

ANTONI ŁOMNICKI  
PROFESOR B. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM II

## RACHUNEK CAŁKOWY

WYDANIE DRUGIE



WYDAWNICTWO „UNIVERSUM” KATOWICE

Przy rozwiązywaniu takich zagadnień należy szukać odpowiedzi na trzy następujące pytania:

1) czy do każdej danej funkcji  $f(x)$  należy jakaś funkcja pierwotna, czy też  $f(x)$  musi spełniać jakieś specjalne warunki?

2) czy do danej funkcji może istnieć tylko jedna funkcja pierwotna, czy też może być ich więcej?

3) w jaki sposób wyznacza się funkcję pierwotną do danej funkcji  $f(x)$ ?

Odpowiedź na pierwsze pytanie wymaga dość subtelnych rozważań. W XVIII rozdziale zajmiemy się tą kwestją nieco dokładniej i okażemy, że w każdym razie do każdej funkcji ciągłej istnieje funkcja pierwotna (zob. § 215), a także wiele (jakkolwiek nie wszystkie) funkcji nieciągłych posiada funkcje pierwotne.

Bez trudności natomiast można rozstrzygnąć następnie drugie pytanie. I tak łatwo spostrzec, że, jeżeli istnieje jedna funkcja pierwotna  $F(x)$  do danej funkcji  $f(x)$ , to istnieje ich nieskończenie wiele. Tak np. dla funkcji  $f(x) = x^2$  funkcją pierwotną jest nie tylko  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ , lecz także np.  $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ ,  $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$ ,  $F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}$  i t. d., ogólnie:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

przyczem  $C$  oznacza dowolną liczbę stałą. Istotnie pochodną każdej takiej funkcji jest  $f(x) = x^2$ . Ogólnie, jeżeli  $F(x)$  jest funkcją pierwotną danej funkcji  $f(x)$ , to istnieje cała jednoparametrowa gromada funkcji pierwotnych, a mianowicie:  $F(x) + C$ . W geometrycznej interpretacji obrazem jednej funkcji pierwotnej jest jakaś linja, a obrazy wszystkich innych funkcji pierwotnych powstają przez równoległe przesunięcie tej linii w kierunku osi  $y$ -ów. Ta gromada zawiera już wszystkie funkcje pierwotne; wynika to z twierdzenia 2 z § 101 (tom I, str. 318), a mianowicie: *jeżeli dwie funkcje mają pochodne równe dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej, to te funkcje mogą się różnić co najwyżej o stałą liczbę.*

Gromadę funkcji pierwotnych do danej funkcji  $f(x)$  nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji  $f(x)$  i oznaczamy ją symbolem:

$$\int f(x) dx$$

czytaj: „całka z  $f(x) dx$ ”. A więc:

$$(1) \quad \boxed{\int f(x) dx = F(x) + C}$$

Pochodzenie znaków  $\int$  i  $dx$ , występujących w tym symbolu, wyjaśnimy później (por. § 212). Funkcję  $f(x)$  (pochodną) nazywamy tu **funkcją podcałkową** a liczbę  $C$  **stałą całkowania**.

Pochodną prawej strony jest funkcja podcałkowa. A więc wzór (1) jest równoważny z wzorem:

$$(2) \quad \boxed{\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)}$$

Obliczanie całki nieoznaczonej z danej funkcji  $f(x)$  nazywamy *całkowaniem* tej funkcji. Metody obliczania całek i badanie ich własności stanowią przedmiot rachunku całkowego.

Celem przekonania się, czy całkowanie zostało poprawnie wykonane, należy, w myśl wzoru (2), obliczyć pochodną znalezionej gromady funkcji  $F(x) + C$  lub, co na jedno wyjdzie, pochodną funkcji  $F(x)$ . Całkowanie można także pojmować jako rozwiązywanie następującego prostego równania różniczkowego (por. tom I, § 87, str. 278):

$$(3) \quad y' = f(x)$$

Stąd:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C$$

Zatem najogólniejszym rozwiązaniem równania różniczkowego (3) jest cała gromada funkcji, a mianowicie całka nieoznaczona z funkcji  $f(x)$ . Tę całą gromadę funkcji nazywamy *ogólnym rozwiązaniem* danego równania różniczkowego lub *ogólną całką* tego równania. Każdą zaś poszczególną funkcję pierwotną, należącą do tej gromady, nazywamy rozwiązaniem szczegółowym równania różniczkowego (3) lub jego *całką szczegółową*.

Przystępujemy obecnie do trzeciej kwestji, wiążącej się z naszym zagadnieniem, a mianowicie do omówienia sposobów wyznaczania funkcji pierwotnych czyli do metod całkowania. Otóż jasnym jest, że każdy, poznany w rachunku różniczkowym wzór na obliczanie pochodnych, można zarazem pojmować jako wzór na obliczanie całki z jakiejś funkcji; jeżeli bowiem

$$F'(x) = f(x), \text{ to można to napisać także w postaci } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

W ten sposób otrzymamy z rozmaitych specjalnych i ogólnych wzorów rachunku różniczkowego rozmaite specjalne i ogólne wzory rachunku całkowego. Jednakże zaznaczamy już teraz, że obliczanie całek jest znacznie trudniejsze od obliczania pochodnych. Do każdej bowiem funkcji *elementarnej* (w tomie I na str. 96 podano, które funkcje uważamy za elementarne) potrafimy z łatwością znaleźć pochodną i ta pochodna jest znowu jakąś funkcją elementarną. Natomiast okaże się, że całki wielu funkcji elementarnych są bardzo skomplikowanymi, nieelementarnymi funkcjami przestępnymi, których nie można oczywiście wyznaczyć drogą elementarną. Jakkolwiek więc proces całkowania jest stosowalny do szerszej klasy funkcji, aniżeli proces różniczkowania (albowiem *istnieją* całki

dla wszystkich funkcji ciągłych a nawet dla wielu funkcji nieciągłych, podczas gdy pochodne istnieją tylko dla funkcji ciągłych i to nie dla wszystkich), to jednak *efektywne obliczenie* całki jest zwykle o wiele trudniejsze, aniżeli obliczenie pochodnej.

Zobaczymy w dalszym ciągu, że bardzo wiele zagadnień z geometrii i z fizyki sprowadza się do obliczania funkcji pierwotnych. Tutaj już jednak zwrócimy uwagę na jedno odrazu się nasuwające zagadnienie z dynamiki. Widzieliśmy mianowicie, że mając podaną w ruchu prostoliniowym drogę jako funkcję czasu:  $s = f(t)$ , potrafimy wyznaczyć prędkość:  $v(t) = f'(t)$  i przyspieszenie  $g(t) = v'(t)$ . Stąd wynika, że mając podane przyspieszenie jako funkcję czasu, obliczamy prędkość zapomocą całki:  $v(t) = \int g(t) dt$ , mając zaś podaną prędkość jako funkcję czasu, obliczamy drogę zapomocą całki  $s = \int v(t) dt$ .

Tak np. wiedząc, że przyspieszenie jest stałe:  $g = a$  w ciągu całego badanego czasu  $t$ , znajdujemy, że prędkość  $v = \int a dt = at + C_1$ . Stąd zaś znajdujemy wzór na drogę:  $s = \int (at + C_1) dt = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2$ . Stałe  $C_1$  i  $C_2$  można czasem wyznaczyć z początkowych warunków zadania, np. z żądania, żeby w początkowej chwili, t. j. dla  $t = 0$ , było  $s = 0$  i  $v = 0$ ; wtedy wyniknie z tych wzorów  $C_1 = 0$  i  $C_2 = 0$  i pozostanie  $s = \frac{1}{2} at^2$ ,  $v = at$ . Inne wartości stałych otrzymamy, żądając, aby w chwili  $t = 0$  prędkość miała wartość  $v_0$  różną od zera a droga wartość  $s_0$ . Pozostawia się czytelnikowi obliczenie stałych  $C_1$  i  $C_2$  przy pomocy tych warunków początkowych.

## § 204. Odwrócenia specjalnych wzorów rachunku różniczkowego.

a) Jeżeli funkcja podcałkowa jest stale zerem, to całka nieoznaczona ma stałą wartość  $C$ , albowiem z wzoru:

$$\frac{d(C)}{dx} = 0$$

wynika:

$$\int 0 dx = C$$

Jeśli więc obrazem funkcji podcałkowej jest oś  $x$ -ów, o równaniu  $y = 0$ , to obrazem gromady funkcji pierwotnych jest gromada wszystkich prostych równoległych do tej osi (wraz z nią samą).

b) Poznaliśmy w rachunku różniczkowym wzór na pochodną potęgi, a mianowicie:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

lub w formie różniczki:

$$d(x^n) = nx^{n-1} dx$$

Wobec tego:

$$\int nx^{n-1} dx = x^n + C$$

Tutaj funkcja podcałkowa  $nx^{n-1}$  jest dość skomplikowana.

Prostszą funkcję podcałkową otrzymamy, tworząc pochodną funkcji:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

a mianowicie:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$$

czyli.

$$d \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n dx$$

Stąd otrzymujemy bardzo ważny wzór.

$$(4) \quad \boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Wzór ten jest prawdziwy dla wszystkich wykładników  $n$  z wyjątkiem  $n = -1$ . Dla  $n = -1$  ma funkcja podcałkowa postać  $\frac{1}{x}$ . Otóż wiadomo z rachunku różniczkowego, że funkcja  $\frac{1}{x}$  jest pochodną funkcji  $\log x$ . Tak więc z wzoru:

$$d(\log x) = \frac{1}{x} dx$$

wynika, że:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$$

Tego wzoru można używać tylko dla dodatnich  $x$ . Dla ujemnych bowiem  $x$  nie jest określona funkcja  $\log x$ ; natomiast wtedy funkcja  $\log(-x)$  ma określone wartości.

Ponieważ:

$$d \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) dx = \frac{1}{x} dx$$

przeto dla  $x < 0$  jest:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C$$

Obydwa te wzory można ująć w jeden wzór następujący:

$$(5) \quad \boxed{\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C}$$

Istotnie bowiem dla  $x > 0$  otrzymujemy  $\log |x| = \log x$ , a dla  $x < 0$   $\log |x| = \log (-x)$ .

Przy pomocy wzorów (4) i (5) potrafimy więc scałkować każdą potęgę zmiennej niezależnej.

Tak np.

$$\int 1 \cdot dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$$

czyli

$$(4a) \quad \boxed{\int dx = x + C}$$

Podobnie:

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C, \quad \int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C,$$

$$\int x^{v^2} dx = \frac{x^{1+v^2}}{1+v^2} + C$$

c) Z wzoru:

$$d(e^x) = e^x dx$$

otrzymujemy:

$$(6) \quad \boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

Dla ogólnej funkcji wykładniczej dogodnie jest wyjść z wzoru:

$$d\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = \frac{a^x \log a}{\log a} dx = a^x dx$$

Stąd wynika

$$(7) \quad \boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C = a^x \log_e a + C}$$

d) Pochodne (lub różniczki) funkcji trygonometrycznych prowadzą do następujących wzorów:

(8)	$d(\sin x) = \cos x dx$ a więc	$\int \cos x dx = \sin x + C$
(9)	$d(-\cos x) = \sin x dx$ " "	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
(10)	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$ " "	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
(11)	$d(-\operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{\sin^2 x}$ " "	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

e) Pochodne (lub różniczki) funkcji cyklometrycznych prowadzą do następujących wzorów:

$$\left. \begin{aligned} d(\arcsin x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ d(-\arccos x) &= \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \right\} \text{a więc}$$

$$(12) \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C}$$

Obydwa wyniki nie są zasadniczo różne, ponieważ  $\arcsin x$  różni się od funkcji  $-\arccos x$  tylko o stały dodatek, jak to wynika z wzoru:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$$

(por. tom I, str. 69) A więc  $C = C + \frac{1}{2}\pi$ .

Podobnie dwa wzory:

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{i} \quad d(-\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$$

prowadzą do wzoru:

$$(13) \quad \boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C}$$

Obydwa wyniki są tylko pozornie różne; kładąc bowiem  $C = \frac{1}{2}\pi + C$ , widzimy, że obydwa wyniki są identyczne, jak to wynika z wzoru:  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\pi$  (por. tom I, str. 70).

Zwróćmy uwagę na ciekawy fakt, że całki niektórych prostych funkcji są dość skomplikowanymi funkcjami.

Tak np. całką wymiernej funkcji  $\frac{1}{x}$  jest przestępna funkcja  $\log |x|$ ;

całką dość prostej wymiernej funkcji  $\frac{1}{1+x^2}$  jest przestępna funkcja  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ;

całką algebraicznej niewymiernej funkcji  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  jest przestępna funkcja  $\arcsin x$ .

Wszystkie te wzory należy dokładnie zapamiętać, są one bowiem równie ważne i równie często stosowane, jak odpowiednie wzory rachunku różniczkowego.

Nie znajdujemy wśród tych wzorów całek tak ważnych elementarnych funkcji, jak:  $\operatorname{tg} x$ ,  $\log x$ ,  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ ,  $\frac{1}{1-x^2}$ ,  $\sqrt{1+x^2}$  i t. p.

Istotnie, trudno jest odrazu odgadnąć, z jakiej funkcji należy utworzyć pochodną, aby otrzymać np.  $\log x$  lub  $\arctg x$ . Rozszerzymy znacznie zakres funkcji, które dadzą się w elementarny sposób scałkować, opierając się na odwróceniach niektórych ogólnych wzorów rachunku różniczkowego.

### § 205. Odwrócenia niektórych ogólnych wzorów rachunku różniczkowego.

a) **Wyłączanie stałego czynnika przed znak całki.**

Niechaj  $F(x)$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$ , to  $F'(x) = f(x)$  czyli:

$$(I) \quad \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Zastosujmy do iloczynu  $a \cdot F(x)$ , gdzie  $a$  oznacza dowolny stały, różny od zera czynnik, znany wzór rachunku różniczkowego (por. tom I, § 75 str. 244):

$$d[a \cdot F(x)] = a \cdot d(F(x)) = a f(x) dx.$$

Stąd wynika, że:

$$\int a f(x) dx = a F(x) + C_1$$

Porównajmy ten wzór z wzorem, otrzymanym z (I) przez pomnożenie obu stron przez  $a$ , t. j. z wzorem:

$$a \cdot \int f(x) dx = a \cdot F(x) + a \cdot C$$

Widzimy, że prawe strony obydwu wzorów będą sobie równe dla każdej wartości  $C$ , jeżeli tylko obierzemy  $C_1 = aC$ . Prawe strony są także równe dla każdej dowolnie obranej wartości  $C_1$ , jeżeli tylko obierzemy  $C = C_1/a$ , co się da zawsze uczynić, ponieważ założyliśmy, że  $a$  jest różne od zera. Można więc zawsze dobrać stałe całkowania tak, że zachodzi równość:

$$(14) \quad \boxed{\int a f(x) dx = a \int f(x) dx}$$

Wzór ten wypowiadamy w następujący sposób:

*stały czynnik różny od zera można wyłączyć przed znak całki.*

*Przykłady:*

$$1) \quad \int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = \frac{5}{4} x^4 + C$$

$$2) \quad \int 4 \cos x dx = 4 \int \cos x dx = 4 \sin x + C$$



$$3) \int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{dx}{x} = 2 \log |x| + C = \log x^2 + C$$

4) Naczynie w formie walca kołowego wiruje około swej osi z stałą prędkością kątową, wykonując  $n$  obrotów na sekundę. Jaką postać ma swobodna powierzchnia cieczy, znajdującej się w tym naczyniu? Na fig. 1 przedstawiono przekrój tego naczynia za pomocą płaszczyzny pionowej. Oś obrotu obieramy za oś  $y$ -ów a początek układu w  $O$ . Na każdy punkt  $A$  cieczy, mający masę  $m$ , działają dwie siły: siła odśrodkowa  $P_1 = 4\pi^2 n^2 m x$ , prostopadłe do osi obrotu, gdzie  $x$  oznacza odległość punktu  $A$  od osi obrotu i siła ciężkości  $P_2 = mg$ , zwrócona pionowo w dół. Wiadomo, że swobodna powierzchnia cieczy musi być w każdym punkcie prostopadła do wypadkowej z wszystkich sił, działających na ten punkt.

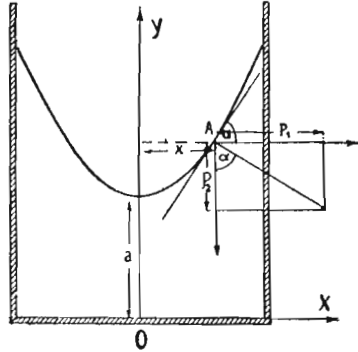


Fig. 1.

Oznaczmy kąt, zawarty między styczną do swobodnej powierzchni a osią odciętych, literą  $\alpha$ , to  $\operatorname{tg} \alpha = P_1 : P_2$

czyli:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2 n^2 m x}{mg} = \frac{4\pi^2 n^2}{g} \cdot x$$

Stąd:

$$y = \int \frac{4\pi^2 n^2}{g} x dx = \frac{4\pi^2 n^2 x^2}{g} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{2\pi^2 n^2}{g} x^2 + C$$

Jest to parabola. Najniższy punkt tej paraboli otrzymamy dla  $x = 0$ ; rzędna tego punktu, oznaczmy ją  $a$ , ma wartość  $a = C$ .

Zatem swobodna powierzchnia cieczy wirującej ma postać paraboloidy obrotowej.

b) **Całkowanie przez rozkład (całka sumy).**

Z wzoru na różniczkę sumy dwóch funkcji:

$$d(F(x) + G(x)) = dF(x) + dG(x) = (f(x) + g(x)) dx,$$

gdzie  $F'(x) = f(x)$ ,  $G'(x) = g(x)$ , otrzymujemy:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + C$$

$$\text{Ponieważ zaś: } \int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2,$$

$$\text{przeto: } \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$$

Wyznaczmy stałe całkowania tak, aby zachodził związek  $C = C_1 + C_2$ .

Wtedy:

$$(15) \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

To znaczy: *całka z sumy dwóch funkcji jest równa sumie całek z tych funkcji*. Twierdzenie to odnosi się — jak to łatwo stwierdzić — także do większej liczby dodajników.

*Przykłady.*

1) Przy pomocy wzorów (4), (14) i (15) można scałkować każdy wielomian:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

I tak:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int a_0 dx + \int a_1 x dx + \int a_2 x^2 dx + \int a_3 x^3 dx + \dots + \int a_n x^n dx \\ &= a_0 \int dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + a_3 \int x^3 dx + \dots + a_n \int x^n dx \end{aligned}$$

a więc:

$$\int f(x) dx = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + C$$

2) Niekiedy udaje się rozłożyć funkcję podcałkową, której całka nie jest nam znana, na takie dodajniki, których całkowanie potrafimy wykonać.

Tak np. postępujemy z całką:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx$$

Korzystamy z wzoru:  $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

Oznaczmy krótko szukaną całkę literą  $I$  (jest to początkowa litera słowa: Integral, oznaczającego w języku niemieckim i francuskim *całkę*).

A więc:

$$\begin{aligned} I &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int (-1) dx = \operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C. \end{aligned}$$

Taki sposób obliczania całki nazywamy *metodą całkowania przez rozkład*.

3) W podobny sposób postępujemy z całką:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Zamiast 1 możemy napisać w liczniku  $\sin^2 x + \cos^2 x$ , a wtedy:

$$I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

a więc:  $I = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$ .

### § 206. Całkowanie „przez części“ (per partes).

Bardzo ważną metodę całkowania otrzymuje się z wzoru na pochodną iloczynu dwóch funkcji  $u(x)$  i  $v(x)$ . Załóżmy, że te funkcje posiadają ciągle pochodne, to:

$$\frac{d(u(x) \cdot v(x))}{dx} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

lub w formie różniczkowej:

$$(a) \quad d(u(x) \cdot v(x)) = u(x) \cdot v'(x) dx + v(x) \cdot u'(x) dx$$

co można także napisać w postaci:

$$d(u(x) \cdot v(x)) = u(x) \cdot dv(x) + v(x) \cdot du(x)$$

lub w skróceniu:

$$d(uv) = u dv + v du$$

Z wzoru (a) wynika, że:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx = u(x) \cdot v(x) + C$$

a stąd:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) + C - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Stałą  $C$  możemy połączyć z stałą, zawartą w ostatniej całce nieoznaczonej, w jedną nową stałą, wobec czego można napisać otrzymany wzór w postaci:

$$(16) \quad \boxed{\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx}$$

lub w skróconej postaci:

$$(16a) \quad \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

Należy pamiętać o tem, że w pierwszej całce  $v$  nie jest zmienną, według której całkujemy, lecz  $dv$  jest tylko skróceniem wyrażenia  $v'(x) dx$  i podobnie  $du$  w drugiej całce.

Stosowanie tego wzoru nazywamy całkowaniem „przez części“ lub „per partes“. Wzoru tego używa się w następujący sposób: rozkładamy

w całce  $\int f(x) dx$  funkcję  $f(x)$  na dwa czynniki:  $u(x) \cdot v'(x)$  tak, aby całka  $v(x)$  drugiego czynnika była znana lub łatwa do obliczenia; następnie stosujemy wzór (16); otóż często okazuje się, że całka, występująca po prawej stronie tego wzoru, jest łatwiejsza do obliczenia aniżeli całka, znajdująca się po lewej stronie. Zwykle postępuje się tak, że całe wyrażenie  $f(x) dx$  rozkłada się na czynniki  $u(x)$  i  $v'(x) dx = dv(x)$  czyli krótko  $u$  i  $dv$  i używa się wzoru (16 a).

*Przykłady.*

1) Chcemy obliczyć

$$\int \log x dx$$

Rozkładamy w tym celu wyrażenie pod całką na dwa czynniki:

$$u = \log x \quad i \quad dv = dx$$

Wobec tego:

$$du = \frac{1}{x} dx \quad a \quad v = x$$

Stosując wzór (16a), otrzymujemy:

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + C$$

2) Obliczyć:

$$I = \int x^2 \cos x dx$$

Kładziemy:

$$u = x^2, \quad dv = \cos x dx$$

Stąd:  $du = 2x dx, \quad v = \sin x$ .

Według wzoru (16a) otrzymujemy.

$$(b) \quad \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

Wprawdzie nie potrafimy odrazu znaleźć ostatniej całki, lecz jest ona w każdym razie łatwiejsza od poprzedniej. Stosujemy do tej całki powtórnie tę samą metodę, a więc kładziemy  $x = u_1$ ,  $\sin x dx = dv_1$ , a stąd  $du_1 = dx$ ,  $v_1 = -\cos x$ , wobec czego.

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Podstawiamy ten wynik we wzór (b) i otrzymujemy ostatecznie:

$$I = \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - 2C$$

czyli:  $I = \sin x(x^2 - 2) + 2x \cos x + C_1$ .

Widzimy, że pierwsze zastosowanie wzoru (16a) nie doprowadziło od razu do obliczenia szukanej całki, lecz zredukowało ją tylko do prostszej całki a dopiero drugi krok doprowadził do pożądanego wyniku. Takie redukowanie całki do kolejnych, corazto prostszych całek, jest charakterystyczne dla metody całkowania „przez części”.

Zobaczymy na nieco ogólniejszym przykładzie, jak można takie kolejne stosowanie wzoru (16) zastąpić tak zwanym ogólnym *wzorem redukcyjnym*.

3) Dla całki:

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

Wyprowadzić wzór (redukcyjny), pozwalający wyrazić tę całkę za pomocą całki  $I_{n-1}$ , zawierającej zamiast potęgi  $x^n$  potęgę  $x^{n-1}$ , o wykładniku o 1 niższym.

Kładziemy:

$$x^n = u, \quad e^x dx = dv$$

a więc:

$$du = nx^{n-1} dx, \quad v = e^x$$

Z wzoru (16a) otrzymujemy:

$$(c) \quad I_n = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1} dx = x^n e^x - n I_{n-1}$$

Jest to żądany wzór redukcyjny.

Na podstawie tego wzoru możemy całkę o dowolnym wykładniku naturalnym  $n$  sprowadzać kolejno do całek coraz prostszych a ostatecznie do znanej całki  $I_0 = \int x^0 e^x dx = \int e^x dx = e^x + C$ . Gdy chcemy obliczyć  $I_n$  dla dowolnie wielkiego  $n$ , to oprócz tego ostatniego całkowania nie trzeba już wykonywać żadnych innych całkowań. Tak np. chcemy obliczyć  $I_3 = \int x^3 e^x dx$ . Według wzoru (c) jest:

$$I_3 = x^3 e^x - 3 I_2$$

$$I_2 = x^2 e^x - 2 I_1$$

$$I_1 = x e^x - 1 \cdot I_0 = x e^x - e^x - C$$

Wobec tego:

$$I_3 = x^3 e^x - 3(x^2 \cdot e^x - 2(x e^x - e^x - C))$$

$$= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C_1$$

$$I_3 = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C_1$$

Sprawdzić wynik przez różniczkowanie!

4) Wyprowadzić wzór redukcyjny dla całki:

$$I_n = \int \log^n x dx$$

Całkujemy „per partes”, podstawiając:

$$u = \log^n x, \quad dv = dx$$

Stąd:

$$du = n \log^{n-1} x \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

a więc:

$$I_n = x \log^n x - \int x \cdot n \log^{n-1} x \frac{dx}{x} = x \log^n x - n \int \log^{n-1} x dx$$

czyli:

$$I_n = x \log^n x - n I_{n-1}$$

5) Bardzo ważny jest wzór redukcyjny dla całki:

$$S_n = \int \sin^n x dx$$

Otrzymujemy go także przez całkowanie „per partes”. I tak kładziemy:

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x dx$$

Stąd:

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx, \quad v = -\cos x$$

a więc:

$$S_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

czyli:

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

Przenieśmy na pierwszą stronę  $(n-1) \int \sin^n x dx$  czyli  $(n-1)S_n$  to otrzymamy:

$$n \cdot S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2}$$

a więc ostatecznie:

(17)

$$S_n = \int \sin^n x dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} S_{n-2}$$

Przy pomocy tego wzoru możemy obniżać wykładnik wyrażenia  $\sin^n x$  o 2. Jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną, to stosując wzór (17) kilkakrotnie, otrzymamy ostatecznie dla  $n$  nieparzystego  $S_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$

a dla  $n$  parzystego  $S_0 = \int \sin^0 x dx = \int dx = x + C$ .

Jeżeli  $n$  jest liczbą całkowitą ujemną, to należy z wzoru (17) wyrazić odwrotnie  $S_{n-2}$  zapomocą  $S_n$ , a mianowicie:

$$S_{n-2} = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} + \frac{n}{n-1} S_n$$

Kładąc  $n - 2 = m = -p$ , otrzymujemy dla  $m < -2$ :

$$(17a) \quad S_m = \frac{\cos x \cdot \sin^{m+1}x}{m+1} + \frac{m+2}{m+1} S_{m+2}$$

Wzór ten pozwala sprowadzać obliczanie całki  $S_m = S_{-p} = \int \frac{dx}{\sin^p x}$  do całki o wykładniku  $p$  mniejszym o 2.

Dla  $p$  parzystego dochodzi się ostatecznie przez kilkakrotne stosowanie wzoru (17a) do całki  $S_{-2} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ .

Przy nieparzystym  $p$  dochodzi się ostatecznie do całki  $S_{-1} = \int \frac{dx}{\sin x}$ , której obliczeniem zajmiemy się w następnym paragrafie.

*Przykład zastosowania wzoru (17):*

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x dx &= S_6 = \frac{-\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} S_4 = \\ &= \frac{1}{6} \left( -\cos x \sin^5 x + 5 \left( \frac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \frac{3}{4} S_2 \right) \right) \\ &= -\frac{\cos x \sin^6 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^4 x}{24} + \frac{15}{24} \left( \frac{-\cos x \sin^2 x}{2} + \frac{1}{2} S_0 \right) \\ &= -\frac{\cos x}{48} (8 \sin^6 x + 10 \sin^4 x + 15 \sin^2 x) + \frac{15}{48} x + C_1 \end{aligned}$$

*Przykład na zastosowanie wzoru (17a):*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= S_{-4} = \frac{\cos x \sin^{-3} x}{-3} + \frac{-2}{-3} S_{-2} = \\ &= -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} x + C = -\frac{\operatorname{ctg} x}{3} \left( \frac{1}{\sin^2 x} + 2 \right) + C. \end{aligned}$$

## § 207. Całkowanie przez podstawienie.

Obliczenie całki:

$$(a) \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

upraszcza się nieraz znacznie, gdy za zmienną  $x$  wprowadzimy nową odpowiednio dobraną zmienną  $t$ , kładąc:

$$(b) \quad x = \varphi(t)$$

Załóżmy, że funkcja  $\varphi(t)$  posiada ciągłą pochodną.



Z wzoru (a) wynika, że:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

Jeżeli zaś w funkcję  $F(x)$  wprowadzimy  $x = \varphi(t)$ , to stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymujemy:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Stąd wynika, że:

$$F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

czyli:

$$F(x) + C = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie na mocy wzoru (a):

(18)

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Jest to wzór na całkowanie przez podstawienie; jest on bezpośrednim wnioskiem z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Widzimy, że funkcja podcałkowa  $f(x)$  nie przechodzi na  $f(\varphi(t))$ , lecz otrzymuje jeszcze dodatkowy czynnik:  $\varphi'(t)$ . Wzór ten najłatwiej jest zapamiętać w ten sposób, że wprowadza się podstawienie  $x = \varphi(t)$  nie tylko w funkcję  $f(x)$ , lecz także w różniczkę  $dx$ , która wobec tego przechodzi na:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt$$

Podstawienie  $x = \varphi(t)$  staramy się zwykle tak dobrać, aby całka po prawej stronie wzoru (18) była łatwiejszą do obliczenia aniżeli całka pierwotnie podana. Po wykonaniu całkowania według zmiennej  $t$  otrzymamy jakąś funkcję  $G(t)$  tej pomocniczej zmiennej  $t$ . Chcąc wrócić do zmiennej  $x$ , należy obliczyć z wzoru (b)  $t$  jako funkcję zmiennej  $x$ , np.  $t = \psi(x)$  i wstawić  $\psi(x)$  w  $G(t)$  za zmienną  $t$ . Aby się to przekształcenie dało skutecznie w sposób jednoznaczny, trzeba obrać funkcję  $x = \varphi(t)$  tak, aby była odwracalna w sposób jednoznaczny. W tym celu wypadnie często ograniczyć zakres zmienności zmiennej niezależnej w tym związku funkcyjnym  $x = \varphi(t)$  (por. tom I, § 18).

Przy stosowaniu tej metody całkowania (przez podstawienie) rozpoczynamy zwykle rachunek od tego, że za jakąś odpowiednio dobraną funkcję  $\psi(x)$  zmiennej  $x$  podstawiamy nową zmienną:

$$t = \psi(x)$$



a następnie obliczamy stąd  $x = \varphi(t)$  i postępujemy dalej zgodnie z wzorem (18). Funkcję  $\psi(x)$  należy oczywiście obrać tak, aby była odwracalna w sposób jednoznaczny i aby posiadała różną od zera pochodną: albowiem potrzebna we wzorze pochodna  $\varphi'(t)$  ma wartość  $\frac{1}{\psi'(x)}$ , jak wiadomo z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej (por. tom I, § 79, wzór 28).

*Przykłady.*

1. Obliczyć:

$$I = \int \frac{5}{(2-3x)^6} dx = \int 5(2-3x)^{-6} dx$$

Na pierwszy rzut oka mogłoby się здаwać, że ta całka ma wartość:  $\frac{5(2-3x)^{-5}}{-5}$  jako potęga o wykładniku ujemnym. Przez zróżniczkowanie tej funkcji łatwo się jednak można przekonać, że jest to wynik błędny.

Zastosujmy natomiast do całki podstawienie:

$$\psi(x) = 2 - 3x = t$$

Stąd:

$$x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t = \varphi(t) \quad \text{a} \quad dx = -\frac{1}{3}dt$$

Wobec tego jest: \*

$$\int 5(2-3x)^{-6} dx = \int 5t^{-6} \cdot -\frac{1}{3} dt = \frac{-5}{3} \frac{t^{-5}}{-5} + C = \frac{1}{3} t^{-5} + C$$

Wyrażamy teraz  $t$  za pomocą zmiennej  $x$  i otrzymujemy:

$$I = \frac{1}{3}(2-3x)^{-5} + C = \frac{1}{3(2-3x)^5} + C$$

2. Obliczyć:

$$I = \int \frac{dx}{ax+b}$$

Chcąc tę całkę sprowadzić do znanej całki  $\int \frac{dt}{t}$  (por. wzór 5), używamy podstawienia:

$$ax + b = t$$

Stąd:

$$x = -\frac{b}{a} + \frac{t}{a}$$

a więc:

$$dx = \frac{1}{a} dt$$

Wobec tego:

$$I = \int \frac{\frac{1}{a} dt}{t} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \log |t| + C$$

Wracamy do zmiennej  $x$  i otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \log |ax+b| + C$$

3. Obliczyć:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

Znamy podobną całkę:  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$  (por. wzór 13).

Staramy się sprowadzić szukaną całkę do tej postaci i w tym celu wyłączamy w mianowniku  $a^2$  przed nawias.

Stosując wzór (14), otrzymujemy zatem:

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Teraz już samo się nasuwa podstawienie:  $\frac{x}{a} = t$ .

Stąd:

$$x = at, \quad dx = a dt$$

a więc:

$$I = \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C$$

Wracamy do zmiennej  $x$ , kładąc  $t = \frac{x}{a}$  i otrzymujemy ostatecznie:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

4. Wśród całek, któreśmy otrzymali bezpośrednio przez odwrócenie specjalnych wzorów rachunku różniczkowego, występowała całka  $\int \frac{dx}{1+x^2}$  (por. wzór 13 z § 204), natomiast nie było tam bardzo podobnej całki:

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

By tę całkę obliczyć, rozłożmy najpierw funkcję podcałkową na dwa prostsze dodajniki (t. zw. ułamki częściowe, por. tom I, § 23, str. 91):

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}$$

Wyznaczamy stałe  $A$  i  $B$  tak, aby ta równość zachodziła dla wszystkich  $x$  (z wyjątkiem oczywiście wartości  $x = 1$  i  $x = -1$ , dla których funkcja podcałkowa nie jest określona). Uwalniając obie strony od mianowników, otrzymujemy:

$$1 = A - Ax + B + Bx = (A + B) + (B - A)x$$

Spółczynniki przy  $x^0$  i  $x^1$  muszą być po obu stronach równe, a więc:

$$A + B = 1$$

$$A - B = 0$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy:  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ . Zatem funkcję podcałkową możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$$

Stosując tu wzór (15) na całkowanie sumy i wzór (14), otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x}$$

Na podstawie wyniku, uzyskanego w przykładzie 2, otrzymujemy stąd:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log |1+x| - \frac{1}{2} \log |1-x| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

czyli:

$$(19) \quad \boxed{\int \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\left| \frac{1+x}{1-x} \right|} + C}$$

Ten wzór znajduje dość częste zastosowanie.

Podobnie postępujemy z całką  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$  i otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić:

$$(19a) \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \log \sqrt{\left| \frac{a+x}{a-x} \right|} + C$$

5. Wynik, uzyskany w poprzednim przykładzie, można zastosować do następującego zagadnienia z dynamiki. Na ciało o masie  $m$ , spadające pod wpływem siły ciężkości ziemi, działa ponadto opór ośrodka w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu; opór ten jest w każdym momencie ruchu proporcjonalny do kwadratu prędkości  $v$  ciała spadającego

a nie może być większy od siły ciężkości. Znaleźć wzór na prędkość tego ruchu i na drogę.

Otóż całkowita siła, działająca na to ciało, ma wartość:

$$P = mg - kv^2 = m\gamma = m \frac{dv}{dt}$$

gdzie  $g$  oznacza przyspieszenie siły ciężkości (przyjmujemy je tu za stałe) a  $\gamma$  przyspieszenie w badanym ruchu. Prędkość  $v$  jest liczbą dodatnią a ponadto musi być  $kv^2 \leq mg$  czyli  $v \leq \sqrt{\frac{mg}{k}}$ .

Stąd:

$$\frac{dt}{dv} = \frac{m}{mg - kv^2} = \frac{m}{k} \frac{1}{\frac{mg}{k} - v^2}$$

Wobec tego:

$$t = \frac{m}{k} \int \frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2}$$

Według wzoru (19a) otrzymujemy stąd:

$$t = \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{mg}{k}}} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v} \right| + C$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne, a więc znak bezwzględnej wartości nie jest potrzebny. Gdy przyjmiemy, że dla  $t = 0$  ciało było w spoczynku, t. j.  $v = 0$ , to otrzymamy stąd  $C = 0$ . Z tego wzoru możemy obliczyć  $v$  jako funkcję  $t$  a mianowicie:

$$e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} = \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}} + v}{\sqrt{\frac{mg}{k}} - v}$$

a stąd:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{thyp} (t\sqrt{\frac{kg}{m}})$$

Z tego wzoru widać, że dla  $t \rightarrow \infty$  prędkość  $v$  dąży do wartości:  $v_1 = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ , zwanej prędkością „krytyczną“.

Całkując wzór na  $v = \frac{ds}{dt}$  jeszcze raz, otrzymujemy na drogę przy tym ruchu wzór:

$$s = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int \operatorname{thyp} (t\sqrt{\frac{kg}{m}}) dt = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int \frac{\sin \operatorname{hyps} (t\sqrt{\frac{kg}{m}}) dt}{\operatorname{coshyps} (t\sqrt{\frac{kg}{m}})}$$

Kładąc  $\cos \text{hyp} (t\sqrt{\frac{kg}{m}}) = u$ , otrzymujemy:

$$du = \sin \text{hyp} (t\sqrt{\frac{kg}{m}}) \cdot \sqrt{\frac{kg}{m}} dt$$

a więc:

$$s = \sqrt{\frac{mg}{k} \frac{m}{kg}} \int \frac{du}{u} = \frac{m}{k} \log |u| + C_1 = \frac{m}{k} \log \cos \text{hyp} (t\sqrt{\frac{kg}{m}}) + C_1$$

Jeżeli dla  $t = 0$  jest  $s = 0$ , to otrzymamy  $C_1 = 0$  i pozostanie wzór:

$$s = \frac{m}{k} \log \frac{1}{2} (e^{t\sqrt{\frac{kg}{m}}} + e^{-t\sqrt{\frac{kg}{m}}})$$

6. Całkę:

$$\int \cos rx dx$$

oblicza się przy pomocy podstawienia  $rx = t$ . Stąd  $x = \frac{t}{r}$ ,  $dx = \frac{1}{r} dt$ .

A więc:

$$\int \cos rx dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{r} dt = \frac{1}{r} \int \cos t dt = \frac{1}{r} \sin t + C$$

czyli:

$$\int \cos rx dx = \frac{1}{r} \sin rx + C$$

Przy pewnej wprawie wykonuje się takie proste całkowania odrazu, bez używania odpowiednich podstawień.

Tak np. odrazu jest widoczne, że:

$$\int \sin px dx = -\frac{1}{p} \cos px + C$$

7. Z wzoru redukcyjnego (17) (str. 14) na całkę z  $\sin^n x$  wyprowadzić wzór redukcyjny na całkę z  $\cos^n x$ .

Opieramy się na tem, że:

$$\sin x = \cos (\frac{1}{2}\pi - x)$$

i kładziemy:  $\frac{1}{2}\pi - x = t$ . Wtedy  $dx = -dt$ ,  $\sin x = \sin (\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$ .

Wobec tego wzór:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

zmienia się na:

$$(20) \quad K_n = \int \cos^n t dt = \frac{1}{n} \sin t \cos^{n-1} t + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} t dt$$

Kładąc  $n - 2 = m = -p$  i wyliczając z tego wzoru ostatnią całkę, otrzymamy wzór redukcyjny dla ujemnych potęg cosinusa:

$$(20a) K_{-p} = \int \frac{dt}{\cos^p t} = -\frac{1}{-p+1} \sin t \cos^{-p+1} t + \frac{-p+2}{-p+1} \int \frac{dt}{\cos^{p-2} t}$$

Jeżeli  $p$  jest liczbą nieparzystą, to ten wzór redukcyjny prowadzi ostatecznie do całki:  $\int \frac{dt}{\cos t}$ , którą omówimy w przykładzie 11.

8. Często się zdarza, że nie trzeba obliczać wyrażnie zmiennej  $x$  z podstawienia  $\psi(x) = t$ , lecz wystarczy utworzyć różniczki obu stron tej równości. Tak np. celem obliczenia całki:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

używa się podstawienia:

$$a^2 + x^2 = t$$

Stąd:

$$2x dx = dt$$

a więc  $x dx = \frac{1}{2} dt$ , a to właśnie jest potrzebne w liczniku.

Wobec tego:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C$$

a więc:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

9. Wyprowadzimy wzór redukcyjny dla całki:

$$T_m = \int \operatorname{tg}^m x dx$$

W tym celu oddzielamy w funkcji podcałkowej:

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Otrzymamy zatem:

$$\begin{aligned} T_m &= \int \operatorname{tg}^{m-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x dx = \int \operatorname{tg}^{m-2} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{m-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x dx \end{aligned}$$

Drugą całkę możemy oznaczyć literą  $T_{m-2}$ , pierwszą zaś obliczymy przez podstawienie:  $\operatorname{tg} x = u$ , a więc  $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$ . Wobec tego ta pierwsza całka

przyjmie postać:

$$\int u^{m-2} du = \frac{1}{m-1} u^{m-1} = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x$$

Stałą  $C$ , występującą przy całkowaniu, włączmy do  $T_{m-2}$ , to otrzymamy następujący wzór redukcyjny:

$$T_m = \frac{1}{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x - T_{m-2}$$

10. Metody, podobnej jak w przykładzie 8. używa się, jeżeli funkcja podcałkowa jest ilorazem dwóch funkcji, z których dzielna jest pochodną dzielnika, a więc dla całek postaci:

$$I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Kładąc  $f(x) = t$ , otrzymujemy  $f'(x) dx = dt$ , a więc:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C$$

czyli:

$$(21) \quad \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C}$$

Ten wzór można uważać za odwrócenie wzoru na pochodną logarytmiczną (por. tom I, § 85).

Tak np.:

$$a) \quad \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = - \int \frac{-\sin x dx}{\cos x}$$

Tu licznik jest różniczką mianownika, zatem według wzoru (21) otrzymujemy:

$$(22) \quad \boxed{\int \operatorname{tg} x dx = - \log |\cos x| + C}$$

b) Obliczyć:

$$I = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$$

Tu licznik nie jest wprawdzie pochodną mianownika, ale można go tak przekształcić, że będzie sumą tej pochodnej i liczby stałej, a mianowicie,

wylączając z licznika  $\frac{m}{2a}$ , otrzymamy:

$$I = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2an}{m}}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{m}{2a} \int \frac{(2ax + b) + (\frac{2an}{m} - b)}{ax^2 + bx + c} dx$$

Tę całkę rozdzielamy na sumę dwóch całek:

$$I_1 = \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx, \quad I_2 = \frac{m}{2a} \left( \frac{2an}{m} - b \right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Otóż pierwsza z tych całek ma właśnie postać lewej strony wzoru (21), a zatem:

$$I_1 = \frac{m}{2a} \log |ax^2 + bx + c|$$

W drugiej całce należy sprowadzić mianownik do formy kanonicznej:  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$ . Kładąc  $x + \frac{b}{2a} = t$ , sprowadzamy tę całkę do formy:  $\int \frac{dt}{t^2 + A^2}$  lub  $\int \frac{dt}{t^2 - A^2}$  zależnie od tego, czy wyróżnik  $4ac - b^2$  jest dodatni czy też ujemny. Te zaś formy omówiliśmy w przykładzie 3 i 4.

11. Obliczmy całki:  $S = \int \frac{dx}{\sin x}$  i  $K = \int \frac{dx}{\cos x}$ , potrzebne przy stosowaniu wzorów redukcyjnych (17 a) i (20 a).

i tak:

$$S = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

Tu licznik jest różniczką mianownika, a zatem:

$$(23) \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C}$$

Celem obliczenia całki  $K$ , sprowadzimy ją do całki  $S$ , zauważwszy, że  $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ . Zatem:

$$K = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{1}{2}\pi + x)}$$

Za  $\frac{1}{2}\pi + x$  kładziemy  $t$ , to  $dx = dt$  i otrzymujemy całkę typu (23).



A więc:

$$(24) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log |\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)| + C = \log \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

12. Celem obliczenia całki:

$$I = \int \sqrt{1-x^2} dx$$

dogodnie jest użyć podstawienia wprost w postaci  $x = \varphi(t)$ , a nie, jak to dotychczas czyniliśmy, w postaci  $t = \psi(x)$ . Podstawiamy mianowicie:

$$x = \sin t, \quad \text{biorąc } -\frac{1}{2}\pi \leq t \leq +\frac{1}{2}\pi.$$

Podstawieniem tem wyczerpujemy istotnie cały zasób dopuszczalnych wartości  $x$ , albowiem, aby otrzymać rzeczywisty pierwiastek z  $1-x^2$ , musi być  $-1 \leq x \leq +1$ .

Wtedy  $dx = \cos t dt$ , a zatem:

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

Tę całkę moglibyśmy obliczyć odrazu przez zastosowanie wzoru redukcyjnego (20). Dla ćwiczenia obliczymy ją jednak w inny sposób, a mianowicie oprzemy się na znanym z trygonometrii wzorze:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$$

Wobec tego:

$$I = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C$$

Ale z wzoru  $x = \sin t$  wynika, że  $t = \arcsin x$  (przyczem  $-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ ). Ponadto  $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$  (znak pierwiastka jest dodatni, ponieważ  $\cos t$  ma wartości nieujemne dla  $t$ , zawartych w przedziale  $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ ). Wobec tego:

$$(25) \quad \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

Pozostawiamy czytelnikowi do wyprowadzenia nieco ogólniejszy wzór:

$$(25a) \quad \int \sqrt{k-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( k \arcsin \frac{x}{\sqrt{k}} + x\sqrt{k-x^2} \right) + C \quad (\text{dla } k > x^2)$$

13. Czasem przy obliczaniu całki trzeba użyć zarówno całkowania „per partes” jak i metody podstawiania. Tak np. do obliczenia:

$$I = \int \operatorname{arctg} x \, dx$$

stosujemy najpierw całkowanie „per partes”, kładąc:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= u, & dx &= dv \\ du &= \frac{dx}{1+x^2}, & x &= v \end{aligned}$$

A więc  $I = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$ . Całkę, która tu występuje, obliczamy zapomocą podstawienia  $1+x^2 = t$ . Otrzymujemy  $2x \, dx = dt$ , a więc:

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log |t| + C = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

Wobec tego:

$$\int \operatorname{arctg} x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że w podobny sposób otrzyma się:

$$\int \operatorname{arcsin} x \, dx = x \operatorname{arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

14. Przy obliczaniu całki:

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

stosujemy dwukrotnie całkowanie „per partes”, a mianowicie najpierw kładziemy:

$$\begin{aligned} e^{ax} &= u, & \sin bx \, dx &= dv \\ du &= ae^{ax} \, dx, & v &= -\frac{1}{b} \cos bx \end{aligned} \quad (\text{por. przykład 6}).$$

Wobec tego:

$$I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Stosujemy do występującej tu całki powtórnie metodę całkowania „per partes”, kładąc:

$$\begin{aligned} e^{ax} &= u_1, & \cos bx \, dx &= dv_1 \\ du_1 &= ae^{ax} \, dx, & v_1 &= \frac{1}{b} \sin bx \end{aligned}$$

Zatem:

$$I = \frac{-1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left( \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx \right)$$

$$I = \frac{1}{b^2} \left( -e^{ax} b \cos bx + e^{ax} a \sin bx \right) - \frac{a^2}{b^2} I$$

A stąd:

$$Ib^2 = e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx) - a^2 I, (a^2 + b^2) I = e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)$$

a więc:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

W podobny sposób oblicza się, że:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

15. W jednym z dalszych rozdziałów będą nam potrzebne całki:

$$\int \sin nx \sin rx \, dx, \quad \int \sin nx \cos rx \, dx \quad \text{i} \quad \int \cos nx \cos rx \, dx$$

Przy obliczaniu tych całek opieramy się na znanych z trygonometriji wzorach:

$$\sin nx \cdot \sin rx = \frac{1}{2} (\cos(n-r)x - \cos(n+r)x)$$

$$\sin nx \cdot \cos rx = \frac{1}{2} (\sin(n+r)x + \sin(n-r)x)$$

$$\cos nx \cdot \cos rx = \frac{1}{2} (\cos(n+r)x + \cos(n-r)x)$$

Gdy  $n \neq r$ , to otrzymujemy stąd:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \int \sin nx \sin rx \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos(n-r)x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos(n+r)x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n-r)x}{n-r} - \frac{\sin(n+r)x}{n+r} \right) \\ \int \sin nx \cos rx \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin(n+r)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(n-r)x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(n+r)x}{n+r} + \frac{\cos(n-r)x}{n-r} \right) \\ \int \cos nx \cos rx \, dx &= \frac{1}{2} \int \cos(n+r)x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(n-r)x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n+r)x}{n+r} + \frac{\sin(n-r)x}{n-r} \right) \end{aligned} \right.$$

Dla  $n = r$  jest  $\cos(n-r)x = \cos 0 = 1$ ,  $\sin(n-r)x = \sin 0 = 0$ , a więc powyższe całki przechodzą na:

$$(26a) \left\{ \begin{aligned} \int \sin^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} \\ \int \sin nx \cos nx \, dx &= -\frac{1}{2} \frac{\cos 2nx}{2n} \\ \int \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} + \frac{1}{2} x \end{aligned} \right.$$

16. Wyprowadzić wzór redukcyjny dla całki:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Podstawiamy:  $x = \operatorname{tg} t$ , to  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ ,  $1+x^2 = 1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$   
a więc:

$$I_n = \int \cos^{2n-2} t dt = K_{2n-2}$$

Dla całki  $K_n$  znamy już wzór redukcyjny (por. wzór (20) na str. 21).  
Stosując go tutaj, otrzymamy:

$$\begin{aligned} I_n = K_{2n-2} &= \frac{1}{2n-2} \operatorname{sin} t \cos^{2n-3} t + \frac{2n-3}{2n-2} K_{2n-4} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} t}{(2n-2) \sec^{2n-2} t} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \end{aligned}$$

czyli: 
$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

lub wyraźnie:

$$(27) \quad \boxed{\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}}$$

Z tego wzoru będziemy korzystali w następnym paragrafie.

*Uwaga.* Do tego wzoru redukcyjnego można też dojść bezpośrednio, nie przechodząc przez wzór (20). W tym celu przedstawia się funkcję podcałkową w postaci:

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

Całka  $I_n$  zamieni się wtedy na  $I_{n-1} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}$

Do pozostałej całki stosujemy całkowanie „per partes”, kładąc  $u = x$ ,  $dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^n}$   
i t. d. Pozostawiamy czytelnikowi dalsze wykonanie rachunków.

17. Jeżeli znamy całkę jakiejś funkcji  $y = f(x)$ , to potrafimy bez trudności obliczyć także całkę funkcji odwrotnej:  $x = \varphi(y)$ . I tak, chcąc obliczyć:

$$I = \int \varphi(y) dy$$

podstawiamy za  $\varphi(y) = x$ , stąd  $y = f(x)$ ,  $dy = f'(x) dx$   
a więc:

$$I = \int x \cdot f'(x) dx$$

Całkujemy „per partes“, kładąc:  $x = u$ ,  $f'(x) dx = dv$  Wtedy  $du = dx$ ,  $v = f(x)$  i otrzymujemy:

$$I = \int \varphi(y) dy = x f(x) - \int f(x) dx$$

*Przykłady.* a) Znamy dla  $y = \sin x$  całkę  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .

Wobec tego możemy obliczyć przy pomocy poprzedniego wzoru całkę z  $x = \arcsin y$ , a mianowicie:

$$\int \arcsin y dy = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Wracając do zmiennej  $y$ , otrzymujemy:

$$\int \arcsin y dy = \arcsin y \cdot y + \sqrt{1-y^2} + C$$

(por. przykład 13 na str. 26).

b) Dla  $y = \sin \text{hyp } x$  znamy całkę:

$$\int \sin \text{hyp } x dx = \cos \text{hyp } x + C = \sqrt{1 + \sin^2 \text{hyp } x} + C$$

Stąd możemy obliczyć całkę funkcji odwrotnej, którą jest, jak wiadomo (por. tom I, str. 290—291):

$$x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$$

Wobec tego:

$$\begin{aligned} & \int \log(y + \sqrt{1+y^2}) dy = \\ & = x \sin \text{hyp } x - \int \sin \text{hyp } x dx = y \log(y + \sqrt{1+y^2}) - \sqrt{1+y^2} + C \end{aligned}$$

c) Ponieważ dla  $y = e^x$  jest:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

przeto:

$$\int \log y dy = x e^x - e^x + C = \log y \cdot y - y + C$$

(por. str. 12 przykład 1).

## § 208. Całkowanie funkcji wymiernych. Rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste.

Potrąfimy scałkować każdą funkcję *całkowitą* wymierną czyli każdy wielomian (str. 10, przykład 1).

Funkcja *ułamkowa* wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów:

$$W(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$$

Jeżeli stopień licznika nie jest mniejszy od stopnia mianownika, to wydzielimy z tej funkcji ułamkowej część całkowitą przy pomocy znanego algorytmu dzielenia wielomianów<sup>1</sup>. W ten sposób otrzymujemy rozkład danej funkcji  $W(x)$  na część całkowitą, np.  $h(x)$  i na funkcję ułamkową, np.  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , której licznik ma stopień niższy aniżeli mianownik, a więc:

$$W(x) = h(x) + \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tak np. dla funkcji:

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x + 5) : (x^2 - 4x + 3) = x + 4 \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} \phantom{+ 5} \\ + 4x^2 - x + 5 \\ \underline{+ 4x^2 - 16x + 12} \\ + 15x - 7 \end{array}$$

Zatem:

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3}$$

Część całkowitą  $h(x)$  scałkujemy bez trudności. Pozostaje do całkowania część ułamkowa, której licznik ma stopień niższy aniżeli mianownik. Do takiej funkcji zastosujemy całkowanie przez rozkład. W tym celu postaramy się rozłożyć taką funkcję  $\frac{f(x)}{g(x)}$  na prostsze dodajniki.

W specjalnych przypadkach używaliśmy już takiego rozkładu (por. str. 18, przykład 4). Jeżeliby spółczynnik najwyższej potęgi zmiennej  $x$  w wielomianie  $g(x)$  był różny od 1, to usuwamy go, dzieląc licznik i mianownik tej funkcji ułamkowej przez ten spółczynnik; możemy się zatem ograniczyć w dalszym ciągu do badania tylko takich funkcji ułamkowych, w których ten spółczynnik ma wartość 1. Spółczynniki innych potęg  $x$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Algebra poucza (por. tom I, § 22), że każdy wielomian stopnia  $n$  można przedstawić jako iloczyn  $n$  czynników stopnia pierwszego:

$$w_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

przyczem liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są pierwiastkami równania  $w_n(x) = 0$ . Nie-

<sup>1</sup> W podręczniku Ruziewicza i Żylińskiego p. t. *Wstęp do matematyki* czytelnik znajdzie w rozdz. V dokładne uzasadnienie tego algorytmu.

które a nawet wszystkie czynniki mogą się powtarzać wielokrotnie (jeżeli równanie posiada wielokrotne pierwiastki). Tak więc mianownik funkcji ułamkowej, mający współczynnik 1 przy najwyższej potędze  $x$ , można przedstawić w postaci:

$$g(x) = (x - \alpha)^a (x - \beta)^b \dots (x - \mu)^r \dots$$

jeżeli  $\alpha$  jest  $a$ -krotnym pierwiastkiem równania  $g(x) = 0$ ,  $\beta$   $b$ -krotnym i t. d.

Pierwiastki równania  $g(x) = 0$  mogą być rzeczywiste i zespolone<sup>1</sup>. Wszystkie zespolone pierwiastki równania o współczynnikach rzeczywistych rozpadają się na pary sprzężone z sobą. Jeżeli więc:

$$\mu = p + qi$$

( $p, q$  są tu liczbami rzeczywistymi a  $q$  jest różne od zera) jest pierwiastkiem równania  $g(x) = 0$ , to także liczba:

$$\bar{\mu} = p - qi$$

jest pierwiastkiem tego równania. Co więcej, jeżeli  $\mu$  jest  $r$ -krotnym pierwiastkiem tego równania, to także sprzężona z  $\mu$  liczba  $\bar{\mu}$  musi być dokładnie  $r$ -krotnym pierwiastkiem tegoż równania. Iloczyn każdej pary czynników  $(x - \mu)(x - \bar{\mu})$ , odpowiadających sprzężonym pierwiastkom, jest wielomianem drugiego stopnia o współczynnikach rzeczywistych a o wyróżniku ujemnym. I tak:

$$\begin{aligned} (x - \mu) \cdot (x - \bar{\mu}) &= (x - p - qi)(x - p + qi) = (x - p)^2 + q^2 = \\ &= x^2 - 2px + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

Wyróżnik tego trójmianu kwadratowego ma postać:

$$d = (-2p)^2 - 4(p^2 + q^2) = -4q^2$$

a więc ma wartość ujemną.

Wobec tego możemy przedstawić wielomian  $g(x)$  jako iloczyn samych rzeczywistych czynników stopnia pierwszego lub drugiego w postaci:

$$(28) \quad g(x) = (x - \alpha)^a (x - \beta)^b \dots (x^2 + a_1 x + b_1)^r \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots$$

przyczem występujące tu trójmiany mają wyróżniki ujemne. Czynniki pierwszego stopnia:  $x - \alpha, x - \beta, \dots$  odpowiadają rzeczywistym pierwiastkom równania  $g(x) = 0$ , czynniki zaś drugiego stopnia:  $x^2 + a_1 x + b_1, x^2 + a_2 x + b_2, \dots$  odpowiadają parom pierwiastków zespolonych, sprzężonych. Stopniem wielomianu  $g(x)$  jest widocznie liczba  $n = a + b + \dots + 2r + 2s + \dots$

Efektywne wykonanie takiego rozkładu bywa nieraz bardzo trudne, a mianowicie wtedy, gdy trudno jest rozwiązać równanie  $g(x) = 0$ . W praktyce mamy jednak najczęściej do czynienia bądźto z łatwymi do

<sup>1</sup> Zasadnicze wiadomości o liczbach zespolonych są podane w paragrafach koncowych.





być podzielny przez  $x - \alpha$ , to liczba  $\alpha$  musi być pierwiastkiem licznika, a zatem musi się spełnić równość:

$$f(\alpha) - A_\alpha (\alpha - \beta)^b \dots (\alpha^2 + a_1 \alpha + b_1)^r (\alpha^2 + a_2 \alpha + b_2)^s \dots = 0$$

To się zaś spełni, gdy nieznaną dotychczas stałą  $A_\alpha$  obierzemy według wzoru:

$$(II) \quad A_\alpha = \frac{f(\alpha)}{(\alpha - \beta)^b \dots (\alpha^2 + a_1 \alpha + b_1)^r (\alpha^2 + a_2 \alpha + b_2)^s \dots}$$

Dajemy zatem liczbie  $A_\alpha$  tę wartość i upraszczamy licznik i mianownik drugiej strony wzoru (I) przez  $x - \alpha$ . Otrzymamy w ten sposób w liczniku jakąś funkcję  $f_1(x)$  stopnia niższego aniżeli  $n - 1$ , a w mianowniku odpadnie jeden czynnik  $x - \alpha$ .

A więc:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A_\alpha}{(x - \alpha)^a} = \frac{f_1(x)}{(x - \alpha)^{a-1} (x - \beta)^b \dots (x^2 + a_1 x + b_1)^r (x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots}$$

Z prawą stroną tego wzoru postępujemy znowu tak samo, a więc odejmujemy  $\frac{A_{\alpha-1}}{(x - \alpha)^{a-1}}$ , redukujemy i żądamy, aby licznik i mianownik były podzielne przez  $x - \alpha$ ; z tego warunku wyznaczy się stałą  $A_{\alpha-1}$  wzorem podobnym do (II). Postępując tak dalej, wyznaczymy wszystkie stałe  $A$ , wszystkie stałe  $B$  i t. d. w sposób jednoznaczny, aż pozostaną same mianowniki postaci  $x^2 + a_1 x + b_1$ ,  $(x^2 + a_1 x + b_1)^2, \dots$

Po przeniesieniu wszystkich ułamków, zawierających w mianownikach dwumiany  $x - \alpha$ ,  $x - \beta, \dots$  i ich potęgi, otrzymamy po redukcji funkcję ułamkową:

$$\frac{R(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^r \cdot (x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots}$$

Licznik jest tu stopnia niższego niż  $2r + 2s + \dots$

Teraz przystąpimy do wyznaczania współczynników  $M_r, N_r$ . W tym celu przenosimy odpowiedni ułamek na pierwszą stronę i otrzymujemy:

$$(III) \quad \frac{R(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^r (x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots} - \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + a_1 x + b_1)^r} = \frac{R(x) - (M_r x + N_r)(x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots}{(x^2 + a_1 x + b_1)^r (x^2 + a_2 x + b_2)^s \dots}$$

Żądamy, aby licznik i mianownik dały się uprościć przez  $x^2 + a_1 x + b_1$ , czyli przez  $(x - p + qi) \cdot (x - p - qi)$  (założyliśmy bowiem, że trójmiany, występujące w mianownikach, mają wyróżniki ujemne, a zatem każdy z nich posiada parę pierwiastków sprzężonych).

Licznik musi więc także posiadać pierwiastki  $x_1 = p + qi$  i  $x_2 = p - qi$ .

Otrzymamy zatem dwa równania:

$$(IV) \quad \begin{aligned} R(x_1) - (M_r x_1 + N_r) \cdot (x_1^2 + a_2 x_1 + b_2)^r \dots &= 0 \\ R(x_2) - (M_r x_2 + N_r) \cdot (x_2^2 + a_2 x_2 + b_2)^r \dots &= 0 \end{aligned}$$

wystarczające do wyznaczenia stałych  $M_r$  i  $N_r$ .

Przedstawmy liczbę zespoloną  $R(x_1): (x_1^2 + a_2 x_1 + b_2)^r \dots$  w postaci  $F(p, q) + i G(p, q)$ , to liczba  $R(x_2): (x_2^2 + a_2 x_2 + b_2)^r \dots$ , jako sprzężona z nią, ma postać:  $F(p, q) - i G(p, q)$ . Równania (IV) przyjmą więc postać:

$$F(p, q) + i G(p, q) = M_r(p + qi) + N_r$$

$$F(p, q) - i G(p, q) = M_r(p - qi) + N_r$$

Stąd otrzymujemy z łatwością:

$$M_r = \frac{1}{q} G(p, q), N_r = F(p, q) - \frac{p}{q} G(p, q)$$

a więc liczby rzeczywiste.

Obrawszy takie  $M_r$  i  $N_r$ , możemy uprościć licznik i mianownik prawej strony we wzorze (III) przez  $x^2 + a_1 x + b_1$ . Otrzymamy zatem:

$$\frac{R_1(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{r-1} (x^2 + a_2 x + b_2)^r \dots}$$

Tu stopień licznika  $R_1(x)$  jest niższy aniżeli  $2r - 1 + 2s \dots$

Z tem wyrażeniem postępujemy dalej tak samo, a więc odejmujemy  $\frac{M_{r-1}x + N_{r-1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{r-1}}$ , redukujemy i upraszczamy, wyznaczwszy odpowiednio stałe  $M_{r-1}$ ,  $N_{r-1}$ . Postępując tak kolejno  $r$ -krotnie z czynnikiem  $x^2 + a_1 x + b_1$ , a następnie  $s$ -krotnie z czynnikiem  $x^2 + a_2 x + b_2$  i t. d., otrzymamy wszystkie stałe, występujące we wzorze (29). W ten sposób prawdziwość tego wzoru jest udowodniona.

Szczególnie łatwo przedstawia się rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste, gdy równanie  $g(x) = 0$  posiada tylko jednokrotne pierwiastki. Niechaj:

$$g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \nu)$$

Zastosujmy do licznika  $f(x)$  wzór interpolacyjny Lagrange'a (tom I str. 605), przedstawiając wielomian  $f(x)$  zapomocą jego wartości:

$$f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), \dots f(\nu)$$

w punktach:

$$x = \alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$$

Otóż:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x - \beta)(x - \gamma) \dots (x - \nu)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \dots (\alpha - \nu)} f(\alpha) + \\ &+ \frac{(x - \alpha)(x - \gamma) \dots (x - \nu)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \dots (\beta - \nu)} f(\beta) + \dots + \frac{(x - \alpha)(x - \beta) \dots}{(\nu - \alpha)(\nu - \beta) \dots} f(\nu) \end{aligned}$$

Podzielmy obie strony przez  $g(x)$ , to otrzymamy:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \dots (\alpha - \nu)} \cdot \frac{1}{x - \alpha} +$$

$$+ \frac{f(\beta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \dots (\beta - \nu)} \cdot \frac{1}{x - \beta} + \frac{f(\gamma)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \dots (\gamma - \nu)} \cdot \frac{1}{x - \gamma} + \dots$$

Oznaczmy stały współczynnik przy  $\frac{1}{x - \alpha}$  literą  $A$ , przy  $\frac{1}{x - \beta}$  literą  $B$  i t. d., to z wzoru tego otrzymamy odrazu żądany rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma} + \dots + \frac{N}{x - \nu}$$

Spółczynniki  $A, B, C, \dots$  oblicza się mianowicie według wzorów:

$$A = \frac{f(\alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \dots (\alpha - \nu)}, \quad B = \frac{f(\beta)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \dots (\beta - \nu)}, \dots$$

Łatwo stwierdzić, że mianownik wzoru na  $A$  ma wartość  $g'(\alpha)$ , podobnie w  $B$  występuje  $g'(\beta)$  i t. d.; trzeba tylko utworzyć pochodną iloczynu  $(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \nu)$ . A więc wzorom na spółczynniki  $A, B, \dots$  można też nadać postać:

$$A = \frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}, \quad B = \frac{f(\beta)}{g'(\beta)}, \dots$$

*Przykład.*

Rozłożyć na ułamki proste funkcję (por. str. 80):

$$\frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3}$$

Ponieważ równanie  $x^2 - 4x + 3 = 0$  posiada pierwiastki 1 i 3, przeto  $g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ . Rozkład ma zatem postać:

$$\frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

Według wzorów na  $A$  i  $B$  otrzymujemy odrazu:

$$A = \frac{15 \cdot 1 - 7}{1 - 3} = -4, \quad B = \frac{15 \cdot 3 - 7}{3 - 1} = 19$$

A więc:

$$\frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-4}{x - 1} + \frac{19}{x - 3}$$

W ogólnym przypadku, gdy występują pierwiastki wielokrotne, obliczanie współczynników tą drogą, którą postępowaliśmy przy dowodzie wzoru (29), jest bardzo mozolne.

Zwykle szybciej dochodzi się do celu inną, prostszą drogą. Uwalniamy mianowicie obie strony wzoru (29) od mianowników. Po lewej stronie otrzymamy w ten sposób  $f(x)$ , a więc wielomian stopnia co najwyżej  $n - 1$ , po prawej zaś stronie wielomian stopnia dokładnie  $n - 1$ . a więc wielomian, mający  $n$  współczynników. Obydwa te wielomiany mają przybierać te same wartości dla nieskończenie wielu wartości  $x$ , a więc muszą być identyczne, to znaczy, że współczynniki, występujące po obu stronach przy równych potęgach zmiennej  $x$ , muszą być sobie parami równe. W ten sposób otrzymamy  $n$  równań pierwszego stopnia na wyznaczenie  $n$  stałych:  $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_r, N_r, P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots, P_s, Q_s, \dots$ . Liczba tych równań jest więc wystarczająca. Równania te nie mogą być ze sobą sprzeczne, albowiem zgóry wiemy, że istnieją ich rozwiązania:  $A_1, A_2, \dots$ , wyznaczyliśmy je bowiem w poprzednim dowodzie w inny sposób. Ta metoda porównania współczynników prowadzi zwykle szybko do wyznaczenia potrzebnych stałych.

*Przykłady.*

1) Rozłóżyc na ułamki częściowe funkcję:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2}$$

Najpierw trzeba znaleźć pierwiastki mianownika, t. j. rozwiązać równanie:

$$x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$$

czyli:

$$x^2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

czyli:

$$x^2(x - 1)^3 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są:  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = x_4 = x_5 = 1$ .

Rozkład danej funkcji ułamkowej ma więc postać:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x - 1} + \frac{B_2}{(x - 1)^2} + \frac{B_3}{(x - 1)^3}$$

Uwalniamy obie strony od mianowników i otrzymujemy:

$$5x^4 - 5x + 1 = A_1 x(x - 1)^3 + A_2(x - 1)^3 + B_1 x^2(x - 1)^2 + B_2 x^2(x - 1) + B_3 x^2$$

czyli:

$$5x^4 - 5x + 1 = A_1(x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) + A_2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B_1(x^4 - 2x^3 + x^2) + B_2(x^3 - x^2) + B_3 x^2$$

czyli:

$$5x^4 - 5x + 1 = (A_1 + B_1)x^4 + (-3A_1 + A_2 - 2B_1 + B_2)x^3 + (3A_1 - 3A_2 + B_1 - B_2 + B_3)x^2 + (-A_1 + 3A_2)x - A_2$$

Spółczynniki przy równych potęgach zmiennej  $x$  muszą być parami sobie równe, a zatem otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= 5 \\ -3A_1 + A_2 - 2B_1 + B_2 &= 0 \\ 3A_1 - 3A_2 + B_1 - B_2 + B_3 &= 0 \\ -A_1 + 3A_2 &= -5 \\ -2A_2 &= 1 \end{aligned}$$

Z tych równań otrzymujemy kolejno, począwszy od ostatniego:

$$\begin{aligned} A_2 &= -1, \quad A_1 = 5 + 3A_2 = 5 - 3 = 2, \quad B_1 = 5 - A_1 = 5 - 2 = 3, \\ B_2 &= 3A_1 - A_2 + 2B_1 = 6 + 1 + 6 = 13 \\ B_3 &= -3A_1 + 3A_2 - B_1 + B_2 = -6 - 3 - 3 + 13 = 1 \end{aligned}$$

Wobec tego możemy przedstawić badaną funkcję w następującej postaci:

$$\frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{13}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

2) Rozłożyć na ułamki częściowe funkcję:

$$W(x) = \frac{2x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2}$$

Mianownik ma już tutaj postać wzoru (28), albowiem czynnik drugiego stopnia:  $x^2 + 1$  ma wyróżnik ujemny:  $-4$  (pierwiastki są urojone, sprzężone:  $+i, -i$ ). Wobec tego rozkład na ułamki częściowe ma postać:

$$\frac{2x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 1)^2}$$

Celem wyznaczenia liczników uwalniamy obie strony od ułamków i otrzymujemy:

$$2x + 2 = A(x^2 + 1)^2 + (M_1x + N_1)(x-1)(x^2 + 1) + (M_2x + N_2)(x-1)$$

czyli:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= (A + M_1)x^4 + (N_1 - M_1)x^3 + (2A + M_1 - N_1 + M_2)x^2 + \\ &+ (N_1 - M_1 + N_2 - M_2)x + (A - N_1 - N_2). \end{aligned}$$

Spółczynniki przy równych potęgach zmiennej  $x$  muszą być sobie równe, zatem musi się spełniać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} A + M_1 &= 0 \\ N_1 - M_1 &= 0 \\ 2A + M_1 - N_1 + M_2 &= 0 \\ N_1 - M_1 + N_2 - M_2 &= 2 \\ A - N_1 - N_2 &= 2 \end{aligned}$$

Z tych równań otrzymujemy bez trudności:  $A = 1$ ,  $N_1 = M_1 = -1$ ,  $M_2 = -2$ ,  $N_2 = 0$ , a zatem daną funkcję możemy przedstawić w postaci

$$\frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Po tych przygotowaniach całkowanie funkcji wymiernych nie sprawia już trudności. I tak chcąc obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{F(x)}{g(x)} dx$$

wydzielamy najpierw część całkowitą i otrzymujemy:

$$I = \int h(x) dx + \int \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

gdzie  $h(x)$  jest wielomianem, a stopień funkcji  $f(x)$  jest niższy od stopnia  $g(x)$ . Wielomian  $h(x)$  całkujemy bez żadnej trudności. Następnie rozkładamy funkcję  $\frac{f(x)}{g(x)}$  na ułamki częściowe według wzoru (29), rozłożywszy poprzednio  $g(x)$  na czynniki według wzoru (28), o ile już zgóry funkcja  $g(x)$  nie jest podana w formie takiego iloczynu. Po wykonaniu rozkładu mamy do czynienia z całkami następujących typów.

$$a) \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \log|x-a| + C$$

$$b) \quad \int \frac{A_n}{(x-a)^n} dx = A_n \int (x-a)^{-n} dx = A_n \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ = \frac{A_n}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C, \text{ gdy } n > 1$$

$$c) \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+ax+b} dx, \text{ przyczem wyróżnik } a^2-4b < 0.$$

Całkę tę obliczamy metodą, podaną w przykładzie 10b na str. 28, a mianowicie:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+ax+b} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{x^2+ax+b} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x+a + \frac{2N}{M} - a}{x^2+ax+b} dx = \\ = \frac{M}{2} \log(x^2+ax+b) + (N - \frac{aM}{2}) \int \frac{dx}{x^2+ax+b}$$

Sprowadzamy trójmian  $x^2+ax+b$  do formy kanonicznej:  $x^2+ax+b = (x+\frac{a}{2})^2 + \frac{1}{4}(4b-a^2)$ . Drugi dodatek jest tu liczbą dodatnią, ponieważ  $a^2-4b < 0$ . Wyłączamy tę liczbę przed nawias, to:

$$\begin{aligned}
 x^2 + ax + b &= \frac{1}{4}(4b - a^2) \left[ \left( \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{4b - a^2}{4}}} \right)^2 + 1 \right] = \\
 &= \frac{1}{4}(4b - a^2) \left[ \left( \frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}} \right)^2 + 1 \right]
 \end{aligned}$$

Używamy przedstawienia:

$$\frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}} = t$$

Stąd:

$$dx = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2} dt$$

a zatem:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 + ax + b} &= \int \frac{\frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2} dt}{\frac{1}{4}(4b - a^2)(t^2 + 1)} = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{4b - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}} + C
 \end{aligned}$$

A więc:

$$(30) \int \frac{Mx + N}{x^2 + ax + b} dx = \frac{M}{2} \log(x^2 + ax + b) + \frac{2N - aM}{\sqrt{4b - a^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + a}{\sqrt{4b - a^2}} + C$$

Taką postać ma całka, gdy wyróżnik  $a^2 - 4b < 0$ .

d) Pozostaje jeszcze do omówienia całka z ułamka, którego mianownik zawiera jakąś wyższą potęgę trójmianu  $x^2 + ax + b$  o wyróżniku ujemnym, a więc całka postaci:

$$I = \int \frac{Mx + N}{(x^2 + ax + b)^n} dx$$

Używamy tu tego samego przedstawienia, co w poprzednim przypadku i otrzymamy po łatwych przeróbkach:

$$I = \left( \frac{4}{4b - a^2} \right)^{n-1} \int \frac{Mt + \frac{2N - aM}{\sqrt{4b - a^2}}}{(1 + t^2)^n} dt$$

Oznaczmy krótko:  $\frac{2N - aM}{\sqrt{4b - a^2}} = P$ . Mamy obliczyć całkę:

$$\int \frac{Mt + P}{(1 + t^2)^n} dt = \int \frac{Mt}{(1 + t^2)^n} dt + P \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$$

Pierwszą z tych całek obliczamy bez trudności, używając przedstawienia  $1 + t^2 = z$ . Po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy:

$$(w) \quad \int \frac{Mt dt}{(1+t^2)^n} = \frac{M}{2(1-n)(1+t^2)^{n-1}} + C$$

Drugą zaś całkę obliczamy według wzoru redukcyjnego (27), wyprowadzonego w § 207 w przykładzie 16.

Zbierając razem wyniki, do których doszliśmy, całkując funkcje wymierne, widzimy, że całka każdej funkcji wymiernej da się wyrazić za pomocą samych funkcji *elementarnych*, a mianowicie mogą wystąpić wielomiany (z całkowania części całkowitej  $h(x)$ ), funkcje wymierne (z całek, omówionych pod b), pod d) z wzoru (w) i z wzoru redukcyjnego), logarytmy (z całek omówionych pod a) i pod c)) i funkcje arcus tangens (z całek omówionych pod c) i z wzoru redukcyjnego (27), gdy dojdziemy do  $n = 1$ ).

Zasadniczą trudność może tu sprawić tylko rozłożenie mianownika  $g(x)$  na czynniki, t. j. rozwiązanie równania  $g(x) = 0$ . Rozkład zaś na ułamki częściowe i całkowanie są czasem żmudne, lecz nie sprawiają żadnych zasadniczych trudności.

*Przykłady:*

3) Obliczyć:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} dx$$

Wydzielamy najpierw część całkowitą i otrzymujemy (por. str. 30).

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3}$$

Ponieważ zaś:

$$\frac{15x - 7}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{4}{x - 1} + \frac{19}{x - 3}$$

(por. str. 35), przeto:

$$I = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 4 \log|x - 1| + 19 \log|x - 3| + C$$

4)

$$I = \int \frac{5x^4 - 5x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2} dx$$

Na podstawie rozkładu, wykonanego w przykładzie 1) na str. 36, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[ \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{13}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx \\ &= 2 \log|x| + \frac{1}{x} + 3 \log|x-1| - \frac{13}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C \end{aligned}$$

5)

$$I = \int \frac{2x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx$$



Na podstawie rozkładu, wykonanego w przykładzie 2) na str. 37, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx - \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} \\ I &= \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} + C \end{aligned}$$

6) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{dx}{x^4+1}$$

Należałoby rozwiązać równanie  $x^4+1=0$ . Można jednak uniknąć tych rachunków, rozkładając  $x^4+1$  na dwa czynniki drugiego stopnia za pomocą następującego przekształcenia.

Dodajmy i odejmijmy  $2x^2$ , to:

$$\begin{aligned} x^4+1 &= x^4+1+2x^2-2x^2 = (x^2 \pm 1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2+1+\sqrt{2}x) \cdot (x^2+1-\sqrt{2}x) \end{aligned}$$

Rozkład na ułamki częściowe ma więc postać:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Metodą porównania współczynników otrzymamy po wykonaniu prostych rachunków:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad D = \frac{1}{2}$$

A więc:

$$I = \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx$$

Obydwie te całki oblicza się od razu przy pomocy wzoru (30) i otrzymuje się:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)] + C \end{aligned}$$

7) Dwa ciała, znajdujące się w roztworze w koncentracjach  $a$  i  $b$ , wytwarzają wskutek reakcji chemicznej (dwumolekularnej) trzecie ciało. Koncentracja tego nowego ciała w roztworze zmienia się w czasie od 0 do  $t$  od wartości początkowej 0 do wartości  $x$ . Szybkość tej reakcji wy-

raza się zapomocą pochodnej koncentracji  $x$  tego nowego ciała względem czasu  $t$ . Na tę szybkość wyprowadzono wzór:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

przyczem  $k$  oznacza pewną liczbę stałą. Chcemy wyznaczyć  $x$  jako funkcję zmiennej  $t$ . W tym celu wyznaczamy najpierw funkcję odwrotną, t. j.  $t$ , jako funkcję zmiennej  $x$ . Ponieważ  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ , przeto:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)}$$

a stąd:

$$t = \int \frac{dx}{k(a-x)(b-x)}$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki częściowe:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$

Stąd  $1 = Ab - Ax + Ba - Bx$ .

A więc:  $Ab + Ba = 1$ ,  $-A - B = 0$ . Stąd  $A = -B$ ,  $-Bb + Ba = 1$  a zatem:

$$B = \frac{1}{a-b}, \quad A = \frac{1}{b-a}$$

Wobec tego (założywszy, że  $x < a$  i  $x < b$ ) mamy:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{k} \int \frac{\frac{1}{b-a}}{a-x} dx + \frac{1}{k} \int \frac{\frac{1}{a-b}}{b-x} dx = \\ &= \frac{1}{k(a-b)} [\log(a-x) - \log(b-x)] + C \\ kt &= \frac{1}{a-b} \log \frac{a-x}{b-x} + C' \end{aligned}$$

Dla  $t = 0$  jest  $x = 0$ , zatem:

$$0 = \frac{1}{a-b} \log \frac{a}{b} + C'$$

Stąd:

$$C' = \frac{-1}{a-b} \log \frac{a}{b}$$

a więc:

$$kt = \frac{1}{a-b} \log \frac{a-x}{b-x} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{a-b} \log \frac{1-\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{b}}$$

Odwracamy tę funkcję i otrzymujemy:

$$\frac{1 - \frac{t}{a}}{1 - \frac{t}{b}} = e^{(a-b)kt}$$

a stąd:

$$x = \frac{ab(e^{(a-b)kt} - 1)}{ae^{(a-b)kt} - b}$$

## § 209. Całkowanie niektórych funkcyj niewymiernych algebraicznych.

W poprzednim paragrafie dowiedliśmy, że całka z każdej wymiernej funkcji składa się z skończonej liczby funkcyj elementarnych. Funkcje niewymierne tylko w wyjątkowych wypadkach posiadają całki złożone z skończonej liczby funkcyj elementarnych. Odnosi się to nie tylko do funkcyj niewymiernych, przestępnych, lecz także do funkcyj algebraicznych. Omówimy tu kilka takich specjalnych prostych przypadków, w których całki funkcyj niewymiernych algebraicznych dadzą się wyrazić za pomocą funkcyj elementarnych.

A. Pierwszym takim typem jest całka z funkcji *wymiernej* zmiennych:  $x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}$ , które są funkcjami niewymiernymi. Oznaczmy funkcję wymierną ilukolwiek zmiennych literą  $R$ .

Chodzi więc o obliczenie całki:

$$(31) \quad I = \int R(x^{\frac{a}{b}}, x^{\frac{c}{d}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}) dx$$

Znajdujemy wspólny mianownik  $m$  ułamków  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \dots, \frac{p}{q}$  i podstawiamy:

$$(31a) \quad x^{\frac{1}{m}} = t \quad \text{czyli} \quad x = t^m$$

Jeżeli

$$m = b \cdot a' = d \cdot c' = \dots = q \cdot p'$$

to

$$x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{aa'}{m}} = t^{aa'}, \quad x^{\frac{c}{d}} = x^{\frac{cc'}{m}} = t^{cc'}, \dots, x^{\frac{p}{q}} = t^{pp'}$$

Ponieważ ponadto:

$$dx = mt^{m-1} dt$$

to:

$$I = \int R(t^{aa'}, t^{bb'}, \dots, t^{pp'}) mt^{m-1} dt$$

Teraz już funkcja podcałkowa jest funkcją *wymierną* jednej zmiennej  $t$  (wszystkie niewymierności, wynikające z ułamkowych wykładników, zostały usunięte).

Tę funkcję wymierną całkujemy metodami, omówionymi w poprzednim paragrafie.

*Przykład.*

Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[3]{x^2} + 12\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x})} dx$$

Występują tu następujące ułamkowe wykładniki:  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{6}$ .

Wspólnym mianownikiem jest 12, podstawiamy więc:

$$x = t^{12}, \quad dx = 12 t^{11} dt$$

i otrzymujemy:

$$I = \int \frac{t^9 - 7t^8 + 12t^6}{t^{12}(t^4 - t^2)} 12 t^{11} dt = 12 \int \frac{t^6 - 7t^8 + 12t^3}{t^2 - 1} dt$$

Pod całką mamy już teraz funkcję wymierną. Wydzielamy część całkowitą i otrzymujemy:

$$t^4 - 7t^3 + t^3 + 5t + 1 + \frac{5t + 1}{t^2 - 1}$$

Pozostawiamy czytelnikowi wykonanie dalszych rachunków.

Ostateczny wynik jest:

$$I = \frac{11}{8}\sqrt[12]{x^5} - 21\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x} + 30\sqrt[6]{x} + 12\sqrt{x} + 2 \log(\sqrt[12]{x} + 1) + \\ + 3 \log|\sqrt[12]{x} - 1| + C$$

B. W podobny sposób postępujemy z następującą, ogólniejszą całką:

$$(32) \quad I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{r}{s}}, \dots\right) dx$$

Czynimy przytem założenie, że nie zachodzi proporcja  $a:c = b:g$ .

Tutaj  $R$  oznacza funkcję wymierną zmiennych  $x, y = \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots$  Aby ją zamienić na funkcję wymierną jednej zmiennej, sprowadzamy ułamki  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \dots$  do wspólnego mianownika  $m$ . Niechaj  $m = q \cdot p' = s \cdot r' = \dots$

Używamy podstawienia:

$$(32 a) \quad \left(\frac{ax+b}{cx+g}\right)^{\frac{1}{m}} = t$$

czyli:

$$\frac{ax + b}{cx + g} = t^m$$

a więc:

$$x = \frac{gt^m - b}{a - ct^m}$$

Wtedy.

$$\left(\frac{ax + b}{cx + g}\right)^n = \left(\frac{ax + b}{cx + g}\right)^{\frac{np}{m}} = t^{np}$$

Podobnie:

$$\left(\frac{ax + b}{cx + g}\right)^r = t^{r'}$$

Potrzebne jest jeszcze:

$$dx = \frac{(a - ct^m) mgt^{m-1} + (gt^m - b) cmt^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt = \frac{ag - bc}{(a - ct^m)^2} mt^{m-1} dt$$

Jeżeli te wszystkie wielkości wprowadzimy pod całkę, to otrzymamy funkcję wymierną jednej zmiennej  $t$ .

Sprowadziliśmy więc to zagadnienie do znanych całek.

*Przykładu.* 1) Obliczyć:

$$I = \int \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} dx$$

zakładając, że  $x > 3$ .

Podstawiamy  $\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} = t$ . Stąd  $x = 3 \frac{1+t^2}{1-t^2}$

$$dx = 3 \cdot \frac{(1-t^2)2t + (1+t^2)2t}{(1-t^2)^2} = \frac{12t}{(1-t^2)^2}$$

Wobec tego:

$$I = \int t \frac{12t}{(1-t^2)^2} dt$$

Funkcja podcałkowa jest już wymierną funkcją zmiennej  $t$ . Rozkładamy ją znaną metodą na ułamki częściowe i otrzymujemy:

$$\frac{12t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{3}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} - \frac{3}{t+1} + \frac{3}{(t+1)^2}$$

a więc:

$$\begin{aligned} I &= 3 \log |t-1| - 3 \log |t+1| - \frac{3}{t-1} - \frac{3}{t+1} + C = \\ &= 3 \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{6t}{1-t^2} + C \end{aligned}$$

Powróćmy do zmiennej  $x$ , otrzymamy po uporządkowaniu:

$$I = 3 \log \frac{|\sqrt{x^2 - 9} - x|}{3} + \sqrt{x^2 - 9} + C$$

2) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{x^3}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} dx$$

Podstawiamy:  $(x-1)^{\frac{1}{2}} = t$ , więc  $x = t^2 + 1$ ,  $dx = 2t dt$ , zatem:

$$I = \int \frac{(t^2 + 1)^3}{t} 2t dt = 2 \int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1) dt$$

$$I = 2 \left( \frac{1}{7} t^7 + \frac{3}{5} t^5 + t^3 + t \right) + C$$

$$I = 2 \left( \frac{1}{7} \sqrt{x-1}^7 + \frac{3}{5} \sqrt{x-1}^5 + \sqrt{x-1}^3 + \sqrt{x-1} \right) + C$$

*Uwaga.* Do tego typu należą niektóre z t. zw. całek *dwumiennych*, t. j. z całek postaci:

$$D = \int x^u (a + bx)^w dx$$

a mianowicie wtedy, gdy albo  $u$  albo  $w$  jest liczbą całkowitą (w tym drugim przypadku sprowadza się tę całkę do typu  $B$  przez podstawienie  $a + bx = x$ ). Także gdy suma  $u + w$  jest liczbą całkowitą, można tę całkę sprowadzić do typu  $B$ , pisząc ją w postaci:

$$D = \int x^{u+v} \left( \frac{a + bx}{x} \right)^w dx$$

Udowodniono<sup>1)</sup> jednakże, że tylko w tych trzech przypadkach całka dwumienna jest funkcją elementarną. We wszystkich pozostałych przypadkach (np. dla  $u = \frac{1}{2}$ ,  $w = \frac{1}{2}$ ) otrzymujemy z całek dwumiennych nowe przestępne funkcje, nie należące do funkcji elementarnych.

