i wykreślenie geometryczne będzie, oczywiście, podobne.

### § 83. Zadania.

1. Dane są punkty:

$$(5, \frac{9}{4}); (-\frac{1}{3}, \frac{5}{4}); (5, \frac{5}{4}); (\frac{2}{3}, -2);$$

które z nich leżą na hyperboli:  $9x^2 - 16y^2 = 144$ ?

(2 — 5). Znaleźć:  $a, b, c, e$  (połowę osi rzeczywistej, osi urojonej, odległość ogniskową, mimośrodek) hyperboli:

2.  $16x^2 - 9y^2 = 144.$

4.  $2x^2 - y^2 = 14.$

3.  $25x^2 - 9y^2 = 225.$

5.  $2x^2 - 3y^2 = 24.$

(6 — 7). Wykreślić hyperbolę, której równanie jest dane:

6.  $25x^2 - 9y^2 = 225.$

7.  $9x^2 - 16y^2 = 144.$

8. Napisać równanie hyperboli, biorąc oś rzeczywistą za oś rzędnych, a urojoną za oś odciętych.

(9 — 11). Napisać równanie hyperboli: a) biorąc oś rzeczywistą za oś odciętych, b) biorąc oś urojoną za oś odciętych, jeżeli są dane:

9.  $c = 5; a = 3.$

10.  $c = 25; a = 24.$

11.  $c = 17; b = 8.$

12. Napisać równanie hyperboli o osiach  $2a$  i  $2b$ , jeżeli jej środek leży w punkcie  $(m, n)$ , oś odciętych jest równoległa do osi rzeczywistej, a rzędnych do osi urojonej hyperboli.

(13 — 15). Osi współrzędnych są odpowiednio równoległe do osi hyperboli; znaleźć współrzędne środka, oraz obie osi hyperboli:

13.  $9x^2 - 25y^2 - 18x + 200y - 616 = 0.$

14.  $5x^2 - 7y^2 + 20x + 42y - 78 = 0.$

15.  $4a^2x^2 - b^2y^2 - 8a^3x - 60a^4 = 0.$

(16 — 19). Znaleźć długość cięciwy, którą hyperbola odcina od prostej danej:

16. hyperbola:  $y^2 - 2x^2 = 2;$  prosta:  $2x + 3y - 8 = 0.$

17. „  $2x^2 - 3y^2 = 24;$  „  $4x - 3y = 12.$

18. „  $x^2 - y^2 = 25;$  „  $12x - 16y = 15.$

19. „  $25x^2 - 9y^2 = 225;$  „  $5x + 12y = 55.$



(20 — 23). Znaleźć długość promieni wodzących danego punktu hyperboli:

20. hyperbola:  $9x^2 - 16y^2 = 144$ ; punkt:  $(\frac{20}{3}, 4)$ .  
 21. „  $2x^2 - y^2 = 14$ ; „  $(3, -2)$ .  
 22. „  $25x^2 - 9y^2 = 225$ ; „  $(5, -\frac{20}{3})$ .  
 23. „  $2x^2 - 3y^2 = 24$ ; „  $(6, 4)$ .

(24 — 27). Napisać równania kierownic hyperboli danej:

24.  $x^2 - 2y^2 = 18$ . 26.  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .  
 25.  $2x^2 - 3y^2 = 24$ . 27.  $x^2 - y^2 = 25$ .

(28 — 31). Dana jest hyperbola i punkt na niej położony. Znaleźć:

a) równanie stycznej, b) równanie normalnej, c) długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej:

28. hyperbola:  $9x^2 - 5y^2 = 36$ ; punkt:  $(\frac{10}{3}, -4)$ .  
 29. „  $9x^2 - 4y^2 = 324$ ; „  $(-10, 12)$ .  
 30. „  $x^2 - 2y^2 = 16$ ; „  $(-12, -8)$ .  
 31. „  $4x^2 - 3y^2 = 36$ ; „  $(-6, -6)$ .

(32 — 35). Dana jest hyperbola. Znaleźć równanie stycznej, równoległej do prostej danej:

32. hyperbola:  $9x^2 - 16y^2 = 144$ ; prosta:  $5x - 4y = 20$ .  
 33. „  $25x^2 - 9y^2 = 225$ ; „  $25x + 12y = 100$ .  
 34. „  $x^2 - y^2 = 25$ ; „  $5x + 4y = 10$ .  
 35. „  $3x^2 - 2y^2 = 30$ ; „  $y - 2x = 2$ .

(36 — 39). Dana jest hyperbola. Znaleźć równanie stycznej, prostopadłej do prostej danej:

36. hyperbola:  $x^2 - 2y^2 = 14$ ; prosta:  $5x - 4y = 10$ .  
 37. „  $2x^2 - y^2 = 14$ ; „  $x - 3y + 6 = 0$ .  
 38. „  $2x^2 - 3y^2 = 24$ ; „  $x + 3y + 3 = 0$ .  
 39. „  $3x^2 - 2y^2 = 30$ ; „  $x - 8y = 0$ .

(40 — 43). Znaleźć równania stycznych do hyperboli, wyprowadzonych z punktu danego, oraz obliczyć kąt, pod którym widać hyperbolę z tego punktu:

40. hyperbola:  $2x^2 - y^2 = 14$ ; punkt:  $(1, 4)$ .  
 41. „  $2x^2 - 3y^2 = 24$ ; „  $(3, 1)$ .  
 42. „  $9x^2 - 25y^2 = 225$ ; „  $(1, 3)$ .  
 43. „  $9x^2 - 16y^2 = 144$ ; „  $(0, 4)$ .

44. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których hyperbolę:  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  widać pod kątem prostym.

(45 — 47). Napisać równania asymptot do hyperboli danej:

45.  $9x^2 - 16y^2 = 144$ . 46.  $9x^2 - 25y^2 = 225$ .  
 47.  $3x^2 - 2y^2 = 30$ .

48. Znaleźć warunek, pod którym prosta:  $y = mx + n$  jest styczną do hyperboli:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

49. Znaleźć równanie hyperboli (odniesione do środka), jeżeli wiadomo, że styczna w punkcie  $(4, 2)$  tej hyperboli tworzy z osią odciętych kąt  $= 45^\circ$ .

(50 — 51). Znaleźć równanie (odniesione do środka) hyperboli, jest styczną do prostej w punkcie, którego odcięta  $= x_1$ :

50. prosta:  $5x - 4y - 16 = 0$ ;  $x_1 = 5$ .  
 51. „  $5x + 3y + 9 = 0$ ;  $x_1 = -5$ .

(52 — 53). Znaleźć równanie (odniesione do środka) hyperboli, do której są styczne dwie proste dane:

52.  $20x - 9y - 48 = 0$ ;  $5x - 3y + 9 = 0$ .  
 53.  $x + y - 4 = 0$ ;  $3x + 4y + 9 = 0$ .

(54 — 57). Dana jest hyperbola i punkt. Znaleźć równanie cięgiwy styczności:

54. hyperbola:  $x^2 - y^2 = 25$ ; punkt:  $(1, 5)$ .  
 55. „  $2x^2 - 3y^2 = 24$ ; „  $(5, 3)$ .  
 56. „  $3x^2 - 2y^2 = 30$ ; „  $(2, 1)$ .  
 57. „  $2x^2 - y^2 = 14$ ; „  $(2, 1)$ .

58. Dowieść, że długość normalnej w jakimkolwiek punkcie hyperboli  $= \frac{b}{a} \sqrt{rr'}$ , gdzie  $r$  i  $r'$  są promieniami wodzącymi tego punktu.

59. Znaleźć odległość środka hyperboli od normalnej w punkcie  $(x_1, y_1)$ .

60. Dowieść, że iloczyn odległości ognisk od stycznej jest stały dla każdego punktu hyperboli.

61. Dowieść, że odległość środka hyperboli od punktu, w którym asymptota przecina kierownicę, jest równa połowie osi rzeczywistej.

62. Znaleźć odległość ogniska hyperboli od asymptoty.

63. Dowieść, że iloczyn odległości jakiegokolwiek punktu hyperboli od obu asymptot jest stały.

(64 — 65). Napisać równanie hyperboli, odniesione do jej wierzchołka głównego, jeżeli są dane obie osi:

64. 1)  $a = 3$ ;  $b = 4$ . 2)  $a = 5$ ;  $b = 12$ .  
 65. 1)  $a = 8$ ;  $b = 6$ . 2)  $a = 1$ ;  $b = 2$ .

(66 — 69). Dana jest hyperbola. Znaleźć równania dwóch średnic sprzężonych, z których jedna przecina hyperbolę w punkcie danym:

66. hyperbola:  $9x^2 - 25y^2 = 225$ ; punkt:  $(\frac{25}{3}, 4)$ .  
 67. „  $x^2 - 2y^2 = 14$ ; „  $(4, 1)$ .  
 68. „  $2x^2 - y^2 = 14$ ; „  $(5, 6)$ .  
 69. „  $2x^2 - 3y^2 = 24$ ; „  $(6, 4)$ .

70. Dowieść, że różnica kwadratów dwóch średnic sprzężonych hyperboli jest stała i równa różnicy kwadratów osi głównych hyperboli.

Uwaga. Jak wiadomo, z pomiędzy dwóch średnic sprzężonych tylko jedna przecina hyperbolę, więc długość tylko jednej będzie rzeczywista, drugiej zaś urojona; wtedy  $m$  nazywamy długością tej średnicy.

71. Dowieść, że hyperbola i elipsa spółogniskowe przecinają się pod kątem prostym (styczne w punkcie wspólnym są do siebie prostopadłe).

72. Przez punkt hyperboli poprowadzono równoległe do obu asymptot. Dowieść, że pole otrzymanego równoległoboku jest stałe.

73. Znaleźć kąt, który tworzą z sobą asymptoty hyperboli równobocznej.



74. Dowieść twierdzenia: jeżeli elipsa i hyperbola mają obie osi wspólne, to asymptoty hyperboli wyznaczają kierunki dwóch sprzężonych równych sobie średnicy elipsy.

75. Biorąc liczby z zadań 54—57, znaleźć równanie biegunowej danego punktu względem hyperboli.

76. Znaleźć biegun prostej:  $Ax + By + C = 0$ , względem hyperboli:  
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

## ROZDZIAŁ VII.

### Parabola.

§ 84. Określenie i równanie paraboli. Parabola nazywa się miejsce geometryczne takich punktów, których odległości od danego punktu i od prostej danej, są sobie równe.

Punkt dany nazywa się ogniskiem, a prosta—kierownicą paraboli.

Na zasadzie podanego określenia paraboli, można wyprowadzić jej równanie:

Niech będzie dane ognisko  $F$  (rys. 77) i kierownica  $KK'$ , a  $M(x, y)$  niech będzie jednym z punktów poszukiwanego miejsca geometrycznego, wtedy powinno być

$$MF = MD,$$

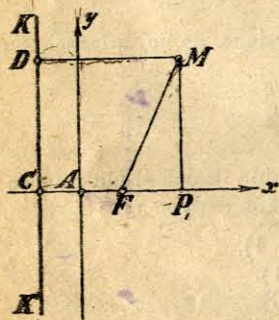
gdzie  $MD \perp KK'$ . Wykreślmy prostą  $FC \perp KK'$  i za początek układu współrzędnych o- bierzmy punkt  $A$ , czyli środek odcinka  $CF = p$ , za oś odciętych prostą  $AF$ . Jeżeli wykreślimy rzędną punktu  $M$ , to z  $\triangle FMP$  otrzymamy

$$MF = \sqrt{MP^2 + FP^2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

gdzie  $\frac{p}{2} = AF = CA = \frac{CF}{2}$ .

Z drugiej strony

$$MD = CP = CA + AP = \frac{p}{2} + x,$$



Rys. 77.

a więc

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x,$$

stąd

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} + px + x^2,$$

czyli

$$y^2 = 2px.$$

Takie jest równanie paraboli.

§ 85. Roztrząsanie równania paraboli. Z równania paraboli mamy

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

Stąd widzimy: 1) że każdej wartości na  $x$  będą odpowiadały po dwie wartości na  $y$ , które się różnią od siebie tylko znakiem, a więc parabola jest krzywą symetryczną względem prostej  $Ax$  i ma tylko tę jedną oś symetrii.

2) Widzimy dalej, że  $x$  nie może przybierać wartości ujemnych i najmniejszą wartością na  $x$  jest  $x = 0$ ; nadając zaś na  $x$  wartości dodatnie od 0 do  $\infty$ , otrzymamy na  $y$  wartości od 0 do  $\pm \infty$ , a więc parabola jest krzywą nieskończoną i składa się tylko z jednej gałęzi, położonej z jednej strony osi  $y$ .

3) Biorąc  $x = 0$ , otrzymujemy również  $y = 0$ , a więc parabola przechodzi przez początek układu współrzędnych  $A$ , który nazywa się wierzchołkiem paraboli, a prosta  $CF$ , prostopadła do kierownicy i przechodząca przez ognisko, nazywa się osią paraboli.

4) Zakładając  $x = AF = \frac{p}{2}$ , otrzymujemy rzędną, przechodzącą przez ognisko:

$$y = \pm \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = \pm p,$$

a więc długość cięciwy, przechodzącej przez ognisko paraboli i prostopadłej do osi,  $= 2p$ , czyli, jak widzimy, równa się podwójnej odległości  $FC$ , t. j. podwójnej odległości ogniska od kierownicy. Wielkość  $2p$  nazywa się parametrem paraboli.

5) Z równania paraboli widzimy jeszcze, że dla punktów, położonych zewnątrz paraboli, będzie

$$y^2 > 2px,$$

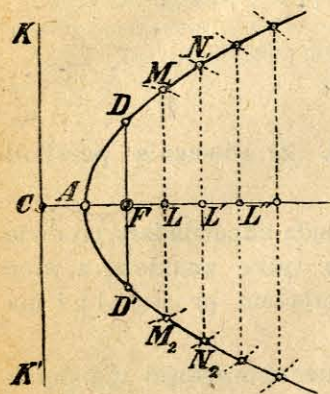
a dla punktów wewnętrznych

$$y^2 < 2px.$$

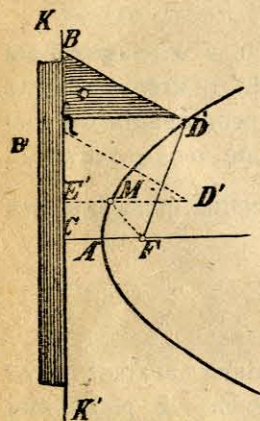
6) Ponieważ równanie paraboli jest 2-go stopnia względem  $x$  i  $y$ , wnosimy, że wszelka prosta  $y = mx + n$  przecinać się może z parabolą co najwyżej w 2-ch punktach.



§ 86. Sposoby wykreślania paraboli. 1) Wyznaczanie poszczególnych punktów paraboli. Dane jest ognisko  $F$  i kierownica  $KK'$  (rys. 78), poprowadźmy oś paraboli  $CF \perp KK'$ .



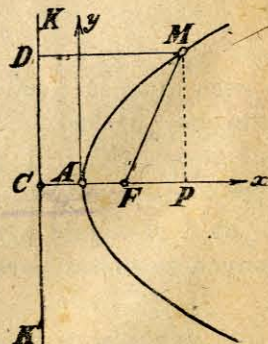
Rys. 78.



Rys. 79.

Środek odcinka  $CF$ , czyli punkt  $A$ , jest wierzchołkiem paraboli; następnie łatwo otrzymać dwa punkty paraboli  $D$  i  $D'$ , wykreśliwszy  $DF = D'F = CF (=p)$ . Obierzmy teraz na osi paraboli dowolny punkt  $L$ , wykreślimy prostopadłą do osi, a z punktu  $F$  promieniem  $CL$  zatoczmy łuk, który przetnie tę prostopadłą w punktach paraboli  $M_1$  i  $M_2$ . Obierając dalej inny dowolny punkt na osi i powtarzając podobne wykreślenie, otrzymamy nowe dwa punkty paraboli  $N_1$  i  $N_2$  i t. d.

2) Sposób praktyczny. Do kierownicy  $KK'$  (rys. 79) przykładamy nieruchomo linjał, po jego brzegu posuwamy trójkąt  $BDE$ , który w wierzchołku  $D$  ma przymocowaną nitkę o długości  $= DE$ , a drugi koniec nitki umocowany jest w ognisku  $F$ . Jeżeli teraz, przyciskając ołówek nitkę do boku  $DE$ , będziemy posuwali trójkąt  $BDE$  po linjale, to ołówek wykreśli parabolę; pamiętać tylko należy, żeby nitka była stale wyciągnięta. W jakimkolwiek położeniu znajdzie się trójkąt, np.  $B'D'E'$ , będzie  $MF = ME'$ .



Rys. 80.

§ 87. Długość promienia wodzącego.

Dana jest parabola:  
 $y^2 = 2px$

i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej (rys. 80).

Z rysunku mamy

$$MF = MD = CA + AP,$$

czyli 
$$MF = \frac{p}{2} + x_1,$$

gdzie  $p = CF =$  połowie parametru paraboli.

§ 88. Równanie stycznej i normalnej. Niech będzie parabola:  $y^2 = 2px$  i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej. Znajdźmy naprzód równanie

siecznej, która przecina parabolę w dwóch punktach:  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ . Równanie jej będzie miało postać:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

jako prostej, przechodzącej przez dwa punkty dane.

Ale te dwa punkty leżą na paraboli, więc

$$y_1^2 = 2px_1,$$

$$y_2^2 = 2px_2,$$

stąd

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2).$$

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2},$$

a zatem równanie siecznej będzie

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Jeżeli teraz założymy  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , to otrzymamy równanie stycznej

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Można temu równaniu nadać dogodniejszą postać:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1,$$

$$yy_1 = px + (y_1^2 - px_1),$$

ale że

$$y_1^2 = 2px_1,$$

więc będzie

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Takie równanie ma styczna. Jej współczynnik kątowy jest

$$m = \frac{p}{y_1}.$$

Równanie normalnej, jako prostej, która przechodzi przez punkt  $(x_1, y_1)$  i jest prostopadła do stycznej, będzie

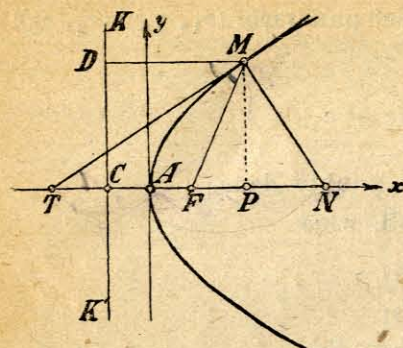
$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

§ 89. Długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej.

Niech będzie parabola:  $y^2 = 2px$  i punkt  $M(x_1, y_1)$  na niej (rys. 81). Znajdźmy naprzód odcinek  $AT$ , jako odciętą punktu, w którym styczna przecina oś odciętych, więc założmy  $y = 0$  w równaniu stycznej

$$yy_1 = p(x + x_1),$$





Rys. 81.

Długość stycznej będzie

$$MT = \sqrt{MP^2 + TP^2} = \sqrt{y_1^2 + 4x_1^2},$$

Znajdźmy teraz odcinek AN, zakładając  $y = 0$  w równaniu normalnej:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

wtedy otrzymamy

$$-y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1),$$

$$p = x - x_1,$$

$$x = p + x_1 = AN.$$

A więc podnormalna będzie

$$PN = AN - AP = p,$$

czyli podnormalna paraboli równa się połowie jej parametru.

Długość normalnej jest

$$MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{y_1^2 + p^2},$$

§ 90. Własność stycznej. Jeżeli przez punkt styczności (rys. 81) poprowadzimy  $MD \perp KK'$ , to z równości  $MF = MD$  wynika:  $MF = CP = CA + AP = AF + AT = TF$ , stąd zaś mamy  $\angle TMF = \angle MTF$ , a zatem  $\angle TMF = \angle TMD$ , to znaczy, że styczna do paraboli tworzy kąty równe z promieniem wodzącym i równoległą do osi, przechodzącą przez punkt styczności.

Tą własnością stycznej do paraboli tłumaczy się zjawisko, znane z fizyki: promienie światła, padające z ogniska na powierzchnię paraboliczną zwierciadła, po odbiciu się, mają kierunek równoległy do osi.

wtedy będzie

$$p(x + x_1) = 0,$$

$$x = AT = -x_1,$$

a że chodzi tylko o długość, więc

$$AT = x_1 = AP;$$

a zatem długość podstycznej będzie

$$PT = AT + AP = 2x_1,$$

czyli podstyczna paraboli = podwójnej odciętej punktu styczności.

§ 91. Wykreślanie stycznej. Znowu rozwiążemy tu dwa zagadnienia:

1) Przez punkt dany na paraboli poprowadzić do niej styczną. Dana jest parabola i punkt M na niej (rys. 82).

Najłatwiej będzie rozwiązać zadanie, wykreśliwszy  $MP$  prostopadle do osi paraboli, odmierzyć  $AT = AP$ , wtedy  $TP$ , jako podwójna odcięta punktu M, jest podstyczną, a zatem, połączwszy T i M, otrzymamy żadaną styczną.

Można, oczywiście, poprowadzić promień wodzący  $MF$ , potem prostą  $ME$  równoległą do osi i podzielić na połowy kąt  $EMF$ .

2) Wyprowadzić styczną do paraboli z punktu zewnętrznego. Niech będzie punkt dany D (rys. 82), przypuścimy, że żadaną styczną jest  $DM$ .

Jeżeli wykreślimy  $MF$  i  $ME \perp KK'$ , to  $MF = ME$ , a więc także  $DF = DE$ , to nam daje możliwość wyznaczenia punktu E i rozwiązanie już jest widoczne:

Z danego punktu D promieniem  $DF$  zataczamy łuk, który przecnie kierownicę paraboli w punkcie E, poprowadźmy teraz przez E równoległą do osi paraboli, otrzymamy punkt styczności M i styczną  $DM$ .

Zatoczony z punktu D łuk przecnie kierownicę także w punkcie E', a więc otrzymamy jeszcze drugą styczną  $DM'$ .