C. Bardzo często występują w zastosowaniach całki postaci:

$$(C) \quad \int R(x, y) dx = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

przyczem  $R(x, y)$  jest funkcją wymierną dwóch zmiennych  $x$  i  $y$ ; natomiast  $R(x, y)$ , uważana jako funkcja złożona jednej zmiennej  $x$ , jest najczęściej funkcją niewymierną. Zakładamy przytem, że funkcja pod pierwiastkiem jest nieujemna, a więc drugi pierwiastek z tej funkcji ma wartości rzeczywiste. Okażemy, że całki tej postaci można zawsze przez odpowiednio dobrane podstawienia sprowadzić do całek z funkcji wymiernych jednej zmiennej, a więc są one w każdym przypadku funkcjami elementarnymi. Rozróżnimy tu 3 przypadki, zależnie od znaków współczynników  $a$  i  $c$  trójmianu  $ax^2 + bx + c$ , a mianowicie: 1°  $a > 0$ , 2°  $c \geq 0$ ,

<sup>1)</sup> Dowód podał Czebyszew w r. 1853 w 18-ym tomie Journal de Liouville.

3°  $a < 0$  i równocześnie  $c < 0$ . Przypadkiem  $a = 0$  nie trzeba się tu zajmować, wtedy bowiem mielibyśmy do czynienia z całką:

$$\int R(x, \sqrt{bx+c}) dx$$

należącą do omówionego poprzednio typu B (zapomocą podstawienia  $bx+c=t^2$  sprowadzamy ją do całki z funkcji wymiernej). W całym rachunku chcemy operować tylko liczbami *rzeczywistymi*.

1°. Jeżeli  $a > 0$ , to używamy podstawienia:

$$(33) \quad \boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + x\sqrt{a}}$$

Jest ono tak dobrane, że po podniesieniu obu stron do kwadratu odpadną wyrazy, zawierające  $x^2$  i pozostanie równanie pierwszego stopnia na wyznaczenie  $x$  jako funkcji nowej zmiennej  $t$ . I tak;

$$ax^2 + bx + c = t^2 + 2xt\sqrt{a} + ax^2$$

a więc:

$$bx + c = t^2 + 2t\sqrt{a}x$$

a stąd:

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$$

Wobec tego:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$$

$$dx = \frac{2bt - 2t^3\sqrt{a} - 2c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt$$

Wprowadzając te wyrażenia w całkę (C), otrzymamy funkcję *wymierną* zmiennej  $t$ .

Zamiast podstawienia (33) można także użyć podstawienia:

$$(33a) \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$$

*Przykłady.*

Obliczyć całkę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k+x^2}}$$

Aby wyrażenie pod pierwiastkiem było dodatnie, musi być  $|k| < x^2$ , w razie gdy  $k$  jest liczbą ujemną. Ponieważ  $a = 1 > 0$ , przeto możemy użyć podstawienia (33a) i otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sqrt{k+x^2} &= t - x \\ k+x^2 &= t^2 - 2tx + x^2 \end{aligned}$$

z stąd:

$$x = \frac{t^2 - k}{2t}, \quad \sqrt{k + x^2} = t - \frac{t^2 - k}{2t} = \frac{t^2 + k}{2t}$$

$$dx = \frac{t^2 + k}{2t^2} dt$$

Zatem:

$$I = \int \frac{2t}{t^2 + k} \cdot \frac{t^2 + k}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C$$

czyli:

$$(34) \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{k + x^2}} = \log |x + \sqrt{k + x^2}| + C}$$

Do tej całki sprowadzamy z łatwością całkę:

$$I_1 = \int \sqrt{k + x^2} dx$$

Posługujemy się w tym celu całkowaniem „per partes“, kładąc:

$$\sqrt{k + x^2} = u, \quad dx = dv$$

$$du = \frac{x}{\sqrt{k + x^2}} dx, \quad v = x$$

Zatem:

$$I_1 = x \sqrt{k + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{k + x^2}} dx = x \sqrt{k + x^2} - \int \frac{x^2 + k - k}{\sqrt{k + x^2}} dx$$

$$I_1 = x \sqrt{k + x^2} - \int \sqrt{k + x^2} dx + k \int \frac{dx}{\sqrt{k + x^2}}$$

$$I_1 = x \sqrt{k + x^2} - I_1 + k \log |x + \sqrt{k + x^2}| + C_1$$

$$2 I_1 = x \sqrt{k + x^2} + k \log |x + \sqrt{k + x^2}| + C_1$$

a więc ostatecznie:

$$(35) \quad \boxed{I_1 = \int \sqrt{k + x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{k + x^2} + k \log |x + \sqrt{k + x^2}|) + C}$$

(Porównaj ten wzór z wzorem 25a na str. 25!).

Do obliczenia tej całki możnaby oczywiście dojść także, używając odrazu podstawienia  $\sqrt{k + x^2} = t - x$ , lecz droga, której tu użyto, prowadzi szybciej do celu.

*Uwaga.* Obierając we wzorze (34)  $k = 1$ , otrzymujemy:

$$(34a) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log (x + \sqrt{1 + x^2}) + C$$



(znak bezwzględnej wartości można opuścić, ponieważ zawsze jest  $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ ). Wiadomo (por. tom I, str. 290—291), że funkcja  $\log(x + \sqrt{1+x^2})$  jest funkcją odwrotną względem funkcji hiperbolicznej  $x = \sin \text{hyp } y$ ; oznaczamy ją symbolem  $y = \text{arsin hyp } x$ . Zatem:

$$(34 \text{ b}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{arsin hyp } x + C$$

Pisząc ten wzór w tej postaci, spostrzegamy analogję z znanym wzorem (12):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Podobnie kładąc  $k = -1$ , otrzymujemy wzory:

$$(34 \text{ c}) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C = \text{arcoshyp } x + C \quad (\text{dla } x > 1) \\ &= \text{arcoshyp}(-x) + C \quad (\text{dla } x < -1) \end{aligned} \right.$$

przyczem  $y = \text{ar cos hyp } x$  jest funkcją odwrotną względem funkcji hiperbolicznej  $x = \text{cos hyp } y$ .

2°. Jeżeli  $c \geq 0$ , to używamy podstawienia:

$$(36) \quad \boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx}$$

przez co osiągamy, że po podniesieniu do kwadratu odpada wolny wyraz po obu stronach. I tak:

$$ax^2 + bx + c = c + 2tx\sqrt{c} + t^2x^2$$

$$ax^2 + bx = 2tx\sqrt{c} + t^2x^2$$

$$ax + b = 2t\sqrt{c} + t^2x$$

$$x = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + t \cdot \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$$

Zatem zarówno  $x$ , jak i  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ , wyrażają się *wymiernie* za pomocą nowej zmiennej  $t$ , wobec czego i całka (C) zamieni się na całkę z funkcji wymiernej.

Podstawienia tego używa się zwłaszcza wtedy, gdy  $a$  jest liczbą ujemną.

*Przykład.*

W teorii ruchu wahadłowego występuje całka:

$$I = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{bx - x^2}}$$

Spółczynnik  $a$  ma tu wartość  $-1$ , a więc nie można użyć podstawienia (33), o ile chcemy operować tylko liczbami rzeczywistymi; natomiast  $c = 0$ , a więc może być użyte podstawienie (36). Podstawiamy więc:

$$\sqrt{bx - x^2} = \sqrt{0 + tx}$$

Stąd:

$$bx - x^2 = t^2 x^2$$

a więc:

$$x = \frac{b}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-2bt}{(1+t^2)^2} dt, \quad \sqrt{bx - x^2} = \frac{bt}{1+t^2}$$

Zatem:

$$I = -2b^n \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

Sprowadziliśmy w ten sposób badaną całkę do całki z funkcji wymiernej, a mianowicie do całki, omówionej dokładnie już w § 207 (przykład 16), którą się oblicza przy pomocy wzoru redukcyjnego.

3° Jeżeli  $a < 0$  i  $c < 0$ , a wyrażenie  $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$  ma być rzeczywiste, to równanie:

$$(r) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

musi posiadać pierwiastki rzeczywiste. Albowiem:

$$y = ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$$

Ponieważ  $a < 0$ , przeto i wyrażenie, w klamrze zawarte, musi mieć wartość ujemną, a to może zachodzić tylko wtedy, gdy  $4ac - b^2 < 0$  czyli  $b^2 - 4ac > 0$ ; wiadomo zaś, że wtedy równanie (r) ma pierwiastki rzeczywiste. Oznaczmy te pierwiastki literami  $\alpha$  i  $\beta$ . Trójmian  $ax^2 + bx + c$  można więc przedstawić w postaci  $a(x - \alpha)(x - \beta)$ , a więc:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)}$$

Załóżmy, że  $x > \alpha$ . Wylączając przed pierwiastek  $x - \alpha$ , otrzymujemy:

$$y = (x - \alpha) \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$$

a więc całka (C) należy wtedy do typu B.

Przez podstawienie:

(37)

$$\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}} = t$$

sprowadzamy ją zatem do całki z funkcji wymiernej nowej zmiennej  $t$ , jak to omówiono w przypadku B.

Do tego samego wniosku dochodzimy, zakładając  $x < \alpha$ , ponieważ wtedy:

$$y = (\alpha - x) \sqrt{\frac{a(x - \beta)}{x - \alpha}}$$

Podstawienia (37) można użyć zawsze, gdy równanie (r) posiada pierwiastki rzeczywiste, a więc także wtedy, gdy  $a > 0$  lub  $c > 0$ .

*Przykład.*

Obliczyć całkę:

$$\int \sqrt{-x^2 + 5x - 6} dx$$

Z równania  $-x^2 + 5x - 6 = 0$  otrzymujemy pierwiastki:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3$$

a więc:

$$-x^2 + 5x - 6 = -(x - 2)(x - 3) = (x - 2)(3 - x)$$

Załóżmy, że  $2 < x < 3$ , to iloczyn ten jest stale dodatni a zatem pierwiastek, występujący pod całką, jest rzeczywisty. Wtedy:

$$\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = \sqrt{(x - 2)(3 - x)} = (x - 2) \sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}}$$

Używamy podstawienia:

$$\sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}} = t$$

Wtedy:

$$\frac{3 - x}{x - 2} = t^2, \quad x = \frac{3 + 2t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2} dt$$

$$\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = \left( \frac{3 + 2t^2}{1 + t^2} - 2 \right) t = \frac{t}{1 + t^2}$$

A więc:

$$\int \sqrt{-x^2 + 5x - 6} dx = \int \frac{-2t^2}{(1 + t^2)^3} dt$$

Sprowadziliśmy więc to zagadnienie do całkowania funkcji wymiernej. Pozostawia się czytelnikowi dalsze wykonanie rachunków (rozkład na ułamki częściowe, zastosowanie wzoru redukcyjnego 27 z § 207).

Wynik:

$$\int \sqrt{-x^2 + 5x - 6} dx = -\frac{1}{4} \arctg \sqrt{\frac{3 - x}{x - 2}} + \frac{2x - 5}{4} \sqrt{-x^2 + 5x - 6} + C$$

Podstawienia, zawarte we wzorach (33), (36) i (37), służące do uwymiernienia funkcji podcałkowej w całce typu C, nazywamy podstawieniami Eulera.

Często używa się dla takich całek także innych podstaawień, a mianowicie podstawień *trygonometrycznych*, które zamieniają funkcję podcałkową nie na funkcję wymierną lecz na funkcję przestępną, jednakże łatwą do całkowania. Zanim się użyje takiego podstawienia, należy sprowadzić trójmian, znajdujący się pod pierwiastkiem, do formy kanonicznej, to znaczy przedstawić go jako sumę lub różnicę dwóch kwadratów. Ponieważ zakładamy, że pierwiastek z tego trójmianu jest rzeczywisty, przeto mogą tu wystąpić tylko trzy następujące formy kanoniczne;

$$x^2 + k^2, \quad x^2 - k^2, \quad k^2 - x^2$$

natomiast nie może wystąpić forma  $-x^2 - k^2$ .

Sprowadzamy więc całkę (C) do jednej z następujących całek:

$$a) \int R_1(x, \sqrt{k^2 - x^2}) dx, \quad b) \int R_1(x, \sqrt{x^2 + k^2}) dx,$$

$$c) \int R_1(x, \sqrt{x^2 - k^2}) dx$$

a) W pierwszym przypadku używamy podstawienia:

$$(38) \quad \underline{x = k \sin t}$$

zakładając, że  $k$  jest liczbą dodatnią.

Wtedy:

$$\sqrt{k^2 - x^2} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 t} = k \sqrt{1 - \sin^2 t} = k \cos t \\ dx = k \cos t dt$$

i otrzymujemy całkę:

$$\int R_1(k \sin t, k \cos t) k \cos t dt$$

Taką zaś całkę, zbudowaną w sposób wymierny z funkcji trygonometrycznych, łatwo jest zwykle całkować, jak to zobaczymy dokładnie w następnym paragrafie. Można także użyć podstawienia:  $x = k \cos t$ .

b) Także w drugim przypadku używamy takiego podstawienia, by zniknął drugi pierwiastek. Tu już podstawienie (38) nie prowadzi do celu, natomiast następujące podstawienie okazuje się odpowiednim:

$$(39) \quad \underline{x = k \operatorname{tg} t}$$

Wtedy bowiem:

$$\sqrt{x^2 + k^2} = \sqrt{k^2 \operatorname{tg}^2 t + k^2} = k \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = k \operatorname{sect} = \frac{k}{\cos t} \\ dx = \frac{k dt}{\cos^2 t}$$

Całka b) zamieni się więc na:

$$\int R_1\left(\frac{k \sin t}{\cos t}, \frac{k}{\cos t}\right) \cdot \frac{k}{\cos^2 t} dt \quad .$$

a zatem jest znowu zbudowana w sposób wymierny z funkcj trygonometrycznych  $\sin t$ ,  $\cos t$ .

c) Wreszcie w trzecim przypadku odpowiedniem podstawieniem jest:

$$(40) \quad x = k \sec t$$

Istotnie wtedy:

$$\sqrt{x^2 - k^2} = \sqrt{k^2 \sec^2 t - k^2} = k \sqrt{\sec^2 t - 1} = k \operatorname{tg} t$$

$$dx = \frac{k \sin t}{\cos^2 t} dt$$

a więc z całki c) otrzymujemy:

$$\int R_1 \left( \frac{k}{\cos t}, \frac{k \sin t}{\cos t} \right) \cdot \frac{k \sin t}{\cos^2 t} dt$$

a zatem znowu funkcję, złożoną w sposób wymierny z funkcj  $\sin t$  i  $\cos t$ .

## § 210. Całkowanie funkcj, złożonych w sposób wymierny z funkcj trygonometrycznych.

Zajmiemy się tu całkowaniem takich funkcj wymiernych dwóch zmiennych:  $R(y, z)$ , w których  $y = \sin x$ ,  $z = \cos x$ . Są to więc funkcje złożone jednej zmiennej  $x$ :

$$R(\sin x, \cos x)$$

Wykażemy, że całkę z każdej takiej funkcji można przekształcić na całkę z funkcji wymiernej nowej zmiennej  $t$ , że zatem każda taka całka jest funkcją elementarną. W tym celu używamy w całce:

$$I = \int R(\sin x, \cos x) dx$$

podstawienia:

$$(41) \quad \boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$$

Wiadomo bowiem z trygonometrii, że wszystkie funkcje trygonometryczne są wymiernymi funkcjami tej nowej zmiennej  $t$ , a mianowicie:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Potrzebne jest jeszcze  $dx$ . Otóż:

$$x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t$$

a wobec tego:

$$\underline{dx = \frac{2 dt}{1+t^2}}$$

Po wykonaniu tego podstawienia całka  $I$  przyjmuje postać:

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

a więc funkcja podcałkowa nie zawiera żadnych pierwiastków ani funkcji przestępnych, lecz jest jakąś wymierną funkcją  $R_1(t)$  jednej zmiennej  $t$ :

$$I = \int R_1(t) dt$$

Możemy zatem wykonać całkowanie metodami, wyłożonemi w § 208. Jako wynik otrzymamy zawsze elementarną funkcję zmiennej  $t$ , a więc elementarną (zwykle złożoną) funkcję zmiennej  $x$ .

*Przykłady.*

1) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$$

Używamy podstawienia (41) i otrzymujemy:

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{5 + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5 + 5t^2 + 3 - 3t^2} = 2 \int \frac{dt}{8 + 2t^2} = \int \frac{dt}{4 + t^2}$$

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Kładziemy  $\frac{t}{2} = u$ ,  $dt = 2 du$  i otrzymujemy:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C$$

czyli:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

2) Obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$$

Podstawienie (41) prowadzi do następującej całki:

$$I = \int \frac{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^3} = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right) dt$$

$$I = \frac{1}{4} \left( \frac{t^{-2}}{-2} - 2 \log |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C$$

czyli:

$$I = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 2 \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right] + C$$

3) Całkę:

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

chcemy sprowadzić do całki z funkcji wymiernej. Używając podstawienia (41), otrzymujemy:

$$I = \int \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = 64 \int \frac{t^5 (1-t^2)^2}{(1+t^2)^5} dt$$

Uzyskaliśmy wprawdzie wymierną funkcję podcałkową, lecz dalszy rachunek, prowadzący do obliczenia tej całki, byłby bardzo uciążliwy. Przy rozkładzie na ułamki częściowe otrzymalibyśmy bowiem 8 ułamków postaci:  $\frac{A_1 t + B_1}{1+t^2}, \frac{A_2 t + B_2}{(1+t^2)^2}, \dots$  a więc trzeba by rozwiązywać 16 równań celem wyznaczenia współczynników  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$

Zobaczymy jednak (na str. 56), że całkę tę można obliczyć w sposób o wiele prostszy, używając innego podstawienia.

4) Sprowadzić do całki z funkcji wymiernej całkę:

$$I = \int \frac{dx}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

Przy pomocy podstawienia (41) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{a \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + 2b \frac{(1-t^2) 2t}{(1+t^2)^2} + c \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2} = \\ &= 2 \int \frac{(1+t^2) dt}{4at^2 + 4bt(1-t^2) + c(1-t^2)^2} \end{aligned}$$

Prostszą formę jednakże uzyskujemy, używając tu podstawienia:

$$\operatorname{tg} x = t$$

Po podzieleniu licznika i mianownika przez  $\cos^2 x$  otrzymujemy bowiem:

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a \operatorname{tg}^2 x + 2b \operatorname{tg} x + c} = \int \frac{dt}{at^2 + 2bt + c}$$

a do tej całki można zastosować metodę, podaną w przykładzie 10b na str. 23.

Jakkolwiek więc podstawienie  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  prowadzi do celu zawsze, gdy funkcja podcałkowa jest zbudowana w sposób wymierny z funkcji trygonometrycznych, to jednak w wielu wypadkach praktyczniejsze są inne podstawienia i inne metody całkowania. Tak się ma rzecz np. przy obliczaniu całek postaci:

$$(T) \quad I = \int \sin^s x \cos^k x dx$$

które występują bardzo często w zastosowaniach. Wykładniki  $s, k$  mogą tu być dowolnymi liczbami całkowitymi (dodatnimi, ujemnymi lub zerami). Rozróżniamy tu kilka przypadków.

a) Jeżeli któryś z wykładników jest równy 0, to otrzymujemy całkę:

$\int \sin^s x dx$  lub  $\int \cos^k x dx$ , a do tych całek stosujemy wzory redukcyjne, omówione w §§ 206 i 207 (wzory 17, 17a, 20 i 20a na str. 14, 15, 21 i 22).

b) Jeżeli  $s$  jest liczbą dodatnią, nieparzystą:  $s = 2n + 1$ , to przedstawiamy całkę w postaci:

$$I = \int \sin^{2n} x \cos^k x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^n \cos^k x d(\cos x).$$

Widoczne jest, że podstawienie:

$$\cos x = t$$

sprowadza funkcję podcałkową do funkcji wymiernej:

$$I = - \int (1 - t^2)^n t^k dt$$

*Przykład.*

Zastosujmy to podstawienie do całki

$$I = \int \sin^5 x \cos^2 x dx$$

(omówionej na str. 55, przykł. 3). Otrzymamy:

$$\begin{aligned} I &= - \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x d(\cos x) = - \int (1 - t^2)^2 t^2 dt = \\ &= - \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt \end{aligned}$$

Zatem:

$$I = -\frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{7} t^7 - \frac{1}{9} t^9 + C = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C$$

Widzimy, o ile szybciej prowadzi to podstawienie do celu aniżeli ogólne podstawienie  $t = \frac{x}{2}$ .

c) Jeżeli  $k$  jest liczbą dodatnią, nieparzystą:  $k = 2n + 1$ , to używamy podstawienia:

$$\sin x = t$$

Całkę  $I$  możemy bowiem wtedy przedstawić w postaci:

$$I = \int \sin^s x (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \int \sin^s x (1 - \sin^2 x)^n d(\sin x)$$



A więc:

$$I = \int t^s (1 - t^2)^n dt$$

*Przykład.*

$$I = \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^2 x} d(\sin x)$$

Dla  $\sin x = t$  otrzymujemy:

$$I = \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^2} dt = \int \left( \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^0} + \frac{1}{t^2} \right) dt = -\frac{1}{t} + t^2 + \log |t| + C$$

A więc:

$$I = -\frac{1}{4 \sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \log |\sin x| + C$$

d) Jeżeli któraś z liczb  $s$ ,  $k$  jest dodatnią, parzystą, to sprowadzamy całkę do przypadku a), zastępując dla  $s = 2n$  funkcję  $\sin^2 x$  przez  $1 - \cos^2 x$ , a w przypadku  $k = 2n$  funkcję  $\cos^2 x$  przez  $1 - \sin^2 x$ .

*Przykład.*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^3 x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\sin^3 x} - 2 \int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x dx \end{aligned}$$

Pierwszą z otrzymanych całek obliczamy przy pomocy wzoru redukcyjnego (17 a):

$$S_{-3} = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{\cos x \sin^{-2} x}{-2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}$$

A więc:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sin x} + \int \sin x dx = \\ &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \cos x + C \end{aligned}$$

(Użyliśmy tu wzoru 23 na str. 24 do obliczenia  $\int \frac{dx}{\sin x}$ ).

e) Jeżeli obydwie liczby  $s$  i  $k$  są ujemne, to albo  $s + k = -2n$ , albo  $s + k = -2n - 1$ . Wtedy mnożymy licznik przez:  $1^s = (\sin^2 x + \cos^2 x)^s$  i rozkładamy daną całkę na sumę kilku całek, należących do poprzednich typów.

*Przykład.*

Obliczyć:

$$I = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}$$

Tu  $s + k = -4 - 3 = -7 = -2 \cdot 3 - 1$  a więc  $n = 3$ . Piszemy zatem w liczniku zamiast  $dx$  iloczyn  $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 dx$  i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 dx}{\sin^4 x \cos^3 x} = \\ &= \int \frac{\sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x}{\sin^4 x \cos^3 x} dx \end{aligned}$$

czyli:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx + 3 \int \frac{dx}{\cos x} + 3 \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$

Z tych całek pierwsza należy do typu d) drugą obliczamy posługując się wzorem 24 na str. 25, a trzecia i czwarta należą do typu c). Po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy:

$$I = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{3}{2} \log \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^2 x} + C$$

*Uwagi.*

1) Jeżeli  $s + k = -2n$  (przyczem jedna z tych liczb może być dodatnia), to bardzo praktyczne jest podstawienie:

$$\operatorname{tg} x = t$$

*Przykład.*

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^6 x} = \\ &= \int \frac{\sec^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^2 x} d(\operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

$$I = \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^2} dt = \int \left( \frac{1}{t^2} + 2 + t^2 \right) dt = -\frac{1}{t} + 2t + \frac{1}{3} t^3 + C$$

$$I = -\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$$

2) Jeżeli suma wykładników jest liczbą ujemną nieparzystą:  $s + k = -2n - 1$ , to korzystnie jest użyć podstawienia:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

jeżeli w mianowniku jest tylko potęga funkcji  $\sin x$  (t. j.  $s < 0$ ,  $k \geq 0$  jak w przykładzie 2 na str. 54), a podstawienia:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) = t$$

jeżeli w mianowniku jest tylko potęga funkcji  $\cos x$  (t. j. jeżeli  $k < 0$ ,  $v \geq 0$ ).

*Przykład.*

Obliczyć:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$\text{Kładziemy } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) = t, \quad \text{to } \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad x = \frac{1}{2} \pi - 2 \operatorname{arctg} t,$$

$$dx = \frac{-2 dt}{1+t^2}, \quad \sin \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) = \frac{2t}{1+t^2} = \cos x, \quad \cos \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \sin x$$

Zatem:

$$I = -2 \int \frac{\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3}}{1+t^2} dt = -\frac{1}{4} \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = -\frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t} + t \right) dt$$

$$I = -\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} t^{-2} - 2 \log |t| + \frac{1}{2} t^3 \right) + C =$$

$$= \frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right)} + \frac{1}{2} \log \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) \right| - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) + C$$

$$I = \frac{\sin x}{2 \cos^3 x} + \frac{1}{2} \log \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \pi - x \right) \right| + C$$

Stosując do całki (T) omówione tu podstawienia i przekształcenia, zamiast jednolitej, ogólnej metody, omówionej na str. 53, uzyskujemy to, że rozkład funkcji wymiernej, otrzymanej pod całką po tych przekształceniach, otrzymuje się odrazu, bez mozolnego nieraz obliczania współczynników rozkładu tej funkcji na ułamki częściowe.

Zarówno wśród całek z funkcj algebraicznych, jak i wśród całek z funkcj przestępnych, znajdujemy bardzo wiele całek, które się nie dadzą sprowadzić do funkcj elementarnych a więc nie dadzą się całkować elementarnymi metodami. Do takich całek należą, jak to już wspomnieliśmy w § 209 B, niektóre całki dwumienne. Takimi są także w ogólnym przypadku całki, zawierające drugi pierwiastek z wielomianu wyższego stopnia aniżeli 2, np.

$$\int \sqrt{a_0 w^3 + b w^2 + c w + d} dx, \quad \int \sqrt{a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5} dx$$

Całki, w których występuje tylko drugi pierwiastek z wielomianem 3-go lub 4-go stopnia, nazywamy *całkami eliptycznymi*. Nazwa pochodzi stąd, że takie całki występują przy obliczaniu długości łuku elipsy (por. § 229); występują one także w licznych zagadnieniach fizyki matematycznej i techniki. Jeżeli pod pierwiastkiem występuje wielomian jeszcze wyższego stopnia, to całkę nazywamy *hypereliptyczną*.

Także następujące całki z dość prostych funkcji przestępnych nie dają się wyrazić zapomocą funkcji elementarnych:

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\log x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx$$

Okazemy w dalszych rozdziałach, że rozmaite takie całki można obliczać i badać przy pomocy nieskończonych szeregów. Każda z nich określa jakąś nową funkcję przestępną, nie należącą do funkcji elementarnych.

W ten sposób rachunek całkowy wprowadził wydatne rozszerzenie zakresu badań matematycznych.

---

RÓZDZIAŁ XVIII.

O całkach oznaczonych.

§ 211. Definicja pola figury płaskiej.

Pojęcie całki pozostaje w bardzo bliskim związku z pewnym zagadnieniem geometrycznym a mianowicie z badaniem pól rozmaitych powierzchni płaskich. W matematyce elementarnej poznaje się metody, służące do znalezienia liczby, która jest miarą powierzchni dowolnego wielokąta (ograniczonego odcinkami linii prostych); tę liczbę nazywamy *polem* tego wielokąta. W szczególności przyjmiemy tu jako znany wzór na pole prostokąta i opierając się tylko na tym wzorze, podamy metodę obliczania pól dowolnych powierzchni płaskich, ograniczonych także liniami krzywymi. Najpierw weźmiemy pod uwagę powierzchnię, ograniczoną łukiem jakiejś linii o równaniu:

$$y = f(x)$$

rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią  $x$ -ów (jak na fig. 2). Załóżmy, że funkcja  $f(x)$  jest *ciągła* w badanym przedziale i *nieujemna*, t. j. że cała badana powierzchnia leży nad osią odciętych. Przy pomocy wiadomości z matematyki elementarnej nie potrafimy w ogólnym przypadku znaleźć liczby, która by podawała w sposób zupełnie ścisły miarę takiej powierzchni a nawet nie posiadamy *definicji* takiej liczby, którą by należało nazwać *polem* tej figury: nie mamy bowiem nawet żadnego ścisłego praktycznego sposobu *mierzenia* takich powierzchni. Otóż pierwszym naszym zadaniem będzie konstrukcja takiej ogólnej definicji pola, która by odpowiadała intuicyjnemu pojmowaniu pola. Powierzchnia, o którą nam chodzi, jest z jednej strony ograniczona odcinkiem  $ab$ , leżącym na osi  $x$ -ów. Dzielimy przedział  $\langle a, b \rangle$  na do-

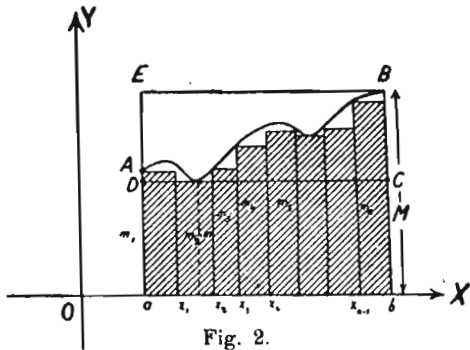


Fig. 2.

określenia pól powierzchni płaskich, ograniczonych także liniami krzywymi. Najpierw weźmiemy pod uwagę powierzchnię, ograniczoną łukiem jakiejś linii o równaniu:

wolną, skończoną liczbę części, np. na  $n$  części niekoniecznie równych, obierając w tym przedziale w zupełnie dowolny sposób kolejne punkty o odciętych:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ . Wtedy  $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b$ . Wykreślamy rzędne danej linii, należące do tych punktów. Rozkładamy w ten sposób daną powierzchnię na skończony szereg pasków. W każdym z tych pasków rzędne danej linii o równaniu  $y = f(x)$  osiągają wartości najmniejsze i największe, odpowiadające najmniejszej wartości  $m_i$  i największej wartości  $M_i$  funkcji ciągłej  $f(x)$  w każdym z przedziałów o szerokości  $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ . Przez najniższy punkt linii w każdym pasku wykreślamy odcinek prostej równoległej do osi odciętych aż do przecięcia się z rzędnymi, ograniczającymi dany pasek. W ten sposób otrzymujemy figurę schodkową, złożoną z skończonego szeregu prostokątów. Nazwijmy te prostokąty minimalnemi. Suma pól tych prostokątów, zacieńnianych na fig. 2, jest równa:

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + \dots + m_n(b - x_{n-1})$$

czyli:

$$(42) \quad s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Przy każdym podziale przedziału  $\langle a, b \rangle$  otrzymamy w ten sposób jakąś wartość  $s$  na sumę pól prostokątów minimalnych. Zbiór tych wszystkich liczb  $s$  jest ograniczony z góry liczbą  $M \cdot (b - a)$ , gdzie  $M$  oznacza największą wartość funkcji  $f(x)$  w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$ , liczba ta bowiem jest polem prostokąta  $abBE$ , zawierającego wszystkie szeregi prostokątów minimalnych. Wobec tego zbiór liczb  $s$  posiada kres górny, t. j. istnieje najmniejsza z liczb, ograniczających zbiór liczb  $s$  z góry. Oznaczmy

ten kres górny symbolem  $K[s]$  lub wyraźniej:  $K \left[ \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \right]$ . Otóż ten

kres górny pól szeregów prostokątów minimalnych obieramy za miarę pola figury  $abBA$ . Przyjmujemy więc następującą definicję pola takiej figury: *kres górny pól wszystkich szeregów prostokątów minimalnych jest miarą badanej powierzchni; nazywamy go polem tej powierzchni:*

$$P = K[s] = K \left[ \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \right]$$

Krótko, lecz mniej dokładnie, można powiedzieć: za miarę takiej powierzchni obieramy górny kres pól wszystkich możliwych figur schodkowych, wpisanych w tę powierzchnię.

Całe powyższe rozumowanie odnosiło się do funkcji nieujemnych a więc do powierzchni, leżących nad osią odciętych. Postępując podobnie

dla funkcji niedodatnich w badanym przedziale (por. fig. 3), stwierdzamy, że szereg prostokątów minimalnych zawiera całą badaną powierzchnię. Liczby  $s$ , określone zapomocą wzoru (42), są w tym przypadku liczbami niedodatnimi, albowiem wszystkie  $m_i$  są niedodatnie. Wobec tego i kres górny  $K[s]$  tych liczb  $s$  nie może być liczbą dodatnią. Natomiast liczba  $-K[s]$  jest wtedy nieujemną i tę liczbę nieujemną uważamy za miarę takiego pola, leżącego pod osią odciętych. A więc dla  $f(x) \leq 0$  jest:  $P = -K[s] =$

$$= -K \left[ \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \right]$$

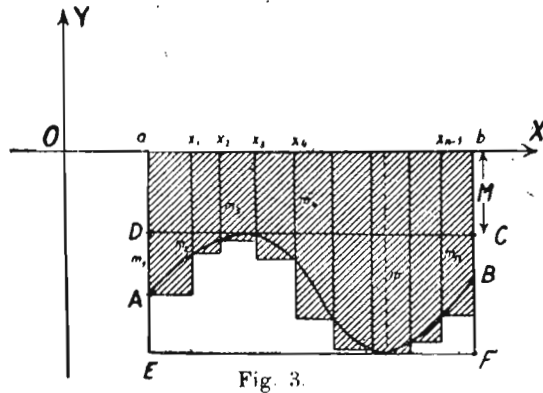


Fig. 3.

*Uwaga.* Do definicji pola takich powierzchni, leżących pod osią  $x$ -ów, możnaby użyć prostokątów maksymalnych, t. j. odpowiadających najwyższym punktom w każdym pasku. Kres dolny odpowiednich sum, wzięty ze znakiem przeciwnym, należałoby wtedy uważać za miarę takiego pola. Okażemy później, że dla funkcji ciągłych  $f(x)$  obydwie te definicje dają tę samą liczbę  $P$  jako miarę pola tej powierzchni. Definicje te, zarówno jak i niektóre twierdzenia z nich wynikające, można stosować także w przypadku, gdy funkcja  $f(x)$  jest nieciągła lecz ograniczona i posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości. Istnieje bowiem wtedy zarówno kres górny jak i kres dolny sum, występujących w tych definicjach.

W ten sposób mamy już określone pole każdej powierzchni, ograniczonej łukiem linii o równaniu  $y=f(x)$ , gdzie  $f(x)$  jest funkcją ciągłą, rzęd-

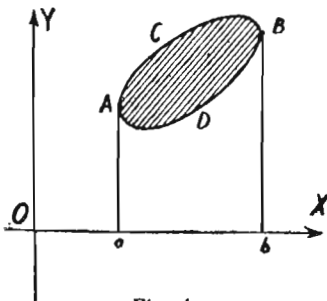


Fig. 4 a.

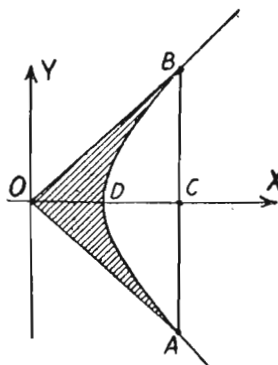


Fig. 4 b.

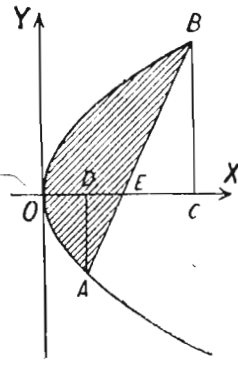


Fig. 4 c.

niemi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych. Jeżeli zaś powierzchnia nie ma tej postaci, lecz jest geometryczną sumą lub różnicą takich części, to za jej miarę przyjmujemy sumę lub różnicę pól tych części. Tak np. pole figury, ograniczonej krzywą zamkniętą na fig. 4 a, oblicza

się jako różnicę pól  $abBCA$  i  $abBDA$ , przyczem  $aA$  i  $bB$  są skrajami rzędnymi.

Pole, zawarte między hyperbolą a promieniami  $OA$  i  $OB$  na fig. 4b, wyznacza się zapomocą wzoru  $2 \cdot (OCB - DCB)$ , przyczem pola  $OCB$  i  $DCB$  wyznacza się zapomocą ogólnej definicji (pole trójkąta  $OCB$  można obliczyć także odrazu przy pomocy wzoru, znanego z elementarnej geometrii). Pole odcinka paraboli na fig. 4c wyznacza się zapomocą wzoru  $OCB + OAD - ECB + DEA$ , przyczem każde z pól, występujących w tym wzorze, można wyznaczyć przy pomocy ogólnej definicji.

Korzystanie z tej ogólnej definicji jest narazie trudne, ponieważ nie znamy żadnego dogodnego algorytmu, prowadzącego do efektywnego wyznaczenia górnego kresu dla dowolnego zbioru liczb. Aby uzyskać taką dogodną metodę rachunkową, przydatną do naszego zagadnienia, należy się zająć dokładnie sumami, występującymi we wzorze (42), a w szczególności górnym kresem takich sum. Uczynimy to w następnym paragrafie, ujmując całe zagadnienie w sposób czysto arytmetyczny i znajdziemy nieoczekiwane związki tego zagadnienia z omawianem w poprzednim rozdziale zagadnieniem szukania całki czyli funkcji pierwotnej danej funkcji  $f(x)$ .

## § 212. Definicja całki oznaczonej.

Weźmy pod uwagę dowolną funkcję  $y = f(x)$ , ciągłą w przedziale  $< a, b >$  (dla ilustracji mogą służyć figury 2, 3 lub 5), przyjmującą w nim dowolne wartości (dodatnie lub niedodatnie). Obierzmy w tym przedziale dowolny skończony, wzrastający zbiór liczb:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}.$$

Pomnóżmy każdą z różnic:

$$\Delta x_1 = x_1 - a,$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

przez najmniejszą wartość  $m_i$  danej funkcji w każdym z tych przedziałów  $\Delta x_i$  i utwórzmy sumę tych wszystkich iloczynów, t. j.

(42)

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Nazwijmy to wyrażenie dla skrócenia *sumą dolną*. Jeżeli będziemy obierali punkty podziału w rozmaitej ilości i w rozmaite sposoby, to otrzymamy jakiś *zbiór* tych liczb  $s$ . Ten zbiór jest *ograniczony zgóry* liczbą

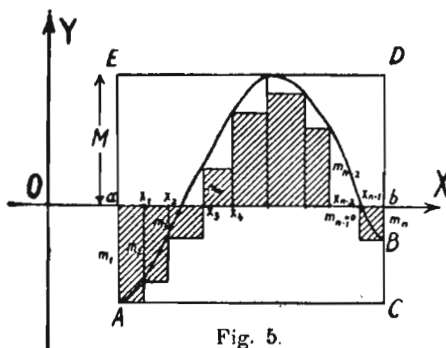


Fig. 5.



np.  $M \cdot (b - a)$ , gdzie  $M$  oznacza największą wartość badanej funkcji  $f(x)$  w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Wynika to stąd, że każde  $m_i$  jest nie większe od  $M$ , a więc:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b - a)$$

Istnieje zatem *kres górny*  $K[s]$  tych wszystkich liczb  $s$ , odpowiadających wszystkim możliwym skończonym zbiorom liczb  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  z przedziału  $\langle a, b \rangle$ . Do oznaczenia tego kresu górnego używa się takiego symbolu, który zawiera wyrażenie badaną funkcję  $f(x)$  tudzież liczby  $a$  i  $b$ , ograniczające badany przedział. Używamy mianowicie zamiast  $K[s]$  następującego symbolu:

$$\int_a^b f(x) dx$$

To wyrażenie nazywamy *całką oznaczoną z funkcji  $f(x)$  od  $a$  do  $b$*  i czytamy: „całka od  $a$  do  $b$  z  $f(x) dx$ ”. Liczbę  $a$  nazywamy *dolną granicą* całki,  $b$  *górną*, a  $f(x)$  *funkcją podcałkową*. Znak  $\int$  jest stylizowaną literą  $S$  i ma przypominać, że to jest kres górny pewnych sum. Symbol zaś  $dx$  przypomina, że wartości (najmniejsze) funkcji podcałkowej mnożyliśmy przez różnice  $\Delta x_i$ . Doszliśmy zatem do następującej definicji: *wartość całki oznaczonej z funkcji  $f(x)$  od  $a$  do  $b$  jest to kres górny sum, wyrażonych wzorem (42), czyli:*

$$(43) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = K[s] = K \left[ \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \right]}$$

Z powyższego rozumowania widzimy, że *każda funkcja ciągła posiada całkę oznaczoną* czyli jest całkowaną, oczywiście w każdym takim przedziale, w którym jest ciągłą.

Symbol całki oznaczonej zdefiniowaliśmy na razie tylko dla  $a < b$ .

Jeżeli  $a > b$ , to znane nam jest znaczenie symbolu  $\int_b^a f(x) dx$ ; jest to mianowicie kres górny  $K[s]$  liczb  $s$ , otrzymanych przy podziałach przedziału  $\langle b, a \rangle$ . Otóż w tym przypadku dajemy symbolowi  $\int_a^b f(x) dx$

znaczenie —  $K[s]$  czyli:

$$(44) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx}$$

Ten wzór służy do uzupełnienia definicji całki oznaczonej w przypadku, gdy  $a > b$ ; jest on jednak prawdziwy także w przypadku, gdy dolna granica całki jest mniejsza od górnej, jak się o tem przekonujemy, mnożąc obie strony wzoru (44) przez  $-1$ . Chcąc wreszcie, aby symbol całki oznaczał jakąś liczbę  $A$  także wtedy, gdy  $a = b$ , kierujemy się w doborze tej liczby  $A$  tem, aby się spełniał wzór (44) także dla tego przypadku, t. j. aby było  $\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx$  czyli  $A = -A$ , a więc  $2A = 0$  a stąd  $A = 0$ . Należy więc obrać  $A = 0$ . Przyjmujemy zatem następującą dodatkową definicję:

$$(45) \quad \boxed{\int_a^a f(x) dx = 0}$$

Należy dokładnie odróżniać całkę *oznaczoną* od omówionej w poprzednim rozdziale całki *nieoznaczonej*. Całka oznaczona jest bowiem zawsze jakąś liczbą, podczas gdy całka nieoznaczona przedstawia nieskończoną *gromadę funkcyj*. Litera  $x$ , oznaczająca zmienną niezależną w symbolu całki oznaczonej, nie figuruje zatem w końcowym wyniku, a więc możemy ją zastąpić dowolną inną literą. Tak więc symbole:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(u) du, \quad \int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f(y) dy, \quad \int_a^b f(z) dz$$

i t. p. mają wszystkie tę samą wartość  $K[s]$ , są więc wszystkie sobie równe.

Używając symbolu całki oznaczonej, możemy napisać omówione w poprzednim paragrafie wzory na pole w następującej postaci:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \int_a^b f(x) dx, \text{ jeżeli } f(x) \geq 0 \quad , \quad b > a \\ P = - \int_a^b f(x) dx \quad \quad \quad \text{„} \quad f(x) \leq 0 \quad \quad \text{„} \quad b > a \end{array} \right.$$

Pole powierzchni, leżącej nad osią odciętych, ograniczone łukiem linii o równaniu  $y = f(x)$ , skrajnymi rzędnymi i osią odciętych, równa się zatem całce oznaczonej z tej funkcji od  $a$  do  $b$ ; pole zaś takiej powierzchni, leżącej pod osią odciętych, jest równe wartości takiej całki z przeciwnym znakiem.

Sprowadziliśmy w ten sposób zagadnienie obliczania pól do zagadnienia czysto arytmetycznego, uzyskaliśmy ogólny wzór na obliczanie pól, z drugiej zaś strony uzyskaliśmy dogodną interpretację geometryczną całki oznaczonej, w razie gdy funkcja podcałkowa nie zmienia znaku w przedziale całkowania.

### § 213. Twierdzenie o wartości średniej dla całki oznaczonej.

Wszystkie sumy  $s$  (por. wzór 42), których używaliśmy przy definicji całki oznaczonej, są ograniczone liczbami  $m(b-a)$  i  $M(b-a)$ , gdzie  $m$  oznacza najmniejszą wartość funkcji  $f(x)$  ciągłej w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$  a  $M$  największą. Zatem i kres górny sum  $s$  jest zawarty w przedziale  $\langle m(b-a), M(b-a) \rangle$ , to znaczy, że zawsze spełniają się warunki:

$$(47) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Wobec tego całka oznaczona jest równa jakiejś wartości pośredniej pomiędzy dwiema liczbami ograniczającymi. Dobierając więc odpowiednio liczbę  $\mu$ , pośrednią między  $m$  a  $M$ , otrzymujemy wzór:

$$(48) \quad \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem o wartości średniej dla całki oznaczonej.

Liczbę  $\mu$ , wyznaczoną z tego wzoru, t. j.

$$(49) \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

nazywamy *średnią wartością funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$* . Takich średnich wartości używa się bardzo często, zwłaszcza w naukach technicznych: mówi się tam np. o średniej wysokości jakiegoś profilu, o średnim natężeniu prądu zmiennego, o średniej wydajności rozmaitych źródeł pracy, a wszystkie te średnie wyznacza się właśnie zapomocą tego wzoru. Tę średnią wartość można uważać — jak później zobaczymy — za uogólnienie średniej arytmetycznej skończonej liczby rzędnych. Prócz tej średniej wartości funkcji używa się w wielu zagadnieniach także

t. zw. *średniej kwadratowej*, określonej następującym wzorem:

$$(50) \quad \sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx$$

Stąd  $\sigma$  równa się drugiemu pierwiastkowi prawej strony.

Jeżeli funkcja  $f(x)$  nie zmienia znaku w przedziale całkowania, np. jest stale nieujemną, to możemy interpretować twierdzenie o wartości średniej w bardzo dogodny sposób geometrycznie. I tak z fig. 6 jest widocznym, że można zawsze dobrać taką wysokość  $\mu$  prostokąta o podstawie  $ab$ , że jego pole równa się polu badanej powierzchni  $ab BA$ , a więc:

$$ab BA = (b-a) \cdot \mu$$

czyli:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a)$$

Tę rzędną  $\mu$  uważamy właśnie za średnią wartość funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Jeżeli funkcja podcałkowa  $f(x)$  jest w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$  nieujemna, to i całka oznaczona z tej funkcji jest w tym przedziale nieujemna. A więc:

$$(51) \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{dla} \quad f(x) \geq 0$$

Wynika to z wzoru (48), w którym jest  $\mu \geq 0$  i  $b-a > 0$ . Ponieważ funkcja podcałkowa jest *ciągła* w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , przeto musi przyjmować każdą wartość pośrednią  $\mu$  między  $m$  a  $M$  przynajmniej dla jednej wartości  $x$ , np. dla  $x = \xi = a + \vartheta(b-a)$ . Wtedy więc  $\mu = f(\xi)$  a wzór (48) przyjmuje postać:

$$(52) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)}$$

### § 214. Addytywność całki oznaczonej.

Całki oznaczone posiadają pewną zasadniczo ważną własność, zwaną **addytywnością**. Własność tę wyrażamy następującym twierdzeniem.

*Jeżeli przedział  $\langle a, b \rangle$  jest sumą dwóch przedziałów  $\langle a, c \rangle$  i  $\langle c, b \rangle$ , to całka oznaczona od  $a$  do  $b$  jest sumą całek od  $a$  do  $c$  i od  $c$  do  $b$ . to jest:*

(53)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Dowód.  $\int_a^b f(x) dx = K[s] = K$ , gdzie  $K$  oznacza kres górny sum  $s$ , utworzonych według wzoru (42) dla wszystkich możliwych podziałów odcinka  $ab$ . Podobnie  $\int_a^c f(x) dx = K_1[s_1] = K$ , jest kresem górnym podobnych sum  $s$  dla odcinka  $ac$ , a  $\int_c^b f(x) dx = K_2[s_2] = K$ , sum  $s$ , dla odcinka  $cb$ . Mamy wykazać, że:  $K = K_1 + K_2$ .

Otóż  $K' = K_1 + K_2$  jest kresem górnym zbioru wszystkich liczb  $s' = s_1 + s_2$  (por. tom I, § 25, str. 99), jako suma kresów górnych zbiorów liczb  $s_1$  i  $s_2$ . Każda liczba  $s' = s_1 + s_2$  jest równa jakiejś liczbie  $s$ , odnoszącej się do całego odcinka  $ab$ , a więc zbiór liczb  $s'$  zawiera się całkowicie w zbiorze liczb  $s$ . Wobec tego kres górny  $K'$  nie może być większy od  $K$ . Okażemy jednak także, że nie może być  $K' < K$ . Gdyby bowiem tak było, to istniałaby przynajmniej jedna liczba  $s$ , nazwijmy ją  $\bar{s}$ , większa od  $K'$  a zatem większa od *wszystkich* liczb  $s'$ . Otóż łatwo stwierdzić, że niema takiej liczby w zbiorze liczb  $s$ . Jeżeli bowiem  $s$  należy do zbioru liczb  $s$ , to odpowiada ona jakiejś sumie:

$$\bar{s} = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \dots + m_n(b - x_{n-1})$$

Jeżeli wśród punktów podziału znajduje się punkt  $c$ , to ta suma jest zarazem jakąś liczbą ze zbioru liczb  $s'$ , np. liczbą  $\bar{s}'$ , a więc wtedy  $\bar{s} = \bar{s}'$ , nie jest większa od *wszystkich* liczb  $s'$ . Jeżeli zaś punkt  $c$  nie znajduje się wśród punktów podziału, to leży on między dwoma punktami podziału, np. między  $x_{k-1}$  a  $x_k$ . Utwórzmy sumę  $\bar{s}'$ , należącą do zbioru liczb  $s'$ , dobierając ten punkt  $c$  do punktów  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}$ . Wtedy:

$$\bar{s}' = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) + \dots + m_n(b - x_{n-1})$$

Otóż ta suma nie może być mniejsza od  $s$ , albowiem różni się od niej tylko tem, że zamiast dodajnika  $m_k(x_k - x_{k-1}) = A$  występują dwa dodajniki:  $m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) = B$ .

Ale  $m'_k$  i  $m''_k$  nie mogą być mniejsze od  $m_k$ , są to bowiem najmniejsze wartości funkcji  $f(x)$  w częściowych przedziałach  $\langle x_{k-1}, c \rangle$ ,  $\langle c, x_k \rangle$ , podczas gdy  $m_k$  jest najmniejszą wartością tej funkcji w całym przedziale  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ . Jest więc  $B \geq A$  a wobec tego  $\bar{s}' \geq \bar{s}$ . Okazaliśmy więc, że żadna liczba ze zbioru liczb  $s$  nie może być większa od *wszystkich* liczb zbioru  $s'$ , a więc i od ich kresu górnego  $K'$ , a to dowodzi, że nie może być  $K' < K$ . Przedtem zaś dowiedliśmy, że nie może być  $K' > K$  a więc musi być  $K' = K$  czyli  $K_1 + K_2 = K$ , c. b. d. o.

Wzór (53) jest prawdziwy także dla przypadku:  $a = b$ , wtedy bowiem lewa jego strona jest zerem na podstawie wzoru (45) a prawa na podstawie wzoru (44).

Punkt  $c$  może leżeć także poza przedziałem  $\langle a, b \rangle$ , np. może być

$a < b < c$ . Stosując bowiem wzór (53) do liczb  $a \dots b \dots c$ , otrzymamy:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

a stąd:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

a więc otrzymamy znowu wzór (53). Trzeba przytem oczywiście założyć, że funkcja jest ciągła także w tym szerszym przedziale  $\langle a, c \rangle$ .

Wzór (53) można uogólnić na dowolną skończoną liczbę dodajników. Tak np. dla  $r$  dodajników otrzymujemy:

$$(53a) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x) dx + \dots + \int_{a_{r-1}}^b f(x) dx$$

Najprościej dowodzi się tego zapomocą indukcji zupełnej.

*Zastosowania.*

1) Na podstawie tego ostatniego wzoru możemy podać geometryczną interpretację całki oznaczonej także w tym przypadku, gdy funkcja podcałkowa zmienia znak

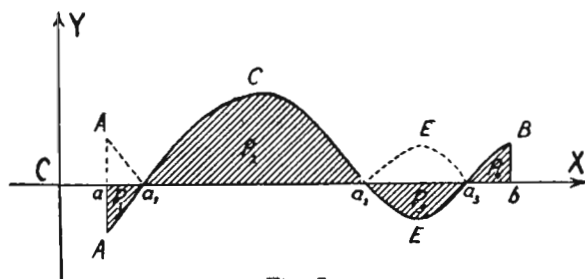


Fig 7

w przedziale  $\langle a, b \rangle$  skończoną liczbę razy. Niechaj linja  $ACEB$  na fig. 7 będzie obrazem takiej funkcji. Całkę oznaczoną od  $a$  do  $b$  z tej funkcji rozdzielimy według wzoru (53a) na takie części,

aby w każdej z nich funkcja podcałkowa nie zmieniała znaku. Otrzymamy zatem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x) dx + \int_{a_3}^b f(x) dx$$

Według wzorów (46) z § 212 pierwsza i trzecia z całek prawej strony przedstawiają ujemne wartości pól  $P_1$  i  $P_3$ , druga zaś i czwarta dodatnie wartości  $P_2$  i  $P_4$ .

Wobec tego:

$$\int_a^b f(x) dx = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = (P_2 + P_4) - (P_1 + P_3)$$

Zatem: całka oznaczona przedstawia sumę pól, leżących nad osią odciętych, pomniejszoną o sumę pól, leżących pod tą osią, czyli algebraiczną sumę pól, opatrzonych odpowiednimi znakami. Chcąc zaś otrzymać sumę wszystkich pól bez zmiany znaku, należy obliczyć każdą z tych całek z osobna.

Można jednak także podać wzór, przedstawiający sumę tych wszystkich pól zapomocą jednej całki. W tym celu należy utworzyć symetryczne odbicia w osi  $x$ -ów powierzchni, leżących pod osią odciętych. Wtedy  $f(x)$  zamienia się na  $|f(x)|$  i otrzymujemy na całkowite pole wzór:

$$(54) \quad P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \int_a^b |f(x)| dx$$

2. Opierając się na addytywności całki, możemy zacieśnić przedział, w który zamknęliśmy całość oznaczoną przy użyciu wzoru (47) na str. 67. Wiemy, że całka jako kres górny sum dolnych  $s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  nie jest mniejsza od żadnej z tych sum, t. j.:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x) dx$$

Znajdziemy obecnie także górne ograniczenie dla tej całki. Podzielmy tę całość na dodajniki, dzieląc przedział  $\langle a, b \rangle$  punktami  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  i do każdej całki składowej zastosujemy wzór (47).

Oznaczmy literami  $M_1, M_2, \dots, M_n$  największe wartości funkcji  $f(x)$  w każdym z częściowych przedziałów o szerokościach  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Z wzoru (47) otrzymujemy:

$$m_i \Delta x_i \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \leq M_i \Delta x_i \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, n.$$

Utwórzmy sumę tych wszystkich całek, to otrzymamy:

$$(55) \quad \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Zamknęliśmy w ten sposób całość oznaczoną pomiędzy dowolną sumą dolną i odpowiadającą jej sumą górną. Te ograniczenia są zwykle bliższe całki aniżeli liczby  $m(b-a)$  i  $M(b-a)$ , występujące we wzorze (47) a odpowiadające prostokątom  $abCD$  i  $abBE$  na fig. 2 str. 61.

3. Opierając się na addytywności całki oznaczonej, możemy wyjaśnić związek średniej wartości funkcji z średnią arytmetyczną (por. § 213).

Niechaj  $f(x)$  będzie funkcją ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Podzielmy ten przedział na  $n$  równych części o długości  $h = \frac{b-a}{n}$ . Nazwijmy kolejne punkty podziału literami:  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  i rozłóżmy całkę według wzoru (53 a):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b f(x) dx$$

Do każdej z tych całek zastosujemy twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (52), to otrzymamy:

$$f(\xi)(b-a) = f(\xi_1) \frac{b-a}{n} + f(\xi_2) \frac{b-a}{n} + \dots + f(\xi_n) \frac{b-a}{n}$$

a stąd:

$$f(\xi) = \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}$$

Widzimy, że średnia wartość funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest równa średniej arytmetycznej wartości tej funkcji, dobranych odpowiednio w dowolnie wielkiej ilości przedziałów częściowych. Te częściowe przedziały można też brać nierówne, np. o długościach  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , których suma jest równa  $b-a$ .

Wtedy otrzymamy:

$$f(\xi)(b-a) = h_1 f(\xi_1) + h_2 f(\xi_2) + \dots + h_n f(\xi_n)$$

czyli:

$$f(\xi) = \frac{h_1 f(\xi_1) + h_2 f(\xi_2) + \dots + h_n f(\xi_n)}{h_1 + h_2 + \dots + h_n}$$

Prawą stronę nazywamy *średnią arytmetyczną ważoną* wartości  $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$  a współczynniki  $h_1, h_2, \dots, h_n$  nazywamy *wagami* tych wartości funkcji. Widzimy więc, że średnią wartość  $f(\xi)$  funkcji w przedziale  $\langle a, b \rangle$  możemy także uważać za *średnią arytmetyczną ważoną* dowolnej liczby rzędnych, branych z tego przedziału, z odpowiednimi *wagami*.

## § 215. Całka oznaczona jako funkcja swej górnej granicy. Związek całki oznaczonej z funkcji ciągłej z całką nieoznaczoną.

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to jest ciągła także w każdym przedziale  $\langle a, t \rangle$ , gdy  $a < t < b$ , a więc istnieje także całka z tej funkcji dla każdego takiego przedziału  $\langle a, t \rangle$ . Do każdej więc

liczby  $t$  z przedziału  $\langle a, b \rangle$  istnieje odpowiadająca jej liczba:  $\int_a^t f(x) dx$



a więc ta całka oznaczona od  $a$  do  $t$  jest funkcją swej górnej granicy  $t$ :

$$\int_a^t f(x) dx = \varphi(t)$$

Okażemy, że ta funkcja  $\varphi(t)$  jest ciągła.

W tym celu badamy przyrost:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_a^{t+h} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx$$

(przyczem ograniczamy się do takich  $h$ , aby punkt  $t+h$  leżał także w przedziale  $\langle a, b \rangle$ ).

Stosując do pierwszej całki twierdzenie o addytywności, czyli wzór (53), otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \int_a^t f(x) dx + \int_t^{t+h} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx = \int_t^{t+h} f(x) dx$$

Z twierdzenia o wartości średniej, wyrażonego wzorem (48) otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = \mu(t+h-t) = \mu \cdot h$$

gdzie  $\mu$  oznacza jakąś wartość pośrednią między najmniejszą a największą wartością funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle t, t+h \rangle$ . Stąd łatwo wnioskujemy, ponieważ  $\mu \cdot h$  dąży do zera, gdy  $h$  dąży do zera, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(t+h) = \varphi(t)$$

To zaś znaczy, że funkcja  $\varphi(t)$  jest funkcją ciągłą. Dowiedliśmy więc, że całka oznaczona jest ciągłą funkcją swej górnej granicy.

Ponieważ funkcja podcałkowa  $f(x)$  jest ciągłą funkcją w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to możemy zastosować twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (52) i otrzymujemy:

$$\varphi(t+h) - \varphi(t) = f(\xi) \cdot h = h f(t + \vartheta h), \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1$$

Stąd:

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(t + \vartheta h)$$

Ponieważ  $f(x)$  jest funkcją ciągłą, to istnieje granica prawej strony, gdy  $h$  dąży do zera, a mianowicie:  $f(t)$ . Istnieje więc także granica lewej strony, czyli pochodna funkcji  $\varphi(t)$ . Zatem:

$$\varphi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = f(t)$$

czyli:

$$(56) \quad \frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

Ten wzór ma nadzwyczaj doniosłe znaczenie dla rachunku całkowego. Treść jego wyraża się następującym twierdzeniem: *pochodna z całki oznaczonej z funkcji ciągłej według jej górnej granicy całkowania (uważanej za zmienną) istnieje i jest równa wartości funkcji podcałkowej dla tej górnej granicy.*

Ponieważ  $\varphi'(t) = f(t)$ , przeto  $\varphi(t)$  jest jedną z funkcyj pierwotnych funkcji  $f$  czyli jedną z gromady funkcyj, zawartych w całce nieoznaczonej z tej funkcji  $f(t)$ , t. j. jest jedną z funkcyj, zawartych we wzorze:

$$\int f(t) dt = F(t) + C$$

Ponieważ zaś każda funkcja ciągła  $f(t)$  posiada całkę oznaczoną, jak tego dowiedliśmy w § 212, przeto *każda funkcja ciągła posiada jakąś funkcję pierwotną*. Wiemy zaś, że, jeżeli istnieje jedna funkcja pierwotna, to musi ich istnieć cała gromada (por. § 203), a zatem istnieje cała nieoznaczona z  $f(t)$ . W ten sposób udowodniliśmy prawdziwość tego zasadniczego twierdzenia, które przyjęliśmy bez dowodu w poprzednim rozdziale, a mianowicie: *dla każdej funkcji ciągłej istnieje całka nieoznaczona.*

Jakkolwiek więc przy pomocy metod, poznanych w poprzednim rozdziale, nie zawsze potrafiliśmy znaleźć całkę nieoznaczoną z funkcji ciągłej (por. zakończenie § 210), to jednak teraz już wiemy, że te całki nieoznaczone *istnieją*, przeprowadziliśmy bowiem dla nich *dowód istnienia* (przechodząc w rozumowaniu przez definicję i własności całki oznaczonej).

## § 216. Obliczanie całki oznaczonej przy pomocy całki nieoznaczonej.

Wykazaliśmy w poprzednim paragrafie, że dla funkcji  $\varphi(t)$ , określonej wzorem:

$$(w) \quad \int_a^t f(x) dx = \varphi(t)$$

jest  $\varphi'(t) = f(t)$ , o ile  $f(x)$  jest funkcją ciągłą. A więc  $\varphi(t)$  jest jedną z funkcyj pierwotnych, należących do funkcji  $f(t)$  czyli jedną z gromady funkcyj, zawartych we wzorze:

$$\int f(t) dt = F(t) + C$$

Aby wybrać tę funkcję, o którą nam chodzi, należy wyznaczyć w odpowiedni sposób stałą  $C$ . Otóż widocznym jest z wzoru (w), że:

$$\int_a^a f(x) dx = \varphi(a) = 0$$

Trzeba więc tak obrać stałą  $C$ , aby się spełniał warunek:  $F(a) + C = 0$  czyli  $C = -F(a)$ .

A więc:

$$\varphi(t) = F(t) - F(a)$$

czyli:

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a)$$

Kładąc tu  $t = b$ , otrzymujemy ostatecznie:

$$(57) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}$$

co można zapisać także w postaci:

$$(57a) \quad \int_a^b f(x) dx = \left( \int f(x) dx \right)_{x=b} - \left( \int f(x) dx \right)_{x=a}$$

Symbol  $(W(x))_{x=a}$  oznacza tu, że w wyrażeniu  $W(x)$ , zawartem w nawiasie, pojmowanym jako funkcja zmiennej  $x$ , należy za  $x$  podstawić  $a$ . Występująca tu funkcja  $F(t)$  jest zupełnie dowolną funkcją pierwotną funkcji  $f(t)$ . Gdybyśmy bowiem obrali dowolną inną funkcję pierwotną  $F_1(t) = F(t) + C$ , to:

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + C_1 - F(a) - C_1 = F(b) - F(a)$$

a więc wartość prawej strony wzoru (57) pozostałaby niezmienną. Trzeba jednak o tem pamiętać, że  $F(b)$  i  $F(a)$  są wartościami tej samej funkcji pierwotnej; nie można więc brać np.  $F(b) - F_1(a)$ . Uzyskaliśmy w ten sposób ścisły związek między całką oznaczoną a całką nieoznaczoną a mianowicie:

*całka oznaczona z funkcji ciągłej jest równa różnicy pomiędzy wartością, którą przyjmuje dowolna funkcja pierwotna tej funkcji dla górnej granicy całkowania a wartością tej samej funkcji pierwotnej dla dolnej granicy całkowania.*

To twierdzenie sprowadza badanie całek oznaczonych, zdefiniowanych bez użycia rachunku różniczkowego (jako kres górny pewnych sum), do całek nieoznaczonych, otrzymanych z zagadnienia odwrotnego względem różniczkowania. Chcąc mianowicie obliczyć wartość całki ozna-

czonej z jakiejkolwiek funkcji ciągłej w granicach od  $a$  do  $b$ , obliczamy najpierw jej całkę nieoznaczoną i wybieramy z tej gromady funkcji pierwotnych jedną dowolną, np.  $F(x)$  a następnie tworzymy różnicę  $F(b) - F(a)$ , t. j. przyrost tej funkcji pierwotnej w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Uzyskaliśmy w ten sposób bardzo dogodną metodę obliczania całek oznaczonych, możemy bowiem teraz zużytkować wszystkie metody, poznane w poprzednim rozdziale. Tak np. chcąc obliczyć:  $\int_0^{\pi} \sin x dx$ , wyznaczamy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Wybermy np. tę funkcję pierwotną, dla której  $C=0$ , a więc  $F(x) = -\cos x$ . Otóż na podstawie wzoru (57) otrzymujemy:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

Geometryczne znaczenie tego wyniku jest następujące: pole, zawarte między osią odciętych a połówką fali sinusoidy, ma wartość 2.

Opierając się na wzorze (57), okażemy, że do definicji całki oznaczonej (i pola) można zamiast sum dolnych, wyrażonych wzorem (42) z § 211, użyć także sum górnych, wyrażonych wzorem:

$$(42a) \quad S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

przyczem  $M_1, M_2, \dots, M_n$  oznaczają największe wartości danej funkcji  $f(x)$  w odpowiednich przedziałach.

*Dowód.* Kres dolny tych sum istnieje. Nazwijmy go całką górną z funkcji  $f(x)$  od  $a$  do  $b$  i oznaczmy ją symbolem:

$$\overline{\int_a^b f(x) dx}$$

(Całkę oznaczoną, pojmowaną jako kres górny sum dolnych, nazywają też całką dolną). Do tej całki górnej odnoszą się — jak łatwo spostrzec — wszystkie, poznane poprzednio dla całki określonej twierdzenia, a w szczególności wzory (44), (45), (52), (53), (56) i (57).

A więc ta całka górna jest także równa różnicy wartości, które przyjmuje dowolna funkcja pierwotna  $F(x)$  funkcji  $f(x)$  dla górnej i dolnej granicy całkowania, t. j.:

$$(57a) \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = F(b) - F(a)$$

A więc na podstawie wzoru (56) jest:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f x dx$$

A zatem dla *ciągłych* funkcji  $f(x)$  całka górna jest równa całce oznaczonej. Możemy więc pojmować całkę oznaczoną z funkcji ciągłej także jako kres *dolny* sum *górných*. Stąd wynika, że pole figury, ograniczonej osią odciętych, łukiem dowolnej linii ciągłej i rzędnymi w końcowych punktach tego łuku, możemy pojmować także jako kres dolny sum prostokątów maksymalnych (opisanych, gdy pole leży nad osią odciętych a wpisanych, gdy pole leży pod osią), jak to już zaznaczono w uwadze w § 211. Stąd także wynika, że wielkość takiego pola nie ulega zmianie przez odbicie symetryczne danej powierzchni w osi odciętych, przez takie bowiem odbicie wszystkie prostokąty maksymalne zamieniają się na minimalne i odwrotnie, a kres górny zamienia się na kres dolny, równy kresowi górnemu ze znakiem przeciwnym i odwrotnie.

Opierając się na wzorze (57), wyprowadzimy z rozmaitych ogólnych twierdzeń o całkach nieoznaczonych odpowiednie twierdzenia o całkach oznaczonych.

## § 217. Wylączenie stałego czynnika przed całką oznaczoną.

### Całka oznaczona z sumy.

A. Poznaliśmy następujące twierdzenie, odnoszące się do całek nieoznaczonych: jeżeli  $h(x) = A \cdot f(x)$  przy  $A \neq 0$ , to:  $\int h(x) dx = A \int f(x) dx$  czyli:

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx$$

(por. § 205, wzór 14).

Jeżeli  $H(x)$  jest jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji  $h(x)$ , a  $F(x)$  funkcji  $f(x)$ , to możemy napisać powyższy wzór w postaci:

$$H(x) + C = A(F(x) + C_1)$$

Podstawmy tu za  $x$  najpierw  $b$  a potem  $a$  i odejmijmy od pierwszej w ten sposób otrzymanej równości drugą, to zostanie:

$$H(b) - H(a) = A(F(b) - F(a))$$

czyli w myśl wzoru (57):

$$\int_a^b h(x) dx = A \int_a^b f(x) dx$$

a to znaczy że:

$$(58) \quad \boxed{\int_a^b A \cdot f(x) dx = A \cdot \int_a^b f(x) dx}$$

Dowiedliśmy zatem, że stały czynnik różny od zera można wyłączyć z funkcji podcałkowej przed znak całki oznaczonej.

Wniosek:

$$(58a) \quad \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

B. Do całek nieoznaczonych odnosi się następujące twierdzenie o całkowaniu sumy (t. zw. całkowanie przez rozkład). Jeżeli:

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

to:

$$\int h(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

(por. § 205, wzór 15). Zatem:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Niechaj  $H(x)$ ,  $F(x)$ ,  $G(x)$  oznaczają funkcje pierwotne funkcyj:  $h(x)$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$ . Powyższy wzór możemy zatem napisać w postaci:

$$H(x) + C = F(x) + C_1 + G(x) + C_2$$

Podstawmy tu za  $x$  najpierw  $b$  a potem  $a$  i odejmijmy od pierwszej w ten sposób otrzymanej równości drugą stronami, to otrzymamy:

$$H(b) - H(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

czyli w myśl wzoru (57):

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

a to znaczy, że:

$$(59) \quad \boxed{\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.}$$

Dowiedliśmy zatem, że całka oznaczona z sumy dwóch funkcyj jest równa sumie całek oznaczonych z tych funkcyj.

Stąd otrzymuje się analogiczne twierdzenie o różnicy  $f(x) - g(x)$ , przedstawiając ją w postaci  $f(x) + (-g(x))$  i stosując wzór (59) a następnie (58 a). Zatem:

$$(59 \text{ a}) \quad \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Widzimy więc, że twierdzenia, poznane w tym paragrafie, są zupełnie analogiczne dla całek oznaczonych i nieoznaczonych.

#### Wnioski.

1. Z tych twierdzeń wyprowadzamy następujące twierdzenie, służące do porównywania wartości dwóch całek oznaczonych: jeżeli  $f(x) \geq g(x)$  w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to także

$$(60) \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

*Dowód.* Z założenia wynika, że  $f(x) - g(x) \geq 0$ . Na podstawie wzoru (51) z § 213 jest zatem:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0$$

Na podstawie wzoru (59 a) otrzymujemy stąd:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$$

a to znaczy, że wzór (60) jest prawdziwy.

#### 2. Rozszerzenie twierdzenia o wartości średniej

Jeżeli funkcja podcałkowa jest iloczynem dwóch funkcji ciągłych  $f(x)$  i  $g(x)$ , z których jedna, np.  $g(x)$ , zachowuje w przedziale  $\langle a, b \rangle$  stale ten sam znak, to okażemy, że można przed znak całki wyłączyć drugą funkcję, biorąc jej wartość na odpowiednio dobranym miejscu pośrednim z danego przedziału. Chcemy więc okazać prawdziwość następującego wzoru:

$$(61) \quad \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad \text{gdzie } a < \xi < b$$

*Dowód.* Niechaj będzie np.  $g(x) > 0$  w  $\langle a, b \rangle$ . Niechaj  $M$  oznacza największą, a  $m$  najmniejszą wartość funkcji  $f(x)$  w tym przedziale. Wtedy  $M - f(x) \geq 0$  i  $f(x) - m \geq 0$  w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$

Wobec tego także:

$$\int_a^b (M - f(x)) g(x) dx \geq 0 \quad \text{i} \quad \int_a^b (f(x) - m) g(x) dx \geq 0$$

a więc:

$$M \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \geq m \int_a^b g(x) dx$$

Istnieje więc taka liczba  $\mu$ , pośrednia między  $m$  a  $M$ , że:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Ponieważ zaś ciągła funkcja  $f(x)$  przybiera przynajmniej raz każdą wartość pośrednią pomiędzy  $m$  a  $M$ , np. w jakimś miejscu  $\xi$ , przeto  $\mu = f(\xi)$ , a to dowodzi prawdziwości badanego wzoru.

3) *Nierówność Schwarza.*

Ponieważ zawsze jest  $(f(x) \cdot t + g(x))^2 \geq 0$ , przeto z wzoru (51) z § 213 wynika, że:

$$\int_a^b (f(x)t + g(x))^2 dx \geq 0$$

Stąd otrzymujemy na podstawie wzoru (59):

$$\int_a^b f^2(x)t^2 dx + \int_a^b 2t f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$$

czyli:

$$t^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$$

Występujące tu całki są liczbami stałymi. Oznaczmy je kolejno dla skrócenia literami  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , to:

$$At^2 + 2Bt + C \geq 0$$

Ten trójmian zmiennej  $t$  jest stale nieujemny, a zatem jego wyróżnik:  $B^2 - AC$  musi być ujemny lub równy zeru, jak to wiadomo z dyskusji trójmianu kwadratowego. A więc jest  $B^2 - AC \leq 0$  czyli:  $B^2 \leq AC$ , a to znaczy, że:

$$(62) \quad \left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

Ten wzór nazywamy *nierównością Schwarza dla całek*.

*Uwaga.* Analogiczną nierówność Schwarza dla skończonych sum udowadnia się przez badanie wyrażenia:

$$(f_1 \cdot t + g_1)^2 + (f_2 \cdot t + g_2)^2 + \dots + (f_n \cdot t + g_n)^2 \geq 0$$



Tworzymy wyróżnik tego wyrażenia, po uporządkowaniu go według potęg  $t$ . Otrzymuje się:

$$\left( \sum_{i=1}^n f_i g_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)$$

$f_i$  i  $g_i$  są tu dowolnymi liczbami stałymi.

### § 218. Całkowanie przez części (per partes) całek oznaczonych.

Przy całkach nieoznaczonych używaliśmy często wzoru:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$$

wyprowadzonego przy założeniu, że funkcje  $u(x)$  i  $v(x)$  posiadają ciągle pochodne (por. § 206, wzór 16). Niechaj  $F(x)$  oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji  $u(x)v'(x)$  a  $G(x)$  funkcję pierwotną funkcji  $v(x)u'(x)$ . Wzór powyższy możemy zatem napisać w postaci:

$$F(x) + C = u(x)v(x) - G(x) - C_1$$

Podstawmy tu najpierw  $x = b$  a następnie  $x = a$  i odejmijmy stronami drugą w ten sposób otrzymaną równość od pierwszej. Otrzymamy:

$$F(b) - F(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - (G(b) - G(a))$$

czyli:

$$(63) \quad \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x) dx$$

Używając skrócenia  $dv$  zamiast  $v'(x)dx$ , a  $du$  zamiast  $u'(x)dx$ , tudzież  $f(x)|_a^b$  zamiast  $f(b) - f(a)$ , możemy ten wzór napisać w skróconej postaci:

$$(63 a) \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Pamiętać jednak należy, że zmienną całkowania jest tu  $x$  a nie  $u$  lub  $v$ . Widzimy tu analogję z wzorem na całkowanie „per partes“ całki nieoznaczonej; zamiast wyrazu  $u'(x)v(x)$  występuje tu różnica:  $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ .

### § 219. Całkowanie przez podstawienie w całkach oznaczonych.

Wprowadzając w całkę nieoznaczoną zamiast zmiennej  $x$  nową zmienną  $t$  zapomocą wzoru  $x = \varphi(t)$ , otrzymaliśmy w § 207 wzór (18):

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Zakładaliśmy przytem, że funkcja  $\varphi(t)$  nietylko posiada ciągłą pochodną, lecz że jest ponadto odwracalna w sposób jednoznaczny. Funkcję odwrotną do  $\varphi(t)$  nazwaliśmy:  $t = \psi(x)$ .

Założmy jeszcze, że ta funkcja  $\psi(x)$  jest określona w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Dla  $x = a$  przyjmuje ona jakąś wartość  $t_1$ , a dla  $x = b$  wartość  $t_2$ , a więc:  $\psi(a) = t_1$ ,  $\psi(b) = t_2$ .

Chcemy to samo przekształcenie zastosować do całki oznaczonej. Niechaj  $F(x)$  będzie jakąkolwiek funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$ , to  $\int f(x) dx = F(x) + C$ . Podobnie niechaj  $G(t)$  oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ , to wtedy  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) + C_1$ .

Wobec tego możemy napisać powyższy wzór w postaci:

$$F(x) + C = G(t) + C_1 = G(\psi(x)) + C_1$$

Podstawiamy tu  $x = b$  a następnie  $x = a$  i od pierwszej otrzymanej w ten sposób równości odejmujemy stronami drugą. Otrzymamy:

$$F(b) - F(a) = G(t_2) - G(t_1) = G(\psi(b)) - G(\psi(a))$$

czyli na podstawie wzoru (57):

$$(64) \quad \boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt}$$

Wprowadzając zatem zapomocą związku  $x = \varphi(t)$  nową zmienną  $t$  w całkę oznaczoną, należy ją przekształcić według wzoru (64). Wprowadzamy zatem  $\varphi(t)$  w  $f(x)$ , zastępujemy  $dx$  różniczką  $\varphi'(t)dt$  funkcji  $x = \varphi(t)$  a ponadto zmieniamy odpowiednio granice, biorąc  $\psi(a)$  zamiast  $a$ , a  $\psi(b)$  zamiast  $b$ , gdzie  $\psi(x)$  jest funkcją odwrotną względem  $\varphi(t)$ . Całkowanie przez podstawienie jest dla całek oznaczonych nawet dogodniejsze aniżeli dla całek nieoznaczonych, nie trzeba bowiem po obliczeniu całki wracać do dawnej zmiennej, lecz oblicza się wartość całki wprost, podstawiając za tę nową zmienną  $t$  odpowiednie wartości stałe.

### § 220. Przykłady obliczania całek oznaczonych.

1) Jaką wartość ma całka oznaczona:

$$I = \int_{-1}^{+1} x^n dx$$

gdy  $n$  jest liczbą naturalną?

$$I = \int_{-1}^{+1} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

Dla  $n$  parzystych jest  $(-1)^{n+1} = -1$ , zatem  $I = \frac{2}{n+1}$ . Dla  $n$  nieparzystych jest  $I = 0$ .

2) Obliczyć wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin rx dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos rx dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos nx \cos rx dx$$

dla  $n \neq r$  i dla  $n = r$ .

Obliczyliśmy już (w § 207, w przykładzie 15) całki nieoznaczone z tych funkcji (por. wzory 26 i 26a). Zatem dla  $n \neq r$  otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin rx dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n-r)x}{n-r} - \frac{\sin(n+r)x}{n+r} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

ponieważ zarówno dla  $x=0$  jak i dla  $x=2\pi$  obydwa wyrażenia, zawarte w nawiasie, są zerami. Podobnie:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos rx dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(n+r)x}{n+r} + \frac{\sin(n-r)x}{n-r} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Dla całki:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos rx dx = -\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(n+r)x}{n+r} + \frac{\cos(n-r)x}{n-r} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

otrzymujemy również wartość zero, ponieważ dla  $x=0$  i dla  $x=2\pi$  funkcja pierwotna przyjmuje tę samą wartość:  $-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+r} + \frac{1}{n-r} \right)$ .

Dla  $n = r$  otrzymujemy z wzorów (26a) następujące wartości:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi - 0) - \frac{1}{2}(0 - 0) = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cos nx \, dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos 2nx}{2n} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \right) = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 2nx}{2n} + x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (0 + 2\pi) - \frac{1}{2} (0 + 0) = \pi$$

Z tych wzorów skorzystamy w jednym z dalszych rozdziałów.

3) Obliczyć całkę:

$$I = \int_{-3}^{+2} |x| \, dx$$

Ponieważ  $|x| = x$  dla  $x \geq 0$ , a  $|x| = -x$  dla  $x \leq 0$ , przeto najdogodniej jest rozłożyć tę całkę na dwie części:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^0 |x| \, dx + \int_0^2 |x| \, dx = \int_{-3}^0 -x \, dx + \int_0^2 x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-3}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^2 = \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi ogólny wzór:

$$\int_a^b |x| \, dx = \frac{1}{2} (b \cdot |b| - a \cdot |a|)$$

rozdzielając dla  $a$  i  $b$  wszystkie możliwe przypadki, a więc:  $a \geq 0$  i  $b \geq 0$ ,  $a < 0$  i  $b \geq 0$ ,  $a < 0$  i  $b < 0$ . Dla wyjaśnienia dobrze jest posłużyć się odpowiednimi figurami.

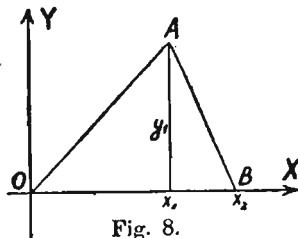


Fig. 8.

4) Wierzchołki trójkąta mają współrzędne:  $O(0, 0)$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, 0)$ , przy czym  $x_2 > x_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$ , jak na fig. 8. Wykazać, że pole tego trójkąta, obliczone przy pomocy całki, ma taką samą wartość, jak w geometrii elementarnej, t. j. równa się  $\frac{1}{2} x_2 \cdot y_1$ .

Łatwo stwierdzić, że boki  $OA$  i  $AB$  mają równania:  $y = \frac{y_1}{x_1} x$ ,  $y = \frac{-y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1}$ .

Pole trójkąta ma zatem wartość:

$$P = \int_0^{x_1} \frac{y_1}{x_1} x \, dx + \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{-y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1} \right) dx$$

Zatem:

$$P = \frac{y_1}{x_1} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_1} + \left( \frac{-y_1 x^2}{2(x_2 - x_1)} + \frac{x_2 y_1}{x_2 - x_1} x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{y_1(x_2 + x_1)}{2} + x_2 y_1 = \frac{1}{2} x_2 y_1$$

Niechaj czytelnik wykaże to samo dla innych położań trójkąta, np. dla  $x_1 > x_2 > 0$ ,  $y_1 > 0$ .

5) Obliczyć pole, ograniczone łukiem paraboli o równaniu  $y^2 = 2px$ ; leżącym nad osią odciętych, od początku układu do punktu o odciętej  $x = a$ , rzędną końcową  $y = b$  i osią odciętych (fig. 9). Otrzymujemy:

$$P = \int_0^a \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2px}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{2\sqrt{2p}}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a \sqrt{2pa} = \frac{2}{3} ab$$

Pole, zawarte między osią rzędnych, prostą równoległą do osi odciętych, a parabolą, ma zatem wartość  $P_1 = \frac{1}{3} ab$ , t. j. jest równe trzeciej części pola prostokąta o podstawie  $a$ , a wysokości  $b$ .

Wzór ten wyprowadza się w geometrii analitycznej także inną drogą, a mianowicie zapomocą pewnego szeregu geometrycznego. Przy pomocy tego wzoru łatwo można obliczyć pole dowolnego odcinka paraboli, jak np. na fig. 4c, str. 63.

6) Obliczyć całkę od  $x_1$  do  $x_2$  z ogólnej funkcji całkowitej wymiernej 3-go stopnia:

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3$$

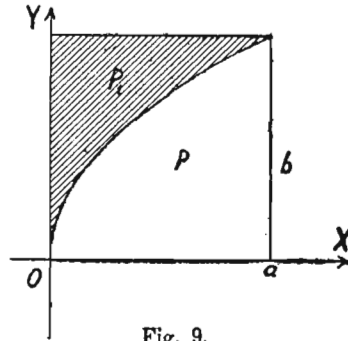


Fig. 9.

i wyrazić wartość tej całki zapomocą rzędnych  $y_1, y_2$  i rzędnej  $y_3$ , należącej do środkowego punktu  $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  z przedziału  $\langle x_1, x_2 \rangle$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (a + bx + cx^2 + ex^3) dx = ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + \frac{1}{4} ex^4 \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$I = a(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} b(x_2^2 - x_1^2) + \frac{1}{3} c(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4} e(x_2^4 - x_1^4)$$

$$I = \frac{x_2 - x_1}{6} [6a + 3b(x_1 + x_2) + 2c(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + \frac{3}{2} e(x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3)]$$

Ponieważ:

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2 + ex_1^3, \quad y_2 = a + bx_2 + cx_2^2 + ex_2^3$$

przeto:

$$I = \frac{x_2 - x_1}{6} [y_1 + y_2 + 4a + 2b(x_1 + x_2) + c(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) + \frac{1}{2} e(x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3)]$$

Rzędna  $y_2$  w punkcie środkowym ma wartość:

$$y_2 = a + \frac{1}{2}b(x_1 + x_3) + \frac{1}{6}c(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2) + \frac{1}{8}e(x_1^3 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + x_3^3)$$

a zatem wyrażenie, zawarte w nawiasie graniastym, ma wartość  $y_1 + y_2 + 4y_3$ . Otrzymujemy zatem ostatecznie wzór:

(65)

$$I = \frac{x_3 - x_1}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

Jeżeli  $y$  jest w całym przedziale  $\langle x_1, x_3 \rangle$  dodatnie, to ta całka daje wielkość pola, ograniczonego łukiem  $\widehat{AB}$  (por. fig. 10) paraboli trzeciego stopnia, rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych.

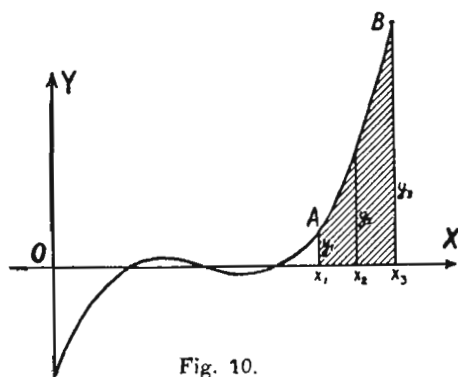


Fig. 10.

Ten sam wzór utrzymuje się dla paraboli 2 go stopnia i dla prostej:  $y = a + bx$  (t. j. dla paraboli 1-go stopnia) jak to wynika ze specjalizacji stałych  $c, e$  w ogólnym równaniu. Wzór (65) znajduje częste zastosowanie w przybliżonych metodach obliczania całek, o czym będzie mowa w osobnym paragrafie. Jeżeli bowiem łuk jakiejś linii można z dostateczną dla żądanych celów dokładnością aproksymować

zapomocą paraboli stopnia nie większego jak 3, to pole, leżące pod tym łukiem, można obliczyć w przybliżeniu wzorem (65), do czego są potrzebne tylko 3 rzędne i długość przedziału.

7) Obliczyć pole, ograniczone łukiem  $\widehat{AB}$  elipsy o dodatnich rzędnych, rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych (por. fig. 11). Równanie tej elipsy ma postać:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

a więc:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Chodzi tu o obliczenie całki:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Użyjmy podstawienia trygonometrycznego:  $x = a \cos t$ , to  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$ ,  $dx = -a \sin t dt$ . Trzeba jeszcze zmierzyć granice całkowania, posługując się wzorem  $x = a \cos t$ . Stąd  $t = \arccos \frac{x}{a}$  a więc zamiast granic  $x_1$  i  $x_2$

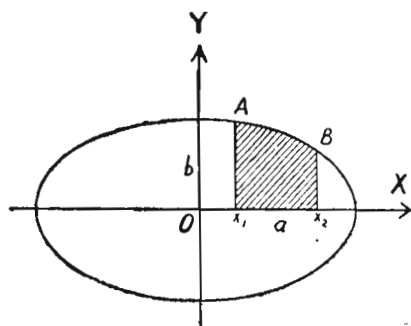


Fig. 11.

trzeba wstawić:  $t_1 = \arccos \frac{x_1}{a}$ ,  $t_2 = \arccos \frac{x_2}{a}$ . Otrzymujemy zatem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} \frac{b}{a} a \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -ab \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 t dt$$

Ponieważ zaś  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ , przeto:

$$P = -ab \left( \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Stąd otrzymamy np. pole ćwiartki elipsy, biorąc  $t_1 = \frac{1}{2} \pi$ ,  $t_2 = 0$  (bo  $t_1 = \arccos \frac{0}{a} = \arccos 0 = \frac{1}{2} \pi$ ,  $t_2 = \arccos \frac{a}{a} = \arccos 1 = 0$ ). Zatem:

$$P = -ab (0 - 0 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pi + 0) = \frac{1}{4} ab \pi$$

Dla całej elipsy otrzymujemy stąd znany wzór:

$$P = ab \pi$$

Stąd dla koła o promieniu  $r = a = b$  otrzymujemy:

$$P = r^2 \pi$$

zgodnie z wynikiem, znanym z geometrii elementarnej.

W tym przykładzie widzieliśmy, że przy ostatecznym obliczaniu wartości całki oznaczonej nie trzeba było wracać do pierwotnej zmiennej  $x$ , lecz można było rachunek przeprowadzić do końca przy pomocy nowej, pomocniczej zmiennej  $t$ .

8) Pole, ograniczone łukiem hiperboli równobocznej:

$$y = \frac{1}{x}$$

należącym do dodatnich odcinków, rzędnymi końcowymi i osią  $x$ -ów, ma wartość:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_{x_1}^{x_2} = \log x_2 - \log x_1 = \log \frac{x_2}{x_1}$$

Jeżeli za początek przedziału obierzemy  $x_1 = 1$ , a za koniec  $x_2 = a$ , to wprost:

$$P = \log a = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

Mamy w ten sposób przedstawiony geometrycznie logarytm naturalny z dowolnej liczby  $a$ , większej od 1, zapomocą pola.

Do tego przedstawienia można by nawiązać całą teorię logarytmów. Tak np. zasadnicze dla nauki o logarytmach twierdzenie:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

można udowodnić w następujący sposób, używając całkowitej definicji logarytmu:

$$\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx$$

Ale  $\int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{z} dz$ , jak to wynika z podstawienia  $x = az$ . A więc:

$$\log(ab) = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{z} dz = \log a + \log b$$

Z tego zaś twierdzenia wyprowadza się z łatwością inne ważne twierdzenia o logarytmach.

9) Obliczmy pole, zawarte między łukiem  $\widehat{ABC}$  hiperboli równobocznej o równaniu:

$$x^2 - y^2 = 1$$

i promieniami, łączącymi początek układu z końcami tego łuku (por. fig. 12). Oznaczmy żądane pole  $OABC$  literą  $u$ . Widocznym jest, że:

$$\frac{1}{2} u = OBC = ODC - BDC = \frac{x_1 y_1}{2} - BDC$$

Otóż pole  $BDC = P$  obliczamy przy pomocy całki:

$$P = \int_1^{x_1} y dx = \int_1^{x_1} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

(tu jest  $y > 0$  i  $x > 1$ ). Całkę tę obliczamy przy pomocy wzoru (35) na str. 48, a mianowicie:

$$P = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 - 1} - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})) \Big|_1^{x_1}$$

Dla dolnej granicy:  $x = 1$  otrzymujemy wartość 0, a dla górnej:

$$P = \frac{1}{2} (x_1 \sqrt{x_1^2 - 1} - \log(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}))$$

Lecz:

$$\sqrt{x_1^2 - 1} = y_1$$

a więc:

$$P = \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} \log(x_1 + y_1)$$

Wobec tego:

$$\frac{1}{2} u = \frac{1}{2} x_1 y_1 - \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} \log(x_1 + y_1) = \frac{1}{2} \log(x_1 + y_1)$$

a zatem całe pole  $OABC$  ma wartość:

$$u = \log(x_1 + y_1)$$

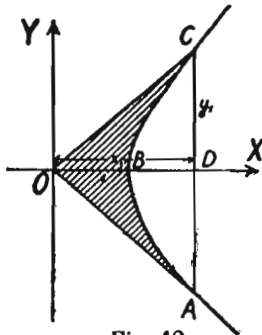


Fig. 12.



Z tego wzoru możemy wyprowadzić bardzo interesujące wnioski. I tak z wzoru tego wynika, że:

$$(a) \quad x_1 + y_1 = e^u$$

Ponieważ pomiędzy  $x_1$  a  $y_1$  zachodzi ponadto związek  $x_1^2 - y_1^2 = 1$  czyli:

$$(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = 1$$

więc:

$$(b) \quad x_1 - y_1 = \frac{1}{x_1 + y_1} = e^{-u}$$

Z równań (a) i (b) wynika:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \operatorname{cosh} u \\ y_1 &= \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \operatorname{sinh} u \end{aligned}$$

Widzimy stąd, że w hiperboli równobocznej o półosi 1 rzędna dowolnego punktu jest sinusem hiperbolicznym a odcięta cosinusem hiperbolicznym, jeżeli je uważamy za funkcje pola wycinka  $OABC$ . Podobne związki zachodzą między rzędną i odciętą dowolnego punktu koła o promieniu 1 a sinusem i cosinusem kąta środkowego. Możemy jednakże także i trygonometryczne funkcje wyrazić jako funkcje pola odpowiedniego wycinka koła (por. fig. 13). I tak wiemy, że:

$$x_1 = \cos \alpha, \quad y_1 = \sin \alpha$$

Wycinek  $OABC$  ma pole:

$$u = \widehat{ABC} \cdot \frac{1}{2} OB = 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = \alpha$$

Możemy więc także napisać:

$$x_1 = \cos u, \quad y_1 = \sin u$$

W ten sposób mamy już uwidocznioną ścisłą analogję pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi a trygonometrycznymi (które można też nazywać funkcjami kołowymi) i tą analogją tłumaczą się nazwy „sinus“ i „cosinus“ dla funkcyj hiperbolicznych.

10) Obliczyć pole powierzchni, zawartej między jedną arkadą cykloidy a osią odciętych. Użyjmy dla cykloidy przedstawienia parametrowego:

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

Punkt przebiega jedną arkadę cykloidy, gdy  $t$  zmienia się od 0 do  $2\pi$ , a zatem gdy  $x$  zmienia się od 0 do  $2a\pi$ . Wobec tego:

$$P = \int_0^{2a\pi} y dx$$

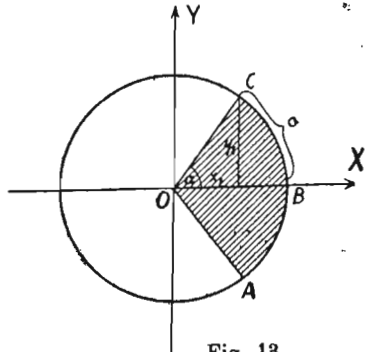


Fig. 13.

Użycie zmiennej  $x$  byłoby tu niedogodne, trzeba by bowiem wyrazić  $y$  jako funkcję zmiennej  $x$ , co prowadzi do dość zawilego wzoru. Jednakże przedstawienie parametrowe nasuwa użycie następującego podstawienia:

$$x = a(t - \sin t)$$

Wtedy oczywiście  $y$  wyraża się wzorem  $a(1 - \cos t)$ , a badana całka ma postać:

$$P = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

czyli:

$$\begin{aligned} P &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt \end{aligned}$$

$$P = a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3a^2 \pi$$

Zatem to pole jest trzy razy większe od pola koła tocącego się, którego punkt zakreśla cycloidę.

Niechaj czytelnik wykaże w podobny sposób, że pole zamknięte asteroidą (por. tom I str. 81), ma wartość:  $\frac{3}{8} a^2 \pi$ .

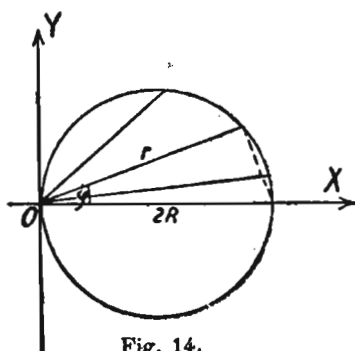


Fig. 14.

11) Rozkład natężenia światła, wychodzącego z pewnego źródła światła  $O$  (fig. 14), przedstawiono za pomocą odcinków  $r$ , wychodzących z tego punktu pod rozmaitymi kątami. Okazało się, że końce tych odcinków tworzą koło, położone tak, jak na fig. 14. Zbadać średnie natężenie  $N$  światła, uwzględniając wszystkie możliwe kąty.

Odcinek  $r$  jest funkcją kąta  $\varphi$ , a mianowicie:

$$r = 2R \cos \varphi$$

a kąt zmienia się od  $-\frac{1}{2}\pi$  do  $+\frac{1}{2}\pi$ . Chodzi tu o obliczenie średniej wartości tej funkcji w przedziale  $\langle -\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi \rangle$ . Na podstawie wzoru (49) na str. 67 otrzymujemy:

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2R \cos \varphi d\varphi = \frac{2R}{\pi} \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} (1 - (-1)) = \frac{4R}{\pi}$$

W podobny sposób można zbadać średnią odległość  $d$  punktów (obwodu) elipsy o półosiach  $a$  i  $b$  od ogniska, używając biegunowego równania elipsy:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

przyczem biegun leży w ognisku, a ośią jest oś wielka elipsy;  $p$  oznacza tu parametr i ma wartość  $b^2/a$ , a  $\varepsilon$  jest to mimośród liczbowy:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$$

Dla górnej połowy elipsy otrzymujemy z wzoru (49) na str. 67:

$$d = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} d\varphi$$

Przy obliczaniu tej całki dogodnym jest użycie podstawienia  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u$  (por. § 210). Pozostawiamy czytelnikowi do stwierdzenia, że  $d = b$ . Wynik ten znajduje zastosowanie w astronomji, przy badaniu średnich odległości planet od słońca.

12) Prąd elektryczny zmienny zmienia się perjodycznie według prawa sinusowego, a mianowicie:

$$i = i_0 \sin at$$

Tutaj  $i_0$  oznacza największe natężenie prądu. Okresem zmiany jest czas  $T = \frac{2\pi}{a}$ , gdy bowiem  $t$  zmienia się od 0 do  $\frac{2\pi}{a}$ , to  $at$  zmienia się od 0 do  $2\pi$ . Zbadać średnią kwadratową  $\sigma$ , czyli tak zwany „prąd skuteczny“. Użyjemy do tego celu wzoru (50) na str. 68 dla przedziału  $\langle 0, T \rangle$ . Zatem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_0^2 \sin^2 at dt = \frac{i_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2at}{2} dt$$

a więc:

$$\sigma^2 = \frac{i_0^2}{2T} \left( t - \frac{\sin 2at}{2a} \right) \Big|_0^T = \frac{i_0^2}{2T} \left( T - \frac{\sin 2aT}{2a} \right)$$

Ale  $2aT = 2a \cdot \frac{2\pi}{a} = 4\pi$ , a więc  $\sin 2aT = \sin 4\pi = 0$  i otrzymujemy:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} i_0^2$$

Stąd:

$$\sigma = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Jeżeli natężenie prądu zmiennego wyraża się wzorem:

$$i = i_1 \sin at + i_2 \sin 2at + \dots + i_n \sin nat \\ + j_1 \cos at + j_2 \cos 2at + \dots + j_n \cos nat$$

odpowiadającym kilku drganiom; to okazuje się w podobny sposób, jak poprzednio (używając przytem wzorów z przykładu 2 na str. 83), że prąd skuteczny ma wartość:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2 + j_1^2 + j_2^2 + \dots + j_n^2}$$

Wykonanie rachunków pozostawiamy czytelnikowi dla ćwiczenia.

## § 221. Wzory Wallisa i Stirlinga.

Wyprowadziliśmy dla całki  $\int \sin^n x dx$  wzór redukcyjny:

$$\int \sin^n x dx = \frac{1}{n} (-\cos x \sin^{n-1} x) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

używając całkowania „per partes“ (por. § 206 str. 14, wzór 17).

Zastosujemy ten wzór do obliczenia całki oznaczonej:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

Opierając się na wzorze (63), otrzymujemy:

$$I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Wyrażenie po znaku równości jest równe zeru dla  $\frac{1}{2}\pi$ , ponieważ  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$  i dla 0, ponieważ  $\sin^{n-1} 0 = 0$ . Pozostaje zatem dla badanej całki następujący prosty wzór redukcyjny:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Dla  $n=0$  otrzymujemy wprost  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

a dla  $n=1$  jest  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 + 1 = 1$

Na podstawie tego otrzymujemy dla parzystego  $n = 2p$  kolejno:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi, \quad I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

Ogólnie:

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots 2p} \cdot \frac{\pi}{2}$$

jak łatwo stwierdzić przez indukcję zupełną. Natomiast dla nieparzystych  $n = 2p + 1$  otrzymujemy kolejno:

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

a ogólnie:

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \dots 2p}{3 \cdot 5 \dots (2p+1)}$$

Ponieważ  $\sin x$  jest w badanym przedziale  $\langle 0, \frac{1}{2} \pi \rangle$  nieujemne i nie większe od 1, przeto:

$$\sin^{2p-1} x \geq \sin^{2p} x \geq \sin^{2p+1} x$$

Stąd wynika (na podstawie § 217, wniosek 1), że:

$$I_{2p-1} \geq I_{2p} \geq I_{2p+1}$$

czyli:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-1)} \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \cdot \frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2p-2) \cdot 2p}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-1) \cdot (2p+1)}$$

a stąd:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2p-2)(2p-2) \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-3)(2p-1)(2p-1)} \geq \\ & \geq \frac{\pi}{2} \geq \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2p-2)(2p-2) \cdot 2p \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-3)(2p-1)(2p-1)(2p+1)} \end{aligned}$$

Nazwijmy lewą stronę literą  $A_p$ . Po podzieleniu przez  $A_p$  otrzymamy:

$$1 \geq \left( \frac{\pi}{2} : A_p \right) \geq \frac{2p}{2p+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2p}}$$

Gdy  $p \rightarrow \infty$ , to  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2p}} \rightarrow 1$ , a zatem także ciąg  $\frac{\pi}{2} : A_p$  dąży do 1,

czyli:

$$(66) \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2p-2)(2p-2) \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2p-3)(2p-1)(2p-1)}$$

Mamy więc przedstawioną liczbę  $\frac{\pi}{2}$  przy pomocy iloczynu nieskończonego. Iloczyn ten możemy także napisać w dogodniejszej postaci w na-

stępujący sposób:

$$(66a) \quad \frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) \dots = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2p-1)^2}\right)$$

Można także, uzupełniając we wzorze (66) licznik i mianownik przez wprowadzenie dodatkowych czynników  $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots 2p \cdot 2p \cdot 2p$ , przedstawić go w zwęższej postaci:

$$(66b) \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p! 2^{2p}}{(2p)! \sqrt{2^p}}$$

Wzór (66), zwany wzorem Wallisa, nie nadaje się wprawdzie dobrze do obliczenia liczby  $\pi$ , jest bowiem bardzo wolno zbieżny. Ma on jednak bardzo doniosłe znaczenie z tego względu, że można z niego nietrudno otrzymać dogodne przybliżenie na obliczanie wartości wyrażenia  $p!$ , co przy wielkich liczbach  $p$  sprawia wielkie trudności, a jest potrzebne w rozmaitych zastosowaniach, np. w rachunku prawdopodobieństwa.

Wzór, dający takie przybliżenie, ma postać:

$$(67) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p!}{p^{p+1/2} e^{-p} \sqrt{2\pi}} = 1$$

i nazywa się wzorem Stirlinga.

*Dowód wzoru Stirlinga.*

Dzielimy obie strony wzoru (66b) przez  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  i upraszczamy licznik i mianownik prawej strony przez  $p!$ . Otrzymamy w ten sposób:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p! 2^{2p-1/2}}{(p+1)(p+2)\dots(2p-1) p^{1/2} \sqrt{2\pi}} = 1$$

Uzupełnijmy ułamek  $\frac{2^{2p-1/2}}{2p-1}$  tak, aby miał formę  $\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p-1/2}$  czyli  $\left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)^{2p-1/2}$ , która dąży do  $e$ , gdy  $p \rightarrow \infty$ . W tym celu trzeba pomnożyć licznik i mianownik przez  $\frac{p^{2p-1/2}}{(2p-1)^{2p-1/2}}$ .

Otrzymamy w ten sposób:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p! \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right)^{2p-1/2} \cdot (2p-1)^{2p-1/2}}{p^{2p+1} (p+1)(p+2)\dots(2p-2) \sqrt{2\pi}} = 1$$

Postępując tak samo z ułamkiem  $\frac{(2p-1)^{2p-2}}{2p-2}$  i z dalszemi ułamkami, otrzymamy:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p!}{p^{p+1/2} \sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{2p-2}\right)^{2p-1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2p-2}\right)^{2p-3/2} \cdots \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1/2} = 1$$

Chodzi jeszcze tylko o okazanie, że iloczyn występujących tu potęg postaci  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2}$  o dodatnim  $x$  można zastąpić przez iloczyn  $e \cdot e \cdots e = e^p$ .

Oznaczmy dla krótkości całe wyrażenie, którego granicę utworzyliśmy, literą  $W_p$ . Zamknijemy ten ciąg  $W_p$  pomiędzy dwa ciągi, opierając się na tem, że:

$$(a) \quad e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} < e^{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)}$$

*Dowód nierówności (a).*

Te nierówności wynikają ze znanego rozwinięcia logarytmu (por. tom I, § 139, wzór 138):

$$\log(1+x) = \log x + 2 \left( \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^3} + \dots \right)$$

czyli:

$$\log\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \frac{2}{2x+1} \left[ 1 + \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^3} + \dots \right]$$

a więc:

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} = 1 + \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^3} + \dots$$

Stąd wynika, że:

$$1 < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} < 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots \right)$$

zastąpiliśmy bowiem w mianownikach liczby 3, 5, 7, ... wszędzie liczbą 3. W nawiasie mamy szereg geometryczny o ilorazie  $\frac{1}{(2x+1)^2}$ , zatem jego wartością jest:

$$\frac{1}{(2x+1)^2} : \left(1 - \frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

czyli:

$$\frac{1}{2x(2x+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Wobec tego:

$$1 < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} < 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

a więc:

$$e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1/2} < e^{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)}$$

Stosujemy te nierówności do wszystkich potęg, występujących w ciągu  $W_p$  i otrzymujemy:

$$\frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^p < W_p < \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{p+1/2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} \right)$$

czyli:

$$1 < W_p : \frac{p! e^p}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi}} < e^{\frac{1}{2p}}$$

Ponieważ obydwa wyrażenia ograniczające dążą do 1, przeto także:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( W_p : \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi} e^{-p}} \right) = 1$$

Ponieważ zaś dzielna  $W_p$  dąży do 1, przeto i dzielnik musi dążyć do 1, a to właśnie jest treścią wzoru Stirlinga.

Ponieważ iloraz ciągów  $p!$  i  $p^{p+1/2} e^{-p} \sqrt{2\pi} = s_p$  dąży do 1, przeto mówimy, że ciąg  $s_p$  przedstawia *asymptotycznie* wartość ciągu  $p!$  Dla wielkich  $p$  można więc brać zamiast  $p!$  wartość  $s_p$ ; tę zaś wartość oblicza się dogodnie przy użyciu logarytmów. Popelnia się przytem wprawdzie wielki błąd *bezwzględny*, lecz błąd *względny*, t. j.  $\frac{p! - s_p}{s_p} = \frac{p!}{s_p} - 1$  dąży do zera. Tak np. już dla  $p=10$  jest  $p!=3628800$  a  $s_p \approx 3598700$ . Błąd bezwzględny wynosi tu wprawdzie około 30100, ale błąd względny nie osiąga wartości 0.009.

Używając ciągu  $b_p = p! : s_p$ , można uzyskać wzór, przedstawiający jeszcze dokładniej  $p!$ . Utwórzmy mianowicie iloraz:

$$\frac{b_p}{b_{p+1}} = \frac{p!}{p^{p+1/2}\sqrt{2\pi} e^{-p}} : \frac{(p+1)!}{(p+1)^{p+1/2}\sqrt{2\pi} e^{-p-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{p})^{p+1/2}}{e}$$

Posługując się nierównościami (a), otrzymujemy stąd:

$$1 < \frac{b_p}{b_{p+1}} < e^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right)}$$

a więc:  $b_p > b_{p+1}$ , zatem ciąg  $b_p$  maleje monotonicznie. Każdy więc jego wyraz jest większy od granicy 1. Natomiast  $b_p e^{-\frac{1}{12p}} < b_{p+1} e^{-\frac{1}{12(p+1)}}$ , a więc ciąg  $b_p e^{-\frac{1}{12p}}$  rośnie monotonicznie i ma również granicę 1, zatem wszystkie jego wyrazy są mniejsze od 1. A więc:

$$b_p > 1 > b_p e^{-\frac{1}{12p}}$$

Stąd zaś wynika, że:

$$b_p e^{-\frac{\vartheta}{12p}} = 1, \quad \text{gdzie } 0 < \vartheta < 1$$



czyli:

$$\frac{p!}{p^{p+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-p}} \cdot e^{-\frac{\vartheta}{12p}} = 1$$

czyli:

$$(68) \quad \boxed{p! = p^{p+1/2} \sqrt{2\pi} e^{-p + \frac{\vartheta}{12p}}} \quad 0 < \vartheta < 1$$

Używając tego wzoru na obliczenie 10!, otrzymujemy, biorąc za  $\vartheta$  górne ograniczenie 1, liczbę: 3628930, a więc zarówno błąd bezwzględny jak i względny są tu znacznie mniejsze aniżeli przy użyciu wzoru (67) (błąd bezwzględny wynosi 130 a błąd względny około 0.00004).

Użycie wzoru (68) ma tę zaletę, że znajdujemy z niego dwie liczby, ograniczające  $p!$  zdołu (kładąc  $\vartheta = 0$ ) i zgóry ( $\vartheta = 1$ ).

*Uwaga.* Jeszcze dokładniejsze przedstawienie wyrażenia  $p!$  uzyskuje się, biorąc w wykładniku liczby  $e$  dowolną ilość wyrazów  $\frac{1}{k}$  zwanego szeregu Stirlinga (Zob. Serret. *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, 3 wyd., tom II, str. 248 i nast.).

## § 222. O ciągach, dążących do całki oznaczonej.

Na podstawie wyników, uzyskanych w poprzednich paragrafach, potrafimy obliczyć wartość całki oznaczonej tylko wtedy, gdy potrafimy znaleźć całkę nieoznaczoną badanej funkcji. W innych przypadkach trzeba się uciec do definicji i starać się wyznaczyć w jakiś sposób kres górny sum:

$$s = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(b - x_{n-1})$$

Okazemy, że z zbioru tych liczb  $s$  można wybrać w rozmaite, bardzo dogodne sposoby, ciąg:  $s_1, s_2, \dots, s_p, \dots$ , dążący do kresu górnego  $K$ . Trzeba mianowicie dobrać kolejne podziały przedziału  $\langle a, b \rangle$  tak, aby *wszystkie* częściowe przedziały  $\Delta x_i$  dążyły do zera; do tego zaś wystarcza, aby ciąg utworzony z *największych* przedziałów każdego podziału dążył do zera. Tak np. można dzielić przedział  $\langle a, b \rangle$  kolejno na 2, 3, 4, ...  $p+1$  równych części i otrzymać w ten sposób ciąg sum:

$$s_1 = m_1^{(1)}(x_1^{(1)} - a) + m_2^{(1)}(b - x_1^{(1)})$$

$$s_2 = m_1^{(2)}(x_1^{(2)} - a) + m_2^{(2)}(x_2^{(2)} - x_1^{(2)}) + m_3^{(2)}(b - x_2^{(2)}) \dots$$

ogólnie:

$$s_p = m_1^{(p)}(x_1^{(p)} - a) + m_2^{(p)}(x_2^{(p)} - x_1^{(p)}) + \dots + m_{p+1}^{(p)}(b - x_p^{(p)}) = \sum_{i=1}^{p+1} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$$

Tu wszystkie częściowe przedziały dążą do zera, albowiem  $\Delta x_i^{(p)} = \frac{b-a}{p+1}$

a więc  $\lim_{p \rightarrow \infty} \Delta x_i^{(p)} = 0$ .

Można jednak także inaczej dzielić przedział  $\langle a, b \rangle$ , np. kolejno na 2, 4, 8, ...  $2^p$ , ... równych części. Wtedy także wszystkie przedziały częściowe dążą do zera i to nawet szybciej, aniżeli w poprzednim przypadku. Można także dzielić przedział  $\langle a, b \rangle$  na nierówne części, wstawiając np. pomiędzy  $a$  i  $b$  liczby według postępu geometrycznego o ilorazie  $\sqrt[p+1]{\frac{b}{a}} = q$ ; wtedy  $x_1^{(p)} = aq$ ,  $x_2^{(p)} = aq^2$ , ...  $x_p^{(p)} = aq^p$ ,  $aq^{p+1} = \frac{ab}{a} = b$ .

Wogóle istnieje nieskończenie wiele rozmaitych ciągów podziałów, przy których długość największego częściowego przedziału dąży do zera. Niechaj ogólnym wyrazem ciągu sum dolnych, odpowiadających takiemu ciągowi podziałów, będzie:

$$s_p = \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$$

Okazemy, że taki ciąg sum dąży do całki oznaczonej:  $K = \int_a^b f(x) dx$ , gdy  $p$  wzrasta nieograniczenie.

*Dowód.* Według wzoru 55 z § 214 jest ta całka zawarta pomiędzy dowolną sumą dolną  $s_p$  a odpowiadającą jej sumą górną  $S_p$ . A więc:

$$s_p = \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} \leq K \leq \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = S_p$$

Stąd wynika:

$$(I) \quad 0 \leq K - s_p \leq S_p - s_p = \sum_{i=1}^{n_p} (M_i^{(p)} - m_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)}$$

Chcemy okazać, że  $\lim_{p \rightarrow \infty} s_p = K$ ; to znaczy, że do każdej dodatniej liczby  $\varepsilon$  można dobrać takie  $N$ , że dla wszystkich  $p > N$  jest prawa strona mniejsza od  $\varepsilon$ . Oprzemy się na tem, że funkcja  $f(x)$  jest ciągła w przedziale zamkniętym  $\langle a, b \rangle$ , a więc jest w nim *jednostajnie ciągła* (por. tom I, § 59). To znaczy, że do każdej dodatniej liczby  $\varepsilon'$  można dobrać takie dodatnie  $\delta$ , że dla wszystkich  $x$  i  $x_0$  z przedziału  $\langle a, b \rangle$ , spełniających warunek  $|x - x_0| < \delta$ , jest  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$ . Obierzmy  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$  i wyznaczmy odpowiednie  $\delta$ . Do tego  $\delta$  debierzmy takie  $N$ , aby dla  $p > N$  było  $|\Delta x_i^{(p)}| < \delta$ ; w myśl założenia da się to uskutecznić, bo długości wszystkich częściowych przedziałów dążą do zera. Oznaczając w każdym z tych przedziałów literami  $x$  i  $x_0$  punkty, w których funkcja przybiera największą i najmniejszą wartość, t. j.  $M_i^{(p)}$  i  $m_i^{(p)}$ , widzimy, że  $|x - x_0| < \delta$ , a zatem  $|M_i^{(p)} - m_i^{(p)}| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$ . Znak bezwzględnej wartości nie jest tu potrzebny, ponieważ  $M_i^{(p)} \geq m_i^{(p)}$ . Wobec tego z nie-

równości (I) otrzymujemy:

$$0 \leq K - s_p \leq S_p - s_p < \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i^{(p)} = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n_p} \Delta x_i^{(p)} = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

Spełnia się więc dla wszystkich  $p > N$  warunek:

$$(II) \quad 0 \leq K - s_p \leq S_p - s_p < \varepsilon$$

a więc:

$$|K - s_p| < \varepsilon$$

To znaczy, że:

$$(69) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} s_p = K = \int_a^b f(x) dx$$

lub wyraźniej:

$$(69a) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_p} m_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = \int_a^b f(x) dx$$

( $\Delta x_i^{(p)} \rightarrow 0$ )

Dowiedliśmy więc, że ciąg sum dolnych, odpowiadających takim podziałom przedziału, w których długość największego częściowego przedziału dąży do zera, dąży do całki oznaczonej.

Zamiast sum dolnych:  $s_p$ , można użyć do wyznaczenia całki oznaczonej także sum górnych:  $S_p = \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)}$ . I tak z wzoru (II) wynika od razu, że także:

$$|S_p - s_p| < \varepsilon$$

dla  $p > N$ , a to znaczy, że:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (S_p - s_p) = 0$$

czyli:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p = K$$

A więc:

$$(70) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_p} M_i^{(p)} \Delta x_i^{(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p = K = \int_a^b f(x) dx$$

( $\Delta x_i^{(p)} \rightarrow 0$ )

To dowodzi, że także ciąg takich sum górnych, w których wszystkie przedziały dążą do zera, dąży do całki oznaczonej.

Z tych dwóch twierdzeń wynika, że do wyznaczenia całki oznaczonej można także użyć ciągu sum „pośrednich”, utworzonych według wzoru:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n_p} f(\xi_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)}$$

gdzie  $\xi_i^{(p)}$  oznacza dowolną wartość z przedziału  $\langle x_{i-1}^{(p)}, x_i^{(p)} \rangle$ , a więc dowolną wartość pośrednią, albo  $x_{i-1}^{(p)}$  albo  $x_i^{(p)}$ . Ponieważ bowiem zawsze zachodzą nierówności:

$$m_i^{(p)} \leq f(\xi_i^{(p)}) \leq M_i^{(p)}$$

przeto muszą zachodzić także nierówności  $s_p \leq \sigma_p \leq S_p$ . Ciąg zaś, którego wyrazy są stale zawarte między odpowiednimi wyrazami dwóch ciągów zbieżnych do wspólnej granicy, jest także zbieżny do tej samej granicy. Zatem:

$$(71) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_p} f(\xi_i^{(p)}) \Delta x_i^{(p)} = \int_a^b f(x) dx$$

( $\Delta x_i^{(p)} \rightarrow 0$ )

Całka oznaczona jest równa granicy ciągu sum, w których każdy dodatek jest iloczynem z długości przedziału częściowego  $i$  z wartości funkcji w dowolnym punkcie tego przedziału, jeżeli tylko długość największego częściowego przedziału dąży do zera.

To twierdzenie zawiera poprzednie twierdzenia tego paragrafu jako przypadki szczególne. Przy budowaniu ciągów sum, zdążających do całki, możemy zatem brać z każdego przedziału częściowego albo największą wartość ( $M_i$ ) funkcji  $f(x)$  w tym przedziale, albo najmniejszą ( $m_i$ ), albo wartość funkcji na początku przedziału, t. j.  $f(x_{i-1})$ , albo wartość  $f(x_i)$  na końcu przedziału, albo wreszcie zupełnie dowolną wartość  $f(\xi_i)$  z wnętrza każdego przedziału.

Wszystkie te sumy zdążają do wspólnej granicy, gdy długość największego częściowego przedziału w każdym podziale dąży do zera, a tą wspólną granicą jest całka oznaczona z  $f(x)$  od  $a$  do  $b$ . Tych ciągów sum dolnych, górnych lub dowolnych sum pośrednich można użyć wprost do definicji całki oznaczonej. Istotnie też w podręcznikach analizy najczęściej tą właśnie drogą wprowadza się pojęcie całki oznaczonej.

*Uwaga 1.* Widzieliśmy w § 214, str. 72, że średnia arytmetyczna z  $n$  wartości funkcji  $f(x)$ , dobranych odpowiednio w  $n$  przedziałach, otrzymanych przez podział przedziału  $\langle a, b \rangle$  na  $n$  równych części, jest równa  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ . Jeżeli zaś bierzemy te wartości funkcji  $f(x)$  zupełnie dowolnie w tych  $n$  przedziałach, to ich średnia arytmetyczna

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}$$

dąży do  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Albowiem suma:

$$\alpha_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = (b-a) \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}$$

a więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

*Uwaga 2.* Wszystkie te rozważania dotyczyły tylko funkcji *ciągłych* w  $\langle a, b \rangle$ . Okazano, że twierdzenia tego paragrafu odnoszą się także do funkcji *nieciągłych*, lecz ograniczonych i posiadających skończoną liczbę punktów nieciągłości w danym przedziale, a nawet do niektórych funkcji, posiadających nieskończenie wiele punktów nieciągłości w skończonym przedziale. Przy tych rozważaniach wprowadza się od razu szerszą definicję całki. W następnym paragrafie zajmiemy się niektórymi najprostszymi uogólnieniami pojęcia całki.

*Przykłady.*

1) Przy pomocy takich ciągów można obliczyć wartość całki oznaczonej, nie używając do tego funkcji pierwotnej, a więc całki nieoznaczonej. Spróbujmy tą metodą obliczyć wartość całki:

$$I = \int_0^5 x^2 dx$$

Użyjmy podziału przedziału całkowania  $\langle 0, 5 \rangle$  na *równe* części. Wyraz  $s_n$  ciągu sum otrzymamy, dzieląc przedział na  $n$  równych części, a więc:

$$\Delta x_i = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n} \quad (\text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Długość każdego z tych przedziałów mnożymy przez wartość najmniejszą, t. j. w tym przypadku przez wartość funkcji  $y = x^2$  na początku każdego przedziału częściowego, albowiem ta funkcja jest monotonicznie rosnąca w przedziale  $\langle 0, 5 \rangle$ . Temi wartościami funkcji są odpowiednio:

$$y = 0^2, \quad \left(1 \cdot \frac{5}{n}\right)^2, \quad \left(2 \cdot \frac{5}{n}\right)^2, \quad \left(3 \cdot \frac{5}{n}\right)^2, \dots, \left[(n-1) \cdot \frac{5}{n}\right]^2$$

a więc:

$$s_n = 0^2 \cdot \frac{5}{n} + 1^2 \cdot \left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n} + 2^2 \cdot \left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n} + \dots + (n-1)^2 \cdot \left(\frac{5}{n}\right)^2 \cdot \frac{5}{n}$$

$$s_n = \left(\frac{5}{n}\right)^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]$$

Na sumę kwadratów wszystkich liczb naturalnych od 1 do  $n$  mamy wzór (por. tom I, § 196, wzór (207))  $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ , a zatem na sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do  $n-1$  otrzymujemy wyrażenie:  $\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ . Wobec tego:

$$s_n = \frac{125}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) = \frac{125}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Stąd:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{125}{6} (1 - 0)(2 - 0) = \frac{125}{3}$$

A więc:

$$I = \int_0^6 x^2 dx = \frac{125}{3}$$

*Próba.* Przy pomocy całki nieoznaczonej  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$  znajdujemy:

$$\int_0^6 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \Big|_0^6 = \frac{125}{3} + C - 0 - C = \frac{125}{3}$$

a zatem tę samą wartość, którą otrzymaliśmy bezpośrednio z ciągu odpowiednich sum.

2) Obliczyć bez używania całki nieoznaczonej wartość całki:

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{x}$$

Tutaj korzystniej jest podzielić przedział  $\langle 2, 6 \rangle$  na części nierówne, lecz wzrastające według postępu *geometrycznego* o ilorazie:

$$q = \sqrt[n]{\frac{6}{2}} = \sqrt[n]{3}$$

Otrzymamy wtedy następujące punkty podziału:

$$2\sqrt[n]{3}, \quad 2\sqrt[n]{3^2}, \quad 2\sqrt[n]{3^3}, \dots, 2\sqrt[n]{3^{n-1}}, \quad 2\sqrt[n]{3^n} = 6$$

Chcąc otrzymać sumy dolne, należy brać wartości funkcji  $y = \frac{1}{x}$  na końcu każdego z przedziałów częściowych, funkcja ta bowiem maleje monotonicznie. Otrzymamy w ten sposób na  $s_n$  następujące wyrażenie:

$$s_n = \frac{1}{2\sqrt[n]{3}} (2\sqrt[n]{3} - 2) + \frac{1}{2\sqrt[n]{3^2}} (2\sqrt[n]{3^2} - 2\sqrt[n]{3}) + \dots + \frac{1}{2\sqrt[n]{3^n}} (2\sqrt[n]{3^n} - 2\sqrt[n]{3^{n-1}})$$

Długości wszystkich przedziałów dążą do zera, gdy  $n$  wzrasta nieograniczenie, albowiem nawet najdłuższy, ostatni przedział, ma długość:

$$\Delta x_n = 2\sqrt[n]{3^n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) = 6 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)$$

Wiadomo zaś, że  $\sqrt[n]{3} = 3^{1/n} \rightarrow 3^0 = 1$ , a więc  $\Delta x_n \rightarrow 6(1 - \frac{1}{1}) = 0$ .

Wykonujemy w  $s_n$  zaznaczone działania i otrzymujemy:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = n\left(1 - 3^{-1/n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - 3^{-1/n})$$

Pierwszy czynnik dąży tu do  $\infty$  a drugi do 0. Przy pomocy reguły Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3^{-1/n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3^{-1/n} \log_e 3 \cdot \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-1/n} \log_e 3 = \log_e 3$$

Zatem:

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \log_e 3'$$

*Próba.* Przy pomocy całki nieoznaczonej otrzymujemy:

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \log_e |x| \Big|_2^6 = \log_e 6 - \log_e 2 = \log_e \frac{6}{2} = \log_e 3$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym zapomocą ciągu sum dolnych.

Z tych przykładów widzimy, że znając całkę nieoznaczoną, docho-  
dzi się bez porównania szybciej do wyniku. Jednakże pomimo to ta nowa  
metoda jest bardzo pożyteczna, ponieważ przy jej pomocy można także  
obliczać całki oznaczone z takich funkcji, dla których nie znamy całek  
nieoznaczonych. Ponadto przy pomocy ciągów dążących do całki ozna-  
czonej, łatwo jest definiować i obliczać rozmaite wielkości geometryczne  
i fizyczne, jak np. długość łuku, momenty statyczne i bezwładności, jak  
to zobaczymy w dalszym ciągu. Wreszcie na tej metodzie opierają się  
rozmaite *przybliżone metody* obliczania całek oznaczonych (i pól) w takich  
przypadkach, w których zawodzi użycie całki nieoznaczonej, np. gdy  
funkcja podcałkowa jest podana tylko w sposób tabelaryczny lub gra-  
ficzny. Temi przybliżonymi metodami zajmiemy się w dalszym ciągu  
w § 226.

### § 223. Całki uogólnione.

We wszystkich rozważaniach tego rozdziału czyniliśmy założenie,  
że funkcja podcałkowa  $f(x)$  jest *ciągła* w przedziale zamkniętym  $\langle a, b \rangle$ .  
Można jednak zdefiniować całkę oznaczoną także ogólniej, biorąc pod uwagę  
funkcję nieciągłą lecz *ograniczoną* w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , dopuszczając przy-  
tem skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , a nawet  
w pewnych przypadkach nieskończenie wiele takich punktów. Do defi-  
nicji używa się kresów górnych lub kresów dolnych lub też ciągów od

powiednich sum. W ten sposób powstały rozmaite uogólnienia pojęcia całki, odgrywające nadzwyczaj ważną rolę w matematyce współczesnej, jak np. całki Riemanna i całki Lebesgue'a. W zastosowaniach praktycznych te pojęcia nie znalazły dotychczas szerszego rozpowszechnienia i dlatego nie będziemy się tu nimi zajmowali<sup>1</sup>.

Ograniczmy się tylko do najprostszej klasy funkcji, a mianowicie do funkcji  $f(x)$ , posiadających w przedziale  $\langle a, b \rangle$  tylko skończoną liczbę skończonych *skoków* a pozatem ciągłych we wszystkich innych punktach tego przedziału. Weźmy pod uwagę najpierw taką funkcję  $f(x)$ , która jest ciągła w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$  z wyjątkiem jednego punktu  $c$ , leżącego wewnątrz przedziału, w tym zaś punkcie posiada *skończony skok*, jak na fig. 15. Obierzmy w przedziale  $\langle a, c \rangle$  dowolny punkt  $c - \varepsilon$ , a w przedziale  $\langle c, b \rangle$  punkt  $c + \varepsilon'$ . Zarówno całka oznaczona

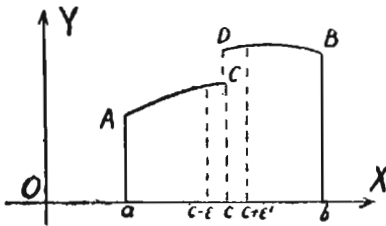


Fig. 15.

od  $a$  do  $c - \varepsilon$ , jak i całka od  $c + \varepsilon'$  do  $b$  istnieje. Gdy  $\varepsilon$  dąży do zera, to całka  $\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$  dąży do skończonej granicy, a mianowicie do całki oznaczonej od  $a$  do  $c$  z funkcji  $f_1(x)$ , która jest równa  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, c \rangle$ , otwartym z jednej strony, a dla  $x = c$  przyjmuje tę wartość, do której dąży  $f(x)$ , gdy  $x$  dąży do  $c$  z lewej strony.

Podobnie istnieje granica drugiej całki:  $\int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx$ , gdy  $\varepsilon'$  dąży do zera. Sumę tych dwóch granic nazywamy całką oznaczoną z funkcji nieciągłej  $f(x)$ . A więc:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx$$

Jest to całka *uogólniona*. Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest nieujemna w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to wartość całki uogólnionej podaje pole figury, zamkniętej linią  $ACDB$ , rzędnymi  $aA$  i  $bB$ , tudzież odcinkiem  $CD$  na fig. 15. W zupełnie podobny sposób określa się całkę z funkcji, posiadającej skończoną liczbę skończonych skoków.

<sup>1</sup> Czytelnika, który pragnąłby głębiej wniknąć w ogólną teorię całek oznaczonych, odsyłamy do podręcznika S. Saks'a p. t. *Zarys teorii całki* (Warszawa 1930) lub de la Vallée Poussin'a p. t. *Cours d'Analyse Infinitésimale* (Paryż, wyd. 6, 1926 r.).



*Uwaga.* Nietrudno jest dowieść, że do tych całek uogólnionych stosują się te same twierdzenia: o addytywności, o całkowaniu sumy, o wartości średniej (wzór 48), o całkowaniu przez podstawienie, „per partes”, co do zwyczajnych całek oznaczonych, nieuogólnionych.

Jeżeli w całce uogólnionej weźmiemy zamiast stałej górnej granicy  $b$ , zmienną  $t$ ,

to ta całka jest funkcją  $\varphi(t)$  tej górnej granicy:  $\int_a^t f(x) dx = \varphi(t)$ . Otóż można udo-

wodnić, że ta funkcja  $\varphi(t)$  jest funkcją ciągłą zmiennej  $t$ , nawet w tych punktach, w których  $f(x)$  posiada punkty nieciągłości. Odrazu to widać z geometrycznej interpretacji całki jako pola: gdy punkt  $c$  przesuwamy się o dość mały odcinek, to wielkość pola zmienia się tak mało, jak tego zgóry zażądamy. Jest to uogólnienie twierdzenia, udowodnionego na początku § 215. Pochodną tej funkcji  $\varphi(t)$  według zmiennej  $t$  jest wewnątrz przedziału  $\langle a, c \rangle$  funkcja  $f(t)$ , a także wewnątrz przedziału  $\langle c, b \rangle$ , natomiast w samym punkcie  $c$  funkcja  $\varphi(t)$  nie posiada pochodnej.

*Przykład.*

Obliczyć:

$$\int_{-3}^{+2} \operatorname{sign} x dx$$

Funkcja  $\operatorname{sign} x$  (por. tom I § 1, str. 12, fig. 3) jest równa  $+1$  dla  $x > 0$ , a  $-1$  dla  $x < 0$ , w punkcie zaś  $x = 0$  na skok skoczony. Rozkładamy zatem tę całkę na sumę dwóch całek:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^{+2} \operatorname{sign} x dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-3}^{-\epsilon} \operatorname{sign} x dx + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\epsilon'}^{+2} \operatorname{sign} x dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-3}^{-\epsilon} (-1) dx + \\ &+ \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\epsilon'}^{+2} (+1) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (-x) \Big|_{-3}^{-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} x \Big|_{\epsilon'}^{+2} = -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi ogólny wzór:

$$\int_a^b \operatorname{sign} x dx = |b| - |a|$$

uwzględniając wszystkie możliwe wypadki dla  $a$  i  $b$ , a więc np. dla  $a < b$ , trzeba rozważyć  $a \geq 0$  i  $b \geq 0$ ,  $a < 0$  i  $b \geq 0$ ,  $a < 0$  i  $b < 0$ . Wygodnie jest posługiwać się przytem obrazem graficznym funkcji  $\operatorname{sign} x$ .

Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób wartość całki  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ ,

przyczem  $f(x) = x$  w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ , a  $f(x) = x - 2\pi$  w przedziale  $\langle \pi, 2\pi \rangle$ . Wykres!

## § 224. Całki niewłaściwe.

Wszystkie całki oznaczone, o których dotychczas była mowa, zarówno uogólnione, jak i nieuogólnione, nazywamy całkami oznaczonymi *właściwymi*.

W przeciwieństwie do nich nazywamy całkami *niewłaściwymi* takie nowe rodzaje całek, w których albo funkcja podcałkowa jest *nieogramiczona* w otoczeniu jakiegoś punktu przedziału całkowania, albo przedział całkowania jest *niewłaściwy*, t. j.  $\langle a, \infty \rangle$  albo  $\langle -\infty, b \rangle$  albo wreszcie  $\langle -\infty, +\infty \rangle$ . Takie całki niewłaściwe określamy zapomocą następujących definicji.

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$ , a dąży do nieskończoności, gdy  $x$  dąży z lewej strony do  $b$ , to istnieje całka oznaczona właściwa z tej funkcji od  $a$  do każdego punktu, leżącego dowolnie blisko przed punktem  $b$ , a więc do  $b - \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon > 0$ . Istnieje zatem  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ . Jeżeli wartość tej całki dąży do skończonej granicy, gdy  $\varepsilon$  dąży do zera, to tę graniczną wartość nazywamy całką oznaczoną *niewłaściwą* z funkcji  $f(x)$  od  $a$  do  $b$ . Przyjmujemy więc następującą definicję:

$$(72) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Jeżeli  $F(x)$  oznacza funkcję pierwotną funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a, b - \varepsilon \rangle$ , to możemy ten wzór napisać także w postaci:

$$(72a) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon) - F(a)$$

Podobnie definiujemy całkę niewłaściwą w przypadku, gdy funkcja  $f(x)$  jest ciągła w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$  z wyjątkiem początkowego punktu  $a$ , a przy  $x$ , dążącym z prawej strony do  $a$ , dąży do nieskończoności.

Wtedy mianowicie:

$$(73) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon'}^b f(x) dx$$

Jeżeli  $F(x)$  oznacza funkcję pierwotną funkcji  $f(x)$  w przedziale  $\langle a + \varepsilon', b \rangle$ , to wzór (73) można napisać w postaci:

$$(73 a) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} F(a + \epsilon')$$

Jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła w całym przedziale  $\langle a, b \rangle$  z wyjątkiem jednego punktu  $c$ , leżącego wewnątrz przedziału, w którym dąży do nieskończoności, to rozdzielamy całkę na dwie części i używamy do definicji całki od  $a$  do  $b$  wzoru:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Obydwie zaś całki, znajdujące się po drugiej stronie znaku równości, są zdefiniowane przy pomocy wzorów (72) i (73). Gdyby przedział zawierał więcej punktów nieciągłości, lecz skończoną ich liczbę, to należałoby rozłożyć przedział odpowiednio na większą liczbę części.

Drugi rodzaj całek niewłaściwych otrzymujemy, biorąc pod uwagę funkcje ciągłe, lecz przedział całkowania niewłaściwy.

! Tak, jeżeli funkcja  $f(x)$  jest ciągła dla wszystkich  $x > a$ , to dla każdej liczby  $L$  większej od  $a$  istnieje całka oznaczona właściwa:

$\int_a^L f(x) dx$ . Jeżeli ta całka właściwa dąży do skończonej granicy, gdy  $L \rightarrow +\infty$ , to tę graniczną wartość nazywamy całką niewłaściwą od  $a$  do  $\infty$ .

Przyjmujemy zatem następującą definicję takiej całki w przedziale  $\langle a, \infty \rangle$ :

$$(74) \quad \boxed{\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^L f(x) dx}$$

Jeżeli  $F(x)$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$ , to

$$(74 a) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} F(L) - F(a)$$

Podobnie definiujemy całkę w przedziale niewłaściwym  $(-\infty, b \rangle$ :

$$(75) \quad \boxed{\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx}$$

Jeżeli  $F(x)$  jest funkcją pierwotną, to:

$$(75 a) \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = F(b) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

## Wzrost:

$$(75b) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

przyczem można zamiast 0 obrać także dowolną inną skończoną liczbę  $c$ .

Z tych definicji widzimy, że całki niewłaściwe są *granicami*, do których dążą całki właściwe. Zamiast mówić, że całka niewłaściwa *istnieje*, mówi się też, że całka niewłaściwa jest *zbieżna*. Całki niewłaściwe występują dość często w zastosowaniach. W interpretacji geometrycznej możemy je uważać za miary pewnych nieograniczonych pól (z uwzględnieniem znaku).

## Przykłady.

1) Obliczyć całkę:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tu dla górnej granicy  $x = 1$  funkcja podcałkowa posiada nieciągłość, a mianowicie dąży do  $+\infty$ , gdy  $x$  dąży do  $+1$  z wnętrza przedziału  $\langle 0, 1 \rangle$ , t. j. z lewej strony. Do obliczenia wartości tej całki należy zatem użyć wzoru (72). Wobec tego:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arcsin(1-\epsilon) - \arcsin 0 = \\ &= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{1}{2} \pi \end{aligned}$$

Jakkolwiek powierzchnia, ograniczona linią o równaniu  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ , rozciąga się w nieskończoność, to jednak miara tego pola jest skończoną liczbą  $\frac{1}{2} \pi$ . Niechaj czytelnik sporządzi wykres tej funkcji!

2) Zbadać, czy istnieje całka niewłaściwa:

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieciągła, a mianowicie posiada skok w punkcie  $x = 3$ , leżącym wewnątrz przedziału  $\langle 1, 4 \rangle$ , przeto należy rozdzielić przedział całkowania na dwie części: od 1 do 3 i od 3 do 4. Otóż:

$$\int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_1^{3-\epsilon} \frac{dx}{(x-3)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left. \frac{-1}{x-3} \right|_1^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

a więc ta całka nie istnieje. Podobnie okazałoby się, że  $\int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = +\infty$

A więc nie istnieje także całka od 1 do 4, jako suma tych całek.

Gdybyśmy zaś, rachując nieostrożnie, nie zauważyli, że funkcja staje się nieograniczoną wewnątrz przedziału całkowania, to otrzymalibyśmy — przez zastosowanie zwykłej reguły  $F(b) - F(a)$  — wartość:

$$-\frac{1}{x-3} \Big|_1^4 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Moglibyśmy więc sądzić, że (nieograniczona) powierzchnia, zamknięta

linią o równaniu  $y = \frac{1}{(x-3)^2}$  w przedziale  $\langle 1, 4 \rangle$ , ma pole skończone, tymczasem to pole ma wartość (niewłaściwą) nieskończoną, jak to wynika z poprzednich rozważań.

Zobaczymy jednakże w następnym przykładzie, że przez odpowiednie zmniejszenie wykładnika w mianowniku funkcji podcałkowej uzyskamy figurę o polu skończonym.

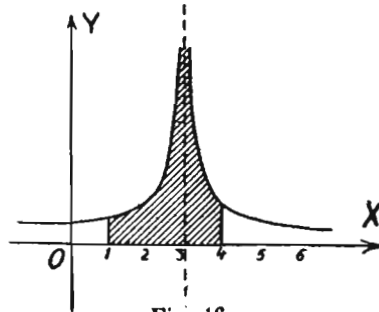


Fig. 16

3) Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}} \quad \text{czyli} \quad \int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$$

W myśl definicji stosujemy tu rozkład:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} &= \int_1^3 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} + \int_3^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3(x-3)^{1/3} \Big|_1^{3-\varepsilon} + \\ &+ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} 3(x-3)^{1/3} \Big|_{3+\varepsilon'}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{-\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-2} + 3\sqrt[3]{1} - \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{\varepsilon'} = 0 + \\ &+ 3\sqrt[3]{2} + 3 - 0 = 3(1 + \sqrt[3]{2}) \end{aligned}$$

W geometrycznej interpretacji chodzi tu o obliczenie pola nieskończonej powierzchni, której część przedstawiono na fig. 16 (zacięniowana).

4) Ogólnie można dowieść, że całka:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^s}$$

ma tylko wtedy wartość skończoną, gdy  $s < 1$ . Prosty dowód pozostawiamy czytelnikowi dla ćwiczenia.

5) Obliczyć:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

Tworzymy najpierw:

$$\int_0^L e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^L = -e^{-L} + e^0 = 1 - \frac{1}{e^L}$$

Stąd:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L e^{-x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^L}\right) = 1$$

Niechaj czytelnik przedstawi geometryczną interpretację tego wyniku.

6) Obliczyć:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Stąd:

$$I = \lim_{K \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_K^0 + \lim_{L \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^L = 0 - \left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \frac{1}{2}\pi - 0$$

Zatem:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

7) Dla jakich wykładników  $s$  całka niewłaściwa:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

ma wartość skończoną?

Obliczamy najpierw dla  $s \neq 1$  całkę właściwą:

$$\int_1^L \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^L = \frac{L^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{L^{s-1}} - 1\right)$$

Widocznym jest, że przy  $L \rightarrow \infty$  prawa strona tylko wtedy dąży do skończonej granicy, gdy  $s > 1$ .

Dla  $s=1$  otrzymujemy:

$$\int_1^L \frac{dx}{x} = \log L - \log 1 = \log L$$

a więc:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

8) Obliczyć:

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

dla liczb  $n$  naturalnych.

Wyznamy najpierw zapomocą całkowania „per partes“ całkę właściwą:

$$\int_0^L x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^L + n \int_0^L x^{n-1} e^{-x} dx = -L^n e^{-L} + n \int_0^L x^{n-1} e^{-x} dx$$

Gdy  $L \rightarrow \infty$ , to  $L^n e^{-L}$  dąży, jak wiemy, do zera, albowiem  $e^L$  dąży do  $\infty$  szybciej, aniżeli jakakolwiek potęga  $L^n$ . A więc:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

czyli:

$$(a) \quad I_n = n I_{n-1}$$

Przez kolejne stosowanie tego wzoru zwrotnego otrzymujemy:

$$I_n = n(n-1) I_{n-2}, \quad I_n = n(n-1)(n-2) I_{n-3}$$

i t. d., aż dojdziemy ostatecznie do  $I_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ . A więc:

$$I_n = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot I_0 = n!$$

*Uwaga.* Udowodniono, że ta całka istnieje także dla niecałkowitych  $n$ , gdy tylko  $n > -1$ . Dla ujemnych  $n$  ta całka jest w dwojaki sposób niewłaściwą: po pierwsze funkcja podcałkowa jest nieciągła w początkowym punkcie przedziału całkowania a mianowicie dąży do  $+\infty$ , gdy  $x$  dąży do zera z prawej strony; po drugie przedział całkowania jest niewłaściwy. Przy zmiennem  $n$  jest ta całka funkcją zmiennej  $n$ ; nazywamy ją *całką Eulera drugiego rodzaju* lub funkcją  $\Gamma(n+1)$  (czytaj gamę z  $n+1$ ). Możemy ją uważać za uogólnienie funkcji  $n!$ , określonej tylko dla naturalnych  $n$ . szczególnie ważną w zastosowaniach jest wartość tej funkcji dla  $n = -\frac{1}{2}$ , t. j.:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx$$

Wyznaczeniem tej całki zajmiemy się w następnym przykładzie.

9) Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int e^{-x} dx$$

*Uwaga.* Używając podstawienia  $x^2 = u$ , otrzymujemy  $2x dx = du$ ,  $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

a całka zamienia się na  $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ . Ta całka, zwana całką Laplace'a, ma wielkie znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa i w teorii błędów.

Nie potrafimy obliczyć całki *nieoznaczonej*  $\int e^{-x^2} dx$  elementarnymi metodami. Pomimoto znajdziemy wartość powyższej całki *oznaczonej*, opierając się na odpowiednio dobranych nierównościach. I tak wiemy (por. tom I § 149, przykład 2), że zawsze jest:

$$1 + u \leq e^u$$

a więc:

$$1 - z \leq e^{-z} \text{ i } 1 + z \leq e^z$$

czyli:

$$\frac{1}{e^z} \leq \frac{1}{1+z} \text{ dla } z > -1.$$

Stąd:

$$1 - z \leq e^{-z} \leq (1+z)^{-1}$$

Weźmy:

$$z = y^2, \text{ to } z > 0 > -1$$

i mamy:

$$1 - y^2 \leq e^{-y^2} \leq (1 + y^2)^{-1}$$

A więc dla naturalnych  $n$  zachodzą nierówności:

$$(1 - y^2)^n \leq e^{-ny^2} \leq (1 + y^2)^{-n}$$

Skalkujemy te wyrażenia od 0 do 1 i od 0 do  $\infty$ , to (na podst. § 217 wniosku 1) otrzymamy:

$$\int_0^1 (1 - y^2)^n dy \leq \int_0^1 e^{-ny^2} dy < \int_0^\infty e^{-ny^2} dy \leq \int_0^\infty \frac{dy}{(1 + y^2)^n}$$

Skrajne całki wyznacza się nietrudno przy pomocy odpowiednich wzorów redukcyjnych:

$$\begin{aligned} \text{a) } I_n &= \int_0^1 (1 - y^2)^n dy = y(1 - y^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 y^2 (1 - y^2)^{n-1} dy = \\ &= y(1 - y^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 [(y^2 - 1)(1 - y^2)^{n-1} + (1 - y^2)^{n-1}] dy \end{aligned}$$

$$I_n = -2n I_n + 2n I_{n-1}, \quad (2n + 1) I_n = 2n I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{2n}{2n + 1} I_{n-1}$$



Ponieważ  $I_0 = \int_0^1 dy = y \Big|_0^1 = 1$ , przeto  $I_1 = \frac{2}{3}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ , ..

$$\begin{aligned} \text{b) } \bar{I}_n &= \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{y}{(2n-2)(1+y^2)^{n-1}} \Big|_0^\infty + \frac{2n-3}{2n-2} \bar{I}_{n-1} = \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} \bar{I}_{n-1} \quad (\text{str 28, wzór 27}) \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$\bar{I}_1 = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{przeto } \bar{I}_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi, \quad \bar{I}_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi, \dots$$

Otrzymujemy więc:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} < \int_0^\infty e^{-ny^2} dy \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Przez podstawienie  $ny^2 = x^2$  czyli  $y = \frac{x}{\sqrt{n}}$ ,  $dy = \frac{dx}{\sqrt{n}}$  przekształcamy

wewnętrzna całkę na  $\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ , a więc:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n\sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} < \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)\sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Przy pomocy wzoru Wallisa (str. 93, wzór 66) stwierdza się bez trudności, że obydwa skrajne ciągi w powyższych nierównościach dążą do wspólnej wartości  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

I tak z wzoru Wallisa wynika, że

$$B_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)\sqrt{2n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$$

a więc:

$$A_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)\sqrt{n}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{a zatem i } A_n \frac{2n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Z drugiej zaś strony:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)\sqrt{n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} &= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)\sqrt{2n}} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{(2n-1)} = \\ &= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{B_n} \cdot \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Zatem całka, zawarta stale między wyrazami tych dwóch ciągów, ma wartość  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Otrzymaliśmy zatem ostatecznie:

$$(76) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

### § 225. Całkowanie graficzne.

Jeżeli funkcja, którą mamy całkować, jest podana graficznie, za pomocą wykresu, jak to często bywa w matematyce stosowanej, to możemy postępować dwojaką drogą. Można mianowicie, używając rozmaitych metod interpolacji (por. tom I, rozdział XVI), znaleźć wzór matematyczny, przedstawiający wartość tej funkcji z dostatecznym przybliżeniem i dopiero wtedy wykonywać całkowanie przy pomocy odpowiednich wzorów rachunku całkowego. Prosztem będzie jednak bezpośrednie zastosowanie odpowiednio dobranej graficznej metody całkowania; metodę taką otrzymujemy przez odwrócenie metody graficznego różniczkowania, poznanej w rachunku różniczkowym (por. tom I, § 65). Chcemy znaleźć:

$$Y = \int_a^x f(x) dx$$

mając podany obraz  $L$  funkcji  $y = f(x)$  (fig. 17 a). Ta całka  $Y$  jest

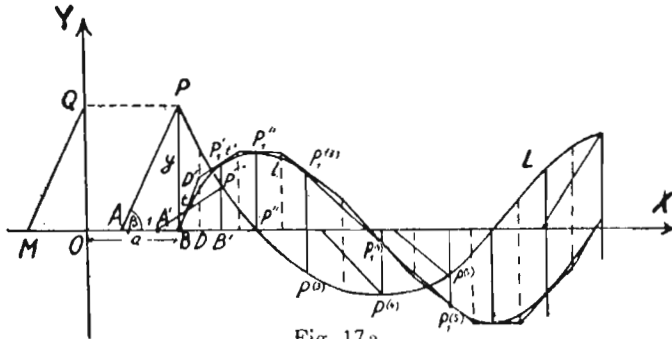


Fig. 17 a.

funkcją górnej granicy  $x$ , a mianowicie taką funkcją, której pochodna jest równa funkcji podcałkowej:

$$(w) \quad \frac{dY}{dx} = f(x) = y$$

Jest to więc jedna z funkcji pierwotnych funkcji  $f(x)$ , a mianowicie ta funkcja pierwotna, która dla  $x = a$  przybiera wartość  $Y = 0$ , albowiem

$\int_a^x f(x) dx = 0$ . Szukana linja przechodzi zatem przez punkt  $B(a, 0)$ . Obraz graficzny każdej funkcji pierwotnej nazywamy *linją całkową* danej linji o równaniu  $y = f(x)$ . Pochodna  $\frac{dY}{dx}$  przedstawia spadek stycznej do linji całkowej. Oznaczmy literą  $\beta$  kąt stycznej do tej linji całkowej. Z wzoru (w) wynika, że:

$$\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{1}$$

Związek ten prowadzi do następującej konstrukcji linji całkowej. Linja ta przechodzi przez punkt  $B(a, 0)$ . Od tego punktu odmierzymy na lewo odcinek  $AB = 1$  i łączymy punkt  $P$  linji  $y = f(x)$  z punktem  $A$ . Ponieważ  $y : 1 = \operatorname{tg} \beta$ , przeto bok  $AP$  trójkąta  $APB$  ma kierunek stycznej do linji całkowej. Przez punkt  $B$  wykreślamy prostą  $t \parallel AP$ ; ta prosta jest styczną do linji całkowej w punkcie  $B$ . Przy pomocy takich stycznych, wykreślonych dla rozmaitych odciętych, buduje się linję całkową jako obwiednię tych stycznych. I tak obierzmy jakiś drugi punkt  $P'$  na danej linji  $L$ , należący do odciętej  $x' = OB'$ . Zastąpmy łuk  $\widehat{PP'}$  linji  $L$  cięciwą  $PP'$ . Jeżeli cięciwa ta ma równanie  $y = mx + n$ , to odpowiadająca jej linja całkową ma równanie  $Y = \frac{m}{2}x^2 + nx + p$ , jest zatem *parabolą* o osi równoległej do osi rzędnych. Znamy jeden punkt tej paraboli, a mianowicie  $B$ , chodzi zaś o znalezienie drugiego punktu  $P'_1$ , należącego do odciętej  $OB'$ . Styczna w tym nieznanym punkcie ma być równoległa do prostej  $A'P'$ , którą otrzymujemy podobną konstrukcją, jak prostą  $AP$ . Otóż wiadomo z własności paraboli, że styczne w punktach o odciętych  $x$  i  $x'$  przecinają się w punkcie, którego odcięta jest średnią arytmetyczną:  $\frac{1}{2}(x + x')$ . Połowimy zatem odcinek  $BB'$  punktem  $D$  i wykreślamy przez ten punkt prostopadłą do osi odciętych. Punkt  $D'$ , w którym styczna  $t$  przecina tę prostopadłą, leży zatem także na stycznej  $t'$ , należącej do nieznanego punktu  $P'_1$ . Wykreślamy przez ten punkt  $D'$  prostą  $t' \parallel A'P'$  i otrzymujemy w ten sposób drugi punkt linji całkowej, a mianowicie punkt  $P'_1$ , należący do odciętej  $x' = OB'$ . Postępując w ten sposób dalej, dla dalszych punktów linji  $L$ , otrzymujemy szereg punktów linji całkowej; łączymy je następnie (przy pomocy krzywki) tak, aby otrzymana linja była styczna kolejno do prostych  $t, t', t'', \dots$ . Chcąc uzyskać dobre przybliżenie, należy obrać dość gęsto punkty  $P, P', P'', \dots$  na linji różniczkowej  $L$ .

Wielokrotne odcinanie jednostki:  $AB, A'B', A''B'', \dots$  i linij  $AP, A'P', A''P'', \dots$  zaciera zwykle przejrzystość rysunku. Z tego powodu modyfikuje się zwykle konstrukcję w ten sposób, że odcina się ową jednostkę tylko raz, od początku układu  $O$  do punktu  $M$  o spół-



rzędnych  $(-1, 0)$  (por. fig. 17b). Następnie rzucamy każdy punkt  $P$ , obrany na linii  $L$ , na oś  $y$ -ów do punktu  $Q$  i łączymy  $M$  z  $Q$ : prosta  $MQ$  jest równoległa do stycznej  $t$ . Wykonujemy zatem całą konstrukcję linii całkowej w następujący sposób. Obieramy na danej linii  $L$  szereg punktów  $P, P_1, P_2 \dots$  i rzucamy je na oś  $x$ -ów i  $y$ -ów. Połowimy odcinki  $BB_1, B_1B_2 \dots$  na osi  $x$ -ów i przez te punkty podziału wykreślamy pomocnicze linie prostopadłe do osi  $x$ -ów. Rzuty  $Q, Q_1, Q_2, \dots$  punktów  $P, P_1, P_2 \dots$  na oś  $y$ -ów łączymy z punktem  $M$  o współrzędnych  $(-1, 0)$ . Przez punkt  $B$  wykreślamy prostą  $t \parallel MQ$  aż do przecięcia się z najbliższą (pomocniczą) prostopadłą do osi  $x$ -ów. Z tego punktu prze-

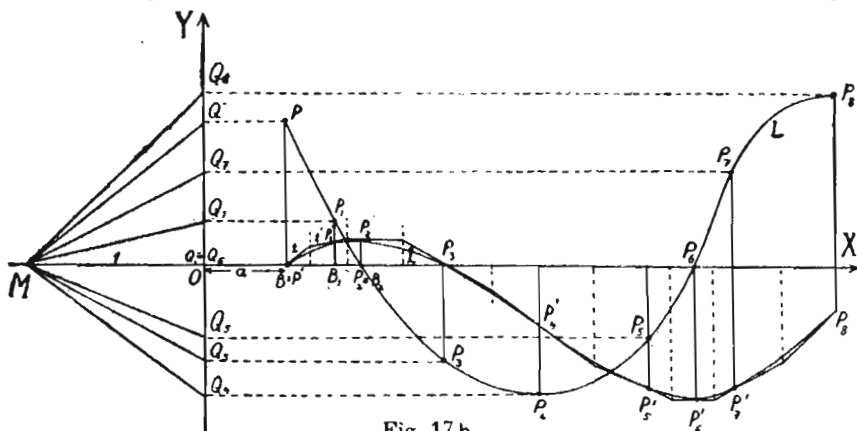


Fig. 17 b.

cięcia wykreślamy prostą  $t' \parallel MQ_1$  aż do przecięcia się z następną pomocniczą (kreskowaną) prostopadłą i tak samo postępujemy dalej. Otrzymamy w ten sposób szereg punktów  $B, P_1', P_2' \dots$  linii całkowej i szereg stycznych w tych punktach do linii całkowej. Przy pomocy krzywki wykreślamy całą linię całkową  $l$ . Gdybyśmy rozpoczęli konstrukcję nie od punktu  $B$ , lecz od dowolnego innego punktu tej prostej  $BP$ , to otrzymalibyśmy inną linię całkową  $l'$ , jednakże przystającą do  $l$ , a mianowicie przesuniętą równoległe. W ten sposób można otrzymać całą gromadę funkcji pierwotnych, zawartych w całce nieoznaczonej, t. j. obok linii o rzędnych  $Y$ , gromadę linii o rzędnych  $Y + C$ . Gdybyśmy zaś zamiast jednostki  $MO = 1$  użyli innej jednostki:  $MO = b$ , to zamiast linii całkowej o rzędnych  $Y$  otrzymalibyśmy linię o rzędnych  $\bar{Y} = \frac{1}{b}Y$ .

Omówiona tu konstrukcja jest przybliżoną, albowiem polega ostatecznie na tem, że łuki linii  $L$  zastąpiliśmy cięciami.

Jeżeli linia  $L$  jest zwrócona wypukłością ku górze, to widocznem jest, że wskutek takiej aproksymacji otrzymujemy wartości mniejsze od prawdziwych wartości całki, nie wyczerpujemy bowiem pola, zamkniętego tą linią, rzędnymi i osią odciętych.

Lepsze przybliżenie można uzyskać, zastępując łuki  $\widehat{PP_1}, \widehat{P_1P_2}, \dots$  nie cięciami, lecz odcinkami prostych równoległych do osi  $x$ -ów; odcinki te trzeba dobierać na oko w ta-

kich wysokościach, aby przyczynić z jednej strony takiego odcinka tyle pola, ile opuszczono z drugiej strony. Szczegółowe opracowanie tej ulepszonej metody znajdzie czytelnik w podręczniku C. Runge'go p. t. *Graphische Methoden*. (Lipsk 1945, rozdział III, str 96—112).

Opierając się na tej konstrukcji linii całkowych, zbudowano przyrząd, zwany *integrafem*, którym się rysuje w sposób mechaniczny linię całkową  $l$  do danej linii różniczkowej  $L$ : jeżeli jeden kolec mechanizmu, złożonego z odpowiednich prętów metalowych, wózków i kółek, posuwamy po linii  $L$ , to drugi kolec, opatrzony ołówkiem lub grafjonem, rysuje odpowiednią linię całkową  $l$ . Opis tego przyrządu, wynalezionego przez Abakanowicza, byłego profesora Politechniki lwowskiej, znaleźć można np. w podręczniku A. Galle'go p. t. *Mathematische Instrumente* (Lipsk 1912, rozdział IX, str. 154 i nast.) lub w dziełach zbiorowych Abakanowicza, Por. też St. Gołąb, *Wskazówki do ćwiczeń z integrafem Abakanowicza*, Kraków 1933.

## § 226. Całkowanie przybliżone liczbowe (numeryczne).

Jeżeli chodzi o obliczenie całki oznaczonej z takiej funkcji, dla której nie potrafimy obliczyć całki nieoznaczonej, to bardzo często, zwłaszcza w zastosowaniach praktycznych, poprzestajemy na obliczeniu przybliżonej wartości tej całki. Podobnie postępujemy, gdy funkcja podcałkowa jest dana tylko tabelarycznie.

### A. Metoda prostokątów.

Najprostszą drogą, prowadzącą do tego celu, jest użycie wyrazów ciągów, zdążających do wartości badanej całki oznaczonej, omówionych w § 222. Biorąc odpowiednio daleki wyraz takiego ciągu, możemy otrzymać każdą zgóry żądaną dokładność. Każdy wyraz ciągu jest sumą pól prostokątów, mających za podstawy odcinki osi odciętych a za wysokości rzędne w dowolnych punktach tych odcinków. Najprościej przedstawi się rachunek, gdy przedział

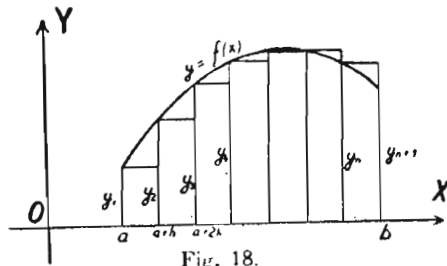


Fig. 18.

$\langle a, b \rangle$  podzielimy na równe części o długości:  $h = \frac{b-a}{n}$  i w każdym przedziale weźmiemy początkową wartość funkcji, jak na fig. 18.

Przybliżoną wartością całki

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

jest zatem suma pól tych prostokątów, t. j.:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= h \cdot y_1 + h \cdot y_2 \dots + h \cdot y_n \\ \text{czyli:} \\ \sigma_n &= h(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

Używając znaku  $\approx$  jako znaku przybliżonej równości, możemy zatem napisać:

$$(77) \quad I = \int_a^b f(x) dx \approx h(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Przybliżoną metodę obliczania całki oznaczonej przy pomocy tego wzoru nazywamy *metodą prostokątów*. Widocznym jest zarówno z geometrycznego przedstawienia jak i z własności ciągu  $\sigma_n$ , że przez powiększanie liczby  $n$  możemy uzyskać dowolny stopień aproksymacji.

*Przykłady.*

1) Zastosujmy powyższą metodę najpierw do znanej całki:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log_e x = \log_e 2 = 0.693147180\bar{6}$$

Tę samą całkę obliczymy teraz metodą prostokątów, a następnie porównamy z sobą wyniki.

Podzielmy przedział  $\langle 1, 2 \rangle$  na 10 równych części o długościach  $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$ . Rzędnymi w punktach  $x = 1, 1.1, 1.2, \dots, 1.9$  są

$y = \frac{1}{1}, \frac{1}{1.1}, \frac{1}{1.2}, \dots, \frac{1}{1.9}$ . Według wzoru (77) otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} I &\approx 0.1 \left( 1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \dots + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.9} \right) \\ &= 0.1 \left| \begin{array}{l|l} 1 & \\ \hline 0.90909 & 0 \dots \\ 0.83333 & 3 \dots \\ 0.76923 & 0 \dots \\ 0.71428 & 5 \dots \\ 0.66666 & 6 \dots \\ 0.625 & \\ 0.58823 & 5 \dots \\ 0.55555 & 5 \dots \\ 0.52631 & 5 \dots \end{array} \right. \\ &\approx 0.1 \cdot 7.18771 = 0.718771 \end{aligned}$$

Błąd wynosi:  $0.718771 - 0.693147 \dots \approx 0.025624$ .

2) Znaleźć wartość przybliżoną całki:

$$I = \int_{10}^{20} \frac{dx}{\log_e x}$$

której nie potrafimy obliczyć elementarnymi metodami całkowania. Podzielmy przedział całkowania na 10 równych części o długościach

$h = \frac{20 - 10}{10} = 1$ . Stosując przybliżony wzór (77), otrzymujemy:

$$I \approx 1 \cdot \left( \frac{1}{\log_e 10} + \frac{1}{\log_e 11} + \frac{1}{\log_e 12} + \dots + \frac{1}{\log_e 19} \right)$$

W tablicy logarytmów naturalnych znajdujemy występujące tu logarytmy, a dzielenia wykonywamy np. przy pomocy maszyny do rachowania i otrzymujemy:

$I \approx 0.4342$	9448
0.4170	3239
0.4024	2960
0.3898	7125
0.3789	2318
0.3692	6937
0.3606	7376
0.3529	5613
0.3459	7626
0.3396	2327
$I \approx 3.7910$	

Przy używaniu przybliżonej metody obliczania całki oznaczonej ważną jest rzeczą oszacowanie błędu, który się popełnia, biorąc zamiast prawdziwej wartości całki wartość przybliżoną. Jeżeli funkcja podcałkowa posiada pochodną ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to nietrudno jest otrzymać dogodny wzór na oszacowanie tego błędu. I tak weźmy pod uwagę jeden przedział częściowy o szerokości  $h$ , np.  $\langle c, c + h \rangle$ . Obliczmy błąd:

$$(I) \quad r(h) = \int_c^{c+h} f(x) dx - h f(c) = F(c+h) - F(c) - h f(c)$$

Widocznym jest, że  $r(0) = 0$ . Pochodne obu stron wzoru (I) względem  $h$  są równe, a więc:

$$r'(h) = f(c+h) - f(c)$$

Do prawej strony stosujemy twierdzenie o wartości średniej (Lagrange'a) i otrzymujemy:

$$r'(h) = hf'(c + \vartheta h) \quad 0 < \vartheta < 1$$

Niechaj  $M'$  oznacza największą wartość funkcji  $|f'(x)|$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , to  $-hM' \leq r'(h) \leq +hM'$ . Scałkujemy tę nierówność od 0 do  $h$ , to otrzymamy:

$$-\frac{1}{2}M'h^2 \leq r(h) \leq \frac{1}{2}M'h^2$$

a to znaczy, że:

$$|r(h)| \leq \frac{1}{2}h^2M'$$

Taki więc błąd wynika z zastąpienia całki w jednym przedziale częściowym polem prostokąta:  $h \cdot f(c)$ . Ponieważ zaś mamy  $n$  takich przedziałów, przeto na całkowity błąd  $R_n$  otrzymujemy oszacowanie:

$$|R_n| \leq \frac{1}{2}nh^2M'$$

Ale:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

a więc:

$$(78) \quad |R_n| \leq \frac{(b-a)^2M'}{2n}$$

Widzimy stąd, że błąd dąży do zera, gdy  $n$  wzrasta nieograniczenie.

Tak np. w przykładzie 1) otrzymujemy

$$|R_{10}| \leq \frac{(2-1)^2 \cdot M'}{2 \cdot 10} = \frac{M'}{20}$$

Ponieważ  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ , przeto  $M' = \max |f'(x)| = \frac{1}{1^2} = 1$ .

Ostatecznie więc:

$$|R_{10}| \leq \frac{1}{20} = 0.05$$

Błąd faktyczny wynosi tylko 0.0256...

Pozostawiamy czytelnikowi do stwierdzenia, że bezwzględna wartość błędu w drugim przykładzie nie przekracza liczby:  $\frac{1}{2 \log^2 10} = \frac{1}{2} \log_{10}^2 e = 0.0943 \dots$

### B. Metoda trapezów.

Lepszą na ogół aproksymację uzyskujemy, biorąc w każdym pasku na fig. 18 za wysokość prostokąta średnią arytmetyczną obu rzędnych, ograniczających ten pasek, czyli zastępując każdy pierwotny prostokąt trapezem, którego dwa wierzchołki leżą na danej linii o równaniu  $y = f(x)$ . Suma tych trapezów daje zwykle lepszą aproksymację aniżeli suma pierwotnych prostokątów (mających za wysokości początkowe rzędne). W ten sposób otrzymujemy zamiast ciągu  $\sigma_n$  inny ciąg:

$$\sigma'_n = h \left( \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} + \dots + \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right)$$

czyli:

$$\sigma'_n = h \left( \frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{1}{2}y_{n+1} \right)$$



Ten nowy wzór na przybliżoną wartość całki nazywamy *wzorem trapezowym*. Zatem:

$$(79) \quad I \approx h \left( \frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} \right)$$

Prawa strona tego wzoru różni się od wzoru (77) tylko tem, że w nawiasie ubyło  $\frac{1}{2} y_1$ , a przybyło  $\frac{1}{2} y_{n+1}$ , a więc:

$$\sigma'_n = \sigma_n + \frac{h}{2} (y_{n+1} - y_1)$$

Rachunki są tu więc równie proste, jak przy metodzie prostokątów, a dokładność jest zwykle znacznie większa.

I tak np. dla całki  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ , omówionej w przykładzie 1) na str. 118,

trzeba dodać do wyniku, otrzymanego metodą prostokątów,  $\frac{0.1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{0.1}{4} = -0.025$ . Otrzymamy w ten sposób:

$$I \approx 0.718771 - 0.025 = 0.693771$$

Wynik ten jest o wiele dokładniejszy, albowiem błąd wynosi tylko:

$$0.693771 - 0.693147 = 0.000624$$

Stosując metodę trapezów do drugiego przykładu na str. 119, otrzymujemy:

$$I \approx 3.7910 + \frac{1}{2}(0.33381 - 0.43429) = 3.7408$$

W podobny sposób, jak dla metody prostokątów, wyprowadza się dla metody trapezów wzór na oszacowanie błędu, który popełniamy, biorąc zamiast prawdziwej wartości całki wartość przybliżoną, otrzymaną z wzoru (79). Trzeba mianowicie dwukrotnie zróżniczkować obie strony wzoru:

$$r(h) = \int_c^{c+h} f(x) dx - h \frac{f(c) + f(c+h)}{2}$$

Otrzyma się:

$$r''(h) = -\frac{h}{2} f''(c+h)$$

W sposób podobny, jak przy metodzie prostokątów, otrzymuje się na błąd w jednym przedziale częściowym wzór:

$$|r(h)| \leq \frac{h^3}{12} M''$$

a dla  $n$  całek, t. j. dla całego przedziału  $\langle a, b \rangle$ , wzór:

$$|R_n| \leq \frac{nh^3}{12} M''$$

gdzie  $M''$  oznacza największą wartość funkcji  $|f''(x)|$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Ponieważ

$h = \frac{b-a}{n}$ , przeto otrzymujemy ostatecznie:

$$(80) \quad |R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} M''$$

### C. Metoda łuków parabolicznych. Wzór Simpsona.

Wzór trapezowy możemy interpretować geometrycznie w ten sposób, że zastępujemy badaną linię o równaniu  $y = f(x)$  w każdym częściowym przedziale  $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$  o szerokości  $h$  linią prostą, przechodzącą przez dwa punkty  $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$  danej linii. Jasnem jest, że lepszą aproksymację uzyskamy zwykle dla linii krzywej, zastępując ją w każdym przedziale  $\langle x_k, x_{k+2} \rangle$  o szerokości  $2h$  łukiem paraboli drugiego stopnia, przechodzącej przez trzy punkty  $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2})$  i obliczając pola powierzchni, ograniczonych temi łukami parabolicznymi i odpowiednimi rzędnymi. Ponieważ punkty na osi  $x$ -ów wybieramy w równych od siebie odstępach, przeto możemy użyć do obliczenia tych pól wzoru (65) z przykładu 6 na str. 86, a mianowicie:

$$(a) \quad p = \frac{x_{k+2} - x_k}{6} (y_k + 4y_{k+1} + y_{k+2})$$

Dzielimy przedział  $\langle a, b \rangle$  na  $2n$  równych części o długościach  $h = \frac{b-a}{2n}$  i obliczamy rzędne:  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2n-1}, y_{2n}, y_{2n+1}$ . Powierzchnia rozpadnie się na  $n$  par przylegających do siebie pasków. W każdej parze pasków zastępujemy łuk danej krzywej łukiem paraboli drugiego stopnia, przechodzącej przez trzy punkty danej krzywej, należące do trzech sąsiednich punktów podziału odcinka  $\langle a, b \rangle$ . Pole to obliczamy według wzoru (a). Ponieważ  $x_{k+2} - x_k = 2h$ , przeto otrzymamy w ten sposób następujący wzór na obliczenie przybliżonej wartości całki:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 + 4y_5 + y_6 + y_7 + \dots + y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1})$$

czyli:

$$(81) \quad I \approx \frac{h}{3} (y_1 + y_{2n+1} + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n}))$$

Ten wzór przybliżony, wynikający z użycia pasków parabolicznych, nazywamy wzorem Simpsona.

Rozumowaniem podobnym, jak dla metody prostokątów i trapezów, oblicza się błąd, wynikający z zastąpienia całki w jednej parze takich pasków wartością  $p$

z wzoru (a), t. j.  $r(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x) dx - \frac{h}{3} (f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)).$

Przez trzykrotne różniczkowanie otrzymuje się:

$$r'''(h) = -\frac{h}{3} (f'''(c+h) - f'''(c-h)) = -\frac{1}{3} h^2 f^{(4)}(\xi)$$

a stąd:

$$-\frac{1}{3} h^2 M^{(4)} \leq r'''(h) \leq \frac{1}{3} h^2 M^{(4)}$$

Następnie przez trzykrotne całkowanie otrzymujemy:

$$|r(h)| \leq \frac{4h^5}{3 \cdot 5!} M^{(4)}$$

Stąd otrzymujemy dla  $n$  par pasków, kładąc  $h = \frac{b-a}{2n}$

$$(82) \quad |R_{2n}| \leq \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M^{(4)}$$

Tutaj  $M^{(4)}$  oznacza największą wartość funkcji  $|f^{(4)}(x)|$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$

*Przykłady.*

1) Zastosujmy wzór Simpsona do przykładu 1 na str. 118, biorąc  $2n = 10$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{0.1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + 2 \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8} \right) + 4 \left( \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9} \right) \right) \\ &= \frac{0.1}{3} (1.5 + 2 \cdot 2.728173 + 4 \cdot 3.459546) = \frac{0.1}{3} \cdot 20.794490 \end{aligned}$$

czyli  $I \approx 0.6931497$ .

Porównując ten wynik z prawdziwą wartością całki  $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0.6931471\dots$ ,

widzimy, że błąd występuje tu dopiero na 6-em miejscu po kropce dziesiętnej. Przez zastosowanie wzoru (82) otrzymujemy:

$$|R_{10}| \leq \frac{(2-1)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot 24 = \frac{1}{75000} = 0.000013\dots$$

Dokładność taka jest zwykle dla celów praktycznych zupełnie wystarczająca.