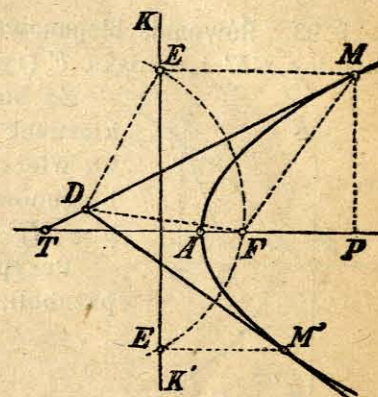
§ 92. Elipsa, hyperbola i parabola, wyrażone w jednym równaniu. Napiszmy równania tych trzech krzywych, odniesione do wierzchołka każdej z nich:

$$\text{elipsa: } y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2,$$

$$\text{hyperbola: } y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2,$$

$$\text{parabola } y^2 = 2px.$$

Z tych równań widzimy: 1) że w elipsie kwadrat, wystawiony na rzędnej jakiegokolwiek punktu, jest mniejszy od prostokąta, który ma za podstawę odciętą tego punktu, a za wysokość parametr elipsy; 2) w hyperboli ten kwadrat jest większy od prostokąta, a 3) w paraboli jest mu równy.



Rys. 82.

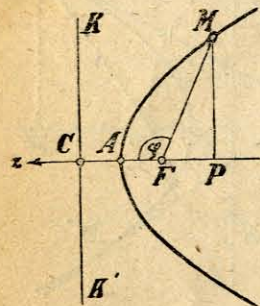


Możemy więc te krzywe wyrazić w jednym równaniu

$$y^2 = 2px + kx^2,$$

które będzie przedstawiało: 1) elipsę, jeżeli  $k < 0$ , 2) hyperbole, kiedy  $k > 0$  i 3) parabolę, jeżeli  $k = 0$ .

§ 93. Równanie biegunowe paraboli. Dana jest parabola o kierunku  $KK'$  i ognisku  $F$  (rys. 83).



Rys. 83.

Za biegun obierzmy ognisko  $F$ , a dodatni kierunek osi biegunowej  $Fz$  liczymy od ogniska ku wierzchołkowi paraboli, wtedy współrzędne biegunowe dowolnego punktu  $M$  paraboli będą:  $\rho = MF$  i  $\varphi = \angle MFz$ .

Przypominając wartość promienia wodzącego paraboli, możemy napisać:

$$MF = \frac{p}{2} + AP,$$

gdzie  $\frac{p}{2} = \frac{CF}{2} = AF = AC,$

ale  $AF = AF + FP = \frac{p}{2} + FP,$

więc  $MF = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + FP,$

czyli  $\rho = p + FP,$

Z  $\triangle FMP$  mamy

$$FP = MF \cdot \cos(\angle MFP) = \rho \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = -\rho \cos \varphi.$$

a zatem  $\rho = p - \rho \cos \varphi,$

$$\rho(1 + \cos \varphi) = p,$$

ostatecznie  $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$

Przypominając równania biegunowe elipsy i hyperboli, możemy powiedzieć, że wogóle równanie

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

przedstawia elipsę, jeżeli  $e < 1,$

„ hyperbole, „  $e > 1,$

„ parabolę, „  $e = 1.$

HWG

§ 94. Średnice paraboli. Dana jest parabola:  $y^2 = 2px$  (rys. 84). Poprowadźmy dowolną cięciwę  $DE$ , której równanie jest

$$y = mx + n$$

i znajdziemy współrzędne  $(x, y)$  środka tej cięciwy:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

gdzie  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  są współrzędne punktów  $D$  i  $E$ , w których cięciwa przecina się z parabolą. Te współrzędne znajdziemy, rozwiązując względem  $x$  i  $y$  równania:

$$y^2 = 2px, \quad y = mx + n.$$

Z drugiego równania mamy

$$x = \frac{y - n}{m},$$

a więc  $y^2 = \frac{2p(y - n)}{m},$

$$y^2 - \frac{2p}{m}y + \frac{2np}{m} = 0.$$

Z tego równania 2-go stopnia względem  $y$  widzimy, że

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{m},$$

a zatem

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}.$$

Stąd wnioskujemy, że jeżeli poprowadzimy cięciwę  $D'E' \parallel DE$ , to rzędna jej środka będzie również

$$y = \frac{p}{m},$$

dlatego, że  $p$ , jako połowa parametru danej paraboli, a  $m$ , jako współczynnik kątowy cięciw równoległych do  $CD$ , pozostaną bez zmiany. Widzimy więc, że miejscem geometrycznym środków wszystkich cięciw równoległych do  $DE$ , jest prosta równoległa do osi paraboli i przechodząca przez środek jednej z tych cięciw, a więc wogóle: wszelka średnica paraboli jest równoległa do jej osi.

Widzimy zatem, że jeżeli poprowadzić cięciwę

$$y = mx + n,$$

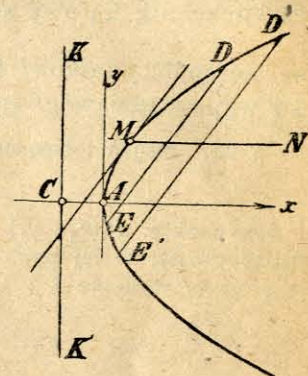
to odpowiadająca jej średnica będzie

$$y = \frac{p}{m}.$$

Łatwo się przekonać, że jeżeli przez koniec średnicy paraboli poprowadzić styczną, to ona będzie równoległa do cięciwy, odpowiadającej tej średnicy.

Istotnie: niech współrzędne punktu  $M$  będą  $(x_1, y_1)$ , wtedy równanie średnicy  $MN$  będzie

$$y = y_1,$$



Rys. 84.



stąd mamy  $y_1 = \frac{p}{m}$ , więc  $m = \frac{p}{y_1}$ ,

gdzie  $m$  jest współczynnikiem kątowym cięciwy  $DE$ . Równanie zaś stycznej w punkcie  $(x_1, y_1)$  jest

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

i współczynnik kątowy stycznej z tego równania  $= \frac{p}{y_1}$ , a więc rów-

na się współczynnikowi kątowemu cięciwy  $DE$ , a to dowodzi słuszności wypowiedzianego twierdzenia.

§ 95. Biegun i biegunowa. Niech będzie hyperbola

$$y^2 = 2px,$$

i dwa punkty:  $P_1(x_1, y_1)$  i  $P_2(x_2, y_2)$ . Jeżeli przez te punkty poprowadzimy prostą, to jej punkty przecięcia się z parabolą podzielią odcinek  $P_1P_2$  w pewnym stosunku  $\lambda : 1$ , a spółrzędne punktów przecięcia będą:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Ale te spółrzędne muszą zadośćczynić równaniu paraboli, a zatem

$$\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 = 2p \cdot \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

czyli

$$\lambda^2(y_2^2 - 2px_2) + 2\lambda[y_1y_2 - p(x_1 + x_2)] + (y_1^2 - 2px_1) = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie 2-go stopnia, którego pierwiastki  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  wyznaczają dwa stosunki, w jakich punkty przecięcia się  $P_1P_2$  z parabolą dzielą tę odcinek. Jeżeli założymy w tem równaniu

$$y_1y_2 - p(x_1 + x_2) = 0,$$

to otrzymamy  $\lambda_1 = -\lambda_2$  i wtedy punkty  $P_1$  i  $P_2$  oraz dwa punkty przecięcia z parabolą stanowiąc będą harmoniczną czwórkę.

Niech teraz będzie  $P_1$  punktem stałym; wyprowadźmy z niego szereg promieni, przecinających parabolę w punktach  $M$  i  $N$  i dla każdej trójki punktów  $P_1, M$  i  $N$  odnajdźmy czwarty harmoniczny  $P_2$ , wtedy spółrzędne tego punktu będą zadośćczyniły równaniu.

$$yy_1 = p(x + x_1) \quad \dots \quad (1)$$

(spółrzędne  $x_2$  i  $y_2$  będą zmienne, czyli „bieżące”). Ale równanie (1), jako pierwszego stopnia względem  $x$  i  $y$ , przedstawia linię prostą, więc

jeżeli z pewnego punktu stałego wyprowadzić szereg promieni do paraboli i dla obu otrzymanych punktów przecięcia oraz punktu danego znaleźć czwarty harmoniczny, to miejscem geometrycznym tych punktów harmonicznie sprzężonych jest linia prosta.

Ta prosta nazywa się biegunową punktu  $P_1$ , a punkt dany — biegunem prostej (1).

Z równania (1) można wyprowadzić własności biegunowej, analogiczne do otrzymanych poprzednio względem elipsy.

§ 96. Koło krzywizny paraboli. Niech będzie parabola:  $y^2 = 2px$ ; obierzmy na niej trzy dostatecznie bliskie punkty, które wyznaczają koło; jeżeli założymy, że odległości tych punktów dążą do zera, otrzymamy koło styczne do paraboli w punkcie danym (potrójnym), czyli koło krzywizny paraboli.

Dla wyznaczenia środka tego koła, połączmy cięciwą pierwsze dwa punkty i z jej środka  $(x_1, y_1)$  wystawmy prostopadłą; jeżeli odległość tych punktów jest nieskończenie mała, to równaniem prostopadłej będzie równanie normalnej.

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \quad \dots \quad (1)$$

Tak samo równaniem prostopadłej, wystawionej ze środka  $(x_2, y_2)$  drugiej cięciwy, będzie

$$y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2) \quad \dots \quad (2)$$

Rozwiązując równania (1) i (2) względem  $x$  i  $y$ , otrzymamy spółrzędne środka krzywizny:

$$y_1 - y_2 = \frac{(y_1 - y_2)x}{p} - \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{p},$$

stąd

$$x = p + \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1 - y_2},$$

ale że

$$x_1y_1 - x_2y_2 = x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2),$$

więc

$$x = p + x_1 + \frac{y_2(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}.$$

Ale z równania paraboli mamy

$$y_1^2 = 2px_1, \quad y_2^2 = 2px_2,$$

$$2p(x_1 - x_2) = y_1^2 - y_2^2,$$

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2p},$$

a zatem

$$x = p + x_1 + \frac{y_2(y_1 + y_2)}{2p}.$$

Zakładając teraz  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , otrzymujemy

$$x = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p},$$

ostatecznie

$$x = p + 3x_1 \quad \dots \quad (3)$$

Wstawiając tę wartość w równanie (1), mamy

$$y = y_1 - \frac{y_1}{p}(p + 3x_1) + \frac{x_1y_1}{p},$$

czyli

$$y = -\frac{2x_1y_1}{p},$$

ostatecznie

$$y = -\frac{y_1^3}{p^2} \quad \dots \quad (4)$$



Mając spólrzędne środka krzywizny, łatwo już znaleźć promień krzywizny.

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{y_1^3}{p^2}\right)^2,$$

$$\rho^2 = \frac{(p^2 + y_1^2)^3}{p^4},$$

stąd

$$\rho = \frac{\sqrt{(p^2 + y_1^2)^3}}{p^2}.$$

Jeżeli przypomnimy, że długość normalnej do paraboli jest

$$N = \sqrt{p^2 + y_1^2},$$

to promień krzywizny będzie

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Można wykreślić środek i promień krzywizny paraboli w następujący sposób (rys. 85).

Poprowadźmy w punkcie  $M(x_1, y_1)$  paraboli normalną  $MN$  i promień wodzący  $MF$ , z punktu  $N$  wystawmy  $NL \perp MN$ , a z punktu  $L$  wystawmy prostopadłą do  $MF$  aż do przecięcia się z przedłużoną normalną, wtedy  $MC = \rho$ .

Istotnie: nazywając  $\sphericalangle NMF = \alpha$ , mamy

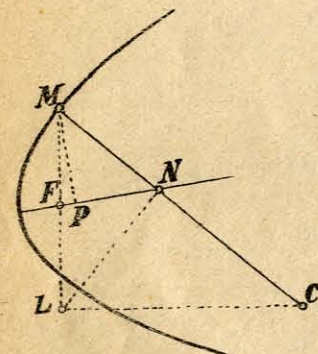
$$MC = ML \cdot \sec \alpha,$$

$$ML = MN \cdot \sec \alpha,$$

$$\sphericalangle FMN = \sphericalangle MNF$$

(bo  $MF = FN$ ), więc

$$MC = MN \cdot \sec^2 \alpha = MN \cdot \left(\frac{MN}{FN}\right)^2,$$



Rys. 85.

a że  $PN = p$ , więc ostatecznie

$$MC = N \cdot \left(\frac{N}{p}\right)^2 = \frac{N^3}{p^2} = \rho.$$

§ 97. Pole odcinka paraboli. Niech będzie dana parabola  $y^2 = 2px$  (rys. 86), obierzmy na niej punkt  $B(x_1, y_1)$  i obliczmy pole, ograniczone łukiem paraboli oraz spólrzędnymi tego punktu.

Podzielmy odcinek  $AE$  na  $n$  części równych, przez punkty podziału poprowadźmy prostopadłe:  $BE, CG, \dots$  oraz prostopadłe:  $BI, CK, \dots$  i przypuśćmy, że liczba  $n$  jest dostatecznie wielka, aby łuki paraboli:  $BC, CD, \dots$  można było uważać za odcinki prostej, a figury  $BEGC, CGDH, \dots$  i t. d. za trapezy. Wtedy, oznaczając spólrzędne punktów  $C, D, \dots$  przez  $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ , mamy:

$$\text{pole } BEGC = \frac{1}{2} (BE + CG) \cdot GE = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_1 - x_2),$$

$$,, \text{ BCKI} = \frac{1}{2} (BI + CK) \cdot IK = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)(y_1 - y_2),$$

więc

$$\frac{\text{pole } BEGC}{\text{pole } BCKI} = \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{(x_1 + x_2)(y_1 - y_2)}.$$

Ale z równania paraboli będzie

$$y_1^2 = 2px_1, \quad y_2^2 = 2px_2,$$

stąd

$$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2),$$

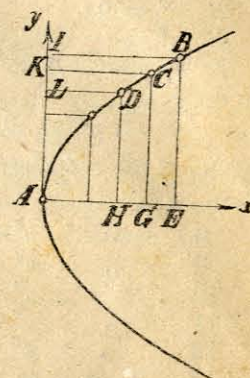
$$x_1 - x_2 = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2p}$$

a zatem

$$\frac{\text{pole } BEGC}{\text{pole } BCKI} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{2p(x_1 + x_2)},$$

a granicą, do której dąży ten stosunek, kiedy  $n$  rośnie nieskończenie, będzie

$$\frac{(2y_1)^2}{2p \cdot 2x_1} = \frac{4y_1^2}{2y_1^2} = \frac{2}{1}.$$



Rys. 86.

Taką samą granicę otrzymamy dla stosunku  $\frac{CGHD}{CDLK}$ ,

$$\text{wogóle będzie } \frac{BEGC}{BCKI} = \frac{CGHD}{CDLK} = \dots$$

$$\text{stąd zaś } \frac{\lim (BEGC + CGHD + \dots)}{\lim (BCKI + CDLK + \dots)} = \frac{2}{1}.$$

czyli

$$\frac{\text{pole } ABE}{\text{pole } ABI} = \frac{2}{1},$$

to znaczy, że łuk paraboli dzieli pole prostokąta, utworzonego przez spólrzędne końca łuku, w stosunku 2 : 1.

Stąd już mamy, że

$$\text{pole } ABE = \frac{2}{3} x_1 y_1.$$

## § 98. Zadania.

1. Napisać równanie paraboli o parametrze  $2p$ , która swoją wklęsłą stroną jest zwrócona:

- w dodatnim kierunku osi odciętych,
- „ ujemnym „ „ „
- „ dodatnim „ „ rzędnych,
- „ ujemnym „ „ „



2. Dana jest parabola:  $y^2 = 8x$ ; które z punktów:  
 $(\frac{1}{2}, 2)$ ;  $(\frac{3}{8}, 3)$ ;  $(\frac{1}{8}, 2)$ ;  $(2, 2)$ ;  $(1, 4)$   
 leżą na tej paraboli? które leżą wewnątrz, a które zewnątrz niej?  
 (3 — 6). Wykreślić parabolę:  
 3.  $y^2 = 6x$ . 5.  $x^2 = 6y$ .  
 4.  $y^2 = -6x$ . 6.  $x^2 = -6y$ .  
 7. Znaleźć odległość ogniska paraboli od jej kierownicy, mając równanie paraboli:

a)  $y^2 = 10x$ ; b)  $y^2 + 6x = 0$ ; c)  $y^2 - 8x = 0$ .

- (8 — 12). Znaleźć równanie stycznej i normalnej w danym punkcie paraboli:

8. parabola:  $y^2 = 3x$ ; punkt:  $(8, -4)$ .  
 9. „  $y^2 = 10x$ ; „  $(\frac{2}{5}, 2)$ .  
 10. „  $y^2 = 12x$ ; „  $(\frac{3}{4}, 3)$ .  
 11. „  $y^2 = 5x$ ; „  $(\frac{4}{5}, -2)$ .  
 12. „  $x^2 = 2py$ ; „  $(x_1, y_1)$ .  
 13. Na papierze milimetrycznym, biorąc skalę 1 cm, wykreślić parabolę:  $y^2 = x$  i odczytać następujące wartości:  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{5}$ .

- (14 — 17). Znaleźć długość stycznej, normalnej, podstycznej i podnormalnej w danym punkcie paraboli:

14. parabola:  $y^2 = 6x$ ; punkt:  $(\frac{8}{3}, 4)$ .  
 15. „  $y^2 = 8x$ ; „  $(\frac{9}{8}, 3)$ .  
 16. „  $2y^2 = 9x$ ; „  $(2, -3)$ .  
 17. „  $y^2 = 12x$ ; „  $(\frac{16}{3}, 8)$ .

- (18 — 21). Poprowadzić styczną do paraboli równoległą do prostej danej:

18. parabola:  $y^2 = 4x$ ; prosta  $2x + y - 4 = 0$ .  
 19. „  $y^2 = 12x$ ; „  $3x + 2y - 6 = 0$ .  
 20. „  $y^2 = 8x$ ; „  $2x - y - 2 = 0$ .  
 21. „  $y^2 = 2x$ ; „  $x - 4y + 4 = 0$ .

- (22 — 25). Poprowadzić styczną do paraboli prostopadłą do prostej danej:

22. parabola:  $y^2 = 4x$ ; prosta  $x - y - 3 = 0$ .  
 23. „  $y^2 = 2x$ ; „  $x - 2y + 6 = 0$ .  
 24. „  $y^2 = x$ ; „  $x - 4y - 4 = 0$ .  
 25. „  $y^2 = 12x$ ; „  $x + y - 3 = 0$ .

- (26 — 29). Wyprowadzić styczne do paraboli z danego punktu, oraz znaleźć kąt, pod którym widać parabolę z tego punktu:

26. parabola:  $y^2 = 4x$ ; punkt:  $(6, 5)$ .  
 27. „  $y^2 = 6x$ ; „  $(-8, 4)$ .  
 28. „  $y^2 = 10x$ ; „  $(-2, 4)$ .  
 29. „  $y^2 = 12x$ ; „  $(-2, 1)$ .

30. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, z których parabola jest widziana pod kątem prostym.

- (31 — 36). Znaleźć kąt, pod którym przecinają się dwie linie krzywe (kąt, utworzony przez styczne do nich w punkcie wspólnym):

31. parabola:  $y^2 = 4x$  i koło:  $x^2 + y^2 = 32$ .  
 32. „  $y^2 = 12x$  i koło:  $x^2 + y^2 + 10x = 75$ .  
 33. „  $5y^2 = 36x$  i hyperbola:  $2x^2 - y^2 = 14$ .  
 34. „  $25y^2 = 48x$  i elipsa:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .  
 35. dwie parabole:  $y^2 = 10x$  i  $y^2 - 8x = 20$ .  
 36. „ „  $y^2 = 16x$  i  $y^2 + 4x = 20$ .  
 37. Napisać równanie paraboli, do której: a) prosta  $x - 3y + 9 = 0$  jest styczną, b) prosta  $x = 8y - 8$  jest styczną.  
 38. Napisać równanie (odniesione do wierzchołka i do osi) paraboli, która przechodzi przez punkt dany: a)  $(4, 2)$ ; b)  $(12, 6)$ .

- (39 — 42). Dana jest parabola i jej cięciwa. Napisać równanie średnicy, sprzężonej z tą cięciwą, oraz równanie stycznej, przechodzącej przez koniec średnicy:

39. parabola:  $y^2 = 8x$ ; cięciwa:  $4x + 3y - 20 = 0$ .  
 40. „  $y^2 = 4x$ ; „  $4x - 3y - 10 = 0$ .  
 41. „  $y^2 = 4x$ ; „  $12x - 5y - 28 = 0$ .  
 42. „  $y^2 = 8x$ ; „  $15x + 8y - 56 = 0$ .

43. Dana jest parabola:  $y^2 = 4x$ , której ognisko jest środkiem koła, opisanego promieniem  $= 10$ . Obliczyć kąt, pod którym przecinają się te dwie krzywe (oraz pole przez nie ograniczone).

44. Dowieść, że normalne, poprowadzone przez końce cięciwy ogniskowej, prostopadłej do osi paraboli, są do siebie prostopadłe.

45. Biorąc liczby z zadań 26—29, znaleźć równanie cięciwy styczności.

46. Znaleźć równania wspólnych stycznych do paraboli:  $y^2 = 30x$  i koła:  $x^2 + y^2 = 64$ .

47. Znaleźć równanie koła stycznego do paraboli:  $y^2 = 2px$ , którego środek leży w punkcie  $(a, 0)$ .

48. Znaleźć wspólne punkty dwóch parabol, które mają wierzchołek ten sam, parametry równe, a ognisko jednej leży na dodatniej osi  $x$ , drugiej zaś na dodatniej osi  $y$ .

49. Dowieść, że styczne do paraboli:  $x^2 = 4y$ , wyprowadzone z punktu  $M(a, b)$ , przecinają oś  $x$  w takich punktach, których odcięte są pierwiastkami równania:  $x^2 - ax + b = 0$ .

- Dowieść jeszcze, że jeżeli z punktu  $M$  odległością  $MF$  ( $F$  jest ogniskiem) zatoczyć łuk, to odcięte punktów przecięcia się tego łuku z osią  $x$  będą dwa razy większe od pierwiastków danego równania kwadratowego.