2) Niechaj czytelnik obliczy na podstawie liczb, podanych w przykładzie 2 na str. 119 i liczby  $\frac{1}{\log_e 20} = 0.33380820$ , następującą przybliżoną wartość całki:

$$\int_{10}^{20} \frac{dx}{\log_e x} \approx 3.7397$$

$$3) I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg 1 = \frac{1}{4}\pi$$

Obliczyć tę wartość w przybliżeniu przy pomocy wzoru Simpsona, dzieląc przedział całkowania na 16 równych części.

$$I \approx \frac{1}{18}(y_1 + y_{17} + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{15}) + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{16}))$$

Dla:

$$x = 0, \frac{1}{18}, \frac{2}{18}, \frac{3}{18}, \frac{4}{18}, \dots, \frac{16}{18}, \frac{17}{18}$$

otrzymujemy.

$$y = 1, \frac{256}{81}, \frac{256}{60}, \frac{256}{36}, \dots, \frac{256}{81}, \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 0.99610\ 89494 \\ y_3 &= 0.98461\ 53846 \\ y_4 &= 0.96603\ 77358 \\ y_5 &= 0.94117\ 6470\bar{6} \\ y_6 &= 0.91103\ 2028\bar{5} \\ y_7 &= 0.87671\ 2328\bar{8} \\ y_8 &= 0.83934\ 4262\bar{3} \\ y_9 &= 0.8 \\ y_{10} &= 0.75964\ 39169 \\ y_{11} &= 0.71910\ 1123\bar{6} \\ y_{12} &= 0.67904\ 50928 \\ y_{13} &= 0.64 \\ y_{14} &= 0.60235\ 2941\bar{2} \\ y_{15} &= 0.56637\ 16814 \\ y_{16} &= 0.53222\ 45322 \\ y_{17} &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_{17} &= 1.5 \\ 2(y_3 + y_5 + y_7 + \dots + y_{15}) &= 2.5.5279769890 = 11.0559539780 \\ 4(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{16}) &= 4.6.2857894601 = 25.1431578404 \\ I &\approx \frac{1}{18} \cdot 37.6991118184 \end{aligned}$$

Stąd:

$$4I \approx 37.6991118184 : 12 = 3.14159\ 265\ \underline{\underline{15}}$$

Ponieważ zaś:

$$4I = \pi = 3.14159265\ \underline{\underline{3589}} \dots$$

przeto widzimy, że błąd wystąpił tu dopiero na 9-tym miejscu po kropce dziesiątej.

Wzór trapezowy i wzór Simpsona można dalej uogólnić w rozmaite sposoby. I tak wzór trapezowy polega na zastąpieniu funkcji  $f(x)$  funkcją  $y = a_0 + a_1x$  (t. j. badanej linii linią prostą) w każdym przedziale częściowym o szerokości  $h$ ; wzór zaś Simpsona polegał na zastąpieniu funkcji  $f(x)$  funkcją  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$  (t. j.

badanej linii parabolą drugiego stopnia) w przedziałach o szerokości  $2h$ . Otóż wprowadzono wzory, polegające na zastąpieniu  $f(x)$  funkcją:  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  w każdym przedziale częściowym o szerokości  $3h$  i ogólnie funkcją  $n$ -tego stopnia w przedziałach o szerokości  $nh$ . Wszystkie te wzory, których specjalnymi przypadkami są wzory: trapezowy i Simpsona, nazywamy wzorami Newtona-Cotes'a.

Dalsze udoskonalenie przybliżonych metod całkowania uzyskano, obierając na osi  $x$ -ów odstępy nierówne w odpowiedni sposób. Na tej myśli przewodniej opierają się przybliżone metody całkowania Gaussa i Czebyszewa. Szczegółowe omówienie tych wszystkich metod wraz z licznymi przykładami znajdzie czytelnik w następujących podręcznikach: C. Runge und H. König, *Numerisches Rechnen* (Berlin 1924, str. 238—285), E. Whittaker und G. Robinson, *The Calculus of Observations* (London 1926, str. 132, 163) i G. Kowalewski, *Integration und gendherte Quadratur* (Leipzig 1932).

---

## ROZDZIAŁ XIX.

### Zastosowania całek oznaczonych do geometrii i do mechaniki.

#### § 227. Pola wycinków.

W poprzednim rozdziale omówiliśmy zastosowanie całek oznaczonych do obliczania pól figur, ograniczonych łukiem dowolnej linii o równaniu  $y = f(x)$ , rzędnymi w końcowych punktach takiego łuku i osią odciętych. Opierając się na wynikach, uzyskanych w tych rozważaniach, a w szczególności na wzorach (46) z § 212, wyprowadzimy obecnie wzór na *pole wycinka*, ograniczonego łukiem dowolnej linii i promieniami, łączącymi końce tego łuku z początkiem układu. Weźmy najpierw pod uwagę

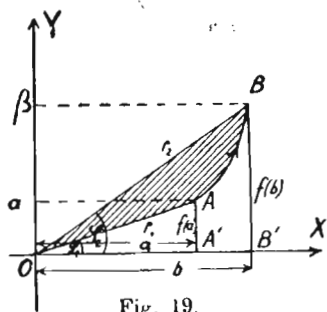


Fig. 19.

tylko takie łuki, w których do jednej odciętej należy tylko jedna wartość rzędnej, a więc których równanie da się ująć jedną (jednoznaczną) funkcją  $y = f(x)$  (por. fig. 19). Oznaczmy końce tego łuku literami  $A$  i  $B$  w takim porządku, abyśmy, przebiegając pokolei punkty  $O, A, B$  mieli powierzchnię wycinka po lewej ręce czyli aby obrót, sprowadzający prostą  $OA$  do nakrycia z prostą  $OB$ , miał kierunek dodatni, to znaczy taki, jak obrót, sprowadzający dodatnią część osi  $OX$  do nakrycia

z dodatnią częścią osi  $OY$ . Z figury tej odczytujemy, że pole  $W$  wycinka  $OAB$  jest równe polu trójkąta  $OB'B$ , pomniejszonemu o pole trójkąta  $OA'A$  i o pole krzywoliniowego czworokąta  $A'B'BA$ . Zatem:

$$(a) \quad W = \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) - \int_a^b y \, dx$$

Na tej figurze cały łuk  $\widehat{AB}$  leży wewnątrz pierwszej ćwiartki. Nietrudno jednak stwierdzić, że ten sam wzór (a) utrzymuje się ogólnie, przy dowolnych położeniach punktów  $A$  i  $B$ , jeżeli tylko przy posuwaniu się po

Łuku od  $A$  do  $B$  mamy po lewej ręce pole wycinka. Tak np. pole wycinka  $OAB$  na fig. 20 oblicza się w następujący sposób:

$$W = OAB = OAC + OCB = \\ = OAA' - AA'C + BCB' + OB'B$$

Pole trójkąta  $OAA'$  ma wartość  $-\frac{1}{2} a \cdot f(a)$ , ponieważ rzędna  $f(a)$  ma tu wartość ujemną. Pole  $OB'B = \frac{1}{2} b \cdot f(b)$  a pozostałe pola  $AA'C$  i  $BCB'$  oblicza się przy pomocy całek:

$$-AA'C = \int_c^a f(x) dx$$

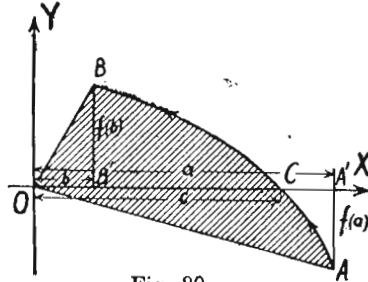


Fig. 20.

ponieważ funkcja  $f(x)$  jest ujemna w przedziale  $(c, a)$ :

$$BCB' = \int_c^b f(x) dx$$

Zatem:

$$W = -\frac{1}{2} a f(a) + \int_c^a f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \frac{1}{2} b f(b)$$

czyli:

$$W = \frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) - \int_a^b f(x) dx$$

zgodnie z wzorem (a).

Niechaj czytelnik stwierdzi prawdziwość tego wzoru także dla innych położań łuku  $\widehat{AB}$ , np. gdy łuk przebiega pierwszą, czwartą i trzecią ćwiartką płaszczyzny!

Sprawadzimy wzór (a) do dogodniejszej, symetrycznej postaci.

I tak widocznem jest, że:

$$b f(b) - a f(a) = x f(x) \Big|_a^b = xy \Big|_a^b = \int_a^b (xy)' dx$$

a więc:

$$\frac{1}{2} b f(b) - \frac{1}{2} a f(a) = \frac{1}{2} \int_a^b (xy)' dx$$

Wobec tego:

$$W = \frac{1}{2} \int_a^b (xy)' dx - \int_a^b y dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x dy + y dx - 2y dx)$$

a więc:

(83)

$$W = \frac{1}{2} \int_{x=a}^{x=b} (x dy - y dx)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób *wzór (Leibniza) na pole wycinka*.

W ciągu całego rozumowania uważaliśmy  $x$  za zmienną niezależną a  $y$  za (jednoznaczny) funkcję tej zmiennej. Wobec tego należy za  $dy$  podstawić we wzorze (83) wartość  $y' \cdot dx$  i dopiero wtedy wykonać całkowanie według zmiennej  $x$  w granicach od  $a$  do  $b$ . Gdyby zaś  $x$  było jednoznaczny funkcją zmiennej  $y$ , to można by wyrazić wszystko zapomocą zmiennej  $y$ , a więc za  $dx$  podstawić  $x' dy$  i całkować według zmiennej  $y$  w odpowiednio zmienionych granicach, np od  $a$  do  $\beta$  (por. fig. 19). Jeżeli zaś  $x$  i  $y$  są podane jako funkcje zmiennej  $t$ , to znaczy w *przedstawieniu parametrowem*, to wzór (83) ma, po wprowadzeniu nowej zmiennej  $t$  zapomocą podstawienia  $x = \varphi(t)$ , postać:

(84)

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} (x y' - x' y) dt$$

Liczby  $t_A$  i  $t_B$  są to wartości parametru  $t$ , odpowiadające punktom  $A$  i  $B$ .

Bardzo prostą formę przyjmuje wzór na pole wycinka przy użyciu spólrzędnych biegunowych. I tak jeżeli równanie linii, ograniczającej wycinek, jest podane w formie biegunowej:  $r = r(\varphi)$ , to uzyskamy następujące przedstawienie parametrowe:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

Stąd:

$$dx = (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi$$

a więc:

$$x dy - y dx = (r r' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi - r r' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) d\varphi = r^2 d\varphi$$

Wzór (83) przyjmuje zatem dla spólrzędnych biegunowych postać:

(85)

$$W = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

Wzory (84) i (85) są *ogólniejsze* od wzoru (83). Zaznaczyliśmy mianowicie wyraźnie, że wzór (83) odnosi się tylko do takich wycinków, których łuk ma z każdą prostą równoległą do osi rzędnych najwyżej jeden punkt wspólny.



Chcąc zaś obliczyć pole takiego wycinka, jak np. wycinek  $OAB$  na fig. 21, należałoby go rozłożyć na dwie części:  $OAC$  i  $OCB$ , obliczyć wartość odciętej  $c$  punktu  $C$  i stosować dwukrotnie wzór (83). Raz należałoby podstawić za  $y$  funkcję  $y_1 = f_1(x)$ , t. j. równanie dolnej części łuku, a drugi raz  $y_2 = f_2(x)$ , t. j. równanie górnej części łuku. W ten sposób otrzymuje się na pole takiego wycinka dość zawiły wzór:

$$W = \frac{1}{2} \int_a^c (x dy_1 - y_1 dx) + \frac{1}{2} \int_c^b (x dy_2 - y_2 dx)$$

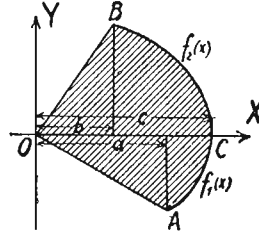


Fig. 21.

Natomiast przy przedstawieniu parametrowem bardzo często nie trzeba zmieniać funkcji  $x(t)$  i  $y(t)$ , albowiem przy zmianie parametru  $t$  od  $t_A$  do  $t_B$  mogą wartości tych samych funkcji  $x(t)$  i  $y(t)$  przebiegać spólrzędnie całego łuku  $\widehat{ACB}$ . (np. w elipsie, w kole). Otrzymamy więc w takim razie:

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_C} (xy' - x'y) dt + \frac{1}{2} \int_{t_C}^{t_B} (xy' - x'y) dt = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_B} (xy' - x'y) dt$$

W takich więc przypadkach — najpospolitszych w praktyce — można używać wzoru (84) bez żadnej zmiany, natomiast wzór (83) musi ulegać dość znacznym modyfikacjom. To samo odnosi się oczywiście także do wzoru (85), który jest specjalnym przypadkiem wzoru (84).

Zdarza się, że przy zmianie parametru  $t$  od  $t_1$  do  $t_2$ , punkt  $(x, y)$  przebiega jakąś linię zamkniętą. Wtedy wzór (84) lub (85) może służyć do obliczenia nie tylko wycinka, lecz całego pola, ograniczonego tą linią zamkniętą, jeżeli się tylko ta linia zamknięta nie przecina sama z sobą (t. j. jeżeli nie ma punktów węzłowych). Przy używaniu tych wszystkich wzorów na pole wycinka trzeba zawsze uważać na kierunek przebiegania łuku. Przy zmianie kierunku należy pomieniać z sobą granice całkowania lub zmienić znak funkcji podcałkowej: jeżeli tego nie uczynimy, to otrzymamy ujemną wartość pola.

#### Przykłady.

1) Znaleźć pole wycinka linii rozwijającej koła (por. tom I, § 169, str. 513) od  $t = 0$  do  $t = t_1$  (por. fig. 22). Równania tej linii mają w formie parametrowej postać:

$$\begin{aligned} x &= R(\cos t + t \sin t) \\ y &= R(\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

Gdybyśmy chcieli użyć spólrzędnych prostokątnych, to należałoby to pole rozdzielić na dwie części:  $OAC$  i  $OCB$ , przyczem punkt  $C$  trzeba by wy-

znaczyć zapomocą ekstremum względem osi  $y$ -ów. Pole wycinka jest sumą tych pól. Przy użyciu przedstawienia parametrowego ten rozkład nie jest potrzebny, lecz można od razu zastosować wzór (84). Ponieważ:

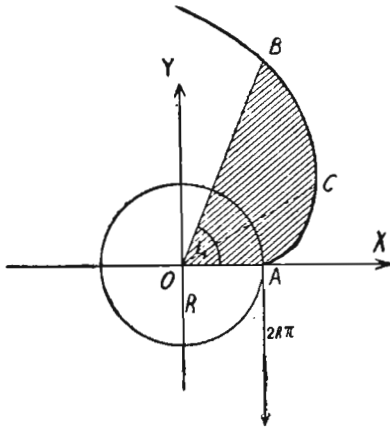


Fig. 22.

$$\begin{aligned}x' &= R(-\sin t + t \cos t + \sin t) = Rt \cos t \\y' &= R(\cos t + t \sin t - \cos t) = Rt \sin t\end{aligned}$$

przeto:

$$\begin{aligned}xy' - x'y &= R^2 t(\sin t \cos t + \\ &+ t \sin^2 t - \sin t \cos t + t \cos^2 t) = R^2 t^2\end{aligned}$$

Zatem:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} R^2 t^2 dt = \frac{1}{6} R^2 t^3 \Big|_0^{\varphi_1} = \frac{1}{6} R^2 \varphi_1^3$$

2) Obliczyć pole wycinka spiralnej Archimedes'a od  $\varphi=0$  do  $\varphi=\varphi_1$ .

Równanie tej spiralnej ma w formie biegunowej postać:

$$r = a\varphi$$

Przy użyciu wzoru (85) otrzymujemy:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_1} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6} a^2 \varphi^3 \Big|_0^{\varphi_1} = \frac{1}{6} a^2 \varphi_1^3$$

Gdybyśmy obrali  $\varphi_1 > 2\pi$ , to niektóre części pola byłyby przytem policzone dwukrotnie lub więcej razy.

3) Obliczyć pole, zamknięte lemniskatą. Biegunowe równanie lemniskaty ma postać:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Promień  $r$  zakresła ćwiartkę całego pola (zacięniowaną na fig. 23), gdy kąt  $\varphi$  zmienia się od 0 do  $\frac{1}{4}\pi$ . Zatem pole tej ćwiartki obliczymy z wzoru:

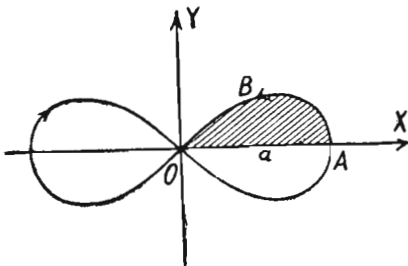


Fig. 23.

$$\frac{1}{4} P = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi$$

Stąd:

$$P = 2 \cdot \frac{a^2 \sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Zatem pole, zamknięte lemniskatą, jest równe polu kwadratu o boku  $OA$ .

## § 228. Planimetr biegunowy.

Obmyślono wiele przyrządów do wyznaczania wielkości pola drogą mechaniczną. Przyrządy te nazywamy *planimetrami*.

Opis i teorię rozmaitych planimetrów znaleźć można w podręczniku A. Galle'go, p.t. *Mathematische Instrumente* (Lipsk 1912 r., str. 66—131).

Najbardziej rozpowszechnionym jest planimetr biegunowy Amslera. Składa się on z dwóch prętów  $AO$  i  $AB$  (fig. 24), związanych w punkcie  $A$  tak, że mogą się obracać koło tego punktu. Koniec  $O$  pręta  $OA$  jest przytwierdzony do płaszczyzny rysunku a koniec  $B$  pręta  $AB$  przesuwamy po obwodzie powierzchni  $P$  której pole chcemy wyznaczyć. Do pręta  $AB$  jest przytwierdzone kółko  $K$ , połączone z mechanizmem zegarowym, który pozwala wyznaczyć dokładnie liczbę obrotów i części obrotów kółka. Oznaczmy odległość punktu  $A$  od  $B$  literą  $R$ . Okazuje się, że wielkość pola  $P$  otrzymuje się z bardzo prostego wzoru:

$$(a) \quad P = R \cdot s$$

przyczem  $s$  oznacza drogę, zakreśloną przez punkt na obwodzie kółka  $K$ . Jeżeli więc  $r$  oznacza promień tego kółka a  $n$  liczbę obrotów (wraz z ułaskami obrotów), to  $s = 2r\pi n$ , a zatem:

$$P = 2r\pi R \cdot n$$

Stały współczynnik  $2r\pi R = C$  nazywamy *stałą planimetru*. Wzór na pole przyjmuje zatem postać:

$$(b) \quad P = C \cdot n$$

Stałą  $C$  nie trzeba wyznaczać zapomocą dość zmudnych pomiarów  $R$  i  $r$ , lecz można ją otrzymać drogą empiryczną. Tak np. rysujemy koło o promieniu 10 cm i obwodzimy je planimetrem. Jeżeli np. mechanizm zegarowy wskaże, że kółko wykonało przytem 32·35 obrotów, to ponieważ pole wynosi 314·159... cm<sup>2</sup>, przeto:

$$314 \cdot 159 \dots = C \cdot 32 \cdot 35$$

a stąd otrzymujemy na stałą  $C$  wartość  $314 \cdot 159 \dots : 32 \cdot 35 = 9 \cdot 71 \dots$

Dokładna teoria tego przyrządu jest dość skomplikowana. Podamy tu tylko poglądowy dowód wzoru (a). Przy wszystkich ruchach planimetru porusza się punkt  $A$  (fig. 25) po obwodzie koła o promieniu  $OA$  a o środku  $O$ . Gdy punkt  $B$  obiega obwód danego pola, to pręt  $AB$  zakreśla jakąś powierzchnię  $P'$ . Oznaczmy literą  $f$  tę część powierzchni  $P'$ , która nie należy do  $P$ . Tę część przebiegamy dwukrotnie, przyczem dodajemy ją przy ruchu pręta w jedną stronę a odejmujemy przy ruchu w stronę przeciwną.

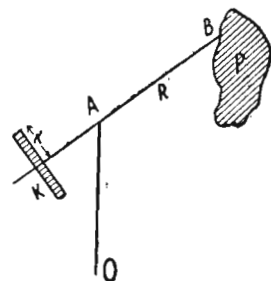


Fig. 24.

Wobec tego:

$$P' = P + f - f = P$$

Aby więc otrzymać szukane pole  $P$ , badamy całe pole  $P'$ , uwzględniając przytem rozmaite znaki części składowych. Weźmy pod uwagę powierzchnię,

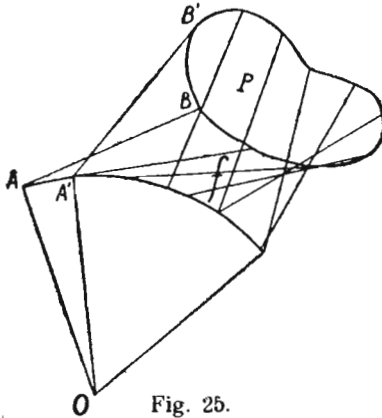


Fig. 25.

zakreślona przez pręt przy dość małej zmianie położenia, jak np. powierzchnię  $AA_1B_1B$  na fig. 26. Pręt przeszedł z położenia  $AB$  w położenie  $A_1B_1$ . Zastąpmy ten ruch pręta dwoma ruchami: najpierw niechaj się pręt porusza w kierunku prostopadłym do  $AB$  tak daleko, aż znajdzie się na prostej, na której leży  $A_1$ . Pręt zakreśli przytem prostokąt  $ABCD$ , a kółko, umieszczone na nim, obróci się o kąt, odpowiadający długości łuku  $\Delta s$ . Następnie posuńmy pręt po tej prostej w położenie  $A_1C'$ , przyczem kółko nie wykona

żadnego obrotu. Wkońcu obróćmy pręt około punktu  $A_1$ , tak, aby zajął położenie  $A_1B_1$ . Zakreśla on przytem wycinek koła  $A_1C'B_1$ , a kółko nie wykona żadnego obrotu. Powierzchnia, zakreślona przy tych dwóch ruchach, ma pole:

$$R \cdot \Delta s + \frac{1}{2} R^2 \Delta \varphi$$

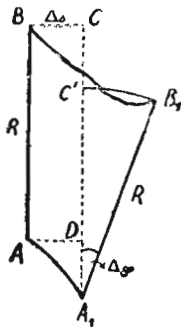


Fig. 26.

Podzielmy całe pole  $P'$  na takie elementy  $AA_1B_1B$  i każdy z nich zastąpmy w podobny sposób prostokątem i wycinkiem. Otrzymamy sumę:

$$\sum_{i=1}^n R \Delta s_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} R^2 \Delta \varphi_i$$

Gdy rozdrabniamy podział coraz bardziej, tak że wszystkie  $\Delta s_i$  i  $\Delta \varphi_i$  dążą do zera, to granica, do której dążą powyższe sumy, daje wielkość pola  $P'$ , zakreślonego istotnie przez pręt. Granicą pierwszej sumy jest  $R \cdot s$ , przyczem  $s$  oznacza łuk, zakreślony przez obrót kółka przy całkowitym obiegu badanego pola. Granicą drugiej sumy jest całka:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \frac{1}{2} R^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

przyczem  $\varphi_1$  oznacza nachylenie pręta do jakiejś obranej osi na początku ruchu a  $\varphi_2$  na końcu. Ponieważ pręt wraca po obiegu całego pola spo-

wrotem do swego pierwotnego położenia, przeto  $\varphi_2 = \varphi_1$ , a więc ta całka ma wartość 0 i zostaje:

$$P' = P = R_s$$

zgodnie z wzorem (a).

Ścisły dowód tego wzoru, polegający na wzorze (83) na pole wycinków, znajdzie czytelnik w podręczniku R. Rothe'go p. t. *Höhere Mathematik*, tom II (Lipsk 1929, str. 71 i nast.). Także w podręcznikach geodezji podaje się zwykle teorię rozmaitych planimetrów.

## § 229. Długość łuku.

Drugim nadzwyczaj ważnym geometrycznym zastosowaniem pojęcia całki jest definicja i obliczanie *długości łuków* dowolnej linii.

Weźmy pod uwagę łuk  $\widehat{AB}$  linii o równaniu  $y=f(x)$  (por. fig. 27). Podzielmy ten łuk punktami  $C_1^{(1)}, C_2^{(1)} \dots C_{n_1}^{(1)}$  na  $n_1$  dowolnych, niekoniecznie równych części i wpiszmy w ten łuk linię łamaną, łącząc kolejne punkty podziału  $A$  i  $C_1^{(1)}$ ,  $C_1^{(1)}$  i  $C_2^{(1)}$ ... cięciwami  $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \dots, c_{n_1}^{(1)}$ . Długość  $L_1$  tej linii łamanej jest równa:

$$L_1 = c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + \dots + c_{n_1}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_1} c_i^{(1)}$$

Tworzymy ciąg takich linii łamanych, zwiększając nieograniczenie liczbę cięciw, jednakże w taki sposób, aby ciąg, utworzony z największych cięciw każdego podziału, dążył do zera (wtedy wszystkie ciągi cięciw, wybranych po jednej z każdego podziału, dążą do zera). Jeżeli wszystkie takie ciągi  $L_1, L_2, \dots, L_p, \dots$  długości tych linii łamanych posiadają wspólną granicę, to tę granicę nazywamy *długością łuku* od  $A$  do  $B$  i oznaczamy ją zwykle literą  $s$ . Do istnienia skończonej granicy nie wystarczy tu, aby  $f(x)$  była funkcją ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , albowiem linia, która jest obrazem tej funkcji, może posiadać tak gęste i tak znaczne falowania, że ciąg długości linii łamanych, wpisanych w tę linię, dąży do nieskończoności. Okażemy natomiast, że dostatecznym warunkiem istnienia (skończonej) długości łuku jest, aby pochodna  $f'(x)$  była funkcją ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

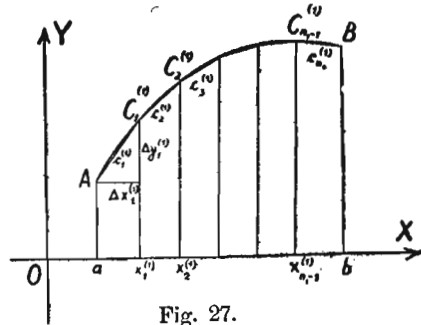


Fig. 27.

*Dowód.* Długość każdej cięciwy, np.  $c_l^{(1)}$ , wyrażamy wzorem:

$$c_l^{(1)} = \sqrt{\Delta x_l^{(1)2} + \Delta y_l^{(1)2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_l^{(1)}}{\Delta x_l^{(1)}}\right)^2} \cdot \Delta x_l^{(1)}$$

Ale:

$$\Delta y_l^{(1)} = f(x_l^{(1)} + \Delta x_l^{(1)}) - f(x_l^{(1)}) = f'(\xi_l^{(1)}) \cdot \Delta x_l^{(1)}$$

przyczem  $\xi_l^{(1)}$  jest jakąś wartością pośrednią pomiędzy  $x_l^{(1)}$  a  $x_l^{(1)} + \Delta x_l^{(1)}$ .  
Zatem:

$$\frac{\Delta y_l^{(1)}}{\Delta x_l^{(1)}} = f'(\xi_l^{(1)})$$

a więc:

$$c_l^{(1)} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_l^{(1)})} \cdot \Delta x_l^{(1)}$$

Podobnie wyrażamy długości innych cięciw i otrzymujemy na długość linii łamanej  $\mathcal{E}_1$  wzór:

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{l=1}^{n_1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_l^{(1)})} \Delta x_l^{(1)}$$

Oznaczmy  $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \varphi(x)$  to:

$$\mathcal{E}_1 = \sum_{l=1}^{n_1} \varphi(\xi_l^{(1)}) \cdot \Delta x_l^{(1)}$$

Według założenia jest  $f'(x)$  funkcją ciągłą a więc i  $\varphi(x)$  jest funkcją ciągłą. Wraz z cięciwami także i przedziały  $\Delta x$ , dążą do zera. Ciąg takich sum  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_p, \dots$  posiada zatem granicę, a tą granicą jest całka oznaczona z funkcji  $\varphi(x)$  w granicach od  $a$  do  $b$  (por. § 222). Zatem:

$$s = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{n_p} \varphi(\xi_l^{(p)}) \Delta x_l^{(p)} = \int_a^b \varphi(x) dx$$

czyli:

(86)

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór na długość łuku.

Jeżeli pochodna  $f'(x)$  jest nieciągła w skończonej liczbie punktów przedziału  $\langle a, b \rangle$ , to długość łuku oblicza się przy pomocy odpowiedniej całki uogólnionej lub niewłaściwej, wyrażonej tym samym wzorem (86).

Z wzoru (86) otrzymujemy na długość łuku wartość dodatnią, gdy  $a < b$  a ujemną, gdy  $a > b$ , a więc z wzrostem odciętej  $x$  wzrasta długość łuku.

Zatrzymajmy w całce, podającej długość łuku, dolną granicę  $a$  a zmieniamy górną granicę  $b$ ; zastąpmy literę  $b$  literą  $x$ , to:

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx = s(x)$$

Długość łuku jest zatem funkcją górnej granicy  $x$ . Pochodna tej funkcji ma wartość:

$$(86a) \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

a stąd:

$$ds^2 = dx^2(1 + y'^2) = dx^2 + (y' dx)^2$$

czyli:

(87)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Różniczkę łuku nazywamy często *elementem łuku*; wzór (87) podaje więc kwadrat elementu łuku.

Jeżeli równanie linii jest podane w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

to wzór (86) przyjmie postać:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \cdot \varphi'(t) dt$$

Wciągając  $\varphi'(t)$  pod pierwiastek, możemy otrzymać przed pierwiastkiem znak  $+$  lub  $-$ , zależnie od znaku funkcji  $\varphi'(t)$ . Jeżeli obierzemy stałe znak  $+$ , to wzór na długość łuku przyjmie postać:

(88)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Wartość  $t = t_1$  odpowiada wartości  $x = a$  a  $t = t_2$  wartości  $x = b$ . Z tego wzoru otrzymamy na długość łuku wartość dodatnią, gdy założymy, że łuk wzrasta wraz z wzrastaniem parametru  $t$  (a więc umowa co do znaku jest przy użyciu tego wzoru inna, aniżeli przy użyciu wzoru (86)).

Użycie spólrzędnych biegunowych sprowadza się, jak wiadomo, do specjalnej formy przedstawienia parametrowego, a mianowicie gdy równanie linii jest podane w postaci:

$$r = r(\varphi)$$

to  $x = r(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y = r(\varphi) \sin \varphi$ ; parametrem jest tu kąt  $\varphi$ .

Ponieważ:

$$x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$$

przeto:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} = \\ & = \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi - 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = \\ & = \sqrt{r'^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Wobec tego wzór na długość łuku przyjmuje dla spólrzędnych biegunowych postać:

$$(89) \quad s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi$$

Obliczanie długości łuku linii krzywej nazywamy *rektyfikacją* (t. j. wyprostowaniem) tej linii.

Zupełnie podobną drogą dochodzi się do definicji i wzoru na długość łuku linii *przestrzennej*, trójwymiarowej.

Jeżeli równania tej linii są podane w postaci:

$$y = y(x), \quad z = z(x)$$

to na długość łuku otrzymuje się wzór:

$$(90) \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx$$

Jeżeli zaś równania linii są podane w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

to wzór na długość łuku przyjmuje postać:

$$(91) \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt$$

Uważając we wzorze (90) górną granicę całki za zmienną:  $b = x$ , otrzymujemy na długość łuku funkcję  $s(x)$ . Tworzymy pochodną tej funkcji według zmiennej  $x$  i podnosimy obie strony otrzymanego wzoru do kwadratu. Po pomnożeniu obu stron przez  $dx^2$  otrzymujemy następujący wzór na kwadrat elementu łuku krzywej przestrzennej:

$$(92) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



*Przykłady.*

1) Obliczyć długość łuku paraboli o równaniu

$$y = ax^2$$

od wierzchołka do dowolnego punktu. Niechaj będzie  $a > 0$ .

Ponieważ  $y' = 2ax$ , przeto według wzoru (86) otrzymujemy:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} dx = 2a \int_0^x \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2} dx$$

Całkę tę oblicza się według wzoru (35) (na str. 48), kładąc  $k = \frac{1}{4a^2}$  i otrzymuje się:

$$\begin{aligned} s &= a \left( x \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2} + \frac{1}{4a^2} \log \left( x + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2} \right) \right) \Big|_0^x \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \frac{1}{4a} \log \left( x + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + x^2} \right) - \frac{1}{4a} \log \sqrt{\frac{1}{4a^2}} \end{aligned}$$

czyli:

$$s = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + \frac{1}{4a} \log (2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2})$$

Niechaj czytelnik wykaże dla ćwiczenia, że łuk linii łańcuchowej o równaniu  $y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$  od wierzchołka do punktu o odciętej  $x$  wyraża się wzorem:  $s = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$ .

2) Obliczyć długość łuku jednej arkady cykloidy. Równania cykloidy mają w formie parametrowej postać:

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}$$

Używając wzoru (88), otrzymujemy:

$$s = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

czyli:

$$s = a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} d\left(\frac{t}{2}\right)$$

Długość łuku jednej arkady otrzymuje się, zmieniając  $t$  od 0 do  $2\pi$ . W tym przedziale ma  $\sin \frac{t}{2}$  wartość dodatnią, a więc  $\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = \sin \frac{t}{2}$ .

Wobec tego:

$$s = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 4a \left(-\cos \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

Godnem jest uwagi, że w tym wzorze nie występuje liczba  $\pi$ .

3) Obliczyć długość łuku spiralnej logarytmicznej o równaniu:

$$r = a e^{b\varphi} \quad (\text{przy } a > 0)$$

od  $\varphi_0$  do dowolnego  $\varphi$ .

Przy pomocy wzoru (89) otrzymujemy:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{a^2 e^{2b\varphi} + a^2 b^2 e^{2b\varphi}} d\varphi = a\sqrt{1+b^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{b\varphi} d\varphi$$

$$s = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (a e^{b\varphi} - a e^{b\varphi_0})$$

Oznaczmy promień, należący do kąta  $\varphi_0$ , literą  $r_0$ , to:

$$s = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} (r - r_0)$$

Łuk spiralnej logarytmicznej zmienia się więc proporcjonalnie do promienia.

Niechaj czytelnik okaże, że długość łuku spiralnej Archimedes'a, o równaniu:

$$r = c\varphi$$

od  $\varphi = 0$  do dowolnego  $\varphi$ , wyraża się wzorem:

$$s = \frac{c}{2} (\varphi \sqrt{1+\varphi^2} + \log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}))$$

4) Obliczyć długość łuku linii śrubowej. Równania jej mają w formie parametrowej postać:

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ct$$

(por. tom I, str. 378 wzory (107)). Z wzoru (91) otrzymujemy:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + c^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + c^2} dt = \sqrt{r^2 + c^2} (t_2 - t_1)$$

Długość linii śrubowej, odpowiadająca jednemu krokowi śruby, t. j. od  $t = 0$  do  $t = 2\pi$ , wynosi:

$$s = \sqrt{r^2 + c^2} 2\pi$$

Niechaj czytelnik wykaże, że długość łuku linii o równaniach:

$$y = \frac{x^3}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}$$

liczona od  $x = 0$ , wyraża się wzorem  $s = x + z$ . Użyć wzoru (90)!

Rektyfikacja linii krzywych prowadzi tylko w niewielu wypadkach do całek, dających się wyrazić zapomocą funkcji elementarnych. Zwykle otrzymuje się na długość łuku skomplikowane funkcje przestępne, nieelementarne. Tak np. spróbujmy obliczyć długość łuku elipsy.

Użyjmy formy parametrowej:

$$\begin{aligned} x &= a \sin t \\ y &= b \cos t \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (88) otrzymujemy:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt$$

Oznaczmy literą  $k$  mimośród liczbowy, t. j. stosunek  $e : a$  czyli  $\sqrt{a^2 - b^2} : a$  (wobec czego  $k < 1$ ), to:

$$s = a \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

Całka ta nie da się wyrazić przy pomocy funkcji elementarnych. Oznaczmy:

$$(93) \quad \int_0^t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt = E(k, t)$$

Funkcję tę nazywamy *całką eliptyczną drugiego rodzaju*. Istnieją tablice, pozwalające obliczyć tę całkę dla rozmaitych wartości  $k$  i  $t$ , np. Jah n k e, *Funktionentafeln* (Lipsk 1933, wyd. 2) lub H ü t t t e, *Des Ingenieurs Taschenbuch* (Berlin 1925, wyd. 25, str. 42). Używając tego oznaczenia, napiszemy wzór na długość łuku elipsy w postaci:

$$s = a (E(k, t_2) - E(k, t_1))$$

Uwaga. Całkę:

$$(94) \quad \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = F(k, t)$$

nazywamy *całką eliptyczną pierwszego rodzaju*; jest ona także nieelementarną funkcją przestępną. Te całki eliptyczne i funkcje odwrotne względem nich, zwane *funkcjami eliptycznymi*, mają bardzo rozległe zastosowania w rozmaitych działościach fizyki i tech-

niki. Do tych całek sprowadza się za pomocą odpowiednich podstawień całki eliptyczne, wspomniane na str. 59. Teorię funkcji eliptycznych rozwinęto nadzwyczaj szczegółowo, poświęcając jej wiele prac specjalnych i podręczników. Spośród licznych podręczników wymieniamy tu następujące: L. Lévy, *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications* (Paris, 1898) i H. Burkhardt, *Elliptische Funktionen* (Lipsk, 1906, wyd. 2).

Wartości całki  $E(k, t)$  można wyznaczyć dla szczegółowych wartości  $t$ ,  $k$  np. przybliżonym wzorem Simpsona. Dla dokładniejszych obliczeń posługujemy się ogólnym rozwinięciem funkcji podcałkowej na szereg. Metodę tę omówimy w rozdziale, poświęconym teorii szeregów nieskończonych.

Obliczanie łuku hiperboli sprowadza się także do obliczania całek eliptycznych pierwszego i drugiego rodzaju. Pozostawiamy czytelnikowi wyprowadzenie wzoru na długość łuku lemniskaty o równaniu:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$$

Otrzymamy:

$$s = a\sqrt{2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}$$

Po podstawieniu  $\cos 2\varphi = \cos^2 t$  uzyskuje się stąd całkę eliptyczną pierwszego rodzaju, a mianowicie:

$$s = a \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}} = a F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right)$$

### § 230. Zastosowania wzorów na długość łuku w geometrii różniczkowej płaskiej.

Z wzorów na długość i na element łuku wynika kilka wniosków ważnych dla geometrii różniczkowej.

1) I tak z wzoru (86a) wynika:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha} = \frac{1}{|\cos \alpha|}$$

czyli:

$$(95) \quad dx = |\cos \alpha| ds$$

Widzieliśmy, że wzór (86) jest prawdziwy pod względem znaku wtedy, gdy długość łuku wzrasta z wzrostem odciętej. Jeżeli w ostatnim wzorze opuścimy symbol wartości bezwzględnej, pisząc wprost:

$$(96) \quad dx = \cos \alpha ds$$

to zmienimy przez to tylko założenie, dotyczące kierunku wzrastania łuku. Łatwo mianowicie okazać, iż zakładając, że łuk wzrasta w tym kierunku, który obieramy za dodatni kierunek stycznej, możemy użyć wzoru (96) zamiast wzoru (95). Tak np. na fig. 28a łuk wzrasta w tym

samym kierunku, co odcięta  $x$ , a więc, gdy  $dx > 0$ , to i  $ds > 0$ . Kąt  $\alpha$  stycznej z osią  $x$ -ów ma tu wartość z pierwszej ćwiartki, a więc  $\cos \alpha > 0$ , wobec czego iloczyn  $\cos \alpha \cdot ds$  ma znak  $+$ , zgodny ze znakiem  $dx$ . Na

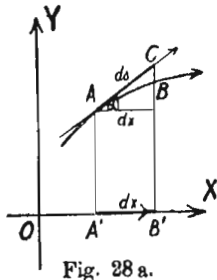


Fig. 28 a.

fig. 28 b łuk wzrasta w kierunku przeciwnym aniżeli  $x$ , a więc, gdy  $dx > 0$ , to  $ds < 0$ . Kąt  $\alpha$  stycznej ma tu wartość z trzeciej ćwiartki, a więc  $\cos \alpha < 0$ . Wobec tego iloczyn  $\cos \alpha \cdot ds > 0$ , zgodnie ze znakiem  $dx$ . Pozostawiamy czytelnikowi rozważenie innych przypadków (gdy kąt  $\alpha$  należy do drugiej lub czwartej ćwiartki).

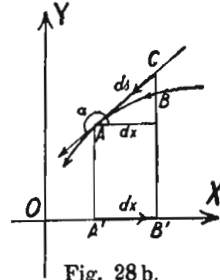


Fig. 28 b.

Z tych figur jest widoczne, że element łuku  $ds$  równa się odcinkowi  $AC$  stycznej od punktu styczności do punktu, w którym przecina styczną rzędna,

należąca do odciętej  $x + dx$ . Istotnie  $AC = \frac{dx}{\cos \alpha} = ds$ .

Odcinek ten nie jest z reguły równy prawdziwemu przyrostowi łuku, t. j. łukowi  $\widehat{AB} = \Delta s$ .

Także różniczkę  $dy$  można wyrazić za pomocą elementu łuku.

I tak:

$$dy = y' dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot ds$$

czyli:

$$dy = \sin \alpha ds$$

Wzory:

(97)

$$\begin{aligned} dx &= \cos \alpha ds \\ dy &= \sin \alpha ds \end{aligned}$$

bywają często stosowane w rozważaniach geometrii różniczkowej. Zamiast kąta  $\alpha$  można wprowadzić kąt  $\beta$ , jaki styczna tworzy z osią  $y$ -ów. Ponieważ  $\alpha = 90^\circ - \beta$ , przeto  $\sin \alpha = \cos \beta$ . Wprowadzając tę wartość w drugi wzór, otrzymujemy bardziej jednolite wzory:

$$dx = \cos \alpha ds$$

$$dy = \cos \beta ds$$

a stąd:

(98)

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}$$

Te cosinusy nazywamy cosinusami kierunkowymi stycznej (por. t. I, str. 522). Cosinusy kierunkowe stycznej są zatem pochodnymi odciętej i rzędnej względem łuku. Podobne rozważania i wzory dotyczą krzywych przestrzennych.

2) Łuk linii krzywej jest zawsze większy od cięciwy, łączącej końce tego łuku. Zbadajmy, do czego dąży stosunek łuku do cięciwy, gdy długość cięciwy dąży do zera.

Długość cięciwy, łączącej punkt  $A(x, y)$  z punktem  $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ , ma wartość  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , a długość łuku, łączącego te punkty, nazwijmy  $\Delta s$ . Załóżmy, że równanie linii jest podane w formie  $y = f(x)$ , przyczem  $f'(x)$  jest funkcją ciągłą. Chodzi nam o zbadanie granicy:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Zamiast  $c \rightarrow 0$  możemy brać  $\Delta x \rightarrow 0$ , albowiem obydwa te warunki są ze sobą równoważne, ponieważ  $y = f(x)$  jest funkcją ciągłą. Niechaj będzie  $\Delta x > 0$ . Otóż:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{s'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = \frac{s'(x)}{s'(x)} = 1$$

Dowiedliśmy więc, że:

$$(99) \quad \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{c} = 1$$

t. j., że *stosunek łuku do cięciwy dąży do jedności, gdy długość cięciwy dąży do zera.*

3) Krzywiznę linii w dowolnym jej punkcie określiliśmy (por. t. I, str. 552 i nast.) jako bezwzględną wartość granicy, do której dąży stosunek kąta  $\Delta \alpha$ , zawartego między styczną w tym punkcie a styczną w punkcie z jego otoczenia, do cięciwy  $c$ , łączącej te dwa punkty, gdy długość cięciwy dąży do zera. A więc:  $k = \left| \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{c} \right|$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem stycznej z osią odciętych. Okażemy, że tę definicję można zastąpić nową, równoważną z nią, a lepiej oddającą intuicyjne pojmowanie stopnia zakrzywienia. Bierzemy mianowicie pod uwagę stosunek kąta  $\Delta \alpha$  do długości łuku  $\Delta s$ , zawartego między temi punktami i badamy granicę bezwzględnej wartości tego stosunku, gdy długość łuku dąży do zera, t. j.:

$$g = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

Zamiast  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$  możemy napisać  $\frac{\Delta \alpha}{c} \cdot \frac{c}{\Delta s}$ . Gdy  $\Delta s \rightarrow 0$ , to cięciwa  $c \rightarrow 0$  i odwrotnie, a więc:

$$g = \left| \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{c} \cdot \frac{c}{\Delta s} \right|$$

Ponieważ zaś  $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{\Delta s} = 1$ , przeto:

$$g = \left| \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{c} \right|$$

a więc  $g = k$ . Zatem:

$$(100) \quad k = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

A więc *krzywiznę* można też określać jako bezwzględną wartość granicy, do której dąży stosunek przyrostu kąta  $\alpha$  do przyrostu łuku  $s$ .

Wzór na *krzywiznę* (znany z tomu I) można otrzymać łatwo z definicji, zawartej we wzorze (100). I tak niechaj równanie linii będzie podane w formie  $y = f(x)$ .

Ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ , przeto  $\alpha = \operatorname{arctg} y' + n\pi$ , a zatem:

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

Wiemy, że:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

a więc:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Stąd:

$$k = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

zgodnie z wzorem (194) z tomu I (str. 553).

#### 4) Długość łuku ewoluty. Mechaniczna konstrukcja ewolventy.

Linję  $l_2$ , która jest miejscem geometrycznym środków krzywizny danej linii  $l_1$ , nazywamy, jak wiadomo, *ewolutą* czyli *rozwinętą linią*  $l_1$  (por. tom I, § 184, str. 555 i nast.), a samą linię  $l_1$  nazywamy *ewolwentą* czyli *rozwijającą linią*  $l_2$ .

Niechaj  $x, y$  oznaczają spórzędne punktu bieżącego danej linii  $l_1$ , a  $\xi, \eta$  ewoluty  $l_2$ . Równania ewoluty mają postać:

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Jeżeli  $\sigma$  oznacza długość łuku ewoluty, liczoną od jakiegoś obranego punktu, to:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$$

a więc:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2$$

Obliczmy pochodne:  $\xi'$  i  $\eta'$ . Otóż:

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - y'' \frac{1+y'^2}{y''} - y' \frac{y'' \cdot 2y'y'' - (1+y'^2)y'''}{y''^2} = y' \frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{y''^2}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = y' + \frac{y'' \cdot 2y'y'' - (1+y'^2)y'''}{y''^2} = - \frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{y''^2}$$

Wobec tego:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = (1+y'^2) \left(\frac{y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2}{y''^2}\right)^2$$

Zupełnie podobny wzór otrzymamy na pochodną promienia krzywizny danej linii  $l_1$ . I tak z wzoru:

$$\rho = \pm \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 = \left(\frac{y'' \cdot \frac{3}{2}(1+y'^2)^{1/2} \cdot 2y'y'' - (1+y'^2)^{3/2} \cdot y'''}{y''^2}\right)^2 =$$

$$= (1+y'^2) \left(\frac{3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)}{y''^2}\right)^2$$

A więc:

$$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2$$

Stąd:

$$\frac{d\sigma}{dx} = + \frac{d\rho}{dx} \quad \text{lub} \quad - \frac{d\rho}{dx}$$

Chcemy usunąć tę wątpliwość co do znaku. Załóżmy w tym celu, że promień wzrasta w całym badanym przedziale zmiennej  $x$  lub maleje w całym przedziale, a więc nie ma ekstremów. Obierzmy za dodatni kierunek wzrastania łuku ten kierunek, w którym  $\rho$  wzrasta, to:

$$(101) \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \quad \text{a stąd:} \quad \sigma = \rho + C$$

Jeżeli  $\sigma_1$  oznacza łuk ewoluty a  $\rho_1$  promień krzywizny danej linii, należące do tej samej wartości  $x_1$ , a  $\sigma_2, \rho_2$  dla  $x_2$ , to:

$$\sigma_1 = \rho_1 + C, \quad \sigma_2 = \rho_2 + C$$

a stąd wynika:

(102)

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1$$



Widzimy stąd, że długość łuku, zawartego między dwoma punktami ewoluty jakiejś linii  $l_1$ , można wyznaczyć bez całkowania, obliczając różnicę odpowiednich promieni krzywizny tej linii  $l_1$ . Wzór (102) można wyrazić w następujący sposób: *przyrost długości łuku ewoluty równa się przyrostowi promienia krzywizny pierwotnej linii, wziętemu z odpowiednim znakiem.*

Na tym związku łuku ewoluty  $l_2$  z promieniem krzywizny linii  $l_1$  polega mechaniczna (nitkowa) konstrukcja ewolwenty  $l_1$  z danej ewoluty  $l_2$ . Niechaj  $\sigma_{AB}$  oznacza długość łuku ewoluty  $l_2$  od  $A$  do  $B$  (fig. 29),  $\rho_{A'}$  promień krzywizny ewolwenty  $l_1$ , należący do punktu  $A'$ , dla którego  $A$  jest środkiem krzywizny, a podobnie  $\rho_{B'}$  dla punktów  $B'$  i  $B$ . Wiadomo (por. tom I, str. 555), że normalna ewolwenty  $l_1$ , na której leży promień krzywizny  $\rho_{A'} = AA'$ , styka się z ewolutą w punkcie  $A$  (w środku krzywizny, należącym do  $A'$ ). Niechaj punkt  $P$  będzie początkiem liczenia łuku ewoluty. Według wzoru (102) jest:

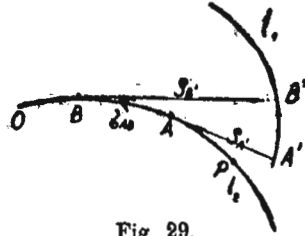


Fig. 29.

$$\sigma_{AB} = \sigma_{PB} - \sigma_{PA} = \rho_{B'} - \rho_{A'}$$

Gdyby punkt  $P$  leżał po drugiej stronie punktu  $B$ , jak np. punkt  $O$ , to należałoby zmienić znak prawej strony.

Przytwierdzmy nitkę w dowolnym punkcie ewoluty, np. w punkcie  $O$  i nawińmy ją wzdłuż ewoluty do punktu  $A$  a pozostałą wolną część  $AA'$  wyprężmy tak, aby była styczną do ewoluty. Rozwijajmy tę nitkę stopniowo, wyprężając ją zawsze w kierunku stycznej. Przyrost odcinka  $AA'$  będzie zawsze równy przyrostowi długości łuku, czyli przyrostowi rozwijanej nitki. Koniec  $A'$  zakreśli zatem ewolwentę  $l_1$ . Stąd pochodzą nazwy: „rozwijająca“ czyli ewolwenta dla linii  $l_1$ , a „rozwinęta“ czyli „ewoluta“ dla linii  $l_2$  (właściwie należałoby pomienić te nazwy z sobą, jednakże powszechnie utarły się one w literaturze matematycznej w sposób podany powyżej).

##### 5) Równania ewolwenty.

Znalezienie równań ewoluty danej linii wymaga, jak widzieliśmy, tylko różniczkowania. Natomiast wyznaczenie równań ewolwenty do danej ewoluty wymaga już rachunku całkowego. Niechaj:

$$\eta = f(\xi)$$

przedstawia równanie danej linii, którą uważamy za ewolutę szukanej linii  $y = \varphi(x)$ . Niechaj  $\alpha_1$  (fig. 30) oznacza kąt stycznej do ewoluty w dowolnym jej punkcie  $B$  z osią odciętych. Ponieważ  $BB' = \rho$ , przeto:

$$\begin{aligned} x - \xi &= \rho \cos \alpha_1 \\ y - \eta &= \rho \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Z wzoru (101) wynika, że  $\varrho = \sigma - c$ , a więc:

$$(103) \quad \begin{aligned} x &= \xi + (\sigma - c) \cos \alpha_1 \\ y &= \eta + (\sigma - c) \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

Ale  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \eta'$  a zatem:

$$\cos \alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + \eta'^2}}, \quad \sin \alpha_1 = -\frac{\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}}$$

ponieważ  $\alpha_1$  jest kątem rozwartym. Zatem:

$$(104) \quad \begin{cases} x = \xi - \frac{\sigma - c}{\sqrt{1 + \eta'^2}} \\ y = \eta - \frac{(\sigma - c)\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}} \end{cases}$$

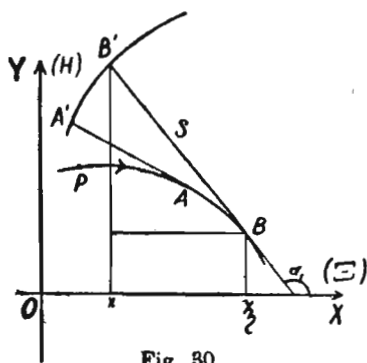


Fig. 30.

Są to *równania ewolwenty* w formie parametrowej, przyczem parametrem jest  $\xi$ , a  $c$  stałą dowolną. Widzimy, że w tych równaniach występuje łuk  $\sigma$  danej linii  $\eta = f(\xi)$ , trzeba zatem wykonać całkowanie:

$$\sigma = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{1 + f'^2(\xi)} d\xi$$

Ponieważ w otrzymanych wzorach występuje dowolna stała  $c$ , przeto otrzymujemy do jednej danej linii całą gromadę jednoparametrową ewolwent. Jest to zgodne z tem, że *każda ortogonalna trajektorja* stycznych do linii  $\eta = f(\xi)$  jest ewolwentą tej linii (por. tom I, str. 555). Wszystkie linje tej gromady są, jak łatwo zauważyć, linjami *równoległymi* do siebie. Gdybyśmy obrali na stycznej jako dodatni kierunek nie od  $B$  ku  $B'$ , lecz przeciwnie od  $B$  w drugą stronę, to przy wzrastaniu promienia krzywizny malałby łuk, zatem należałoby podstawić  $\varrho = -(\sigma - c)$ , ale równocześnie kąt  $\alpha_1$  należałby do czwartej ćwiartki, a więc we wzorach na  $\cos \alpha_1$  i  $\sin \alpha_1$  należałoby zmienić znaki. Wobec tego znaki we wzorach (104) pozostałyby bez zmiany. Niechaj czytelnik rozważy w podobny sposób przypadek, gdy kąt  $\alpha_1$  jest ostry.

*Przykład.*

Wyznaczyć równanie ewolwenty koła (por. tom I, str. 513). Użyjmy parametrowej formy równania koła, t. j.:

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos t \\ \eta &= a \sin t \end{aligned}$$

Do obliczenia długości łuku nie trzeba używać całki, znany jest bowiem dla długości łuku koła wzór:

$$\sigma = at$$

przez łuk liczy się od punktu, dla którego  $t=0$ , w kierunku wzrastających  $t$ . Kąt  $\alpha_1$ , utworzony przez dodatni kierunek stycznej z osią odejciowych, ma wartość  $\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi + t$  (por. fig. 31). Równania ewolventy otrzymamy tu najprościej z wzorów (103), a mianowicie:

$$x = a \cos t + (at - c) \cos \alpha_1$$

$$y = a \sin t + (at - c) \sin \alpha_1$$

Ponieważ:

$$\cos \alpha_1 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + t\right) = \sin t$$

$$\sin \alpha_1 = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + t\right) = -\cos t$$

przeto:

$$x = a \cos t + (at - c) \sin t$$

$$y = a \sin t - (at - c) \cos t$$

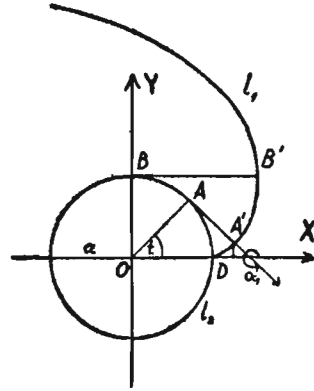


Fig. 31.

Wybermy z tej gromady ewolwent tę, dla której  $c=0$ , to znaczy:

(105)\*

$$\begin{aligned} x &= a(\cos t + t \sin t) \\ y &= a(\sin t - t \cos t) \end{aligned}$$

Przechodzi ona przez punkt  $D$  na obwodzie koła, ponieważ dla  $t=0$  otrzymujemy z wzorów (105)  $x=a$ ,  $y=0$ , a więc współrzędne punktu  $D$ . Inne ewolventy są krzywymi równoległymi do  $l_1$  (definicję krzywych równoległych podano w tomie I, str. 526 i 584).

### § 231. Obliczanie objętości przy pomocy całki pojedynczej.

Okazemy, że, jeżeli znamy pola wszystkich przekrojów jakiejś bryły, równoległe do jednej stałej płaszczyzny, to objętość jej możemy wyrazić zapomocą całki. Niechaj tą stałą płaszczyzną będzie płaszczyzna boczna  $YZ$ . Na fig. 32 przedstawiono bryłę, której objętość chcemy obliczyć, w rzucie na płaszczyznę pionową  $ZX$ . Nazwijmy  $\varphi(x)$  pole przekroju, leżącego w odległości  $x$  od stałej płaszczyzny  $YZ$ . Pole to jest oczywiście jakąś funkcją zmiennej  $x$ . Zakładamy, że znamy wartość tej funkcji dla każdego  $x$ . Podzielmy bryłę zapomocą systemu płaszczyzn równoległych do  $YZ$  na warstwy i każdą taką warstwę zastąpmy walcem o wysokości, równej szerokości tej warstwy  $a$  o podstawie równej temu przekrojowi tej warstwy, który ma pole najmniejsze:  $m_i$ . Objętość walca o podstawie  $m_i$  a wysokości  $\Delta x_i$  jest równa  $m_i \Delta x_i$ . Otrzymamy system walców o łącznej objętości:

$$(a) \quad m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n$$

przyczem  $m_i$  oznacza najmniejszą wartość funkcji  $\varphi(x)$  w przedziale  $\Delta x_i$ . Wykonując podział na warstwy w rozmaite sposoby, otrzymujemy rozmaite sumy (s). Kres górny tych sum nazywamy objętością danej bryły.

Ten kres górny jest całką oznaczoną funkcji  $\varphi(x)$ , a zatem objętość wyraża się wzorem:

(106)

$$V = \int_a^b \varphi(x) dx$$

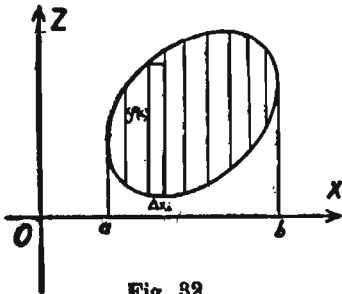


Fig. 32.

przyczem  $\varphi(x)$  oznacza pole przekroju prostopadłego do osi  $x$  w zależności od odległości tego przekroju od stałej płaszczyzny (bocznej).

W specjalnym przypadku, gdy bryła jest obrotowa, t. j. powstaje przez obrót linii (południkowej) o równaniu  $y = f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$  około osi  $x$ , to każdy jej przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi  $x$  jest kołem o promieniu  $y$ . Pole tego przekroju ma zatem wartość  $\varphi(x) = y^2 \pi = f^2(x) \pi$ , a więc objętość takiej bryły obrotowej wyrażamy wzorem:

(107)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Z wzoru (106) wynika następujące twierdzenie Cavalieri'ego: jeżeli przekroje dwóch brył zapomocą płaszczyzn równoległych do jednej stałej płaszczyzny mają parami równe pola, to objętości tych brył są równe.

Wtedy bowiem  $\varphi(x)$  jest tą samą funkcją dla obu brył, a więc na objętość obu brył otrzymujemy tę samą wartość na podstawie wzoru (106).

### Przykłady.

1) Dla stwierdzenia, czy przy pomocy nowej definicji objętości otrzymamy na objętość znanych brył te same wartości, które znamy z matematyki elementarnej,

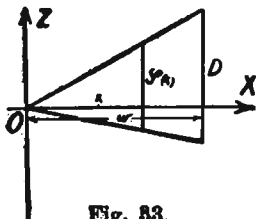


Fig. 33.

obliczymy objętość stożka o dowolnej podstawie (niekoniecznie kołowej), mającej pole  $D$ , a o wysokości  $w$ . Umieścmy ten stożek tak, aby płaszczyzna podstawy była prostopadła do osi  $x$  a wierzchołek leżał w początku układu (fig. 33). Jeżeli  $\varphi(x)$  oznacza pole przekroju w odległości  $x$

od wierzchołka, to wiadomo, że:

$$\varphi(x) : D = x^2 : w^2$$

a więc:

$$\varphi(x) = \frac{Dx^3}{w^3}$$

Z wzoru (106) otrzymujemy:

$$V = \int_0^w D \frac{x^3}{w^3} dx = \frac{Dx^3}{3w^3} \Big|_0^w = \frac{Dw^3}{3w^3} = D \cdot \frac{w}{3}$$

zgodnie z wzorem, znanym z geometrii elementarnej.

2) Obliczyć objętość elipsoidy trójosiowej, której powierzchnia ma równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Przekrój płaszczyzną prostopadłą do osi  $x$  w odstępnie  $x$  od płaszczyzny  $YZ$  jest elipsą o równaniu:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

czyli:

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1$$

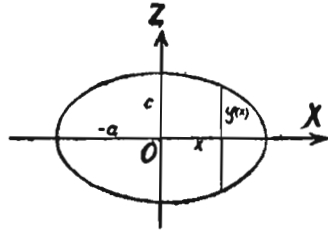


Fig. 34.

Pole tej elipsy jest równe  $AB\pi$ , gdzie  $A$  i  $B$  oznaczają połowki osi tej elipsy. Zatem:

$$\varphi(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \pi = bc\pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Wobec tego objętość całej elipsoidy jest równa:

$$V = \int_{-a}^{+a} bc\pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = bc\pi \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{4}{3} abc\pi$$

Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób objętość, ograniczoną paraboloidą eliptyczną (tom I, str. 43) o równaniu:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = x$$

i płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej w odstępnie  $x$ . (Wynik:  $V = \pi ab x^3$ ).

3) Bardzo prosty wzór otrzymuje się na objętość wszystkich brył, których pole  $\varphi(x)$  przekroju jest funkcją całkowitą wymierną, nie przekraczającą 3-go stopnia. Niechaj  $D_1, D_2, D_3$  oznaczają pola przekrojów tej bryły w odstępach  $x_1, x_2, x_3$  od płaszczyzny bocznej, przyczem  $x_3$

jest średnią arytmetyczną odciętych  $x_1$  i  $x_3$ , t. j.  $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ . Wysokością tej bryły, należąca do podstawy  $D_1$  lub  $D_3$ , jest  $w = x_3 - x_1$ .

Według założenia jest:

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = y$$

przyczem niektóre współczynniki mogą być zerami. Objętość takiej bryły wyrażamy wzorem:

$$V = \int_{x_1}^{x_3} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx$$

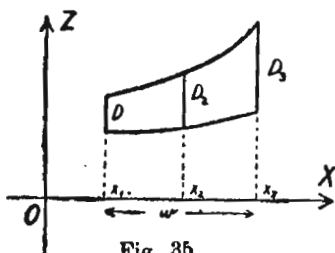


Fig. 35.

Widzieliśmy (w § 220, przykład 6, wzór (65)), że ta całka ma wartość:

$$V = \frac{x_3 - x_1}{6} (\varphi_1 + 4\varphi_2 + \varphi_3)$$

czyli:

(108)

$$V = \frac{w}{6} (D_1 + 4D_2 + D_3)$$

Ten wzór, zwany wzorem Simpsona lub Oughtreda, jest ściśły dla wielu brył graniastych i okrągłych. Tak np. dla stożka (por. fig. 33)

$D_1 = 0$ ,  $D_2 : D = \left(\frac{x}{2}\right)^2 : x^2 = \frac{1}{4}$ , a więc  $D_2 = \frac{1}{4}D$ ,  $D_3 = D$ , zatem:

$$V = \frac{w}{6} (0 + 4 \cdot \frac{1}{4}D + D) = D \cdot \frac{w}{3}$$

zgodnie ze znanym wzorem.

Dla elipsydy:  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = bc\pi$ ,  $D_3 = 0$ , zatem:

$$V = \frac{2a}{6} (0 + 4bc\pi + 0) = \frac{2}{3} abc\pi$$

zgodnie z wzorem, otrzymanym w przykładzie 2). Niechaj czytelnik zastosuje ten wzór do obliczenia objętości beczki obrotowej, powstałej przez obrót łuku elipsy o równaniu  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  około osi odciętych, biorąc łuk od  $x_1 = -\frac{w}{2}$  do  $x_2 = +\frac{w}{2}$ . (Wynik:  $V = \frac{\pi w}{3} \cdot \frac{2S^2 + s^2}{3}$ , gdzie  $s$  oznacza średnicę dna beczki a  $S$  średnicę przekroju średniego). Sprawdzić wynik przy pomocy wzoru (107)!

Wzoru (108) używa się do przybliżonego obliczania objętości także wtedy, gdy  $\varphi(x)$  nie jest wielomianem stopnia nie przekraczającego 3. Przybliżenie takie jest dogodnie wtedy, gdy w rozwinięciu funkcji  $\varphi(x)$

na wzór Maclaurina, reszta, następująca po wyrazie trzeciego stopnia, może być w rachunkach pominięta.

4) Obliczyć objętość beczki o łuku parabolicznym. Powstaje ona przez obrót powierzchni, zamkniętej łukiem paraboli o równaniu:

$$y = ax^2 + b$$

od  $x_1 = -\frac{w}{2}$  do  $x_2 = +\frac{w}{2}$ , osią  $x$  i rzędnymi w punktach końcowych tego łuku (fig. 36), około osi  $x$ -ów.

Dla  $x = 0$  jest  $y = b = R$ ,

$$n \quad x = \frac{w}{2} \quad n \quad y = a \frac{w^2}{4} + R = r$$

a stąd: 
$$a = \frac{4(r - R)}{w^2}$$

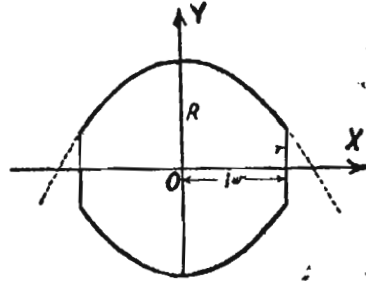


Fig. 36.

Stosując wzór (107), otrzymujemy:

$$V = \pi \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (ax^2 + b)^2 dx = \pi \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (a^2 x^4 + 2abx^2 + b^2) dx$$

Funkcja podcałkowa jest wielomianem 4-go stopnia, a zatem do obliczenia tej całki nie można zastosować wzoru Simpsona.

Całkowanie prowadzi tu do wyniku:

$$V = \pi \left( \frac{2a^2 w^5}{5 \cdot 32} + \frac{4abw^3}{3 \cdot 8} + \frac{2b^2 w}{2} \right)$$

Podstawiamy wartości za  $a$  i  $b$  i otrzymujemy po wykonaniu prostych rachunków:

$$V = \frac{\pi w}{15} (8R^3 + 4Rr + 3r^2) = \frac{\pi w}{15} (2S^2 + Ss + \frac{2}{3}s^2)$$

gdzie  $S$  oznacza średnicę środkowego przekroju beczki a  $s$  średnicę dna. Zamiast tego wzoru używa się dla beczek o łuku parabolicznym innego, prostszego wzoru, jednak tylko przybliżonego. Zastępuje się mianowicie objętość tej beczki objętością walca o tej samej wysokości  $w$ , przyczem za promień dna bierze się średnią wartość  $r'$  promienia, obliczoną zapomocą całki (według wzoru (49) na str. 67):

$$r' = \frac{1}{w} \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} (ax^2 + b) dx = \frac{1}{w} \left( \frac{a w^3}{3 \cdot 4} + bw \right) = \frac{aw^2}{12} + b = \frac{4(r - R)w^2}{12w^2} + R$$

$$r' = \frac{r + 2R}{3}$$

Zatem:

$$V \approx r^2 \pi w = \left( \frac{r + 2R}{3} \right)^2 \pi w = \frac{\pi w}{4} \left( \frac{s + 2S}{3} \right)^2$$

Znacznie trudniejszy wzór otrzymuje się na objętość beczki o łuku kołowym, jeżeli środek tego koła nie leży na osi beczki, lecz np. w odległości  $q$  pod osią. Wtedy równanie tego koła ma postać  $w^2 + (y + q)^2 = (q + R)^2$ .

Zatem:

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{(q + R)^2 - w^2} - q)^2 dw$$

przyczem  $R$  oznacza promień środkowego przekroju beczki. Pozostawiamy czytelnikowi obliczenie tej całki; w wyniku wystąpi funkcja arcus sinus i drugi pierwiastek z funkcji 2-go stopnia.

*Uwaga.* Obliczaniem objętości beczek zajmowano się wiele ze względów praktycznych (cłowych) jeszcze przed wykryciem rachunku całkowego. Szczególnie interesującym dziełem z tego zakresu jest praca Keplera (1571–1630), p. t. *Nova stereometria doliorum vinariorum*, zawierająca wiele myśli i metod, pokrewnych z rozważaniami rachunku całkowego. Różne przepisy, dotyczące przybliżonego obliczania beczek, znaleźć można w książce Claudel'a, p. t. *Introduction à la science de l'ingénieur*. T. I, str. 587 (wyd. 8, Paryż 1913).

### § 232. Pole powierzchni obrotowej.

Przy pomocy całki można obliczyć pole powierzchni obrotowej. Obierzmy oś obrotu za oś odciętych, a równanie linii obracającej się niechaj ma postać  $y = f(x)$  w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Załóżmy, że w tym przedziale cały łuk  $\widehat{AB}$  leży po jednej stronie osi obrotu, a więc np. że  $f(x) \geq 0$ .

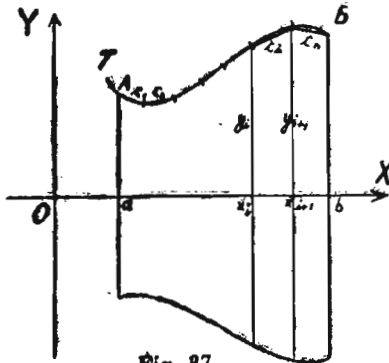


Fig. 87.

Gdyby było inaczej, trzeba by rozłożyć łuk na odpowiednie części. Za początek łuku na linii  $y = f(x)$  uważajmy dowolny punkt  $T$  i oznaczmy długość łuku  $\widehat{TA}$  literą  $s_a$  a łuku  $\widehat{TB}$  literą  $s_b$ . Całkowita długość łuku  $\widehat{AB}$  ma zatem wartość:

$$s = s_b - s_a$$

Podzielmy ten łuk na dowolną ilość części (niekoniecznie równych), np. na  $n$  części i zastąpmy każdy łuk częściowy cięciwą. Weźmy pod uwagę powierzchnię obrotową, powstałą przez obrót linii łamanej, złożonej z tych cięciw  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ . Składa się ona z pobocznic stożków ściętych a ewen-



tualnie także z pobocznic walców. Potrafimy zatem obliczyć jej pole  $P_1$ , używając znanego z elementarnej geometrii wzoru  $2\rho\pi s$  na pobocznice stożka ściętego lub walca ( $\rho$  oznacza promień środkowego przekroju a  $s$  długość boku). Pobocznica stożka ściętego lub walca, zakreślonego obrotem cięciwy  $c_i$ , ma zatem pole  $2\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\pi c_i$ , a cała powierzchnia:

$$(a) \quad P_1 = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i$$

Utwórzmy cały ciąg podziałów łuku  $\widehat{AB}$  tak, aby ciąg, utworzony z długości największych łuków składowych z każdego podziału, dążył do zera. Otrzymamy w ten sposób ciąg  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_r, \dots$  pól powierzchni obrotowych, złożonych ze stożków ściętych lub walców. O ile istnieje granica tego ciągu  $\{P_r\}$ , niezależna od tego, jaki ciąg podziałów łuku  $\widehat{AB}$  obierzemy (byleby największe łuki składowe dążyły do zera), to tę granicę nazywamy *połem danej powierzchni obrotowej*.

Zamiast  $c_i$  możemy napisać we wzorze (a) wyrażenie  $s_{i+1} - s_i - (s_{i+1} - s_i - c_i)$ , przyczem  $s_i$  oznacza długość łuku, należącego do cięciwy  $c_i$ . Zatem:

$$P_1 = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta s_i - 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (\Delta s_i - c_i)$$

Nazwijmy literą  $L_1$  pierwszą część prawej strony, a  $K_1$  drugą. Okazuje się, że ciąg, złożony z  $K_1, K_2, K_3, \dots$ , dąży do zera.

*Dowód.* Niechaj  $M$  oznacza największą rzędną  $y$  z całego przedziału  $\langle a, b \rangle$ . Ponieważ  $K_1$  jest liczbą dodatnią (bo  $\Delta s_i > c_i$ ), przeto:

$$0 < K_1 < 2\pi \frac{M + M}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta s_i - c_i) = 2\pi M \left( s - \sum_{i=1}^n c_i \right)$$

Gdy rozdrabniamy podział łuku  $\widehat{AB}$  tak, że wszystkie  $\Delta s_i$  a zatem i  $c_i$  dążą do zera,

to sumy  $\sum_{i=1}^n c_i$  dążą do  $s$  na podstawie definicji długości łuku, a więc całe wyrażenie

w nawiasie dąży do zera. Ciąg  $K_1, K_2, K_3, \dots$ , odpowiadający tym kolejnym podziałom, jest stale zawarty między dwoma ciągami, dążącymi do zera, a więc dąży także do zera.

Wobec tego ciąg  $P_1, P_2, P_3, \dots$  dąży do tej samej granicy, co ciąg  $L_1, L_2, L_3, \dots$ , przyczem:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \Delta s_i$$

Uważamy  $y$  za funkcję zmiennej  $s$ . Możemy to czynić, ponieważ  $s$  jest funkcją monotoniczną i ciągłą zmiennej  $x$ , a więc odwrotnie  $x$  jest jakąś funkcją  $\varphi(s)$  zmiennej  $s$ , a wobec tego  $y = f(x) = f(\varphi(s)) = F(s)$ . Wartość  $\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$ , pośrednią między  $y_i$  a  $y_{i+1}$ , przyjmuje funkcja ta na jakimś miejscu  $\sigma_i$ , pośrednim między  $s_i$  a  $s_{i+1}$ . A więc:

$$L_1 = 2\pi \sum_{i=1}^n y(\sigma_i) \Delta s_i$$

Gdy wszystkie  $\Delta s_i$  dążą do zera, to ciąg takich sum  $L_1, L_2, L_3, \dots$  dąży do całki oznaczonej  $\int_a^b 2\pi y(s) ds$ . Ponieważ do tej samej granicy dąży ciąg

$P_1, P_2, P_3, \dots$ , przeto otrzymujemy następujący wzór na pole  $P$  powierzchni obrotowej:

(109)

$$P = 2\pi \int_a^b y(s) ds$$

Wprowadźmy zamiast zmiennej  $s$  spowrotem zmienną  $x$ , to  $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ , a więc:

(110)

$$P = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Wzór ten można z łatwością dostosować także do parametrowego lub biegunowego przedstawienia danej linii.

*Przykład.*

Obliczyć powierzchnię elipsoidy obrotowej *splaszczonej*, t. j. powstałej przez obrót elipsy około osi małej (taką postać ma w przybliżeniu powierzchnia ziemi).

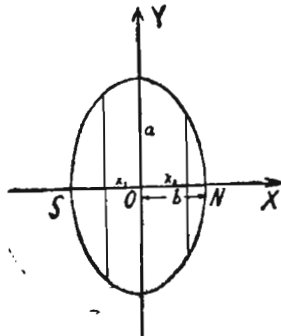


Fig. 38.

Biorąc oś  $x$  za oś obrotu, należy przyjąć równanie elipsy obracającej się w postaci:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Stąd otrzymujemy następujące równanie górnej połówki elipsy:

$$y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$$

Stąd:

$$y' = \frac{ax}{b \sqrt{b^2 - x^2}}$$

Obliczmy pole tej elipsoidy, zawarte między kołami, należącymi do odciętych  $x_1$  i  $x_2$ .

$$P = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2 x^2}{b^2(b^2 - x^2)}} dx$$

$$P = \frac{2\pi a}{b} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{b^2 - x^2 + \frac{a^2 x^2}{b^2}} dx = \frac{2\pi a}{b} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} x^2} dx$$

Oznaczając  $a^2 - b^2 = e^2$ , otrzymujemy:

$$P = \frac{2\pi a}{b} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{b^2 + \frac{e^2}{b^2} x^2} dx = \frac{2\pi a e}{b^2} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{b^4}{e^2} + x^2} dx$$

Wartość tej całki znamy (str. 48, wzór (35)), a mianowicie:

$$P = \frac{2\pi a e}{b^2} \left[ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \frac{b^4}{e^2}} + \frac{b^4}{2e^2} \log \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{b^4}{e^2}} \right) \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Dla całej elipsoidy należy obrać granice:  $x_1 = -b$ ,  $x_2 = +b$ ; otrzymamy:

$$P = \frac{2\pi a e}{b^2} \left[ b \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}} + \frac{b^4}{2e^2} \log \frac{b + \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}}}{-b + \sqrt{b^2 + \frac{b^4}{e^2}}} \right]$$

a stąd po łatwych rachunkach.

$$P = 2\pi a \left( a + \frac{b^2}{e} \log \sqrt{\frac{a+e}{a-e}} \right)$$

W podobny sposób otrzymamy dla elipsoidy obrotowej *wydłużonej*, t j. powstałej przez obrót koło osi wielkiej, wzór:

$$P = 2\pi b \left( b + \frac{a^3}{e} \arcsin \frac{e}{a} \right)$$

Niechaj czytelnik okaże, że dla  $a - b$  dążącego do zera otrzymuje się z obydwu wzorów wzór na powierzchnię kuli (wystąpią tu wyrażenia nieoznaczone!).

Dla ćwiczenia poleca się czytelnikowi wykazać, że pole powierzchni obrotowej, zakreślonej przez obrót linii o równaniu:

$$9y^2 - x(3-x)^2 = 0 \quad \text{od } x=0 \text{ do } x=3$$

koło osi  $x$ -ów, ma wartość  $P=3\pi$ . Prostymi wzorami wyrażają się także pola powierzchni obrotowych, zakreślonych przez obrót około osi odciętych linii łańcuchowej, kardioidy, lemniskaty, przez obrót spiralnej Archimedes'a około osi biegunowej.

### § 233. Moment statyczny łuku.

Weźmy pod uwagę zbiór  $(A)$ , złożony z  $n$  dowolnych liczb:

$$m_1, m_2, \dots, m_n$$

i przyporządkujmy im wartości:

$$r_1, r_2, \dots, r_n$$

jakiejsz zmiennej  $r$ .

Sumę:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n$$

nazywamy *momentem pierwszego stopnia* zbioru  $(A)$ , sumę:

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$$

*momentem drugiego stopnia*, a ogólnie:

$$m_1 r_1^k + m_2 r_2^k + \dots + m_n r_n^k$$

*momentem  $k$ -tego stopnia* zbioru  $(A)$ .

Momenty mają bardzo rozległe zastosowania w rozmaitych naukach, np. w statystyce a szczególnie w mechanice, skąd się nawet nazwa wywodzi (*momentum* jest skróceniem słowa *movimentum*, co oznacza czynnik, wpływający na ruch). W mechanice używa się tylko momentów 1-go i 2-go stopnia. I tak, jeżeli liczby  $m_1, m_2, \dots, m_n$  oznaczają masy punktów materialnych a  $r_1, r_2, \dots, r_n$  ich odległości od jakiejś osi (linji prostej) z uwzględnieniem znaków, to moment pierwszego stopnia nazywamy *momentem statycznym* tego zbioru punktów materialnych ze względu na tę oś, a moment drugiego stopnia *momentem bezwładności* tego zbioru punktów ze względu na tę oś. W podobny sposób określamy moment statyczny i moment bezwładności ze względu na *punkt* i ze względu na *płaszczyznę*, obierając za  $r_1, r_2, \dots, r_n$  odległości punktów materialnych od stałe obranej punktu lub od stałe obranej płaszczyzny.

Definicje te rozszerzymy na przypadki ogólniejsze, a mianowicie, gdy masy są rozmieszczone w sposób ciągły linjowo, powierzchniowo lub objętościowo.

Zajmiemy się najpierw masami, rozmieszczonymi linjowo, wzdłuż jakichś łuków. Rozmieszczenie takie jest w przybliżeniu zrealizowane w drutach, w nitkach, w linach. Weźmy pod uwagę łuk linji płaskiej o równaniu  $y = f(x)$  lub w przedstawieniu parametrowem  $x = \varphi(s)$ ,  $y = \psi(s)$ , przyczem dla dalszych rozważań najdogodniej jest obrać za parametr długość łuku  $s$ , liczoną od jakiegoś obranego punktu tej linji. Weźmy pod uwagę dla zmiennej  $x$  przedział  $\langle a, b \rangle$  lub odpowiadający mu przedział  $\langle s_a, s_b \rangle$  dla zmiennej  $s$ .

Niechaj funkcja  $\rho(s)$  oznacza gęstość liniową masy tego łuku. Załóżmy, że  $\rho(s)$  jest funkcją ciągłą. Gęstość liniową w każdym punkcie określa się jako granicę, do jakiej dąży stosunek masy łuku  $\Delta s$ , zawierającego ten punkt, do długości tego łuku, gdy  $\Delta s$  dąży do zera. Najpospolitszym w praktyce jest przypadek, gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j. gdy gęstość  $\rho$  jest liczbą stałą dla każdego punktu.

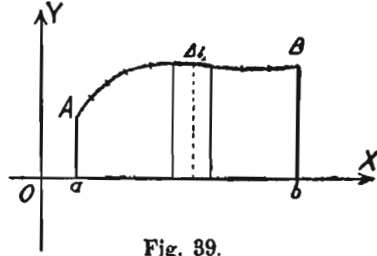


Fig. 39.

Podzielmy dany łuk  $\widehat{AB}$  na dowolną ilość części o długościach  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ .

Masa łuku o długości  $\Delta s_i$  ma wartość  $m_i = \rho(\sigma_i)\Delta s_i$ , gdzie  $\rho(\sigma_i)$  oznacza gęstość w jakimś pośrednim, odpowiednio dobranym punkcie tej cząstki łuku.

*Uwaga.* Tę średnią wartość gęstości można otrzymać przy pomocy całki:

$$\rho(\sigma_i) = \frac{\int_{s_i}^{s_{i+1}} \rho(s) ds}{\Delta s_i}$$

Masę tę mnożymy przez odległość  $y$  dowolnego punktu łuku  $\Delta s_i$  od osi odciętych. Możemy obrać ten punkt łuku, który należy do wartości  $\sigma_i$ , a więc brać zawsze  $y(\sigma_i)$ . Otrzymamy zatem  $\rho(\sigma_i)y(\sigma_i)\Delta s_i$ . Tworzymy sumę tych elementów:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \rho(\sigma_i)y(\sigma_i)\Delta s_i$$

i budujemy ciąg  $S_1, S_2, S_3, \dots$  takich sum, dzieląc łuk  $\widehat{AB}$  w rozmaite sposoby na części ale tak, aby największe łuki składowe dążyły do zera. O ile istnieje granica ciągu tych sum, niezależna od sposobu podziału łuku, to nazywamy ją *momentem statycznym łuku  $\widehat{AB}$  względem osi  $x$ -ów*. Ta granica jest równa całce oznaczonej:

$$(111) \quad M_x = \int_a^b \rho(s)y ds$$

Wzór ten na moment statyczny łuku upraszcza się, gdy gęstość jest stała, wtedy bowiem można wyjąć  $\rho$  przed całkę i otrzymujemy:

$$(111a) \quad M_x = \rho \int_a^b y ds$$

Dla  $\rho = 1$  otrzymuje się wzór:

$$(112) \quad M_x = \int_{s_a}^{s_b} y \, ds$$

Podobnie na moment statyczny łuku względem osi  $y$ -ów otrzymuje się (przy  $\rho = 1$ ) wzór:

$$(112a) \quad M_y = \int_{s_a}^{s_b} x \, ds$$

Wprowadzając za  $s$  pierwotną zmienną  $x$ , otrzymujemy:

$$(113) \quad M_x = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx, \quad M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

Dla współrzędnych biegunowych wzory te przyjmują (na podstawie wzoru (89) na str. 136) postać:

$$(114) \quad M_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi, \quad M_y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} \, d\varphi$$

O ile  $\rho \neq 1$ , to należy wprowadzić pod całkę jeszcze czynnik  $\rho$ .

*Przykład.*

Obliczyć moment statyczny pręta z materiału o gęstości stałej  $\rho$ , wygiętego w półkole o promieniu  $c$ , względem średnicy tego półkola.

Obieramy prostą, na której leży ta średnica, za oś  $x$ -ów. Najdogodniej jest tu użyć biegunowej formy równania koła, a mianowicie  $r = c$ . Z pierwszego z wzorów (114) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_0^\pi c \sin \varphi \sqrt{c^2 + 0^2} \, d\varphi = \rho c^2 \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = -\rho c^2 \cos \varphi \Big|_0^\pi = \\ &= \rho(c^2 - (-c^2)) = 2\rho c^2 \end{aligned}$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że moment tego półkola ze względu na oś  $y$ -ów ma wartość 0, co zresztą wynika także od razu z tego, że masy są rozmieszczone symetrycznie względem tej osi (a więc całka od 0 do  $\frac{\pi}{2}$  równa się przeciwnej wartości całki od  $\frac{\pi}{2}$  do  $\pi$ ).

Poleca się czytelnikowi dla ćwiczenia okazać, że moment statyczny

linji łańcuchowej o równaniu  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ , dla stałej gęstości  $\rho = 1$ , względem osi odejętych, wyraża się wzorem:

$$M_x = \frac{a}{4} \left( \frac{x}{a} e^{\frac{x}{a}} + 2x - \frac{x}{a} e^{-\frac{x}{a}} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że dla krzywej przestrzennej moment statyczny względem osi np.  $x$ -ów wyraża się wzorem:

$$M_x = \int_{s_a}^{s_b} \rho \sqrt{y^2 + z^2} ds$$

i analogicznie dla innych osi.

W podobny sposób można określić moment statyczny łuku względem punktu i względem płaszczyzny. Tak np. moment łuku względem początku układu wyraża się wzorem:

$$M_o = \int_{s_a}^{s_b} \rho \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ds$$

a względem płaszczyzny  $XY$  wzorem:

$$M_{xy} = \int_{s_a}^{s_b} \rho z ds$$

### § 234. Moment statyczny powierzchni płaskiej.

Weźmy pod uwagę jakąś powierzchnię płaską, obłożoną masą powierzchniową, t. j. posiadającą w każdym punkcie jakąś gęstość powierzchniową  $\rho(x, y)$ . Takie rozmieszczenie masy mamy zrealizowane w przybliżeniu w blachach płaskich a ściśle w ładunkach (czyli masach) elektrycznych. Zajmiemy się tu najprostszym a najważniejszym w praktyce przypadkiem, gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j. gdy gęstość  $\rho$  jest liczbą stałą. Określmy najpierw moment statyczny prostokąta o podstawie  $a$  a wysokości  $w$  względem jego podstawy (fig. 40). Obierzmy za oś odejętych prostą, na której leży podstawa prostokąta. Podzielmy prostokąt prostemi równoległymi do podstawy na szereg pasków. Masa paska o szerokości  $\Delta y_i$ , ma wartość  $\rho \cdot a \cdot \Delta y_i$ . Mnożymy ją przez odległość dowolnego punktu tego paska od osi odejętych, np. przez  $\bar{y}_i$  i tworzymy sumę tych iloczynów:

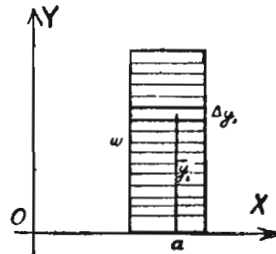


Fig. 40.

$$M_1 = \rho a \Delta y_1 \cdot \bar{y}_1 + \rho a \Delta y_2 \cdot \bar{y}_2 + \dots + \rho a \Delta y_n \cdot \bar{y}_n$$

Dzielimy następnie ten prostokąt w rozmaite inne sposoby na takie paski i tworzymy cały ciąg takich podziałów tak, aby szerokości wszystkich pasków dążyły do zera. Otrzymujemy w ten sposób ciąg sum:

$$M_1, M_2, M_3, \dots$$

Granice ciągu tych sum nazywamy momentem statycznym prostokąta względem osi  $x$ -ów. Ta granica istnieje i równa się:

$$(115) \quad M = \int_a^b \rho a y dy = \frac{1}{2} \rho a w^2$$

Jeżeli  $P$  oznacza pole tego prostokąta, równe  $a \cdot w$ , to wzór przyjmuje postać:

(115a)

$$M = \rho P \cdot \frac{w}{2}$$

*Moment statyczny prostokąta względem jego podstawy jest równy masie tego prostokąta, pomnożonej przez połowę wysokości.*

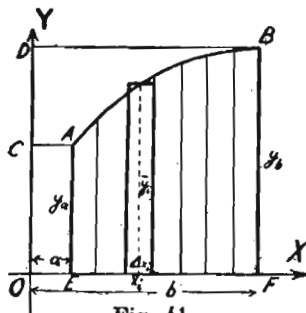


Fig. 41.

Z tego wyniku skorzystamy przy wyznaczaniu momentu powierzchni płaskiej, ograniczonej dowolną linią. I tak weźmy pod uwagę powierzchnię, zamkniętą łukiem linii o równaniu  $y = f(x)$ , rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych. Załóżmy, że  $f(x) > 0$ . Podzielmy to pole zapomocą prostych równoległych do osi  $y$ -ów na paski. Każdy taki pasek zastąpmy prostokątem o tej samej podstawie  $a$  o wysokości równej rzędnej  $\bar{y}$ , należącej do dowolnego punktu jego podstawy (fig. 41). Moment statyczny każdego takiego prostokąta obliczamy przy pomocy wzoru (115), a więc np. dla prostokąta o podstawie  $\Delta x_i$  otrzymujemy:  $\frac{1}{2} \rho \Delta x_i \cdot \bar{y}_i^2$ . Tworzymy sumę tych momentów:

$$M_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho \Delta x_i \bar{y}_i^2$$

Następnie tworzymy cały ciąg takich podziałów danego pola na paski ale tak, aby szerokości tych pasków dążyły do zera i otrzymujemy odpowiedni ciąg  $M_1, M_2, M_3, \dots$

Granice tego ciągu nazywamy momentem statycznym danej powierzchni względem osi odciętych. Wartością tej granicy jest całka oznaczona:



(116)

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b y^2 dx$$

Chcąc otrzymać moment tego samego pola względem osi rzędnych należy masę  $\rho \Delta x_i \bar{y}_i$  każdego prostokąta pomnożyć przez odległość dowolnego punktu tego prostokąta od osi  $y$ -ów, np. przez odcinek  $\bar{x}_i$ , należącą do rzędnej  $\bar{y}_i$ . Otrzymamy w ten sposób  $\rho \Delta x_i \bar{x}_i \bar{y}_i$ . Tworzymy ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^n \rho \Delta x_i \bar{x}_i \bar{y}_i$$

a granicę tego ciągu nazywamy *momentem statycznym danej powierzchni względem osi  $y$ -ów*. Ta granica ma wartość:

(117)

$$M_y = \rho \int_a^b xy dx$$

*Uwaga.* Do tego wzoru można dojść także bez rozważań granicznych, odejmując od momentu prostokąta *OFBD* moment prostokąta *OEAC* i moment pola *CABD*,

obliczony zapomocą wzoru  $\frac{\rho}{2} \int_a^b x^2 dy$ . Wzór ten otrzymuje się z wzoru (116), zamieniając z sobą role zmiennych  $x$  i  $y$ . Trzeba następnie wprowadzić zmienną  $x$  zamiast  $y$  kładąc  $dy = y' dx$  i zastosować całkowanie „per partes”. Momenty statyczne powierzchni płaskiej, ograniczonej z wszystkich stron *dowolnymi* liniami, omówimy później, po wprowadzeniu całek podwójnych.

#### Przykłady.

1) Obliczyć moment statyczny półkola o promieniu  $r$ , obłożonego masą o stałej gęstości  $\rho$ , względem jego średnicy. Obierzmy tę średnicę na osi  $x$ -ów (fig. 42). Z równania koła otrzymujemy  $y^2 = r^2 - x^2$ , a więc na podstawie wzoru (116) otrzymamy:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_{-r}^{+r} \frac{r^2 - x^2}{2} dx = \rho \left( \frac{r^2}{2} x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-r}^{+r} \\ &= \rho \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3} r^3 \rho}} \end{aligned}$$

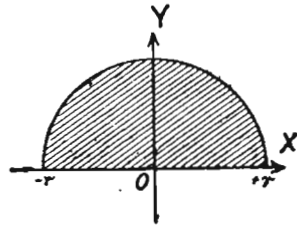


Fig 42.

2) Dla dodatniej połówki elipsy o równaniu  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a gęstości  $\rho = 1$  otrzymujemy następujący moment statyczny względem

osi  $x$ -ów:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} \frac{b^3}{a^3} (a^2 - x^2) dx = \frac{b^3}{2a^3} (a^2x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{2}{3} ab^3$$

Dla połówki elipsy, należącej do odciętych dodatnich, otrzymujemy moment względem osi  $y$ -ów z wzoru (117):

$$\bar{M}_y = 2 \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{2b}{3a} (a^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{2b}{3a} (a^2)^{3/2} = \frac{2}{3} ba^3$$

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, używając wzoru:

$$\bar{M}_y = \frac{1}{2} \int_{-b}^{+b} x^2 dy$$

i wstawiając  $x^2 = a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ .

### § 235. Środek ciężkości czyli środek masy.

W bezpośrednim związku z momentami statycznymi jest inne pojęcie, bardzo ważne w fizyce i w technice, a mianowicie *środek ciężkości* czyli *środek masy*.

Środkiem masy lub środkiem ciężkości układu dwóch punktów materialnych  $A_1$  i  $A_2$  o masach  $m_1$  i  $m_2$  nazywamy punkt, dzielący ten odcinek w stosunku odwrotnym do mas (punkt ten leży zatem bliżej masy większej). A więc  $A_1S : SA_2 = m_2 : m_1$  (fig. 43).

Utwórzmy rzut odcinka  $A_1A_2$  na oś odciętych. Otrzymujemy:

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = m_2 : m_1$$

a stąd:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Jest to średnia arytmetyczna *ważona* liczb  $x_1$  i  $x_2$  z wagami  $m_1$  i  $m_2$ .

Podobnie:

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

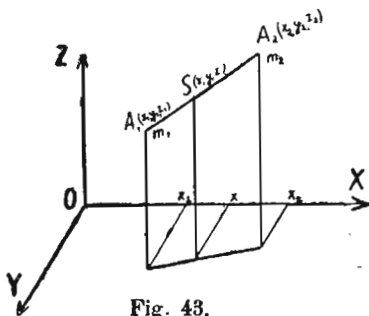


Fig. 43.

Dobierzmy trzeci punkt  $A_3$  o masie  $m_3$ . Chcąc znaleźć środek ciężkości układu tych trzech punktów, umieszczamy w punkcie  $S$  masę  $m_1 + m_2$  i znajdujemy według poprzednich wzorów środek ciężkości dwóch mas: jednej  $m_1 + m_2$ , umieszczonej w  $S$ , a drugiej  $m_3$ , umieszczonej w  $A_3$ .

Dobierając kolejno coraz więcej punktów materialnych o masach  $m_1, m_2, \dots, m_n$  i o spólrzędnych  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ , otrzymujemy na spólrzędne środka ciężkości następujące wzory:

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Są to średnie arytmetyczne *ważone* spólrzędnych danych punktów, przy czym wagami są masy.

Widzimy, że sumy, znajdujące się w licznikach, są momentami statycznymi systemu punktów materialnych, a mianowniki całkowitą masą tego systemu. Uwaga ta prowadzi nas do rozszerzenia definicji środka ciężkości na masy, rozmieszczone w sposób ciągły.

Zajmiemy się tu tylko masami, rozmieszczonymi na płaszczyźnie linjowo (t. j. wzdłuż łuków) lub powierzchniowo. Środkiem ciężkości takich mas nazywamy punkt o spólrzędnych:

$$(118) \quad \xi = \frac{M_x}{M}, \quad \eta = \frac{M_y}{M}$$

przyczem  $M_x, M_y$  oznaczają momenty statyczne względem osi spólrzędnych a  $M$  całkowitą masę. Pisząc te wzory w postaci:

$$M \cdot \xi = M_x, \quad M \cdot \eta = M_y$$

możemy określić środek ciężkości w następujący sposób: *jest to punkt, w którym umieszczona całkowita masa  $M$  miałaby taki sam moment statyczny względem osi spólrzędnych, jaki ma ta masa, rozmieszczona wzdłuż danego łuku lub danego pola.*

Środek ciężkości masy, rozmieszczonej linjowo wzdłuż łuku, ma zatem spólrzędne:

$$\xi = \frac{1}{M} \int_{s_a}^{s_b} \rho x ds, \quad \eta = \frac{1}{M} \int_{s_a}^{s_b} \rho y ds$$

przyczem  $M$  oznacza całkowitą masę danego łuku. Jeżeli gęstość  $\rho$  jest stała, a całkowita długość łuku wynosi  $S$ , to:

$$(119) \quad \xi = \frac{1}{S} \int_{s_a}^{s_b} x ds, \quad \eta = \frac{1}{S} \int_{s_a}^{s_b} y ds$$

Środek masy, rozmieszczonej powierzchniowo, jednorodnie, na powierzchni płaskiej o polu  $f$ , zamkniętej łukiem linii o równaniu  $y = f(x)$  od  $x = a$  do  $x = b$ , rzędnymi w punktach końcowych i osią odciętych, ma współrzędne:

$$(120) \quad \xi = \frac{1}{f} \int_a^b x y \, dx, \quad \eta = \frac{1}{2f} \int_a^b y^2 \, dx$$

Środek ciężkości, uważany za punkt, w którym jest skupiona masa  $M$ , ma ze względu na *każdą* prostą (a więc nie tylko ze względu na osie współrzędnych) ten sam moment statyczny, co masa  $M$ , rozmieszczona dowolnie linjowo lub powierzchniowo.

Okażemy to tylko dla masy, rozmieszczonej linjowo. (Dla mas, rozmieszczonych powierzchniowo, trzeba by najpierw określić moment pola, zamkniętego dowolną linią, względem dowolnej osi a do tego nadają się lepiej całki podwójne).

Niechaj punkt  $C$  (fig. 44) będzie środkiem ciężkości łuku  $\widehat{AB}$  o całkowitej masie  $M$ . Jeżeli  $(\xi, \eta)$  są współrzędnymi tego punktu, to

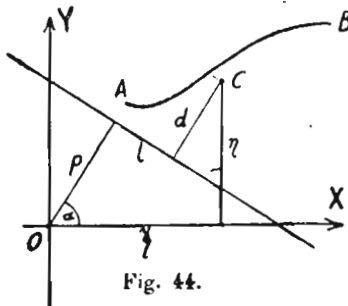


Fig. 44.

$$M \cdot \xi = M \quad M \cdot \eta = M_x$$

Obliczmy moment punktu materialnego  $C$  o masie  $M$  względem dowolnej prostej  $l$ , o równaniu (w postaci normalnej):

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha - p = 0$$

a z drugiej strony moment całego łuku  $\widehat{AB}$  względem tej prostej.

Odległość punktu  $C$  od prostej  $l$  wyraża się wzorem:

$$d = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p$$

a więc moment masy  $M$ , umieszczonej w tym punkcie, względem prostej  $l$  ma wartość:

$$M_l(C) = (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p) \cdot M = M\xi \cos \alpha + M\eta \sin \alpha - Mp$$

czyli:

$$M_l(C) = \int_a^b \rho x \, ds \cdot \cos \alpha + \int_a^b \rho y \, ds \cdot \sin \alpha - pM$$

Natomiast moment łuku  $\widehat{AB}$  względem osi  $l$  ma wartość:

$$M_l(\widehat{AB}) = \int_a^b \rho \bar{y} \, ds$$

przeczem  $\bar{y}$  oznacza odległość punktu bieżącego  $(x, y)$  tego łuku od osi  $l$ . Z wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$\bar{y} = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$$

a więc:

$$M_x(\widehat{AB}) = \int_{s_a}^{s_b} \rho(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) ds = \int_{s_a}^{s_b} \rho x ds \cdot \cos \alpha + \\ + \int_{s_a}^{s_b} \rho y ds \cdot \sin \alpha - p \int_{s_a}^{s_b} \rho ds$$

Ponieważ  $\int_{s_a}^{s_b} \rho ds = M$ , przeto widzimy, że ten moment jest równy momentowi  $M_x(C)$  masy  $M$ , umieszczonej w środku ciężkości, c. b. d. o.

*Moment statyczny ze względu na oś, przechodzącą przez środek ciężkości, ma wartość zero.* Tak np. jeżeli środek ciężkości leży na osi  $x$ -ów, to  $\eta = 0$ , a więc z wzoru (118) wynika, że  $M_x = 0$ . Każdą zaś inną prostą (oś) możemy sprowadzić przez przesunięcie i obrót do nakrycia z osią  $x$ -ów.

#### Przykłady.

1) Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości łuku, tworzącego półkole o promieniu  $c$ , jeżeli masa jest rozmieszczona jednorodnie, t. j. gęstość  $\rho$  jest liczbą stałą

Obliczyliśmy moment względem osi odciętych (str. 158):

$$M_x = 2\rho c^3$$

Moment względem osi rzędnych ma, jak łatwo stwierdzić, wartość:

$$M_y = 0$$

co zresztą wynika od razu z symetrycznego rozmieszczenia mas względem osi rzędnych. Całkowita masa półkola wynosi  $c\pi \cdot \rho$ , a więc:

$$\xi = \frac{0}{\rho c \pi} = 0, \quad \eta = \frac{2\rho c^3}{\rho c \pi} = \frac{2c}{\pi}$$

Zatem środek  $C$  ma współrzędne:

$$C\left(0, \frac{2c}{\pi}\right)$$

2) Środek ciężkości masy, rozmieszczonej jednorodnie na polu półkola, obliczymy przy pomocy momentów (por. str. 161):

$$M_x = \frac{2}{3}\rho c^3, \quad M_y = 0$$

a mianowicie otrzymujemy:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{\frac{2}{3}\rho c^3}{\frac{1}{2}c^2\pi\rho} = \frac{4}{3}\frac{c}{\pi}$$

A więc:  $C\left(0, \frac{4c}{3\pi}\right)$ . Widzimy stąd, że środek ciężkości łuku leży w innym punkcie aniżeli środek ciężkości pola, ograniczonego tym łukiem i cięciwą, łączącą jego końce.

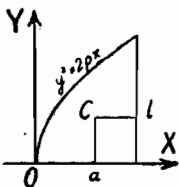


Fig. 45.

3) Obliczyć spólrzędne środka ciężkości pola, ograniczonego dodatnią gałęzią paraboli o równaniu  $y^2 = 2px$  (fig. 45), osią odciętych i rzędną w punkcie  $x = a$ . Gęstość  $\rho$  weźmy równą 1. Nazwijmy daną rzędną  $l$ , a więc  $l = \sqrt{2pa}$ . Z wzorów (116) i (117) otrzymujemy:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a 2px dx = \frac{px^2}{2} \Big|_0^a = \frac{1}{2} pa^2$$

$$M_y = \int_0^a xy dx = \int_0^a x\sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^a x^{3/2} dx = \frac{\sqrt{2p} x^{5/2}}{5/2} \Big|_0^a = \frac{2}{5} \sqrt{2p} x^{5/2} \Big|_0^a$$

$$\underline{M_y = \frac{2}{5} la^2}$$

Pole tego odcinka ma wartość:

$$f = \int_0^a y dx = \int_0^a \sqrt{2px} dx = \frac{\sqrt{2p} x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^a = \frac{2}{3} la$$

Wobec tego:

$$\xi = \frac{2}{5} la^2 : \frac{2}{3} la = \frac{3}{5} a$$

$$\eta = \frac{1}{2} pa^2 : \frac{2}{3} la = \frac{3}{4} \frac{pa}{l}$$

Ale  $2pa = l^2$ , więc  $\frac{pa}{l} = \frac{l}{2}$ , a stąd  $\eta = \frac{3}{8} l$ .

Zatem:  $C\left(\frac{3}{5}a, \frac{3}{8}l\right)$ .

### § 236. Reguły Guldina.

Środek ciężkości łuku i pola mają bardzo interesujące zastosowanie przy obliczaniu powierzchni i objętości brył obrotowych. Związek ten wykryjemy, zestawiając wzory (109) i (107) na pole powierzchni obrotowej i objętość bryły obrotowej:

$$P = 2\pi \int_a^b y ds, \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

z wzorami (119) i (120) na rzędną środka ciężkości łuku i środka ciężkości pola, a mianowicie z wzorami:

$$\eta = \frac{1}{S} \int_a^b y ds, \quad \eta = \frac{1}{2f} \int_a^b y^2 dx$$

Ponieważ  $\int_a^b y ds = \eta \cdot S$ , przeto:

(121)

$$P = 2\pi\eta \cdot S$$

Wzór ten, zwany *regułą Guldina na obliczanie pola powierzchni obrotowej*, wypowiada się w następującej postaci: *pole powierzchni obrotowej, zakreślonej przez obrót łuku o długości  $S$ , równa się długości drogi, zakreślonej przez środek ciężkości tego łuku około osi obrotu, pomnożonej przez długość obracającego się łuku*. Istotnie  $\eta$  jest odległością środka ciężkości od osi obrotu a  $2\pi\eta$  obwodem koła, zakreślonego przez środek ciężkości około osi obrotu.

Podobnie wnioskujemy z drugiej pary wypisanych wzorów, że

$$\int_a^b y^2 dx = 2\eta \cdot f$$

a więc:

(122)

$$V = 2\pi\eta \cdot f$$

Wzór ten, zwany *regułą Guldina na obliczanie objętości bryły obrotowej*, wypowiada się w następujący sposób: *objętość bryły obrotowej, zakreślonej przez obrót powierzchni płaskiej o polu  $f$ , równa się długości drogi, zakreślonej przez środek ciężkości tego pola około osi obrotu, pomnożonej przez pole obracającej się powierzchni*. Przy pomocy reguł Guldina można obliczyć pole powierzchni obrotowej i objętość bryły obrotowej, jeżeli znamy rzędną środka ciężkości, z drugiej zaś strony można wyznaczyć rzędną środka ciężkości, jeżeli znamy pole odpowiedniej powierzchni obrotowej lub objętość odpowiedniej bryły obrotowej.

Tak np. wiemy, że przez obrót półkole około średnicy powstaje powierzchnia kuli, której pole znamy, a mianowicie  $P = 4r^2\pi$ .

Stosując zaś wzór (121), otrzymujemy  $P = 2\pi\eta S$ ; ponieważ zaś  $S = r\pi$  jako długość półkole, przeto:

$$4r^2\pi = 2\pi\eta \cdot r\pi$$

a stąd:

$$\eta = \frac{2r}{\pi}$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym na str. 165.

Podobnie ze znanego wzoru na objętość kuli:  $V = \frac{4}{3}r^3\pi$  i z wzoru (122), w którym  $f = \frac{1}{2}r^2\pi$ , wnioskujemy, że środek ciężkości pola półkole ma rzędną  $\eta = \frac{4r}{3\pi}$ , zgodnie z wynikiem, otrzymanym na str. 166

**Przykłady.**

1) Obliczyć powierzchnię i objętość bryły obrotowej, powstającej przez obrót koła o promieniu  $r$  (fig. 46) około osi, leżącej w płaszczyźnie tego koła w odległości  $R > r$  od środka tego koła; jest to obręcz kołowa czyli torus.

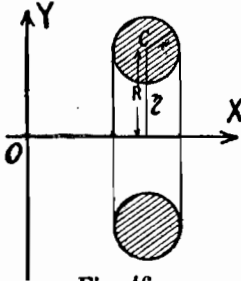


Fig. 46.

Ponieważ długością obracającego się łuku jest obwód koła o promieniu  $r$ , a środkiem ciężkości tego łuku jest oczywiście środek tego koła, przeto  $S = 2r\pi$ ,  $\eta = R$ , a więc pole obręczy wynosi:

$$P = 2R\pi \cdot 2r\pi = \underline{4Rr\pi^2}$$

Ponieważ pole koła obracającego się wynosi  $r^2\pi$ , a  $\eta = R$ , przeto z wzoru (122) otrzymujemy:

$$V = 2R\pi \cdot r^2\pi = \underline{2Rr^2\pi^2} = \underline{\frac{1}{2}rP}$$

2) Obliczyć ciężar wieńca koła rozpędowego, jeżeli średni promień wieńca wynosi 3 m, przekrój wieńca jest kwadratem o boku 0.25 m, gęstość zaś materiału wynosi  $\rho = 7$ .

Z wzoru (122) otrzymujemy (wyrażając objętość w metrach sześciennych):

$$V = 2\pi \cdot 3 \cdot 0.25^2 \approx 1.178$$

Ponieważ ciężar 1 dm<sup>3</sup> wynosi 7 kg, przeto całkowity ciężar wynosi:

$$Q = V \cdot 7000 \text{ kg} \approx 8247 \text{ kg}$$

*Uwaga.* W architekturze zachodzi często potrzeba wyznaczenia powierzchni lub objętości kopuły, która jest bryłą obrotową, powstającą przez obrót pola, ograniczonego z jednej strony linią, nieraz bardzo skomplikowaną. Do tych obliczeń używa się reguły Guldina; położenie środka ciężkości wyznacza się albo empirycznie albo też jakąś przybliżoną metodą rachunkową albo rysunkową (chodzi tu o przybliżoną wartość odpowiedniej całki).

### § 237. Moment bezwładności łuku.

Już w § 233 określiliśmy moment bezwładności systemu punktów materialnych ze względu na oś. Rozszerzmy obecnie tę definicję na masy, rozmieszczone w sposób ciągły. Ograniczmy się do rozważania mas o stałej gęstości  $\rho$ . Weźmy najpierw pod uwagę masę, rozmieszczoną linjowo, t. j. wzdłuż jakiegoś łuku  $\overline{AB}$  (fig. 47). Uważajmy spólrzędne  $x, y$  punktów tej linii za funkcje długości łuku  $s$ ; niechaj odciętej  $x=a$  odpowiada długość łuku  $s_a$  (liczona od jakiegoś punktu  $T$ , stale obranego na linii  $l$ ), a odciętej  $x=b$  długość łuku  $s_b$ . Podzielmy łuk  $\overline{AB}$  na dowolną liczbę części, np. na  $n$  części:  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ . Na każdym z tych łuków częściowych obierzmy dowolny punkt pośredni, np. na łuku  $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$



punkt  $\sigma_i$ , a więc  $s_i \leq \sigma_i \leq s_{i+1}$ . Rzędna, należąca do tego punktu, ma wartość  $y(\sigma_i)$ . Pomnóżmy masę  $\rho \Delta s_i$  każdego łuku częściowego przez kwadrat odległości dowolnego punktu tego łuku od osi odciętych, a więc przez  $y^2(\sigma_i)$  i utwórzmy sumę:

$$B_x = \sum_{i=1}^n \rho y^2(\sigma_i) \Delta s_i$$

Wykonujemy cały ciąg takich podziałów tak, aby wszystkie  $\Delta s_i$  dążyły do zera. Otrzymamy odpowiedni ciąg sum:

$$B_1, B_2, B_3, \dots, B_p, \dots$$

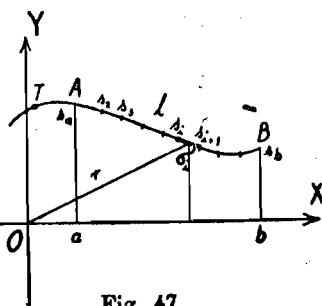


Fig. 47.

Granicę tego ciągu, gdy  $p \rightarrow \infty$ , nazywamy *momentem bezwładności materialnego łuku  $\widehat{AB}$  względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

(123)

$$B_x = \int_{s_a}^{s_b} \rho y^2 ds$$

Określając zupełnie podobnie *moment bezwładności  $B_y$  względem osi rzędnych*, otrzymujemy:

(124)

$$B_y = \int_{s_a}^{s_b} \rho x^2 ds$$

Sumę tych dwóch momentów, t. j.:

$$B_x + B_y = \int_{s_a}^{s_b} \rho (x^2 + y^2) ds = \int_{s_a}^{s_b} \rho r^2 ds$$

gdzie  $r$  oznacza odległość bieżącego punktu linii  $l$  od początku układu, nazywamy *momentem bezwładności danego łuku względem początku układu* i oznaczamy ją symbolem:

(125)

$$B_0 = \int_{s_a}^{s_b} \rho r^2 ds$$

Ten moment  $B_0$  można też określić bezpośrednio, bez powoływania się na momenty  $B_x$  i  $B_y$ , zapomocą ciągu sum:

$$\sum_{i=1}^n \rho r^2(\sigma_i) \Delta s_i$$

Moment bezwładności względem dowolnej osi można wyrazić zapomocą momentu bezwładności względem osi równoległej do niej i przechodzącej przez środek ciężkości. Tak np. moment bezwładności względem osi  $OX$ , przechodzącej przez środek ciężkości  $C$  (fig. 48), ma wartość:

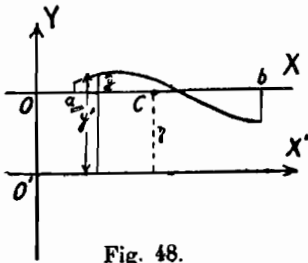


Fig. 48.

$$B_x = \int_{s_a}^{s_b} \rho y^2 ds$$

Moment bezwładności względem osi  $O'X'$ , równoległej do  $OX$  w odległości  $\eta$ , ma wartość:

$$B_{x'} = \int_{s_a}^{s_b} \rho y'^2 ds = \int_{s_a}^{s_b} \rho (y + \eta)^2 ds = \int_{s_a}^{s_b} \rho y^2 ds + 2\eta \int_{s_a}^{s_b} \rho y ds + \eta^2 \rho S$$

czyli:

$$(a) \quad \underline{B_{x'} = B_x + \eta^2 \cdot M}$$

Całka  $\int_{s_a}^{s_b} \rho y ds$  ma bowiem wartość zero, jako moment statyczny względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości.

A więc moment bezwładności względem dowolnej osi jest równy momentowi bezwładności względem osi równoległej do niej poprowadzonej przez środek ciężkości, powiększonemu o moment bezwładności całkowitej masy  $M$ , umieszczonej w środku ciężkości, względem danej osi. Prawo to odnosi się — jak można okazać — nie tylko do momentów bezwładności łuków, lecz także do momentów bezwładności pól.

#### Przykłady.

1) Obliczyć moment bezwładności pręta prostoliniowego o gęstości liniowej  $\rho$  względem osi prostopadłej do niego, a przechodzącej przez jego koniec. Obierzmy prostą, na której leży ten pręt, za oś  $x$ -ów. Łuk  $s$  liczony od początku pręta, jest w tym wypadku równy  $x$ . Zatem:

$$B_x = \int_0^a \rho x^3 dx = \frac{\rho x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{1}{4} \rho a^4$$

Jeżeli oś przechodzi przez środek pręta, to z wzoru (a) otrzymujemy, uważając poprzednio obliczony moment za  $B_{x'}$ , wartość:

$$B_x = \frac{1}{4} \rho a^4 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \rho a = \underline{\underline{\frac{1}{12} \rho a^4}}$$

2) Wyznaczyć moment bezwładności łuku koła o promieniu  $c$  od  $\varphi = \varphi_1$  do  $\varphi = \varphi_2$  względem środka tego koła (fig. 49). Obierzmy gęstość  $\rho = 1$ . Ponieważ stałe jest  $r = c$ , przeto z wzoru (125) otrzymujemy:

$$B_0 = \int_{s=c\varphi_1}^{s=c\varphi_2} c^2 ds = c^2 s \Big|_{c\varphi_1}^{c\varphi_2} = \underline{c^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Moment bezwładności całego okręgu koła otrzymamy, biorąc  $\varphi$  od 0 do  $2\pi$ , a więc:

$$(126) \quad \underline{B_0 = 2c^2\pi}$$

Oznaczając obwód koła literą  $U$ , otrzymujemy:

$$(126a) \quad \underline{B_0 = U \cdot c^2}$$

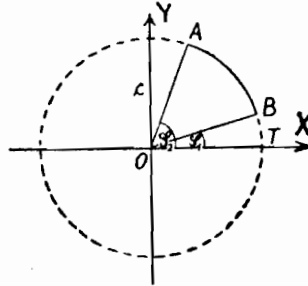


Fig. 49.

3) Wyznaczyć momenty bezwładności całego okręgu koła ze względu na obie osie współrzędnych (przy gęstości stałej  $\rho = 1$ ). Wskutek symetrii rozkładu masy widoczne jest, że  $B_x = B_y$ . Ponieważ zaś  $B_x + B_y = B_0$ , przeto  $2B_x = B_0$  a więc  $B_x = \frac{1}{2}B_0$  i tak samo  $B_y$ . Opierając się na wyniku poprzedniego przykładu, otrzymujemy zatem:

$$(127) \quad \underline{B_x = B_y = c^2\pi}$$

### § 238. Momenty bezwładności płaskiej powierzchni względem osi.

Zajmiemy się tylko przypadkiem jednorodnego rozmieszczenia masy a więc założymy, że gęstość powierzchniowa  $\rho$  jest stała. Wyznamy tu najpierw (podobnie jak przy badaniu momentów statycznych) moment bezwładności prostokąta o podstawie  $a$  a wysokości  $w$  względem jego podstawy (fig. 50). Podzielmy dany prostokąt na paski prostokątne zapomocą prostych równoległych do osi odciętych. Pasek o szerokości  $\Delta y_i$  ma masę  $\rho a \Delta y_i$ .

Pomnożmy masę każdego takiego paska przez kwadrat odległości dowolnego jego punktu od osi odciętych, np. przez  $\bar{y}_i^2$  i utwórzmy sumę tych iloczynów:

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \rho a \bar{y}_i^2 \Delta y_i$$

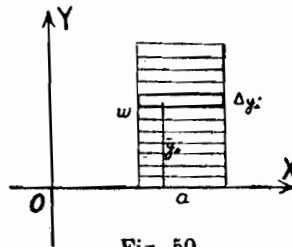


Fig. 50.

Dzielimy następnie dany prostokąt w rozmaite inne sposoby na takie paski i tworzymy cały ciąg takich podziałów tak, by szerokości wszystkich pasków dążyły do zera. Otrzymujemy w ten sposób ciąg sum:

$$B_1, B_2, B_3, \dots, B_p, \dots$$

Granice ciągu takich sum, gdy  $p \rightarrow \infty$ , nazywamy *momentem bezwładności danego prostokąta względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

$$(128) \quad B_x = \int_0^w \rho a y^2 dy = \rho \frac{a y^3}{3} \Big|_0^w = \frac{1}{3} \rho a w^3$$

Masa tego prostokąta ma wartość  $M = \rho \cdot P = \rho \cdot a w$ , a więc możemy napisać wzór (128) w postaci:

$$(128a) \quad B_x = M \cdot \frac{w^2}{3} = M \cdot \left( \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 = M d^2$$

Jeżeli więc obierzemy punkt materialny o masie równej masie  $M$  całego prostokąta w odległości  $d = \frac{w}{\sqrt{3}}$  od osi odciętych, to ten punkt ma ten sam moment względem tej osi, co cały prostokąt, obłożony równomiernie tą samą masą. Tę odległość  $d$  nazywamy *ramieniem bezwładności badanej powierzchni względem tej osi*.

Należy zwrócić uwagę na to, że  $d$  jest różne od  $\frac{w}{3}$  a więc nie można umieszczać całkowitej masy w środku ciężkości.

Ogólnie dla każdego rozkładu masy  $M$  liczbę  $d$ , określoną wzorem:

$$B = M d^2$$

gdzie  $B$  oznacza moment bezwładności tej masy, nazywamy *ramieniem bezwładności tej masy względem danej osi lub danego punktu*.

*Przykład.*

Przy pomocy wzoru (128) oblicza się momenty bezwładności przekrojów rozmaitych belek, zwanych trawersami. Znajomość tych momen-

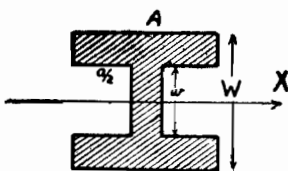


Fig. 51 a.

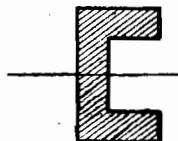


Fig. 51 b.

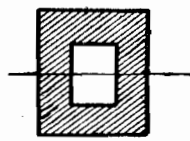


Fig. 51 c.

tów jest bardzo ważna, od nich bowiem zależy wytrzymałość tych trawersów na złamanie.

Obliczmy np. moment przekroju belki o przekroju, uwidocznionym na fig. 51 a, względem osi  $x$ -ów. Załóżmy, że gęstość  $\rho = 1$ .

Stosując wzór (128), otrzymujemy:

$$B_x = \frac{1}{3} A \cdot \left( \frac{W}{2} \right)^3 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \frac{a}{2} \left( \frac{w}{2} \right)^3 \cdot 2 = 2 \left( \frac{A W^3}{24} - \frac{a w^3}{24} \right) = \frac{A W^3}{12} - \frac{a w^3}{12}$$

Niechaj czytelnik wykona podobne obliczenie dla przekrojów postaci, uwidoczionych na figurach 51 b i 51 c.

Opierając się na wzorze (128), wyprowadzimy wzory na momenty bezwładności powierzchni, zamkniętej łukiem dowolnej linii, rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych (fig. 52). Postępując tu podobnie jak przy określaniu momentu statycznego (por. § 234), tworzymy momenty bezwładności elementarnych prostokątów: np. dla prostokąta o szerokości  $\Delta x_i$  i wysokości  $\bar{y}_i$  otrzymujemy (z wzoru (128)):

$$\frac{1}{3} \rho \Delta x_i \bar{y}_i^3$$

Tworzymy sumę:

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \rho \Delta x_i \bar{y}_i^3$$

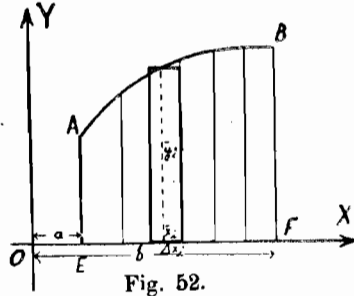


Fig. 52.

Granice ciągu takich sum  $B_1, B_2, B_3, \dots$  nazywamy *momentem bezwładności powierzchni ABFE względem osi odciętych*. Wartością tej granicy jest całka oznaczona:

(129)

$$B_x = \int_a^b \rho \frac{y^3}{3} dx$$

Moment bezwładności tej powierzchni względem osi rzędnych określamy, mnożąc masę każdego z tych elementarnych prostokątów przez kwadrat odległości dowolnego punktu każdego takiego prostokąta od osi rzędnych.

Obierzmy dla każdego prostokąta odciętą  $x_i$ , należącą do rzędnej  $\bar{y}_i$ . Otrzymamy w ten sposób  $\rho \Delta x_i \cdot \bar{y}_i \cdot \bar{x}_i^2$ . Tworzymy ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^n \rho \bar{x}_i^2 \bar{y}_i \Delta x_i$$

Granice tego ciągu nazywamy *momentem bezwładności danej powierzchni względem osi rzędnych*. Wartością tej granicy jest całka:

130)

$$B_y = \int_a^b \rho x^2 y dx$$

*Przykłady.*

1) Obliczyć moment bezwładności powierzchni trójkąta prostokątnego o podstawie  $a$ , a wysokości  $w$  względem podstawy (biorąc gęstość  $\rho = 1$ ). Obierzmy podstawę za oś  $x$ -ów, a jeden jej wierzchołek za początek układu

(fig. 53). Równanie prostej  $OA$ , przechodzącej przez początek układu i przez punkt  $A(a, w)$ , ma postać:

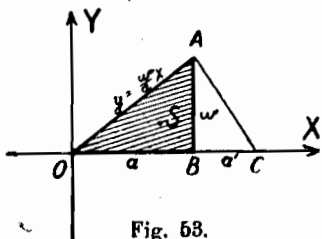


Fig. 53.

$$y = \frac{w}{a} x$$

Z wzoru (129) otrzymujemy:

$$B_x = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{w^3}{a^3} x^3 dx = \frac{w^3}{3a^3} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{1}{12} a w^3$$

Stąd łatwo otrzymać moment bezwładności powierzchni dowolnego trójkąta względem podstawy, np. trójkąta  $OAC$ . Trzeba tylko dodać  $\frac{1}{12} a' w^3$ . Oznaczając  $a + a' = b$ , otrzymujemy dla  $OAC$ :

$$B_x = \frac{1}{12} b w^3$$

Moment bezwładności trójkąta  $OAB$  względem osi  $y$ -ów ma, w myśl wzoru (130), wartość:

$$B_y = \int_0^a x^2 \cdot \frac{w}{a} x dx = \frac{w}{a} \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{w a^3}{4}$$

Niechaj czytelnik obliczy momenty bezwładności trójkąta  $OAB$  względem osi, przechodzącej przez jego środek ciężkości:  $S(\frac{2}{3} a, \frac{1}{3} w)$  a równoległej do osi współrzędnych (por. wzór (a) na str. 170).

2) Obliczyć momenty bezwładności elipsy względem obu osi głównych. Z równania elipsy  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  otrzymujemy dla dodatniej połówki:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Moment bezwładności całej elipsy względem osi  $x$ -ów równa się podwójnemu momentowi połówki elipsy, zatem:

$$B_x = 2 \cdot \int_{-a}^{+a} \frac{y^3}{3} dx = \frac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} \int_{-a}^{+a} (\sqrt{a^2 - x^2})^3 dx$$

Całkę tę obliczymy przy pomocy podstawienia  $x = a \sin \varphi$ . Otrzymujemy:

$$B_x = \frac{2}{3} \frac{b^3}{a^3} a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{2 b^3 a}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi$$

Przy pomocy wzoru redukcyjnego (str. 21, wzór (20)) otrzymujemy:

$$\int \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{1}{2} \int d\varphi \right)$$

a stąd:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{2}{\pi} \pi$$

Wobec tego:

$$B_x = \frac{2b^2a}{3} \cdot \frac{2}{\pi} \pi = \frac{4}{3} ab^2 \pi$$

Jasnym jest spowodu symetrii, że na moment elipsy względem osi  $y$ -ów otrzymamy:

$$B_y = \frac{4}{3} ba^2 \pi$$

Stąd dla koła o promieniu  $a$ :

$$B_x = B_y = \frac{4}{3} a^4 \pi$$

### § 239. Moment bezwładności płaskiej powierzchni względem punktu.

Przy wyznaczaniu momentu bezwładności powierzchni względem punktu dogodnie jest odrazu użyć współrzędnych biegunowych i badać pola wycinków, ograniczonych łukiem jakiejś linii i promieniami, łączącymi końce tego łuku z punktem, który obieramy za początek układu. Ograniczymy się do jednorodnego rozmieszczenia masy, t. j. do stałej gęstości powierzchniowej  $\rho$ .

Rozpocznijmy od wycinka koła (fig. 54) o promieniu  $c$ , należącego do kąta:

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$$

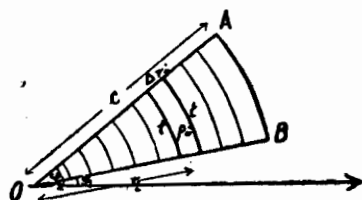


Fig. 54.

Zapomocą kół współśrodkowych dzielimy

ten wycinek na wycinki pierścieni kołowych i jeden wycinek koła przy  $O$ .

Masa takiego elementarnego wycinka pierścienia równa się jego polu, pomnożonemu przez gęstość, a to pole, np.  $p_i$ , oblicza się przy pomocy wzoru:

$$p_i = \frac{1}{2} (\ell + \ell) \cdot \Delta r_i$$

czyli:

$$p_i = \frac{1}{2} (r_i \alpha + (r_i + \Delta r_i) \alpha) \Delta r_i = (r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i) \alpha \Delta r_i = r_i^* \alpha \Delta r_i$$

Wartość:

$$r_i^* = r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i = r_i + \frac{1}{2} (r_{i+1} - r_i) = \frac{1}{2} (r_i + r_{i+1})$$

jest średnią wartością z przedziału  $\langle r_i, r_{i+1} \rangle$ . Pomnożmy masę  $\rho \cdot p_i$  przez kwadrat odległości dowolnego jej punktu od punktu  $O$ , np. właśnie przez  $r_i^*$ , to otrzymamy elementarny moment bezwładności:

$$\rho p_i r_i^{*2} = \rho r_i^{*2} \alpha \Delta r_i$$

Tworzymy sumę takich wyrażen dla całego wycinka koła, t. j.:

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \rho \alpha \bar{r}_i^2 \Delta r_i$$

Tworzymy cały ciąg rozmaitych takich podziałów wycinka w taki sposób, by wszystkie  $\Delta r_i$  dążyły do zera i obliczamy odpowiednie sumy  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_p, \dots$ . Granicę ciągu tych sum, gdy  $p \rightarrow \infty$ , nazywamy momentem bezwładności wycinka  $OAB$  względem punktu  $O$ . Wartością tej granicy jest całka oznaczona:

$$(131) \quad B_0 = \int_0^c \rho \alpha r^3 dr = \rho \alpha \frac{r^4}{4} \Big|_0^c = \frac{1}{4} c^4 \alpha \rho$$

Całe koło otrzymamy, kładąc  $\alpha = 2\pi$ , a więc moment bezwładności powierzchni całego koła względem jego środka ma wartość:

$$(132) \quad B_0 = \frac{1}{2} \rho c^4 \pi$$

Opierając się na wzorze (131), określimy moment bezwładności wycinka, ograniczonego łukiem dowolnej linii krzywej o równaniu  $r = r(\varphi)$  i promieniami w punktach końcowych tego łuku (fig. 55). Podzielmy ten wycinek w dowolny sposób na  $n$  części, wykreślając szereg promieni. Każdy wycinek aproksymujemy wycinkiem koła, biorąc za promień koła np. promień początkowy każdego wycinka. Obliczamy według wzoru (131) moment bezwładności każdego takiego wycinka kołowego względem punktu  $O$ . Np. dla wycinka o promieniu  $r_i$  a o kącie  $\Delta\varphi_i$  otrzymamy:

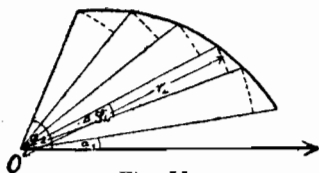


Fig. 55.

Obliczamy według wzoru (131) moment bezwładności każdego takiego wycinka kołowego względem punktu  $O$ . Np. dla wycinka o promieniu  $r_i$  a o kącie  $\Delta\varphi_i$  otrzymamy:

$$b_i = \frac{1}{4} r_i^4 \Delta\varphi_i \cdot \rho$$

Tworzymy sumę:

$$B_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} r_i^4 \Delta\varphi_i \rho$$

a następnie ciąg  $B_1, B_2, B_3, \dots$  takich sum, zagęszczając podział tak, aby wszystkie  $\Delta\varphi_i$  dążyły do zera. Granicę tego ciągu nazywamy momentem bezwładności całego wycinka względem punktu  $O$ .

Wartością tej granicy jest całka:

$$(133) \quad B_0 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{4} \rho r^4 d\varphi = \frac{1}{4} \rho \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^4 d\varphi$$



### § 240. Moment bezwładności powierzchni obrotowej i bryły obrotowej względem osi obrotu.

Z wzoru (126) i (132) na moment bezwładności okręgu koła i pola koła korzysta się, aby określić moment bezwładności powierzchni i bryły obrotowej względem osi obrotu.

Dzielimy łuk linii obracającej się (fig. 56) na części  $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots$  i przyjmujemy masę każdego takiego łuku skupioną w jednym dowolnym jego punkcie. Niechaj gęstość linjowa łuku będzie  $\rho=1$ . Przez obrót tego punktu materialnego powstaje okrąg koła o promieniu  $\bar{y}_i$ , o masie  $2\pi \bar{y}_i \Delta s_i$ . Moment bezwładności tego koła ma według wzoru (126) wartość:

$$b_i = 2\pi \bar{y}_i^2 \Delta s_i$$

Sumując te momenty i tworząc ciąg takich sum, otrzymamy po przejściu do granicy:

$$(134) \quad B_x = 2\pi \int_a^b y^3 ds$$

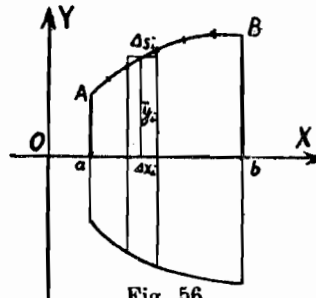


Fig. 56.

Jest to wzór na moment bezwładności powierzchni obrotowej względem jej osi obrotu  $OX$ .

Celem określenia momentu bezwładności bryły obrotowej, bierzemy zamiast każdej płytki, leżącej między dwoma przekrojami prostopadłymi do osi obrotu, walec o promieniu równym rzędnej  $\bar{y}_i$ , w dowolnym punkcie pośrednim odpowiedniego łuku  $\Delta s_i$ . Każdy taki walec zastępujemy kołem o promieniu  $\bar{y}_i$ , obłożonym masą o gęstości  $\Delta x_i$ , równej wysokości tego walca. Moment bezwładności powierzchni tego koła ma według wzoru (132) wartość:

$$b_i = \frac{1}{2} \bar{y}_i^2 \pi \Delta x_i$$

Stosując tu proces sumowania i przejścia do granicy, otrzymujemy:

$$(136) \quad B_x = \frac{1}{2} \pi \int_a^b y^4 dx$$

*Przykłady.*

1) Obliczyć moment bezwładności walca kołowego o wysokości  $w$  a o promieniu  $a$  względem jego osi, przyjmując stałą gęstość  $\rho=1$ . Dla powierzchni walca otrzymujemy (fig. 57):

$$B_x = 2\pi \int_0^w a^3 dx = 2\pi a^3 w = \underline{P \cdot a^3}$$

a dla objętości:

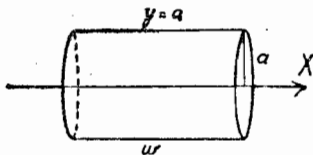


Fig. 57.

$$B_x = \frac{1}{2} \pi \int_0^w a^4 dx = \frac{\pi a^4 w}{2} = \underline{V \cdot \frac{a^2}{2}}$$

2) Obliczyć moment bezwładności wieńca koła rozpędowego względem jego osi.

Przekrój płaszczyzną, przechodzącą przez oś tego koła, przedstawiono na fig. 58. Trzeba od momentu bezwładności walca o promieniu  $r_1$  odjąć moment bezwładności walca wewnętrznego o promieniu  $r_2$ . Stosując wzór, otrzymany w przykładzie 1, otrzymujemy:

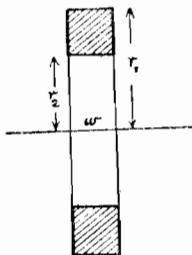


Fig. 58.

$$B_x = \frac{r_1^4 \pi w}{2} - \frac{r_2^4 \pi w}{2} = \frac{\pi w}{2} (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)$$

Ponieważ objętość wieńca tego koła ma wartość:

$$r_1^2 \pi w - r_2^2 \pi w$$

przeto:

$$\underline{B_x = \frac{1}{2} V (r_1^2 + r_2^2)}$$

3) Obliczyć moment bezwładności objętości kuli o promieniu  $R$  względem jej średnicy. Obierzmy tę średnicę za oś obrotu. Ponieważ  $x^2 + y^2 = R^2$ , przeto:

$$y^4 = (R^2 - x^2)^2 = R^4 - 2R^2 x^2 + x^4$$

a więc:

$$B_x = \frac{1}{2} \pi \int_{-R}^{+R} (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx = \frac{1}{2} \pi (R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5) \Big|_{-R}^{+R}$$

a stąd:

$$\underline{B_x = \frac{8}{15} R^5 \pi}$$

## § 241. Praca siły, działającej w kierunku drogi.

Jeżeli wzdłuż drogi o długości  $S$  działa *stała* siła  $P$  w kierunku tej drogi, to pracą tej siły wzdłuż tej drogi nazywamy iloczyn:

$$L = P \cdot S$$

Jeżeli jednak siła  $P$ , działająca w kierunku drogi, jest *zmienną*, t. j. zależy od tego, w którym punkcie drogi działa, a więc jest funkcją długości przebytej drogi  $s$  (łuku), to trzeba pracę inaczej zdefiniować. Podzielimy drogę, wzdłuż której działa siła  $P(s)$ , na części  $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \dots, \Delta s_n$ . Każdą taką

część drogi pomnożmy przez siłę, działającą w dowolnym jej punkcie, np. w punkcie początkowym; otrzymamy w ten sposób dla każdej części drogi pracę, którą wykonałaby siła, gdyby była stałą wzdłuż całej tej części.

Utwórzmy sumę tych iloczynów:

$$L_1 = P(s_1)\Delta s_1 + P(s_2)\Delta s_2 + \dots + P(s_n)\Delta s_n$$

Wykonajmy następnie cały ciąg takich podziałów drogi ale tak, aby wszystkie  $\Delta s_i$  dążyły do zera. Utwórzmy odpowiadający tym podziałom ciąg sum:  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_p, \dots$ . Granicę tego ciągu nazywamy *pracą siły* (zmiennej), działającej w kierunku drogi, *wzdłuż całej drogi S*. Wartością tej granicy jest, jak wiadomo, całka oznaczona:

$$(136) \quad L = \int_0^S P(s) ds$$

Ta całka podaje więc pracę, wykonaną przez siłę  $P(s)$ , działającą w kierunku drogi, wzdłuż całej drogi o długości  $S$ .

Jeżeli siła nie działa w kierunku drogi, lecz jej kierunek tworzy ze stycznymi w rozmaitych punktach drogi rozmaite kąty, to tworzymy w każdym punkcie drogi rzut wektora, przedstawiającego siłę, działającą w tym punkcie, na kierunek stycznej. Niechaj  $P_t$  oznacza wielkość tego rzutu siły  $P$  na styczną, to pracę określamy przy pomocy sum postaci:

$$L_1 = P_t(s_1)\Delta s_1 + P_t(s_2)\Delta s_2 + \dots + P_t(s_n)\Delta s_n$$

Na obliczenie tej pracy otrzymujemy wzór:

$$(136a) \quad L = \int_0^S P_t(s) ds$$

gdzie  $P_t(s)$  oznacza wielkość rzutu siły  $P$  na styczną w każdym punkcie drogi. Powrócimy do tych rozważań w ustępie, poświęconym całkom *krzywoliniowym* (por. § 244).

*Przykłady.*

1) Wydłużamy sprężynę o długość  $S$ ; wiadomo, że przy każdym wydłużeniu o odcinek  $s$  działa siła sprężystości, proporcjonalna do tego wydłużenia, a zatem do pokonania jej trzeba użyć siły  $P = k \cdot s$ , działającej w kierunku przeciwnym do siły sprężystości, a mianowicie w kierunku wydłużenia. Praca, wykonana przy całkowitem wydłużeniu  $S$ , ma zatem wartość:

$$L = \int_0^S ks ds = \frac{1}{2} kS^2 = \frac{kS}{2} \cdot S$$

t. j. ma taką wartość, jak gdyby działała stała siła  $P = \frac{kS}{2}$ , równa połowie siły  $kS$ , działającej w końcowym punkcie drogi.

2) Obliczyć pracę, wykonaną przez tłok maszyny cieplnej, posuwający się pod wpływem ciśnienia  $P$  gazu. Ciśnienie to zmienia się w miarę rozprężania się gazu. Jeżeli pole przekroju tłoku wynosi  $F$ , droga przebyta przy jednym ruchu ma długość  $S$  a  $p$  oznacza ciśnienie gazu na jednostkę pola (prężność), to  $P = p \cdot F$  a zatem praca ma wartość:

$$L = \int_0^S p \cdot F ds$$

Wprowadźmy zamiast zmiennej  $s$  zmienną  $F \cdot s$ , oznaczającą objętość  $v$  gazu, znajdującego się w danym momencie ruchu pod tłokiem, to:

$$s = \frac{v}{F}, \quad ds = \frac{dv}{F}$$

Niechaj  $v_1$  oznacza objętość początkową, t. j. dla  $s = 0$ , a  $v_2$  końcową, t. j. dla  $s = S$ . Otóż:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p dv$$

Tak np. przy *izotermicznej* zmianie objętości pod tłokiem związek między objętością a prężności wyraża się wzorem:

$$pv = c$$

a zatem:

$$L = \int_{v_1}^{v_2} \frac{c}{v} dv = c \log \frac{v_2}{v_1}$$

Przy *adjabatycznej* zmianie objętości zachodzi między  $p$  a  $v$  związek:

$$p \cdot v^{1.41} = c$$

a więc:

$$L = c \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^{1.41}} = \frac{cv^{-0.41}}{-0.41} \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{c}{0.41} (v_2^{-0.41} - v_1^{-0.41}) = \frac{p_1 v_1}{0.41} \left( 1 - \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{0.41} \right)$$

3) Jaką pracę odda masa 1 grama, spadająca pod wpływem siły ciężkości ziemi z wysokości 60 km na powierzchnię ziemi, na wysokość 0 km.

Przyjmijmy za jednostkę siły ciężar 1 grama (przy powierzchni ziemi). W odległości  $s$  od środka ziemi działa na masę 1 grama siła  $P(s)$

odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka ziemi. Jeżeli  $R$  oznacza promień ziemi, to:

$$P(s) : 1 = R^2 : s^2$$

a stąd:

$$P(s) = \frac{R^2}{s^2}$$

A więc praca:

$$L = \int_{R+60}^R \frac{R^2}{s^2} ds = R^2 \int_{R+60}^R s^{-2} ds = \left. \frac{R^2 s^{-1}}{-1} \right|_{R+60}^R = R^2 \left( \frac{1}{R+60} - \frac{1}{R} \right) = \frac{-60R}{R+60}$$

Ponieważ promień ziemi ma długość około  $R = 6370$  km, przeto  $L = -59$  kgm (albowiem za jednostkę masy obraliśmy  $1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$  a za jednostkę długości  $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$ ).

---

## ROZDZIAŁ XX.

### Całki z funkcji dwóch i więcej zmiennych.

#### Ustęp I.

#### § 242. Całki krzywoliniowe.

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się wyłącznie całkami z funkcji jednej zmiennej: funkcja podcałkowa  $y = f(x)$  była dotąd zawsze funkcją jednej zmiennej  $x$ . Przystąpimy obecnie do badania całek z funkcji dwóch zmiennych, a więc funkcja podcałkowa:

$$z = P(x, y)$$

będzie funkcją dwóch zmiennych  $x, y$ .

Rozpocznijmy od przypadku najbliższego związanego z całkowaniem funkcji jednej zmiennej, a mianowicie od przypadku, gdy zmienne  $x, y$  nie są od siebie niezależne, lecz są ze sobą związane jakimś równaniem:

(a) 
$$F(x, y) = 0$$

A więc punkty o współrzędnych  $(x, y)$ , które będziemy brali pod uwagę, nie będą wypełniały całej płaszczyzny  $(X, Y)$  ani też żadnych obszarów tej płaszczyzny, lecz będą przebiegały w ogólności jakieś linje. Równanie takiej linii ( $l$ ) może być podane w formie uwikłanej, jak we wzorze (a), albo w formie parametrowej:

(b) 
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

albo też w najprostszym przypadku w formie wyraźnej:

(c) 
$$y = f(x)$$

Zacznijmy od tego ostatniego, najprostszego przypadku. Weźmy pod uwagę łuk  $\widehat{AB}$  linii o równaniu (c), przyczem punkt  $A$  należy do odciętej  $x = a$ , a  $B$  do  $x = b$ . Ponieważ  $y = f(x)$  jest jednoznaczna funkcją, przeto do każdej odciętej z tego przedziału należy tylko jedna rzędna. Utwórzmy całkę:

(d) 
$$\int_a^b P(x, y) dx$$

przyczem  $y = f(x)$ .

Tę całkę z funkcji  $P(x, y)$  dwóch zmiennych zamieniamy na całkę z funkcji jednej zmiennej:

$$\int_a^b P(x, f(x)) dx = \int_a^b U(x) dx$$

O funkcjach  $P(x, y)$  i  $f(x)$  wystarczy uczynić założenia, że  $P(x, y)$  jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych w jakimś obszarze, zawierającym łuk  $\widehat{AB}$ , a  $f(x)$  jest funkcją ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Wtedy bowiem funkcja złożona  $P(x, f(x)) = U(x)$  jest ciągłą w przedziale  $\langle a, b \rangle$ , a więc jest całkowna w tym przedziale. Można też dopuszczać rozmaite nieciągłości dla  $P(x, y)$  i  $f(x)$ , byleby tylko istniała całka uogólniona lub niewłaściwa z  $U(x)$ .

Taką całkę (d) z funkcji dwóch zmiennych, w której te dwie zmienne są związane równaniem  $y = f(x)$ , nazywamy całką krzywoliniową z funkcji  $P(x, y)$ , braną po łuku  $\widehat{AB}$  i oznaczamy ją symbolem:

$$(137) \quad \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx$$

Aby ten symbol miał określone znaczenie, musi być podane ponadto równanie linji, do której należy łuk  $\widehat{AB}$ .

Jak widzimy, definicja ta nie wprowadza jeszcze niczego nowego, albowiem ta całka krzywoliniowa równa się zwykłej całce oznaczonej z funkcji złożonej  $P(x, f(x))$ :

$$(137a) \quad \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx$$

Jeżeli zmienimy porządek granic  $a, b$  tej całki, to w symbolu całki krzywoliniowej zmienimy porządek odpowiednich liter  $A, B$ . Wiadomo, że przez zmianę porządku granic  $a, b$  całka zmieni znak, a więc:

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{BA}} P(x, y) dx &= \int_b^a P(x, f(x)) dx = - \\ &= - \int_a^b P(x, f(x)) dx = - \int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx \end{aligned}$$

Mówimy wtedy, że przebiegamy łuk  $\widehat{AB}$  w kierunku przeciwnym. A więc: *przy zmianie kierunku przebiegania łuku całka krzywoliniowa zmienia znak.*

Weźmy teraz pod uwagę taki łuk, w którym do jednej odciętej należeć może więcej rzędnych, jak np. łuk  $\widehat{AB}$  na fig. 59.

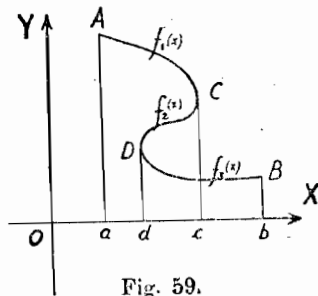


Fig. 59.





Ta ogólniejsza definicja całki krzywoliniowej dopuszcza też całki, brane *po liniach zamkniętych*. Tak np. całce krzywoliniowej według zmiennej  $x$  z jakiejś funkcji  $P(x, y)$ , branej po kole  $K$  (fig. 60), dajemy następujące znaczenie:

$$\int_{\widehat{ABCD A}} P(x, y) dx = \int_{\widehat{ABC}} P(x, y) dx + \int_{\widehat{CDA}} P(x, y) dx$$

Jeżeli to koło ma równanie  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ , to w pierwszej całce należy za  $y$  podstawić  $\sqrt{a^2 - x^2}$  a w drugiej  $-\sqrt{a^2 - x^2}$ . Otrzymamy w ten sposób:

$$\int_{\widehat{ABCD A}} P(x, y) dx = \int_{-a}^{+a} P(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx + \int_{+a}^{-a} P(x, -\sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

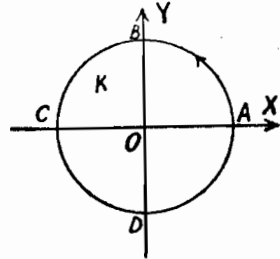


Fig. 60.

Obliczenie całki krzywoliniowej po linii zamkniętej sprowadza się więc w tym przypadku do obliczenia dwóch zwykłych całek oznaczonych.

Sposób pisania:  $\int_{\widehat{ABCD A}}$  jest niedogodny, toteż zmieniamy go, oznaczając całą linię kołową jedną literą, np.  $K$ . i piszemy krótko:  $\int_{(K)} P(x, y) dx$ .

Ogólnie, oznaczając jakąś linię zamkniętą literą  $l$ , oznaczamy całkę krzywoliniową, braną po tej całej linii, symbolem:

$$(139) \quad \int_{(l)} P(x, y) dx$$

W takim sposobie pisania tkwiłaby jednak dwuznaczność, gdybyśmy nie ustalili raz na zawsze *kierunku*, w którym obiegamy linię. Otóż ustalono, że symbol (139) oznacza, że przebiegamy linię  $l$  w takim kierunku, aby powierzchnia, zamknięta tą linią, pozostawała *po lewej ręce* przy tym obiegu, t. j. obieg ma być przeciwny do ruchu wskazówek na zegarze. Tak więc np. na kole na fig. 60 przebiegaliśmy kolejno punkty  $A, B, C, D, A$ , mając wewnątrz koła po lewej ręce; wobec tego tę całkę krzywoliniową należało oznaczyć symbolem  $\int_{(K)} P(x, y) dx$ . Gdybyśmy zaś przebiegali te punkty w przeciwnym porządku:  $A, D, C, B, A$ , to odpowiednią całkę krzywoliniową należałoby oznaczyć symbolem:  $-\int_{(K)} P(x, y) dx$ . Wynika to stąd, że każda z całek składowych zmieniałaby wtedy znak: np. zamiast  $\int_{\widehat{ABC}}$  występowałaby całka  $\int_{\widehat{CBA}} = -\int_{\widehat{ABC}}$ .

Obliczanie całki krzywoliniowej przy pomocy wzoru (138) jest zwykle dość niedogodne. Używając jednak zamiast wyraźnej formy równań linii, po której całkujemy, formy parametrowej, sprowadzamy zwykle obliczenie całki krzywoliniowej do *jednej*, zwykłej *całki oznaczonej*, wprowadziwszy zamiast zmiennej  $x$  zmienną  $t$ , służącą do parametrowego przedstawienia danej linii.

Wyjaśnimy to najpierw na przykładzie, a mianowicie na omówionej poprzednio całce po kole. Użyjmy parametrowego przedstawienia koła  $K$  o równaniu  $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ , a mianowicie:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t$$

Całki oznaczone, które służyły do obliczenia całki krzywoliniowej po kole, przyjmą po wprowadzeniu nowej zmiennej  $t$  postać:

$$\int_{+a}^{-a} P(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = - \int_{t=0}^{t=\pi} P(a \cos t, a \sin t) a \sin t dt$$

$$\int_{-a}^{+a} P(x, -\sqrt{a^2 - x^2}) dx = - \int_{t=\pi}^{t=2\pi} P(a \cos t, a \sin t) a \sin t dt$$

(Ponieważ  $\sin t$  ma w przedziale  $(\pi, 2\pi)$  wartości ujemne, przeto w drugiej całce trzeba było podstawić  $a \sin t$  za  $-\sqrt{a^2 - x^2}$ ).

Sumę tych dwu całek można przedstawić jedną całką od  $0$  do  $2\pi$ , a więc:

$$\int_{(K)} P(x, y) dx = - \int_0^{2\pi} P(a \cos t, a \sin t) a \sin t dt$$

Tak samo postępuje się w ogólnych przypadkach. To prowadzi nas do wypowiedzenia definicji całki krzywoliniowej w następującej postaci, bardzo dogodnej przy obliczaniu wartości takiej całki.

Jeżeli przy przebieganiu wartości parametru  $t$  od  $t_1$  do  $t_2$  punkt o współrzędnych  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  opisuje łuk  $\widehat{AB}$  dowolnej linii, to całką krzywoliniową z dowolnej funkcji  $P(x, y)$  według zmiennej  $x$ , braną po tym łuku, jest całka oznaczona od  $t_1$  do  $t_2$  z funkcji  $P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t)$  według zmiennej  $t$ :

$$(140) \quad \boxed{\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt}$$

Prawą stronę tego wzoru łatwo jest zapamiętać, powstaje ona bowiem przez wprowadzenie w całkę z  $P(x, y) dx$  zmiennej  $t$ , związanej z  $x$  za pomocą równania  $x = \varphi(t)$ . Wtedy  $dx$  należy zastąpić przez  $\varphi'(t) dt$ .

Wszystkie poprzednie rozważania można zastosować także do przypadku, gdy uważamy  $y$  za zmienną niezależną, a  $x = g(y)$  za zmienną zależną. Jeżeli punkt  $A$  odpowiada rzędnej  $y = \alpha$ , a punkt  $B$  rzędnej  $y = \beta$ , to całkę krzywoliniową po łuku  $\widehat{AB}$  według zmiennej  $y$  z funkcji  $Q(x, y)$  określamy wzorem:

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(g(y), y) dy$$

w razie, gdy każda prostopadła do osi  $y$ -ów przecina łuk  $\widehat{AB}$  najwyżej w jednym punkcie. W ogólnym przypadku używa się parametrowego przedstawienia łuku  $\widehat{AB}$ , a ogólna całka krzywoliniowa według zmiennej  $y$  jest określona zapomocą wzoru:

$$(141) \quad \int_{\widehat{AB}} Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$$

Jeżeli obydwie całki krzywoliniowe, określone zapomocą wzorów (140) i (141), są brane po tym samym łuku  $\widehat{AB}$ , to także sumę ich można przedstawić zapomocą jednej całki oznaczonej. Sumę tę oznaczamy symbolem:  $\int_{\widehat{AB}} (Pdx + Qdy)$  a zatem:

$$(142) \quad \int_{\widehat{AB}} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy) = \int_{t_1}^{t_2} (P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)) dt$$

W tej ogólnej postaci występują całki krzywoliniowe najczęściej.

W zupełnie podobny sposób określa się całki krzywoliniowe po łukach linii w przestrzeni trójwymiarowej. I tak mamy podaną funkcję trzech zmiennych:  $P(x, y, z)$ , które są jednak ze sobą związane tak, że punkt o współrzędnych  $x, y, z$  przebiega łuk  $\widehat{AB}$  jakiejś linii o równaniach:

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

lub w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

Niechaj punkt  $A$  odpowiada odciętej  $x = a$  lub wartości parametru  $t = t_A$  a punkt  $B$  odciętej  $x = b$  lub wartości  $t = t_B$ . Chodzi o obliczenie całki:

$$\int_a^b P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x, f(x), g(x)) dx$$

Tę całkę nazywamy całką krzywoliniową po łuku  $\widehat{AB}$  i oznaczamy ją symbolem  $\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx$ . Używając formy parametrycznej, mamy:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx = \int_A^{t_B} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) dt$$

Podobnie ma się rzecz dla całki z funkcji  $Q(x, y, z)$  według zmiennej  $y$  i z funkcji  $R(x, y, z)$  według zmiennej  $z$ .

Ogólną postacią całki krzywoliniowej w przestrzeni trójwymiarowej jest suma trzech takich całek, branych po tym samym łuku, a więc:

$$I = \int_{\widehat{AB}} (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz)$$

Najdogodniej jest zwykle obliczać tę całkę zapomocą jednej zwykłej całki oznaczonej, wynikającej z użycia parametrycznego przedstawienia linii, po której całkujemy. Wtedy otrzymujemy:

$$I = \int_A^{t_B} (P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)) dt$$

Wartość każdej całki krzywoliniowej zależy tylko od linii, po której całkujemy, a nie zależy od jej analitycznego przedstawienia.

*Przykłady.*

1) Obliczyć całkę krzywoliniową z funkcji  $x \cdot y$  według zmiennej  $x$  po łuku paraboli  $y^2 = 2px$  o rzędnych nieujemnych od  $A(0, 0)$  do  $B(a, b)$  (por. fig. 61). Otrzymujemy:

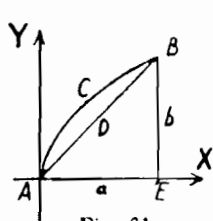


Fig. 61.

$$(I) \quad \int_{\widehat{ACB}} xy dx = \int_0^a x \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^a x^{3/2} dx = \\ = \sqrt{2p} a^{5/2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{2pa} = \frac{2}{5} a^2 b$$

Obliczmy tę samą całkę po prostej  $ADB$ . Równanie tej prostej jest  $y = \frac{b}{a} x$ , a więc:

$$\int_{\widehat{ADB}} xy dx = \int_0^a x \frac{b}{a} x dx = \frac{b}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{b a^3}{3a} = \frac{1}{3} a^2 b$$

Widzimy stąd, że całka krzywoliniowa z tej samej funkcji, między temi samymi punktami końcowymi, ale brana po różnych łukach, może mieć różne wartości.

Obliczmy jeszcze całkę z tej samej funkcji po drodze łamanej  $\widehat{AEB}$ .

Równania całej tej linii nie można przedstawić w formie wyraźnej. Natomiast nie trudno uzyskujemy parametrowe przedstawienie tej linii łamanej.

Trzeba położyć:

$$\begin{aligned} x = t, y = 0 & \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq a \\ x = a, y = t - a & \quad \text{„} \quad a \leq t \leq a + b \end{aligned}$$

Używając wzoru (140), otrzymujemy:

$$\int_{\widehat{AEB}} xy \, dx = \int_0^{a+b} x(t) y(t) \cdot x'(t) \, dt = \int_0^a t \cdot 0 \cdot 1 \, dt + \int_a^{a+b} a(t-a) \cdot 0 \cdot dt = \underline{0}$$

Obliczmy jeszcze całkę z tej samej funkcji po konturze zamkniętym  $l = ACBEA$ . Ponieważ obiegając kontur w tym porządku, mamy pole, zamknięte tym konturem, po *prawej* ręce, przeto należy tę całkę oznaczyć symbolem:

$$(II) \quad - \int_{\partial} xy \, dx$$

Wartość jej jest równa sumie całek po łuku  $\widehat{ACB}$  i po linii łamanej  $\widehat{BEA}$ , a zatem jest równa  $\frac{2}{3}a^2b + 0 = \frac{2}{3}a^2b$ .

Całka (I) zarówno jak i całka (II) przedstawiają, jak wiemy, moment statyczny względem osi rzędnych powierzchni, ograniczonej konturem  $ACBEA$ .

2) Obliczyć całki krzywoliniowe (fig. 62):

$$\int_{\widehat{ACB}} (3y \, dx + 2x \, dy) \quad \text{i} \quad \int_{\widehat{AOB}} (3y \, dx + 2x \, dy)$$

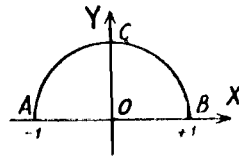


Fig. 62.

Pierwsza całka jest brana po półkolu o promieniu 1.

Używając parametrowego przedstawienia:  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , otrzymujemy dla całki po półkolu:

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{ACB}} (3y \, dx + 2x \, dy) &= \int_{\pi}^0 (3 \sin t (-\sin t) + 2 \cos^2 t) \, dt = \int_{\pi}^0 (-3 \sin^2 t + 2 \cos^2 t) \, dt = \\ &= \int_0^{\pi} (3 - 3 \cos^2 t - 2 \cos^2 t) \, dt = 3 \int_0^{\pi} dt - 5 \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = 3\pi - 5 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{1}{2}\pi} \end{aligned}$$

W całce po linii prostej  $AOB$  jest stale  $y = 0$ , a więc:

$$\int_{\widehat{AOB}} (3y \, dx + 2x \, dy) = \int_{\widehat{AOB}} (3y \, dx + 2x y' \, dx) = \int_{\widehat{AOB}} (3 \cdot 0 + 2x \cdot 0) \, dx = 0$$

a więc otrzymaliśmy inną wartość dla drogi  $\widehat{ACB}$  a inną dla drogi  $\widehat{AOB}$ , łączącej te same punkty końcowe  $A$  i  $B$ .

Niechaj czytelnik stwierdzi w podobny sposób, że całka krzywoliniowa:

$$\int (2xy dx + x^2 dy)$$

ma tę samą wartość po drodze  $\widehat{ACB}$ , co po drodze  $\widehat{AOB}$ , a mianowicie wartość 0. Można okazać, że ta całka przyjmuje tę samą wartość po każdej drodze, łączącej z sobą punkty  $A$  i  $B$ .

3) Obliczyć wartość całki krzywoliniowej:

$$I = \int_{\widehat{AB}} (z dx + x dy + y dz)$$

przyczem  $\widehat{AB}$  jest łukiem linii śrubowej o równaniach (por. tom I, str. 378):

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = at$$

dla łuku, odpowiadającego jednemu krokowi śruby, t. j. od  $t=0$  do  $t=2\pi$  czyli od  $A(a, 0, 0)$  do  $B(a, 0, 2a\pi)$ .

Wyrazamy całkę  $I$  zapomocą zwykłej całki oznaczonej, a mianowicie:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (at \cdot (-a \sin t) + a \cos t \cdot a \cos t + a \sin t \cdot a) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (-t \sin t + \cos^2 t + \sin t) dt = \\ &= -a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + a^2 \int_0^{2\pi} \sin t dt \end{aligned}$$

Po wykonaniu tych prostych całkowań otrzymujemy:

$$I = \underline{\underline{3a^2\pi}}$$

### § 243. Całki krzywoliniowe w zagadnieniach geometrycznych.

Przy obliczaniu zapomocą całek oznaczonych pól, zamkniętych liniami, natrafiamy na pewne niedogodności, gdy do jednej odciętej należy więcej aniżeli jedna rzędna. Zobaczmy, że unikniemy tych niedogodności, używając całek krzywoliniowych.

I tak pole, zamknięte łukiem  $\widehat{AB}$  linii o równaniu  $y = f(x)$  (dla  $y > 0$ ), rzędnymi w punktach końcowych tego łuku i osią odciętych,

wyraziliśmy wzorem:

$$P = \int_a^b y \, dx$$

przyczem  $a$  i  $b$  są odciętami punktów końcowych danego łuku.

Tę całkę możemy pojmować jako całkę krzywoliniową z funkcji  $P(x, y) = y$  po łuku  $\widehat{AB}$ , albowiem:

$$\int_{\widehat{AB}} y \, dx = \int_a^b y \, dx = P$$

Aby obliczyć przy pomocy całek oznaczonych pole, zamknięte dowolną linią krzywą, np. linią  $ADBC$  czyli  $l$  na fig. 63, trzeba było rozdzielić tę linię na łuki, w których do jednej odciętej należy zawsze tylko jedna rzędna i obliczyć kilka całek. Tak np. do obliczenia pola, przedstawionego na fig. 63, trzeba użyć dwóch całek:

$$P = \int_a^b y_2(x) \, dx - \int_a^b y_1(x) \, dx$$

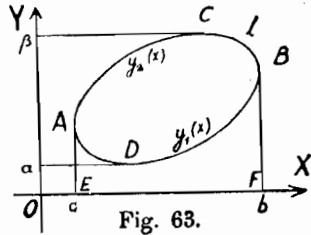


Fig. 63.

Otóż te dwie całki można ująć w jedną całkę *krzywoliniową*, a mianowicie:

$$P = \int_{\widehat{ACB}} y \, dx - \int_{\widehat{ADB}} y \, dx = \int_{\widehat{ACB}} y \, dx + \int_{\widehat{BDA}} y \, dx = \int_{\widehat{ACBDA}} y \, dx$$

Obiegając punkty konturu tej powierzchni w porządku  $A, C, B, D, A$ , mamy po *prawej* ręce pole, ograniczone tym konturem, a więc, używając symbolu  $\int_{(h)}$ , należy mu dać znak  $-$ . A zatem:

(143)

$$P = - \int_{(h)} y \, dx$$

Widzimy stąd, że pole, zamknięte dowolną linią ciągłą, można wyrazić zapomocą jednej całki krzywoliniowej.

Uważając  $x$  za funkcję zmiennej  $y$ , możemy to samo pole wyrazić także zapomocą innej całki krzywoliniowej, a mianowicie:

$$P = \int_{\widehat{DBC}} x \, dy - \int_{\widehat{DAC}} x \, dy = \int_{\widehat{DBC}} x \, dy + \int_{\widehat{CAD}} x \, dy = \int_{\widehat{DBCAD}} x \, dy$$

czyli:

$$(144) \quad P = + \int_{(l)} x dy$$

Całka ma tu znak +, albowiem przebiegając punkty konturu w porządku  $D, B, C, A, D$ , mamy pole, zamknięte tym konturem, po lewej ręce.

Dodając stronami wzory (143) i (144), otrzymujemy:

$$2P = \int_{(l)} x dy - \int_{(l)} y dx$$

a stąd:

$$(145) \quad P = \frac{1}{2} \int_{(l)} (x dy - y dx)$$

Ten wzór na pole wyprowadziliśmy już właściwie w poprzednim rozdziale, używając przedstawienia parametrowego, a mianowicie wzór (84) na str. 128 jest równoważny z wzorem (145).

Podobnie można przedstawić zapomocą całki krzywoliniowej wzór na objętość bryły obrotowej, zakreślonej obrotem powierzchni, np.  $ACBFE$  na fig. 63, około osi odciętych, a mianowicie:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{\overline{ACB}} y^2 dx$$

Jeżeli chodzi o obliczenie objętości bryły, zakreślonej obrotem powierzchni, ograniczonej dowolną linią zamkniętą  $l$ , to postępując podobnie, jak dla pola, otrzymujemy wzór:

$$V = - \pi \int_{(l)} y^2 dx$$

Także wzór na pole powierzchni obrotowej, zakreślonej obrotem łuku dowolnej linii (np.  $\overline{ACB}$  na fig. 63) około osi odciętych, można interpretować jako całkę krzywoliniową, a mianowicie całkę z funkcji  $Q(s, y) \equiv y$ . Otóż:

$$P = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y ds = 2\pi \int_{\overline{ACB}} u ds$$



## § 244. Zastosowanie całek krzywoliniowych w fizyce.

### I. Praca jako całka krzywoliniowa.

Bardzo ważnym zastosowaniem całek krzywoliniowych jest definicja i obliczanie pracy, wykonanej po dowolnej drodze przez dowolną siłę, działającą niekoniecznie w kierunku drogi i zmieniającą swą wielkość i kierunek zależnie od położenia punktu na drodze. W poprzednim rozdziale rozważaliśmy tylko specjalny przypadek, a mianowicie, gdy siła była skierowana wzdłuż drogi. Obecnie zajmemy się przypadkiem ogólnym. I tak określimy najpierw pracę, wykonaną wzdłuż odcinka  $AB$  linii prostej przez siłę  $F$  stałą, lecz tworzącą z tą prostą jakiś kąt  $\alpha$  (fig. 64). Praca  $L$  jest w tym wypadku równa iloczynowi z rzutu siły  $F$  na tę prostą i z długości tego odcinka, a więc:

$$(a) \quad L = F \cos \alpha \cdot AB$$

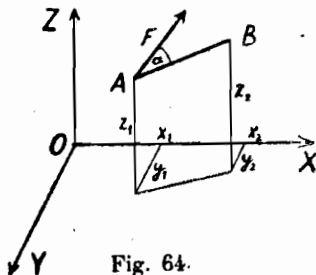


Fig. 64.

Uważajmy odcinek  $AB$  za wektor i zastąpmy go składowymi w kierunkach trzech osi współrzędnych. Te składowe mają wartości  $x_2 - x_1$ ,  $y_2 - y_1$ ,  $z_2 - z_1$ . Rozłóżmy także wektor  $F$ , reprezentujący siłę, na składowe w tych samych kierunkach i nazwijmy je:  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Pracę  $L$  możemy wyrazić także jako sumę trzech prac, wykonanych wzdłuż tych dróg składowych przez siły składowe, a więc:

$$(b) \quad L = P \cdot (x_2 - x_1) + Q \cdot (y_2 - y_1) + R \cdot (z_2 - z_1)$$

*Dowód.* Jeżeli wektor  $F$  tworzy z osiami kąty  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ , a odcinek  $AB$  kąty  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ , to  $P = F \cos \alpha_1$ ,  $Q = F \cos \beta_1$ ,  $R = F \cos \gamma_1$ ,  $x_2 - x_1 = AB \cos \alpha_2$ ,  $y_2 - y_1 = AB \cos \beta_2$ ,  $z_2 - z_1 = AB \cos \gamma_2$ , a więc:

$$P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1) = F \cdot AB \cdot (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2)$$

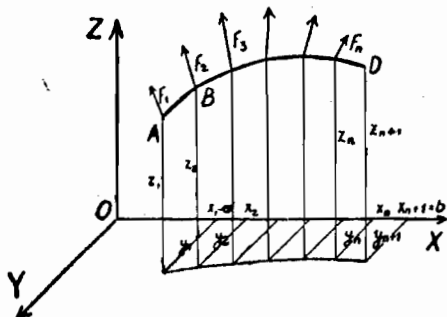
Wiadomo zaś z geometrii analitycznej, że wyrażenie, zawarte w nawiasie, przedstawia  $\cos \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem, zawartym między wektorami  $F$  i  $AB$ . A więc istotnie prawe strony wzorów (a) i (b) mają te same wartości.

Chodzi nam teraz o definicję pracy, wykonanej wzdłuż dowolnego łuku  $\widehat{AD}$  (fig. 65), przez siłę  $F$  zmienną. Wartości składowych tej siły w kierunku osi współrzędnych zmieniają się, zależnie od punktu, w którym działa siła, są więc funkcjami współrzędnych punktu bieżącego na krzywej; oznaczmy je zatem wyrażeniami  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ . Rozłóżmy łuk  $\widehat{AD}$  na dowolną liczbę części, np. na  $n$  części a każdy łuk częściowy zastąpmy cięciwą, łączącą jego końce. Zmienną siłę, działającą wzdłuż każdego łuku częściowego, zastąpmy stałą siłą, np. równą

Rachunek różniczkowy i całkowy. T. 2.

sile, działającej w początkowym punkcie tego łuku. Praca wzdłuż cięciwy  $AB$  ma zatem według wzoru (b) wartość:

$$L_1 = P(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1) + Q(x_1, y_1, z_1)(y_2 - y_1) + R(x_1, y_1, z_1)(z_2 - z_1)$$



Tworzymy sumę tych prac dla wszystkich cięciw, a mianowicie:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(x_i, y_i, z_i)(y_{i+1} - y_i) + R(x_i, y_i, z_i)(z_{i+1} - z_i))$$

Dzielimy następnie łuk  $\widehat{AD}$  w rozmaite sposoby na części tak, aby długości wszystkich łuków częściowych dążyły do zera; wtedy także różnice współrzędnych dążą do zera. Otrzymamy w ten sposób ciąg takich sum:

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_p, \dots$$

Granicą ciągu tych sum nazywamy *pracą zmiennej siły wzdłuż drogi*  $\widehat{AD}$ .

Aby wyznaczyć tę granicę, weźmy najpierw pod uwagę sumę, złożoną z dodajników  $P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i)$ . Jeżeli linja  $\widehat{AD}$  ma równania  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ , to:

$$P(x_i, y_i, z_i) = P(x_i, f(x_i), g(x_i)) = U(x_i)$$

jako funkcja złożona zmiennej  $x_i$ . Sumy postaci.

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^n U(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

dążą, jak wiemy, do całki:

$$\int_a^b U(x) dx = \int_a^b P(x, f(x), g(x)) dx = \int_{\widehat{AD}} P(x, y, z) dx$$

Podobnie ma się rzecz z dwiema pozostałymi częściami sumy  $S_1$ , a więc ciąg  $\{S_p\}$  tych sum dąży do całki krzywoliniowej:

$$L = \int_{\widehat{AD}} (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz)$$

Tę całkę krzywoliniową możnaby uważać wprost za *definicję pracy*.

Rozumowanie, oparte na równaniach  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ , zakłada, że do każdej branej pod uwagę odciętej  $x$  należy jeden punkt drogi  $\widehat{AD}$  (i podobnie dla  $y$  i  $z$

przy funkcjach  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ ). W przypadku ogólnym należy przeprowadzić całe rozumowanie, opierając się na parametrowym przedstawieniu łuku  $\widehat{AD}$ . Wtedy, stosując twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:  $x_{t+1} - x_t = x(t_{t+1}) - x(t_t) = x'(t_t)(t_{t+1} - t_t)$  i dla tej średniej wartości  $t_t$  trzeba brać wartość funkcji  $P$ , a zatem w sumie  $S$ , wystąpią wtedy wyrażenia:

$$P(x(t_t), y(t_t), z(t_t)) x'(t_t)(t_{t+1} - t_t) = V(t_t)(t_{t+1} - t_t)$$

Dalsze rozumowanie przeprowadza się tak, jak poprzednio.

### Przykład.

Obliczyć pracę, wykonaną wzdłuż łuku  $\widehat{AB}$  przez siłę, zwróconą w każdym punkcie drogi do stałego punktu i zależną tylko od odległości  $r$  od tego stałego punktu. Obieramy ten stały punkt za początek układu  $O$ . Wyraźmy równanie linii  $\widehat{AB}$  w formie parametrowej, używając jako parametru odległości  $r$ ; a więc:

$$x = \varphi(r), \quad y = \psi(r), \quad z = \chi(r)$$

Składowe siły  $F(r)$  w kierunku osi współrzędnych mają wartości:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= F(r) \cos \alpha = F(r) \cdot \frac{x}{r} \\ &= \frac{F(r) \varphi(r)}{r} = H(r) \end{aligned}$$

i podobnie:

$$Q(x, y, z) = K(r), \quad R(x, y, z) = M(r)$$

a więc zależą także tylko od  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Wobec tego praca wzdłuż drogi  $\widehat{AB}$  ma wartość:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\widehat{AB}} (H(r) \cdot \varphi'(r) + K(r) \cdot \psi'(r) + M(r) \cdot \chi'(r)) dr = \\ &= \int_{\widehat{AB}} T(r) dr = \int_A^B T(r) dr \end{aligned}$$

Jeżeli  $U(r)$  jest funkcją pierwotną funkcji  $T(r)$ , to:

$$L = U(r_B) - U(r_A)$$

Widzimy, że w tym wypadku wartość pracy, wykonanej po drodze  $\widehat{AB}$ , zależy tylko od odległości punktów końcowych łuku od stałego punktu  $O$ , a nie zależy od kształtu drogi  $\widehat{AB}$ .

Przypadek ten odgrywa w fizyce nadzwyczaj ważną rolę.

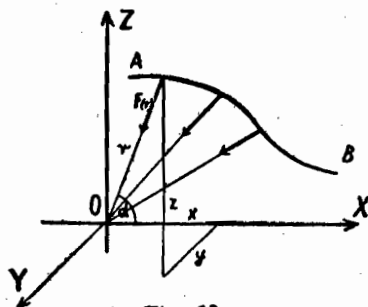


Fig. 66.