- Wykazać, że pierwiastki będą rzeczywiste i różne, jeżeli punkt  $M$  leży zewnątrz paraboli, rzeczywiste i równe sobie, jeżeli  $M$  leży na niej, wreszcie będą urojone jeżeli  $M$  leży wewnątrz paraboli.

- (50 — 51). Napisać równanie biegunowej danego punktu względem paraboli:

50.  $y^2 = 14x$ ;  $(7, 8)$ . 51.  $y^2 = -5x$ ;  $(3, -7)$ .

52. Znaleźć biegun prostej:  $Ax + By + C = 0$  względem paraboli:  $y^2 = 2px$ .



# ROZDZIAŁ VIII.

## Rozbiór ogólny linii krzywych 2-go rzędu

§ 99. Uwagi wstępne. 1) Zobaczymy wkrótce, że roztrząsając równanie linii krzywej, wypadnie dokonywać zmiany współrzędnych, łatwo się jednak przekonać, że przez zmianę współrzędnych stopień równania linii krzywej nie może się ani podwyższyć, ani obniżyć.

Istotnie: wzory na przejście od jednego układu prostokątnego do innego takiegoż układu, w najogólniejszej postaci, jak wiadomo, są:

$$\begin{aligned}x &= a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

więc jeżeli dane równanie  $f(x, y) = 0$  zawierało  $x^n$ , lub  $y^n$ , to nowe równanie  $f(x', y') = 0$ , po dokonaniu zmiany współrzędnych, będzie zawierało  $x'^n$ , lub  $y'^n$ , co jest oczywiste z dopiero co napisanych wzorów.

Zaznaczyć tu jeszcze należy, że równanie  $n$ -go stopnia:  $f(x, y) = 0$  nie zawsze przedstawia linię  $n$ -go rzędu, może się zdarzyć, że ono przedstawia jeden szczególny punkt, np.  $x^2 + y^2 = 0$ , albo zespół dwóch lub więcej linii prostych, lub krzywych niższego rzędu, np.  $4x^2 - 9y^2 = 0$ , albo nareszcie równanie może nie mieć żadnego obrazu geometrycznego, czyli ma obraz urojony, np.  $3x^2 + y^2 + 6 = 0$ .

2) Jeżeli za początek układu współrzędnych jest wzięty środek linii krzywej, to jej równanie nie może się zmienić przez zamianę  $x$  na  $-x$  i  $y$  na  $-y$ .

To wynika wprost z określenia środka, który, jak wiemy, ma taką własność, że wszelka cięciwa, przezeń poprowadzona, dzieli się na połowy. A zatem, biorąc środek za początek układu współrzędnych, widzimy, że jeżeli jeden koniec cięciwy, przez ten środek przechodzącej, ma za współrzędne  $(x_1, y_1)$ , to drugi będzie miał  $(-x_1, -y_1)$ , czyli oba te punkty będą leżały na linii krzywej, a ich współrzędne będą czyniły zadość jej równaniu.

3) Jeżeli za oś odciętych jest wzięta oś linii krzywej, to jej równanie nie może zawierać nieparzystych potęg zmiennej  $y$  i nawzajem.

Wynika stąd, że wtedy każdej wartości na  $x$  powinny odpowiadać po dwie wartości na  $y$ , liczebnie równe, ale różne co do znaku.

4) Jeżeli linia krzywa przechodzi przez początek układu współrzędnych, to jej równanie nie może zawierać wyrazu stałego i nawzajem.

Istotnie: jeżeli w równanie wstawimy  $x = 0$  i  $y = 0$ , to lewa strona równania stanie się zerem o tyle, o ile nie zawiera wyrazu stałego, np. linia:  $3x^2 - 5y^2 + 6x = 0$  przechodzi przez początek układu współrzędnych, dlatego że równaniu zadość czynią wartości:  $x = 0$  i  $y = 0$ .

§ 100. Poszukiwanie środka linii krzywej. Ogólne równanie 2-go stopnia o dwóch zmiennych  $x$  i  $y$  ma postać

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Spróbujmy teraz, na zasadzie poprzednich uwag, uprościć to równanie, pozbywając się niektórych wyrazów. Gdyby środek krzywej, którą przedstawia dane równanie, wziąć za początek układu, moglibyśmy się pozbyć wyrazów, zawierających pierwsze potęgi  $x$  i  $y$ . Zobaczymy, czy tego nie da się dokonać przez zamianę danego układu współrzędnych na nowy  $x'O'y'$ .

Przenieśmy więc początek układu do pewnego punktu  $(a, b)$ , a kierunek osi współrzędnych pozostawmy bez zmiany, wtedy w równanie (1) należy wstawić

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}A(a + x')^2 + B(a + x')(b + y') + C(b + y')^2 + D(a + x') \\ + E(b + y') + F = 0,\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Aa + Bb + D)x' + (Ba + 2Cb + E)y' + \\ + (Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F) = 0 \quad (2)\end{aligned}$$

Jeżeli dowolny dotychczas punkt  $(a, b)$  jest środkiem krzywej, to równanie (2) nie powinno zawierać pierwszych potęg  $x$  i  $y$ , a zatem powinno być:

$$\left. \begin{aligned}2Aa + Bb + D &= 0, \\ Ba + 2Cb + E &= 0\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

i równanie będzie miało postać:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + K = 0, \quad (4)$$

gdzie wyraz stały

$$K = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F$$

otrzymać łatwo, wstawiając w lewą stronę równania (1):  $x = a$  i  $y = b$ , a więc jeżeli dane równanie było  $f(x, y) = 0$ , to  $K = f(a, b)$ .



Czy jednak zawsze takie przekształcenie równania (1) będzie możliwe? Oczywiście, będzie to zależało od tego, czy zawsze można będzie odnaleźć skończone wartości na  $a$  i  $b$  z równań (3).

Rozwiązując te równania względem  $a$  i  $b$ , otrzymamy

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}; \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} \quad (5)$$

Stąd widzimy, że przekształcenie równania (1) będzie możliwe o tyle, o ile mianownik  $B^2 - 4AC$  nie jest zerem.

A zatem, jeżeli w równaniu ogólnem linii krzywej 2-go stopnia:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dwumian  $B^2 - 4AC < 0$ , to krzywa ma środek, którego

spółrzędne znajduje się ze wzorów (5), a przeniósłszy układ osi współrzędnych do tego środka bez zmiany kierunku osi, można równanie uprościć, napisawszy je w postaci

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + K = 0,$$

gdzie  $K = f(a, b) = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F$ .

Jeżeli zaś dwumian  $B^2 - 4AC = 0$ , to krzywa środka nie ma i wspomnianego przekształcenia równania (1) dokonać się nie da.

Widzimy zatem, że mogą być dwa rodzaje linii krzywych 2-go rzędu: krzywe, posiadające środek i krzywe bez środka.

*Przykład.* Znaleźć środek linii krzywej:

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - x + 3y - 5\frac{1}{8} = 0,$$

oraz uprościć równanie, odniósłszy je do środka krzywej.

W danym razie dwumian  $B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -8 < 0$ , więc krzywa ma środek. Wstawmy w dane równanie

$$x = a + x'; \quad y = b + y',$$

wtedy będzie

$$2(a^2 + 2ax' + x'^2) + 4(ab + bx' + ay' + x'y') + 3(b^2 + 2by' + y'^2) - (a + x') + 3(b + y') - 5\frac{1}{8} = 0,$$

czyli

$$2x'^2 + 4x'y' + 3y'^2 + (4a + 4b - 1)x' + (4a + 6b + 3)y' + (2a^2 + 4ab + 3b^2 - a + 3b - 5\frac{1}{8}) = 0.$$

Zakładając teraz

$$4a + 4b - 1 = 0,$$

$$4a + 6b + 3 = 0,$$

skąd

$$a = \frac{9}{4}; \quad b = -2,$$

otrzymujemy równanie w postaci uproszczonej:

$$2x'^2 + 4x'y' + 3y'^2 + K = 0,$$

gdzie

$$K = f(a, b) = f(\frac{9}{4}, -2) = -10,$$

a więc w postaci

$$2x'^2 + 4x'y' + 3y'^2 - 10 = 0.$$

Spółrzędne środka są:  $(\frac{9}{4}, -2)$ .

*Uwaga.* Przekształcenia równania można dokonać krótszą drogą, jeżeli zauważyć, w jaki sposób powstały równania (3) środka krzywej:

Gdyby lewą stronę równania (1) zróżniczkować względem  $x$ , uważając  $y$  za stałą, to otrzymalibyśmy właśnie lewą stronę pierwszego z równań (3), po podstawieniu  $x = a$  i  $y = b$ ; jeżeli zaś je zróżniczkować względem  $y$ , uważając  $x$  za stałą, otrzymamy drugie z równań (3). Można więc równania środka krzywej napisać w skróceniu:

$$f_x'(a, b) = 0, \quad f_y'(a, b) = 0.$$

Ta uwaga ułatwia przeróbki, o ile różniczkowanie nie następuje trudności.

*Przykład.* Przekształcić równanie:

$$3x^2 - 4xy - y^2 + 8x + 4y - 3 = 0,$$

odniósłszy je do środka krzywej.

Dwumian  $B^2 - 4AC > 0$ , a więc środek istnieje.

Znajdźmy równania środka, różniczkując dane równanie naprzód względem  $x$  (uważając  $y$  za stałą), a potem względem  $y$  (uważając  $x$  za stałą):

$$6x - 4y + 8 = 0,$$

$$-4x - 2y + 4 = 0,$$

równania środka będą:

$$6a - 4b + 8 = 0,$$

$$-4a - 2b + 4 = 0,$$

stąd współrzędne środka są:  $(0, 2)$ .

Znajdźmy teraz wyraz stały  $K$ :

$$K = f(a, b) = f(0, 2) = 1,$$

a zatem równanie przekształcone będzie

$$3x'^2 - 4x'y' - y'^2 + 1 = 0.$$

§ 101. Poszukiwanie osi linii krzywej, posiadającej środek. W przypuszczeniu, że  $B^2 - 4AC < 0$ , spróbujmy dalszych przekształceń równania linii krzywej. Gdyby za oś odciętych była wzięta jedna z osi danej linii, to w równaniu nie powinno być wyrazu, zawierającego pierwszą potęgę  $y$ ; więc równanie

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + K = 0,$$



gdzie  $K = f(a, b)$  odnieśmy do nowego układu współrzędnych  $x''O'y''$ , obracając dotychczasowy układ o pewien kąt  $\alpha$ , wtedy należy wstawić:

$$\begin{aligned}x' &= x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha, \\y' &= x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha.\end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$A(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)^2 + B(x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha)(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha) + C(x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha)^2 + K = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned}(A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha)x''^2 + (-2A \sin \alpha \cos \alpha - \\ - B \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha)x''y'' + (A \sin^2 \alpha - \\ - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha)y''^2 + K = 0.\end{aligned}$$

Jeżeli teraz osi krzywej wziąć za osi współrzędnych, to wyraz, zawierający  $xy$  powinien stać się zerem, a więc

$$-2A \sin \alpha \cos \alpha - B \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

czyli

$$\begin{aligned}-2(A - C) \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) &= 0, \\-(A - C) \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha &= 0, \\(A - C) \sin 2\alpha &= B \cos 2\alpha,\end{aligned}$$

stad

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \dots \dots \dots (6)$$

Ponieważ styczna trygonometryczna może przybierać wszelkie wartości bez ograniczeń, więc wartość kąta  $\alpha$  z równości (6) zawsze można znaleźć i równanie linii krzywej może być doprowadzone do postaci

$$Mx''^2 + Ny''^2 + K = 0, \dots \dots \dots (7)$$

gdzie

$$\begin{cases} M = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ N = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \end{cases} \dots \dots (8)$$

Spółczynniki  $M$  i  $N$  można obliczyć w sposób następujący: z równań (8) mamy

$$\begin{aligned}M + N &= A + C \\M - N &= (A - C) \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Ale

$$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}},$$

wstawiając zaś wartość  $\tan 2\alpha$  z równania (6), mamy

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}},$$

w podobny sposób otrzymamy

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}.$$

A zatem

$$\begin{aligned}M - N &= \pm \left( \frac{(A - C)^2}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right) = \\&= \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2},\end{aligned}$$

więc będzie

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2} [A + C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}], \\N &= \frac{1}{2} [A + C \mp \sqrt{B^2 + (A - C)^2}].\end{aligned}$$

W ten sposób współczynniki  $M$  i  $N$  są wyznaczone.

Znajdźmy jeszcze

$$\begin{aligned}MN &= \frac{1}{4} [(A + C)^2 - B^2 - (A - C)^2], \\MN &= -\frac{1}{4} (B^2 - 4AC).\end{aligned}$$

czyli

*Uwaga.* Co do podwójnego znaku przed  $\sqrt{B^2 + (A - C)^2}$ , należy zauważyć, że znak będzie zależał od tego, jaką wartość otrzymamy na kąt  $2\alpha$  z równania

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C}$$

i mogą się tu zdarzyć dwa przypadki:

1) Jeżeli  $B > 0$  i  $A - C > 0$ , to  $\tan 2\alpha$  jest liczbą dodatnią, a kąt  $2\alpha$  należy albo do 1-ej, albo do 3-ej ćwiartki. Biorąc wartość mniejszą, widzimy, że wtedy  $\sin 2\alpha$  i  $\cos 2\alpha$  będą dodatnie i należy wziąć

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= + \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \\ \cos 2\alpha &= + \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}},\end{aligned}$$

wtedy będzie

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{2} [A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] \\ N &= \frac{1}{2} [A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}]\end{aligned} \dots \dots \dots (1)$$

Jeżeli będzie  $B < 0$  i  $A - C < 0$ , to

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= - \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}, \\ \cos 2\alpha &= - \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}},\end{aligned}$$



a więc

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2} [A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] \\ N = \frac{1}{2} [A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] \end{cases} \dots \dots (2)$$

2) Jeżeli  $B > 0$ , a  $A - C < 0$ , to  $\tan 2\alpha$  jest liczbą ujemną i kąt  $2\alpha$  należy albo do 2-giej, albo do 4-ej ćwiartki. Biorąc znowu wartość mniejszą, widzimy, że wstawa kąta  $2\alpha$  powinna być dodatnia, a dostawa ujemna, a więc

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= + \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \\ \cos 2\alpha &= + \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \end{aligned}$$

i do obliczania  $M$  i  $N$  należy wziąć wzory (1).

Jeżeli zaś  $B < 0$  i  $A - C > 0$ , to będzie

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= - \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \\ \cos 2\alpha &= - \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \end{aligned}$$

i do obliczenia  $M$  i  $N$  trzeba zastosować wzory (2).

Dalsze przekształcenia równania będą zależały od znaków współczynników  $M$  i  $N$ , czyli od znaku dwumianu  $B^2 - 4AC$  i rozróżnić tu należy dwa przypadki.

*Przypadek I.*  $B^2 - 4AC < 0$ , wtedy iloczyn  $MN$  jest dodatni, a więc współczynniki  $M$  i  $N$  mają znaki jednakowe i równanie ma postać

$$Mx''^2 + Ny''^2 + K = 0.$$

Tu znowu może się zdarzyć, że

a)  $K < 0$ ; niech będzie  $K = -K'$ , wtedy mamy równanie

$$Mx''^2 + Ny''^2 = K'.$$

Dzieląc przez  $K'$ , otrzymujemy

$$\frac{Mx''^2}{K'} + \frac{Ny''^2}{K'} = 1,$$

czyli

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{K'}{M}\right)} + \frac{y''^2}{\left(\frac{K'}{N}\right)} = 1,$$

albo oznaczając

$$\sqrt{\frac{K'}{M}} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{K'}{N}} = \beta,$$

otrzymujemy

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} + \frac{y''^2}{\beta^2} = 1,$$

t. j. równanie elipsy o osiach:  $2\alpha$  i  $2\beta$ .

W przypadku  $M = N$  otrzymamy

$$x''^2 + y''^2 = \alpha^2,$$

t. j. równanie koła.

b)  $K = 0$ . Wtedy równanie ma postać

$$Mx''^2 + Ny''^2 = 0$$

i przedstawia punkt  $(0, 0)$ .

c)  $K > 0$ . Równanie ma postać

$$Mx''^2 + Ny''^2 = -K$$

i nie przedstawia żadnego miejsca geometrycznego, bo lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna.

*Przypadek II.*  $B^2 - 4AC > 0$ , wtedy iloczyn  $MN$  jest ujemny, a współczynniki  $M$  i  $N$  mają znaki różne; niech będzie  $M > 0$ ,  $N < 0$  i  $N = -N'$ ; równanie będzie miało postać

$$Mx''^2 - N'y''^2 + K = 0$$

i znowu mogą tu zajść trzy przypadki:

a)  $K < 0$ , niech mianowicie  $K = -K'$ . Wtedy mamy równanie

$$Mx''^2 - N'y''^2 = K',$$

czyli

$$\frac{x''^2}{\left(\frac{K'}{M}\right)} - \frac{y''^2}{\left(\frac{K'}{N'}\right)} = 1,$$

albo oznaczając

$$\sqrt{\frac{K'}{M}} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{K'}{N'}} = \beta,$$

będziemy mieli

$$\frac{x''^2}{\alpha^2} - \frac{y''^2}{\beta^2} = 1,$$

t. j. równanie hyperboli o osi rzeczywistej  $2\alpha$  i urojonej  $2\beta$ .

b)  $K = 0$ , wtedy mamy równanie

$$Mx''^2 - N'y''^2 = 0,$$

czyli dwa równania

$$x' \sqrt{M} + y' \sqrt{N'} = 0, \quad \text{albo}$$

$$x'' \sqrt{M} + y'' \sqrt{N'} = 0, \quad \text{albo}$$

t. j. dwie proste.

c)  $K > 0$ , wtedy będzie

$$Mx''^2 - N'y''^2 = -K,$$

czyli

$$N'y''^2 - Mx''^2 = K.$$



$$\frac{y'^2}{\left(\frac{K}{N'}\right)} - \frac{x'^2}{\left(\frac{K}{M}\right)} = 1,$$

czyli

$$\frac{y'^2}{\alpha'^2} - \frac{x'^2}{\beta'^2} = 1,$$

t. j. równanie hyperboli, której oś rzeczywista  $2\alpha'$  jest wzięta za oś rzędnych, a urojona za oś odciętych.

*Przykład.* Dane jest równanie

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 60 = 0.$$

Ponieważ ono nie zmienia się przez zamianę  $x$  na  $-x$  i  $y$  na  $-y$ , wnosimy, że jest już odniesione do środka krzywej. W celu przekształcenia równania, dokonajmy obrotu osi współrzędnych o kąt, wyznaczony z równania

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = -\frac{4}{3},$$

a więc kąt  $2\alpha$  należy do 2 ej ćwiartki. Niech będzie  $2\alpha = 180^\circ - \beta$ , wtedy

$$\tan 2\alpha = -\tan \beta = -\frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}.$$

Stąd znajdziemy

$$\beta = 53^\circ 7' 48'',$$

$$2\alpha = 126^\circ 52' 12'',$$

$$\alpha = 63^\circ 26' 6'',$$

więc o taki kąt należy obrócić układ osi współrzędnych, żeby były osiami linii krzywej.

Wtedy równanie, odniesione do osi, będzie miało postać

$$Mx'^2 + Ny'^2 = 60.$$

Obliczmy teraz współczynniki, pamiętając, że kąt  $2\alpha$  należy do 2-iej ćwiartki ( $B < 0$  i  $A - C > 0$ ):

$$M = \frac{1}{2} [A + C - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] = \frac{1}{2} (25 - \sqrt{4^2 + 3^2}) = 10,$$

$$N = \frac{1}{2} [A + C + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] = \frac{1}{2} (25 + \sqrt{4^2 + 3^2}) = 15,$$

więc będziemy mieli

$$10x'^2 + 15y'^2 = 60,$$

$$2x'^2 + 3y'^2 = 12,$$

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{4} = 1,$$

t. j. równanie elipsy o osiach:  $2\sqrt{6}$  i 4.

§ 102. Przekształcenie równania linii krzywej nie mającej środka. Powróćmy znowu do równania ogólnego

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

i założmy, że

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Wtedy przekształcenie poprzednich dokonać nie można, ale można przedewszystkiem równanie (1) uprościć o tyle, żeby nie zawierało drugiej potęgi jednej ze zmiennych.

Z założenia mamy  $B^2 = 4AC$ , więc można równanie napisać w postaci

$$Ax^2 + 2xy\sqrt{AC} + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$\text{czyli} \quad (x\sqrt{A} + y\sqrt{C})^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

Znak przed pierwiastkiem opuszczamy, uważając, że  $A, B, C$  są liczby dane, a więc znaki mają wiadome.

Obróćmy teraz układ osi o pewien, tymczasem dowolny kąt  $\alpha$  i odnieśmy równanie (2) do nowych współrzędnych  $x'O'y'$ , podstawiając

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

wtedy mamy

$$[(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)\sqrt{A} + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)\sqrt{C}]^2 + D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0,$$

czyli

$$[(\sqrt{A} \cos \alpha + \sqrt{C} \sin \alpha)x' + (-\sqrt{A} \sin \alpha + \sqrt{C} \cos \alpha)y']^2 + (D \cos \alpha + E \sin \alpha)x' + (-D \sin \alpha + E \cos \alpha)y' + F = 0.$$

Nadajmy teraz kątowi  $\alpha$  taką wartość, aby

$$\sqrt{A} \cos \alpha + \sqrt{C} \sin \alpha = 0,$$

stąd

$$\tan \alpha = -\sqrt{\frac{A}{C}},$$

a że styczna trygonometryczna może przybierać wszelkie wartości od  $-\infty$  do  $+\infty$ , więc kąt  $\alpha$  zawsze wyznaczyć możemy.

Teraz równanie ma postać:

$$(-\sqrt{A} \sin \alpha + \sqrt{C} \cos \alpha)^2 y'^2 + (D \cos \alpha + E \sin \alpha)x' + (-D \sin \alpha + E \cos \alpha)y' + F = 0,$$

albo, oznaczając dla skrócenia

$$(-\sqrt{A} \sin \alpha + \sqrt{C} \cos \alpha)^2 = P,$$

$$D \cos \alpha + E \sin \alpha = Q,$$

$$-D \sin \alpha + E \cos \alpha = R,$$

mamy równanie następujące

$$Py'^2 + Qx' + Ry' + F = 0 \quad (3)$$



Spółczynniki  $P, Q, R$  mogą być obliczone przez wstawienie wartości na  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$ , które znowu znaleźć można, mając  $\tan \alpha$ .