Niechaj czytelnik wykona obliczenie pracy między punktami  $A(a, b)$  i  $B(x, y)$ , leżącymi na płaszczyźnie  $(XY)$ , w przypadku, gdy siła działa według prawa Newtona, t. j.  $F = -\frac{m}{r^2}$ .

$$\left( \text{Wynik: } L = \frac{m}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{m}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{m}{r_B} - \frac{m}{r_A} \right).$$

*Ćwiczenie.* Dla siły o składowych  $P = -y$ ,  $Q = x$ ,  $Z = 0$  obliczyć pracę od  $A(0, 0, 0)$  do  $A(1, 1, 0)$  po prostej  $AB$  i po półkołu o średnicy  $AB$ . (Wynik  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = \frac{1}{2}\pi$ , a więc prace po tych drogach są różne).

## II. Zastosowanie całek krzywoliniowych do procesów termodynamicznych.

W termodynamice charakteryzuje się „stan“ ciała jednorodnego zapomocą jego objętości  $v$  i ciśnienia  $p$ , jakiemu jest poddane to ciało. Te zmienne  $v$  i  $p$  są ze sobą związane pewnym równaniem, np. dla gazów doskonałych:  $pv = RT$ .

Jeżeli początkowemu stanowi ciała odpowiadają wartości  $v_1, p_1$ , t. j. ciało ma objętość  $v_1$  i poddane jest ciśnieniu  $p_1$ , a następnie doprowadzimy to ciało w jakikolwiek sposób do stanu  $(v_2, p_2)$ , to zmieni się w ogólności ilość ciepła, zawartego w tym ciele, o  $Q$  kaloryj. Użyjmy do przedstawienia związku między zmiennymi  $v$  i  $p$  układu współrzędnych (fig. 67). Punkt  $A$  odpowiada stanowi  $(v_1, p_1)$  a punkt  $B$  stanowi  $(v_2, p_2)$ . Od punktu  $A$  do  $B$  można dojść rozmaitymi drogami.

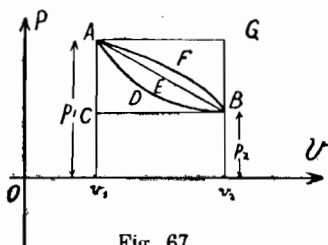


Fig. 67.

Tak np. łamana droga  $ACB$  oznacza, że najpierw zmieniamy ciśnienie z  $p_1$  na  $p_2$  przy stałej objętości  $v_1$ , a potem zmieniamy objętość do wartości  $v_2$ . Jeżeli zmieniamy równocześnie  $v$  i  $p$  według wzoru  $pv = RT$  przy stałej temperaturze  $T$ , to punkt  $A$  porusza się po łuku  $\widehat{ADB}$  hiperboli równobocznej (zmiana izotermiczna) a można się też poruszać po rozmaitych innych drogach:  $AEB$ ,  $AFB$  i t. p. Bardzo ważną kwestją jest badanie, jak się zmienia przy takich procesach ilość ciepła, zawartego w ciele i jego energia wewnętrzna. Otóż okazuje się w termodynamice, że przyrost energii wewnętrznej  $u(v, p)$  ciała można wyrazić zapomocą całki krzywoliniowej.

Tak np. dla drogi  $ADB$  otrzymujemy na ten przyrost energii wzór:

$$\int_{ADB} (C_v(T, v)dT + (l - p)dv)$$

gdzie  $C_v$  oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości, a  $l$  ciepło utajone (por. tom I, str. 360). Dowodzi się, że ta całka ma taką samą wartość dla różnych dróg, łączących te same dwa punkty. Natomiast zmianę  $Q$  ilości ciepła można wyrazić zapomocą całki krzywoliniowej z wyrażenia  $\frac{\partial u}{\partial v} dv + \frac{\partial u}{\partial p} dp + p dv$  czyli  $du(v, p) + p \cdot dv$ , gdzie funkcja  $u(v, p)$  jest energią wewnętrzną ciała. Otóż dla drogi np.  $\overline{ADB}$  otrzymujemy:

$$Q = \int_{\overline{ADB}} (du(v, p) + p dv)$$

Dla różnych dróg otrzymuje się naogół różne ilości ciepła.

Jeżeli natomiast podzielimy wyrażenie, znajdujące się pod znakiem całki, przez temperaturę  $T$ , która jest funkcją zmiennych  $v$  i  $p$  (np. dla gazów doskonałych  $T = \frac{p \cdot v}{R}$ ), to otrzymamy całkę krzywoliniową:

$$S = \int_{\overline{ADB}} \frac{du(v, p) + p dv}{T(v, p)}$$

Otóż okazuje się, że wartość tej całki krzywoliniowej nie zależy od drogi całkowania, a zależy tylko od stanu początkowego  $A(v_1, p_1)$  i końcowego  $B(v_2, p_2)$ . Wyrażenie  $S$  nazywamy *entropją* ciała (por. tom I, str. 360). Badanie tych dwóch całek krzywoliniowych odgrywa zasadniczo ważną rolę w termodynamice.

Całki krzywoliniowe znajdują też zastosowania w innych działach fizyki, np. w hydrodynamice i w elektrodynamice.

### III. Zastosowanie całek krzywoliniowych do obliczania momentów.

Wyznaczyliśmy momenty statyczne powierzchni, ograniczonych z jednej strony dowolnym łukiem, który proste równoległe do osi  $y$ -ów przecinają tylko w jednym punkcie, a z innych stron rzędnymi w punktach końcowych łuku i osią odciętych. Otrzymaliśmy przytęm zupełnie inne wzory na momenty statyczne względem osi odciętych a inne względem osi rzędnych. Używając całek krzywoliniowych, możemy wyrazić jednym wzorem moment powierzchni, zamkniętej dowolną linią a ponadto otrzymujemy zupełnie analogicznie wzory dla obu osi.

Obierzmy gęstość stałą:  $\rho = 1$ . Wtedy moment statyczny powierzchni, zamkniętej linią  $l$  (fig. 68), względem osi odciętych, ma wartość:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y_1^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b y dx$$

jeżeli  $y = y_1(x)$  oznacza równanie łuku  $\widehat{ACB}$  a  $y = y_2(x)$  łuku  $\widehat{ADB}$ . Obydwie te całki możemy jednak uważać za całki krzywoliniowe, a mianowicie:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{\widehat{ACB}} y^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\widehat{ADB}} y^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\widehat{ACB}} y^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\widehat{BDA}} y^2 dx$$

Stąd:

$$(146) \quad M_x = \frac{1}{2} \int_{\widehat{ACBDA}} y^2 dx = - \frac{1}{2} \int_{(l)} y^2 dx$$

Znak — pochodzi stąd, że obiegając linię  $l$  w porządku  $A, C, B, D, A$ , mamy powierzchnię, zamkniętą tą linią, po prawej ręce.

Moment statyczny tej samej powierzchni względem osi rzędnych ma wartość:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{2} \int_a^\beta x_1 dy - \frac{1}{2} \int_a^\beta x_2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{DBC}} x^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\widehat{DAC}} x^2 dy = \frac{1}{2} \int_{\widehat{DBCAD}} x^2 dy \end{aligned}$$

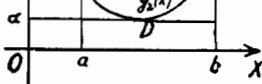


Fig. 68.

a więc:

$$(147) \quad M_y = + \frac{1}{2} \int_{(l)} x^2 dy$$

Otrzymaliśmy więc dla obu momentów wzory, różniące się tylko znakiem i przemianą liter. Podobnie dla momentów bezwładności powierzchni, zamkniętej dowolną linią  $l$ , względem obu osi, otrzymujemy przy użyciu całek krzywoliniowych dwa wzory:

$$(148) \quad B_x = - \frac{1}{8} \int_{(l)} y^3 dx, \quad B_y = \frac{1}{8} \int_{(l)} x^3 dy$$

w których są tylko przemienione litery  $x, y$  a znaki zmienione.

## § 245. Zastosowanie całek krzywoliniowych w teorii funkcji zmiennej zespolonej<sup>1</sup>.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych przedstawiamy graficznie zapomocą punktów płaszczyzny, zwanej płaszczyzną liczbową (Gaussa). Każdej liczbie zespolonej:

$$z = x + iy$$

<sup>1</sup> Zasadnicze wiadomości o zmiennej zespolonej są podane w rozdziale końcowym.

przyporządkowujemy punkt o współrzędnych  $x, y$  i odwrotnie każdemu punktowi tej płaszczyzny o współrzędnych  $x, y$  przyporządkowujemy liczbę zespoloną  $z = x + iy$ . Weźmy pod uwagę jakiś obszar  $(D)$  tej płaszczyzny (fig. 69). Jeżeli każdej liczbie  $z = x + iy$  z tego obszaru przyporządkujemy jakąś liczbę zespoloną  $u = P + iQ$ , to  $z$  nazywamy zmienną niezależną a  $u$  zmienną zależną, czyli funkcją tej zmiennej  $z$  i piszemy:

$$u = f(z)$$

Nie można podać obrazu graficznego tej funkcji nawet przy użyciu trzech osi współrzędnych, albowiem do przedstawienia wartości  $u = P + iQ$  trzeba by użyć jeszcze dwóch osi (dwie są potrzebne dla  $z = x + iy$ ), a więc mielibyśmy do czynienia z przestrzenią czterowymiarową, niewyobrażalną.

Natomiast można interpretować graficznie związek  $u = f(z)$  między zmiennymi zespolonymi  $u, z$  w inny sposób, a mianowicie zapomocą odzorowania płaszczyzny  $(XY)$  na inną płaszczyznę  $(\bar{P}\bar{Q})$  (por. tom I, § 121, str. 364 i nast.).

Każdemu punktowi  $z$  z obszaru  $(D)$ , czyli każdej parze liczb rzeczywistych  $x, y$ , które są współrzędnymi punktu tego obszaru, odpowiada jakieś rzeczywiste  $P$  i jakieś rzeczywiste  $Q$ . A zatem  $P$  i  $Q$  są funkcjami rzeczywistymi dwóch zmiennych rzeczywistych  $x, y$ . A więc:

$$u = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

Zajmiemy się tu zdefiniowaniem całki oznaczonej z funkcji  $f(z)$  zmiennej zespolonej, branej po różnych drogach w granicach od  $z = z_A$  do  $z = z_B$ , odpowiadających punktom  $A$  i  $B$  obszaru  $(D)$ . Połączmy w tym celu punkt  $A$  z  $B$  dowolnym łukiem  $\widehat{ACB}$ , leżącym w obszarze  $(D)$  i obierzmy na tym łuku dowolną liczbę punktów  $z_A = z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, z_{n+1} = z_B$ , o współrzędnych  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ . Utwórzmy sumę:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=1}^n (P(x_k, y_k) + iQ(x_k, y_k))(x_{k+1} + iy_{k+1} - x_k - iy_k)$$

to znaczy sumę wyrażeń postaci:

$$P(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) - Q(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) + \\ + i[P(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) + Q(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k)]$$

Utwórzmy następnie ciąg  $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$  takich sum, obierając przedziały częściowe zmiennych  $x$  i  $y$  tak, aby wszystkie dążyły do zera. Granicę

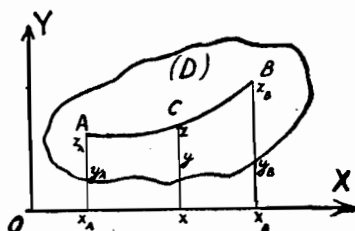


Fig. 69.

ciągu tych sum nazywamy całką oznaczoną funkcji  $f(z)$  zmiennej zespolonej od  $z = z_A$  do  $z = z_B$  po drodze  $\widehat{ACB}$ . Ta granica składa się z dwóch całek *krzywoliniowych*, a mianowicie:

$$(149) \int_{\widehat{ACB}}^z f(z) dz = \int_{\widehat{ACB}} (P(x, y) dx - Q(x, y) dy) + i \int_{\widehat{ACB}} (P(x, y) dy + Q(x, y) dx)$$

Wartość takiej całki zależy w ogólności nie tylko od granic całkowania  $z_A, z_B$ , lecz także od *drogi*, po której całkujemy. Szczególnie ważne są takie specjalne funkcje zmiennej zespolonej, których całki oznaczone nie zależą od drogi całkowania w pewnym obszarze.

## Ustęp II.

### RÓŻNICZKOWANIE I CAŁKOWANIE CAŁEK WEDŁUG PARAMETRU.

#### § 246. Całki pojedyncze z funkcji dwóch zmiennych niezależnych.

Rozważaliśmy dotychczas całki z funkcji dwóch zmiennych  $x, y$  w przypadku, gdy te zmienne były od siebie *zależne*, co prowadziło do całek *krzywoliniowych*. Obecnie omówimy przypadek, gdy  $x$  i  $y$  są zmiennymi *niezależnymi*. Funkcję:

$$z = f(x, y)$$

można wtedy całkować według jednej zmiennej, uważając drugą za *parametr*.

Załóżmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych w obszarze prostokątnym, t. j. dla  $x$ , zawartych w przedziale  $\langle a_1, a_2 \rangle$ , a  $y$  w przedziale  $\langle b_1, b_2 \rangle$ . Jeżeli ustalimy wartość  $y$ , to  $f(x, y)$  będzie ciągłą funkcją jednej zmiennej  $x$ , a więc istnieje całka:

$$(a) \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = g(y)$$

a wartość jej zależy od tego, jaką wartość obraliśmy za  $y$ . Uwidoczniliśmy to, kładąc tę całkę równą jakiejś funkcji  $g(y)$  zmiennej  $y$ . Jeżeli więc  $x$  uważamy za zmienną całkowania, a  $y$  za parametr, to ta całka jest funkcją parametru.

W interpretacji geometrycznej obrazem funkcji  $f(x, y)$  jest płat jakiejś powierzchni nad prostokątem (fig. 70). Wartości tej funkcji, odpowiadające stałe obranemu  $y$ , mają jako obraz linię  $AB$ , otrzymaną przez przekrój tej powierzchni zapomocą płaszczyzny równoległej do płasz-



czyzny ( $XZ$ ) w odstępnie  $y$ . Wartość  $g(y)$  całki (a) jest równa polu przekroju  $ABCD$ . Gdy zmieniamy  $y$ , to pole zmienia się według prawa  $g(y)$ . Zajmiemy się własnościami tej całki. I tak udowodnimy przede wszystkim, że całka (a) jest ciągłą funkcją parametru  $y$ , gdy  $f(x, y)$  jest ciągła w prostokącie.

*Dowód.* Tworzymy różnicę:

$$g(y+h) - g(y) = \int_{a_1}^{a_2} (f(x, y+h) - f(x, y)) dx$$

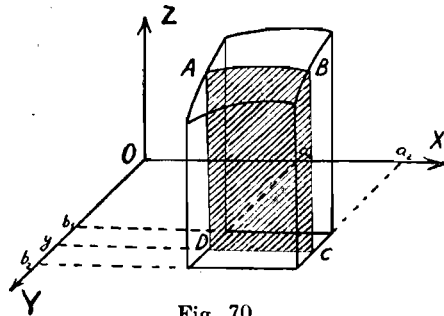


Fig. 70.

przyczem wartości  $y$  i  $y+h$  są wzięte z przedziału  $\langle b_1, b_2 \rangle$ . Na mocy wzoru (60), str. 79, jest:

$$|g(y+h) - g(y)| \leq \int_{a_1}^{a_2} |f(x, y+h) - f(x, y)| dx$$

Ponieważ funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w całym obszarze zamkniętym (w prostokącie), przeto jest w nim jednostajnie ciągła. Do każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  można zatem dobrać takie  $\delta$ , zależne tylko od  $\epsilon$  a niezależne od  $x, y$ , że dla wszystkich  $|h| < \delta$  jest:

$$|f(x, y+h) - f(x, y)| < \epsilon$$

Wobec tego:

$$(b) \quad |g(y+h) - g(y)| < \int_{a_1}^{a_2} \epsilon dx = \epsilon(a_2 - a_1) = \epsilon_1$$

Do każdego  $\epsilon_1$ , można więc dobrać takie  $\delta$ , że dla wszystkich  $|h| < \delta$  spełnia się ta nierówność, a to dowodzi, że  $g(y)$  jest ciągłą funkcją parametru  $y$  w przedziale  $\langle b_1, b_2 \rangle$ .

*Przykład.* Scałkujemy według zmiennej  $x$  od 1 do 2 funkcję  $f(x, y) = x^y$ . Jest ona ciągła np. w prostokącie, określonym warunkami:

$$1 \leq x \leq 2, \quad -2 \leq y \leq +2$$

Otóż:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^y dx &= \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_1^2 = \frac{2^{y+1} - 1}{y+1} && \text{dla } y \neq -1 \\ &= \log x \Big|_1^2 = \log 2 && \text{„ } y = -1 \end{aligned}$$

Moglibyśmy mieć wątpliwość, czy funkcja  $g(y)$ , określona temi dwoma wzorami, jest ciągła dla  $y = -1$ . Otóż ta ciągłość wynika z dowiedzionego twierdzenia. Możemy to zresztą sprawdzić także bezpośrednio, obliczając przy pomocy reguły Hospitala:

$$\lim_{y \rightarrow -1} \frac{2^{y+1} - 1}{y+1} = \lim_{y \rightarrow -1} \frac{2^{y+1} \log 2}{1} = \log 2$$

A więc funkcja  $g(y)$  dąży do  $\log 2$  przy  $y \rightarrow -1$  i osiąga tę wartość dla  $y = -1$ , a zatem jest ciągła w punkcie  $y = -1$ .

Zbadajmy teraz:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx$$

gdy  $f(x, y)$  jest w danym prostokącie nieciągła lecz ograniczona i posiada skończoną liczbę linii nieciągłości, dających się zamknąć w obszar o dowolnie małym polu, wzdłuż których posiada funkcja skończone skoki.

Wyjaśnimy ten przypadek poglądowo. Niechaj np. powierzchnia o równaniu  $z = f(x, y)$  posiada jedną linię przerwy, jak na fig. 71.

Otóż funkcja:

$$(a) \quad g(y) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx$$

przedstawia dla każdego  $y$  pole przekroju bryły, uwidocznionej na rysunku, płaszczyzną równoległą do  $(ZX)$ , w odstępnie  $y$  od tej płaszczyzny. Na figurze zacięniowano jeden taki przekrój, należący do  $y = y_1$ . Jak-

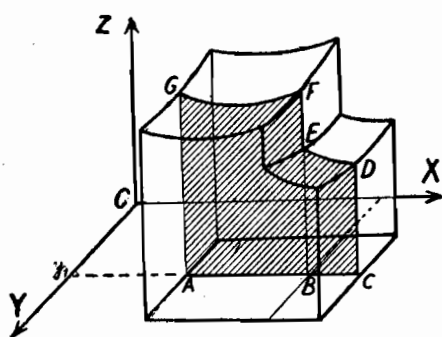


Fig. 71.

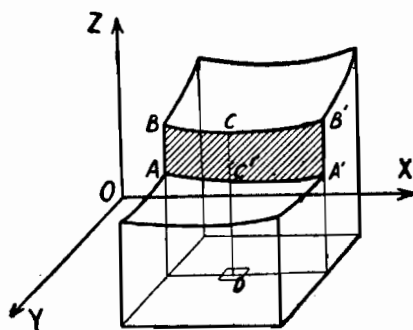


Fig. 72.

kolwiek linia  $GFED$ , ograniczająca ten przekrój z jednej strony, nie jest ciągła w punkcie  $E$ , to jednak jego pole ma skończoną, oznaczoną wartość, wyrażoną zapomocą całki uogólnionej (a).

Gdy zmieniamy  $y$ , to przechodzimy do coraz dalszych przekrojów. Zmiana wielkości pola odbywa się przytem w sposób ciągły, a więc  $g(y)$  jest ciągłą funkcją zmiennej  $y$ .

Jeżeli linia przerwy przebiega równolegle do płaszczyzny  $(ZX)$ , jak na fig. 72, to przekrój zmienia się w sposób ciągły tak długo, aż dojdziemy do linii przerwy. W tem miejscu następuje skończony przyrost przekroju o  $AA'B'B$ , a więc skończony skok funkcji  $g(y)$ .

### § 247. Różniczkowanie całek własnych według parametru.

Udowodnimy prawdziwość następującego twierdzenia o różniczkowalności funkcji  $g(y)$ . Jeżeli funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w prostokącie, określonym warunkami  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ , i posiada cząstkową pochodną  $f_y(x, y)$  ciągłą w tym prostokącie, to całka (a) posiada pochodną według parametru  $y$ , a oblicza się tę pochodną, różniczkując według tego parametru funkcję podcałkową.

Twierdzimy więc, że przy tych założeniach zachodzi wzór:

$$(150) \quad \boxed{\frac{d}{dy} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y) dx}$$

Ten wzór na różniczkowanie całki według parametru nazywamy regułą Leibniza.

*Dowód.* Chodzi nam o pochodną funkcji  $g(y)$ , określonej wzorem (a) na str. 200. Iloraz różnicowy ma wartość:

$$\Delta(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx$$

Chodzi o obliczenie granicy wyrażenia  $\Delta(h)$ , gdy  $h \rightarrow 0$ .

Stosując do funkcji podcałkowej twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:

$$\Delta(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y + \vartheta h) dx$$

Przedstawiamy tę całkę w postaci:

$$\Delta(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y) dx + \int_{a_1}^{a_2} (f_y(x, y + \vartheta h) - f_y(x, y)) dx$$

Z jednostajnej ciągłości cząstkowej pochodnej  $f_y(x, y)$  wynika, że:

$$|f_y(x, y + \vartheta h) - f_y(x, y)| < \varepsilon \text{ dla } |h| < \delta$$

a więc:

$$\left| \Delta(h) - \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y) dx \right| < \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon dx = \varepsilon(a_2 - a_1) = \varepsilon_1$$

Do każdego  $\varepsilon_1$  można więc dobrać takie  $\delta$ , że dla  $|h| < \delta$  spełnia się ta nierówność. To zaś znaczy, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y) dx$$

czyli:

$$g'(y) = \int_{a_1}^{a_2} f_y(x, y) dx$$

c. b. d. o.

Przykład. Nietrudno jest obliczyć wartość całki:

$$g(a) = \int_0^x \frac{dx}{x^2 + a} \quad \text{przy} \quad a > 0$$

Stosując mianowicie podstawienie  $t = \frac{x}{\sqrt{a}}$ , sprowadzamy ją do całki z  $\frac{1}{1+t^2}$  i otrzymujemy:

$$(A) \quad \int_0^x \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$$

Parametrem jest w tej całce  $a$  (trzeba więc we wzorze (150) zastąpić  $y$  literą  $a$ ). Funkcja podcałkowa  $\frac{1}{x^2+a}$  jest ciągłą funkcją dwóch zmiennych  $x, a$  w każdym prostokącie o dodatnich  $a$ , a także jej cząstkowe pochodne wszystkich rzędów według tej zmiennej  $a$  są ciągłe w każdym takim prostokącie. Możemy więc do tej całki zastosować regułę Leibniza różniczkowania według parametru. Otrzymujemy w ten sposób:

$$\begin{aligned} -1 \cdot \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^2} &= \frac{d}{da} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \\ (-1)^2 \cdot 2! \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^3} &= \frac{d^2}{da^2} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \end{aligned}$$

ogólnie:

$$(B) \quad (-1)^{n-1} (n-1)! \int_0^x \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right)$$

W ten sposób ze znanej całki (A) otrzymujemy szereg trudniejszych, bardziej skomplikowanych całek, nie wykonując żadnego całkowania, tylko różniczkowanie. Otrzymany wzór (B) jest zwięzłym ujęciem wyniku całkowania funkcji  $\frac{1}{(x^2+a)^n}$ , który to wynik otrzymaliśmy na str. 28 w bardzo zawiłej postaci, opierając się na wzorze redukcyjnym. Niechaj czytelnik wyprowadzi w podobny sposób z prostej całki:

$$\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{przy} \quad a > 0$$

wzór:

$$\int_0^1 x^a (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(a+1)^{n+1}}$$

podający wartość dość skomplikowanej całki.

Regułę Leibniza rozszerzymy także na przypadek, gdy granice całki są zależne od parametru, t. j. na całki postaci:

$$\int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f(x, y) dx = g(y)$$

Załóżmy, jak poprzednio, że  $f(x, y)$  jest ciągła i ma ciągłą pochodną  $f$ , w prostokącie  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ , a ponadto, że  $a_1 \leq a_1(y) \leq a_2$ ,  $a_1 \leq a_2(y) \leq a_2$ , i że pochodne  $a_1'(y)$ ,  $a_2'(y)$  są ciągłe w przedziale  $\langle b_1, b_2 \rangle$ .

Przypadek ten sprowadzimy do poprzedniego, wprowadzając za  $x$  nową zmienną  $t$ , związaną z  $x, y$  wzorem:  $x = a_1(y) + (a_2(y) - a_1(y)) t$ . Dla  $x = a_1(y)$  jest  $t = 0$  a dla  $x = a_2(y)$  jest  $t = 1$ . Otrzymujemy więc całkę o stałych granicach, niezależnych od parametru  $y$ :

$$g(y) = \int_0^1 f(x(t, y), y) \frac{\partial x}{\partial t} dt$$

Do tej całki stosujemy regułę Leibniza z wzoru (150) i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + f \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y} \right] dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial t} dt + \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial y} + f \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y} \right) dt \end{aligned}$$

czyli:

$$g'(y) = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y} dx + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left( f \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \right) dt = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f_y(x, y) dx + f \frac{\partial x}{\partial y} \Big|_{t=0}^{t=1}$$

$$(151) \quad \boxed{g'(y) = \int_{a_1(y)}^{a_2(y)} f_y(x, y) dx + f(a_2(y), y) \frac{da_2}{dy} - f(a_1(y), y) \frac{da_1}{dy}}$$

*Przykłady.*

1) Obliczyć pochodną całki:

$$g(y) = \int_0^y \sin(xy) dx$$

według parametru  $y$ . Stosując wzór (151), otrzymujemy:

$$g'(y) = \int_0^y x \cos(xy) dx + \sin(y^2)$$

to nie cyfrowe

2) Dana jest całka:

$$(M) \quad g(y) = F_n(y) = \int_0^y \frac{(y-x)^n}{n!} f(x) dx$$

przyczem zakładamy, że  $f(x)$  jest funkcją ciągłą.

Obliczyć  $(n+1)$ -szą pochodną tej całki oznaczonej według zmiennej  $y$ . Z wzoru (151) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^y \frac{n(y-x)^{n-1}}{n!} f(x) dx + \frac{(y-y)^n}{n!} f(x) - \frac{(y-0)^n}{n!} \cdot 0 = \\ &= \int_0^y \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x) dx \end{aligned}$$

A więc:

$$g'(y) = F_{n-1}(y)$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$g''(y) = F_{n-2}(y) \quad \text{i t. d.}$$

a ostatecznie:

$$g^{(n)}(y) = F_0(y) = \int_0^y f(x) dx$$

Wreszcie:

$$g^{(n+1)}(y) = f(y)$$

Zatem funkcja  $g(y)$  ma tę własność, że jej  $(n+1)$ -sza pochodna ma wartość  $f(y)$ . (Zarówno sama funkcja  $g(y)$  jak i jej pochodne aż do  $n$ -tej włącznie mają wartość 0 dla  $y=0$ , albowiem wtedy górna granica całki jest równa dolnej). A zatem jeżeli scałkujemy dowolną funkcję ciągłą  $f(y)$   $(n+1)$ -krotnie, to otrzymany wynik można przedstawić w postaci zwykłej, jednokrotnej całki, używając wzoru (M).

## § 248. Całkowanie całek właściwych według parametru.

Wykazaliśmy już (w § 246), że całka:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = g(y)$$

jest ciągłą funkcją parametru  $y$ , jeżeli funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w prostokącie. Wobec tego istnieje całka z tej funkcji według zmiennej  $y$ . Wykażemy, że tę całkę można obliczyć, wykonując całkowanie według  $y$

pod znakiem całki, odnoszącej się do zmiennej  $x$ . Innymi słowami twierdzimy, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$(152) \quad \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right) dy = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

Jeżeli więc mamy całkować funkcję ciągłą dwóch zmiennych  $x, y$  w stałych granicach, najpierw według  $x$  a wynik według  $y$ , to możemy *przełożyć porządek całkowania*, t. j. całkować najpierw według  $y$  a potem wynik według  $x$ .

*Dowód.*

Weźmy zamiast stałej górnej granicy całkowania  $b_2$  zmienną granicę  $b$  i obliczmy pochodne obu stron wzoru (152) według  $b$ . Otóż dla:

$$h(b) = \int_{b_1}^b \left( \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right) dy$$

pochodną jest, jak wiadomo, funkcja podcałkowa, w której zamiast  $y$  wstawiono tę górną granicę  $b$ , a więc:

$$h'(b) = \int_{a_1}^{a_2} f(x, b) dx$$

Dla drugiej strony wzoru (152), t. j. dla:

$$k(b) = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{b_1}^b f(x, y) dy \right) dx$$

tworzymy pochodną według reguły Leibniza, a więc:

$$k'(b) = \int_{a_1}^{a_2} \left( \frac{\partial}{\partial b} \int_{b_1}^b f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x, b) dx$$

Ponieważ  $h'(b) = k'(b)$ , przeto te dwie funkcje mogą się różnić tylko o stałą liczbę, a więc  $h(b) = k(b) + C$ . Aby wyznaczyć tę stałą, połączmy  $b = b_1$ . Wtedy  $h(b_1) = 0$  i  $k(b_1) = 0$  i zostaje  $0 = 0 + C$ , a więc  $C = 0$ . Zatem:

$$h(b) = k(b)$$

dla wszystkich  $b$  z przedziału  $\langle b_1, b_2 \rangle$ . Podstawmy  $b = b_2$ , to otrzymamy  $h(b_2) = k(b_2)$ , a to jest właśnie wzór (152), napisany w skróceniu.

*Przykład.*

Obliczyć:

$$I = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy, \text{ przyczem } a > 0 \text{ i } b > 0.$$

Całkując najpierw według  $x$ , a potem według  $y$ , otrzymujemy:

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1}$$

a więc:

$$I = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \log(y+1) \Big|_a^b = \log \frac{b+1}{a+1}$$

Ten sam wynik musimy otrzymać, całkując w porządku zmienionym, a więc:

$$I = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx = \log \frac{b+1}{a+1}$$

Całka wewnętrzna ma wartość:

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^y}{\log x} \Big|_{y=a}^{y=b} = \frac{x^b - x^a}{\log x}$$

a więc:

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{b+1}{a+1}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wartość całki oznaczonej z takiej funkcji, która się nie da scałkować elementarnymi metodami, a mianowicie z funkcji:

$$\frac{x^b - x^a}{\log x}$$

## § 249. Różniczkowanie i całkowanie całek niewłaściwych według parametru.

Reguły różniczkowania i całkowania całek oznaczonych według parametru wyprowadziliśmy tylko dla całek właściwych. Najważniejsze są jednak właśnie całki niewłaściwe, zależne od parametru. Do takich całek nie zawsze stosują się powyższe reguły, jak to zobaczymy z następujących przykładów.



1) Okażemy (na str. 215), że istnieje całka niewłaściwa:

$$g(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x} dx = \frac{1}{2} \pi \quad \text{dla } y > 0.$$

Pochodna jej  $g'(y)$ , jako pochodna stałej liczby  $\frac{1}{2} \pi$ , ma wartość 0.

Gdybyśmy jednak próbowali obliczyć tę pochodną zapomocą reguły Leibniza, to otrzymalibyśmy:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sin yx}{x} \right) dx = \int_0^{\infty} \cos(yx) dx$$

Aby wyznaczyć tę całkę niewłaściwą, obliczamy najpierw:

$$\int_0^a \cos(yx) dx = \frac{\sin(yx)}{y} \Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{\sin ya}{y}$$

Ta funkcja nie dąży do żadnej granicy przy  $a$  dążącym do  $\infty$ , lecz oscyluje pomiędzy  $-\frac{1}{y}$  i  $+\frac{1}{y}$ . A więc nie otrzymaliśmy prawdziwej wartości  $g'(y)$ , zatem reguły Leibniza nie można stosować w tym przypadku.

2) Podobnie ma się rzecz z całkowaniem całki oznaczonej według parametru. W całkach niewłaściwych nie zawsze można zmieniać porządek całkowania. Weźmy pod uwagę całkę:

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^2} dx = g(y) = \frac{-x}{(x+y)^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{(1+y)^2}$$

Funkcja podcałkowa jest tu nieciągła dla  $x=0$ ,  $y=0$ , a więc jest to całka niewłaściwa.

Scałkujmy ją według parametru  $y$  od 0 do 1. Otrzymujemy:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^2} dx \right) dy = \int_0^1 -\frac{1}{(1+y)^2} dy = \frac{1}{1+y} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Zmieniwszy zaś porządek całkowania, t. j. całkując funkcję podcałkową najpierw według parametru  $y$ , otrzymujemy:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

a więc wynik fałszywy.

Aby zatem do całek niewłaściwych można stosować takie reguły różniczkowania i całkowania według parametru, jak dla całek właściwych.

wych, nie wystarcza, aby te całki istniały, czyli aby były *zbieżne*. Okazuje natomiast, że wystarczy, jeżeli te całki są zbieżne w pewien szczególnie sposób, a mianowicie, jeżeli są *jednostajnie zbieżne*.

Całkę niewłaściwą:

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx$$

nazywamy jednostajnie zbieżną w jakimś przedziale zmiennej  $y$ , jeżeli do każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  da się dobrać taką liczbę  $N_1(\epsilon)$ , zależną tylko od  $\epsilon$ , a *niezależną* od  $y$ , że:

$$\left| \int_N^{\infty} f(x, y) dx \right| < \epsilon$$

dla wszystkich  $N > N_1(\epsilon)$ .

Ponieważ:

$$\int_a^{\infty} f(x, y) dx = \int_a^N f(x, y) dx + \int_N^{\infty} f(x, y) dx$$

przeto ten drugi dodatek można uważać za rodzaj reszty  $R_N$ , otrzymanej z danej całki niewłaściwej w granicach od  $a$  do  $\infty$ , gdy z niej opuścimy część, wziętą w granicach od  $a$  do  $N$ , przy odpowiednio wielkim  $N$ . Otóż zbieżność jest wtedy jednostajna, gdy się da dobrać takie  $N_1$ , wspólne dla wszystkich  $y$ , by owa reszta była dowolnie mała, gdy  $N > N_1$ . Podobnie określamy jednostajną zbieżność dla takich całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa wzrasta nieograniczenie. Gdy np. takim punktem nieciągłości jest górna granica  $a$ , całki:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx$$

to całkę nazywamy jednostajnie zbieżną, jeżeli do każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  da się dobrać takie dodatnie  $\delta_1(\epsilon)$ , zależne tylko od  $\epsilon$ , a *niezależne* od  $y$ , że:

$$\left| \int_{a_2-\delta}^{a_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon$$

dla wszystkich  $\delta$ , spełniających warunki:

$$0 < \delta < \delta_1(\epsilon)$$

Nietrudno okazać, że jednostajnie zbieżna całka niewłaściwa z funkcji ciągłej jest ciągłą funkcją parametru.

Jednostajną zbieżność całki niewłaściwej można często rozstrzygnąć

zapomocą następującego kryterjum. Jeżeli istnieje taka dodatnia funkcja  $\varphi(x)$ , niezależna od parametru  $y$ , że:

$$(I) \quad |f(x, y)| \leq \varphi(x)$$

dla wszystkich  $x > a$ , a  $b_1 \leq y \leq b_2$ , i jeżeli istnieje całka:

$$(II) \quad \int_a^{\infty} \varphi(x) dx$$

to całka  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  jest jednostajnie zbieżna.

*Dowód.* Wskutek zbieżności całki (II) można dobrać do każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  taką liczbę  $N_1$ , zależną oczywiście tylko od  $\epsilon$ , że dla  $N > N_1$ , jest:

$$\int_N^{\infty} \varphi(x) dx < \epsilon$$

Wskutek nierówności (I) jest jednak:

$$\left| \int_N^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \int_N^{\infty} \varphi(x) dx < \epsilon \quad \text{dla } N > N_1(\epsilon),$$

a więc spełnia się warunek jednostajnej zbieżności (albowiem  $N_1(\epsilon)$  nie zależy od  $y$ ).

*Przykłady.*

$$1) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(yx) dx$$

jest jednostajnie zbieżna, bo:

$$|e^{-x} \cos(yx)| \leq e^{-x}$$

a całka  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  istnieje (jest równa 1).

$$2) \quad \int_0^{\infty} e^{-yx} dx \text{ jest jednostajnie zbieżna dla wszystkich } y > l > 0.$$

Jeżeli bowiem obierzemy dowolną liczbę stałą  $l > 0$  i bierzemy pod uwagę  $y > l$ , to:

$$|f(x, y)| = e^{-yx} < e^{-lx} = \varphi(x)$$

a ponadto istnieje całka:

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-lx} dx = \frac{e^{-lx}}{-l} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{0}{-l} - \frac{1}{-l} = \frac{1}{l}$$

Jeżeli całka niewłaściwa z funkcji ciągłej  $f(x, y)$ , zależna od parametru, jest jednostajnie zbieżna, to można zmieniać porządek całkowania, t. j. można całkować według parametru pod znakiem całki i otrzymuje się całkę, która jest także jednostajnie zbieżna.

Dowód. W całości:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy$$

rozłożmy wewnętrzną całkę w następujący sposób:

$$(c) \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^N f(x, y) dx + \int_N^\infty f(x, y) dx = \int_a^N f(x, y) dx + r_N(y)$$

Wtedy:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_a^N f(x, y) dx \right) dy + \int_{b_1}^{b_2} r_N(y) dy$$

W pierwszej całości, która jest całką właściwą, można zmienić porządek całkowania, a więc:

$$I = \int_a^N \left( \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx + \int_{b_1}^{b_2} r_N(y) dy$$

Wskutek jednostajnej zbieżności całki (c) jest  $|r_N(y)| < \varepsilon$  przy odpowiednio wielkiem  $N$ , a więc:

$$\left| I - \int_a^N \left( \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx \right| < \varepsilon(b_2 - b_1)$$

To dowodzi, że dla  $N \rightarrow \infty$  całka, występująca w tym wzorze, dąży do  $I$  (i to jednostajnie) a więc:

$$I = \int_a^\infty \left( \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

Widzimy więc, że tę samą wartość całki  $I$  dostajemy, gdy zmienimy porządek całkowania.

Podobnie dowodzi się tego twierdzenia dla takich całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa wzrasta nieograniczenie dla skończonych wartości  $x$ .

W podobny sposób rozszerzamy na całki niewłaściwe regułę Leibniza, dotyczącą różniczkowania całki według parametru.

Jeżeli funkcja  $f(x, y)$  i cząstkowa pochodna  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  są ciągłe w przedziale  $b_1 \leq y \leq b_2$ , oraz dla  $x > a$  i jeżeli całki:

$$g(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad \text{i} \quad h(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$$

są jednostajnie zbieżne, to:

$$g'(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx$$

*Dowód.* Według twierdzenia o całkowaniu według parametru mamy:

$$\int_{b_1}^{b_2} h(y) dy = \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_{b_1}^{b_2} f_y(x, y) dy \right) dx$$

Całka wewnętrzna ma wartość:

$$\int_{b_1}^{b_2} f_y(x, y) dy = f(x, y) - f(x, b_1)$$

A więc:

$$\int_{b_1}^{b_2} h(y) dy = \int_a^{\infty} f(x, y) dx - \int_a^{\infty} f(x, b_1) dx = g(y) - g(b_1)$$

Ponieważ  $h(y)$  jest funkcją ciągłą, więc istnieje pochodna lewej strony i otrzymujemy:

$$h(y) = g'(y)$$

czyli:

$$g'(y) = \int_a^{\infty} f_y(x, y) dx \quad \text{c. b. d. o.}$$

Podobnie dowodzi się reguły Leibniza dla innych typów całek niewłaściwych.

*Przykłady.*

1) Całka niewłaściwa:

$$(a) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

jest jednostajnie zbieżna dla  $y > l > 0$ , jak to można wykazać w sposób podobny, jak w przykładzie 2 na str. 211, powołując się na to, że:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

(por. str. 114, wzór (76)). Używając podstawienia  $yx^2 = z^2$ , obliczamy wartość całki (a), a mianowicie:

$$\int_0^{\infty} e^{-yx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} y^{-\frac{1}{2}}$$

Różniczkujemy tę całkę według parametru  $y$  i otrzymujemy wartość bardziej skomplikowanej całki:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-yx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}$$

Różniczkując całkę (a)  $n$ -krotnie, otrzymujemy ogólny wzór:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-yx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \frac{1}{y^n \sqrt{y}}$$

Można dowieść, że wszystkie otrzymane całki są jednostajnie zbieżne, a więc stosowanie reguły Leibniza było dozwolone.

2) Chcemy wyznaczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

Dojdziemy do niej, stosując szereg przekształceń do całki niewłaściwej:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(yx) dx$$

której wartość można wyznaczyć elementarnymi metodami całkowania, znajdując całkę nieoznaczoną (por. str. 27, przykład 14).

Otrzymuje się:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(yx) dx = \frac{1}{1+y^2}$$

Scałkujemy obie strony od 0 do  $y$  według parametru  $y$ . Ponieważ ta całka jest jednostajnie zbieżna (por. przykład 1 na str. 211), przeto można wykonać całkowanie pod znakiem całki. Otrzymamy w ten sposób nową jednostajnie zbieżną całkę:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin(yx)}{x} dx = \operatorname{arctg} y$$

Stosując raz jeszcze całkowanie według  $y$  od 0 do  $y$ , otrzymujemy po wykonaniu prostych rachunków:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos(yx)}{x^2} dx = y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \log(1 + y^2)$$

Wprowadźmy nową zmienną  $z = xy$ , przyczem  $y > 0$ , to otrzymamy:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{y}} \frac{1 - \cos z}{z^2} dz = \operatorname{arctg} y - \frac{\log(1 + y^2)}{2y}$$

Dla  $y \rightarrow \infty$  otrzymujemy stąd:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos z}{z^2} dz = \frac{1}{2} \pi$$

Zastosujmy do tej całki całkowanie „per partes”, kładąc  $1 - \cos z = u$ ,  $\frac{dz}{z^2} = dv$ , a więc  $du = \sin z dz$ ,  $v = \frac{-1}{z}$ .

Otrzymamy:

(153)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{1}{2} \pi$$

Całki tej nie można wyznaczyć elementarną drogą zapomocą całki nieoznaczonej.

Interesujący wynik otrzymuje się, wprowadzając w tę całkę parametr  $a$  zapomocą podstawienia  $z = ax$ . Otrzymuje się różne wartości, zależnie od tego, czy ten parametr ma wartość dodatnią, ujemną czy też zero. I tak dla  $a > 0$  otrzymujemy:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \pi \quad (a > 0)$$

Dla  $a < 0$  otrzymuje się:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \pi$$

ponieważ przy  $z \rightarrow +\infty$  mamy  $x \rightarrow -\infty$ . Wprowadzając za  $x$  zmienną  $-x$ , otrzymujemy:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = -\frac{1}{2} \pi \quad (a < 0)$$



Wreszcie dla  $\alpha = 0$  jest funkcja podcałkowa stale zerem, a więc:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0 \quad (\text{dla } \alpha = 0)$$

Mamy tu interesujący przykład funkcji nieciągłej, podanej jednym wzorem:

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

która dla  $\alpha > 0$  ma wartość  $\frac{1}{2} \pi$ , dla  $\alpha = 0$  wartość 0, a dla  $\alpha < 0$  wartość  $-\frac{1}{2} \pi$ , a więc ma w punkcie  $\alpha = 0$  skończony skok.

### Ustęp III.

#### CAŁKI PODWÓJNE.

##### § 250. Całka podwójna po prostokącie.

Zajmowaliśmy się już w § 248 całkowaniem funkcji  $z = f(x, y)$  dwóch zmiennych niezależnych według obu tych zmiennych. I tak całkowaliśmy najpierw według zmiennej  $x$ , uważając  $y$  za parametr, a otrzymany wynik  $g(y)$  całkowaliśmy następnie według zmiennej  $y$  i otrzymaliśmy:

$$(a) \quad I = \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right\} dy$$

Dogodniej jest pisać to wyrażenie bez klamer, a mianowicie w postaci:

$$(b) \quad I = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy$$

Zakładaliśmy przytem, że funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła w prostokącie  $P$ , określonym zapomocą warunków:  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ .

Całkowania te można wykonać także i wtedy, gdy funkcja  $f(x, y)$  nie jest ciągła w całym prostokącie  $P$ , lecz jest w nim ograniczona i posiada skończoną liczbę linii nieciągłości, dających się zamknąć w obszar o dowolnie małym polu. Widzieliśmy bowiem w § 246, że wtedy funkcja  $g(y)$ , otrzymana przez pierwsze całkowanie, a mianowicie według zmiennej  $x$ , jest albo funkcją ciągłą zmiennej  $y$ , albo posiada skończoną liczbę skończonych skoków, a zatem jest w każdym razie funkcją całkowaną według zmiennej  $y$ . A więc całka  $I$ , wyrażona wzorem (a), istnieje także w tym ogólniejszym przypadku.



Całkę, otrzymaną przez dwukrotne całkowanie funkcji dwóch zmiennych, najpierw według jednej od  $a_1$  do  $a_2$ , a następnie według drugiej zmiennej od  $b_1$  do  $b_2$ , nazywamy *całką podwójną* z tej funkcji po prostokącie  $P$ , określonym warunkami  $a_1 \leq x \leq a_2$  i  $b_1 \leq y \leq b_2$ .

Zobaczmy w dalszym ciągu (w § 251), że wartość całki podwójnej nie zależy od tego, w jakim porządku wykonujemy całkowanie, gdy tylko funkcja spełnia wyżej wymienione warunki ciągłości. Dla funkcji  $f(x, y)$  ciągłych dowiedliśmy tego już w § 248 (por. wzór (152)). Dla tego to w definicji całki podwójnej nie wspominaliśmy nic o porządku całkowania. Krótko oznaczamy taką całkę symbolem:

$$(c) \quad \int_{(P)} \int f(x, y) dx dy \quad \text{lub} \quad \int \int f(x, y) dy dx$$

Wykażemy, że do całek podwójnych po prostokącie odnosi się podobne twierdzenie o wartości średniej jak do całek pojedynczych. I tak niechaj  $m$  oznacza kres dolny a  $M$  kres górny wartości funkcji  $f(x, y)$  w całym prostokącie  $P$ . Z twierdzenia o wartości średniej dla całki pojedynczej (§ 213, wzór (47)) wynika:

$$m(a_2 - a_1) \leq \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \leq M(a_2 - a_1)$$

Scalkujmy tę nierówność według zmiennej  $y$  w granicach od  $b_1$  do  $b_2$ , to otrzymamy:

$$\int_{b_1}^{b_2} m(a_2 - a_1) dy \leq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right\} dy \leq \int_{b_1}^{b_2} M(a_2 - a_1) dy$$

a stąd:

$$m(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \leq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right\} dy \leq M(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Oznaczając literą  $P$  pole danego prostokąta, otrzymujemy stąd:

$$(154) \quad m \cdot P \leq \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx \right\} dy \leq M \cdot P$$

Dobierając odpowiednio liczbę  $\mu$ , pośrednią pomiędzy  $m$  a  $M$  i używając skróconego oznaczenia (c), otrzymujemy stąd wzór:

$$(155) \quad \int_{(P)} \int f(x, y) dx dy = \mu \cdot P$$

Ten wzór wyraża twierdzenie o wartości średniej dla całki podwójnej o stałych granicach całkowania czyli po prostokącie.

*Wniosek.* Jeżeli funkcja  $f(x, y)$  jest nieujemna w całym prostokącie, to także  $\mu \geq 0$ , a więc według wzoru (155) także całka po prostokącie z tej funkcji jest nieujemna. Stąd wynika, że jeżeli w całym prostokącie warunek  $f(x, y) \leq g(x, y)$  spełnia się dla dwóch funkcji  $f(x, y)$  i  $g(x, y)$ , to także:

$$\int_{(P)} \int f(x, y) dx dy \leq \int_{(P)} \int g(x, y) dx dy$$

Jeżeli  $f(x, y)$  jest funkcją *ciągłą* w danym prostokącie, to przyjmuje tę wartość pośrednią  $\mu$  w jakimś punkcie tego prostokąta, np. w punkcie o współrzędnych  $(\xi, \eta)$ . Wtedy wzór (155) przyjmuje postać:

$$(156) \quad \boxed{\int_{(P)} \int f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot P}$$

Wartość  $\mu$ , obliczoną z wzoru (155), nazywamy *średnią (całkową) wartością funkcji  $f(x, y)$  w prostokącie  $P$* .

Łatwo jest dowieść, że jeżeli podzielimy prostokąt  $P$  prostą równoległą do osi  $x$ -ów lub  $y$ -ów na dwa prostokąty  $P_1$  i  $P_2$ , to całkę po całym prostokącie można przedstawić jako sumę całek po prostokątach składowych, a mianowicie:

$$(157) \quad \int_{(P)} \int f(x, y) dx dy = \int_{(P_1)} \int f(x, y) dx dy + \int_{(P_2)} \int f(x, y) dx dy$$

Twierdzenie to odpowiada twierdzeniu o addytywności całki pojedynczej, poznanemu w § 214.

## § 251. Sumowa definicja całki podwójnej o stałych granicach.

Opierając się na twierdzeniu o wartości średniej, zbudujemy nową definicję całki podwójnej, analogiczną do podanej w § 222 definicji całki pojedynczej, a mianowicie określimy tę całkę jako granicę ciągu pewnych sum.

Weźmy pod uwagę całkę:

$$I = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy$$

z funkcji  $z = f(x, y)$  ciągłej w prostokącie  $ABCD$  (fig. 73) o polu  $P$ . Obrazem tej funkcji jest płat powierzchni, w ogólności krzywej, wznoszącej się nad tym prostokątem. Podzielmy przedział  $\langle a_1, a_2 \rangle$  na dowolną liczbę części, np. na  $n$ , części, punktami  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ , a przedział  $\langle b_1, b_2 \rangle$  na  $m$ , części punktami  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{m-1}$ .

Oznaczmy ponadto  $a_1 = x_0$ ,  $a_n = x_n$ ,  $b_1 = y_0$ ,  $b_n = y_n$ .

Przez punkty podziału wykreślmy równoległe do osi  $X$  i  $Y$ , to prostokąt  $ABCD$  rozpadnie się na kratkę drobniejszych prostokątów. Oznaczmy przez  $p_k^{(1)}$  pole prostokąta, zawartego między prostymi:

$$x = x_i, \quad x = x_{i+1}, \quad y = y_k, \quad y = y_{k+1}$$

Całkę podwójną po całym prostokącie możemy przedstawić jako sumę całek po tych wszystkich prostokątach składowych (w myśl wzoru (157)). Zastosujemy do każdej takiej całki składowej twierdzenie o wartości średniej.

Niechaj  $m_k^{(1)}$  i  $M_k^{(1)}$  oznaczają najmniejszą i największą wartość funkcji  $f(x, y)$  w obrębie prostokąta  $p_k^{(1)}$ , to twierdzenie o wartości średniej dla całki po tym prostokącie ma (według wzoru (154)) postać:

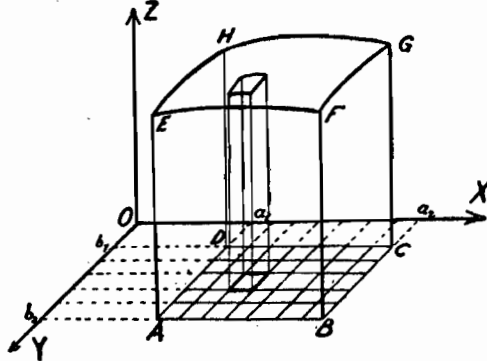


Fig. 73.

$$m_k^{(1)} p_k^{(1)} \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dx dy \leq M_k^{(1)} p_k^{(1)}$$

Utworzywszy te nierówności dla wszystkich całek składowych, sumujemy je stronami i otrzymujemy ostatecznie:

$$(I) \quad s_1 = \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{l=0}^{n_1-1} m_k^{(1)} p_k^{(1)} \leq \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx dy \leq \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{l=0}^{n_1-1} M_k^{(1)} p_k^{(1)} = S_1$$

Zamknęliśmy w ten sposób całkę podwójną między dwie sumy; nazwijmy  $s_1$  sumą dolną a  $S_1$  sumą górną. Sumy te oznaczamy też krócej symbolami:

$$\sum_{(P)} \sum m_k^{(1)} p_k^{(1)} \quad \text{i} \quad \sum_{(P)} \sum M_k^{(1)} p_k^{(1)}$$

Tworzymy następnie przez dalsze podziały cały ciąg  $\{s_p\}$  takich sum dolnych i ciąg  $\{S_p\}$  sum górnych w ten sposób, aby przekątna największego z prostokątów składowych w każdym podziale dążyła do zera. Okażemy, że wtedy obydwa ciągi  $\{s_p\}$  i  $\{S_p\}$  dążą do wspólnej granicy, a mianowicie do całki podwójnej po prostokącie  $ABCD$ .

*Dowód.*

Zbadajmy różnicę pomiędzy dowolną sumą górną  $S_p$  a dolną  $s_p$ :

$$(II) \quad S_p - s_p = \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{l=0}^{n_p-1} M_k^{(p)} p_k^{(p)} - \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{l=0}^{n_p-1} m_k^{(p)} p_k^{(p)} = \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{l=0}^{n_p-1} (M_k^{(p)} - m_k^{(p)}) p_k^{(p)}$$

Okazemy najpierw, że ta różnica dąży do zera, t. j. że do każdej dodatniej liczby  $\epsilon$  można dobrać takie  $N$ , że dla wszystkich  $p > N$  jest  $|S_p - s_p| = S_p - s_p < \epsilon$ . I tak dzieląc prostokąt  $P$  na odpowiednie małe prostokąty (co uzyskamy, biorąc  $p$  większe od odpowiednio dobranego  $N$ ), można uzyskać, że różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji ciągłej  $f(x, y)$  będzie w każdym prostokącie składowym mniejsza od dowolnej zgóry podanej liczby dodatniej, a więc także mniejsza od  $\frac{\epsilon}{P}$ .

Wynika to z *jednostajnej ciągłości* tej funkcji w prostokącie  $P$ . A więc:

$$M_k^{(p)} - m_k^{(p)} < \frac{\epsilon}{P} \quad \text{dla } p > N$$

Wobec tego:

$$|S_p - s_p| < \frac{\epsilon}{P} \cdot \sum_{k=0}^{n_p-1} \sum_{l=0}^{n_p-1} p_k^{(p)}$$

Ale suma podwójna wszystkich prostokątów  $p_k^{(p)}$  daje cały prostokąt  $P$ , a więc:

$$|S_p - s_p| < \frac{\epsilon}{P} \cdot P = \epsilon$$

Z wzoru (I), a raczej z odpowiedniego wzoru, napisanego dla  $s_p$  i  $S_p$ , wynika, że:

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy - s_p \right| \leq S_p - s_p < \epsilon$$

a więc:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} s_p = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy$$

Podobnie:

$$\left| S_p - \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy \right| \leq S_p - s_p < \epsilon$$

a więc także:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx dy$$

Na podstawie dowiedzionego twierdzenia możemy podać także następującą definicję całki podwójnej:

*całka podwójna o stałych granicach całkowania jest to granica ciągu takich sum dolnych lub górnych, w których przekątna największego prostokąta składowego dąży do zera; sumę dolną (górną) tworzy się, dzieląc dany prostokąt na dowolną liczbę prostokątów zapomocą prostych równoległych do osi współrzędnych, mnożąc pole każdego składowego prostokąta przez najmniejszą (największą) wartość funkcji w tym prostokącie i dodając do siebie wszystkie otrzymane w ten sposób iloczyny.*

Zamiast najmniejszych lub największych wartości funkcji można użyć do definicji całki także wartości funkcji w dowolnym innym punkcie  $(\xi_{ik}, \eta_{ik})$  tego prostokąta składowego. Albowiem:

$$m_{ik} \leq f(\xi_{ik}, \eta_{ik}) \leq M_{ik}$$

a więc i każda suma, utworzona przy pomocy tych wartości pośrednich, zawiera się stale pomiędzy odpowiednią sumą dolną i górną, a zatem dąży do tej samej granicy. Stąd wynika, że także ciąg sum pośrednich:

$$\bar{S}_p = \sum_{k=0}^{m_p-1} \sum_{i=0}^{n_p-1} f(\xi_{ik}^{(p)}, \eta_{ik}^{(p)}) p_{ik}^{(p)}$$

dąży do całki podwójnej o stałych granicach całkowania.

Używaliśmy w naszych rozważaniach *podwójnych* sum i podwójnych wskaźników  $i$  i  $k$ , aby uwydatnić ich związek z całką *podwójną*. Można jednak także ponumerować wszystkie prostokąciki składowe, używając tylko jednego wskaźnika, np.  $r$ , przebiegającego kolejne liczby szeregu naturalnego od 1 do  $N_p = m \cdot n$  i przedstawić sumy  $s_p$ ,  $S_p$ ,  $\bar{S}_p$  zapomocą sum pojedynczych postaci np:

$$\bar{S}_p = \sum_{r=1}^{N_p} f(\xi_r^{(p)}, \eta_r^{(p)}) p_r^{(p)}$$

Wszystkie wyniki, uzyskane w tym paragrafie, odnoszą się, jak to zaraz zobaczymy, także do funkcji  $f(x, y)$  *nieciągłych*, lecz ograniczonych, posiadających skończoną liczbę takich nieciągłości, które się dadzą zamknąć w obszar o dowolnie małym polu.

I tak dla funkcji nieciągłych nie wszystkie różnice  $M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)}$ , figurujące we wzorze na  $S_p - s_p$ , dadzą się uczynić dowolnie małymi. Jeżeli bowiem prostokąciki  $p_{ik}^{(p)}$  zawierają części linii przerwy (jak na fig. 72, str. 202), to różnice między największą a najmniejszą wartością funkcji  $f(x, y)$  w takich prostokącikach nie będą dowolnie małe, lecz będą równe skokowi funkcji (np. odcinkowi  $CC'$  na fig. 72 w otoczeniu punktu  $D$ ). Podzieliwszy cały prostokąt  $P$  na drobniejsze prostokąty, rozłożymy go na dwie części: na jedną  $P_1^{(p)}$ , w której prostokąty składowe nie zawierają żadnych punktów nieciągłości i na drugą  $P_2^{(p)}$ , w której prostokąty składowe zawierają punkty nieciągłości. Różnica między sumą górną a dolną, utworzona dla części  $P_1^{(p)}$ , da się uczynić dowolnie małą, np. mniejszą od  $\frac{1}{2}\epsilon$ , ponieważ dla tej części różnice  $M_{ik}^{(p)} - m_{ik}^{(p)}$  dążą do zera. W części zaś  $P_2^{(p)}$  nie są te różnice dowolnie małe, lecz w każdym razie są mniejsze od  $M - m$ , przyczem  $M$  oznacza kres górny, a  $m$  kres dolny wartości funkcji  $f(x, y)$  w całym prostokącie  $P$ . Część sumy, określonej wzorem (II), przypadająca na  $P_2^{(p)}$ , będzie zatem mniejsza od  $(M - m) \cdot P_2^{(p)}$ . Otóż pole  $P_2^{(p)}$  możemy uczynić dowolnie małym, albowiem według założenia można zamknąć wszystkie linie nieciągłości w obszar o dowolnie małym polu. Można np. uzyskać, że  $P_2^{(p)} < \frac{\epsilon}{2(M - m)}$ , a więc  $(M - m) \cdot P_2^{(p)} < \frac{1}{2}\epsilon$ . Razem więc można także dla nieciąg-

tych funkcji uzyskać, że będzie  $|S_p - s_p| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ , a to znaczy, że także teraz jest:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (S_p - s_p) = 0$$

Stąd zaś wynikają dalsze konsekwencje tak samo, jak dla ciągłych funkcji  $f(x, y)$ .

We wszystkich rozumowaniach tego paragrafu nie grał żadnej roli porządek, w jakim występują zmienne  $x$  i  $y$ . A więc także całka:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy \right\} dx \quad \text{czyli} \quad \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

jest granicą tych samych ciągów, ma zatem tę samą wartość, co całka, obliczana najpierw według zmiennej  $x$  a potem według  $y$ . Wzór (152) na str. 207 stosuje się zatem nie tylko do funkcji ciągłych, lecz także do takich funkcji nieciągłych, które są ograniczone i posiadają najwyższą skończoną liczbę linii nieciągłości.

Jeżeli więc obliczamy wartość całki podwójnej po prostokącie za pomocą dwóch kolejnych całkowań, to możemy zmieniać porządek całkowania.

*Uwaga.* Całkę podwójną oznaczoną można też zdefiniować jako kres górny sum dolnych lub kres dolny sum górnych, analogicznie jak to czyniliśmy w nauce o pojedynczych całkach oznaczonych w § 212 i nast.

## § 252. Związek całki podwójnej z objętością.

Przy pomocy całki podwójnej można zdefiniować i obliczać objętości rozmaitych brył, których nie można badać metodami matematyki elementarnej. Z drugiej strony uzyskamy w ten sposób dogodną geometryczną interpretację całki podwójnej. Istnieje tu podobny związek między objętością a całką podwójną, jak między polem a całką pojedynczą.

Weźmy pod uwagę bryłę, zamkniętą prostokątem, płatem dowolnej powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$ , wznoszącym się nad tym prostokątem i płaszczyznami, rzucającymi ten płatek powierzchni na płaszczyznę  $(XY)$ , np. bryłę  $ABCDEFGH$  na fig. 73 (str. 219). Niechaj żaden punkt tej powierzchni nie leży pod płaszczyzną  $(XY)$ , t. j. niechaj funkcja  $f(x, y)$  będzie nieujemną dla wszystkich punktów  $(x, y)$ , zawartych w badanym prostokącie. Utwórzmy dla tej funkcji sumę dolną nad prostokątem  $ABCD$ . Każdy jej dodatek  $m_{ik} p_i$  jest równy objętości graniastoslupa o podstawie  $p_{ik}$  a o wysokości  $m$  - równej kresowi dolnemu wartości  $z$  nad tym prostokątem  $p_{ik}$ . Cała suma dolna jest równa objętości schodkowej bryły, wpisanej w daną bryłę. Tworząc ciąg takich sum dolnych, w których przekątna największego składowego prostokąta dąży do zera, otrzymujemy ciąg objętości odpowiednich brył schodkowych, aproksymujących coraz lepiej badaną bryłę. Granicę tego ciągu uważamy za objętość danej

bryły. Wiemy zaś z poprzedniego paragrafu, że granicą tego ciągu jest całka podwójna z funkcji  $f(x, y)$  po prostokącie. Przyjmujemy zatem następującą **definicję objętości**.

*Objętość  $V$  bryły, zamkniętej prostokątem, leżącym na płaszczyźnie  $(XY)$  o bokach równoległych do osi współrzędnych, powierzchnią o równaniu  $z=f(x, y)$ , wznoszącą się nad tym prostokątem i płaszczyznami, rzucającymi ten płat powierzchni na płaszczyznę  $(XY)$ , jest to całka podwójna z funkcji  $f(x, y)$  po tym prostokącie, a mianowicie:*

$$(158) \quad V = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} z \, dx \, dy = \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

Dla powierzchni, leżącej pod prostokątem, t. j. dla ujemnych  $z$ , ma ta całka wartość ujemną i podaje wartość  $-V$ . Ogólnie całka podwójna po prostokącie z funkcji, przybierającej dodatnie i ujemne wartości w prostokącie  $P$ , przedstawia algebraiczną sumę objętości, leżących nad płaszczyzną  $(XY)$  i pod nią.

*Przykład 1)* Obliczyć objętość bryły, wznoszącej się nad prostokątem, zawartym między prostymi  $x=0$  i  $x=a$ , tudzież  $y=0$  i  $y=b$  na płaszczyźnie  $(XY)$  a zamkniętej u góry powierzchnią o równaniu:

$$z = pxy$$

(Jest to paraboloida hiperboliczna, por. tom. I, str. 44).

Bryłę tę przedstawiono na fig. 74. Oznaczmy literą  $c$  wartość funkcji  $z$  w wierzchołku  $C$  prostokąta, t. j.  $c=p \cdot a \cdot b$ . Przekrój danej powierzchni płaszczyzną  $x=a$ , prostopadłą do  $(XY)$ , jest linią prostą o równaniach:  $x=a$ ,  $z=pay$ , a podobnie przekrój płaszczyzną  $y=b$  jest linią prostą o równaniach  $y=b$ ,  $z=pbx$ . (Celem plastycznego uwidocznienia zakrzywienia tej powierzchni narysowano siatkę linii prostych, leżących na niej). Objętość badanej bryły wyrażamy wzorem:

$$V = \int_0^b \int_0^a pxy \, dx \, dy$$

Wykonujemy całkowanie najpierw według  $x$  a następnie według  $y$  i otrzymujemy:

$$V = \int_0^b \frac{1}{2} p x^2 y \Big|_{x=0}^{x=a} dy = \int_0^b \frac{1}{2} pa^2 y dy = \frac{1}{4} pa^2 y^2 \Big|_0^b = \frac{1}{4} pa^2 b^2$$

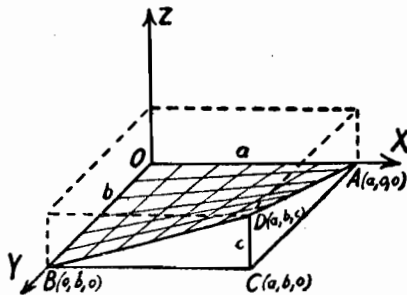


Fig. 74.

Ponieważ  $pac = c$ , przeto:

$$V = \frac{1}{3} abc$$

Objętość tej bryły jest więc równa czwartej części objętości prostopadłościanu o tej samej podstawie a o wysokości  $c$ . Widzimy stąd analogię z wzorem na pole, ograniczone łukiem paraboli o równaniu  $y^2 = 2px$ , osią rzędnych i prostą prostopadłą do tej osi (por. § 220, przykład 5).

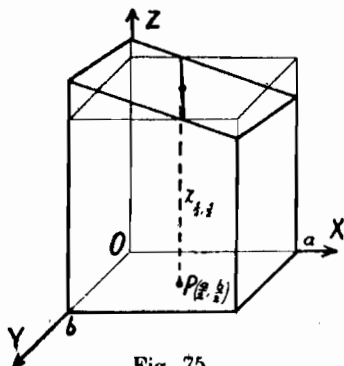


Fig. 75.

*Przykład 2)* Obliczyć objętość prostopadłościanu, ściętego dowolną płaszczyzną o równaniu:

$$(I) \quad z = Ax + By + C$$

znając krawędzie  $a$  i  $b$  podstawy.

Umieszczamy ten prostopadłościan tak, aby krawędzie podstawy leżały na dodatnich kierunkach osi  $X$  i  $Y$  (fig. 75).

Objętość bryły, wznoszącej się nad prostokątem  $P$ , a zamkniętej u góry płaszczyzną o równaniu (I), wyraża się wzorem:

$$V = \int_0^b \int_0^a (Ax + By + C) dx dy$$

A więc:

$$V = \int_0^b \left( \frac{1}{2} Aa^2 + Bxy + Cx \right) \Big|_0^a dy = \int_0^b \left( \frac{1}{2} Aa^2 + Bay + Ca \right) dy$$

$$V = \left( \frac{1}{2} Aa^2 y + \frac{1}{2} Bay^2 + Cay \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2} Aa^2 b + \frac{1}{2} Bab^2 + Cab$$

$$V = ab \left( A \cdot \frac{a}{2} + B \cdot \frac{b}{2} + C \right)$$

Oznaczmy wysokość  $z$ , należącą do punktu środkowego prostokąta  $P$  (wysokość ta trafia w środek przekroju, który jest oczywiście równoległobokiem), krótko znakiem  $z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ , to wzór przyjmie postać:

$$V = P \cdot z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

Objętość prostopadłościanu ściętego dowolną płaszczyzną jest zatem równa objętości zwykłego prostopadłościanu o tej samej podstawie a o wysokości równej odległości środka przekroju od podstawy.

Wysokość ta jest średnią arytmetyczną czterech krawędzi bocznych prostopadłościanu ściętego (wykazuje się to, wstawiając w równanie płaszczyzny za  $(x, y)$  kolejno  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(a, b)$  i biorąc średnią aryt-



metryczną czterech otrzymanych na  $z$  wartości). Można więc wyrazić otrzymany wzór także tak: objętość prostopadłościanu ściętego jest równa podstawie, pomnożonej przez średnią arytmetyczną czterech krawędzi bocznych.

### § 253. Całki podwójne po dowolnych obszarach (w zmiennych granicach całkowania).

Omawialiśmy dotychczas tylko całki podwójne nad obszarami prostokątnymi. Takie całki występują nader rzadko w zastosowaniach. Najczęściej mamy do czynienia z ogólniejszemi obszarami; tak np. przy obliczaniu objętości ósemki elipsoidy natrafiamy na całkę podwójną nad obszarem  $OAB$ , zamkniętym z jednej strony elipsą (por. fig. 76). Będziemy tu rozważali tylko obszary domknięte (por. tom I, str. 17—18), których brzeg składa się ze skończonej liczby linii, dających się przedstawić w postaci  $y = \varphi(x)$  lub  $x = \psi(y)$ . Takie obszary nazywamy obszarami *regularnemi*<sup>1)</sup>. Brzeg takiego obszaru regularnego da się zamknąć w obszar o dowolnie małym polu.

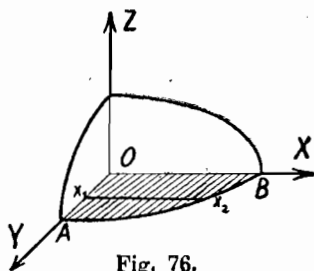


Fig. 76.

Weźmy zatem pod uwagę funkcję  $f(x, y)$ , określoną w dowolnym obszarze regularnym, jak na fig. 77.

Niechaj  $f(x, y)$  spełnia te same warunki ciągłości, co w § 250. Definicję całki po takim obszarze  $D$  sprowadzamy do definicji całki po prostokącie. Aby to uskutecznić, opiszemy na obszarze  $D$  prostokąt  $P$  o bokach równoległych do osi  $X$  i  $Y$  dwa jego boki przechodzą zatem przez te punkty obszaru  $D$ , które mają największą i najmniejszą odcięta, a dwa inne przez te punkty, które mają największą i najmniejszą rzędną. Określmy funkcję pomocniczą  $f_1(x, y)$  dla wszystkich punktów prostokąta  $P$  w następujący sposób.

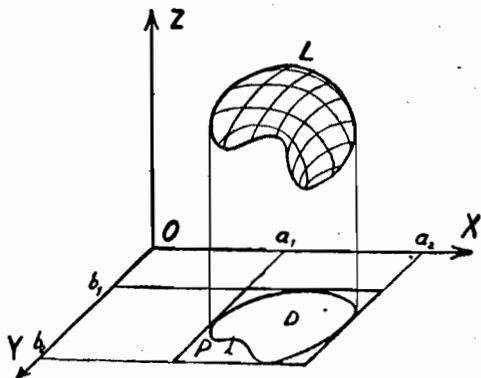


Fig. 77.

Niechaj  $f_1(x, y) = f(x, y)$  dla wszystkich punktów obszaru  $D$ , a  $f_1(x, y) = 0$  dla wszystkich pozostałych punktów płaszczyzny  $(XY)$ .

<sup>1)</sup> Por. podręcznik prof. S. Bańacha p. t. *Rachunek różniczkowy i całkowy*. Tom II, str. 171.

Całkę podwójną z tej pomocniczej funkcji  $f_1(x, y)$  po prostokącie  $P$  nazywamy całką podwójną z funkcji  $f(x, y)$  po obszarze  $D$ .

Całkę podwójną po obszarze  $D$  oznaczamy symbolem:  $\int\int_{(D)} f(x, y) dx dy$ ,

całkę zaś podwójną po prostokącie  $P$  oznaczyliśmy (str. 217) symbolem  $\int\int_{(P)}$ , a zatem możemy naszą definicję napisać w następujący sposób:

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dx dy = \int\int_{(P)} f_1(x, y) dx dy \quad \text{przyczem} \quad f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{w } D \\ 0 & \text{poza } D \end{cases}$$

*Uwaga 1.* Funkcja  $f_1(x, y)$  jest zwykle nieciągła wzdłuż brzegu  $l$  obszaru  $D$  nawet wtedy, gdy  $f(x, y)$  jest funkcją ciągłą (brzeg  $l$  tylko wtedy nie byłby linią nieciągłości, gdyby brzeg  $L$  danej powierzchni  $z = f(x, y)$  leżał na płaszczyźnie  $(XY)$ ). Wiemy jednak, że całka nad prostokątem istnieje także dla nieciągłej funkcji  $f_1(x, y)$ , jeżeli tylko ta funkcja jest ograniczona a jej linie nieciągłości dadzą się zamknąć w obszar o dowolnie małym polu. Tutaj zaś właśnie mamy do czynienia z takim przypadkiem.

*Uwaga 2.* Całkę po dowolnym obszarze można także określić bezpośrednio jako granicę ciągu odpowiednich sum dolnych (lub górnych), otrzymanych przy pomocy podziału obszaru na drobniejsze elementy zapomocą prostych, równoległych do osi  $X$  i  $Y$ . Nie wszystkie jednak elementy będą prostokątami, albowiem przy brzegu obszaru wystąpią elementy, w których brzeg wchodzi łuki linii  $l$ .

*Uwaga 3.* Jeżeli obszar  $D$  rozłożymy zapomocą dowolnej linii na dwie części  $D_1$  i  $D_2$ , to można okazać, że:

$$\int\int_{(D)} f(x, y) dx dy = \int\int_{(D_1)} f(x, y) dx dy + \int\int_{(D_2)} f(x, y) dx dy$$

Jest to uogólnienie twierdzenia o addytywności całki pojedynczej (por. § 214).

Okażemy, że obliczenie całki po dowolnym obszarze regularnym

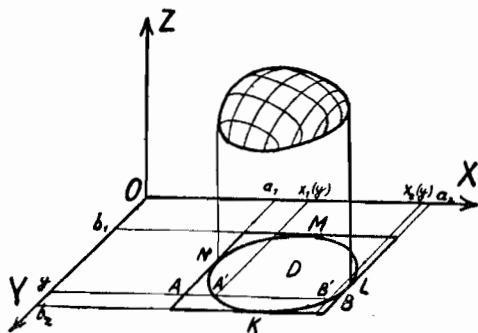


Fig. 78.

sprowadza się — podobnie jak dla całki po prostokącie — do obliczania całek pojedynczych, w których jednak nie wszystkie granice są liczbami stałymi. Weźmy pod uwagę obszar regularny  $D$ , zamknięty taką linią, którą każda prosta równoległa do osi  $X$  przecina najwyżej w dwóch punktach (jak na fig. 78). Inne obszary, z którymi będziemy mieli do czynienia,

można rozdzielić na obszary tego rodzaju i zastosować następnie twierdzenie z uwagi 3.

Według przyjętej powyżej definicji całki po obszarze  $D$  mamy:

$$(b) \quad \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} f_1(x, y) dx \right\} dy$$

Obliczmy najpierw całkę wewnętrzną:

$$g(y) = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x, y) dx$$

Oberzmy jakieś stałe  $y$  z przedziału  $\langle b_1, b_2 \rangle$  i wykreślmy przez odpowiedni punkt osi  $Y$  równoległą do osi  $X$ . Przetnie ona opisany prostokąt w punktach  $A, B$ , a brzeg obszaru  $D$  w punktach  $A', B'$  o odciętych  $x_1(y)$  i  $x_2(y)$ .

Zaznaczyliśmy wyraźnie, że te odcięte są funkcjami zmiennej  $y$ , albowiem do każdego  $y$  z przedziału  $\langle b_1, b_2 \rangle$  należy jakaś odcięta  $x_1$  na łuku  $KNM$  i jakaś odcięta  $x_2$  na łuku  $KLM$ . Równania łuków, tworzących brzeg obszaru, mają więc postać:  $x = x_1(y)$ ,  $x = x_2(y)$ .

Całkę  $g(y)$  możemy rozłożyć na trzy całki:

$$g(y) = \int_{a_1}^{a_2} f_1(x, y) dx = \int_{a_1}^{x_1(y)} f_1(x, y) dx + \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_1(x, y) dx + \int_{x_2(y)}^{a_2} f_1(x, y) dx$$

Pierwsza i trzecia całka po prawej stronie mają wartość 0, ponieważ  $f_1(x, y) = 0$  poza obszarem  $D$ . Natomiast w drugiej całce można zamiast  $f_1(x, y)$  napisać  $f(x, y)$ , ponieważ te funkcje mają w obszarze  $D$  te same wartości. Ostatecznie więc:

$$g(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

Wobec tego wzór (b) przyjmuje postać:

$$(159) \quad \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{b_1}^{b_2} \left\{ \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

przyczem  $x = x_1(y)$  i  $x = x_2(y)$  są równaniami dwóch łuków, tworzących brzeg obszaru  $D$ , a  $b_1$  i  $b_2$  są wartościami najmniejszej i największej rzędnej punktów brzegu. Widzimy stąd, że obliczenie całki po takim obszarze  $D$  sprowadza się do kolejnego obliczenia dwóch całek pojedynczych, przyczem granice pierwszego całkowania (według  $x$ ) są zmienne a drugiego (według  $y$ ) stałe. Zwykle opuszczamy klamry i piszemy powyższy wzór w postaci:

$$(159a) \quad \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{b_1}^{b_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Całkowanie można wykonać także w innym porządku, wtedy jednak zmieniają się granice całkowania, jak to zaraz zobaczymy. Niechaj obszar  $D$  ma tę własność, że każda prosta równoległa do osi  $Y$  przecina jego brzeg najwyżej w dwóch punktach. W całości, występującej po prawej stronie wzoru (b), można zmienić porządek całkowania, jest to bowiem całka po prostokącie. Otrzymamy w ten sposób zamiast wzoru (b) następujący wzór:

$$\int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{b_1}^{b_2} f_1(x, y) dy \right\} dx$$

Celem obliczenia wewnętrznej całki:

$$h(x) = \int_{b_1}^{b_2} f_1(x, y) dy$$

obierzmy dowolne  $x$  z przedziału  $\langle a_1, a_2 \rangle$  i wykreślmy przez odpowiedni punkt osi  $X$  prostą równoległą do osi  $Y$ . Przetnie ona brzeg obszaru w dwóch punktach o rzędnych  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$ . Rozumując tak, jak w poprzednim przypadku, otrzymamy:

$$h(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

Zatem:

$$(160) \quad \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

przyczem  $y = y_1(x)$  i  $y = y_2(x)$  są równaniami łuków, tworzących brzeg obszaru  $D$ , a  $a_1$  i  $a_2$  wartościami najmniejszej i największej odciętej punktów brzegu. Ten drugi sposób obliczania całki po obszarze  $D$  możemy uwidocznić już w jej symbolu, pisząc  $dy dx$  zamiast  $dx dy$ .

Klamry opuszcza się zwykle, podobnie jak we wzorze (159a).

Najprostszym zastosowaniem całki podwójnej po dowolnym obszarze jest obliczenie pola tego obszaru. Wystarczy w tym celu obrać  $f(x, y) \equiv 1$  dla wszystkich punktów obszaru.

Twierdzimy, że:

$$(161) \quad \int_{(D)} \int dx dy = D$$

*Dowód.* Jeżeli każda prosta równoległa do osi  $Y$  przecina jego brzeg najwyżej w dwóch punktach, to stosując wzór (160), otrzymujemy:

$$\int_{(D)} \int dx dy = \int_{(D)} \int dy dx = \int_{a_1}^{a_2} \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \right\} dx = \int_{a_1}^{a_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx$$

Czyli:

$$\int_{(D)} dx dy = \int_{a_1}^{a_2} y_2(x) dx - \int_{a_1}^{a_2} y_1(x) dx = D$$

(por. str. 191). Jeżeli proste równoległe do osi współrzędnych przecinają brzeg obszaru w więcej aniżeli dwóch punktach, to rozkładając obszar na takie obszary, które proste równoległe do osi przecinają najwyżej w dwóch punktach, stosujemy do każdego składowego obszaru poprzednią metodę i otrzymujemy także w tym przypadku wzór (161).

Do całek po dowolnym obszarze odnosi się twierdzenie o wartości średniej, podobne jak dla całek po prostokącie, a mianowicie:

$$(162) \quad m \cdot D \leq \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy \leq M \cdot D$$

*Dowód.* Ponieważ  $m$  oznacza kres dolny wartości funkcji  $f(x, y)$  w całym obszarze, zatem:

$$m \leq f(x, y)$$

Stąd wynika, że także:

$$\int_{(D)} \int m dx dy \leq \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

czyli:

$$m \int_{(D)} \int dx dy \leq \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

Stąd otrzymujemy na podstawie wzoru (161):

$$m \cdot D \leq \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

W podobny sposób stwierdzamy drugą nierówność, zawartą we wzorze (162). Stąd otrzymuje się na *średnią wartość funkcji* w obszarze  $D$  — podobnie jak w § 250 — wzór:

$$(163) \quad \mu = \frac{1}{D} \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

Jeżeli  $f(x, y)$  jest ciągła w obszarze  $D$ , to istnieje taki punkt o współrzędnych  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , w którym funkcja przyjmuje tę wartość średnią  $\mu$  i wtedy zachodzi wzór:

$$(163a) \quad \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot D$$

Opierając się na twierdzeniu o wartości średniej, wyrażonem wzorem (162), można okazać, że całka po dowolnym obszarze jest granicą ciągu sum dolnych (lub górnych), otrzymanych przy pomocy podziału obszaru na

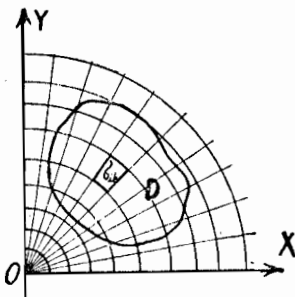


Fig. 79.

drobniejsze elementy zapomocą dwóch systemów *dowolnych linii*, prostych lub krzywych (a więc niekoniecznie prostych równoległych do osi współrzędnych). Trzeba przytem obrać taki ciąg sum, aby średnica największego elementu składowego przy tym ciągu podziałów dążyła do zera. (Średnicą takiego elementu powierzchni nazywamy kres górny odległości dwóch dowolnych jego punktów od siebie).

Tak np. przy użyciu współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$  dzielimy obszar  $D$  zapomocą pęku prostych, określonych warunkiem  $\varphi = c$  i gromady kół spółśrodkowych, odpowiadających warunkowi  $r = c_1$ , na elementy nieprostokątne  $\sigma_{ik}$ , jak to uwidoczniiono na fig. 79. Całkę podwójną po obszarze  $D$  można wtedy uważać za granicę ciągu sum postaci:

$$\sum_{(D)} \sum m_{ik} \sigma_{ik}$$

Określiliśmy (w § 252) objętość, wznoszącą się nad prostokątem. Obecnie możemy uogólnić tę definicję na objętości, wznoszące się nad dowolnymi obszarami. Definicja całki po dowolnym obszarze zapomocą sum dolnych (lub górnych) naprowadza nas na przyjęcie następującej definicji objętości, wznoszącej się nad dowolnym obszarem (jak na fig. 77 lub 78). **Objętością  $V$  bryły, zamkniętej obszarem  $D$ , leżącym na płaszczyźnie  $(XY)$ , powierzchnią o równaniu  $z = f(x, y)$ , wznoszącą się nad tym obszarem i powierzchnią walcową, rzucającą ten płat powierzchni na płaszczyznę  $(XY)$ , nazywamy całką podwójną z funkcji  $f(x, y)$  nad tym obszarem, a mianowicie:**

(164)

$$V = \int_{(D)} \int z \, dx \, dy = \int_{(D)} \int f(x, y) \, dx \, dy$$

Dla powierzchni, leżącej pod obszarem  $D$ , t. j. dla ujemnych  $z$ , całka ta ma wartość ujemną i podaje wartość  $-V$ . Ogólnie całka podwójna z funkcji, przybierającej dodatnie i ujemne wartości w obszarze  $D$ , jest równa algebraicznej sumie objętości nad płaszczyznę  $(XY)$  i pod nią (przyczem pierwsze są dodatnie a drugie ujemne).

### § 254. Przykłady całek podwójnych po dowolnych obszarach.

1) Wyznaczyć granice całkowania dwóch całek pojedynczych, do których się sprowadza obliczanie całki:

$$I = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

jeżeli obszar całkowania jest ograniczony parabolą o równaniu  $y = x^2$ , prostą  $y = 2 - x$  i osią  $Y$  (fig. 80). Punkt  $A$  ma współrzędne  $(0, 2)$  a punkt  $B$  współrzędne  $(1, 1)$ , jak to wynika z rozwiązania układu równań  $y = x^2$  i  $y = 2 - x$ . Wykonując najpierw całkowanie według  $y$ , trzeba ustalić  $x$ . Stałemu  $x$  odpowiada prosta równoległa do osi  $Y$ . Przecina ona obszar całkowania w dwóch punktach o rzędnych  $y_1$  i  $y_2$ , przyczem  $y_1$  należy do łuku paraboli, a więc  $y_1 = x^2$  a  $y_2 = 2 - x$ , jako rzędna prostej  $AB$ . Granice zaś dla zmiennej  $x$  są stałe, a mianowicie całkujemy od najmniejszego  $x$ , t. j. od  $x_1 = 0$ , do największego:  $x_2 = 1$ .

A więc:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy dx$$

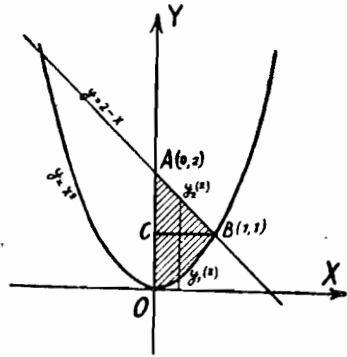


Fig. 80.

Jeżeli chcemy zmienić porządek całkowania, to należy rozłożyć dany obszar na dwie części:

$OBC$  i  $ABC$ , albowiem w każdym z tych obszarów będą inne granice (zmiennie) dla  $x$ . Wobec tego należy także całkę  $I$  rozłożyć na dwa dodajniki, w myśl uwagi 3 na str. 226. I tak w obszarze  $OBC$ , przy stałym  $y$ , zmienia się  $x$  od odciętej osi  $Y$  do odciętej paraboli, t. j. od  $x_1 = 0$  do  $x_2 = \sqrt{y}$ . Dla zmiennej  $y$  granice całkowania są stałe: od  $y_1 = 0$  do  $y_2 = 1$ . W obszarze zaś  $ABC$  zmienia się  $x$  od  $x_1 = 0$  do odciętej prostej  $AB$ , t. j. do  $x_2 = 2 - y$ , a granice dla  $y$  są stałe, a mianowicie  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$ . Zatem przy tym porządku całkowania jest:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x, y) dx dy$$

2) Zbadać, jaką postać ma obszar całkowania w całce:

$$I = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x, y) dy dx$$

Jak się zmieni sposób obliczania tej całki, gdy zmienimy porządek całkowania?

Rzędna zmienia się od  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  do  $y = x + 2a$ , t. j. od łuku półkola o promieniu  $a$ , o środku w początku układu, do linii prostej, przedstawionej na fig. 81. Odcięta zmienia się od  $x = 0$  do  $x = a$ , t. j. od osi rzędnych do prostej równoległej do tej osi w odstępnie  $a$ . Obszar całkowania ma zatem postać czworokąta krzywołiniowego  $ABEF$ .