Może się zdarzyć, że po wstawieniu tych wartości współczynnik  $Q = 0$ , wtedy równanie (3) ma postać

$$Py'^2 + Ry' + F = 0,$$

stąd mamy 
$$y' = -\frac{R}{2P} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4P^2} - \frac{F}{P}}$$

Wtedy otrzymamy równanie dwóch prostych równoległych do siebie (obie będą równoległe do osi  $x'$ ); albo otrzymamy równanie jednej prostej, jeżeli pod pierwiastkiem będzie 0; albo żadnego nie będzie miejsca geometrycznego, jeżeli pod pierwiastkiem wypadnie liczba ujemna.

Po tej uwadze powróćmy do równania (3) i spróbujmy je uprościć, pozbywając się wyrazu, zawierającego  $y'$ . W tym celu przeńmiemy układ współrzędnych  $x'Oy'$  równoległe, do nowego początku ( $m, n$ ), a więc wstawmy

$$x' = m + x'',$$

$$y' = n + y''.$$

Wtedy równanie (3) będzie miało postać następującą:

$$P(n + y'')^2 + Q(m + x'') + R(n + y'') + F = 0,$$

czyli

$$Py''^2 + Qx'' + (2Pn + R)y'' + (Pn^2 + Qm + Rn + F) = 0 \quad \dots (4)$$

Ponieważ liczby  $m$  i  $n$  są dowolne, nadajmy im taką wartość, aby

$$2Pn + R = 0,$$

$$\text{ i } Pn^2 + Qm + Rn + F = 0.$$

Z 1-go równania mamy

$$n = -\frac{R}{2P},$$

a wstawiając tę wartość w 2-gie równanie, mamy

$$\frac{R^2}{4P} + Qm - \frac{R^2}{2P} + F = 0,$$

stąd

$$m = \frac{R^2 - 4FP}{4PQ}.$$

Z otrzymanych na  $m$  i  $n$  wartości widzimy, że przekształcenie równania będzie możliwe, o ile  $P$  lub  $Q$  nie są równe zeru. Wypadek, kiedy  $Q = 0$ , omówiliśmy przedtem, więc go tu wyłączamy, czy jednak  $P$  nie może być  $= 0$ ?

Wracając do poprzednich oznaczeń, widzimy, że

$$P = (-\sqrt{A} \cdot \sin \alpha + \sqrt{C} \cdot \cos \alpha)^2,$$

a że 
$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+C}},$$

$$\cos \alpha = \mp \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A+C}},$$

wiec będzie

$$P = \left( \mp \frac{A}{\sqrt{A+C}} \mp \frac{C}{\sqrt{A+C}} \right)^2 = A + C,$$

ale  $A + C$  nie może być zerem, dlatego że z założenia:  $B^2 = 4AC$  wynika, iż  $A$  i  $C$  muszą mieć znaki jednakowe; gdyby zaś  $A = 0$  i  $C = 0$ , to musiałoby być  $B = 0$ , co jest oczywiście niemożliwe.

Widzimy tedy, że wartości na  $m$  i  $n$  są możliwe, a więc równanie (4) przybierze postać:

$$Py''^2 + Qx'' = 0,$$

czyli

$$y''^2 = -\frac{Q}{P} \cdot x'',$$

otrzymujemy parabolę, której parametr

$$2p = -\frac{Q}{P}.$$

**Przykład.** Dane jest równanie

$$x^2 - 2xy + y^2 - x - y - 1 = 0,$$

w którym  $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ ; napiszmy naprzód

$$(x - y)^2 - x - y - 1 = 0$$

i obróćmy układ osi współrzędnych o kąt  $\alpha$ , wstawiając

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

wtedy równanie odniesione do nowych osi, będzie:

$$(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha - x' \sin \alpha - y' \cos \alpha)^2 - x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - x' \sin \alpha - y' \cos \alpha - 1 = 0,$$

czyli

$$[(\cos \alpha - \sin \alpha)x' - (\cos \alpha + \sin \alpha)y']^2 - (\cos \alpha + \sin \alpha)x' + (\sin \alpha - \cos \alpha)y' - 1 = 0.$$

Nadajmy teraz kątowi  $\alpha$  taką wartość, żeby

$$\cos \alpha - \sin \alpha = 0, \quad \text{czyli } \tan \alpha = 1,$$

a więc  $\alpha = 45^\circ$  i obliczmy współczynniki nowego równania:

$$Py'^2 + Qx' + Ry' - 1 = 0:$$



$$P = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2,$$

$$Q = -(\cos \alpha + \sin \alpha) = -\sqrt{2},$$

$$R = \sin \alpha - \cos \alpha = 0.$$

A zatem mamy równanie

$$2y'^2 - x' \sqrt{2} - 1 = 0.$$

Przenieśmy teraz układ osi współrzędnych równoległe do punktu  $(m, n)$ , więc wstawmy

$$x' = m + x'', \quad y' = n + y'',$$

otrzymamy

$$2(n + y'')^2 - (m + x'') \sqrt{2} - 1 = 0,$$

$$2y''^2 - x'' \sqrt{2} + 4ny'' + (2n^2 - m \sqrt{2} - 1) = 0.$$

Nadajmy liczbom  $m$  i  $n$  takie wartości, żeby

$$4n = 0,$$

$$\text{i } 2n^2 - m \sqrt{2} - 1 = 0,$$

$$n = 0,$$

$$m = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

stąd

Równanie, odniesione do współrzędnych  $x''O'y''$ , będzie

$$2y''^2 - x'' \sqrt{2} = 0,$$

czyli

$$y''^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x''.$$

Otrzymaliśmy równanie paraboli, której parametr  $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

§ 103. Zestawienie otrzymanych wyników. Z przeprowadzonej dyskusji widzimy, że równanie

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

przedstawia elipsę, hyperbolę, lub parabolę, a w szczególnych przypadkach: jedną lub dwie proste, punkt, albo nie przedstawia żadnego miejsca geometrycznego. A zatem istnieją tylko trzy linie krzywe drugiego rzędu: elipsa, hyperbola i parabola, z nich pierwsze dwie środki posiadają, trzecia go nie ma.

Rodzaj linii krzywej zależy od wartości dwumianu charakterystycznego  $B^2 - 4AC$ , a mianowicie:

1.  $B^2 - 4AC < 0$ , krzywa posiada środek, którego współrzędne są:

$$a = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad b = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}.$$

Równanie, odniesione do środka, jest

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + K = 0,$$

gdzie  $K = f(a, b)$ .

Odniesmy teraz równanie do osi linii krzywej przez obrót układu o kąt  $\alpha$ , wyznaczony z równania.

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A - C},$$

wtedy równanie będzie

$$Mx''^2 + Ny''^2 + K = 0,$$

gdzie

$$M = \frac{1}{2} [A + C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}],$$

$$N = \frac{1}{2} [A + C \mp \sqrt{B^2 + (A - C)^2}].$$

$$1) \quad B^2 - 4AC < 0.$$

Równanie:

$$Mx''^2 + Ny''^2 + K = 0.$$

$$a) \quad K < 0, \quad b) \quad K = 0, \quad c) \quad K > 0$$

|

elipsa

|

punkt

|

obraz  
urojony

$$2) \quad B^2 - 4AC > 0.$$

Równanie:

$$Mx''^2 - Ny''^2 + K = 0.$$

$$a) \quad K < 0, \quad b) \quad K = 0, \quad c) \quad K > 0$$

|

hyperbola

|

dwie  
proste

|

hyper-  
bola

II.  $B^2 - 4AC = 0$ , krzywa nie ma środka.

1-sze przekształcenie równania (rugowanie wyrazu, zawierającego  $y^2$ ) przez obrót osi współrzędnych o kąt  $\alpha$ , wyznaczony z równania

$$\tan \alpha = -\sqrt{\frac{C}{A}},$$

wtedy dochodzimy do równania

$$Py'^2 + Qx' + Ry' + F = 0.$$

Przypadek szczególny:  $Q = 0$ , otrzymujemy dwie proste równoległe.

2-gie przekształcenie (rugowanie wyrazu, zawierającego  $y'$  i wyrazu stałego) przez przeniesienie równoległe osi współrzędnych. Dochodzimy do równania

$$Py''^2 + Qx'' = 0,$$

czyli otrzymujemy parabolę.

§ 104. Ogólne równanie stycznej do linii krzywej 2-go rzędu. Niech będzie dane ogólne równanie linii krzywej 2-go rzędu:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$



Znajdźmy naprzód równanie siecznej, która daną krzywą przecina w dwóch punktach  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ . Równanie tej prostej, jako przechodzącej przez dwa punkty dane, będzie miało postać

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (2)$$

Ale że punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  leżą na krzywej, więc z równania (1) otrzymujemy następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F &= 0, \\ Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F &= 0, \end{aligned}$$

stąd

$$A(x_1^2 - x_2^2) + B(x_1y_1 - x_2y_2) + C(y_1^2 - y_2^2) + D(x_1 - x_2) + E(y_1 - y_2) = 0,$$

a że

$$x_1y_1 - x_2y_2 = y_1(x_1 - x_2) + x_2(y_1 - y_2),$$

więc będzie

$$A(x_1^2 - x_2^2) + By_1(x_1 - x_2) + Bx_2(y_1 - y_2) + C(y_1^2 - y_2^2) + D(x_1 - x_2) + E(y_1 - y_2) = 0,$$

czyli

$$(x_1 - x_2)[A(x_1 + x_2) + By_1 + D] = -(y_1 - y_2)[Bx_2 + C(y_1 + y_2) + E],$$

stąd zaś

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{A(x_1 + x_2) + By_1 + D}{Bx_2 + C(y_1 + y_2) + E}.$$

Wstawiając tę wartość w równanie (2), otrzymujemy równanie siecznej w postaci

$$y - y_1 = -\frac{A(x_1 + x_2) + By_1 + D}{Bx_2 + C(y_1 + y_2) + E}(x - x_1).$$

Zakładając teraz  $x_1 = x_2$  i  $y_1 = y_2$ , otrzymujemy równanie stycznej:

$$y - y_1 = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}(x - x_1) \quad (3)$$

Zastosujmy ogólne równanie stycznej do elipsy, hyperboli i paraboli:

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

$$A = b^2; \quad B = 0; \quad C = a^2; \quad D = 0; \quad E = 0; \quad F = -a^2b^2,$$

a zatem będzie

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).$$

$$2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

$$A = b^2; \quad B = 0; \quad C = -a^2; \quad D = 0; \quad E = 0; \quad F = -a^2b^2,$$

a zatem równanie stycznej będzie

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).$$

$$3) y^2 = 2px; \quad y^2 - 2px = 0.$$

$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = 1; \quad D = -2p; \quad E = 0; \quad F = 0,$$

więc będzie

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

*Uwaga.* Ogólne równanie stycznej do danej krzywej otrzymać można krócej, znając znaczenie pochodnej danej funkcji.

Niech równaniem krzywej  $AB$  (rys. 87) będzie

$$y = f(x),$$

wtedy, jak wiadomo, pochodna funkcji w punkcie danym będzie równa stycznej trygonometrycznej kąta, który tworzy styczna geometryczna z dodatnią osią odciętych:

$$y' = f'(x) = \tan \alpha.$$

A zatem, jeżeli współrzędne punktu  $M$  są  $(x_1, y_1)$ , to współczynnik kątowy stycznej  $MT$  będzie równy tej pochodnej po wstawieniu  $x = x_1$  i  $y = y_1$ , a więc równanie stycznej  $MT$ , jako prostej, przechodzącej przez punkt  $M(x_1, y_1)$  i tworzącej z osią odciętych kąt  $\alpha$ , jest

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Jeżeli zaś równanie krzywej  $AB$  jest dane w postaci

$$F(x, y) = 0,$$

to równanie stycznej będzie

$$y - y_1 = F'(x_1, y_1) \cdot (x - x_1).$$

*Przykład.* Znaleźć równanie stycznej do krzywej

$$5x^2 - 2xy - x + y - 15 = 0$$

w punkcie  $(2, 1)$  na niej położonym.

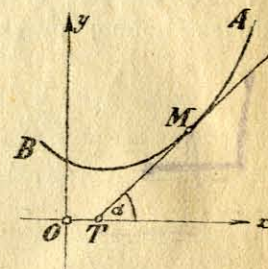
Napišmy równanie w postaci  $y = f(x)$ :

$$(2x - 1)y = 5x^2 - x - 15,$$

$$y = \frac{5x^2 - x - 15}{2x - 1}$$

i znajdziemy pochodną  $y$ :

$$y' = f'(x) = \frac{(2x - 1)(10x - 1) - (5x^2 - x - 15) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = \frac{10x^2 - 10x + 31}{(2x - 1)^2}.$$



Rys. 87.

*pochodna jest to granica do której dążą współczynniki kierunkowy siecznej, gdy sieczna zmierza do granicznego położenia (tzn. do stycznej)*

*przyjemny pomysł h -> 0*



Zakładając teraz  $x = x_1 = 2$ , mamy

$$y' = f'(2) = \frac{40 - 20 + 31}{9} = \frac{17}{3}.$$

a więc równanie stycznej jest:

$$y - 1 = \frac{17}{3}(x - 2),$$

czyli

$$17x - 3y = 31.$$

Przedtem można było dojść do rezultatu, różniczkując lewą stronę danego równania, jako funkcję niewyrażną:

$$10x - 2x \cdot y' - 2y - 1 + y' = 0,$$

$$\text{stad odrazu: } (-2x + 1)y' = -10x + 2y + 1,$$

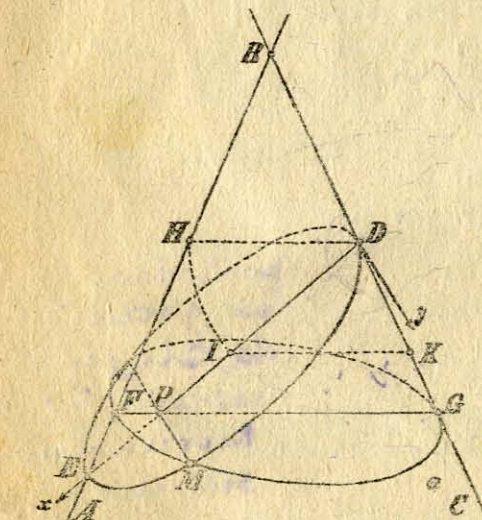
$$y' = \frac{10x - 2y - 1}{2x - 1}$$

$$F'(x_1, y_1) = F'(2, 1) = \frac{20 - 2 - 1}{4 - 1} = \frac{17}{3}.$$

§ 105. Przecięcia stożkowe. W geometrii elementarnej dowodzi się, że przecięcie stożka obrotowego płaszczyzną, prostopadłą do osi, jest kołem; przekonamy się teraz, że przecinając powierzchnię stożka jakąkolwiek inną płaszczyzną, otrzymamy jedną z krzywych 2-go rzędu.

Powierzchnia stożkowa powstaje z obrotu nieograniczonej prostej dookoła stałego punktu (wierzchołka stożka), toczącej się po okręgu koła (podstawa), a więc tworzącą stożka jest prosta nieograniczonej długości, a powierzchnia składać się będzie z dwóch części, oddzielonych wierzchołkiem stożka.

1) Niech powierzchnią rysunku będzie przecięcie osiowe stożka; dla ułatwienia zadania, przetnijmy stożek



Rys. 88.

płaszczyzną prostopadłą do przecięcia osiowego tak, aby linia przecięcia DE (rys. 88) tworzyła z tworzącą stożka BC kąt większy od  $\angle B$ . Ta płaszczyzna przetnie powierzchnię stożkową po pewnej krzywej. Obierzmy na tej krzywej dowolny punkt M i poprowadźmy płaszczyznę, prostopadłą do osi stożka; jej przecięciem

z powierzchnią rysunku jest prosta FG, a z powierzchnią stożkową okrąg koła, przecięciem zaś z płaszczyzną otrzymanej poprzednio krzywej jest MP.

Z rysunku widzimy, że  $MP \perp FG$ , ale FG jest średnicą koła, więc

$$MP^2 = FP \cdot PG.$$

Znajdźmy teraz odcinki FP i PG. Poprowadźmy w tym celu  $HD \parallel FG$ , odetnijmy  $DI = DH$  i wykreślmy  $IK \parallel FG$ , wtedy z podobieństwa trójkątów EFP i EHD mamy

$$\frac{FP}{HD} = \frac{EP}{ED}, \quad FP = \frac{EP \cdot HD}{ED}.$$

Z podobieństwa trójkątów PDG i IDK mamy znowu

$$\frac{PG}{IK} = \frac{PD}{ID}, \quad PG = \frac{IK \cdot PD}{ID},$$

$$\text{a więc } MP^2 = FP \cdot PG = \frac{EP \cdot HD \cdot IK \cdot PD}{ED \cdot ID},$$

a że  $HD = ID$ , więc

$$MP^2 = \frac{EP \cdot PD \cdot IK}{ED}.$$

Obierzmy teraz układ osi współrzędnych na płaszczyźnie otrzymanej krzywej: za początek weźmy punkt D, za oś odciętych prostą DE, oznaczmy jeszcze  $ED = 2a$ ,  $IK = 2p$ , a bieżące współrzędne punktu M niech będą  $(x, y)$ , wtedy

$$MP = y, \quad PD = x, \quad EP = 2a - x.$$

A zatem otrzymujemy

$$y^2 = \frac{(2a - x) \cdot x \cdot 2p}{2a},$$

$$y^2 = \frac{2apx - px^2}{a},$$

$$\text{czyli } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{p^2} = \frac{2x}{a} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Otrzymane równanie dowodzi, że linją przecięcia jest elipsa.

2) Przetnijmy teraz stożek płaszczyzną (prostopadłą do przecięcia osiowego), nachyloną do tworzącej pod kątem mniejszym od kąta przy wierzchołku B (rys. 89).

Punkt E przecięcia się tej płaszczyzny z tworzącą BA wypadnie na jej przedłużeniu; w przecięciu z powierzchnią stożkową otrzymamy krzywą, złożoną z dwóch gałęzi, rozciągających się do nieskończoności.



Obierzmy na otrzymanej krzywej dowolny punkt  $M$  i przez ten punkt poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi stożka, otrzymamy koło, którego średnicą jest  $FG$ . Dokonawszy takich samych wykreśleń, jak poprzednio, otrzymamy

$$MP^2 = FP \cdot PG.$$

Ale

$$\frac{FP}{HD} = \frac{EP}{ED}, \quad FP = \frac{HD \cdot EP}{ED};$$

$$\frac{PG}{IK} = \frac{PD}{ID}, \quad PG = \frac{IK \cdot PD}{ID};$$

więc

$$MP^2 = \frac{HD \cdot EP \cdot IK \cdot PD}{ED \cdot ID},$$

a po skróceniu:

$$MP^2 = \frac{EP \cdot IK \cdot PD}{ED}.$$

Obierzmy znowu na płaszczyźnie otrzymanej krzywej układ osi współrzędnych, za początek biorąc punkt  $D$ , za oś odciętych  $DP$ , oznaczmy  $DE = 2a$ ,  $IK = 2p$ , a współrzędne punktu  $M$  niech będą  $(x, y)$ , wtedy

$$MP = y, \quad PD = x, \quad EP = 2a + x,$$

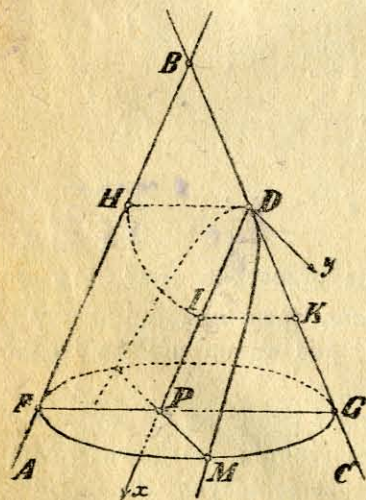
a zatem będzie 
$$y^2 = \frac{(2a + x) \cdot 2p \cdot x}{2a},$$

czyli 
$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Otrzymane równanie dowodzi, że linia przecięcia jest hyperbola.

3) Przetnijmy nareszcie stożek płaszczyzną, nachyloną do tworzącej pod kątem równym kątowi przy wierzchołku  $B$  (rys. 90).

Wtedy linia przecięcia  $DP$  będzie równoległa do tworzącej  $BA$  i otrzymamy krzywą nieskończoną o jednej tylko gałęzi. Obierzmy na tej krzywej dowolny punkt  $M$  i przesunijmy płaszczyznę prostopadłą do osi stożka,



Rys. 90.

otrzymamy koło o średnicy  $FG$ . Rozumując, jak poprzednio, mamy

$$MP^2 = FP \cdot PG,$$

ale

$$FP = HD \cdot \frac{PG}{IK} = \frac{PD}{ID},$$

$$PG = \frac{IK \cdot PD}{ID},$$

więc

$$MP^2 = \frac{HD \cdot IK \cdot PD}{ID},$$

czyli

$$MP^2 = IK \cdot PD.$$

Obierając osi współrzędnych, jak poprzednio, i wprowadzając takie same oznaczenia, otrzymamy

$$y^2 = 2px.$$

A więc linia przecięcia jest parabola.

§ 106. O graficznym rozwiązywaniu zadań algebraicznych. Niech będą dwa równania:

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Jeżeli je odniesiemy do układu współrzędnych  $xOy$ , uważając wiadome w równaniach za zmienne współrzędne punktu, to każde z równań będzie przedstawiało wogóle pewną linię  $n$ -go rzędu, a wspólne wartości na  $x$  i  $y$ , czyniące zadość obu równaniom jednocześnie, będą oznaczały współrzędne wspólnych punktów tych dwóch krzywych. A zatem, jeżeli wykreślimy obie krzywe, to współrzędne ich punktów przecięcia będą geometrycznym rozwiązaniem danego układu równań, a ich długość będzie wartością (rzeczywistą) na  $x$  i  $y$ .