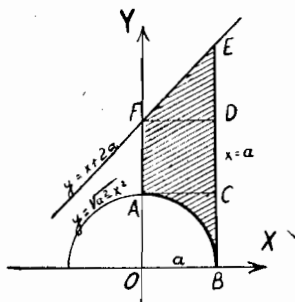


Fig. 81.

Gdybyśmy zmienili porządek całkowania, to trzeba by rozłożyć całkę na 3 dodajniki, odpowiadające obszarom  $ABC$ ,  $ACDF$  i  $DEF$ .

Otrzymamy w ten sposób:

$$I = \int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^a \int_0^a f(x, y) dx dy + \int_a^{2a} \int_0^a f(x, y) dx dy + \\ + \int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^a f(x, y) dx dy$$

3) Wyznaczyć granice całkowania, jeżeli obszar całkowania jest trójkątem o wierzchołkach  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(4, -1)$  (fig. 82). Przy pomocy znanego z geometrii analitycznej wzoru:

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

otrzymujemy równania boków tego trójkąta:

$$AB \dots y = x + 1$$

$$BC \dots y = -x + 3$$

$$AC \dots 5y + x + 1 = 0$$

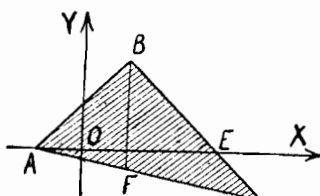


Fig. 82.

Jeżeli całkujemy najpierw według  $x$ , to trzeba ustalić  $y$ . Widzimy, że wtedy otrzyma się inne granice (zmiennie) dla  $x$  w części  $AEB$ , a inne w części  $AEC$ . Wobec tego trzeba rozłożyć całkę po całym trójkącie  $ABC$  na dwa dodajniki w następujący sposób:

$$I = \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_0^{3-y} \int_{y-1}^{3-y} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-5y-1}^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Przy zmienionym porządku całkowania trzeba inaczej rozłożyć obszar, a mianowicie zapomocą prostej  $BF$ . Wtedy:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-\frac{1}{5}(x+1)}^{x+1} f(x, y) dy dx + \int_1^4 \int_{-\frac{1}{5}(x+1)}^{-x+3} f(x, y) dy dx$$



4) Obliczyć pole obszaru, zawartego między parabolą o równaniu  $y=x^2$  a elipsą o równaniu  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  (fig. 83). Według wzoru (161) pole tego obszaru ma wartość:

$$D = \iint_{(D)} dx dy$$

Gdybyśmy całkowali najpierw według  $x$ , to trzeba by obliczać osobno obszar, leżący nad cięciwą  $AB$  a osobno pod nią. Dogodniej jest jednak całkować najpierw według  $y$ . Wtedy granice dla  $y$

są  $y_1 = x^2$ ,  $y_2 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . Najmniejszą

odciętą jest odcięta  $x = -m$  punktu  $A$ , w którym parabola przecina elipsę a największą odcięta  $x = m$  punktu  $B$ . Odcięte te otrzymuje się przez rozwiązanie układu równań: paraboli i elipsy.

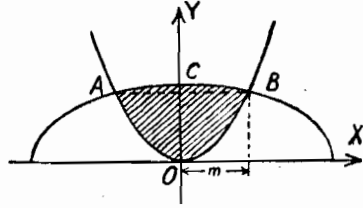


Fig. 83.

Zatem:

$$D = \int_{-m}^{+m} \int_{x^2}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy dx = \int_{-m}^{+m} \left( \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} - x^2 \right) dx$$

Używając dla pierwszej części tej całki wzoru (25a) na str 25, otrzymujemy:

$$D = \frac{b}{a} \left( m \sqrt{a^2 - m^2} + a^2 \arcsin \frac{m}{a} \right) - \frac{2}{3} m^3$$

5) Nad ćwiartką  $D$  koła o równaniu  $x^2 + y^2 = r^2$  wznosi się powierzchnia krzywa, określona równaniem:

$$z = pxy$$

(jest to paraboloida hiperboliczna; por. przykład 1 na str. 223). Obliczyć średnie wzniesienie  $z$  tej powierzchni nad poziom  $(XY)$ . Chodzi tu o obliczenie średniej wartości  $\mu$  funkcji  $pxy$  nad obszarem  $D$ . Z wzoru (163) otrzymujemy:

$$\mu = \frac{1}{D} \iint_{(D)} pxy dx dy$$

Pole obszaru jest  $D = \frac{1}{4} r^2 \pi$ . Jeżeli całkujemy najpierw według  $x$ , to granicami całkowania dla  $x$  są:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \sqrt{r^2 - y^2}$  a dla  $y$  od  $y_1 = 0$  do  $y_2 = r$ . Zatem:

$$\mu = \frac{4}{r^2 \pi} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} pxy dx dy$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2p}{r^2\pi} \int_0^r x^2 y \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{2p}{r^2\pi} \int_0^r (r^2 - y^2) y dy = \frac{2p}{r^2\pi} \left( \frac{1}{2} r^2 y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_0^r = \\ &= \frac{2p}{r^2\pi} \left( \frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{4} r^4 \right) = \frac{pr^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

6) Obliczyć objętość części walca kołowego o promieniu  $a$  na fig. 84, wznoszącą się nad trójkątem  $OAB$ , który jest połówką kwadratu  $OCAB$  o boku  $a$ . Równanie walca kołowego tak położonego, jak na fig. 84, ma postać:

$$x^2 + z^2 = a^2$$

Obszarem całkowania jest trójkąt  $OAB$ , którego bok  $OA$  ma w układzie  $X, Y$  równanie  $y = x$ .

Funkcją, którą mamy całkować, jest  $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ . Użyjemy wzoru (164), a więc:

$$V = \int_{(D)} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx dy$$

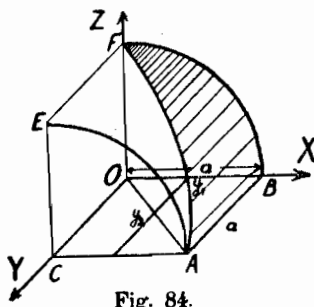


Fig. 84.

Wygodniej będzie całkować najpierw według  $y$ , a więc do obliczenia tej całki użyjemy wzoru (160). Przetnijmy obszar całkowania dowolną prostą równoległą do osi  $Y$ , to  $y_1$  jest stale równe 0, a  $y_2 = x$ , jako rzędna punktu, leżącego na prostej  $OA$ . Granicami całkowania według  $y$  są więc  $y_1 = 0$  i  $y_2 = x$ . Najmniejszą odciętą dla tego obszaru jest  $x = 0$ , a największą  $x = a$ , a więc granicami całkowania dla  $x$  są  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = a$ . Wobec tego:

$$V = \int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} y \Big|_0^x dx = \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Ostatnią całkę obliczymy najłatwiej, używając podstawienia:  $a^2 - x^2 = t$  a stąd  $-2x dx = dt$ , czyli  $x dx = -\frac{1}{2} dt$ . Dla  $x = 0$  jest  $t = a^2$ , a dla  $x = a$  jest  $t = 0$ . A więc:

$$V = \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_{a^2}^0 \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3/2} t^{3/2} \right]_{a^2}^0 = \frac{1}{3} a^3$$

(Niechaj czytelnik okaże, że przy zmianie porządku całkowania należy obrócić dla  $x$  granice  $x_1 = y$ ,  $x_2 = a$ , a dla  $y$  granice  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = a$ ).

Interesującym jest, że wzór na objętość tej części walca nie zawiera liczby  $\pi$ . Objętość części tego walca, wznoszącej się nad całym kwadratem  $OCAB$ , nie jest bynajmniej równa podwójnej objętości części, wznoszącej

się nad połówką  $OAB$  tego kwadratu. Objętość ta bowiem ma wartość  $\frac{1}{4}a^2\pi$ , jako ćwiartka walca równobocznego o promieniu  $a$ , a to jest różne od  $2V = \frac{2}{3}a^3$ . A więc przez poprowadzenie przekroju  $OAF$  rozpada się ćwiartka walca na dwie nierówne części:

$$V = \frac{1}{3}a^3 \quad \text{i} \quad V_1 = \frac{1}{4}a^2\pi - \frac{1}{3}a^3 = a^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

*Uwaga.* Takie bryły spotykamy w architekturze, a mianowicie t. zw. sklepienie *klasztorne* składa się z 8 powierzchni postaci  $FAB$ , zestawionych tak, jak to uwidoczniło na fig. 85a w rzucie na płaszczyznę poziomą (kreski na rysunku biegną wzdłuż tworzących walców). Natomiast sklepienie *krzyżowe* składa się z 8 części powierzchni walcowej, mających postać  $EAF$  na fig. 84, zestawionych obok siebie tak, jak wskazuje fig. 85b.

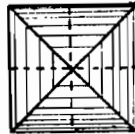


Fig. 85a.

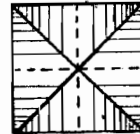


Fig. 85b.

7) Przy pomocy całki podwójnej możemy obliczyć objętość elipsoidy trójosiowej o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(Obliczaliśmy ją już w inny sposób w § 231, przykład 2). Weźmy pod uwagę ósemkę tej elipsoidy (por. fig. 76, str. 225). Obszarem całkowania jest ćwiartka elipsy  $OAB$  o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{czyli} \quad x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

Funkcja podcałkowa ma postać:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Całkując najpierw według  $x$ , mamy następujące granice całkowania:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

a dla  $y$ :

$$y_1 = 0, \quad y_2 = b$$

Zatem

$$\frac{1}{8}V = \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

Po wykonaniu rachunków otrzyma się:

$$V = \frac{4}{3} abc \pi.$$

8) Obliczyć objętość, zawartą między powierzchnią elipsy o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

powierzchnią o równaniu:

$$z = Ax^2 + By^2$$

gdzie  $A$  i  $B$  są liczbami dodatnimi (jest to paraboloida eliptyczna, por. tom I, str. 43) i pomiędzy powierzchnią walca eliptycznego o tworzących prostopadłych do płaszczyzny  $(XY)$ , mającego tę elipsę za kierownicę.

Obliczmy ćwiartkę tej objętości, a mianowicie objętość nad ćwiartką elipsy. Jeżeli całkujemy najpierw według  $x$ , to granice całkowania są takie same, jak w poprzednim przykładzie; jeżeli zaś całkujemy najpierw według  $y$ , to granicami całkowania dla  $y$  są:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

granicami zaś dla  $x$  są  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$ . Rozdzielmy odrazu całkę z funkcji  $z$  na sumę dwóch całek i wykonajmy w pierwszej z nich najpierw całkowanie według  $y$ , a w drugiej najpierw według  $x$ . A więc:

$$\frac{1}{4} V = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} Ax^2 dy dx + \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} By^2 dx dy = I_1 + I_2$$

Otóż pierwszą całkę obliczamy w następujący sposób:

$$I_1 = \int_0^a Ax^2 y \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{Ab}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Używając podstawienia  $x = a \sin t$ , otrzymujemy:

$$I_1 = \frac{1}{4} A b a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{1}{8} A b a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{A b a^3 \pi}{16}$$

Drugiej całki nie trzeba nawet obliczać, albowiem różni się ona od pierwszej tylko tem, że zamiast  $A$  występuje  $B$ , a  $a$  i  $b$  należy pomieniać ze sobą. Wobec tego:

$$I_2 = \frac{B a b^3 \pi}{16}$$

a więc:

$$V = \frac{1}{4} \pi ab (Aa^3 + Bb^3)$$

### § 255. Pole powierzchni (Komplanacja powierzchni).

Obliczaliśmy dotąd tylko pola powierzchni obrotowych, a używaliśmy do tego celu całki pojedynczej (por. § 232). Do definicji i obliczania pól dowolnych powierzchni, a więc także nieobrotowych, użyjemy całki podwójnej.

Weźmy pod uwagę część powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$ , wyciętą przez walec, którego podstawą jest dowolny obszar regularny  $D$ , a tworzące są prostopadłe do płaszczyzny  $(XY)$  (fig. 86).

Załóżmy, że badana powierzchnia posiada płaszczyznę styczną, nie prostopadłą do  $(XY)$ , w każdym punkcie nad obszarem  $D$ . Za pomocą dwóch systemów prostych równoległych do osi  $X$  i  $Y$  rozkładamy obszar  $D$  na elementy  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Nad każdym z nich budujemy słup prosty, ograniczony z jednej strony elementem danej powierzchni, w ogólności krzywym. Każdy taki element  $p_r$  powierzchni za-

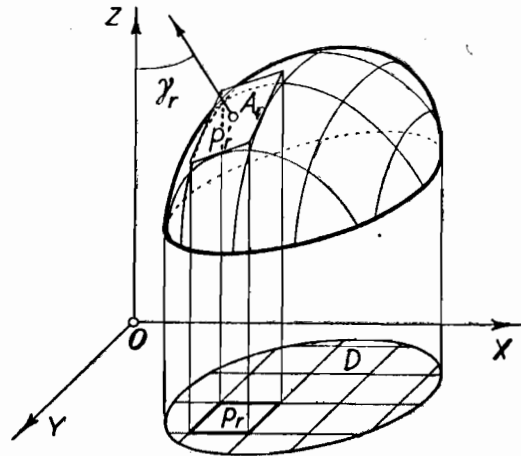


Fig. 86.

stępujemy ścianką płaską  $s_r$ , styczną do niego w jakimkolwiek jego punkcie  $A$ , o współrzędnych  $\xi_r, \eta_r$ , a ograniczoną poboczną odpowiedniego słupa o podstawie  $p_r$ . Utwórzmy sumę tych ścianek stycznych:

$$S_1 = \sum_{r=1}^N s_r.$$

Tworząc dalsze, coraz drobniejsze podziały obszaru  $D$ , otrzymamy w ten sposób ciąg  $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$  takich sum.

*Definicja.* Polem  $P$  badanej części powierzchni nazywamy granicę ciągu sum  $S_p$  ścianek stycznych, otrzymanych przez ciąg kolejnych podziałów obszaru  $D$  (i danej powierzchni) na elementy, których średnice dążą do zera (t. j. przez ciąg tych podziałów, przy których największe średnice dążą do zera).

Okażemy, że ta granica istnieje, gdy funkcja  $f(x, y)$  jest ciągła i posiada cząstkowe pochodne:  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y)$  i  $q = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$ , ciągłe w obszarze  $D$ . I tak  $p_r$  jest rzutem płaskiej ścianki stycznej  $s_r$  na płaszczyznę  $(XY)$ , zatem:

$$p_r = s_r \cos \gamma_r \quad \text{czyli} \quad s_r = \frac{p_r}{\cos \gamma_r}$$

gdzie  $\gamma_r$  oznacza kąt ostry, zawarty między płaszczyzną styczną w punkcie  $A_r(\xi_r, \eta_r)$  a płaszczyzną  $(XY)$ . Cosinus tego kąta wyrażamy wzorem (por. tom I, str. 339):

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

czyli:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

W  $\cos \gamma_r$  należy brać na  $(x, y)$  spólrzędne dowolnego punktu prostokąta  $p_r$ , np.  $(\xi_r, \eta_r)$ .

Mianownik jest funkcją zmiennych  $x, y$ ; nazwijmy go krótko  $\varphi(x, y)$ . A więc:

$$s = p_r \cdot \sqrt{1 + f_x^2(\xi_r, \eta_r) + f_y^2(\xi_r, \eta_r)} = \varphi(\xi_r, \eta_r) \cdot p_r$$

a:

$$S_1 = \sum_{r=1}^N \varphi(\xi_r, \eta_r) \cdot p_r$$

Funkcja  $\varphi(x, y)$  jest ciągła w obszarze  $D$ , a więc granica ciągu takich sum, gdy średnice elementów  $p_r$  dążą do zera, istnieje i w myśl uwagi 2 na str. 226, jest równa całce:

$$\iint_{(D)} \varphi(x, y) dx dy \quad \text{czyli} \quad \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$$

Zatem pole  $P$  badanej części powierzchni jest równe tej całce. Używając skrótów  $p, q$  na cząstkowe pochodne, otrzymujemy ostatecznie następujący wzór na pole powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$  nad obszarem  $D$ :

$$(165) \quad \boxed{P = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy}$$

Obliczanie pola powierzchni krzywej nazywamy **komplanacją** tej powierzchni; znając bowiem liczbę  $P$ , możemy z łatwością znaleźć *płaską* powierzchnię (np. prostokąt lub koło), mającą pole równe polu tej powierzchni krzywej.

Wzór (165) możemy także pisać w postaci:

$$(165a) \quad P = \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\cos \gamma}$$

przyczem  $\gamma$  jest kątem, zawartym między normalną do badanej powierzchni a osią  $Z$ . Wyrażenie, znajdujące się pod całką, nazywamy *elementem powierzchni* i oznaczamy je krótko symbolem  $d\sigma$ .

A więc:

$$(165b) \quad ds = \frac{dx dy}{\cos \gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

*Uwaga.* Celem łatwiejszego zapamiętania tego wzoru zwróćmy uwagę na to, że jest on analogiczny do wzoru na długość łuku:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

*Przykłady.*

1) Jak wielką powierzchnię wycina prostopadłościan, którego wierzchołki podstawy mają współrzędne  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 6)$ ,  $D(3, 6)$  z powierzchni o równaniu:

$$z = \sqrt{2xy}$$

(Jest to stożek eliptyczny, którego wierzchołek leży w początku układu a osie  $X$  i  $Y$  są tworzącymi; oś jego jest symetralną kąta  $\sphericalangle XOY$ ).

Obszarem całkowania jest prostokąt  $ABCD$ . Zatem:

$$P = \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

Ale:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2y} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{y}}$$

a więc:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} dx dy = \int_0^6 \int_0^3 \sqrt{\frac{2xy + y^2 + x^2}{2xy}} dx dy = \\ &= \int_0^6 \int_0^3 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{2y}} \int_0^3 (x^{\frac{1}{2}} + yx^{-\frac{1}{2}}) dx dy = \int_0^6 \frac{1}{\sqrt{2y}} \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2yx^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^3 dy = \\ &= 6^{\frac{3}{2}} \int_0^6 (y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}) dy = 36 \end{aligned}$$

2) Obliczyć pole powierzchni, wyciętej z kuli o równaniu:

$$(I) \quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

przez dwa walce o równaniach:

$$(II) \quad x^2 + y^2 - a w = 0,$$

$$(III) \quad x^2 + y^2 + a w = 0$$

Na fig. 87 przedstawiono ósemkę kuli.

Kierownicą pierwszego walca jest koło o równaniu (II) a tworzące są równoległe do osi  $Z$ .

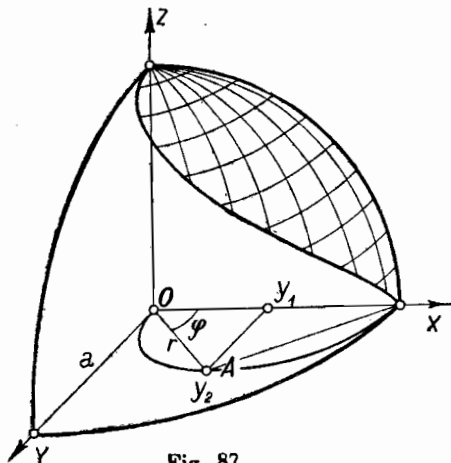


Fig. 87

Pochodne cząstkowe  $p$  i  $q$  obliczymy z uwikłanej formy (I):

$$p = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{2w}{2z} = -\frac{w}{z}$$

$$q = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

Jeżeli całkujemy najpierw według  $w$ , to zmienne granice dla  $y$  są  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \sqrt{ax - w^2}$ , a  $w$  zmienia się od  $x_1 = 0$  do  $x_2 = a$ . Całkowita powierzchnia, wycięta z kuli przez ten walec, składa się z 4 takich części: dwie leżą na górnej półkuli, dwie zaś na dolnej. Widocznym jest, że drugi walec wycina dwa okna o równej powierzchni. Zatem:

$$P = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dy dx = 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{z} dy dx$$

czyli:

$$P = 8a \int_0^a \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Obliczenie tej całki jest dość mozolne. Najpierw sprowadza się wewnętrzną całkę zapomocą podstawienia  $t = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  do funkcji arcus sinus a następnie przy całkowaniu według  $x$  używa się całkowania „per partes“ Dochodzi się ostatecznie do wyniku:

$$P = 8a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Wynik ten uzyskamy w jednym z następujących paragrafów (§ 258) znacznie szybciej, wprowadzając za  $x$  i  $y$  nowe zmienne w całkę podwójną.

Powierzchnie, wycięte z kuli przez takie dwa walce, stykające się z sobą wzdłuż osi  $Z$ , nazywamy *oknami Viviani'ego*.



### § 256. Związek całki podwójnej z całką krzywoliniową. Twierdzenie Greena-Biemanna.

Całka podwójna po obszarze ma bardzo bliski związek z całką krzywoliniową, braną po brzegu tego obszaru.

Weźmy pod uwagę całkę krzywoliniową po linii zamkniętej  $L$  z dowolnej funkcji  $P(x, y)$ , ciągłej w obszarze domkniętym regularnym, zamkniętym tą linią:

$$I = \int_{(L)} P(x, y) dx$$

Załóżmy o linii  $L$ , że każda prosta równoległa do osi  $Y$  przecina ją najwyżej w dwóch punktach (jak na fig. 88) i że w równaniach

$y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  łuków  $\widehat{ABC}$  i  $\widehat{AEC}$ , tworzących tę linię zamkniętą,  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  są funkcjami ciągłymi. Okażemy, że ta całka krzywoliniowa jest równa ujemnej wartości całki podwójnej po obszarze  $D$ , zamkniętym

tą linią, z funkcji  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ . Zakładamy przytem, że ta cząstkowa pochodna jest ciągła w całym danym obszarze domkniętym  $D$ . Twierdzimy więc, że:

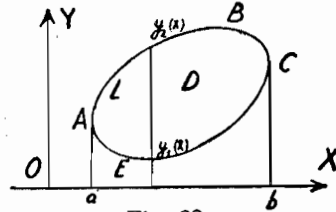


Fig. 88.

$$(166) \quad \boxed{\int_{(L)} P(x, y) dx = - \int_{(D)} \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy}$$

*Dowód.* Wykonajmy w tej całce podwójnej najpierw całkowanie według  $y$ . Granicami całkowania dla  $y$  są  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$ . Granicami zaś całkowania dla  $x$  są skrajne odcięte  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ . Zatem:

$$- \int_{(D)} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx$$

Całką z  $\frac{\partial P}{\partial y}$  według  $y$  jest oczywiście  $P(x, y)$ , a zatem:

$$\begin{aligned} - \int_{(D)} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx + \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \end{aligned}$$

Pierwsza z całek prawej strony jest całką krzywoliniową z funkcji  $P(x, y)$  po łuku  $\widehat{CBA}$ , druga zaś po łuku  $\widehat{AEC}$ .

A więc:

$$\begin{aligned}
 - \int_{(D)} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{CBA} P(x, y) dx + \int_{AEC} P(x, y) dx = \\
 &= \int_{CBAEC} P(x, y) dx = \int_{(L)} P(x, y) dx
 \end{aligned}$$

Kierunek obiegu linii  $L$ , zaznaczony porządkiem liter  $CBAEC$ , jest dodatni, albowiem przy takim obiegu mamy powierzchnię  $D$  po lewej ręce. A więc całka podwójna po jakimś obszarze da się wyrazić za pomocą całki, branej tylko po brzegu tego obszaru. Zdawałoby się mogło, że mając wykonać całkowanie po obszarze, trzeba znać wartość funkcji dla wszystkich punktów tego obszaru; tymczasem okazało się, że wystarczy znać wartości tylko na brzegu obszaru, ale wartości innej funkcji, a mianowicie nie funkcji podcałkowej  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , lecz funkcji pierwotnej (względem  $y$ )  $P$ .

Z czemś podobnym spotkaliśmy się już w całkach pojedynczych,

I tak:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Przy tem całkowaniu w przedziale od  $a$  do  $b$  mogłoby się zdawać, że trzeba znać wartości rzędnych dla każdego punktu tego przedziału; tymczasem wystarczy znajomość rzędnych dla końców przedziału, ale nie dla funkcji  $F'(x)$ , tylko dla funkcji pierwotnej  $F(x)$ .

Twierdzenie analogiczne do twierdzenia, wyrażonego wzorem (166), otrzymujemy, wykonując najpierw całkowanie według zmiennej  $x$ . Otrzymujemy mianowicie pomiędzy całką krzywoliniową po linii zamkniętej  $L$  z funkcji  $Q(x, y)$  według  $y$ , a całką podwójną z funkcji  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  po obszarze, zamkniętym tą linią  $L$ , następujący związek:

(167)

$$\boxed{\int_{(D)} \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy}$$

Zakładamy przytem, że  $Q(x, y)$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  są ciągle w obszarze  $D$ , a linja  $L$  ma z każdą prostą równoległą do osi  $X$  najwyżej dwa punkty wspólne.

Pozostawiamy czytelnikowi szczegółowe przeprowadzenie dowodu.

Utworzywszy sumy całek po obu stronach wzorów (166) i (167), otrzymujemy następujący wzór ogólny:

$$(168) \quad \boxed{\int_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(L)} (P dx + Q dy)}$$

Wzór ten zawiera w sobie wzory (166) i (167) jako specjalne przypadki (dla  $Q = 0$  lub  $P = 0$ ). Twierdzenie, wyrażone tym wzorem, nazywamy twierdzeniem Greena-Riemanna. Dowiedliśmy prawdziwości jego dla obszarów  $D$ , zamkniętych takimi linjami  $L$ , które każda prosta równoległa do osi współrzędnych przecina najwyżej w dwóch punktach. Twierdzenie to jest jednak prawdziwe także dla ogólniejszych obszarów, a mianowicie dla takich, które można rozłożyć na skończoną liczbę obszarów powyższego typu (jak np. na fig. 89). Aby to okazać, wypisujemy dla każdego częściowego obszaru wzór Greena-Riemanna i tworzymy sumy prawych i lewych stron tych wzorów. W ten sposób otrzymamy po lewej stronie jedną całkę podwójną, braną po całym danym obszarze, a po prawej, sumę całek krzywoliniowych. Otóż te części całek krzywoliniowych, które są brane po liniach, rozcinających dany obszar (jak np. po linii  $AB$  na fig. 89), odpadną w sumie, ponieważ przebiegamy te linie dwukrotnie, raz w jednym kierunku, a drugi raz w przeciwnym. Wskutek tego otrzymamy ostatecznie po prawej stronie jedną całkę krzywoliniową, braną po linii  $L$ , zamykającej cały dany obszar.

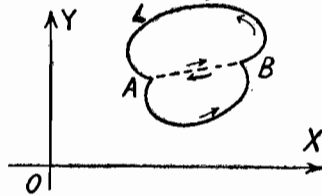


Fig. 89.

O funkcjach  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  zakładaliśmy, że są ciągłe w danym obszarze; założenia te są istotne.

### § 257. Zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna do badania całek krzywoliniowych i różniczek zupełnych.

Wiemy, że wartość całki krzywoliniowej  $\int_{AB} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$ , branej pomiędzy dwoma punktami  $A, B$ , zależy w ogólności nie tylko od współrzędnych tych punktów, lecz także od drogi, łączącej te punkty, po której całkujemy. Nadzwyczaj ważne są w zastosowaniach te przypadki, w których wartość tej całki krzywoliniowej nie zależy od drogi (a zależy tylko od punktów końcowych). Przy pomocy twierdzenia Greena-Riemanna znajdziemy warunek konieczny i dostateczny na to, aby wartość całki krzywoliniowej między stałymi punktami była niezależna od drogi.

Niechaj funkcje  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  i  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  będą ciągłe w jakimś obszarze  $W$  (fig. 90).

Weźmy pod uwagę dowolne dwa punkty  $A, B$  z tego obszaru i dwie drogi  $ACB, AEB$ , łączące te punkty, a nie mające poza tym żadnych punktów wspólnych i leżące całkowicie w obszarze  $W$ . Żądamy, aby całki krzywoliniowe po tych drogach były sobie równe, t. j. aby się spełniała równość:

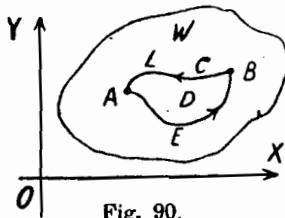


Fig. 90.

$$(R) \quad \int_{AEB} (P dx + Q dy) = \int_{ACB} (P dx + Q dy)$$

Przenosimy drugą całkę na lewą stronę i otrzymujemy:

$$\int_{AEBCA} (P dx + Q dy) = 0$$

Nazwijmy literą  $L$  linię zamkniętą  $AEBCA$ , ograniczającą jakiś obszar  $D$ , to całka po tej linii ma postać:

$$\int_{(L)} (P dx + Q dy) = 0$$

Na podstawie twierdzenia Greena-Riemanna jest także:

$$\int_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby ta całka miała wartość 0 dla każdego obszaru  $D$ , zawartego w  $W$ , jest, aby zachodziła równość:

$$(169) \quad \boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

dla wszystkich punktów obszaru  $W$ .

Istotnie, warunek ten jest *dostateczny*. Wtedy bowiem funkcja podcałkowa jest stale zerem, a stąd wynika na podstawie twierdzenia o wartości średniej, że i całka po każdym obszarze  $D$ , zawartym w  $W$ , jest zerem.

Warunek ten jest także *konieczny*. Gdybyśmy bowiem mieli w jakimś punkcie obszaru  $W$ :

$$F(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = a \neq 0, \quad \text{np. } a > 0$$

to wskutek ciągłości tej funkcji musiałby istnieć jakiś (niewielki chociażby) obszar  $D_1$ , otaczający ten punkt, w którym ta funkcja byłaby stale dodatnia. Wtedy zaś i całka po tym obszarze  $D_1$  byłaby różna od zera.

I. Warunek (169) jest więc warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka krzywoliniowa między dwoma dowolnymi punktami obszaru  $W$  była niezależna od drogi.

Czyniliśmy założenie, że drogi  $ALB$  i  $ACB$  nie mają żadnych punktów wspólnych prócz końców  $A, B$ . Założenie to jest nieistotne. Gdyby bowiem te drogi miały jakieś punkty, a nawet jakieś łuki wspólne, to obierając trzecią drogę  $AFB$ , nie mającą z nimi żadnych punktów wspólnych prócz końców, mielibyśmy:

$$\int_{\overline{AFB}} (P dx + Q dy) = \int_{\overline{AEB}} (P dx + Q dy) \quad \text{i} \quad \int_{\overline{AFB}} (P dx + Q dy) = \int_{\overline{ACB}} (P dx + Q dy)$$

a stąd wynika równość (R).

*Uwaga.* Twierdzenie to jest prawdziwe nawet wtedy, gdy się nie uda znaleźć takiej drogi  $AFB$ .

Z warunkiem (169) spotkaliśmy się już w rachunku różniczkowym (por. tom I, str. 347), a mianowicie okazano tam, że jest to warunek konieczny na to, aby wyrażenie:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

było różniczką zupełną. Obecnie możemy okazać, że jest to także warunek dostateczny, to znaczy, że jeżeli ten warunek jest spełniony, to istnieje taka funkcja  $u(x, y)$ , dla której  $P$  jest cząstkową pochodną  $\frac{\partial u}{\partial x}$  a  $Q$  cząstkową pochodną  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Otóż z równości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$$

otrzymujemy:

$$u(x, y) = \int_a^x P(x, y) dx + \varphi(y)$$

gdzie  $a$  jest dowolną stałą. Różniczkujemy obie strony według  $y$  (stosując do pierwszej całki regułę Leibniza, por. str. 203, wzór (150)) i otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y)$$

a to ma być równe  $Q(x, y)$ . Uwzględniając warunek (169), otrzymujemy zatem:

$$Q(x, y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y) = Q(x, y) - Q(a, y) + \varphi'(y)$$

a więc:

$$\varphi'(y) = Q(a, y)$$

czyli:

$$\varphi(y) = \int_b^y Q(a, y) dy + C$$

gdzie  $b$  jest dowolną stałą.

A więc:

$$(170) \quad u(x, y) = \int_a^x P(x, y) dx + \int_b^y Q(a, y) dy + C$$

Otrzymaliśmy więc całą gromadę funkcji (różniących się od siebie tylko o dowolną stałą liczbę), dla których  $P dx + Q dy = du$  jest różniczką zupełną

II. A więc warunek (169) jest konieczny i dostateczny na to, aby wyrażenie:

$$P dx + Q dy$$

było różniczką zupełną.

Wzór (170) pozwala odrazu scałkować każdą różniczkę zupełną, t. j. znaleźć funkcję, jeżeli podana jest jej różniczką zupełną. Przykłady całkowania różniczek zupełnych bez użycia tego wzoru ogólnego podano już w tomie I (str. 347—349, przykłady 2 i 3). Zastosujmy ogólny wzór do przerobionego tam przykładu:

$$(4y^3 - 2) dx + (12xy^2 - 6y) dy$$

Funkcja  $z(x, y)$ , której różniczką zupełną jest to wyrażenie, ma według wzoru (170) postać:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_a^x (4y^3 - 2) dx + \int_b^y (12ay^2 - 6y) dy + C_1 \\ &= (4y^3x - 2x) \Big|_a^x + (4ay^3 - 3y^2) \Big|_b^y + C_1 = \\ &= 4y^3x - 2x - 3y^2 + 2a - 4ab^2 + 3b^2 + C_1 \end{aligned}$$

Oznaczając wyrażenie  $2a - 4ab^2 + 3b^2 + C_1$  jedną literą  $C$ , otrzymujemy:

$$z = 4y^3x - 2x - 3y^2 + C$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym w tomie I.

Z tego twierdzenia II i z I (o niezależności całki od drogi) wynika następujące twierdzenie.

III. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby całka krzywoliniowa:

$$\int_{AB} (P dx + Q dy)$$

była niezależna od drogi całkowania, jest, aby wyrażenie pod całką było różniczką zupełną.

Przykłady, omówione w § 242 na str. 189—190, potwierdzają ten wynik.

Tak np. wartość całki krzywoliniowej:

$$\int (3y dx + 2x dy)$$

zależy od drogi, ponieważ wyrażenie, stojące pod znakiem całki, nie jest różniczką zupełną. Istotnie:

$$\frac{\partial(3y)}{\partial y} = 3 \quad \text{a} \quad \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2, \quad \text{a więc} \quad \frac{\partial(3y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(2x)}{\partial x}$$

to zaś znaczy, że nie spełnia się warunek (169). Natomiast w całości:

$$\int (2xy dx + x^2 dy)$$

jest:

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \quad \text{i} \quad \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$$

a zatem wartość tej całki nie zależy od drogi.

Czyniliśmy założenie, że funkcje  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  i ich cząstkowe pochodne są ciągle w badanym obszarze. Jeżeli te funkcje są nieciągłe chociażby w jednym punkcie, leżącym między drogami całkowania, to całki krzywoliniowe po tych drogach mogą mieć różne wartości, chociaż funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną. Tak np. obliczmy całkę krzywoliniową:

$$I = \int_{(L)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

po kole o równaniu  $x^2 + y^2 = 1$ . Łatwo zbadać, że wyrażenie, znajdujące się pod całką, jest dla  $(x, y) \neq (0, 0)$  różniczką zupełną funkcji  $\arctg \frac{y}{x}$ . Wartość tej całki otrzymamy, używając dla koła przedstawienia parametrowego:  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ . Wtedy:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ta całka po linii zamkniętej ma wartość różną od zera. Obliczając ją po drodze  $ADC$  (fig. 91), t. j. po górnym półkolu, otrzymujemy:

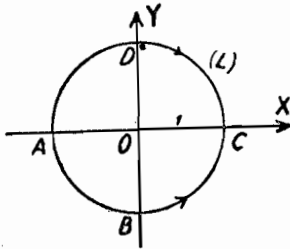


Fig. 91.

$$\int_{\pi}^0 dt = t \Big|_{\pi}^0 = -\pi$$

Po dolnym zaś półkolu ma ta całka wartość:

$$\int_{\pi}^{2\pi} dt = t \Big|_{\pi}^{2\pi} = +\pi$$

a zatem otrzymujemy różne wartości po tych dwóch drogach. Pochodzi to stąd, że funkcje:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

są nieciągłe w punkcie  $O(0, 0)$ , zawartym między temi drogami całkowania.

Twierdzenia I–III mają szczególnie wielkie znaczenie w fizyce matematycznej. I tak widzieliśmy (w § 244), że praca, wykonana po dowolnej drodze przez dowolną siłę, wyraża się całką krzywoliniową. Ograniczając się narazie do jednej płaszczyzny, otrzymujemy na pracę wzór:

$$L = \int_{AB} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

gdzie  $P, Q$  są składowymi siły w kierunkach osi współrzędnych. Otóż wartość tej pracy nie zależy od drogi wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie pod całką jest różniczką zupełną jakiejś funkcji  $u(x, y)$ . Tę funkcję nazywamy *potencjałem*. Teoria potencjału jest bardzo ważnym działem fizyki.

Podobnie w termodynamice przyrost *energji* i *entropja* (por. str. 196–197) wyrażają się zapomocą całek krzywoliniowych z różniczek zupełnych; zatem zmiana energii i entropji nie zależą od drogi, po jakiej się odbywa proces termodynamiczny („drogą“ nazywamy tu wykres, podający związek ciśnienia z objętością lub z temperaturą).

Podobne pojęcia stosuje się w hydrodynamice, aerodynamice i w nauce o elektryczności.

Omówimy tu jeszcze w krótkości zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna w teorii funkcji zmiennej zespolonej. Widzieliśmy już w § 245, że całka z funkcji  $f(z) = P(x, y) + i \cdot Q(x, y)$  zmiennej zespolonej  $z = x + iy$  składa się z dwóch całek krzywoliniowych, branych



po jakiejś linii na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, a mianowicie (por. wzór (149) na str. 200):

$$\int_{\widehat{ACB}}^{z_A} f(z) dz = \int_{\widehat{ACB}} (P(x, y) dx - Q(x, y) dy) + i \int_{\widehat{ACB}} (Q(x, y) dx + P(x, y) dy)$$

Założmy, że  $P$ ,  $Q$  i ich pierwsze cząstkowe pochodne są funkcjami ciągłymi w jakimś obszarze, zawierającym drogi całkowania.

Całka ta nie zależy od drogi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje  $P(x, y)$  i  $Q(x, y)$  spełniają warunki:

$$(171) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned}}$$

wtedy bowiem całki po prawej stronie są niezależne od drogi. Te dwa warunki są równaniami różniczkowymi cząstkowymi pierwszego rzędu, zwanymi równaniami Cauchy'ego i Riemanna.

Założmy, że funkcje  $P$  i  $Q$  posiadają także drugie cząstkowe pochodne ciągłe. Różniczkując pierwsze z równań (171) według  $y$ , a drugie według  $x$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \end{aligned}$$

a stąd:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Podobnie różniczkując pierwsze równanie według  $x$  a drugie według  $y$ , otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

Widzimy więc, że zarówno funkcja  $P(x, y)$  jak i  $Q(x, y)$ , w razie, gdy całka z  $f(z)$  nie zależy od drogi całkowania, branej z pewnego obszaru, spełniają w tym obszarze to samo równanie różniczkowe cząstkowe 2-go rzędu:

$$(172) \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

zwane równaniem Laplace'a.

### § 258. Wprowadzenie nowych zmiennych w całkę podwójną.

Widzieliśmy w §§ 207 i 219, jak ważne usługi oddaje przy obliczaniu całek pojedynczych całkowanie przez podstawienie, czyli wprowadzenie nowej zmiennej  $x = \varphi(t)$  zapomocą wzoru:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Uogólnimy obecnie tę metodę na całki podwójne. Chcemy mianowicie wprowadzić w całkę:

$$I = \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

nowe zmienne  $u, v$  zapomocą związków funkcyjnych:

$$(a) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

Związki takie interpretujemy geometrycznie (por. tom I § 121) jako odwzorowanie płaszczyzny  $(UV)$  na płaszczyznę  $(XY)$  (fig. 92). Będziemy

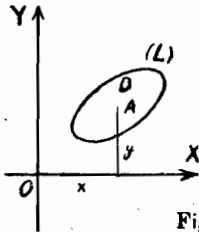
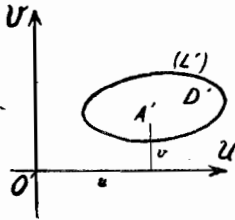


Fig. 92.



brali pod uwagę tylko takie odwzorowania wzajemnie jednoznaczne, w których obszarowi  $D'$  na płaszczyźnie  $(UV)$  odpowiada jako jego obraz również jakiś obszar  $D$  na płaszczyźnie  $(XY)$  i to tak, że brzegowi  $L'$  odpowiada brzeg  $L$ , przebiegany

w tym samym kierunku, co  $L'$ . Zbadajmy najpierw, na co zmieni się prostsza całka, a mianowicie:

$$(b) \quad D = \int_{(D)} \int dx dy$$

gdy wprowadzimy za  $x, y$  nowe zmienne zapomocą wzorów (a). Całka ta, ak wiadomo (por. wzór (161) str. 228), przedstawia pole obszaru  $D$ . Wynik uzyskamy najzybciej, przechodząc przez twierdzenie Greena-Riemanna. I tak, chcąc zastosować do tej całki podwójnej to twierdzenie w postaci wzoru (166), kładziemy  $P = y$ , a więc  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$  i otrzymujemy:

$$D = \int_{(D)} \int 1 \cdot dx dy = - \int_{(L)} y dx$$

Wprowadźmy nowe zmienne w tę całkę krzywolinjową. Gdy punkt  $o$  spódrzędnych  $(x, y)$  przebiega na płaszczyźnie  $(XY)$  linję  $(L)$  o równaniu

$f(x, y) = 0$ , to punkt  $(u, v)$  przebiega na płaszczyźnie  $(UV)$  linię  $(L')$  o równaniu  $f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = 0$ , a więc zmienne  $u$  i  $v$  są w tej całce krzywoliniowej w ten sposób od siebie zależne. Otrzymamy więc:

$$D = - \int_{(L')} y \, dx = - \int_{(L')} \psi(u, v) \, d(\varphi(u, v)) = - \int_{(L')} \psi(u, v) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \, dv \right]$$

czyli:

$$D = - \int_{(L')} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \, du + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \, dv \right)$$

Zastosujmy do tej całki krzywoliniowej znowu twierdzenie Greena-Riemanna (wzór 168), kładąc:

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} = P(u, v), \quad \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = Q(u, v)$$

a zatem:

$$D = - \int_{(D')} \int \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right) \, du \, dv$$

Ale:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$$

A więc:

$$D = \int_{(D')} \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) \, du \, dv$$

Funkcja podcałkowa jest tu jakobianem (por. tom I, str. 362) funkcji  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  według zmiennych  $u, v$ . Oznaczając ten jakobian krótko symbolem:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

otrzymujemy:

$$(c) \quad D = \int_{(D')} \int \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv$$

Zakładaliśmy, że przy odwzorowaniu brzeg  $L$  obszaru  $D$  był obiegany w tym samym kierunku, co brzeg  $L'$  obszaru  $D'$ . Gdyby ten obieg był przeciwny, to całki krzywoliniowe po linii  $L'$ , występujące w powyższym dowodzie, miałyby znaki przeciwne tak, że ostatecznie otrzymalibyśmy wzór:

$$(d) \quad D = \int_{(D')} \int - \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv$$

Jeżeli uczynimy obecnie jeszcze dodatkowe założenie, że jacobian nie zmienia znaku w obszarze całkowania, to we wzorze (c) musi on być nieujemny (albowiem wartość całej całki musi być dodatnia, ponieważ jest równa dodatniej liczbie  $D$ ), a we wzorze (d) niedodatni. Wobec tego we wzorze (c) możemy położyć  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$  a we wzorze (d)  $-\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ . Otrzymujemy zatem dla obydwu przypadków wspólny wzór:

$$(173) \quad D = \int \int_{(D')} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

*Uwaga.* Założenie, że jacobian nie zmienia znaku w obszarze  $D'$ , jest w ścisłym związku z wzajemną jednoznacznością odwzorowania. Można mianowicie wykazać, że gdy jacobian zmienia znak, to istnieją takie punkty w obszarze  $D$  na płaszczyźnie  $(XY)$ , którym odpowiadają dwa różne punkty w obszarze  $D'$ . (Dowód znaleźć można w podręczniku E. Goursat'a p. t. *Cours d'Analyse mathématique*, r. 1902, tom I, str. 299).

Otrzyaliśmy w ten sposób wzór na pole obszaru  $D$ , leżącego na płaszczyźnie  $(XY)$ , wyrażony zapomocą spórzędnych  $u, v$ .

Z wzorów (b) i (173) wynika wzór:

$$(173a) \quad \int \int_{(D)} dx dy = \int \int_{(D')} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

W ten sposób wprowadza się nowe zmienne w całkę podwójną z bardzo prostej funkcji:  $f(x, y) \equiv 1$ . Opierając się na tym wzorze, wyprowadzimy już z łatwością ogólny wzór, dla dowolnej funkcji podcałkowej  $f(x, y)$ .

Przedtem jednak zwrócimy jeszcze uwagę na to, jakie znaczenie ma jacobian dla odwzorowania, określonego równaniami:

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v)$$

Zastosujmy do całki, występującej we wzorze (173), twierdzenie o wartości średniej (wzór 163a na str. 229), to:

$$(174) \quad D = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{u=\xi \\ v=\eta}} \cdot D'$$

a stąd:

$$\frac{D}{D'} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{\substack{u=\xi \\ v=\eta}}$$

Weźmy pod uwagę jakiś stały punkt  $u = u_0, v = v_0$  obszaru  $D'$ .

Gdy średnica  $\delta$  obszaru  $D'$  dąży do zera, to także średnica obszaru  $D$  dąży do zera, a granicą ilorazu pól tych obszarów jest:

$$(175) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{D}{D'} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Bigg|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

t. j. bezwzględna wartość jacobjanu w punkcie  $u = u_0, v = v_0$ . Granicę stosunku obrazu  $D$  obszaru  $D'$  do samego obszaru  $D'$  nazywamy *stosunkiem zniekształcenia powierzchni przy odwzorowaniu*.

Widzimy stąd, że *bezwzględna wartość jacobjanu w każdym punkcie jest równa stosunkowi zniekształcenia powierzchni przy odwzorowaniu*. Stosunek ten gra bardzo ważną rolę w geodezji i w kartografii matematycznej. Odwzorowania, w których jacobjan ma stałą wartość 1, nazywamy *wiernopowierzchniowemi*.

Takimi odwzorowaniami wiernopowierzchniowemi są oczywiście obroty i przesunięcia. Tak np. obrót osi spólrzędnych o stały kąt  $\alpha$  jest określony równaniami:

$$\begin{aligned} x &= u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y &= u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{aligned}$$

Ponieważ  $x_u = \cos \alpha, x_v = -\sin \alpha, y_u = \sin \alpha, y_v = \cos \alpha$ , przeto jacobjan tego przekształcenia ma wartość:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \cos^2 \alpha - (-\sin^2 \alpha) = 1$$

Podobnie dla przesunięcia osi, określonego wzorami:

$$\begin{aligned} x &= u + a \\ y &= v + b \end{aligned}$$

otrzymuje się:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Istnieje jednak także bardzo wiele innych odwzorowań wiernopowierzchniowych, nieraz bardzo skomplikowanej postaci.

Przejdźmy do wprowadzenia nowych zmiennych w ogólną całkę podwójną:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$$

Obszar  $D$  na płaszczyźnie  $(UV)$  dzielimy na dowolne elementy  $\sigma_i$ ,

Niechaj im odpowiadają w obszarze  $D$  na płaszczyźnie  $(XY)$  elementy  $\omega_i$ . Na podstawie wzoru (174) jest:

$$\omega_i = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Bigg|_{\substack{u=u_i \\ v=v_i}} \sigma_i$$

gdzie  $u_i, v_i$  oznaczają spólrzędne odpowiednio dobranego punktu z obszaru  $\sigma_i$ .

Niechaj  $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$ . Tworzymy sumy postaci:

$$\sum f(x_i, y_i) \omega_i = \sum F(u_i, v_i) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \sigma_i$$

$\left. \begin{array}{l} u=u_i \\ v=v_i \end{array} \right\} \sigma_i$

Ciąg takich sum, gdy średnice wszystkich elementów  $\omega_i, \sigma_i$  dążą do zera, ma jako granicę odpowiednią całkę podwójną (por. str. 230). Przechodząc więc do granicy, otrzymujemy:

$$(176) \quad \boxed{\int_{(D)} \int f(x, y) dx dy = \int_{(D')} \int f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

Jest to wzór na wprowadzenie nowych zmiennych w całkę podwójną: trzeba wprowadzić te zmienne za pomocą wzorów  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$  w funkcję podcałkową, pomnożyć ją przez bezwzględną wartość jakobianu i zmienić obszar całkowania. Widzimy tu wyraźną analogię z odpowiednim wzorem dla całek pojedynczych.

*Przykłady.*

1) Obliczyć pole wycinka pierścienia kołowego (fig. 93) przy pomocy całki podwójnej.

Użycie wzoru:

$$D = \int_{(D)} \int dx dy$$

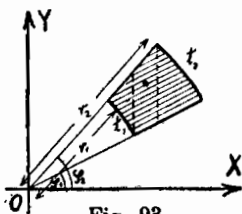


Fig. 93.

byłoby tu bardzo niedogodne, ponieważ trzeba by rozkładać obszar całkowania na 3 części (linjami kreskowanymi na figurze). Natomiast przy użyciu współrzędnych biegunowych rachunek przedstawia się bardzo prosto, albowiem obszarem całkowania będzie na płaszczyźnie  $(R, \Phi)$  prostokąt, określony nierównościami:

$$r_1 < r < r_2, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2$$

Do użycia wzoru (173) potrzebny jest jakobian. Otóż:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

zatem  $x_r = \cos \varphi$ ,  $y_r = \sin \varphi$ ,  $x_\varphi = -r \sin \varphi$ ,  $y_\varphi = r \cos \varphi$ , a więc:

$$I = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Widzimy więc, że jakobian przekształcenia współrzędnych prostokątnych na biegunowe jest równy promieniowi  $r$ .

Wobec tego wzór (173) przyjmuje postać:

$$D = \int_{(D)} \int r dr d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} d\varphi = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Oznaczmy  $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha$ , szerokość pierścienia  $r_2 - r_1 = s$ , a długości łuków, ograniczających ten pierścień,  $l_2 = r_2 \alpha$ ,  $l_1 = r_1 \alpha$ . Zatem wzór na pole wycinka pierścienia kołowego przyjmuje postać:

$$D = \frac{1}{2} (r_2 + r_1) (r_2 - r_1) \alpha = \frac{1}{2} (l_1 + l_2) s$$

znaną z matematyki elementarnej.

2) Obliczyć powierzchnię 4 okien Viviani'ego (por. str. 240) i objętość, pozostającą z kuli po wydrążeniu dwóch walców, wycinających te okna (fig. 87 str. 240). Otrzymaliśmy przy użyciu współrzędnych prostokątnych wzór:

$$P = 8a \int_{(D)} \int \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Wprowadźmy współrzędne biegunowe, to  $x^2 + y^2 = r^2$ , a za  $dx dy$  trzeba wprowadzić  $r dr d\varphi$ , jak to widzieliśmy w poprzednim przykładzie. Wobec tego:

$$P = 8a \int_{(D)} \int \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

Jeżeli ustalimy  $\varphi$ , to  $r$  zmienia się od  $r=0$  do  $OA$  (na fig. 87), t. j. do  $r = a \cdot \cos \varphi$ . Kąt zaś  $\varphi$  zmienia się w stałych granicach od  $\varphi = 0$  do  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Wobec tego:

$$P = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\varphi = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi$$

$$P = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a \sin \varphi + a) d\varphi = 8a^2 (\cos \varphi + \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{8a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)}$$

Interesującym jest, że wzór na pole powierzchni, pozostającej z kuli po wycięciu tych 4 okien, nie zawiera liczby  $\pi$ , albowiem:

$$4a^2\pi - P = 4a^2\pi - 4a^2\pi + 8a^2 = 8a^2$$

Objętość  $v$  ćwiartki jednego walca, przedstawionego na fig. 87, oblicza się wzorem (164) z § 253 przy użyciu współrzędnych prostokątnych.

W naszym przypadku otrzymujemy:

$$v = \int_{(D)} \int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dx$$

ponieważ równanie górnej półkuli ma postać  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .

Przy użyciu spólrzędnych biegunowych otrzymujemy:

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{-2 \cdot 3/2} \Big|_0^{a \cos \varphi} d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 \sin^3 \varphi - a^3) d\varphi$$

Całkę z  $\sin^3 \varphi$  obliczamy, jak wiadomo (str. 56), podstawiając  $\cos \varphi = t$  i otrzymujemy:

$$v = -\frac{a^3}{3} \left( \frac{1}{3} \cos^3 \varphi - \cos \varphi + \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3} \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \pi \right)$$

Wobec tego szukana objętość ma wartość:

$$V = \frac{4}{3} a^3 \pi - 8v = \frac{4a^3 \pi}{3} - \frac{8a^3}{3} \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \pi \right) = \frac{16}{9} a^3$$

3) Wyprowadzić wzór na komplanację powierzchni, mając podane jej przedstawienie parametrowe (por. tom I, str. 378—380):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

Gdybyśmy wyrazili z dwóch początkowych równań  $u$  i  $v$  jako funkcje zmiennych  $x$  i  $y$  i wstawili te wyrażenia w trzecie równanie, to otrzymalibyśmy  $z$  wyrażone w zależności od zmiennych  $x$  i  $y$ . Możemy jednak bezpośrednio przekształcić wzór (165) na komplanację na nowe zmienne  $u, v$ , wprowadzając za  $x$  funkcję  $\varphi(u, v)$ , a za  $y$  funkcję  $\psi(u, v)$ .

Pochodne cząstkowe  $p$  i  $q$ , potrzebne do tego wzoru, obliczono już w tomie I, na str. 380, a mianowicie:

$$p = z_x = \begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad q = z_y = \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

Są to ilorazy jacobjanów:

$$J_1 = \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}, \quad J_2 = \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}, \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Te pochodne  $p, q$  wprowadzamy pod pierwiastek, a ponadto mnożymy funkcję podcałkową przez jacobjan  $J$ . Otrzymujemy zatem:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{1 + \left(\frac{J_1}{J}\right)^2 + \left(\frac{J_2}{J}\right)^2} |J| du dv$$

(przy założeniu, że jacobjan  $J$  nie zmienia znaku w obszarze całkowania). Stąd wynika:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{J^2 + J_1^2 + J_2^2} du dv$$



czyli:

$$(177) \quad P = \int_{(D')} \int \sqrt{\left| \frac{x_u y_u}{x_v y_v} \right|^2 + \left| \frac{z_u y_u}{z_v y_v} \right|^2 + \left| \frac{x_u z_u}{x_v z_v} \right|^2} du dv$$

Wprowadźmy następujące skrócone oznaczenia, używane często w teorii powierzchni:

$$(178) \quad \begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases}$$

Po zastosowaniu do sumy kwadratów, znajdujących się pod pierwiastkiem we wzorze (177), tożsamości Lagrange'a (por. tom I, str. 481), otrzymamy następującą skróconą formę wzoru (177):

$$(179) \quad P = \int_{(D')} \int \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Tak np. mając podane równanie powierzchni w postaci:

$$z = F(r, \varphi)$$

gdzie  $r, \varphi$  są współrzędnymi biegunowymi na płaszczyźnie  $(XY)$ , związanymi z  $x, y$  zapomocą wzorów  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , możemy otrzymać z wzoru (177) wzór, wynikający z niego przez wprowadzenie współrzędnych biegunowych. I tak wiemy już, że jacobian:

$$J = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = r$$

Jacobiany  $J_1$  i  $J_2$  mają postać:

$$J_1 = \begin{vmatrix} z_r & y_r \\ z_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_r \sin \varphi \\ z_\varphi r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos \varphi z_r - \sin \varphi z_\varphi$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} x_r & z_r \\ x_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & z_r \\ -r \sin \varphi & z_\varphi \end{vmatrix} = \cos \varphi z_\varphi + r \sin \varphi z_r$$

Stąd:

$$J_1^2 + J_2^2 = r^2 z_r^2 + z_\varphi^2$$

a zatem wzór na komplanację przyjmuje postać:

$$(180) \quad P = \int_{(D')} \int \sqrt{r^2 + r^2 \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} dr d\varphi$$

4) Dana jest powierzchnia śrubowa o równaniu:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi z}{k} = \frac{y}{x}$$

(por. tom I, str. 64). Obliczyć pole tej części powierzchni śrubowej, którą wycina z niej walec o równaniu:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

a którą zakreśla prosta (oś  $x$ -ów) przez obrót o kąt  $\alpha$  od położenia początkowego.

Używając współrzędnych biegunowych, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi z}{k} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

a stąd:

$$\frac{2\pi z}{k} = \varphi + n\pi$$

czyli:

$$z = \frac{k}{2\pi} \varphi + c$$

Używając wzoru (180), otrzymujemy:

$$P = \int_{(D')} \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} dr d\varphi$$

Obszar całkowania wyznaczamy z następujących warunków:  $\varphi$  zmienia się od 0 do  $\alpha$  a  $r$  zmienia się od 0 do  $a$ , a więc granice całkowania są stałe. Zatem:

$$P = \int_0^a \int_0^\alpha \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} d\varphi dr = \alpha \int_0^a \sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} dr$$

Stosując do tej całki wzór (35) ze str. 48, otrzymujemy ostatecznie:

$$P = \frac{\alpha}{2} \left[ a \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \log \frac{2\pi}{k} \left( a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2} \right) \right]$$

5) Obliczyć pole powierzchni, wyciętej przez walec o równaniu  $x^2 + y^2 = a^2$  z paraboloidy hiperbolicznej o równaniu:

$$x^2 - y^2 = 2mz$$

(por. tom I, str. 44—45).

Wprowadzamy współrzędne biegunowe w równanie powierzchni i otrzymujemy:

$$z = \frac{r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{2m} = \frac{r^2 \cos 2\varphi}{2m}$$



jącej przez rzut koła wielkiego  $BE$  na płaszczyznę  $(XY)$ . Połówkami osi tej elipsy są  $OB = R$  i  $OF = R \cos \beta$ , albowiem  $\beta$  jest kątem nachylenia płaszczyzny  $BEO$  do płaszczyzny  $(XY)$ . Równanie tej elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \cos^2 \beta} = 1$$

Wprowadzając tu  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , otrzymamy:

$$(I) \quad r = \frac{R \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}} = f(\varphi)$$

Według zmiennej  $r$  trzeba całkować od łuku elipsy do łuku koła, zatem od  $r$  podanego wzorem (I) do  $r = R$ , a dla  $\varphi$

granice są stałe, od  $\varphi = 0$  do  $\varphi = a$ . A więc:

$$P = \int_0^a \int_{f(\varphi)}^R \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\varphi$$

Całkowanie według  $r$  (przy użyciu podstawienia  $r^2 = t$ ) daje  $-R\sqrt{R^2 - r^2}$  a po podstawieniu granic otrzymamy:

$$P = \int_0^a R^2 \frac{\sin \beta \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}} d\varphi$$

Używając tu podstawienia  $\sin \beta \cos \varphi = z$ , otrzymamy:

$$P = -R^2 \arcsin z \Big|_z^{\sin \beta} = -R^2 \arcsin(\sin \beta \cos \varphi) \Big|_0^a = R^2 [\beta - \arcsin(\sin \beta \cos a)]$$

Bardzo prosto wyraża się ten wzór przy pomocy kąta  $\alpha$ . I tak z wzoru:

$$\cos \alpha = \sin \beta \cos a$$

znanego z rozwiązania trójkąta sferycznego prostokątnego, otrzymujemy:

$$\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin \beta \cos a$$

a więc:

$$\arcsin(\sin \beta \cos a) = \arcsin(\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$$

Wobec tego:

$$P = R^2(\beta - \frac{1}{2}\pi + \alpha) = R^2(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\pi - \pi)$$

Wyrażenie, zawarte w nawiasie, jest nadwyżką sumy kątów trójkąta sferycznego nad kąt półpełny i nazywa się *ekscesem sferycznym*  $\epsilon$ . A więc:

$$P = R^2 \epsilon$$

Doszlaliśmy w ten sposób do wzoru, który się wyprowadza w trygonometrii sferycznej wprost z rozważań geometrycznych i trygonometrycznych.

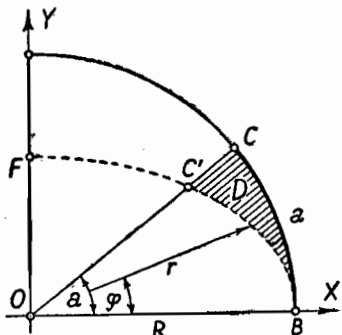


Fig. 95.

### § 259. Całki podwójne niewłaściwe.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko takimi całkami podwójnymi, w których funkcja podcałkowa była ograniczona, a obszar całkowania skończony. Rozszerzymy pojęcie całki także na przypadki, w których funkcja podcałkowa jest nieograniczona w otoczeniu pewnego punktu lub w otoczeniu pewnej linii i na takie przypadki, w których obszar całkowania rozciąga się do nieskończoności.

Omówmy najpierw pierwszy przypadek. Weźmy pod uwagę np. całkę:

$$\int_{(D)} \int \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

po kole, określonym nierównością  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Funkcja podcałkowa jest ciągła w całym obszarze całkowania z wyjątkiem punktu  $O(0, 0)$ . Gdy się zbliżamy do tego punktu, funkcja  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  wzrasta nieograniczenie.

W całce:

$$\int_{(D)} \int \frac{dx dy}{x - y}$$

branej po tem samym kole, występuje w funkcji podcałkowej linja nieciągłości, a mianowicie prosta  $y = x$ .

Chcąc określić całkę podwójną w takich przypadkach, zamykamy te punkty i linje, w których występuje nieciągłość, w niewielkie obszary, leżące całkowicie w obszarze całkowania. Tworzymy dowolny ciąg  $D_n$  takich wyłączonych obszarów, których pola zdążają do zera. Całka podwójna istnieje dla każdego obszaru, otrzymanego z  $D$  przez wyłączenie  $D_n$ ; oznaczymy taki pozostały obszar symbolem  $D - D_n$ . Jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D - D_n)} \int f(x, y) dx dy$$

wspólna dla dowolnego ciągu obszarów wyłączonych o polach, dążących do zera, to tę granicę nazywamy **niewłaściwą całką podwójną** z funkcji nieograniczonej  $f(x, y)$  po obszarze  $D$  i oznaczamy ją tym samym symbolem, co całkę właściwą, a mianowicie:

$$\int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

*Przykład.* Obliczyć całkę niewłaściwą:

$$I = \int_{(D)} \int \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

po kole  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Wylączamy z tego koła kółko współrodkowe o promieniu  $\delta < 1$ . Obliczamy całkę właściwą po pozostałym pierścieniu kołowym, a następnie obliczamy jej granicę, gdy  $\delta$  dąży do zera. Najdogodniej jest w tym celu wprowadzić współrzędne biegunowe. Otrzymamy:

$$I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{2\pi} \int_{\delta}^1 \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{r^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{2\pi} (1 - \delta) d\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi(1 - \delta) = 2\pi$$

*Uwaga.* Można też było obrać ciąg  $D_n$  kół o promieniach, dążących do zera, np. równych  $\frac{1}{n}$  i badać granicę całek po obszarach  $D - D_n$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Przejdźmy do drugiego przypadku, a mianowicie do całek podwójnych po nieskończonych obszarach. Przykładami takich nieskończonych obszarów są: cała płaszczyzna, ćwiartka płaszczyzny, część płaszczyzny, zawarta między dodatnimi częściami osi współrzędnych a dodatnią gałęzią hiperboli równobocznej o równaniu  $xy = a^2$ , część płaszczyzny, ograniczona z jednej strony parabolą i t. p. Chcąc określić całkę podwójną po takim nieskończonym obszarze  $D$ , tworzymy ciąg  $D_n$  skończonych obszarów, zawartych w  $D$  i dążących do  $D$  (mamy przez to na myśli, że biorąc dowolnie wielki stały obszar  $R$ , możemy dobrać tak wielkie  $n$ , że te części obszarów  $D$  i  $D_n$ , które leżą w  $R$ , będą się różnić od siebie dowolnie mało).

Dla każdego skończonego obszaru  $D_n$  istnieje całka właściwa:

$$\int_{(D_n)} \int f(x, y) dx dy$$

Jeżeli istnieje granica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D_n)} \int f(x, y) dx dy$$

niezależna od tego, jaki ciąg obszarów  $D_n$ , dążących do  $D$ , obierzemy, to tę granicę nazywamy niewłaściwą całką podwójną po nieskończonym obszarze  $D$  i oznaczamy ją tym samym symbolem, co całkę właściwą, a mianowicie:

$$\int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

Dowodzi się, że do całek podwójnych niewłaściwych można stosować szereg twierdzeń, któreśmy poznali przy badaniu całek właściwych (np. twierdzenie o wprowadzeniu nowych zmiennych).

## Przykłady.

## 1) Obliczyć całkę

$$I = \int_{(D)} \frac{1}{x^2(1+y^2)} dx dy$$

po nieskończonym obszarze  $D$ , zawartym między dodatnią gałęzią hyperboli

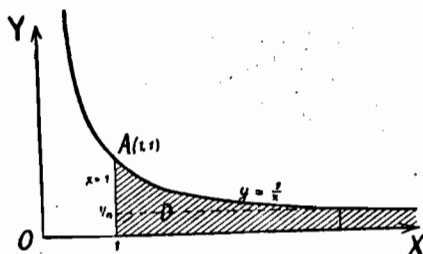


Fig. 96.

równobocznej o równaniu  $y = \frac{1}{x}$ , między osią  $X$  i prostą  $x = 1$  (fig. 96).

Aproksymujemy obszar  $D$  zapomocą ciągu obszarów  $D_n$ , ograniczonych u dołu nie osią  $X$ , lecz prostymi równoległymi do niej w odstępach  $\frac{1}{n}$  (o równaniach  $y = \frac{1}{n}$ ).

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D_n)} \frac{dx dy}{x^2(1+y^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y=\frac{1}{n}}^{y=1} \int_{x=1}^{x=\frac{1}{y}} \frac{dx dy}{x^2(1+y^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 -\frac{1}{x(1+y^2)} \Big|_1^{\frac{1}{y}} dy$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{1+y^2} (-y+1) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \log(1+y^2) + \arctg y \right] \Big|_{\frac{1}{n}}^1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \arctg 1 - \arctg \frac{1}{n} \right]$$

$$I = -\frac{1}{2} \log 2 + \frac{\pi}{4}$$

Łatwo stwierdzić, że tę samą wartość otrzymamy, aproksymując obszar  $D$  zapomocą obszarów  $D'_n$ , ograniczonych hyperbolą, osią  $X$ , prostą  $x = 1$  i prostymi  $x = n > 1$ . Wtedy trzeba najpierw wykonać całkowanie według  $y$  od  $y = 0$  do  $y = \frac{1}{x}$  a następnie według  $x$  od  $x = 1$  do  $x = n$ . Można też stwierdzić, że tę samą granicę otrzymamy dla dowolnych ciągów  $D_n$  obszarów, dążących do  $D$ .

## 2) Całkę pojedynczą niewłaściwą (Laplace'a):

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

obliczyliśmy już w § 224 (przykład 9) w dość skomplikowany sposób, Przy pomocy niewłaściwej całki *podwójnej* rachunki przedstawiają się nader prosto.

I tak weźmy pod uwagę całkę:

$$A = \int_{(D)} \int e^{-x-y} dx dy$$

przyczem obszarem całkowania  $D$  niechaj będzie cała pierwsza ćwiartka płaszczyzny. Aproxymujmy obszar  $D$  zapomocą ćwiartek kół  $D'$  o promieniach  $R$  a o środku w początku układu.

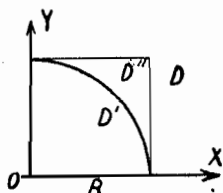


Fig. 97.

Wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_{(D')} \int e^{-x-y} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-r} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r} \right]_0^R d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 - e^{-R}) d\varphi = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-R}) \end{aligned}$$

Gdy  $R$  dąży do  $\infty$ , to wartość tej całki właściwej dąży do  $\frac{\pi}{8}$ .

Zatem całka niewłaściwa  $A$  ma wartość:

$$A = \int_{(D)} \int e^{-x-y} dx dy = \frac{\pi}{8}$$

Można okazać, że ta graniczna wartość nie zależy od tego, jakimi obszarami aproxymujemy  $D$ . Chcąc przejść od tej całki do całki pojedynczej, obliczmy całkę podwójną po obszarze  $D''$ , który jest kwadratem o boku  $R$ . Otóż:

$$\begin{aligned} \int_{(D'')} \int e^{-x-y} dx dy &= \int_0^R \int_0^R e^{-x-y} dx dy = \int_0^R \left( e^{-y} \cdot \int_0^R e^{-x} dx \right) dy = \\ &= \int_0^R e^{-x} dx \cdot \int_0^R e^{-y} dy = \left( \int_0^R e^{-x} dx \right)^2 \end{aligned}$$

Ponieważ obszar  $D'$  zawiera się w  $D''$ , a  $D'$  w  $D$ , funkcja zaś podcałkowa jest dodatnia, przeto:

$$\frac{\pi}{8} (1 - e^{-R}) < \left( \int_0^R e^{-x} dx \right)^2 < \frac{\pi}{8}$$

a stąd:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-R}} < \int_0^R e^{-x} dx < \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$



Gdy  $R$  dąży do  $\infty$ , to pierwsze i ostatnie wyrażenie dążą do tej samej liczby  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . Zatem i całka, zawarta między nimi, dąży do tej samej granicy, a to znaczy, że:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

zgodnie z wynikiem, otrzymanym w § 224.

3) Całką Eulera *drugiego rodzaju* nazwaliśmy (por. § 224, str. 111) funkcję:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{p-1} dz$$

przyczem  $p > 0$ .

Zapomocą podstawienia  $z = x^2$  przekształcamy tę całkę na:

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx$$

Zbadajmy iloczyn dwóch takich całek, a mianowicie:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy$$

Iloczyn ten można przedstawić w postaci jednej całki podwójnej niewłaściwej:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = 4 \int_{(D)} e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy$$

przyczem obszarem całkowania  $D$  jest cała pierwsza ówrtka płaszczyzny. Obszar ten możemy aproksymować — podobnie jak przy badaniu całki Laplace'a — zapomocą ówrtki kół o środku w początku układu a o promieniach wzrastających nieograniczenie.

Wprowadzając spólrzędne biegunowe, otrzymamy zatem:

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2p-1+2q-1} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi r dr d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\infty} r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Pierwsza całka jest znowu funkcją  $\Gamma$  dla argumentu  $p+q$ , drugą zaś nazywamy całką Eulera *pierwszego rodzaju*, lub funkcją  $B$  (czytaj „beta”) zmiennych  $p$  i  $q$ . A więc:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \Gamma(p+q) \cdot B(p, q)$$

Stąd wynika, że całka Eulera pierwszego rodzaju wyraża się w następujący sposób za pomocą całek drugiego rodzaju:

$$(181) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

przyczem:

$$(182) \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi$$

*Uwaga.* Przez wprowadzenie nowej zmiennej  $t$  za pomocą podstawienia  $\cos^2 \varphi = t$ , można tę całkę pierwszego rodzaju sprowadzić do następującej postaci:

$$(182a) \quad B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

tj. do całki oznaczonej dwumiennej (por. uwagę na str. 46). Całki Eulera znalazły liczne zastosowania w rachunku prawdopodobieństwa i przy obliczaniu rozmaitych skomplikowanych całek oznaczonych.

## § 260. Przybliżone metody obliczania całek podwójnych.

W praktyce zachodzi nieraz potrzeba obliczania całek podwójnych z funkcji bardzo skomplikowanych (np. przy obliczaniu pojemności okrętów; przy obliczaniu z planu warstwicowego objętości, wznoszącej się nad jakimś poziomem). Wystarcza przytem zwykle obliczyć *przybliżoną* wartość całki.

Najprostszą nasuwającą się tu myślą jest użycie jako przybliżonych wartości całki tych sum, których używaliśmy przy sumowej definicji całki podwójnej. Mając więc obliczyć całkę:

$$I = \int \int_{(D)} f(x, y) dx dy$$

dzielimy obszar całkowania za pomocą prostych równoległych do osi współrzędnych na drobniejsze elementy. Pole  $p_{ik}$  każdego takiego elementu mnożymy przez wartość funkcji  $f(\xi_i, \eta_k)$ , należącą do dowolnego punktu tego elementu i tworzymy sumę tych iloczynów:

$$(183) \quad \bar{I} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_k) p_{ik}$$

Granica ciągu takich sum, gdy liczba dodajników wzrasta nieograniczenie, jest ściśle równa całce podwójnej; biorąc zaś jakąś jedną sumę, złożoną

z skończonej liczby dodajników, otrzymujemy *przybliżoną* wartość danej całki podwójnej. Jeżeli obszar  $D$  jest prostokątem i rozłożymy go na prostokąty równe o bokach  $h$  i  $k$ , a dla każdego z nich weźmiemy wartość funkcji w lewym dolnym wierzchołku, to otrzymamy:

$$I = hk(f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) + \dots + f(x_i, y_k) + \dots)$$

Wzór ten, dający sumę objętości odpowiednich *prostopadłościanów*, wznoszących się nad obszarem całkowania, jest uogólnieniem poznanej dla całek pojedynczych metody prostokątów (por. § 226 A).

Nie mamy żadnej wskazówki, dotyczącej stopnia dokładności tego przybliżenia  $I$ . Wskazówką taką otrzymamy, zamykając wartość całki pomiędzy dwie liczby ograniczające. Bierzymy w tym celu z siatki prostokątów, otrzymanych na płaszczyźnie  $(XY)$ , najpierw tylko te, które leżą całkowicie *wewnątrz* obszaru  $D$  i pole każdego z nich mnożymy przez *najmniejszą* wartość, jaką w nim funkcja przyjmuje. Założmy, że funkcja  $f(x, y)$  jest nieujemna w całym obszarze  $D$ .

Otrzymamy w ten sposób sumę:

$$(183a) \quad i_1 = p_{11}m_{11} + p_{12}m_{12} + \dots + p_{ni}m_{ni} \leq I$$

gdzie  $m_{rs}$  oznacza *najmniejszą* wartość funkcji w prostokącie  $p_{rs}$ .

Suma ta przedstawia sumę objętości prostopadłościanów minimalnych.

Za górne ograniczenie całki  $I$  bierzemy sumę iloczynów pól prostokątów zarówno wewnętrznych, jak i tych, które zawierają tylko części obszaru, pomnożonych przez *największe* wartości funkcji w każdym z tych prostokątów. Otrzymamy w ten sposób sumę:

$$(183b) \quad I \leq i_2 = p_{11}M_{11} + p_{12}M_{12} + \dots + p_{nm}M_{nm}$$

gdzie  $M_{rs}$  oznacza *największą* wartość funkcji  $f(x, y)$  w prostokącie  $p_{rs}$ .

Suma ta przedstawia sumę objętości prostopadłościanów maksymalnych. A więc jest:

$$i_1 \leq I \leq i_2$$

Średnia arytmetyczna:

$$(183c) \quad \bar{r} = \frac{i_1 + i_2}{2}$$

będzie więc w ogólności wartością bardziej przybliżoną, aniżeli  $i_1$  lub  $i_2$ . Wzory te dają zwykle tylko dość grube przybliżenie; aby je zaostrzyć, trzeba by rozkładać obszar całkowania na bardzo wiele drobnych elementów. Lepsze przybliżenie otrzymamy, uogólniając metodę trapezów. Weźmy pod uwagę prostokątny obszar całkowania  $D$ , określony warunkami:  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ , i podzielmy go na równe prostokąty o bokach  $h = \frac{a_2 - a_1}{n}$  i  $k = \frac{b_2 - b_1}{m}$ . Zamiast prostopadłościanu, wznoszącego się

nad każdym takim składowym prostokątem, weźmy *prostopadłościan* ścięty, którego dno górne (pochyłe w ogólności) jest *styczne* do powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$  w punkcie, leżącym nad środkiem dolnego dna prostokątnego. Jeżeli wierzchołki tego prostokąta mają spólrzędne  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_2, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ , to środek jego ma spólrzędne  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ . Oznaczmy wartość  $z$  funkcji  $f(x, y)$ , należącą do tego środkowego punktu, znakiem:

$$z_{1/2, 1/2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Widzieliśmy (w § 252 w przykładzie 2), że objętość takiego prostopadłościanu ściętego ma wartość:  $h \cdot k \cdot z_{1/2, 1/2}$ . Suma objętości takich prostopadłościanów ściętych:

$$(184) \quad I_1 = hk \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_l + y_{l+1}}{2}\right)$$

lub krótko:

$$(184a) \quad I_1 = hk \sum \sum z_{1/2, 1/2}$$

jest bardzo dogodną wartością przybliżoną całki podwójnej, dokładniejszą zazwyczaj, aniżeli wartość, otrzymana z wzorów (183a, b, c). Użycie tego wzoru można uważać za uogólnienie metody trapezów.

Inny wzór przybliżony otrzymujemy, biorąc w każdym prostokącie zamiast wartości  $z_{1/2, 1/2}$ , należącej do środka prostokąta, średnią arytmetyczną czterech wartości, należących do czterech wierzchołków prostokąta, np. w pierwszym prostokącie wartość:

$$\frac{1}{4}(z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22})$$

Sumując te wyrażenia, otrzymamy następujący wzór (Bugajewa):

$$(185) \quad I_2 = hk \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{1}{4}(z_{ii} + z_{i+1, i} + z_{i, i+1} + z_{i+1, i+1})$$

Biorąc średnią arytmetyczną czterech wartości  $z$ , należących do środków boków prostokąta, to znaczy np. w pierwszym prostokącie:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(z_{1, 1/2} + z_{1/2, 1} + z_{2, 1/2} + z_{1/2, 2}) = \\ & = \frac{1}{4}\left(f\left(x_1, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_1\right) + f\left(x_2, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_2\right)\right) \end{aligned}$$

otrzymujemy następujący wzór przybliżony (Mansiona):

$$(186) \quad I_3 = hk \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \left( f\left(x_i, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_i\right) + \right. \\ \left. + f\left(x_{i+1}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_{i+1}\right) \right)$$

Z kombinacji wzorów (184), (185) i (186) powstały najważniejsze i najbardziej rozpowszechnione wzory Wooley'a, a mianowicie:

$$(187) \quad I_4 = \frac{1}{3}(2I_3 + I_1)$$

$$(188) \quad I_5 = \frac{1}{3}(2I_4 + I_3)$$

Podstawiając w te wzory wartości  $z$ , otrzymamy np. dla pierwszego prostokąta w wyrażeniu  $I_4$ :

$$(187a) \quad \frac{1}{3}hk(z_{1,1/2} + z_{1/2,1} + z_{2,1/2} + z_{1/2,2} + 2z_{1/2,1/2})$$

a w wyrażeniu  $I_5$ :

$$(188a) \quad \frac{1}{15}hk(8z_{1/2,1/2} + z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22})$$

Z kombinacji tych wzorów Wooley'a, biorąc:

$$(189) \quad I_6 = \frac{1}{3}(I_5 + 2I_4)$$

otrzymujemy uogólnienie wzoru Simpsona. Dla pierwszego prostokąta otrzymujemy np.:

$$(189a) \quad \frac{1}{36}hk(z_{11} + z_{12} + z_{21} + z_{22} + 4(z_{1,1/2} + z_{1/2,1} + z_{2,1/2} + z_{1/2,2}) + 16z_{1/2,1/2})$$

Można dowieść, że wzór ten jest uogólnieniem wzoru Simpsona w geometrycznym znaczeniu, polega bowiem na zastępowaniu ścianek danej powierzchni ściankami, wziętymi z odpowiedniej paraboloidy eliptycznej lub hiperbolicznej (o równaniu  $z = ax^2 + by^2$ ).

Ten uogólniony wzór Simpsona jest mniej dogodny aniżeli wzory Wooley'a, ponieważ dla każdego prostokąta składowego trzeba obliczać przy użyciu wzoru (189) 9 wartości funkcji  $z = f(x, y)$ , podczas gdy w każdym z wzorów (187) i (188) potrzeba tylko 5 wartości  $z$  dla każdego prostokąta składowego.

Wyprowadzono wzory na oszacowanie błędu, który popełniamy, używając zamiast prawdziwej wartości całki  $I = \int_0^a \int_0^b f(x, y) dx dy$  wzoru przybliżonego. Tak np. dla wzoru (184) otrzymano przez rozwinięcie funkcji  $f(x, y)$  na wzór Taylora w otoczeniu punktu  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$  i przez całkowanie tego wzoru następujące oszacowanie błędu  $I - I_1$ :

$$|I - I_1| \leq \frac{1}{12} \left( \frac{M_1}{\pi^2} a^2 b + \frac{M_2}{\pi^2} a b^2 \right)$$

gdzie  $M_1$  oznacza największą wartość pochodnej  $f_{xx}$  a  $M_2$  pochodnej  $f_{yy}$  w całym prostokącie, wyznaczonym zapomocą warunków  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , gdy bok  $a$  podzielono na  $m$  a bok  $b$  na  $n$  równych części.

Podobnie dla wzoru (187) Woolley'a otrzymano:

$$|I - I_4| \leq \frac{1}{4! 5!} \left( \frac{M_1 a^5 b}{m^4} + 5 \frac{M_2 a^4 b^3}{m^3 n^2} + \frac{M_3 a b^5}{n^4} \right)$$

przyczem  $M_1$  oznacza największą wartość pochodnej  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ ,  $M_2$  pochodnej  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ , a  $M_3$  pochodnej  $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ .

Dalsze wskazówki, dotyczące przybliżonych metod obliczania całek podwójnych, znajdzie czytelnik w artykule C. Rungego i F. Willers'a p. t. *Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen* (*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, tom II, 8, str. 135 i nast.).

#### Ustęp IV.

### CAŁKI POTRÓJNE, WIELOKROTNE I POWIERZCHNIOWE.

#### § 261. O całkach potrójnych i wielokrotnych.

Weźmy pod uwagę funkcję  $u = f(x, y, z)$  trzech zmiennych, określoną w jakimś obszarze trójwymiarowym i spełniającą w nim podobne warunki ciągłości, jakie zakładaliśmy przy badaniu całek podwójnych dla funkcji  $z = f(x, y)$  dwóch zmiennych.

Niechaj obszarem tym będzie prostopadłościan  $P$ , złożony z punktów o współrzędnych  $x, y, z$ , spełniających warunki:

$$(a) \quad a_1 \leq x \leq a_2, \quad b_1 \leq y \leq b_2, \quad c_1 \leq z \leq c_2$$

Wyrażenie, otrzymane przez trzykrotne całkowanie funkcji  $u = f(x, y, z)$  kolejno według każdej zmiennej (przyczem pozostałe zmienne uważa się za parametry), nazywamy **całką potrójną** z tej funkcji po prostopadłościanie  $P$  i oznaczamy ją symbolem:

$$(190) \quad I = \int_{(P)} \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \left( \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

Całkę tę można też pojmować jako granicę odpowiednio wybranych ciągów sum dolnych, górnych lub pośrednich:

$$\sum_{i=1}^{N_x} m_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{N_y} M_i p_i, \quad \sum_{i=1}^{N_z} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) p_i$$

otrzymanych przez rozkład prostopadłościanu  $P$  na  $N$  prostopadłościanów  $p_i$  zapomocą płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych.

Okazuje się, że do tych całek potrójnych stosuje się twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem:

$$(191) \quad \iiint_{(P)} f(x, y, z) dx dy dz = \mu \cdot P$$

gdzie  $\mu$  oznacza odpowiednio dobraną wartość pomiędzy kresem górnym i dolnym funkcji  $f(x, y, z)$  w całym prostopadłościanie  $P$ .

Aby określić całkę potrójną po dowolnym trójwymiarowym obszarze  $V$ , postępujemy podobnie, jak dla całek podwójnych. Wprowadzamy mianowicie funkcję pomocniczą  $f_1(x, y, z)$ , równą funkcji  $f(x, y, z)$  w obszarze  $V$ , a równą 0 w pozostałych punktach prostopadłościanu  $P$ , zawierającego cały ten obszar  $V$ .

Całką potrójną z funkcji  $f(x, y, z)$  po obszarze  $V$  nazywamy całką potrójną z tej funkcji pomocniczej  $f_1(x, y, z)$  po prostopadłościanie  $P$ , a więc:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(P)} f_1(x, y, z) dx dy dz$$

Sprowadziliśmy w ten sposób to nowe pojęcie do znanego pojęcia. Rozumując podobnie jak dla całek podwójnych, branych po dowolnych obszarach  $D$ , dochodzimy do wniosku, że całkę potrójną po dowolnym obszarze  $V$  można obliczyć zapomocą trzech kolejnych całkowań podanej funkcji  $f(x, y, z)$  (a nie funkcji pomocniczej  $f_1(x, y, z)$ ), przy czem granice tych całkowań nie będą już wszystkie liczbami stałymi (jak w prostopadłościanie), lecz jedna para granic będzie zawierała dwie zmienne, druga jedną a dopiero trzecia para przedstawia liczby stałe. Granice te wyznacza się z postaci powierzchni, ograniczającej obszar  $V$ , w następujący sposób. Niechaj każda prosta prostopadła do płaszczyzny  $(XY)$

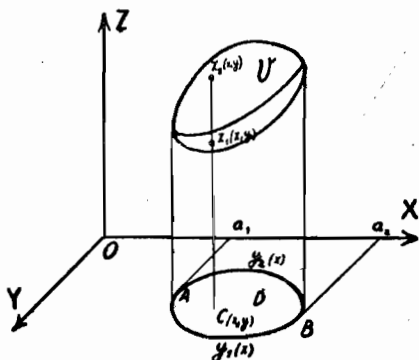


Fig. 98

przecina powierzchnię ograniczającą obszar  $V$ , najwyżej w dwóch punktach (fig. 98). Rzutem obszaru trójwymiarowego  $V$  na płaszczyznę  $(XY)$  jest dwuwymiarowy obszar  $D$ . Walec, rzucający  $V$  na płaszczyznę  $(XY)$ , dzieli powierzchnię ograniczającą  $V$  na dwie części o równaniach:

$$z = z_1(x, y) \quad \text{i} \quad z = z_2(x, y)$$

Niechaj rzutem obszaru  $D$  na oś  $x$ -ów będzie odcinek, którego końce mają odcięte  $a_1$  i  $a_2$ . Punkty  $A$  i  $B$ , należące do tych odciętych, dzielą rzeg obszaru  $D$  na dwie części o równaniach:

$$y = y_1(x) \quad \text{i} \quad y = y_2(x)$$

Całkujemy  $f(x, y, z)$  najpierw według zmiennej  $z$ . W tym celu trzeba ustalić wartości  $x, y$ , t. j. obrać jakiś stały punkt  $C(x, y)$  w obszarze  $D$ . Wykreśliśmy przez ten punkt prostopadłą do płaszczyzny  $(XY)$ ; trafi ona powierzchnię obszaru  $V$  w dwóch punktach, do których należą wartości  $z_1$  i  $z_2$ . Całkowanie według  $z$  należy zatem wykonać w granicach od  $z_1(x, y)$  do  $z_2(x, y)$  i otrzymamy:

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

Wartość tej całki jest jakąś funkcją  $F(x, y)$  dwóch zmiennych (parametrów)  $x$  i  $y$ .