Oczywiście, dokładność rozwiązania będzie zależała od więcej lub mniej dokładnego wykreślenia krzywych i ich punktów wspólnych; dobrze jest posilkować się papierem „milimetrycznym”, albo „półmilimetrycznym”, obierając skalę 1–2 cm.

Przykład 1. Rozwiązać graficznie układ równań:

$$7x + 4y = 14,$$

$$4x - y = 4.$$

Napiszmy dane równania w postaci:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{4} = 1$$

i wykreślimy ich miejsca geometryczne, odnosząc je do układu osi  $xOy$ .

Obrazem geometrycznym 1-go równania jest prosta  $AB$ , która odmierza na osiach odcinki: 2 i  $3\frac{1}{2}$ , a drugiego — prosta  $CD$ , która na osiach odmierza odcinki: 1 i — 4 (rys. 91).



Wspólny punkt  $M$  tych prostych ma za współrzędne  $OP$  i  $MP$ ; odczytując ich wartości, znajdujemy  $OP = x = 1,3$ ;  $MP = y = 1,2$ .

**Przykład 2.** Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x + 8y &= 0, \\ 2x + 3y + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Odniesmy je do układu współrzędnych  $xOy$  i wykreślmy ich miejsca geometryczne.

1-sze równanie możemy napisać w postaci

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25,$$

wtedy widzimy, że przedstawia koło, którego środkiem jest punkt  $(3, -4)$ , a promień  $= 5$  (rys. 92).

Drugie równanie przedstawia prostą  $AB$ , która na osiach współrzędnych odmierza odcinki:  $-6$  i  $-4$ .

Wspólne punkty tych linii są  $M$  i  $N$ ; ich współrzędne są:  $N(6, -8)$  i  $M(-1,8; -2,7)$ , a zatem pierwiastkami danych równań są:  $x_1 = 6$ ,  $y_1 = -8$  i  $x_2 = -1,8$ ,  $y_2 = -2,7$  (dokładniej:  $x_2 = -1,85$ ;  $y_2 = -2,77$ ).

**Przykład 3.** Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 13x^2 + 10xy + 13y^2 - 16x + 16y - 272 &= 0, \\ y &= 2x - 1. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie, odniesione do osi  $xOy$ , przedstawia krzywą 2-go rzędu, a że  $B^2 - 4AC = 10^2 - 4 \cdot 13 \cdot 13 < 0$ , więc elipsę, której współrzędne środka są:  $a = 1$  i  $b = -1$ . Dokonawszy dalszych przekształceń równania, znajdziemy obie osi tej elipsy.

Drugie równanie przedstawia prostą, która na osi odciętych odmierza odcinek  $= \frac{1}{2}$ , a na osi rzędnych  $-1$ . Wykreśliwszy obie linie, znajdziemy punkty wspólne:  $x_1 = 2,2$ ;  $y_1 = 3,2$  oraz  $x_2 = -1,6$ ;  $y_2 = -4,1$ , czyli przybliżone rozwiązanie danych równań.

Posiłkowanie się graficznym sposobem bywa niekiedy bardzo użyteczne w celu przybliżonego rozwiązania danego równania, zwłaszcza 3-go lub 4-go stopnia, jak to widzimy z poniższych przykładów:

**Pierwiastki równania kwadratowego**

$$x^2 + px + q = 0$$

mogą być wyznaczone, jako odcięte punktów, w których parabola

$$y = x^2$$

przecina się z prostą  $y + px + q = 0$ .

**Pierwiastki równania 3-go stopnia**

$$x^3 + px + q = 0$$

można wyznaczyć, jako odcięte punktów, w których parabola

$$y = x^2$$

przecina się z hyperbolą

$$xy + px + q = 0.$$

**Pierwiastki równania 4-go stopnia**

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

są odciętymi punktów przecięcia się dwóch parabol

$$x^2 = my,$$

$$m^2y^2 + pmy + qx + r = 0,$$

gdzie  $m$  jest liczbą dowolną.

*Zagadnienie o podwojeniu sześciannu (zadanie z Delos).* Podanie głosi, że kiedy w mieście Delos wybuchła zaraza, przerażeni mieszkańcy udali się do świątyni, zasięgnąć rady u wróżki, gotowi do złożenia wielkich ofiar bogom, aby tylko ich gniew przebłagać i ukrócić straszną zarazę, która ludzi dziesiątkowała. Po długim oczekiwaniu nadeszła nareszcie odpowiedź, zawierająca żądanie postawienia bogom dwa razy większego ołtarza, bez zmiany kształtu dotychczasowego. A dodać należy, że ołtarz świątyni był dokładnym sześciannem.

Niestety, za wielkie śnać były winy mieszkańców miasta Delos: zaraza dawno wygasła i wiele lat upłynęło, aż znalazł się wreszcie uczony Grek, który zdołał zadanie choć w przybliżeniu rozwiązać.

Jeżeli krawędź dawnego ołtarza  $= a$ , a żadanego  $= x$ , to zadanie polegało na wykreśleniu  $x$  z równania

$$x^3 = 2a^3.$$

Napiszmy to równanie w postaci

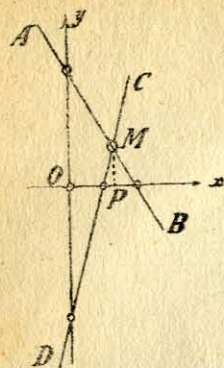
$$x^2 : a = 2a^2 : x,$$

widzimy, że jego pierwiastki można wyznaczyć, jako odcięte punktów, w których parabola

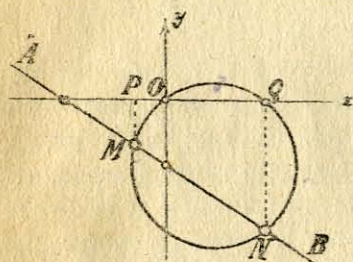
$$x^2 = ay$$

przecina się z hyperbolą (równoboczną)

$$xy = 2a^2.$$



Rys. 91.



Rys. 92.

*gdy m=1  
to równanie  
jest identyczne*

*rozkładamy na dwa  
równania:  $x^2 : a = y$   
 $2a^2 : x = y$*

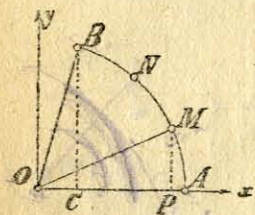
*$y = \frac{x^2}{a}$   
 $\frac{x^3}{a} = 2a^2$*



Dzięki temu właśnie zadaniu, któremu starożytni matematycy wiele czasu poświęcali, udało się *Menaechmosowi* wykryć linie 2-go rzędu.

*Zagadnienie o trysekcji kąta* (czyli o podziale kąta na trzy części równe). Niech będzie dany kąt  $AOB = \alpha$  (rys. 93), jego wierzchołek obierzmy za początek układu współrzędnych, a ramię  $OA$  za oś odciętych. Zatoczmy dowolnym promieniem  $OA = OB = r$  łuk z wierzchołka kąta, współrzędne punktu  $B$  niech będą  $(a, b)$ , a  $M(x, y)$  niech będzie poszukiwanym punktem na łuku  $AB$ , czyli niech będzie

$$\angle AOM = \frac{1}{3} \angle AOB = \frac{\alpha}{3}.$$



Rys. 93.

Zauważmy, że

$$a = OC = OB \cdot \cos(\angle AOB) = r \cdot \cos \alpha,$$

$$b = BC = OB \cdot \sin(\angle AOB) = r \cdot \sin \alpha,$$

tak samo  $x = OP = r \cdot \cos \frac{\alpha}{3},$

$$y = MP = r \cdot \sin \frac{\alpha}{3}.$$

Napiszmy teraz równości:

$$\sin \frac{2\alpha}{3} = 2 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3},$$

$$\sin \frac{2\alpha}{3} = \sin \left( \alpha - \frac{\alpha}{3} \right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{3},$$

a więc

$$2 \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3} = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{3},$$

czyli

*mnożymy strony równania przez  $r^3$*

$$2r \sin \frac{\alpha}{3} \cdot r \cos \frac{\alpha}{3} = r \sin \alpha \cdot r \cos \frac{\alpha}{3} - r \cos \alpha \cdot r \sin \frac{\alpha}{3}.$$

Wstawiając tu wartości współrzędnych punktów  $B$  i  $M$ , otrzymujemy

$$2xy = bx - ay \quad (1)$$

czyli równanie jednego miejsca geometrycznego punktu  $M$ . Drugim miejscem będzie, oczywiście, okrąg koła

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

A zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli, wykreśliwszy krzywe (1) i (2), odnajdziemy ich punkt wspólny.

Łatwo się przekonać, że równanie (1) przedstawia hyperbolę równoboczną, której środek leży w punkcie  $\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ; nie też

dziwnego, że starożytni geometrowie napróżno usiłowali rozwiązać to zadanie zapomocą cyrkla i linjału, czyli przy użyciu kół i linii prostych.

### § 107. Zadania.

(1 — 6). Uprościć następujące równania, odniósłszy je do środka krzywej:

$$1. \quad 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0.$$

$$2. \quad x^2 + 24xy - 6y^2 + 30x + 60y - 45 = 0.$$

$$\checkmark 3. \quad x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 5 = 0.$$

$$4. \quad x^2 - 10xy + 26y^2 + 2x - 7y - 9 = 0.$$

$$5. \quad 2x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 9 = 0.$$

$$6. \quad x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 6y - 12 = 0.$$

(7 — 12). Przez stosowny dobór osi współrzędnych, doprowadzić do najprostszej postaci następujące równania:

$$7. \quad 3x^2 + 8xy - 3y^2 + 10 = 0.$$

$$8. \quad 14x^2 - 4xy + 11y^2 - 60 = 0.$$

$$\checkmark 9. \quad 5x^2 - 3xy + y^2 - 4 = 0.$$

$$10. \quad 11x^2 + 84xy - 24y^2 - 156 = 0.$$

$$11. \quad 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 20 = 0.$$

$$\checkmark 12. \quad x^2 - 3xy - 3y^2 - 1 = 0.$$

(13 — 32). Odnaleźć (i wykreślić) obraz geometryczny równania, doprowadziwszy je do najprostszej postaci:

$$\checkmark 13. \quad 17x^2 + 16xy + 17y^2 - 82x - 118y - 7 = 0.$$

$$14. \quad 36x^2 + 24xy + 29y^2 - 120x + 10y - 595 = 0.$$

$$15. \quad 36x^2 + 24xy + 29y^2 - 24x + 92y - 616 = 0.$$

$$16. \quad 34x^2 - 24xy + 41y^2 + 20x + 140y - 300 = 0.$$

$$17. \quad 93x^2 - 48xy + 107y^2 - 48x + 214y - 2893 = 0.$$

$$\checkmark 18. \quad x^2 + 24xy - 6y^2 + 30x + 60y + 45 = 0.$$

$$19. \quad x^2 - 24xy - 6y^2 - 49x - 12y - 119\frac{3}{4} = 0.$$

$$20. \quad 23x^2 + 72xy + 2y^2 - 190x - 80y + 525 = 0.$$

$$21. \quad 23x^2 - 72xy + 2y^2 - 26x - 68y + 303 = 0.$$

$$22. \quad 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 50x - 100y + 125 = 0.$$

$$23. \quad 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 110x - 20y + 125 = 0.$$

$$24. \quad 16x^2 - 24xy + 9y^2 + 110x - 20y + 50 = 0.$$

$$25. \quad 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x - 85y - 125 = 0.$$

$$26. \quad x^2 + 2xy + y^2 + 2x\sqrt{2} + 6y\sqrt{2} + 12 = 0.$$

$$27. \quad 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 26x - 28y + 41 = 0.$$

$$28. \quad 8x^2 + 4xy + 5y^2 - 32x - 8y + 176 = 0.$$

$$29. \quad 11x^2 + 24xy + 4y^2 - 26x + 8y - 21 = 0.$$

$$30. \quad x^2 - 25y^2 - 2x + 100y - 99 = 0.$$

$$31. \quad 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}y - 50 = 0.$$

$$32. \quad 64x^2 - 240xy + 225y^2 + 136x + 255y - 1734 = 0.$$

(33 — 34). Znaleźć równanie linii krzywej, która przechodzi przez dane punkty:

$$33. \quad (1, 0); (0, 3); (2, 7); (4, 1); (0, 0).$$

$$34. \quad (0, 0); (0, 2); (-1, 0); (-2, 1); (-1, 3).$$



(35 — 38). Znaleźć równanie stycznej w danym punkcie linii krzywej:

35. Krzywa:  $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 5x + 7y - 3 = 0$ ; punkt: (1, 1).

36. „  $x^2 - 8xy + y^2 + 5x + 7y + 6 = 0$ ; „ (3, 2).

37. „  $3x^2 + 5xy - 2x - y - 5 = 0$ ; „ (1, 1).

38. „  $5x^2 + 4xy + 3y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$ ; „ (1, 2).

(39 — 41). Znaleźć równania stycznych, wyprowadzonych z danego punktu do krzywej danej:

39. Krzywa:  $3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0$ ; punkt: (2,  $\frac{1}{2}$ ).

40. „  $y = 2x^2 - 8x + 5$ ; „ (2, -11).

41. „  $5x^2 - 8x - 4y = 0$ ; „ (1, -2).

(42 — 43). Do danej krzywej poprowadzić styczne równoległe do prostej danej:

42.  $8x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 5 = 0$ ;  $y = 8x - 1$ .

43.  $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 6y - 12 = 0$ ;  $y = 3x - 1$ .

(44 — 47). Znaleźć równanie linii przecięcia stożka o kącie przy wierzchołku  $= \alpha$  płaszczyzną, która jedną tworzącą w przecięciu osiową przecina w odległości  $d$ , a drugą w odległości  $d'$  od wierzchołka, mając następujące dane:

44.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $d = 16$ ;  $d' = 6$ .

45.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $d = 30$ ;  $d' = 16$ .

46.  $\alpha = 90^\circ$ ;  $d = 48$ ;  $d' = 14$ .

47.  $\alpha = 120^\circ$ ;  $d = 16$ ;  $d' = 14$ .

(48 — 51). Znaleźć równanie linii przecięcia stożka o kącie przy wierzchołku  $= \alpha$  płaszczyzną, która jedną tworzącą w przecięciu osiowym przecina w odległości  $d$ , a przedłużenie drugiej w odległości  $d'$  od wierzchołka, mając następujące dane:

48.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $d = 32$ ;  $d' = 10$ .

49.  $\alpha = 90^\circ$ ;  $d = 8$ ;  $d' = 6$ .

50.  $\alpha = 90^\circ$ ;  $d = 24$ ;  $d' = 10$ .

51.  $\alpha = 120^\circ$ ;  $d = 16$ ;  $d' = 10$ .

(52 — 55). Znaleźć równanie linii przecięcia stożka o kącie przy wierzchołku  $= \alpha$  płaszczyzną, która jedną tworzącą w przecięciu osiowym przecina w odległości  $d$  od wierzchołka, a do drugiej jest równoległa, mając następujące dane:

52.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $d = 5$ .

54.  $\alpha = 120^\circ$ ;  $d = 2$ .

53.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $d = 6$ .

55.  $\alpha = 120^\circ$ ;  $d = 3$ .

56. Dowieść, że miejscem geometrycznym punktów, dla których stosunek odległości od danego punktu i prostej danej jest stały — jest krzywa 2-go rzędu.

*Uwaga.* Za początek układu współrzędnych obrać środek odległości danego punktu od prostej danej, a za oś odciętych prostą prostopadłą do tej prostej przechodzącą przez punkt dany.

## ROZDZIAŁ IX.

### O niektórych krzywych wyższego rzędu oraz przestępnych.

§ 108. Wiadomości ogólne. Poznawszy trzy krzywe 2-go rzędu, można już zapomocą pewnych metod otrzymywać niektóre krzywe algebraiczne rzędów wyższych nad 2-gi, tudzież krzywe przestępne. Przytaczamy tu ważniejsze ze wspomnianych metod, które nam pozwolą zapoznać się z wybitniejszymi z pomiędzy tych linii.

*Krzywe spodkowe.* Obieramy na płaszczyźnie pewien punkt stały, z którego wyprowadzamy prostopadłe do szeregu stycznych w poszczególnych punktach danej linii krzywej. Miejsce geometryczne spodków tych prostopadłych utworzy nową krzywą, zwaną „spodkową” względem danej, a której kształt będzie zależał od kształtu linii danej.

*Krzywo inwersyjne.* Obieramy na płaszczyźnie pewien stały punkt  $O$ , zwany *środkiem inwersji*, prowadzimy do przecięcia się z daną krzywą promień  $OM$  i wyznaczamy punkt  $M'$ , położony na prostej  $OM$ , na zasadzie zależności

$$OM \cdot OM' = k^2.$$

Miejsce geometryczne punktów  $M'$  utworzy nową linię krzywą, zwaną inwersyjną względem danej.

*Ewoluty* czyli *rozwinięte*. Miejsce geometryczne środków krzywizny danej krzywej tworzy nową linię, która się nazywa *evolutą* czyli *rozwiniętą* względem danej, a nawzajem dana linia nazywa się *evolwentą* czyli *rozwijającą* w stosunku do rozwiniętej.

*Rulety*. Tak się nazywają krzywe, powstałe przez toczenie się jednej linii krzywej po drugiej (bez ślizgania), np. kiedy koło toczy się po nieruchomym kole.

§ 109. Kardioda. Zastosujemy metodę „spodków prostopadłych” do koła, obierając koniec średnicy  $A$  (rys. 94) za punkt stały.

Promień koła niech będzie  $a$ , za początek układu współrzędnych weźmy punkt  $A$ , a średnicę  $AB$  za oś odciętych, wtedy równanie koła będzie

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Równanie stycznej w punkcie  $N(x_1, y_1)$  jest

$$(x - a)(x_1 - a) + yy_1 = a^2,$$

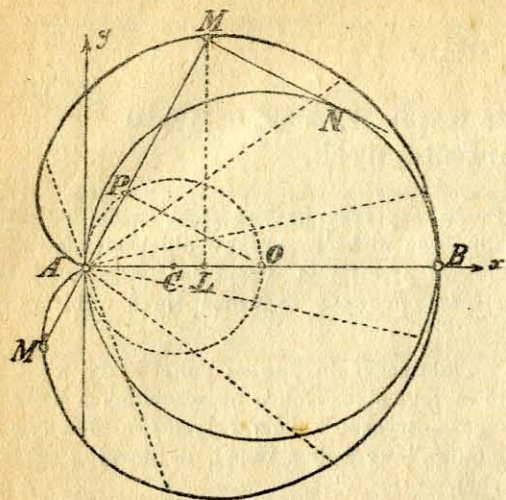
a równanie prostopadłej do niej spuszczonej z punktu  $A$ :

$$y = \frac{y_1}{x_1 - a}x.$$

Rozwiązując równania tych dwóch prostych względem  $x_1$  i  $y_1$ , otrzymamy:

$$x_1 - a = \frac{a^2x}{x^2 - ax + y^2}, \quad y_1 = \frac{a^2y}{x^2 - ax + y^2}.$$





Rys. 94.

wstawiając teraz te wartości w równanie

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = a^2,$$

otrzymamy równanie miejsca geometrycznego spodków prostopadłych:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

czyli

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2.$$

Otrzymana krzywa jest 4-go rzędu i nosi nazwę *kardioidy*.

Można tę krzywą otrzymać jeszcze w sposób następujący: wykreśliśmy koło o promieniu

$$CA = CO = \frac{a}{2}, \text{ następnie}$$

z punktu *A* wyprowadźmy szereg prostych i odmierzymy na każdej  $PM = PM' = a$ ; miejscem geometrycznym punktów *M* i *M'* będzie kardioida. o czym łatwo się przekonać, znalazłszy równanie tego miejsca:

Jeżeli wykreśliśmy  $ML \perp AB$  i połączymy *P* z *O*, a współrzędne bieżące punktu *M* oznaczmy  $(x, y)$ , to z podobieństwa trójkątów prostokątnych *AML* i *APO* będzie:

$$\frac{AL}{AM} = \frac{AP}{AO},$$

ale  $AL = x, ML = y, AM = \sqrt{x^2 + y^2},$

$$AO = a, AP = \sqrt{x^2 + y^2} - a,$$

a więc  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{a},$

czyli  $ax = x^2 + y^2 - a\sqrt{x^2 + y^2},$   
 $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$

ostatecznie  $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2,$

t. j. równanie kardioidy.

§ 110. *Cissoida Dioklesa*. Zastosujmy teraz tę samą metodę do paraboli

$$y^2 = -2px,$$

za punkt stały obierając jej wierzchołek *A* (rys. 95).

Równanie stycznej w punkcie  $N(x_1, y_1)$  paraboli jest

$$yy_1 = -p(x + x_1),$$

a równanie prostopadłej *AM* do niej

$$y = \frac{y_1}{p}x.$$

Rozwiązując te dwa równania względem  $x_1$  i  $y_1$ , otrzymujemy

$$x_1 = -\frac{x^2 + y^2}{x}, \quad y_1 = \frac{py}{x},$$

a po wstawieniu w równanie

$$y_1^2 = -2px_1,$$

mamy  $2x(x^2 + y^2) = py^2,$

równanie krzywej 3-go rzędu, która się nazywa *cissoidą Dioklesa*.

Cissoidę można wykreślić także w sposób następujący: poprowadźmy naprzód prostopadłą *KL* do średnicy  $AB = \frac{p}{2}$

danego koła, następnie z punktu *A* wyprowadźmy szereg prostych *AC, AC'* i t. d. i odmierzymy  $AM = CD, AM = C'D'$  i t. d., otrzymamy szereg punktów *M, M'* i t. d., które po połączeniu utworzą cissoidę Dioklesa.

Równanie tej linii można otrzymać niezależnie od paraboli:

Za początek układu obierzmy *A*, za oś odciętych *AB*; niech będzie punkt cissoidy  $M(x, y)$ , wtedy z podobieństwa trójkątów *AMP* i *ACE* mamy

$$\frac{MP}{AP} = \frac{CE}{AE},$$

ale  $MP = y, AP = x, AE = AB - CF = \frac{p}{2} - x,$

bo z równości trójkątów *AMP* i *CDF* wynika, że

$$CF = AP = x,$$

wreszcie  $CE^2 = AE \cdot EB = \left(\frac{p}{2} - x\right) \cdot x$

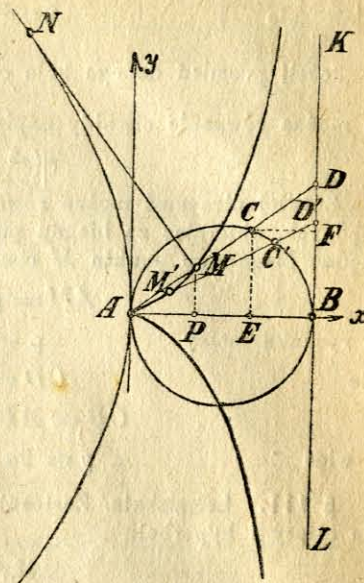
$$CE = \sqrt{x\left(\frac{p}{2} - x\right)},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x\left(\frac{p}{2} - x\right)}}{\frac{p}{2} - x}$$

a zatem

Podnosząc obie strony do kwadratu, po skróceniu, otrzymujemy

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{\frac{p}{2} - x},$$



Rys. 95.



czyli

$$y^2 \left( \frac{p}{2} - x \right) = x^3,$$

ostatecznie

$$2x(x^2 + y^2) = py^2.$$

Jeżeli promień danego koła oznaczmy  $a$ , więc średnicę  $AB = \frac{p}{2} = 2a$ ,  
to można równanie cissoidy napisać w postaci

$$x(x^2 + y^2) = 2ay^2.$$

Łatwiej otrzymać można równanie cissoidy w biegunowym układzie współrzędnych, obierając za biegun punkt  $A$ , za oś biegunową  $AB$ . Wtedy współrzędne biegunowe punktu  $M$  cissoidy będą:

$$AM = \rho, \quad \angle MAB = \varphi.$$

Z rysunku mamy

$$\rho = AM = CD,$$

ale

$$CD = CB \cdot \tan \varphi,$$

$$CB = AB \cdot \sin \varphi = 2a \sin \varphi,$$

a więc

$$\rho = 2a \cdot \sin \varphi \cdot \tan \varphi.$$

§ 111. **Lemniskata.** Zastosujmy jeszcze metodę „spodków prostopadłych” do elipsy i hyperboli:

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2,$$

obierając za punkt stały środek krzywej.

Równanie stycznej w punkcie  $(x_1, y_1)$  jest

$$b^2xx_1 \pm a^2yy_1 = a^2b^2,$$

a równanie prostopadłej do niej, spuszczonej ze środka elipsy, lub hyperboli, będzie

$$y = \pm \frac{a^2y_1}{b^2x_1} \cdot x.$$

Rozwiązując teraz te dwa równania względem  $x_1$  i  $y_1$ , otrzymamy

$$x_1 = \frac{a^2x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \pm \frac{b^2y}{x^2 + y^2},$$

a że punkt  $(x_1, y_1)$  leży na danej krzywej, więc

$$b^2x_1^2 \pm a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

a zatem miejscem geometrycznym punktu  $(x, y)$  jest

$$\frac{a^4b^2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \pm \frac{a^2b^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = a^2b^2,$$

czyli

$$a^2x^2 \pm b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Otrzymaliśmy dwie krzywe 4-go rzędu, które się nazywają *lemniskatami Booth'a*: eliptyczną i hyperboliczną.

W przypadku hyperboli równobocznej, kiedy  $a = b$ , mamy równanie

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2$$

czyli t. zw. *lemniskatę Bernoulli'ego* (rys. 96).

Lemniskaty należą do tak zwanych linii *Cassini'ego*, które mają taką własność, że dla ich punktów iloczyn odległości od dwóch punktów danych jest stały.

Jeżeli odległości punktów danych  $F$  i  $F_1$  od początku układu współrzędnych oznaczmy  $c$ , to równaniem linii Cassini'ego będzie

$$\sqrt{y^2 + (c+x)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = a^2,$$

gdzie  $a$  jest liczbą stałą. Po uproszczeniu otrzymamy

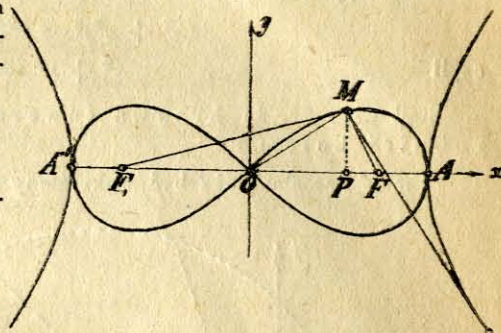
$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4,$$

albo

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4.$$

Stąd, w przypadku szczególnym, jeżeli  $c = a$ , otrzymujemy lemniskatę Bernoulli'ego.

Rys. 96.



§ 112. **Ślimak Pascala.** Zastosujmy teraz metodę inwersji do krzywych 2-go rzędu; najlepiej będzie posługiwać się równaniem biegunowym

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

które, jak wiadomo, przedstawia elipsę, jeżeli  $e < 1$ ; hyperbolę, jeżeli  $e > 1$  i parabolę dla  $e = 1$ .

Za środek inwersji obierzmy ognisko i wyznaczmy punkty na zasadzie równania

$$\rho\rho' = p^2,$$

czyli

$$\rho' = \frac{p^2}{\rho} = p(1 + e \cos \varphi).$$

Przejdźmy teraz do współrzędnych prostokątnych, wstawiając

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \rho' = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wtedy otrzymamy

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + \frac{epx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

czyli

$$x^2 + y^2 - ep x = p\sqrt{x^2 + y^2},$$

ostatecznie

$$(x^2 + y^2 - ep x)^2 = p^2(x^2 + y^2).$$

Otrzymaliśmy krzywą 4-go rzędu, która się nazywa *ślimakiem Pascala*, jeżeli  $e < 1$ , lub  $e > 1$ , t. j. jeżeli krzywą daną była elipsa, lub hyperbola (rys. 97).

W przypadku  $e = 1$  (dana krzywa jest parabolą), otrzymujemy

$$(x^2 + y^2 - px)^2 = p^2(x^2 + y^2),$$



czyli  $(x^2 + y^2)^2 - 2px(x^2 + y^2) = p^2y^2$   
t. j. mamy znaną już z poprzedniego kardioidę.

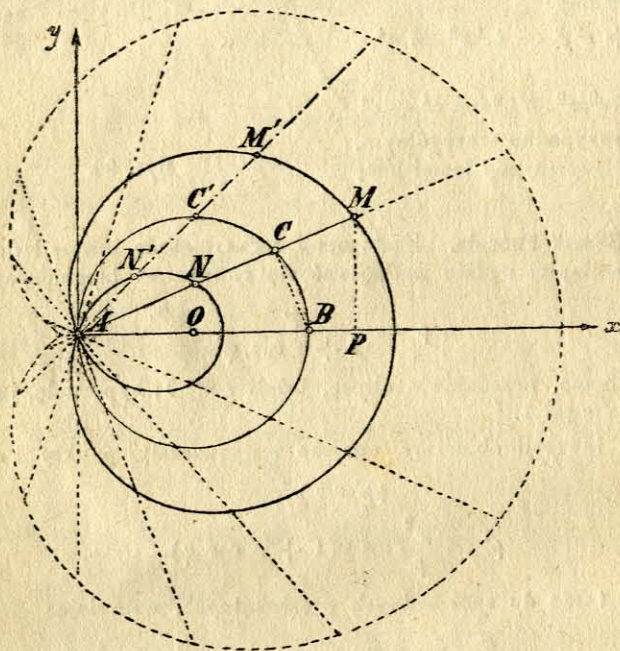
Zakładając  $e = 0$ , otrzymujemy krzywą inwersyjną względem koła:

$$(x^2 + y^2)^2 = p^2(x^2 + y^2),$$

czyli  $x^2 + y^2 = p^2$ .

Stąd widzimy, że krzywa inwersyjna względem koła jest również kołem.

Ślimak Pascala może być wykreślony w sposób następujący (rys. 97).



Rys. 97.

Niech będzie koło o średnicy  $AB = a$ , z punktu  $A$  wyprowadźmy szereg prostych  $AC, AC'$  i t. d., odmierzymy  $CM = CN = b$ ;  $C'M' = C'N' = b$  i t. d., otrzymamy szereg punktów:  $M, M', N, N', \dots$ , które po połączeniu, dają linję ślimakową Pascala.

Równanie tej krzywej otrzymamy, biorąc za początek układu współrzędnych punkt  $A$ , a za oś odciętych  $AB$ , w następujący sposób:

Niech będzie dowolny punkt krzywej  $M(x, y)$ , z podobieństwa trójkątów prostokątnych  $ACB$  i  $AMP$  mamy

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AB},$$

ale

$$AP = x, \quad AM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$AB = a, \quad AC = \sqrt{x^2 + y^2} - b,$$

więc

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - b}{a},$$

czyli

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Kształt krzywej będzie zależał od długości  $b$ : jeżeli  $b < a$ , krzywa będzie posiadała gałąź wewnętrzną (węzeł), jeżeli  $b > a$  — krzywa będzie posiadała tylko jedną gałąź, wreszcie jeżeli  $b = a$ , otrzymamy kardioidę.

§ 113. Ewoluty (rozwinęte) krzywych 2-go rzędu. Tak się będą nazywały miejsca geometryczne środków krzywizny elipsy, hyperboli i paraboli.

Znajdźmy naprzód ewolutę elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Spółrzędne środka krzywizny w punkcie  $(x_1, y_1)$ , jak wiadomo, są (§ 64):

$$x = \frac{e^2 x_1^3}{a^2}, \quad y = -\frac{a^2 e^2 y_1^3}{b^4},$$

wyznaczmy stąd  $x_1$  i  $y_1$ :

$$x_1 = \left(\frac{a^2 x}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 = \left(-\frac{b^4 y}{a^2 e^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

i wstawmy w równanie

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

otrzymamy

$$\left(\frac{x}{a^2 e}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

czyli

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$$

czyli równanie ewoluty (rozwinętej) elipsy (rys. 98).

Jeżeli w tem równaniu znieść wyrazy niewymierne, to ostatecznie otrzymamy równanie 6-go stopnia, więc mamy krzywą 6-go rzędu.

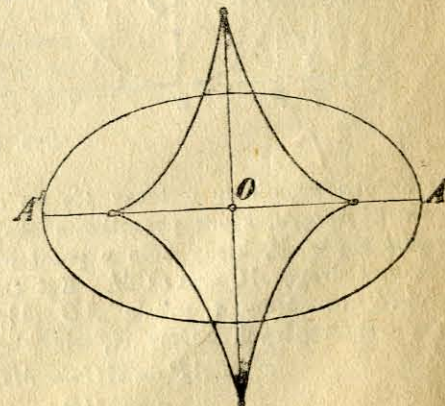
W taki sam sposób można otrzymać ewolutę hyperboli.

Znajdźmy jeszcze równanie ewoluty paraboli:

$$y^2 = 2px.$$

Spółrzędne środka krzywizny paraboli w punkcie  $(x_1, y_1)$  są (§ 96):

$$x = p + 3x_1, \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2},$$



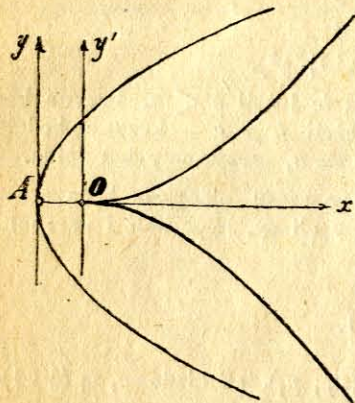
Rys. 98.



stąd

$$x_1 = \frac{x-p}{3}, \quad y_1 = -\sqrt[3]{p^2 y},$$

wstawiając te wartości w równanie



Rys. 99.

$$y_1^2 = 2px_1,$$

mamy

$$\sqrt[3]{p^4 y^2} = \frac{2}{3}p(x-p),$$

czyli

$$y^2 = \frac{2}{3} \frac{(x-p)^3}{p}.$$

Otrzymujemy krzywą 3-go rzędu, która nosi nazwę *paraboli Neil'a* czyli paraboli półsześcienniej (rys. 99). Jej równanie można napisać w postaci prostszej, oznaczając

$$\frac{2}{3}p = k$$

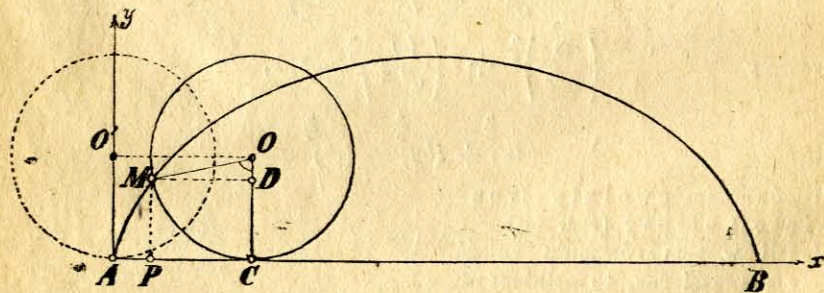
i biorąc nowy układ osi:

$$x = p + x', \quad y = y',$$

$$ky'^2 = x'^3.$$

wtedy będzie

**114. Cykloida.** Jeżeli pewna krzywa toczy się bez ślizgania po innej krzywej stałej, to punkt krzywej ruchomej opisuje linię, która się nazywa wogóle *ruletą*. Najprostszym przypadkiem będzie, kiedy koło toczy się po linii prostej, wtedy krzywa, którą wyznaczy każdy punkt koła, nazywa się *cykloidą*. Znajdźmy jej równanie.



Rys. 100.

Koło o promieniu  $a$  toczy się po nieruchomej prostej  $AB$  (rys. 100), punkt  $C$  okręgu, który początkowo znajdował się w  $A$ , po pewnym czasie znalazł się w  $M$ , kiedy koło z położenia  $O'$  przeszło do  $O$ , a więc punkt  $C$  przeszedł drogę  $AC = \cup CM$ . Kąt  $COM$ , który nazywa się zwykle „kątem obrotu”, oznaczmy  $\tau$ , prostą  $AB$  obierzmy za oś odciętą, za początek układu współrzędnych weźmy  $A$ , wtedy współrzędne  $(x, y)$  punktu  $M$  będą:

$$x = AP = AC - MD = \cup MC - MD,$$

$$y = MP = OC - OD,$$

albo, uważając  $\tau$  za teoretyczną miarę kąta obrotu:

$$x = a\tau - a \sin \tau,$$

$$y = a - a \cos \tau.$$

Z tych dwóch równań możnaby wyrugować  $\tau$  na zasadzie równości  $\sin^2 \tau + \cos^2 \tau = 1$ , lepiej jednak posługiwać się równaniami ze zmiennymi  $x$  i  $y$ , które są zależne od  $\tau$ .

Jeżeli koło będzie się toczyło po prostej  $AB$ , poczynając od  $A$ , to kąt  $\tau$  będzie przybierał szereg wartości:

$$0, \dots \pi, \dots 2\pi, \dots 3\pi, \dots 4\pi, \dots$$

a odpowiednie wartości na  $x$  i  $y$  będą:

$$x = 0, \dots \pi a, \dots 2\pi a, \dots 3\pi a, \dots 4\pi a, \dots$$

$$y = 0, \dots 2a, \dots 0, \dots 2a, \dots 0, \dots$$

Stąd widzimy, że rzędne punktów cykloidy będą się zmieniały w granicach od 0 do  $2a$ , a więc krzywa przecina oś odciętą po dokonaniu całkowitego obrotu koła, osiąga najwyższe wzniesienie ( $= 2a$ ), jeżeli kąt obrotu  $= \pi, 3\pi, \dots$

Cykloida należy do krzywych przestępnych.

**§ 115. Hipocykloida.** Jeżeli koło toczy się po kole nieruchomem, otrzymujemy rodzaj rulety, która nosi nazwę *hipocykloidy* albo *epicykloidy*, zależnie od tego, czy koło toczy się po stronie wewnętrznej, czy zewnętrznej koła nieruchomego.

Równanie hipocykloidy można otrzymać w sposób następujący:

Po kole nieruchomem o promieniu  $OD = b$  (rys. 101) toczy się koło o promieniu  $CD = a$ , osi współrzędnych są wskazane na rysunku. Dowolny punkt krzywej  $M(x, y)$  w pewnym przeciągu czasu odbył drogę  $AD$  po kole nieruchomem, a na kole ruchomem  $DM$  oznaczmy „kąt obrotu”, czyli

$$\sphericalangle AOD = \tau,$$

wtedy

$$\cup AD = b \cdot \tau,$$

albo oznaczając jeszcze

$$b = an,$$

będziemy mieli

$$\cup AD = an\tau.$$

Z drugiej strony

$$\cup DM = a \cdot (\sphericalangle DCM) = \cup AD = an\tau$$

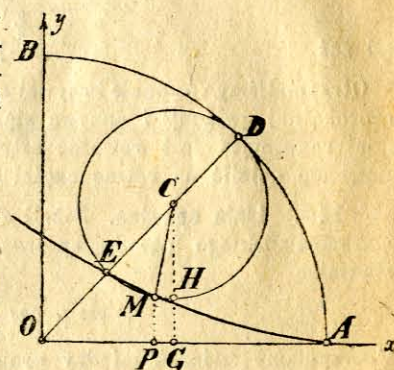
stąd

$$\sphericalangle DCM = n\tau.$$

dalej zaś mamy

$$\sphericalangle ECM = \pi - n\tau,$$

$$\sphericalangle MCH = \sphericalangle ECH - \sphericalangle ECM = \frac{\pi}{2} - \tau - (\pi - n\tau) = (n-1)\tau - \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 101.



Wyznamy naprzód spólrzędne punktu  $C$ :

$$OG = OC \cdot \cos \tau = (b - a) \cos \tau = (n - 1) a \cdot \cos \tau,$$

$$CG = OC \cdot \sin \tau = (n - 1) a \sin \tau,$$

a więc spólrzędne punktu  $M$  będą:

$$x = OG - MH = (n - 1) a \cos \tau + a \cos (n - 1) \tau,$$

$$y = CG - CH = (n - 1) a \sin \tau - a \sin (n - 1) \tau,$$

ostatecznie

$$x = a [(n - 1) \cos \tau + \cos (n - 1) \tau],$$

$$y = a [(n - 1) \sin \tau - \sin (n - 1) \tau].$$

Godny zaznaczenia jest przypadek szczególny, kiedy promień toczącego się koła jest 4 razy mniejszy od promienia koła stałego.

Zakładając  $n = 4$ , otrzymujemy

$$x = a(3 \cos \tau + \cos 3\tau),$$

$$y = a(3 \sin \tau - \sin 3\tau),$$

jeżeli teraz wstawimy wartości  $\sin 3\tau$  i  $\cos 3\tau$ , będziemy mieli

$$x = a \cos^3 \tau, \quad y = a \sin^3 \tau,$$

stąd zaś

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Otrzymaliśmy równanie krzywej algebraicznej (6-go rzędu), która ma kształt czworokątnej gwiazdy i nazywa się *astroidą*. Ta krzywa ma taką własność, że jej rozwinięta jest również astroidą; łuk astroidy jest wymierny, a więc dający się dzielić na równe części zapomocą cyrkuła i ekierki.

§ 116. Linja spiralna. Jeżeli równanie krzywej algebraicznej, odniesione do kartezjańskiego układu spólrzędnych, wyrazić w układzie biegunowym, wstawiając

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

to otrzymamy związek między promieniem wodzącym bieżącego punktu danej krzywej a pewną funkcją trygonometryczną anomalji tego punktu. A więc otrzymamy np. równanie

$$f(\rho, \sin \varphi) = 0, \quad \text{lub} \quad f(\rho, \cos \varphi) = 0,$$

w którym, dzięki perjodyczności funkcji trygonometrycznych, wystarczy kątowi  $\varphi$  nadawać wartości od 0 do  $2\pi$ , aby otrzymać wszystkie zmiany promienia wodzącego  $\rho$ .

Równania zaś, odniesione do układu biegunowego, dające zależność między promieniem wodzącym  $\rho$  a samą anomalją  $\varphi$  — nie jej funkcją trygonometryczną — czyli równania o postaci ogólnej

$$f(\rho, \varphi) = 0,$$

w których przy zmianie kąta  $\varphi$  od 0 do  $\infty$ , wartości  $\rho$  będą się również zmieniały nieograniczenie, przedstawiają linje krzywe przestępne. Do nich należą krzywe, zwane wogóle *linjami spiralnymi*, składające się z nieskończonej liczby zwojów, otaczających biegun.

Najprostszą ze spiralnych, noszącą nazwę *spiralnej Archimedesza*, otrzymujemy, kiedy dany punkt porusza się ruchem jednostajnym po promieniu, który również porusza się jednostajnie dokoła bieguna  $O$  (rys. 102).

Jeżeli odcinek  $OA$ , który przebiega dany punkt, podczas kiedy promień dokonał całkowitego obrotu dokoła bieguna  $O$ , nazwiemy  $c$ , to łatwo wyrozumować, że bieżące spólrzędne biegunowe  $\rho$  i  $\varphi$  punktu tej krzywej będą w następującej od siebie zależności:

$$\frac{\rho}{c} = \frac{\varphi}{2\pi},$$

gdzie kąt  $\varphi$  jest wyrażony liczbą oderwaną.

Stąd otrzymujemy równanie

$$\rho = \frac{c}{2\pi} \varphi,$$

Rys. 102.

a jeżeli oznaczymy  $\frac{c}{2\pi} = a$ , to równanie spiralnej Archimedesza możemy napisać w postaci

$$\rho = a \cdot \varphi.$$

Z tego równania widzimy, że nadając kątowi  $\varphi$  wartości

$$0, \quad 2\pi, \quad 4\pi, \dots,$$

otrzymamy na  $\rho$  wartości następujące:

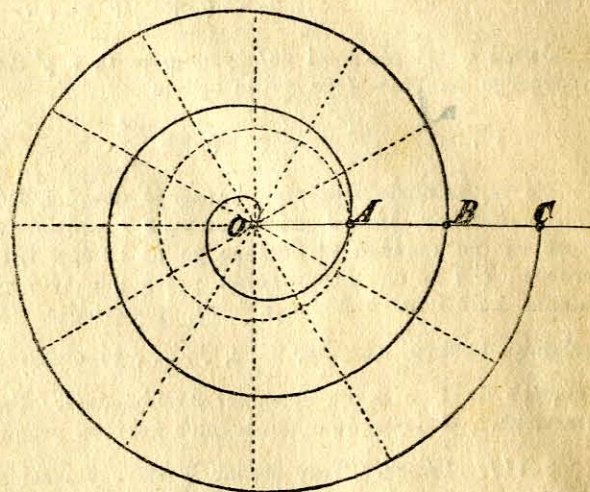
$$0, \quad 2\pi a = c, \quad 4\pi a = 2c, \dots,$$

A zatem krzywa będzie przecinała oś biegunową w punktach  $O, A, B, C, \dots$ , przytem  $OA = AB = BC = \dots = c$ , czyli odległość między zwojami krzywej równa się obwodowi koła, którego promień  $= a$ , inaczej, jest równa zasadniczej długości promienia wodzącego (odpowiadającej jego całkowitemu obrotowi dokoła bieguna).

Dalej widzimy, że pierwszy zwoj krzywej będzie całkowicie zawarty wewnątrz koła, którego promień  $= c$ , drugi zawiera się wewnątrz koła o promieniu  $= 2c$  i t. d.

Jeżeli w tym samym zwoju spiralnej poprowadzimy dwa promienie wodzące  $\rho$  i  $\rho'$ , a kąt  $(\varphi' - \varphi)$ , między nimi zawarty, podzielimy na  $n$  części równych i odpowiednie wartości promienia wodzącego nazwiemy:  $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots, \rho'$ , to będzie

$$\varphi_k = \varphi + \frac{k}{n}(\varphi' - \varphi),$$





więc

$$\rho_k = a\varphi_k = a\varphi + \frac{k}{n}a(\varphi' - \varphi),$$

czyli

$$\rho_k = \rho + \frac{k}{n}(\rho' - \rho).$$

Jeżeli w tej równości założymy  $\rho = 0$ , a  $\rho' = c$ , to długość promienia wodzącego punktów 1-go zwoju będzie

$$\rho_k = \frac{kc}{n}.$$

Na tej zasadzie możemy wyznaczyć dowolną liczbę punktów linii spiralnej: wykreśliśmy koło o promieniu  $= c$  i podzielmy jego okrąg na  $n$  części równych (na rysunku podzielono go na 12 części) i na tyleż części podzielmy promień  $OA = c$ . Jeżeli teraz przez punkty podziału poprowadzimy promienie koła i na każdym z nich, poczynając od punktu  $O$ , odmierzymy kolejno odcinki  $\frac{1}{n}c, \frac{2}{n}c, \frac{3}{n}c, \dots$ , to otrzymamy szereg punktów należących do 1-go zwoju spiralnej Archimedes'a. Punkty następnych zwojów otrzymamy, dodając do odpowiednich wartości promienia wodzącego odcinek  $c$ .

§ 117. Uwaga. Trzy słynne w starożytności zagadnienia: o podwojeniu sześciianu, o trysekcji kąta i kwadraturze koła dały początek nauce o liniach krzywych, różnych od koła, a wynalazek przecięć stożkowych zawdzięczamy uczniowi Platona *Menaechmes'owi* (340 r. przed Chr.), który, pracując nad rozwiązaniem zadania z *Delos*, doszedł do krzywych 2-go rzędu. Z późniejszych uczonych greckich *Archimedes* („De conoidibus”, 237 r. przed Chr.) i *Euklides* (300 r.) już traktują o tych krzywych, a epokowe znaczenie w tej dziedzinie mają „Przecięcia stożkowe” *Apolloniusza z Pergu* (200 r. przed Chr.), jednego z wielkich matematyków starożytności, który zebrał w całość oraz własnymi spostrzeżeniami wzbogacił dotychczasowe wiadomości. Dzięki również zadaniu z *Delos* doszedł *Diokles* (około 200 r. przed Chr.) do swojej cissoidy, a równocześnie *Nikomedes* do konchoidy. Zadanie o trysekcji kąta naprowadza *Hippias* już w 420 r. przed Chr. na pierwszą krzywą przestępną („quadratrix”), a przez kwadraturę koła dochodzi do tej samej krzywej *Dinostratos*, brat *Menaechmosa*.

W czasach późniejszych, jak wiadomo, następuje zupełna cisza w badaniach matematycznych wogóle: Rzymianie, zajęci wojnami i podbojami, zaniedbują czystą naukę, stosując, co najwyżej, jej wyniki do celów praktycznych; Indusi i Arabowie zajmują się przeważnie algebrą. Średniowiecze przechodzi bez wybitnych śladów w nauce; zaledwie tłumaczenia starożytnych uczonych greckich znajdują chętnych czytelników i autorów.

Dopiero wiek XVII stanowi epokę w nauce geometrii, a przewrót w badaniach linii krzywych datuje się od czasów *Descartes'a*, twórcy geometrii analitycznej, który przez wprowadzenie metody współrzędnych dał możność wyrażania linii geometrycznych równaniami; odąd nauka o krzywych idzie szybkim tempem naprzód. A kiedy dzięki rachunkowi różniczkowemu i całkowemu, metody badania zostały niesłychanie wzbogacone, nauka o krzywych robi olbrzymie postępy, początek zaś wieku XIX ma wielkie znaczenie w jej rozwoju, dzięki pracom *Gergonne'a* (1819 r.), *Poncelet'a* (1824 r.) oraz *Hlückera* (1826 r.), twórców tak zwanej „teorii dwoistości”.

W obecnych czasach liczba znanych krzywych wyższego rzędu jest bardzo wielka (3-go rzędu jest zgórą 200); równania niektórych krzywych algebraicznych wraz z ich nazwami podajemy tutaj:

- Krzywa: Astroida:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .
- „ Cassini'ego:  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0$ .
- „ Cissoida:  $x(x^2 + y^2) = 2ay^2$ .
- „ Duplicatrix:  $x^3 = a(x^2 + y^2)$ .
- „ Dwuróg:  $(x^2 + 2ay - a^2)^2 + y^2(x^2 - a^2) = 0$ .
- „ Hyperbola punktata:  $x(x^2 - y^2) = a(x^2 + y^2)$ .
- „ Kampyla:  $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$ .
- „ Kardioda:  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$ .
- „ Kappa:  $y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2$ .
- „ Klepsydra:  $4b^2x^2(y^2 + b^2) = a^2(y^2 - b^2)^2$ .
- „ Konchowa:  $(x + a)^2[(x - a)^2 + y^2] = a^2b^2$ .
- „ Konchoida:  $(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2$ .
- „ „ kołowa:  $(x - y)(x^2 + y^2) = a(x^2 + y^2 - xy)$ .
- „ Krzyżowa:  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ .
- „ Liść Descartes'a:  $x^3 + y^3 = 3axy$ .
- „ „ potrójny:  $(x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 - y^2)$ .
- „ „ (bez nazwy):  $(x^2 + y^2)^2 = 4ax^3$ .
- „ Lemniskata Booth'a:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2$ .
- „ „ Bernoulli'ego:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .
- „ Parabola Neil'a:  $x^3 = ay^2$ .
- „ Parabola punktata:  $y^2 = x^2(x - a)$ .
- „ „ sześcienna:  $x^3 = a^2y$ .
- „ Quadrifolium:  $(x^2 + y^2)^2 = ax(x^2 - 3y^2)$ .
- „ Rolle'go:  $xy^2 = a(x + y)^2$ .
- „ Rozeta:  $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ .
- „ Steiner'a (hipocykloida trójkątna):  $(x^2 + y^2)^2 + 8ax(x^2 - 3y^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0$ .
- „ Serpentina:  $x(x^2 + y^2) - (ax^2 + 2bxy - ay^2) = b^2(a - x)$ .
- „ Ślimak Pascal'a:  $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$ .
- „ Tridens:  $x^3 - axy + a^3 = 0$ .
- „ Trójboczna:  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ .
- „ Trójsieczna:  $(x^2 + y^2)(y^2 - a^2) + \frac{1}{4}a^2 = 0$ .
- „ Versiera:  $x^2y + a^2(y - a) = 0$ .



# ROZWIĄZANIA ZADAŃ.

## Rozdział I, § 13.

9. 13. 10. 17. 11. 5.
12.  $12\frac{1}{2}$ . 13.  $8\frac{1}{3}$ . 14. 5.
15. 17. 16.  $8\frac{1}{3}$ .
17. a) 5. b) 13. c) 17.
20. (15,  $13\frac{1}{3}$ ); (-25, 0).
21. (6, -4); (42, -52).
22. ( $6\frac{2}{3}$ , 0); (3, 48).
23. (-2, -3).
24. (-5, -4).
25. a) 35; 34; 15; b) (-1,  $-3\frac{1}{2}$ ); (5, 1); (-9,  $11\frac{1}{2}$ ); c) 252.
26. a) 39; 10; 35; b) ( $1\frac{1}{2}$ , 0); (13, 14); ( $4\frac{1}{2}$ , 4); c) 168.
27. a) 34; 35; 15; b) (-3, 0); ( $7\frac{1}{2}$ , 6); ( $7\frac{1}{2}$ , 14); c) 252.
28. a)  $12\frac{1}{2}$ ; 20;  $12\frac{1}{2}$ ; b) ( $-1\frac{3}{4}$ , 0); (0, 0); ( $12\frac{1}{2}$ , 0); c) 75.
29. a)  $12\frac{1}{2}$ ; 10;  $7\frac{1}{2}$ ; b) ( $-1\frac{3}{4}$ , 0); (-4, 3); ( $2\frac{1}{4}$ , 3); c)  $37\frac{1}{2}$ .
30. a) 25; 20; 15; b) (0,  $12\frac{1}{2}$ ); (6, 8); (-6,  $4\frac{1}{2}$ ); c) 150.
31. 1)  $27\frac{1}{2}$ ; 10;  $26\frac{1}{2}$ ; 2) (1,  $4\frac{2}{3}$ ).
32. 1)  $13\frac{3}{4}$ ;  $13\frac{1}{4}$ ; 5; 2) ( $\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{1}{3}$ ).
33. 1) 15;  $2\frac{1}{2}$ ;  $14\frac{1}{2}$ ; 2) (1, 0).
34. 1) 5;  $17\frac{1}{2}$ ;  $19\frac{1}{2}$ ; 2) (3,  $1\frac{1}{2}$ ).
35. 1)  $14\frac{7}{8}$ ;  $12\frac{1}{2}$ ;  $6\frac{3}{8}$ ; 2) ( $2\frac{1}{4}$ ,  $4\frac{2}{3}$ ).
40.  $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi')}$ .

## Rozdział III, § 35.

1.  $y = x - 3$ .
2.  $y = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + 2$ .
17.  $y = \frac{3}{4}x - 3$ .
18.  $y = 5x - 3$ .
19.  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$ .
20.  $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ .
21.  $45^\circ$ . 22.  $135^\circ$ . 23.  $60^\circ$ .

24.  $153^\circ 26' 6''$ .
25.  $151^\circ 55' 40''$ .
26.  $30^\circ 57' 50''$ .
27. 3; 5. 28. 4; 3.
29.  $3\frac{1}{3}$ ; -5. 30. -10; -4.
32.  $x - 2y + 1 = 0$ .
33.  $x - y + 10 = 0$ .
34.  $3x - 5y - 21 = 0$ .
35.  $3x - 8y = 0$ .
36.  $15x - 2y + 4 = 0$ .
37.  $x - 3y + 1 = 0$ .
38.  $x + y + 1 = 0$ .  
 $x - 17y - 5 = 0$ .  
 $4x - 5y + 1 = 0$ .
39.  $8x + 13y + 1 = 0$ ;  
 $x - 4y + 2 = 0$ ;  
 $2x + y + 1 = 0$ .
40.  $2x - y = 0$ ;  
 $x + y + 1 = 0$ ;  
 $x - 2y - 1 = 0$ .
41.  $7x + 2y + 13 = 0$ ;  
 $4x + 11y + 14 = 0$ ;  
 $10x - 7y + 12 = 0$ .
42. (-4, 8). 43. w  $\infty$ .
44. (-1, 2). 45. (1, 2).
50. 10. 51. 5.
52.  $81^\circ 52' 48''$ . 53.  $19^\circ 26' 24''$ .
54.  $99^\circ 35' 35''$ . 55.  $7^\circ 10' 50''$ .
56.  $90^\circ$ ;  $8^\circ 58' 25''$ ;  $81^\circ 1' 38''$ .
57.  $53^\circ 7' 48''$ ;  $75^\circ 45' 1''$ ;  $51^\circ 7' 12''$ .
60. a)  $7x + 4y - 59 = 0$ .  
b)  $4x - 7y + 22 = 0$ .
61. a)  $9x - 11y - 69 = 0$ ;  
b)  $11x + 9y - 17 = 0$ .
62. a)  $3x - y - 14 = 0$ ;  
b)  $x + 3y + 2 = 0$ .
63. a)  $2x - 5y - 40 = 0$ ;  
b)  $5x + 2y + 16 = 0$ .
64. a)  $7x + 11y - 76 = 0$ ;  
b)  $11x - 7y + 2 = 0$ .

65. a)  $2x - 3y - 4 = 0$ ;  
b)  $3x + 2y + 7 = 0$ .
66. a)  $(a + b)x + (a - b)y - (a^2 + 3ab - 2b^2) = 0$ ;  
b)  $(a - b)x - (a + b)y - (a^2 - 3ab + 2b^2) = 0$ .
68.  $3x + y - 7 = 0$ ;  
 $x - 3y + 1 = 0$ ;  
 $7x - y - 13 = 0$ .
69.  $4x - 3y + 114 = 0$ ;  
 $4x + 3y - 35 = 0$ .  
 $20x - 21y + 719 = 0$ .
70.  $15x - 20y - \frac{1}{2}59 = 0$ ;  
 $3x + 4y + 1 = 0$ ;  
 $4x - 3y - 12 = 0$ .
71.  $x - 4y + 5 = 0$ ;  
 $12x + 2y - 1 = 0$ ;  
 $175x - 150y + 204 = 0$ .
72. a)  $3x + y + 3 = 0$ ;  
 $x - 3y - 4 = 0$ ;  
 $7x - y + 2 = 0$ .  
b)  $8x + 6y - 11 = 0$ ;  
 $4x - 3y + 46 = 0$ ;  
 $40x - 42y + 563 = 0$ .  
c)  $24x - 32y + 11 = 0$ ;  
 $4x - 3y + 3 = 0$ ;  
 $24x + 32y + 43 = 0$ .  
d)  $100x - 400y - 319 = 0$ .  
 $150x + 25y + 234 = 0$ ;  
 $28x - 24y + 11 = 0$ .
74.  $\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y - \frac{1}{3} = 0$ .
75.  $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 5 = 0$ .
76.  $-\frac{15}{17}x - \frac{8}{17}y - 3 = 0$ .
77.  $-\frac{5}{3}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$ .
78.  $-\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$ .
79.  $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ .
80.  $-\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{5}{\sqrt{29}}y - \frac{10}{\sqrt{29}} = 0$ .
81.  $-\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$ .
82. 4. 83. 2. 84. 6.
85.  $1,4\sqrt{5}$ .
86.  $0,6\sqrt{5}$ . 87.  $0,68\sqrt{5}$ .

88. 10, 24. 89.  $\frac{3}{13}\sqrt{13}$ .
90. 3. 19 1,8.
92.  $\frac{17}{6}\sqrt{13}$ . 93.  $5\frac{2}{3}$ .
94.  $14\frac{1}{4}$ ;  $33\frac{3}{5}$ ;  $14\frac{2}{5}$ .
95.  $9\frac{1}{7}$ ;  $16\frac{4}{5}$ ; 8.
96.  $9\frac{3}{5}$ ;  $33\frac{3}{5}$ ;  $8\frac{8}{13}$ .
97.  $9\frac{3}{5}$ ;  $33\frac{3}{5}$ ;  $8\frac{8}{13}$ .
98. a)  $y - 1 = 0$ .  
b)  $x - 2 = 0$ .  
c)  $2x - 3y - 1 = 0$ .  
d)  $7x - 4y - 10 = 0$ .
99.  $4x - 3y - 25 = 0$ .  
 $4y + 3 = 0$ ;  
 $96x + 28y - 525 = 0$ .
100.  $15x - 20y - 59 = 0$   
(trójkąt prostokątny).
101.  $4x - 3y = 0$ ;  $4y - 3 = 0$ .  
 $96x + 28y - 75 = 0$ .
102.  $3x + 4y - 18 = 0$ ;  
 $3x - 4y - 33 = 0$ ;  
 $5x - 12y - 65 = 0$ .
103.  $x + 2y - 7 = 0$ .
104.  $3x + 2y - 12 = 0$ .
105.  $17\frac{1}{2}$ . 106. 27. 107.  $48\frac{1}{2}$ .
108.  $56x + 7y - 72 = 0$ ;  
 $x - 8y + 57 = 0$ .
109.  $2x + 9y - 34 = 0$ ;  
 $63x - 14y + 204 = 0$ .
110.  $2y - 3 = 0$ ;  $x - 6 = 0$ .
111.  $6x + 3y - 1 = 0$ ;  
 $4x - 8y + 21 = 0$ .
112.  $4x - 3 = 0$ ;  
 $7x + y - 11 = 0$ ;  
 $x - y + 5 = 0$ .
113.  $7x + 6y + 174 = 0$ ;  
 $x - 3 = 0$ ;  
 $9x - 2y - 92 = 0$ .
114.  $7x + 6y - 7 = 0$ ;  
 $y - 7 = 0$ ;  
 $63x - 14y + 413 = 0$ .
117. Równania wysokości:  
 $11x + 19y + 96 = 0$ ;  
 $16x + 11y + 131 = 0$ ;  
 $5x - 8y + 35 = 0$ .
118. Równania środkowych:  
 $3x + 2y - 28 = 0$ ;  
 $x - 7y + 6 = 0$ ;  
 $10x - y - 78 = 0$ .
119. Równania prostopadłych:  
 $11x + 19y - 48 = 0$ ;



$$32x + 22y - 131 = 0;$$

$$10x - 16y - 35 = 0.$$

120. Patrz zadanie 114.

# Rozdział IV, § 47.

1.  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 24 = 0$ .
2.  $x^2 + y^2 + 10x - 11 = 0$ .
3.  $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 43 = 0$ .
4.  $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ .
5. a)  $(3 \pm \sqrt{33}, 0)$ ;  
(0,  $4 \pm 2\sqrt{10}$ ).  
b)  $(-5 \pm 6, 0)$ ;  
(0,  $\pm \sqrt{11}$ ).  
c) Koło nie przecina osi.  
d)  $(\pm \sqrt{21}, 0)$ ;  
(0,  $-2 \pm 5$ ).
7. (4, 3);  $r = 3$ .
8. (-7, 5);  $r = \sqrt{26}$ .
9. (0,  $2\frac{1}{2}$ );  $r = 3\frac{1}{2}$ .
10.  $(-7\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2})$ ;  $r = \frac{3}{4}\sqrt{159}$ .
11.  $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 16$ .
12.  $x^2 + (y-17)^2 = 17^2$ .
13.  $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y = 0$ .
14.  $x^2 + y^2 - 14x - 9y - 27 = 0$ .
15.  $x^2 + y^2 = 13$ .
16.  $x^2 + y^2 = 17$ .
17. Linja prosta.
18.  $x^2 + y^2 - 15x - 19y + 74 = 0$ .
20. Punkt styczności:  $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ .
21.  $(-4, 0)$ ;  $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ .
22.  $(\pm 2, 8\sqrt{5}, \pm 1, 4\sqrt{5}) \dots$
23. Punkt styczności: (5, 5).
24.  $(x-30)^2 + (y-48)^2 = 50^2$ .
25.  $5\frac{1}{3}$ . 26. 9,6.
27. 7,68. 28. 10.
29.  $4x + y + 17 = 0$ ;  
 $x - 4y = 0$ .
30.  $3x + 4y + 25 = 0$ ;  
 $4x - 3y = 0$ .
31.  $5x - y = 26$ ;  $x + 5y = 0$ .
32.  $5x + y + 4 = 0$ ;  
 $x - 5y + 32 = 0$ .
33.  $3x + y - 8 = 0$ ;  
 $x - 3y + 4 = 0$ .
34.  $4x + 3y - 2 = 0$ ;  
 $3x - 4y + 11 = 0$ .

35. a)  $\frac{1}{4}\sqrt{17}$ ;  $\sqrt{17}$ ;  $\frac{1}{4}$ ; 1.  
b)  $6\frac{3}{4}$ ; 5;  $5\frac{1}{4}$ ; 3.  
c)  $\frac{1}{4}\sqrt{26}$ ;  $\sqrt{26}$ ;  $\frac{1}{4}$ ; 5.
36.  $3x + 4y - 15 = 0$ ;  
 $3x - 4y - 15 = 0$ ;
37.  $2x + 3y - 13 = 0$ ;  
 $3x - 2y - 13 = 0$ .
38.  $4x + y - 17 = 0$ ;  
 $x - 4y + 17 = 0$ .
39.  $11x + 2y - 50 = 0$ ;  
 $x + 2y - 10 = 0$ .
40.  $4x + 3y - 25 = 0$ ;  
 $3x - 4y + 25 = 0$ .
41.  $5x + y - 26 = 0$ ;  
 $x - 5y + 26 = 0$ .
42. a)  $3x - 4y \pm 15 = 0$ ;  
b)  $4x + 3y \pm 15 = 0$ .
43. a)  $12x + 5y \pm 39 = 0$ ;  
b)  $5x - 12y \pm 39 = 0$ .
44. a)  $3x - 2y \pm 13 = 0$ ;  
b)  $2x + 3y \pm 13 = 0$ .
45. a)  $x + 18y \pm 65 = 0$ ;  
b)  $18x - y \pm 65 = 0$ .
46. a)  $4x + 3y \pm 20 = 0$ ;  
b)  $3x - 4y \pm 20 = 0$ .
47. a)  $5x - 12y \pm 52 = 0$ ;  
b)  $12x + 5y \pm 52 = 0$ .
48. a)  $4x - 3y \pm 25 = 0$ ;  
b)  $3x + 4y \pm 25 = 0$ .
49. a)  $5x + 12y \pm 65 = 0$ ;  
b)  $12x - 5y \pm 65 = 0$ .
50.  $(x+20)^2 + (y+17)^2 = 53^2$ ;  
 $(x-70)^2 + (y-39)^2 = 53^2$ .
51.  $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 36$ .
52.  $3x^2 + 3y^2 - 26x - 16y + 61 = 0$ .
53.  $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ .
54.  $x^2 + y^2 - 15x - 19y + 74 = 0$ .
55.  $x^2 + y^2 - 10x - 9y + 29 = 0$ .
56.  $(4x-3)^2 + (4y-23)^2 = 441$ ;  
 $(4x-3)^2 + (4y+7)^2 = 9$ ;  
 $(x+8)^2 + (y+3)^2 = 49$ ;  
 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ .
57.  $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 64$ ;  
 $(3x-10)^2 + (3y+10)^2 = 16$ ;  
 $(3x+55)^2 + (3y+10)^2 = 56^2$ ;  
 $(4x-20)^2 + (4y+25)^2 = 49$ .
58.  $(x+\frac{3}{2})^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$ ;  
 $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ ;

- $(x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$ ;  
 $(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{3}$ .
59.  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$ ;  
 $(x-11)^2 + (y+45)^2 = 45^2$ ;  
 $(7x+40)^2 + (7y-36)^2 = 36^2$ ;  
 $(7x-152)^2 + (7y-60)^2 = 60^2$ .
60.  $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$ ;  
 $(x-14)^2 + (y-25)^2 = 25^2$ .
61.  $4x - 3y + 3 = 0$ ;  
 $3x - 4y + 2 = 0$ ;  
 $4x + 3y + 21 = 0$ ;  
 $3x + 4y - 14 = 0$ .
62.  $y - 1 = 0$ ;  $x + 4 = 0$ ;  
 $8x + 15y - 13 = 0$ ;  
 $15x - 8y - 52 = 0$ .
63.  $3x + 4y + 1 = 0$ ;  
 $4x + 3y + 34 = 0$ ;  
 $4x - 3y - 2 = 0$ ;  
 $3x - 4y - 7 = 0$ .
64.  $8x + 15y - 46 = 0$ ;  
 $3x + 4y + 51 = 0$ ;  
 $15x - 8y + 3 = 0$ ;  
 $4x - 3y - 2 = 0$ .
65.  $8x^2 + 8y^2 + 24x - 182 = 0$ ;  
 $9x^2 + 9y^2 - 12x - 221 = 0$ .
66.  $x^2 + y^2 - 14x - 36y + 92 = 0$ .
67.  $5x - 9 = 0$ .
68.  $4x + 3y - 20 = 0$ .
69.  $3x + 5y - 17 = 0$ .
70.  $xx_0 + yy_0 - r^2 = 0$ .
71. 0. 72. 8.
73. 10. 74. - 61.
75.  $2x + 6y + 17 = 0$ .
76.  $8x + y + 9 = 0$ .
77.  $4x + 2y + 21 = 0$ .
78.  $22x + 6y + 7 = 0$ .
79.  $(12\frac{1}{2}, -7)$ .
80.  $(-3, -4\frac{1}{2})$ .
81.  $3x + 4y - 144 = 0$ .
82.  $y + 24 = 0$ .
83.  $3x + 5y - 7 = 0$ .
84.  $4x + 3y - 20 = 0$ .
85.  $2x - 5 = 0$ .
86.  $5x - 2y - 15 = 0$ .
87.  $(14\frac{2}{3}, 10\frac{5}{3})$ .
88.  $(33\frac{1}{3}, 8\frac{1}{3})$ .
89.  $(-21, 15)$ .
90.  $(-\frac{Ar^2}{C}, -\frac{Br^2}{C})$ .

91. Koło:  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}k^2 - a^2$ ,  
gdzie  $2a$  = odległości punktów  
danych, a  $k$  jest liczbą stałą.

92. Koło:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{m+n}{m-n} ax + a^2 = 0,$$

gdzie  $2a$  = odległości punktów  
danych, a  $m$  i  $n$  są liczbami stałymi.

# Rozdział V, § 66.

3. 5; 3; 4;  $\frac{4}{5}$ .
4. 6; 4;  $2\sqrt{5}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ .
5. 3; 2;  $\sqrt{5}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ .
6.  $\sqrt{15}$ ;  $\sqrt{10}$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .
7. 5; 4; 3; 0,6.
8.  $2\sqrt{10}$ ;  $2\sqrt{6}$ ; 4;  $\frac{1}{3}\sqrt{10}$ .
11.  $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .
12.  $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ .
13. (1, 1); 3; 5.
14.  $(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{89}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{89}$ .
15. (5, -3);  $\frac{5}{2}\sqrt{22}$ ;  $\sqrt{22}$ .
16. 8,8. 17.  $4\frac{1}{3}\sqrt{10}$ .
18.  $(\pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$ .
19.  $(\pm \frac{a}{c}\sqrt{r^2-b^2}, \pm \frac{b}{c}\sqrt{r^2-a^2})$ .
20.  $x^2 + 2y^2 = 18$ .
21. 7,4; 2,6.
22.  $3 \mp 0,6\sqrt{5}$ .
23. 6,8; 3,2.
24.  $6 \pm 1,2\sqrt{5}$ .
25.  $x \mp 10 = 0$ .
26.  $x \mp 6 = 0$ .
27.  $x \mp 9 = 0$ .
28.  $4x \mp 25 = 0$ .
29.  $9x - 40y + 150 = 0$ ;  
 $40x + 9y + 218\frac{2}{3} = 0$ ;  
 $10\frac{1}{3}$ ;  $10\frac{2}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$ .
30.  $20x + 21y + 175 = 0$ ;  
 $105x - 100y + 288 = 0$ ;  
 $3\frac{3}{5}$ ;  $2\frac{6}{5}$ ;  $4\frac{7}{5}$ ;  $4\frac{1}{5}$ .
31.  $3x - 4y = 18$ ;  
 $12x + 9y = 22$ ;  
 $3\frac{1}{3}$ ;  $2\frac{1}{3}$ ;  $2\frac{2}{3}$ ;  $1\frac{1}{3}$ .



32.  $4x - 3y + 30 = 0$ ;  
 $3x + 4y + 10 = 0$ ;  
 $2\frac{1}{2}$ ;  $3\frac{1}{3}$ ;  $1\frac{1}{2}$ ;  $2\frac{2}{3}$ .
33.  $3x - 4y = 24$ ;  
 $4x + 3y = 7$ ;  
 $5$ ;  $3\frac{3}{4}$ ;  $4$ ;  $2\frac{1}{4}$ .
34.  $12x + 5y = 68$ ;  
 $50x - 120y = 81$ ;  $1, 3$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $7\frac{1}{32}$ .
35.  $x + 3y \pm 36 = 0$ .
36.  $x + y \mp 5 = 0$ .
37.  $4x - 3y \pm 30 = 0$ .
38.  $9x - 20y \pm 25 = 0$ .
39.  $2x + y \pm 9 = 0$ .
40.  $3x + y \pm 19 = 0$ .
41.  $x - y \pm 8 = 0$ .
42.  $x + 3y \pm 13 = 0$ .
43.  $x + 2y - 8 = 0$ ;  
 $13x - 6y + 56 = 0$ ;  
 $88^{\circ}12'36''$ .
44.  $x - 3y - 15 = 0$ ;  
 $x + 3y + 15 = 0$ ;  
 $143^{\circ}07'49''$ .
45.  $y - 2 = 0$ ;  $x + 2y = 5$ ;  
 $153^{\circ}26'5''$ .
46.  $x + 3y - 16 = 0$ ;  
 $x - 13y + 64 = 0$ ;  
 $157^{\circ}09'58''$ .
47.  $y - 3 = 0$ ;  $4x + 7y = 29$ ;  
 $150^{\circ}5'19''$ .
48.  $x - 4 = 0$ ;  $11x + 8y = 52$ ;  
 $143^{\circ}058'20''$ .
49. Koło:  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ .
50.  $n = \pm \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{c^2m}$ .
51.  $n = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2m^2}}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}}$ .
52.  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .
53.  $4x^2 + 9y^2 = 144$ .
54.  $4x^2 + 9y^2 = 144$ .
55.  $3x^2 + 5y^2 = 120$ .
56.  $\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{a^2} +$   
 $\frac{(y - y_1)(y - y_2)}{b^2} =$   
 $= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ .
57.  $3x + 10y = 24$ .
58.  $3x + 25y = 120$ .
59.  $3x + y - 12 = 0$ .
60.  $2x + 9y - 18 = 0$ .

62.  $\frac{ae^2x_1y_1}{b\sqrt{rr'}}$ . 63.  $\frac{c^2}{b}$ .
64.  $9x^2 + 16y^2 - 72x = 0$ ;  
 $3x^2 + 2y^2 - 18x = 0$ .
65.  $9x^2 + 25y^2 - 90x = 0$ ;  
 $16x^2 + 25y^2 - 160x = 0$ .
66.  $3x - 5y = 0$ ;  $x + y = 0$ .
67.  $4x + 3y = 0$ ;  $x - 3y = 0$ .
68.  $9x - 20y = 0$ ;  $4x + 5y = 0$ .
69.  $3x - 5y = 0$ ;  $16x + 15y = 0$ .
70.  $x + 14y \pm 60 = 0$ ;  
 $7x - 2y \pm 60 = 0$ .
71.  $2x + 3y \pm 12 = 0$ ;  
 $2x - 3y \pm 12 = 0$ .
72.  $45x - 32y \pm 204 = 0$ ;  
 $2x + 5y \pm 17 = 0$ .
73.  $5x + 12y \pm 6\sqrt{105} = 0$ ;  
 $4x - 3y \pm 6\sqrt{21} = 0$ .
76.  $b^2xx_1 + a^2yy_1 = 0$ .
77.  $4ab$ .
80. Patrz zadania 57 — 60.
81.  $\left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)$ .

### Rozdział VI, § 83.

2. 3; 4; 5;  $\frac{5}{3}$ .
3. 3; 5;  $\sqrt{34}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{34}$ .
4.  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{14}$ ;  $\sqrt{21}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .
5.  $2\sqrt{3}$ ;  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{5}$ ;  $\frac{1}{3}\sqrt{15}$ .
9. a)  $16x^2 - 9y^2 = 144$ ;  
b)  $16y^2 - 9x^2 = 144$ .
10. a)  $\frac{x^2}{24^2} - \frac{y^2}{7^2} = 1$ ;  
b)  $\frac{y^2}{24^2} - \frac{x^2}{7^2} = 1$ .
11. a)  $\frac{x^2}{15^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$ ;  
b)  $\frac{y^2}{15^2} - \frac{x^2}{8^2} = 1$ .
12.  $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ .
13. (1, 4); 5; 3.
14. (-2, 3);  $\sqrt{7}$ ;  $\sqrt{5}$ .
15. (a, 0); 4a;  $\frac{8a^2}{b}$ .
17. 4. 18.  $19\frac{2}{14}$ .

19.  $9\frac{1}{5}$ . 20.  $8\frac{1}{3} \mp 4$ .
21.  $3\sqrt{3} \mp \sqrt{7}$ .
22.  $\frac{5}{3}\sqrt{34} \mp 3$ .
23.  $2\sqrt{15} \mp 2\sqrt{3}$ .
24.  $x \mp 2\sqrt{3} = 0$ .
25.  $x \mp 1,2\sqrt{5} = 0$ .
26.  $x \mp 1,8 = 0$ .
27.  $x \mp 2,5\sqrt{2} = 0$ .
28.  $15x + 10y - 18 = 0$ ;  
 $6x - 9y - 56 = 0$ ;  
 $4\frac{8}{15}$ ;  $2\sqrt{13}$ ;  $2\frac{2}{15}$ ; 6.
29.  $15x + 8y + 54 = 0$ ;  
 $8x - 15y - 260 = 0$ ;  
 $13\frac{3}{5}$ ;  $25\frac{1}{5}$ ;  $6\frac{3}{5}$ ;  $22\frac{1}{5}$ .
30.  $3x - 4y + 4 = 0$ ;  
 $4x + 3y + 72 = 0$ ;  
20; 10;  $10\frac{2}{3}$ ; 6.
31.  $4x - 3y + 6 = 0$ ;  
 $3x + 4y + 42 = 0$ ;  
 $7\frac{1}{2}$ ; 10;  $4\frac{1}{2}$ ; 8.
32.  $5x - 4y \pm 36 = 0$ .
33.  $25x + 12y \pm 45 = 0$ .
34.  $5x + 4y \pm 15 = 0$ .
35.  $2x - y \pm 15 = 0$ .
36.  $4x + 5y \pm 7 = 0$ .
37.  $3x + y \pm 7 = 0$ .
38.  $3x - 2y \pm 6 = 0$ .
39.  $8x + y \pm 25 = 0$ .
40.  $3x + y = 7$ ;  
 $5x - 3y + 7 = 0$ ;  
 $49^{\circ}23'56''$ .
41.  $x - y - 2 = 0$ ;  
 $3x + y - 10 = 0$ ;  
 $63^{\circ}26'6''$ .
42.  $3x - 4y + 9 = 0$ ;  
 $x + y - 4 = 0$ ;  
 $98^{\circ}07'48''$ .
43.  $15x + 4y - 16 = 0$ ;  
 $15x - 4y + 16 = 0$ ;  
 $29^{\circ}51'45''$ .
44. Koło:  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ .
45.  $3x \pm 4y = 0$ .
46.  $3x \pm 5y = 0$ .
47.  $x\sqrt{6} \pm 2y = 0$ .
48.  $n = \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ .
49.  $x^2 - 2y^2 = 8$ .
50.  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .
51.  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .
52.  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .
53.  $9x^2 - 25y^2 = 225$ .
54.  $x - 5y - 25 = 0$ .
55.  $10x - 9y - 24 = 0$ .
56.  $3x - y - 15 = 0$ .
57.  $4x - y - 14 = 0$ .
59.  $\frac{ae^2x_1y_1}{b\sqrt{rr'}}$ . 60.  $-b^2$ .
64. 1)  $16x^2 + 96x - 9y^2 = 0$ .  
2)  $144x^2 + 1440x - 25y^2 = 0$ .
65. 1)  $9x^2 + 144x - 16y^2 = 0$ ;  
2)  $4x^2 + 8x - y^2 = 0$ .
66.  $12x - 25y = 0$ ;  
 $3x - 4y = 0$ .
67.  $x - 4y = 0$ ;  $2x - y = 0$ .
68.  $6x - 5y = 0$ ;  
 $5x - 3y = 0$ .
69.  $2x - 3y = 0$ ;  $x - y = 0$ . 73.  $90^{\circ}$ .
75. Patrz zadania 54 — 57.
76.  $\left(-\frac{Aa^2}{C}, \frac{Bb^2}{C}\right)$ .

### Rozdział VII, § 98.

8.  $3x + 8x + 24 = 0$ ;  
 $8x - 3y - 76 = 0$ ;
9.  $5x - 2y + 2 = 0$ ;  
 $10x + 25y - 54 = 0$ .
10.  $4x - 2y + 3 = 0$ ;  
 $4x + 8y - 27 = 0$ .
11.  $5x + 4y + 4 = 0$ ;  
 $20x - 25y - 66 = 0$ .
14.  $6\frac{3}{4}$ ; 5;  $5\frac{1}{4}$ ; 3.
15.  $3\frac{3}{4}$ ; 5;  $2\frac{1}{4}$ ; 4.
16. 5;  $3\frac{3}{4}$ ; 4;  $2\frac{1}{4}$ .
17.  $13\frac{1}{3}$ ; 10;  $10\frac{2}{3}$ ; 6.
18.  $4x + 2y + 1 = 0$ .
19.  $3x + 2y + 4 = 0$ .
20.  $2x - y + 1 = 0$ .
21.  $x - 4y + 8 = 0$ .
22.  $x + y + 1 = 0$ .
23.  $8x + 4y + 1 = 0$ .
24.  $16x + 4y + 1 = 0$ .
25.  $x - y + 3 = 0$ .
26.  $x - 2y + 4 = 0$ ;  
 $x - 3y + 9 = 0$ ;  
 $171^{\circ}52'18''$ .
27.  $x - 4y + 24 = 0$ ;  
 $3x + 4y + 8 = 0$ ;  
 $50^{\circ}54'24''$ .



28.  $x - 2y + 10 = 0$ ;  
 $5x + 2y + 2 = 0$ .  
 29.  $3x - 2y + 4 = 0$ ;  
 $x + y + 3 = 0$ .  
 30. Kierownica.  
 31.  $71^{\circ}33'54''$ . 32.  $98^{\circ}7'48''$ .  
 33.  $28^{\circ}4'20''$ . 34.  $133^{\circ}58'15''$ .  
 35.  $4^{\circ}45'10''$ . 36.  $90^{\circ}$ .  
 37. a)  $y^2 = 4x$ ; b)  $y^2 = \frac{1}{2}x$ .  
 38. a)  $y^2 = x$ ; b)  $y^2 = 3x$ .  
 39.  $y + 3 = 0$ ;  $8x - 6y + 9 = 0$ .  
 40.  $4y - 3 = 0$ ;  $64x - 24y + 9 = 0$ .  
 41.  $6y - 5 = 0$ ;  $144x - 60y + 25 = 0$ .  
 42.  $15y + 32 = 0$ ;  
 $60x + 480y + 512 = 0$ .  
 43.  $71^{\circ}33'54''$ ;  $88,35$ .  
 45.  $2x - 5y + 12 = 0$ ;  
 $3x - 4y - 24 = 0$ ;  
 $5x - 4y - 10 = 0$ ;  
 $6x - y - 12 = 0$ .  
 46.  $\pm 3x$   $y \pm 40 = 0$ .  
 47.  $(x - a)^2 + y^2 = p(2a - p)$ .  
 48.  $(0, 0)$ ;  $(2p, 2p)$ .  
 50.  $7x - 8y + 49 = 0$ .  
 51.  $5x - 14y + 15 = 0$ .  
 52.  $\left(\frac{C}{A}, -\frac{Bp}{A}\right)$ .

# Rozdział VIII, § 107.

1.  $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 40 = 0$ .  
 2.  $x^2 + 24xy - 6y^2 - 120 = 0$ .  
 3.  $x^2 - 6xy + y^2 + 5\frac{1}{2} = 0$ .  
 4.  $x^2 - 10xy + 26y^2 - 4\frac{9}{4} = 0$ .  
 5.  $2x^2 - 2xy + y^2 = 0$ .  
 6. Krzywa środkowa nie posiada.  
 7.  $y^2 - x^2 = 2$ . 8.  $2x^2 + 3y^2 = 12$ .  
 9.  $x^2 + 11y^2 = 8$ .  
 10.  $3x^2 - 4y^2 = 12$ .  
 11.  $x^2 + 2y^2 = 4$ . 12.  $3y^2 - 7x^2 = 2$ .  
 13. Elipsa:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ .  
 14. Elipsa:  $9x^2 + 4y^2 = 144$ .  
 15. Elipsa:  $9x^2 + 4y^2 = 144$ .  
 16. Elipsa:  $x^2 + 2y^2 = 18$ .

17. Elipsa:  $3x^2 + 5y^2 = 120$ .  
 18. Hyperbola:  $2x^2 - 3y^2 = 24$ .  
 19. Hyperbola:  $2y^2 - 3x^2 = 24$ .  
 20. Hyperbola:  $y^2 - 2x^2 = 14$ .  
 21. Hyperbola:  $x^2 - 2y^2 = 14$ .  
 22. Parabola:  $y^2 = -4x$ .  
 23. Parabola:  $y^2 = 4x$ .  
 24. Parabola:  $y^2 = -2x$ .  
 25. Parabola:  $y^2 = 2x$ .  
 26. Parabola:  $y^2 = -2x$ .  
 27. Punkt. 28. Obraz urojony.  
 29. Dwie przecinające się proste.  
 30. Dwie przecinające się proste.  
 31. Dwie równoległe proste.  
 32. Dwie równoległe proste.  
 33.  $7x^2 - 17xy + 8y^2 - 7x -$   
 $- 24y = 0$ .  
 34.  $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x -$   
 $- 4y = 0$ .  
 35.  $5x - 9y + 4 = 0$ .  
 36.  $5x + 13y - 41 = 0$ .  
 37.  $9x - 4y - 5 = 0$ .  
 38.  $10x + 9y - 12\frac{7}{2} = 0$ .  
 39.  $9x - 5y - 4 = 0$ .  
 $31x + 25y - 132 = 0$ .  
 40.  $y - 5 = 0$ ;  
 $8x - y - 27 = 0$ .  
 41.  $2x + y = 0$ ;  
 $3x - y - 5 = 0$ .  
 42.  $y = 8x - 10 \pm 6\sqrt{6}$ .  
 43.  $y = 3x - 17\frac{3}{8}$  (tylko jedna  
 styczna).  
 44.  $y^2 = \frac{4}{7}x - \frac{2}{4}\frac{4}{9}x^2$ .  
 45.  $y^2 = \frac{2}{13}x - \frac{1}{16}\frac{9}{9}x^2$ .  
 46.  $y^2 = \frac{6}{25}x - \frac{3}{36}\frac{3}{2}x^2$ .  
 47.  $y^2 = \frac{3}{13}x - \frac{1}{16}\frac{3}{3}x^2$ .  
 48.  $y^2 = \frac{1}{19}x + \frac{8}{36}\frac{0}{1}x^2$ .  
 49.  $y^2 = \frac{4}{5}x + \frac{2}{2}\frac{4}{5}x^2$ .  
 50.  $y^2 = \frac{2}{13}x + \frac{1}{16}\frac{9}{9}x^2$ .  
 51.  $y^2 = \frac{2}{4}x + \frac{1}{4}\frac{2}{9}x^2$ .  
 52.  $y^2 = 5x$ .  
 53.  $y^2 = 6x$ .  
 54.  $y^2 = 6x$ .  
 55.  $y^2 = 9x$ .