Teraz trzeba obliczyć całkę podwójną z tej funkcji po obszarze  $D$ , a mianowicie trzeba ją całkować według zmiennej  $y$  w granicach od  $y = y_1(x)$  do  $y = y_2(x)$  a otrzymany wynik, który będzie już funkcją tylko jednej zmiennej  $x$ , należy całkować w stałych granicach od  $x = a_1$  do  $x = a_2$ . Otrzymujemy w ten sposób:

$$(192) \quad \int_{(V)} \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Podobnie przedstawia się rachunek przy innych, zmienionych porządkach całkowania, tylko trzeba odpowiednio zmienić granice.

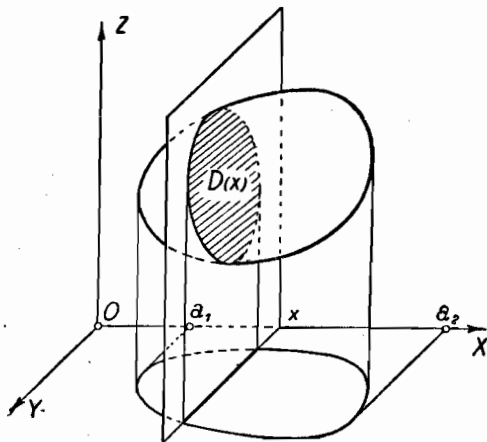


Fig. 99.

Do wzoru (192) można dojść także w inny sposób, a mianowicie sprowadzając całkę potrójną do całki pojedynczej z całki podwójnej. Obierzmy w tym celu jakąś stałą wartość  $x$ ; otrzymamy przekrój  $D(x)$  obszaru  $V$  płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej  $(YZ)$ . Obliczmy najpierw całkę podwójną z funkcji  $f(x, y, z)$  według  $z$  i  $y$  po obszarze  $D(x)$ . Granice całkowania dla  $z$  będą zależne nie tylko od  $y$  ale także

od  $x$ , granice zaś dla  $y$  nie będą stałe, lecz zależne od  $x$ . A więc:

$$\int_{D(x)} \int f(x, y, z) dz dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left( \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy$$



Następnie należy zmieniać  $x$  od  $a_1$  do  $a_2$  i wykonać całkowanie według zmiennej  $x$ . Otrzymamy w ten sposób znowu wzór (192).

Twierdzenie o wartości średniej stosuje się także do całek potrójnych po dowolnych obszarach i przyjmuje dla nich postać:

(193)

$$\int \int \int_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \mu \cdot V$$

gdzie  $V$  oznacza nie tylko obszar całkowania, lecz zarazem jego objętość a  $\mu$  oznacza odpowiednio dobraną liczbę pośrednią pomiędzy górnym a dolnym kresem wartości funkcji w obszarze  $V$ . Wartość  $\mu$ , obliczoną z tego wzoru, nazywamy *średnią wartością funkcji trzech zmiennych*  $f(x, y, z)$  w obszarze  $V$ .

Jeżeli  $f(x, y, z)$  ma stałe wartość 1, to oczywiście średnia wartość  $\mu$  jest także równa 1 i otrzymujemy z wzoru (193) następujący wzór na objętość:

(194)

$$\int \int \int_{(V)} dx dy dz = V$$

Twierdzenie o wprowadzeniu nowych zmiennych uogólnia się także na całki potrójne, a mianowicie całka:

$$\int \int \int_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

przechodzi po wprowadzeniu nowych zmiennych zapomocą wzorów:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

na:

$$\int \int \int_{(V')} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot |J| du dv dw$$

gdzie  $J$  oznacza jakobian funkcji  $\varphi, \psi, \chi$  a  $V'$  jest zmienionym odpowiednio obszarem całkowania.

*Przykłady.*

1) Obliczyć całkę:

$$I = \int \int \int_{(P)} x y z dx dy dz$$

po prostopadłościannie. określonym warunkami:  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ ,  $c_1 \leq z \leq c_2$ .

$$\begin{aligned} I &= \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} x y z dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{a_1}^{a_2} y z dy dz = \\ &= \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{2} (a_2^2 - a_1^2) y z dy dz = \frac{1}{2} (a_2^2 - a_1^2) \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} y z dy dz \end{aligned}$$

Widocznie więc:

$$I = \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) \cdot \frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2) \cdot \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2)$$

Można było zatem odrazu przedstawić tę całkę  $I$  jako iloczyn trzech całek pojedynczych. Ogólniej:

$$\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x) g(y) h(z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} h(z) dz \cdot \int_{b_1}^{b_2} g(y) dy \cdot \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx$$

2) Obliczyć objętość ósemki kuli o promieniu  $a$  przy pomocy całki potrójnej (fig. 100). Równania powierzchni ograniczających są:  $z_1 = 0$

(płaszczyzna  $(XY)$ ) i  $z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  (kula). Rzutem tej bryły na płaszczyznę  $(XY)$  jest ćwiartka koła, zatem  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ . Odcięta zaś  $x$  zmienia się od  $x = 0$  do  $x = a$ . Zatem:

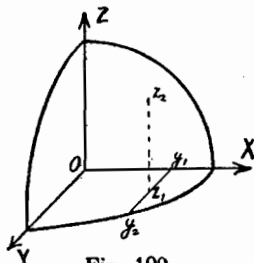


Fig. 100.

$$V = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy dz = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy dz$$

Całkę tę najdogodniej jest obliczyć przy pomocy współrzędnych biegunowych w przestrzeni, t. j. przez wprowadzenie nowych zmiennych (por. tom I, str. 381):

$$x = r \sin \alpha \cos \beta$$

$$y = r \sin \alpha \sin \beta$$

$$z = r \cos \alpha$$

Jakobianem tych funkcji jest, jak łatwo stwierdzić:

$$J = r^2 \sin \alpha$$

Aby wyczerpać cały obszar całkowania, trzeba zmieniać  $r, \alpha, \beta$  w stałych granicach, a mianowicie  $r$  od 0 do  $a$ ,  $\alpha$  od 0 do  $\frac{\pi}{2}$  i  $\beta$  od 0 do  $\frac{\pi}{2}$ . Wobec tego:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \sin \alpha dr d\alpha d\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha \cdot \int_0^a r^2 dr$$

(por. końcowy wzór w przykładzie 1). Zatem:

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{2} \frac{a^3 \pi}{3}$$

3) Obliczyć całkę Dirichleta:

$$I = \int \int \int x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz$$

po obszarze, ograniczonym powierzchnią o równaniu  $\left(\frac{x}{a}\right)^l + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$  ( $l, m, n$  są liczbami dodatnimi) i ćwiartkami płaszczyzn współrzędnych, zawartymi między dodatnimi częściami osi. Wprowadźmy nowe zmienne zapomocą wzorów:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^l = u, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^m = v, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^n = w$$

Nietrudno obliczyć, że jacobian ma tu wartość:

$$J = \frac{abc}{lmn} u^{\frac{1}{l}-1} v^{\frac{1}{m}-1} w^{\frac{1}{n}-1}$$

Wobec tego:

$$I = \int_{(V')} \int \int (au^{\frac{1}{l}})^{p-1} (bv^{\frac{1}{m}})^{q-1} (cw^{\frac{1}{n}})^{r-1} \cdot \frac{abc}{lmn} u^{\frac{1}{l}-1} v^{\frac{1}{m}-1} w^{\frac{1}{n}-1} du dv dw$$

czyli:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn} \int_{(V')} \int \int u^{\frac{p}{l}-1} v^{\frac{q}{m}-1} w^{\frac{r}{n}-1} du dv dw$$

Obszarem całkowania  $V'$  jest czworościan, ograniczony płaszczyzną:

$$u + v + w = 1$$

i częściami płaszczyzn współrzędnych, zawartymi między dodatnimi częściami osi (fig. 101). Jeżeli całkujemy najpierw według  $w$ , to granicami całkowania są:

$$w_1 = 0 \quad \text{i} \quad w_2 = 1 - u - v$$

Przy następnym całkowaniu, według  $v$ , należy obrać granice:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 1 - u$$

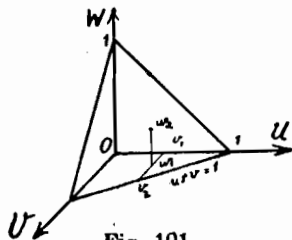


Fig. 101.

a wreszcie dla  $u$  granice są stałe:  $u_1 = 0, u_2 = 1$ . A więc:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn} \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} \left( \int_0^{1-u-v} u^{\frac{p}{l}-1} v^{\frac{q}{m}-1} w^{\frac{r}{n}-1} dw \right) dv \right) du$$

Po wykonaniu całkowania według  $w$  otrzymamy:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn} \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} u^{\frac{p}{l}-1} v^{\frac{q}{m}-1} (1-u-v)^{\frac{r}{n}} dv \right) du$$

Celem obliczenia wewnętrznej całki użyjemy podstawienia:

$$v = t(1-u), \text{ a więc } dv = (1-u) dt$$

Granice będą stałe:  $t = 0$  i  $t = 1$ . Otrzymamy zatem:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmr} \int_0^1 u^{\frac{p}{l}-1} (1-u)^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}} \int_0^1 t^{\frac{q}{m}-1} (1-t)^{\frac{r}{n}} dt$$

Występujące tu całki są całkami Eulera pierwszego rodzaju, czyli funkcjami  $B$  (por. § 259, str. 266, uwaga), a więc:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmr} B\left(\frac{p}{l}, \frac{q}{m} + \frac{r}{n} + 1\right) \cdot B\left(\frac{q}{m}, \frac{r}{n} + 1\right)$$

Używając wzoru (181) na str. 266 i wzoru (a) na str. 111, możemy wyrazić prawą stronę zapomocą całek Eulera drugiego rodzaju, a mianowicie:

$$I = \frac{a^p b^q c^r}{lmn} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{l}\right) \Gamma\left(\frac{q}{m}\right) \Gamma\left(\frac{r}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{l} + \frac{q}{m} + \frac{r}{n} + 1\right)}$$

Wszystkie powyższe rozważania rozszerza się bez trudności na całki poczwórne i wogóle wielokrotne.

Całkę  $n$ -krotną:

$$\int \int \dots \int_{(V)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

oblicza się przez  $n$  kolejnych całkowań. Obszar całkowania ( $V$ ) dla  $n > 3$  nie da się już przedstawić geometrycznie, lecz określa się go zapomocą pewnych warunków analitycznych. Pomimoto używa się także wtedy terminologii geometrycznej, mówiąc o utworach przestrzeni wielowymiarowej. Tak np. jeżeli bierzemy jako obszar całkowania zbiór tych wartości  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , które spełniają warunek:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2$$

to nazywamy go „kulą  $n$ -wymiarową“ Całkę  $n$ -krotną:

$$\int \int \int \dots \int_{(V_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

po tej kuli  $n$ -wymiarowej nazywamy jej objętością.

Wprowadzając nowe zmienne (które są uogólnieniem współrzędnych biegunowych przestrzennych):

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \quad x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \quad x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \dots, x_{n-1} = \\ &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \quad x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

można okazać, że objętość takiej kuli wyraża się wzorem:

$$V_n = \frac{R^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \pi^{\frac{n}{2}} \quad \text{dla } n \text{ parzystego}$$

$$= \frac{R^n \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots n} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystego}$$

Stąd np. dla  $n = 2$  otrzymamy  $V_2 = R^2 \pi$ , t. j. powierzchnię koła; dla  $n = 3$  jest  $V_3 = \frac{R^3 \cdot 2\pi \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} R^3 \pi$ , t. j. objętość kuli 3-wymiarowej.

Okazuje się, że gdy liczba wymiarów  $n$  wzrasta nieograniczenie, to objętość kuli  $n$ -wymiarowej o promieniu  $R$  dąży do zera.

## § 262. Zastosowanie całek podwójnych i potrójnych do obliczania mas i momentów.

1. Masa. Jeżeli ciało ma w każdym punkcie taką samą gęstość  $\rho$ , to nazywamy je jednorodnym, a masę jego  $M$  obliczamy, mnożąc tę gęstość przez objętość:

$$M = \rho \int \int \int_{(V)} dx dy dz = \rho \cdot V$$

Jeżeli jednak ciało nie jest jednorodne, to wzór na obliczenie masy nie jest już tak prosty. Aby otrzymać taki wzór, trzeba najpierw podać definicję gęstości w każdym punkcie ciała. Otaczamy punkt  $A(x, y, z)$  dowolnym elementem o objętości  $\Delta V$  i tworzymy stosunek masy  $\Delta M$ , znajdującej się w tym elemencie, do jego objętości  $\Delta V$ . Granicę tego stosunku:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \rho(x, y, z)$$

gdy element objętości dąży równocześnie we wszystkich kierunkach do zera, nazywamy gęstością ciała w tym punkcie  $A$ . Gęstość ta zależy od położenia punktu  $A$ , jest więc funkcją trzech zmiennych  $x, y, z$ .

Podzielmy ciało na elementy np. zapomocą płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych. Objętość  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , każdego takiego elementu mnożymy przez gęstość  $\rho(\xi, \eta, \zeta)$  w dowolnym jego punkcie i tworzymy sumę iloczynów:

$$\rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta x, \Delta y, \Delta z,$$

Granicę ciągu takich sum, gdy  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  dążą do zera, nazywamy masą ciała. Jest ona zatem równa całce potrójnej:

(195)

$$M = \int \int \int_{(V)} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Podobnie dla mas, rozmieszczonych na płaszczyźnie w obszarze  $D$ , wprowadzamy gęstość powierzchniową:  $\rho(x, y)$  a masę obliczamy przy pomocy całki podwójnej.

$$(196) \quad M = \iint_{D)} \rho(x, y) dx dy$$

Dla mas, rozmieszczonych linjowo, wzdłuż odcinka linii *prostej*, otrzymujemy w podobny sposób:

$$(196a) \quad M = \int_a^b \rho(x) dx$$

Do obliczenia mas, rozmieszczonych *linjowo*, wzdłuż łuków dowolnych linii płaskich lub przestrzennych od punktu  $A$  do  $B$ , używa się wzoru:

$$(196b) \quad M = \int_A^B \rho(s) ds$$

gdzie  $\rho(s)$  oznacza gęstość linjową jako funkcję długości łuku, liczonego od jakiegoś stałe obranego punktu na danej linii.

Do obliczenia mas, rozmieszczonych *powierzchniowo*, po dowolnych powierzchniach krzywych (jak np. mas elektrycznych), trzeba używać t. zw. całek powierzchniowych, które wprowadzimy w następnym paragrafie.

**II. Momenty.** W § 233 określiliśmy momenty statyczne i bezwładności dla systemu punktów materialnych. Dla punktu materialnego  $A(x, y, z)$  o masie  $m$  otrzymujemy w ten sposób następujące *momenty statyczne* względem płaszczyzny  $(XY)$ , względem osi  $X$  i względem punktu  $O$ :

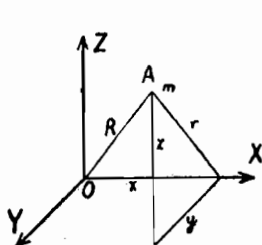


Fig. 102.

$$M_{xy} = m \cdot z$$

$$M_x = m \cdot r = m\sqrt{y^2 + z^2}$$

$$M_o = m \cdot R = m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

*Momenty bezwładności* tego punktu względem płaszczyzny  $(XY)$ , osi  $X$  i punktu  $O$  wyrażamy wzorami:

$$B_{xy} = mz^2$$

$$B_x = mr^2 = m(y^2 + z^2)$$

$$B_o = mR^2 = m(x^2 + y^2 + z^2)$$

Podobnie tworzy się momenty wyższych stopni.

Chcąc określić momenty mas, rozmieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej w sposób ciągły w jakimś obszarze  $V$ , rozdzielamy ten obszar na elementy i mnożymy masę każdego elementu przez odpowiednią odległość lub kwadrat odległości. Te elementarne momenty sumujemy, przechodzimy

do granicy i otrzymujemy w ten sposób odpowiednie całki potrójne. I tak momentem statycznym względem płaszczyzny  $(XY)$  masy o gęstości  $\rho(x, y, z)$ , rozmieszczonej w obszarze  $V$ , nazywamy całkę potrójną:

$$(197) \quad M_{xy} = \int \int \int_{(V)} \rho(x, y, z) \cdot z \, dx \, dy \, dz$$

Podobne wzory stosują się do innych płaszczyzn, trzeba tylko zastąpić odległość  $z$  punktu bieżącego od płaszczyzny  $(XY)$ , odpowiednio inną odległością.

Dla masy, rozmieszczonej jednorodnie, jest gęstość liczbą stałą, można zatem wyłączyć  $\rho$  przed znak całki i otrzymamy:

$$M_{xy} = \rho \int \int \int_{(V)} z \, dx \, dy \, dz$$

Moment statyczny tej samej masy względem osi  $X$  określamy wzorem

$$(198) \quad M_x = \int \int \int_{(V)} \rho \cdot \sqrt{y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

i analogicznie dla innych osi.

Moment zaś statyczny względem punktu  $O$  określamy wzorem:

$$M_0 = \int \int \int_{(V)} \rho \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

Podobnie momenty bezwładności ciał trójwymiarowych określamy wzorami:

$$(199a) \quad B_{xy} = \int \int \int_{(V)} \rho z^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$(199b) \quad B_x = \int \int \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$(199c) \quad B_0 = \int \int \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

Dla mas, rozmieszczonych powierzchniowo na płaszczyźnie, określiliśmy już momenty statyczne i bezwładności w §§ 234, 238, 239 i w § 244 III zapomocą całek pojedynczych i krzywoliniowych. Właściwszym jednak narzędziem matematycznym do przedstawienia takich momentów są całki podwójne. Tak np. moment statyczny względem osi  $x$ -ów masy o gęstości  $\rho(x, y)$ , rozmieszczonej w obszarze płaskim  $D$ , otrzymamy, mnożąc masę

każdego elementu  $\Delta x \cdot \Delta y$  przez odległość  $y$  dowolnego jego punktu od osi  $x$ -ów, sumując te iloczyny i przechodząc do granicy. Za definicję momentu tej masy przyjmujemy zatem całkę podwójną:

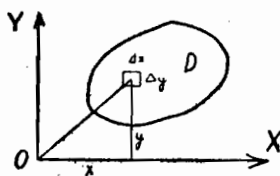


Fig. 103.

(200a)

$$M_x = \int_{(D)} \int \rho(x, y) y \, dx \, dy$$

i analogicznie względem osi  $y$ -ów:

(200b)

$$M_y = \int_{(D)} \int \rho(x, y) x \, dx \, dy$$

Moment statyczny względem punktu  $O$  określamy wzorem:

(200c)

$$M_o = \int_{(D)} \int \rho(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

Podobnie momenty bezwładności względem obu osi i względem początku układu określamy wzorami:

(201a)

$$B_x = \int_{(D)} \int \rho(x, y) y^2 \, dx \, dy$$

(201b)

$$B_y = \int_{(D)} \int \rho(x, y) x^2 \, dx \, dy$$

(201c)

$$B_o = \int_{(D)} \int \rho(x, y) (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Widzimy, że te wzory (200) i (201) są symetryczne względem  $x$  i  $y$ , a wskutek tego łatwiejsze do zapamiętania, aniżeli wzory, wyrażające te momenty zapomocą całek pojedynczych.

**III. Środek ciężkości.** W § 235 określiliśmy środek ciężkości pola lub łuku jako punkt, w którym umieszczona całkowita masa ma taki sam moment statyczny względem każdej osi jak masa, rozmieszczona w całym badanym ciele.

Podobnie określamy środek ciężkości mas, rozmieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej: jest to taki punkt, w którym skupiona cała masa tego ciała ma ten sam moment statyczny względem każdej płaszczyzny, co całkowite ciało. Oznaczmy spólrzędne tego punktu  $S$  literami  $\xi, \eta, \zeta$ . W myśl definicji muszą się spełniać warunki:

$$M_y = \zeta \cdot M, \quad M_x = \eta \cdot M, \quad M_z = \xi \cdot M$$



a więc:

(202)

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \eta = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \zeta = \frac{M_{xy}}{M}$$

Gdy masa jest rozmieszczona jednorodnie, to czynnik  $\rho$  odpada i pozostaje:

(202a)

$$\xi = \frac{\int_V \int \int \omega dx dy dz}{V}, \quad \eta = \frac{\int_V \int \int y dx dy dz}{V}$$

$$\zeta = \frac{\int_V \int \int z dx dy dz}{V}$$

Można okazać, że ten punkt ma żadaną własność nie tylko ze względu na trzy płaszczyzny współrzędnych, lecz także ze względu na każdą inną płaszczyznę.

Podobnie możemy wyrazić współrzędne środka ciężkości masy, rozmieszczonej powierzchniowo, w obszarze płaskim  $D$ , zapomocą całek podwójnych, a mianowicie, używając wzorów (200 a, b), otrzymamy dla ciał jednorodnych:

(203)

$$\xi = \frac{\int_{(D)} \int \omega dx dy}{D}, \quad \eta = \frac{\int_{(D)} \int y dx dy}{D}$$

Zestawiając wzory (202a) i (203) z wzorami, wyrażającymi średnią wartość funkcji dwóch lub trzech zmiennych, widzimy, że współrzędna  $\xi$  środka ciężkości bryły jednorodnej jest średnią wartością odciętej  $\omega$  w obszarze  $V$ ; podobnie  $\eta$  jest średnią wartością rzędnej  $y$ , a  $\zeta$  średnią wartością zmiennej  $z$ .

*Przykłady.*

1) Obliczyć masę słupa postaci walca prostego o wysokości  $w$ , którego gęstość zmienia się z wysokością  $z$  według prawa  $\rho = f(z)$ . Niechaj  $D$  oznacza obszar, zamknięty kierownicą na płaszczyźnie  $(XY)$ .

Otóż:

$$M = \int_0^w \int \int f(z) dx dy dz = \int_0^w \left( \int_{(D)} \int f(z) dx dy \right) dz = \int_0^w \left( f(z) \cdot \int_{(D)} \int dx dy \right) dz$$

$$= \int_0^w f(z) dz \cdot \int_{(D)} \int dx dy = \int_0^w f(z) dz \cdot D$$

Stosując do pozostałej całki twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy:

$$M = f(\xi) \cdot w \cdot D$$

Masa tego słupa równa się zatem masie, rozmieszczonej w sposób jednorodny, o gęstości stałej, równej gęstości w wysokości średniej  $z = \xi$ .

2) Wyznaczyć środek ciężkości wycinka koła o promieniu  $R$ , o kącie środkowym  $2\gamma$ , jeżeli gęstość  $\rho$  jest stała. Umieśmy ten wycinek tak, jak na fig. 104. Widocznym jest, że środek ciężkości leży na osi  $x$ -ów, a więc  $\eta = 0$ . Odciętą  $\xi$  obliczymy z wzoru (203), a mianowicie:

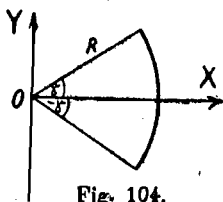


Fig. 104.

$$\xi = \frac{\rho \int_{(D)} \int x \, dx \, dy}{\rho D}$$

Po wprowadzeniu spórzędnych biegunowych na płaszczyźnie, t. j.  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ , otrzymujemy:

$$\xi = \frac{\int_{-\gamma}^{+\gamma} \int_0^R r^2 \cos \alpha \, dr \, d\alpha}{R^2 \gamma} = \frac{1}{R^2 \gamma} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{R^3}{3} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{R}{3\gamma} \sin \alpha \Big|_{-\gamma}^{+\gamma} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \gamma}{\gamma}$$

3) Wyznaczyć środek ciężkości masy, wypełniającej jednorodnie półkulę o promieniu 1. Przyjmijmy równanie kuli w formie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

i weźmy pod uwagę górną półkulę.

Środek ciężkości leży oczywiście na osi  $z$ , a więc  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ , a pozostaje do obliczenia  $\zeta$ . Z wzorów (202a) otrzymujemy:

$$\zeta = \frac{\int_{(V)} \int \int z \, dx \, dy \, dz}{\frac{2}{3} \cdot 1^3 \pi}$$

Wprowadziwszy spórzędne biegunowe przestrzenne, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos \alpha r^2 \sin \alpha \, dr \, d\alpha \, d\beta = \frac{3}{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha \cdot \int_0^{2\pi} d\beta = \\ &= \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \cdot \left( -\frac{\cos 2\alpha}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2\pi} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

4) Obliczyć moment bezwładności kuli jednorodnej o promieniu  $R$ , o gęstości  $\rho$ , względem dowolnej średnicy.

Obierzmy środek kuli za początek układu i obliczmy jej momenty bezwładności względem 3 osi współrzędnych. Stosujemy wzór (199 b), a więc:

$$B_x = \rho \int \int \int (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$B_y = \rho \int \int \int (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$B_z = \rho \int \int \int (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Wskutek symetrii te 3 momenty są równe, możemy je więc oznaczyć tą samą literą  $B$ . Suma:

$$B_x + B_y + B_z = 3B = \rho \int \int \int (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) dx dy dz$$

Do obliczenia tej całki dogodnie jest użyć współrzędnych biegunowych przestrzennych. Wiemy już, że wtedy należy element objętości  $dx dy dz$  zastąpić przez  $r^2 \sin \alpha dr d\beta da$ . Granice całkowania będą stałe, więc:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \cdot r^2 \sin \alpha dr d\beta da = \frac{3}{8} \rho \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\beta \cdot \int_0^\pi \sin \alpha da \\ &= \frac{3}{8} \rho \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{3}{10} R^5 \pi \rho \end{aligned}$$

### § 263. Potencjał.

Weźmy pod uwagę dwa punkty materialne: stały punkt  $A(a, b, c)$  o masie  $m'$  i punkt bieżący  $B(x, y, z)$  o masie  $m$ . Takie dwa punkty przyciągają się z siłą:

$$f = k \frac{m m'}{r^2}$$

gdzie  $k$  oznacza stałą grawitacyjną, a  $r$  odległość tych dwu punktów od siebie. Biorąc  $m' = \frac{1}{k}$ , mamy:

$$f = \frac{m}{r^2} = \frac{m}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

Składowe siły  $f$  w kierunku osi współrzędnych mają wartości:

$$f_x = f \cdot \cos \alpha, \quad f_y = f \cdot \cos \beta, \quad f_z = f \cdot \cos \gamma$$

gdzie  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty, zawarte między kierunkiem siły i osiami współrzędnych.

Weźmy teraz pod uwagę zamiast punktu materjalnego  $B$  masę o gęstości  $\rho(x, y, z)$ , wypełniającą jakąś część przestrzeni  $V$  i zbadajmy, jakie siły działają na stały punkt  $A(a, b, c)$ , leżący *zewnątrz* tego ciała, w t. zw. polu grawitacyjnym. Rozkładamy w tym celu obszar  $V$  na elementy i sumujemy składowe siły przyciągania, wywieranych przez poszczególne elementy na punkt  $A$  w kierunku osi  $X, Y, Z$ . Po zsumowaniu i przejściu do granicy otrzymamy na całkowitą siłę składową w kierunku osi  $x$ -ów wzór:

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z) \cos \alpha \, dx \, dy \, dz}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

t analogicznie na składowe w kierunku innych osi. Ponieważ:

$$\cos \alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y-b}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z-c}{r}$$

przeto

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z)(x-a) \, dx \, dy \, dz}{r^3}, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z)(y-b) \, dx \, dy \, dz}{r^3}$$

$$F_z = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z)(z-c) \, dx \, dy \, dz}{r^3}$$

Te trzy siły składowe są *pochodnymi* jednej funkcji, a mianowicie funkcji:

(204)

$$u = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{r}$$

Zrózniczkujmy mianowicie tę funkcję według parametru  $a$ . Podobnie jak dla całek pojedynczych, można tu wykonać różniczkowanie pod znakiem całki i otrzymamy:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) \, dx \, dy \, dz$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial a}$$

Ponieważ:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

przeto:

$$2r \frac{\partial r}{\partial a} = -2(x-a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{x-a}{r}$$

a zatem:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{r} \right) = +\frac{x-a}{r^3}$$

Wobec tego pochodna:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \iiint_{(V)} \frac{\rho(x, y, z)(x - a)}{r^3} dx dy dz = F_x$$

Podobnie:

$$\frac{\partial u}{\partial b} = F_y, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = F_z$$

Tę funkcję  $u(a, b, c)$ , której pochodnymi cząstkowymi są składowe siły przyciągania wzdłuż osi współrzędnych, nazywamy **potencjałem pola grawitacyjnego, wywołanym przez daną masę**.

Funkcja ta odgrywa bardzo ważną rolę nie tylko w badaniach pola grawitacyjnego, lecz także w badaniach pól innych sił, działających odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, np. sił elektrycznych i magnetycznych.

Utwórzmy drugie pochodne potencjału ze względu na  $a, b, c$ . Po wykonaniu rachunków otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \iiint_{(V)} \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5} \right) \rho dx dy dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \iiint_{(V)} \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5} \right) \rho dx dy dz$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = \iiint_{(V)} \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5} \right) \rho dx dy dz$$

Utworzywszy sumę tych całek, otrzymujemy:

(205)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 0$$

Dla każdego punktu, leżącego *zewnątrz* masy, potencjał spełnia zatem, przy dowolnym rozkładzie masy, równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu (205), zwane równaniem Laplace'a.

Jeżeli punkt  $A(a, b, c)$  leży *wewnątrz* ciała, to całki, przedstawiające potencjał i siły składowe, są niewłaściwe, albowiem dla takiego punktu jest  $x = a, y = b, z = c$ , a więc  $r = 0$ , a to  $r$  występuje w mianowniku. Można jednak dowieść, że te całki są zbieżne. Okazuje się, że dla punktów  $A$ , leżących wewnątrz ciała, potencjał spełnia następujące równanie różniczkowe:

(206)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = -4\pi\rho(a, b, c)$$

zwane równaniem Poisson'a.

Teoria potencjału jest jednym z najważniejszych i najszerzej opracowanych działów analizy wyższej. Spośród licznych podręczników, poświęconych temu przedmiotowi, wymieniamy tu: A. Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen* (2 tomy, Sammlung Schubert, 1921-2) i W. Sternberg, *Potentialtheorie* (2 tomy, Sammlung Göschen, rok 1925-6).

### Przykład.

Obliczyć potencjał w dowolnym punkcie  $A$  przestrzeni, jeżeli w tej przestrzeni znajduje się kula o promieniu  $a$ , wypełniona w sposób jednorodny masą o gęstości  $\rho = 1$ .

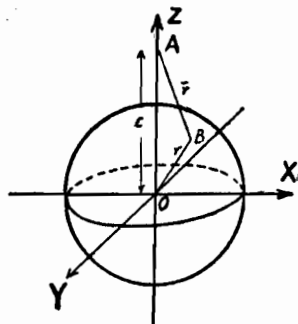


Fig. 105.

Nazwijmy odległość punktu  $A$  od środka  $O$  kuli literą  $c$  (fig. 105). Za oś  $Z$  obierzmy prostą, łączącą  $A$  z  $O$ , a początek układu przyjmijmy w środku kuli.

Punkt  $A$  ma wtedy współrzędne  $A(0, 0, c)$  o dodatnim  $c$ . Odległość punktu  $A$  od dowolnego punktu  $B(x, y, z)$ , leżącego wewnątrz lub na powierzchni kuli, wyrażamy wzorem:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (c - z)^2}$$

a więc potencjał ma w punkcie  $A$  wartość:

$$u = \int \int \int \frac{dx dy dz}{r} = \int \int \int \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (c - z)^2}}$$

Celem obliczenia tej całki wprowadzamy współrzędne biegunowe przestrzenne zapomocą wzorów:

$$x = r \sin \alpha \cos \beta, \quad y = r \sin \alpha \sin \beta, \quad z = r \cos \alpha$$

Ponieważ jacobian tych funkcji ma wartość  $r^3 \sin \alpha$ , przeto:

$$u = \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \sin \alpha d\beta d\alpha dr}{\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + (c - r \cos \alpha)^2}} = 2\pi \int_0^a \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \alpha d\alpha dr}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \alpha}}$$

Przy obliczaniu całki według zmiennej  $\alpha$  uważamy  $r$  za parametr. Wprowadźmy zamiast  $\alpha$  zmienną  $r$  zapomocą podstawienia:

$$r^2 = r^2 + c^2 - 2cr \cos \alpha$$

Dla  $\alpha = 0$  jest  $r^2 = (r - c)^2$ , a więc  $r = |r - c|$ , ponieważ  $r$  jest zawsze dodatnie, a dla  $\alpha = \pi$  jest  $r = |r + c| = r + c$ .

Ponieważ  $2r dr = +2cr \sin \alpha d\alpha$ , przeto:

$$I = \int_0^a \frac{r^2 \sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \alpha}} = \int_{|r-c|}^{r+c} \frac{r^2 \cdot \frac{r dr}{cr}}{r} = \frac{r}{c} \int_{|r-c|}^{r+c} d\bar{r} = \frac{r}{c} (r + c - |r - c|)$$

Stąd otrzymujemy dla  $c > r$ :

$$I = \frac{r}{c} (r + c - c + r) = \frac{2r^2}{c}$$

a dla  $c < r$ :

$$I = \frac{r}{c} (r + c - r + c) = 2r$$

Jeżeli punkt  $A$  leży *zewnątrz* kuli, to jest  $c > a$ , a zatem stale  $c > r$ .  
Wtedy:

$$u = 2\pi \int_0^a \frac{2r^2}{c} dr = \frac{2}{3} \frac{a^3 \pi}{c}$$

Potencjał ma zatem w punkcie zewnętrznym taką wartość, jak gdyby cała masa była skoncentrowana w środku kuli ( $M = \frac{4}{3} a^3 \pi \cdot 1$ ,  $r = c$ ,  $u = \frac{M}{r}$ ).

Jeżeli punkt  $A$  leży *wewnątrz* kuli, to trzeba rozdzielić przedział całkowania  $\langle 0, a \rangle$  na dwie części, od 0 do  $c$  i od  $c$  do  $a$ .

W pierwszym z nich jest  $c > r$ , a więc  $I = \frac{2r^2}{c}$ , w drugim zaś jest  $c < r$ , a więc  $I = 2r$ . Otrzymujemy więc w tym przypadku:

$$u = 2\pi \int_0^c \frac{2r^2}{c} dr + 2\pi \int_c^a 2r dr = \frac{4}{3} \pi \frac{c^3}{c} + 2\pi (a^2 - c^2) = 2\pi \left( a^2 - \frac{c^2}{3} \right)$$

Taką wartość ma potencjał w punkcie, leżącym *wewnątrz* kuli w odległości  $c$  od jej środka.

Dla punktu, leżącego na powierzchni kuli, t. j. dla  $c = a$ , otrzymujemy z obu wzorów tę samą wartość  $\frac{4}{3} a^2 \pi$ .

## § 264. Całki powierzchniowe.

W fizyce matematycznej zachodzi często potrzeba badania mas (zwłaszcza elektrycznych), rozmieszczonych na powierzchniach krzywych, momentów takich mas i ich potencjałów. Aby stworzyć narzędzie matematyczne, odpowiednie dla tych badań, wprowadzono jeszcze jedno rozszerzenie pojęcia całki, a mianowicie *całki powierzchniowe*.

Zanim to pojęcie wprowadzimy, podamy najpierw pewną modyfikację pojęcia całki podwójnej po obszarze  $D$ . Przy definicji tej całki nie zwracaliśmy uwagi na to, w jakim kierunku obiegamy obszar  $D$ . Odróżnienie tych kierunków jest jednak w wielu przypadkach korzystne. Tak np. przy obieganiu brzegu obszaru  $D$  w kierunku dodatnim (przeciwnym do obrotu wskazówek zegara) otrzymujemy z wzoru:

$$D = \int_{(D)} \int d\omega dy$$

dotatnią liczbę na pole tego obszaru, przy obieganii zaś ujemnem, liczbę ujemną. Możemy zatem wprowadzić oznaczenia:

$$\int_{D^+} \int dx dy = \int_{(D)} \int dx dy$$

$$\int_{D^-} \int dx dy = - \int_{(D)} \int dx dy$$

z których pierwsze oznacza całkę podwójną o obiegu dodatnim, drugie zaś o ujemnym. Podobnie ogólnie kładziemy:

$$\int_{D^+} \int f(x, y) dx dy = \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

$$\int_{D^-} \int f(x, y) dx dy = - \int_{(D)} \int f(x, y) dx dy$$

i nazywamy takie całki podwójne, z odróżnieniem kierunku obiegu, całkami *zorientowanemi*.

Weźmy teraz pod uwagę powierzchnię  $S$  o równaniu:

$$z = \varphi(x, y)$$

wznoszącą się nad obszarem płaskim  $D$  i ustalmy dla niej jakiś kierunek obieganii przez obranie kierunku obieganii brzegu.

Ten sam kierunek obiegu trzeba przypisać rzutowi  $D$  tej powierzchni na płaszczyznę  $(XY)$ . Uważajmy dla każdej normalnej do powierzchni ten kierunek za dodatni, który wraz z kierunkiem obieganii brzegu powierzchni wyznacza ruch śrubowy prawoskrętny. Kąt tej normalnej z dodatnim kierunkiem osi  $Z$  oznaczmy literą  $\gamma$ .

Utwórzmy całkę podwójną *zorientowaną* z dowolnej funkcji  $R(x, y, z)$  trzech zmiennych, przyczem te zmienne nie są od siebie niezależne, lecz spełniają równanie powierzchni  $z = \varphi(x, y)$ . Tworzymy więc całkę:

$$\int_{D^+} \int R(x, y, z) dx dy = \int_{D^+} \int R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy \quad \text{lub} \quad \int_{D^-} \int R(x, y, z) dx dy$$

zorientowaną tak, jak dana powierzchnia, to znaczy, że obieg obszaru  $D$  jest taki, jaki wynika z obiegu brzegu danej powierzchni. Każdą z tych całek nazywamy całką *powierzchniową* z funkcji  $R(x, y, z)$ , braną po powierzchni  $S$  z obranym kierunkiem obiegu i oznaczamy je obydwie wspólnym symbolem:

$$\int_{(S)} \int R(x, y, z) dx dy \quad \text{lub} \quad \int_{(S)} \int R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma$$



przyczem należy jeszcze podać, w którym kierunku obiegamy daną powierzchnię. Symbol  $d\sigma$  nazywamy elementem powierzchni; ma on wartość  $dx dy \cdot \cos \gamma$ . Zamiast mówić o różnych kierunkach obiegania powierzchni, możemy mówić, że bierzemy całkę powierzchniową po różnych *stronach* powierzchni, zależnie od tego, po której stronie powierzchni leży dodatni promień normalnej; albowiem dodatni kierunek normalnej został ustalony na podstawie kierunku obiegu.

Widzimy stąd, że *całkę powierzchniową, braną po dowolnej powierzchni, np. krzywej, można zawsze przedstawić jako całkę podwójną po obszarze płaskim, o obiegu dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, po której stronie powierzchni bierzemy całkę powierzchniową.*

A więc:

$$\iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \int_{D^+} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

lub:

$$\iint_{D^-} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

czyli:

$$\iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \begin{cases} \int_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy, & \text{jeżeli obieg brzegu} \\ & \text{powierzchni jest dodatni} \\ - \int_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy, & \text{jeżeli obieg brzegu} \\ & \text{powierzchni jest ujemny.} \end{cases}$$

Zakładaliśmy, że powierzchnia  $S$  da się przedstawić w postaci równania  $z = \varphi(x, y)$ . Jeżeli tak nie jest, lecz gdy powierzchnia da się rozłożyć na części, spełniające ten warunek, to za całkę powierzchniową po całej powierzchni uważamy sumę całek powierzchniowych po tych częściach składowych. Jeżeli zaś jakaś część powierzchni jest prostopadła do płaszczyzny ( $XY$ ) (jest częścią powierzchni walcowej), to za całkę powierzchniową po tej części powierzchni uważamy zero.

Tak np. całka powierzchniowa po kuli jest sumą całek powierzchniowych po obu półkulach, na które się rozpada kula przez poprowadzenie koła wielkiego, równoległego do płaszczyzny ( $XY$ ).

Podobnie określa się całki powierzchniowe:

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz \quad \text{i} \quad \iint_{(S)} Q(x, y, z) dx dz$$

jeżeli równanie powierzchni da się przedstawić w postaci  $x = \psi(y, z)$  lub  $y = \chi(x, z)$  nad obszarami płaskimi  $D'$  lub  $D''$ .

Ogólną całką powierzchniową po powierzchni  $S$  jest suma:

$$\int\int_{(S)} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy)$$

czyli:

$$\int\int_{(S)} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma$$

*Uwaga.* Całkę powierzchniową  $\int\int_{(S)} R(x, y, z) dx dy$  można też określić jako

granice ciągu sum, otrzymanych w ten sposób, że dzieli się powierzchnię na elementy  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  i każdy z nich mnoży się przez wartość funkcji  $R(x, y, z) \cos \gamma$  w dowolnym punkcie każdego elementu a następnie dodaje się te iloczyny. Tworzy się ciąg sum postaci:

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \Delta\sigma_i$$

gdy średnice elementów  $\Delta\sigma_i$  dążą do zera i okazuje się, że ta granica ma wartość:

$$\begin{aligned} \int\int_{(D)} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy &= \int\int_{(S)} R(x, y, z) dx dy = \\ &= \int\int_{(S)} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma \end{aligned}$$

### § 265. Związek całki powierzchniowej z całką krzywoliniową przestrzenną.

Widzieliśmy, że pomiędzy całką podwójną a całką krzywoliniową płaską zachodzi bardzo ważny i interesujący związek, wyrażony twierdzeniem Greena-Riemanna (por. § 256). Okażemy, że podobny związek zachodzi między całką powierzchniową a całką krzywoliniową przestrzenną.

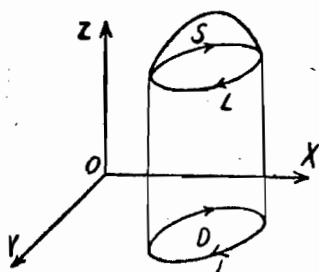


Fig. 106.

Weźmy pod uwagę powierzchnię  $S$  (fig. 106) o równaniu  $z = \varphi(x, y)$ , wznoszącą się nad obszarem płaskim  $D$ . Brzegiem tej powierzchni jest linia  $L$  a rzutem tej linii na płaszczyznę  $(XY)$  jest brzeg  $l$  obszaru  $D$ . Zajmijmy się całką krzywoliniową:

$$I = \int_{(L)} P(x, y, z) d\omega$$

braną po brzegu powierzchni, przyczem obiegamy ten brzeg w takim

kierunku, aby rzut jego  $l$  był obiegany w kierunku dodatnim. Ponieważ  $z = \varphi(x, y)$ , przeto:

$$I = \int_{(l)} P(x, y, \varphi(x, y)) d\omega = \int_{(l)} P_1(x, y) d\omega$$

Zastosujmy do tej całki krzywolinjowej po linii płaskiej twierdzenie Greena-Riemanna (str. 241, wzór (166)). Otrzymamy:

$$I = - \int_{(D)} \int \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy$$

Ale:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

a więc:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(D)} \int - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \int_{(D)} \int - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy = \\ &= - \int_{(S)} \int - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \int_{(S)} \int - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

Tu już występują całki powierzchniowe, ponieważ  $z = \varphi(x, y)$ . Drugą z tych całek można napisać w postaci:

$$I_1 = \int_{(S)} \int - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma d\sigma$$

gdzie  $\gamma$  jest kątem normalnej z osią  $Z$ . Wiadomo z geometrii różniczkowej (por. tom I, str. 339), że:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \text{a} \quad \cos \beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

gdzie  $\beta$  jest kątem normalnej z osią  $Y$ . Stąd wynika, że:

$$-\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma = \cos \beta$$

a więc:

$$I_1 = \int_{(S)} \int \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta d\sigma = \int_{(S)} \int \frac{\partial P}{\partial z} dx dz$$

Zatem:

$$I = \int_{(l)} P(x, y, z) d\omega = \int_{(S)} \int - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \int_{(S)} \int \frac{\partial P}{\partial z} dx dz$$

W podobny sposób przekształcamy całki krzywoliniowe:

$$\int_{(L)} Q(x, y, z) dy \quad \text{i} \quad \int_{(L)} R(x, y, z) dz$$

Dodajemy te trzy całki do siebie i otrzymujemy:

$$(207) \quad \int_{(S)} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \right] = \\ = \int_{(L)} (P dx + Q dy + R dz)$$

Jest to wzór Stokes'a, podający związek całki krzywoliniowej przestrzennej z całką powierzchniową. Jest on uogólnieniem twierdzenia Greena-Riemanna.

Z twierdzenia Greena-Riemanna wysnuliśmy wniosek, że całka krzywoliniowa po krzywej zamkniętej jest równa zero, gdy wyrażenie, znajdujące się pod całką, jest różniczką zupełną jakiejś funkcji dwóch zmiennych, a stąd wynikło, że całka krzywoliniowa z różniczki zupełnej nie zależy od drogi całkowania. Taki sam wniosek wysnuwa się z twierdzenia Stokes'a dla różniczki zupełnej z funkcji trzech zmiennych.

A mianowicie, gdy wyrażenie:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

jest różniczką zupełną, to:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

a więc lewa strona wzoru Stokes'a jest zerem, a stąd wynika, że i prawa jest zerem. A zatem całka po krzywej zamkniętej z różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych jest zerem, a stąd wynika, że całka krzywoliniowa z różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych nie zależy od drogi całkowania.

Twierdzenie Stokes'a ma liczne zastosowania w fizyce. Tak np. gdy  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  są składowymi siły  $F$  w polu sił w kierunkach osi współrzędnych, to całka krzywoliniowa  $\int_{(L)} (P dx + Q dy + R dz)$  przedstawia pracę, wykonaną przez tę siłę wzdłuż drogi  $L$ . Jeżeli wyrażenie pod całką jest różniczką zupełną jakiejś funkcji  $U(x, y, z)$ , to praca nie zależy od drogi, łączącej dwa dane punkty. Wtedy  $P, Q, R$  są pochodnymi cząstkowymi jednej funkcji  $U(x, y, z)$ , a mianowicie:

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$U(x, y, z)$  jest potencjałem tego pola sił. Jeżeli więc pole sił posiada potencjał, to praca nie zależy od drogi. Wzór Stokes'a znajduje również ważne zastosowanie w hydrodynamice i w elektrodynamice.

Ma on również bardzo interesującą-interpretację w teorii wektorów.

### § 266. Twierdzenie Gaussa i twierdzenie Greena dla przestrzeni trójwymiarowej.

W poprzednim paragrafie poznaliśmy związek całki powierzchniowej z całką krzywoliniową. Istnieje również związek całki powierzchniowej z całką potrójną, pozwalający sprowadzić obliczenie całki potrójnej do całki powierzchniowej. I tak wykonując całkowanie według  $z$  w całości potrójnej, dowodzi się, podobnie jak przy płaskim twierdzeniu Greena-Riemanna, że z całki  $\int\int\int_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$  otrzymamy  $\int\int_{(S)} R dx dy$ , gdzie  $S$  jest powierzchnią, ograniczającą obszar trójwymiarowy  $V$

Podobnie:

$$\int\int\int_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int\int_{(S)} P dy dz$$

$$\int\int\int_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int\int_{(S)} Q dx dz$$

Sumując te trzy równania stronami, otrzymujemy wzór:

$$(208) \quad \int\int\int_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int\int_{(S)} (P dy dz + Q dx dz + R dx dy)$$

Wzór ten, zwany wzorem Gaussa, znajduje liczne zastosowania w fizyce matematycznej. Posiada on także prostą interpretację w analizie wektoralnej.

Z wzoru Gaussa wyprowadza się twierdzenie Greena dla przestrzeni, wyrażające się następującym wzorem:

$$(209) \quad \int\int\int_{(V)} (U \Delta V - V \Delta U) dx dy dz = \int\int_{(S)} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma$$

gdzie  $U$  i  $V$  są funkcjami trzech zmiennych  $x, y, z$ ,  $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$  i podobnie  $\Delta V$ , a  $\frac{\partial V}{\partial n}$  oznacza pochodną funkcji  $V$  w kierunku normalnej i ma wartość:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \cos \gamma \quad \text{i podobnie} \quad \frac{\partial U}{\partial n}$$

( $\alpha, \beta, \gamma$  są kątami normalnej z osiami współrzędnych).

Dowód tego wzoru przeprowadza się, stosując wzór Gaussa do całki:

$$I = \int \int \int_{(V)} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) - U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

przeto:

$$I = \int \int \int_{(V)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( U \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] dx dy dz - \int \int \int_{(V)} U \Delta V dx dy dz$$

Stosując do pierwszej całki twierdzenie Gaussa, otrzymujemy:

$$I = \int \int_{(S)} U \left( \frac{\partial V}{\partial n} dy dz + \frac{\partial V}{\partial y} dx dz + \frac{\partial V}{\partial z} dx dy \right) - \int \int \int_{(V)} U \Delta V dx dy dz$$

Ale  $dy dz = \cos \alpha d\sigma$ ,  $dx dz = \cos \beta d\sigma$ ,  $dx dy = \cos \gamma d\sigma$ , a więc wyrażenie w nawiasie w pierwszej całce jest pochodną funkcji  $V$  w kierunku normalnej, pomnożoną przez  $d\sigma$ . Zatem:

$$I = \int \int_{(S)} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \int \int \int_{(V)} U \Delta V dx dy dz$$

Przekształcając tę samą całkę analogicznie przez użycie wzoru:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( V \frac{\partial U}{\partial x} \right) - V \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

otrzymujemy:

$$I = \int \int_{(S)} V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - \int \int \int_{(V)} V \Delta U dx dy dz$$

Tworząc różnicę tych dwóch wyrażeń na  $I$ , otrzymujemy ostatecznie wzór Greena.

Szczegółową dyskusję twierdzeń, podanych w §§ 264—266 i licznych zastosowania znajdzie czytelnik np. w podręczniku R. Courant'a p. t. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (tom II, str. 259—287, Berlin 1929) i w podręcznikach, poświęconych teorii wektorów; np. w polskim języku istnieje z tej dziedziny podręcznik W. Pogorzelskiego p. t. *Zarys teorii wektorów* (Lwów—Warszawa 1925 r.).

## Nota.

### O liczbach zespolonych.

Zarówno dla potrzeb matematyki czystej jak i stosowanej okazało się bardzo pożyteczne rozszerzenie zakresu liczb przez wprowadzenie obok liczb *rzeczywistych* także liczb *zespolonych*. Liczbami zespolonemi nazywamy *pary* liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , dla których ustalono następujące cztery związki i reguły działań arytmetycznych.

#### I. Równość:

$$(a, b) = (c, d) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = c, b = d$$

#### II. Reguła dodawania:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

#### III. Reguła mnożenia:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

#### IV. Związek z liczbami rzeczywistymi:

$$(a, 0) = a$$

Każdą taką parę uważamy za jedną całość, za *jeden* element i oznaczamy ją często jedną literą, np.  $(a, b) = z$ . Postępujemy tu więc podobnie jak przy ułamkach, które są także parami, a mianowicie parami liczb całkowitych, np.  $\frac{3}{8}, \frac{7}{8}$ , ogólnie  $\frac{a}{b}$ , a mimoto uważamy każdy ułamek za *jeden* element i piszemy np.  $\frac{a}{b} = u$ .

*Uwaga.* Także ułamki można wprowadzać zapomocą łączenia liczb całkowitych  $a, b$  w pary. Łatwo stwierdzić, że związki I—IV mają dla ułamków postać:

$$\text{I}' \quad (a, b) = (c, d) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \cdot d = b \cdot c.$$

$$\text{II}' \quad (a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd).$$

$$\text{III}' \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

$$\text{IV}' \quad (a, 1) = a.$$

Z tych czterech założeń można wyprowadzić wszystkie własności ułamków i wszystkie twierdzenia o rachowaniu ułamkami.

Założenia I — IV są tak dobrane, aby można było rachować liczbami zespolonemi tak, jak dwumianami  $a + b\omega, c + d\omega$ , z tem tylko uzupełnieniem, że zamiast  $\omega^2$  należy podstawić  $-1$ .

Okażemy mianowicie, że każdą liczbę zespoloną, t. j. każdą parę  $(a, b)$ , czyniącą zadość założeniom I—IV, można przedstawić w postaci  $a + b \cdot i$  gdzie  $i$  jest skróconem oznaczeniem pewnej specjalnej pary, a mianowicie pary  $(0, 1)$ , mającej tę własność, że  $(0, 1)^2 = -1$ .

I tak każdą parę  $(a, b)$  można napisać w postaci:

$$(a, b) = (a + 0, 0 + b)$$

Na podstawie reguły II jest więc:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Stąd, na podstawie związku IV, otrzymujemy:

$$(a, b) = a + (0, b)$$

Drugi składnik tej sumy można napisać w postaci:

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

albowiem z reguły III wynika, że:

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$$

Wobec tego:

$$(a, b) = a + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Stąd zaś, na podstawie związku IV, otrzymujemy:

$$(a, b) = a + b \cdot (0, 1)$$

Kwadrat liczby zespolonej  $(0, 1)$  ma wartość  $-1$ ; istotnie według reguły III jest:

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

a więc według IV jest:

$$(0, 1)^2 = -1$$

Tę specjalną parę  $(0, 1)$  nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy ją symbolem  $i$ . Zatem:

$$(0, 1) = i$$

Liczba  $i$  ma więc tę własność, że:

$$i^2 = -1$$

Używając tego sposobu oznaczania, mamy więc:

$$(a, b) = a + b \cdot i$$

Dowiedliśmy w ten sposób, że każdą liczbę zespoloną można przedstawić w postaci sumy, której pierwszy składnik jest liczbą rzeczywistą a drugi iloczynem liczby rzeczywistej i jednostki urojonej.



Używając tego sposobu przedstawienia liczb zespolonych, piszemy cztery zasadnicze prawa I—IV, charakteryzujące te liczby, w następującej postaci:

1)  $a + bi = c + di$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają się równocześnie dwie równości:  $a = c$ ,  $b = d$ ;

$$2) (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$3) (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

$$4) a + 0i = a.$$

Z własności 1) wynika, że każde równanie, zachodzące pomiędzy liczbami zespolonymi, jest równoważne z układem *dwóch równań*, zachodzących pomiędzy odpowiednimi liczbami rzeczywistymi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na regułę mnożenia liczb zespolonych, która odróżnia mnożenie liczb zespolonych  $a + bi$  od mnożenia dwumianów  $a + bx$ . I tak mnożąc przez siebie dwie liczby zespolone tak, jak zwyczajnie dwumiany, otrzymujemy:

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + (ad + bc)i$$

Różnica występuje dopiero w tem, że za  $i^2$  należy podstawić  $-1$ . Uczyniwszy to, otrzymujemy istotnie prawą stronę wzoru 3).

Z tych czterech praw I—IV lub 1)—4) wyprowadza się już całą arytmetykę liczb zespolonych. Okazuje się przytem, że wszystkie prawa arytmetyki liczb rzeczywistych zachowują swą ważność także w tej szerszej klasie liczb (jak np. prawa przemienności i łączności w dodawaniu i mnożeniu, prawo rozdzielności dodawania i mnożenia). Ponadto przybývają jednak jeszcze nowe definicje i nowe wyniki.

I tak liczbę zespoloną, której część rzeczywista jest zerem, nazywamy liczbą *urojoną* lub *czysto urojoną*. Dwie liczby zespolone:

$$z = a + bi, \quad \bar{z} = a - bi$$

mające tę samą część rzeczywistą, a różniące się tylko znakiem współczynnika, stojącego przy jednostce urojonej, nazywamy liczbami zespolonymi *sprzężonemi*. Zarówno suma jak i iloczyn dwóch liczb sprzężonych jest liczbą rzeczywistą, a mianowicie:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a$$

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Widzimy więc, że działania, wykonywane na liczbach zespolonych, mogą prowadzić do wyników rzeczywistych.

Wyniki działań, wykonywanych na liczbach zespolonych, należy zawsze sprowadzać do postaci  $x + iy$ , gdzie  $x, y$  są liczbami rzeczywistymi. Dla *dodawania* i *mnożenia* uzyskuje się przedstawienie wyniku w takiej postaci odrazu z wzorów 2), 3).

Przy *dzieleniu* można uzyskać takie przedstawienie w następujący sposób. Mnożymy licznik i mianownik wyrażenia  $\frac{a+bi}{c+di}$  przez liczbę sprzężoną z mianownikiem. Otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bc i - adi - bd i^2}{c^2 - (di)^2}$$

Zatem:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Szukane liczby rzeczywiste  $x, y$  mają tu zatem wartości:

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Do tego samego wyniku można też dojść ogólniejszą metodą, a mianowicie kładąc:

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + iy$$

Stąd:

$$a+bi = (x+yi)(c+di) = cx - dy + (dx+cy)i$$

To równanie spełnia się (w myśl zasady I) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają się dwa równania:

$$cx - dy = a$$

$$dx + cy = b$$

Rozwiązaniem tego układu równań są, jak łatwo sprawdzić, otrzymane powyżej wartości na  $x$  i  $y$ .

*Przykład.*

$$\frac{43-6i}{4+7i} = \frac{(43-6i)(4-7i)}{(4+7i)(4-7i)} = \frac{172-42-24i-301i}{16+49} = \frac{130-325i}{65}$$

a więc:

$$(43-6i):(4+7i) = 2-5i$$

Przy *potęgowaniu* liczb zespolonych występują rozmaite potęgi jednostki urojonej  $i$ . Wszystkie te potęgi należy przedstawić w postaci  $a+bi$  (przyczem  $a$  lub  $b$  może być zerem). Otóż:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = +1$$

Wyższe zaś potęgi sprowadzają się do tych czterech i powtarzają się periodycznie, albowiem:

$$i^{4n+4} = i^{4n} \cdot i^4 = +1 \cdot i^4 = i^4$$

przy całkowitych dodatnich  $n, k$ . Wobec tego także każdą potęgę  $(a+bi)^n$  potrafimy przedstawić w postaci  $x+iy$ : trzeba w tym celu podnieść

ten dwumian do  $n$ -tej potęgi według wzoru Newtona, a następnie za wszystkie potęgi  $i$  podstawić odpowiednio  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$  lub  $+1$ .

*Pierwiastkowanie* liczb zespolonych wyjaśnimy zapomocą przykładu. Chcemy obliczyć drugi pierwiastek z liczby  $5-12i$ , to znaczy znaleźć takie dwie liczby rzeczywiste  $x, y$ , aby liczba zespolona  $x+iy$  spełniała równanie:

$$(x+iy)^2 = 5-12i$$

czyli:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 5 - 12i$$

Równanie to spełnia się wtedy i tylko wtedy, gdy liczby *rzeczywiste*  $x, y$  spełniają następujący układ dwóch równań:

$$x^2 - y^2 = 5$$

$$2xy = -12$$

Stąd otrzymujemy  $x = -\frac{6}{y}$  a następnie  $\frac{36}{y^2} - y^2 = 5$ ,  $36 - y^4 = 5y^2$ .

Stąd:

$$y^2 = 4 \quad \text{albo} \quad y^2 = -9$$

Tę drugą ewentualność:  $y^2 = -9$  należy odrzucić, ponieważ  $y$  ma być liczbą rzeczywistą. Wobec tego  $y_1 = +2$ ,  $y_2 = -2$ , a zatem  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = +3$ . Otóż drugi pierwiastek z liczby zespolonej  $5-12i$  ma dwie następujące wartości:

$$(\sqrt{5-12i})_1 = -3+2i, \quad (\sqrt{5-12i})_2 = 3-2i$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że:

$$(\sqrt{-1})_1 = +i, \quad (\sqrt{-1})_2 = -i, \quad (\sqrt{i})_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad (\sqrt{i})_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Widzimy stąd, że w zbiorze liczb zespolonych istnieje drugi pierwiastek z każdej liczby, podczas gdy w zbiorze liczb rzeczywistych nie istnieją drugie pierwiastki z liczb ujemnych.

Z tem wiąże się, że w zbiorze liczb zespolonych *każde równanie drugiego stopnia posiada dwa rozwiązania*, podczas gdy w zbiorze liczb rzeczywistych równania drugiego stopnia o wyróżniku ujemnym nie posiadają rozwiązań.

*Przykład.* Równanie:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

posiada rozwiązania:

$$x_1 = 2 + \sqrt{-9}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{-9}$$

czyli:

$$x_1 = 2 + 3i, \quad x_2 = 2 - 3i$$

Natomiast to równanie nie posiada rozwiązań rzeczywistych.

Okazano ogólnie, że każde równanie algebraiczne  $n$ -tego stopnia posiada  $n$  pierwiastków, przyczem niektóre, a nawet wszystkie mogą być liczbami zespolonemi.

Jeżeli równanie algebraiczne o współczynnikach rzeczywistych posiada pierwiastek zespolony  $\omega_1 = p + qi$ , to także sprzężona z  $\omega_1$  liczba  $\omega_2 = p - qi$  jest pierwiastkiem tego równania.

*Dowód.* Podstawivszy w równanie algebraiczne:

$$a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + \dots + a_n \omega^n = 0$$

za  $\omega$  wartość  $\omega_1 = p + qi$ , wykonujemy zaznaczone działania i przedstawiamy lewą stronę w postaci  $A + Bi$ . Jeżeli zaś podstawiamy za  $\omega$  wartość  $\omega_2$ , sprzężoną z  $\omega_1$ , to otrzymamy oczywiście wynik  $A - Bi$ . Ponieważ  $\omega_1$  spełnia dane równanie, przeto  $A + Bi = 0$  czyli  $A + Bi = 0 + 0i$  a stąd wynika, że  $A = 0$  i  $B = 0$ . Wobec tego także  $A - Bi = 0$ , a to znaczy, że liczba  $\omega_2 = p - qi$  spełnia także dane równanie. c. b. d. o.

Wiadomo, jak ważne usługi oddaje przy liczbach rzeczywistych ich geometryczne przedstawienie zapomocą punktów *osi liczbowej*. Do

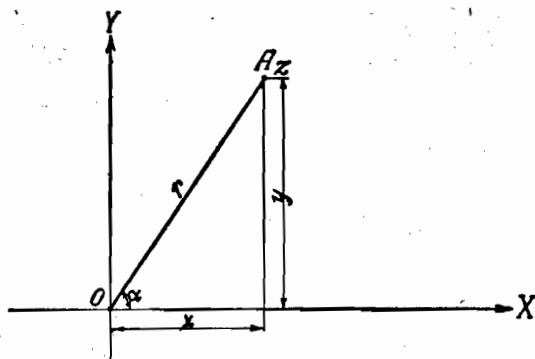


Fig. 107.

przedstawienia geometrycznego liczb zespolonych używa się całej płaszczyzny, zwanej *plaszczyną liczbową*, wprowadzonej przez Gaussa. Obrazem geometrycznym liczby zespolonej  $z = x + iy$  jest punkt o współrzędnych  $x, y$ . Tak np. punkt  $A$  na fig. 107 przedstawia liczbę  $z = 2 + 3i$ . Obrazami liczb rzeczywistych są punkty osi  $x$ -ów, liczb czysto urojonych punkty osi  $y$ -ów.

Obrazem każdej liczby zespolonej jest zatem jakiś punkt płaszczyzny liczbowej i naodwrot, każdemu punktowi płaszczyzny liczbowej odpowiada jakaś liczba zespolona. Istnieje zatem odpowiedniość doskonała pomiędzy zbiorem wszystkich liczb zespolonych a zbiorem wszystkich punktów obranej płaszczyzny.

Odległość  $r$  punktu, przedstawiającego liczbę zespoloną  $z$ , od początku układu współrzędnych nazywamy *wartością bezwzględną* tej liczby  $z$  i oznaczamy ją symbolem  $|z|$ . Widoczne jest, że  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , a zatem:

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tak np.  $|2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ ,  $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$ . Definicja

ta pozostaje w zgodzie z definicją bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej, np.  $|-4| = |-4 + 0i| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$ .

Używając odległości  $r$  punktu  $A$  od początku układu i kąta  $\alpha$ , jaki tworzy promień  $OA$  z osią  $\omega$ -ów, możemy przedstawić każdą liczbę zespoloną zapomocą *spółrzędnych biegunowych*.

I tak:

$$\omega = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

a zatem:

$$z = \omega + yi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

czyli:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

przyczem  $|z| = \sqrt{\omega^2 + y^2}$  a  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\omega}$ . Każdą więc liczbę zespoloną można przedstawić jako iloczyn z jej wartości bezwzględnej i z liczby zespolonej  $\cos \alpha + i \sin \alpha$ , której wartością bezwzględną jest 1. Istotnie:

$$|\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1$$

Kąt  $\alpha$  nazywamy *argumentem* liczby zespolonej.

Posługując się obrazami geometrycznymi liczb zespolonych, możemy w bardzo prosty sposób wykonywać graficznie działania arytmetyczne

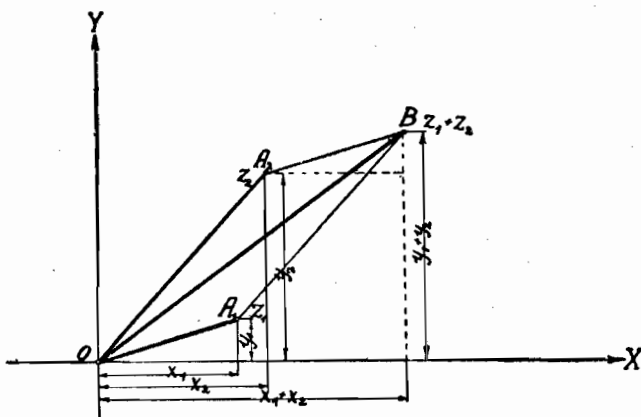


Fig. 108.

na tych liczbach. I tak jeżeli punkty  $A_1$  i  $A_2$  (fig. 108) są obrazami geometrycznymi liczb zespolonych:

$$z_1 = \omega_1 + y_1 i, \quad z_2 = \omega_2 + y_2 i$$

to obrazem geometrycznym ich sumy:

$$z_1 + z_2 = (\omega_1 + \omega_2) + (y_1 + y_2) i$$

jest punkt  $B$ , leżący na końcu przekątnej równoległoboku, utworzonego z boków  $OA_1$  i  $OA_2$ . Widzimy stąd, że dodawanie liczb zespolonych można wykonywać na ich obrazach geometrycznych tak jak dodawanie wektorów.

Aby znaleźć sposób wykonywania *mnożenia* liczb zespolonych  $z_1$  i  $z_2$  na ich obrazach geometrycznych (fig. 109), dogodnie jest użyć ich przedstawienia zapomocą spólrzędnych biegunowych, a mianowicie:

$$z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1), \quad z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

Wobec tego:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + i(\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1))$$

czyli:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Widzimy stąd, że iloczynem dwóch liczb zespolonych jest liczba zespolona, której wartość bezwzględna jest iloczynem wartości bezwzględnych

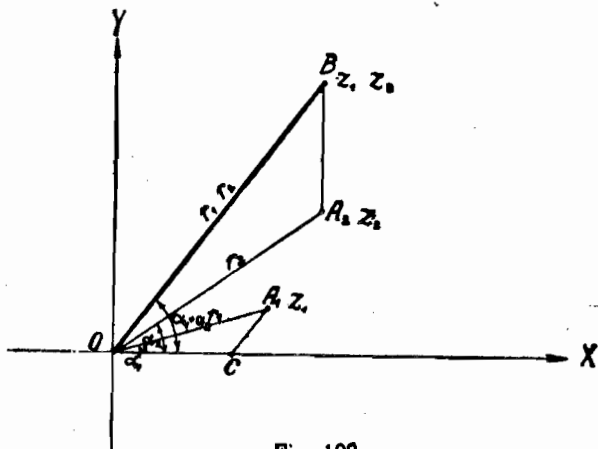


Fig. 109.

danych liczb, a *argument* jest sumą argumentów tych liczb. Aby więc otrzymać obraz geometryczny liczby  $z_1 \cdot z_2$ , należy obrócić promień  $OA_2$ , należący do liczby  $z_2$ , o kąt  $\alpha_1$ , należący do liczby  $z_1$  i powiększyć ten obrócony promień  $r_2$  tyle razy, ile razy  $r_1$  jest większe od jednostki. Najłatwiej jest uskutecznić tę konstrukcję przy pomocy trójkątów podobnych:  $OCA_1 \sim OA_2B$ , przyczem  $OC = 1$ .

Nietrudno jest znaleźć podobny wzór i podobną konstrukcję na *dzielenie* liczb zespolonych.

Z wzoru na  $z_1 \cdot z_2$  wynika bardzo prosty wzór na *potęgowanie* liczby zespolonej  $z$ . Przedstawmy ją w postaci  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  i zastosujmy  $n$ -krotnie wzór na  $z \cdot z$ . Otrzymamy:

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Dla  $r = 1$  otrzymujemy stąd następujący wzór Moivre'a, bardzo ważny w algebrze i w teorii funkcji zmiennej zespolonej:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Powróćmy do tego wzoru w tomie III.

Z rozważań tych widzimy, że liczby zespolone nie są bynajmniej, jak dawniej sądzono, jakimiś mistycznymi „urojonami“ fikcjami matematycznymi, lecz są równie realne, jak ułamki lub inne liczby rzeczywiste i posiadają zupełnie jasną, „rzeczywistą“ interpretację geometryczną. Znajdują one coraz szersze zastosowanie w technice, w fizyce i w innych naukach.

*Uwaga.* Geometryczne dodawanie liczb zespolonych mogłoby nasuwać przypuszczenie, że mamy tu do czynienia z *wektorami*, dobrze znanymi z rozmaitych działów fizyki (np. z mechaniki). Aby usunąć rozmaite, zdarzające się nieporozumienia; przedstawimy tu jeszcze pokrótce stosunek teorii liczb zespolonych do teorii wektorów. Aby ten stosunek jasno wystąpił, zajmiemy się ogólniejszymi liczbami „zespolonymi“, złożonymi z czterech części, a mianowicie *kwaternionami*. Kwaterniony są to *czwórki* liczb rzeczywistych:  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ , które można określić zapomocą związków podobnych do związków I–IV, charakteryzujących liczby zespolone dwujednostkowe (t. j. złożone z jednostek rzeczywistych 1 i z jednostek urojonych  $i$ ). Prościej jest jednak wyjść od razu z przedstawienia takiej czwórki  $a$  w postaci:

$$a = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$$

1,  $i$ ,  $j$ ,  $k$  nazywamy jednostkami kwaterniona. Mnożenie tych jednostek przez siebie określamy zapomocą następujących wzorów:

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & ij = k & ik = -j \\ ji = -k & j^2 = -1 & jk = i \\ ki = j & kj = -i & k^2 = -1 \end{array}$$

Rezygnujemy tu zatem z prawa przemienności w mnożeniu (albowiem np.  $ij \neq ji$ ).

Kwaternion składa się z części rzeczywistej:  $a_0$ , zwanej *skalarną* częścią kwaterniona i z części  $a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ , zwanej *wektorjalną* częścią kwaterniona. Część wektorjalną można przedstawić geometrycznie w układzie trzech osi współrzędnych prostopadłych, uważając punkt  $A$  o współrzędnych  $a_1, a_2, a_3$  za obraz geometryczny tej części wektorjalnej; odcinek  $OA$ , łączący ten punkt z początkiem układu, nazywamy *wektorem*.

Wykonując mnożenie wektorjalnych części  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  dwóch kwaternionów według zwykłych reguł mnożenia trójmianów i zastępując następnie iloczyny jednostek innymi jednostkami, według przyjętych powyżej reguł, otrzymujemy:

$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_2 b_2 - a_3 b_3) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$   
Część skalarną tego iloczynu, wziętą ze znakiem przeciwnym, t. j.:

$$S(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

nazywamy *iloczynem skalarnym* dwóch wektorów, a część wektorjalną, t. j.:

$$V(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}) = (a_2 b_2 - a_3 b_3) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

nazywamy *wektorjalnym iloczynem* dwóch wektorów.

Właściwiej byłoby jednak nie odróżniać *dwóch* rodzajów mnożenia wektorów, tylko mówić o części skalarnej i wektorjalnej *jednego* iloczynu.

Okazuje się, że iloczyn wektorjalny przedstawia się w obrazie geometrycznym jako nowy wektor, prostopadły do płaszczyzny dwóch danych wektorów. Rozważania te tworzą arytmetyczną podstawę teorii wektorów. Nie będziemy się tutaj zajmowali tą teorią, a wskażemy tylko na związek tych pojęć z pojęciem zwyczajnej liczby zespolonej (dwujednostkowej). Otóż specjalnymi przypadkami kwaternionów są:

1° liczba rzeczywista  $a_0$ , jeżeli  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ;

2° wektor  $a_1 i + a_2 j + a_3 k$  w przestrzeni trójwymiarowej, jeżeli  $a_0 = 0$ ;

3° wektor  $a_2 j + a_3 k$  na płaszczyźnie, jeżeli  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 0$  i podobnie  $a_1 i + a_3 k$ ,  $a_1 i + a_2 j$ ;

4° liczba zespolona  $a_0 + a_1 i$ , jeżeli  $a_2 = a_3 = 0$ .

Widzimy stąd, że zupełnie co innego oznaczają wektor na płaszczyźnie, a co innego liczba zespolona. Mają one wprawdzie te same prawa dodawania, lecz różne zupełnie prawa mnożenia. Iloczynem dwóch liczb zespolonych jest liczba, mająca swój obraz w tej samej płaszczyźnie, podczas gdy iloczyn dwóch wektorów, leżących na tej samej płaszczyźnie, składa się z części skalarnej i z części wektorjalnej, którą przedstawia wektor, *prostopadły* do danej płaszczyzny.

---



## Alfabetyczny spis rzeczy.

- Abakanowicz 117.  
 addytywność całki 68, 218, 226.  
 Archimedes'a spiralna 130, 138, 155.  
 argument liczby zespolonej 301.
- Błąd w obliczaniu całki metodą przybliżoną 119—121, 130, 269—270.  
 błąd w obliczaniu  $n!$  wzorem Stirlinga 96.  
 Bugajewa wzór 268.  
 Burkhardt 140.
- Całka Dirichlet'a 274; dwumienna 46, 59; eliptyczna 59, 139; Eulera 111, 265, 266; funkcji cyklotomicznej 26; f. nieciągłej 104—105; f. odwrotnej 28; f. trygonometrycznej 6, 27; f. wykładniczej 6; f. wymiernej 29—43; krzywolinjowa 183, 187; Laplace'a 112—114, 263; logarytmu 12; nieoznaczona 2; niewłaściwa 106—107, 261—262;  $n$ -krotna 276; oznaczona 65; podwójna po obszarze 226; podwójna po prostokącie 217, 220; potęg 5; potrójna 270, 271; powierzchniowa 288; sumy 9—10, 78; uogólniona 104; wielomianu 10; zorjentowana 288.
- Całkowanie całki według parametru 207, 212; funkcji wymiernych 29—43; f. złożonych w sposób wymierny z funkcji niewymiernych 44 i nast.; f. złożonych w sposób wymierny z f. trygonometrycznych 24, 27, 53 i nast.; graficzne 114—117; liczbowe (numeryczne) przybliżone 117 i nast., 266 i nast.; mechaniczne 117, 131; przez części 11—12, 81; przez podstawienie 15 i nast., 82; przez rozkład 9—10; różniczki zupełnej 246.
- Cauchy'ego-Riemanna równania 249.  
 Cavalieri'ego twierdzenie 148.  
 Claudel 152.  
 cosinusy (dostawy) kierunkowe 141—142.  
 Courant 294.  
 cykloida 89—90, 137.  
 Czebyszew 46, 125.
- Dirichlet'a całka 274.  
 długość łuku zob. łuk.  
 droga jako funkcja pierwotna 4.
- droga przy spadaniu z uwzględnieniem oporu 20—21.
- Eksces sferyczny 260.  
 element łuku 135, 136, 141.  
   " pola 238.  
 elipsa (pole) 86, (łuk) 139, (moment bezwładności) 174.  
 elipsoida obrotowa 154—155.  
   " trójosiowa 149, 235.  
 eliptyczna całka 59, 139.  
   " funkcja 139.  
 energia 196, 248.  
 entropia 197, 248.  
 Eulera całki 111, 265, 266.  
   " podstawienia 47—51.  
 ewoluta 143—144.  
 ewolwenta 145—147.  
   " koła 129, 146.
- Funkcja eliptyczna 139.  
   " hiperboliczna 89.  
   " pierwotna 1, 2, 74—75.  
   " podcałkowa 2, 65.  
   " zmiennej zespolonej 199, 249.
- Galle 117, 131.  
 Gauss 125.  
 Gaussa płaszczyzna 198, 300.  
   " wzór 293  
 gęstość linjowa 157.  
   " objętościowa 277.  
   " powierzchniowa 159.
- Gołąb 117.  
 Goursat 252.  
 graficzne całkowanie 114—117.  
 granice całkowania 65, 227, 272.  
 Greena twierdzenie 293.  
 Greena-Riemanna twierdzenie 243.  
 Guldina reguły 167.
- Hiperboli równobocznej pole 87.  
 Hütte 139.
- Iloczyn liczb zespolonych 295 i nast.  
   " kwaternionów 303.  
   " skalarny 303.  
   " wektorjalny 303.

- integral 117.  
 Jahnke 139.  
 jakobian 261, 273.  
 jednostajna zbieżność całki 210.  
 jednostka urojona 296.  
 Kardioida 155.  
 Kepler 152.  
 kierunkowe cosinusy styczney 141.  
 koło rozpedowe 168, 178.  
 komplanacja powierzchni 288, 257.  
 Kowalewski 125.  
 König 125.  
 krzywizna linii 143.  
 kula *n*-wymiarowa 276.  
 kwaternjony 303.  
 Lagrange'a wzór interpolacyjny 34.  
 Laplace'a całka 112—114, 263.  
     "    "    równanie 249, 285.  
 Lebesgue 104.  
 Leibniza wzór na pole wycinka 128.  
     "    "    reguła różniczkowania całki wed-  
     "    "    ług parametru 203, 205, 213.  
 lemniskata 130, 140, 155.  
 Lévy 140.  
 liczbowe całkowanie przybliżone 117 i nast.,  
     266 i nast.  
 liczby urojone 297.  
     "    zespolone 31, 199, 295 i nast.  
     "    "    sprężone 31, 297.  
 linja całkowa 115.  
     "    łańcuchowa 137, 155.  
     "    śrubowa 188.  
 łuk (długość) 133 i nast.; (element) 135, 136.  
 Mansion 264.  
 masa 277, 278, 281.  
 mechaniczna konstrukcja ewolwenty 143.  
 mechaniczne całkowanie zob. całkowanie  
 mechaniczne.  
 metoda porównywania współczynników przy  
 rozkładzie na ułamki częściowe 36.  
 Moivre'a wzór 303.  
 moment bezwładności bryły 177, 279.  
     "    "    elipsy 174.  
     "    "    koła 171, 175.  
     "    "    kuli 178, 284.  
     "    "    łuku 169.  
     "    "    powierzchni obroto-  
     "    "    wej 177.  
     "    "    powierzchni płaskiej  
     "    "    173, 176, 198, 280.  
     "    "    pręta 170.  
     "    "    punktu 156, 278.  
     "    "    trawersu 172.  
     "    "    trójkąta 173.  
     "    "    walca 177.  
     "    "    wieńca koła rozpe-  
     "    "    dowego 178.  
     "    "    wycinka 176.  
 moment statyczny bryły 279.  
 moment statyczny elipsy 161.  
     "    "    linji łańcuchowej 159.  
     "    "    łuku 157—159.  
     "    "    półkoła 158, 161,  
     "    "    powierzchni płaskiej  
     "    "    161, 198, 280.  
     "    "    prostokąta 160.  
     "    "    punktu 156, 278.  
 moment stopnia dowolnego 156.  
 Natężenie prądu elektrycznego zmiennego  
 91.  
 natężenie światła 90.  
 Newtona prawo przyciągania 196, 283.  
 nierówność Schwarza 80.  
 niezależność całki krzywoliniowej od dro-  
 gi 243 i nast.  
 Objętość beczki 150—152; bryły 148, 223,  
 230, 273; bryły obrotowej 148, 167, 192;  
 elipsoidy 149, 150, 235; kuli 274; od-  
 cinka paraboloidy eliptycznej 149; ogra-  
 niczona z jednej strony paraboloidą eli-  
 ptyczną 236, hiperboliczną 223, 233; pro-  
 stopadłościannu ściętego 224; stożka 148,  
 150.  
 obręcz kołowa 168.  
 obszar regularny 225.  
 odwzorowanie 199.  
     "    "    wiernopowierzchniowe 253.  
 okna Viviani'ego 240, 255.  
 Oughtred'a wzór 150.  
 Para liczb 295.  
 parabola 85, 137.  
 paraboloida eliptyczna 149, 236.  
     "    "    hiperboliczna 223, 233, 258.  
 planimetr 131—133.  
 płaszczyzna liczbowa 198, 300.  
 Pogorzelski 294.  
 Poisson'a równanie 285.  
 pole elipsoidy obrotowej 154, 155; figury  
 płaskiej 61—64, 66, 70—71, 191, 192, 228,  
 252; grawitacyjne 284; ograniczone lemnis-  
 katą 130, łukiem cycloidy 89, elipsy 86,  
 hiperboli równobocznej 87—88, paraboli  
 85; paraboloidy hiperbolicznej 258; po-  
 wierzchni 237, 256—257; powierzchni  
 obrotowej 152 i nast.; powierzchni śru-  
 bowej 258; trójkąta 84—85; trójkąta sfe-  
 rycznego prostokątnego 259—260; wy-  
 cinka 126—129; wycinka ograniczonego  
 linją rozwijającą koła 129; wycinka pier-  
 ścięcia kołowego 254; wycinka spiralnej  
 Archimedesesa 130; wyrażone przy po-  
 mocy całki 66, 70—71.  
 potencjał 248, 285.  
 praca 178, 179, 193, 194.  
 prąd skuteczny 91.  
 prędkość  $\dot{\varphi}$ , 19—20.  
 przybliżone całkowanie liczbowe całek po-  
 dwójnych 266 i nast.

przybliżone całkowanie liczbowe całek pojedynczych 117—125; metodą Gaussa i Czebyszewa 125; metodą łuków parabolicznych (Simpsona) 122; metodą prostokątów 117—120; metodą trapezów 120—122.

Rachunek całkowity 3.  
ramię bezwładności 172.  
reakcja dwumolekularna 41—43.  
redukcyjne wzory 13—15, 21—22, 28, 92, 111.  
reguła Guldina 166.  
Leibniza 203, 205, 213.  
rektyfikacja krzywych 136.  
Riemann 104, 249.  
Robinson 125.  
Rothe 133  
rozkład wielomianu na czynniki pierwiastkowe 30—31.  
rozkład funkcji ułamkowych na ułamki częściowe 32—38.  
równania różniczkowe Cauchy-Riemanna 249; równanie różniczkowe Laplace'a 249, 285; Poisson'a 285.  
równoległe krzywe 146—147.  
różniczka łuku 135.  
    "    zupełna 245—248.  
różniczkowanie całki według parametru 203, 205, 213.  
Runge 117, 125, 270.  
Ruziewicz 30.

Saks 104.  
Schwarza nierówność 80.  
Serret 97.  
Simpsona wzór na obliczanie objętości 150.  
    całki 122 i nast., 269.  
skalarna część kwaterniona 303.  
skalarny iloczyn wektorów 303.  
sklepienie klasztorne i krzyżowe 235.  
spiralna Archimedes'a 130, 155.  
    "    logarytmiczna 138.  
średnia arytmetyczna ważona 72, 163.  
    "    kwadratowa 68, 91.  
    "    "    prądu zob. prąd skuteczny.  
    wartość funkcji 67, 100, 151, 218, 229, 273.  
średnie natężenie światła 90.  
    "    wzniesienie powierzchni 233.  
środek ciężkości bryły 280; dwu i n-punktów 162—163; łuku 163; odcinka paraboli 166; pola 163, 281; półkola 165—166; półkuli 282; wycinka koła 282.  
stała całkowania 2.  
    "    gravitacyjna 283.  
    "    planimetru 131.  
Stirlinga szereg 97.  
    "    wzór 94, 97.

Sternberg 286.  
Stokes'a wzór 292.  
stosunek zniekształcenia powierzchni 253.  
stożek 148, 150.  
    "    eliptyczny 239.  
suma dolna 64, 219, 270.  
    "    górną 76, 219, 270.

Torus 168.  
trajektorja ortogonalna 146.  
trawersy 172.  
trójkąt 84.  
    "    sferyczny 259.  
twierdzenie Cavalieri'ego 148; Gaussa 293; Green'a 293; Green'a-Riemanna 243; o wartości średniej 67, 217, 229, 271; o wartości średniej rozszerzone 79; Stokes'a 292.

Ułamki częściowe 32.  
uogólniona całka 104.  
urojona jednostka 296.

Vallée Poussin 104.  
Viviani'ego okna 240, 255.

Wagi wartości funkcji 72.  
walec 177, 281.  
Wallisa wzór 98.  
Wangerin 286.  
wartość bezwzględna liczby zespolonej 300.  
    "    średnia zob. średnia wartość.  
wektor 303.  
wektorjalna część kwaterniona 303.  
wektorjalny iloczyn 303.  
Whittaker 125.  
wieniec koła rozpędowego 168, 178.  
Willers 270.  
Wooley'a wzory 269.  
wprowadzenie nowych zmiennych w całkę 15 i nast., 82, 250 i nast., 273.  
wzór Bugajewa 268; Gaussa 293; Green'a 293; Mansion'a 269; Oughtred'a 150; Simpsona 122 i nast., 150, 269; Stirlinga 94, 97; Stokes'a 292; Wallisa 93; Wooley'a 269.  
wzory redukcyjne, zob. redukcyjne wzory.  
wzory Newtona-Cotesa 125.

Zbieżność całki niewłaściwej 108, 210.  
    "    jednostajna całki niewłaściwej 210.  
zespolone liczby 31, 295 i nast.  
zmiana porządku całkowania 207, 222, 228, 272.  
zmiana zmiennych zob. wprowadzenie nowych zmiennych.  
zniekształcenie powierzchni 253.  
związek całki nieoznaczonej z oznaczoną 74.

Żyliński 30.

# Spis rzeczy.

## CZĘŚĆ IV.

### Rozdział XVII.

#### O całkach nieoznaczonych.

	Str.
§ 203. Definicja całki nieoznaczonej . . . . .	1
§ 204. Odwrócenia specjalnych wzorów rachunku różniczkowego . . . . .	4
§ 205. Odwrócenia niektórych ogólnych wzorów rachunku różniczkowego . . . . .	8
§ 206. Całkowanie „przez części“ (per partes) . . . . .	11
§ 207. Całkowanie przez podstawienie . . . . .	15
§ 208. Całkowanie funkcyj wymiernych. Rozkład funkcji ułamkowej na ułamki proste . . . . .	29
§ 209. Całkowanie niektórych funkcyj niewymiernych algebraicznych . . . . .	43
§ 210. Całkowanie funkcyj, złożonych w sposób wymierny z funkcyj trygonometrycznych . . . . .	53

### Rozdział XVIII.

#### O całkach oznaczonych.

§ 211. Definicja pola figury płaskiej . . . . .	61
§ 212. Definicja całki oznaczonej . . . . .	64
§ 213. Twierdzenie o wartości średniej dla całki oznaczonej . . . . .	67
§ 214. Addytywność całki oznaczonej . . . . .	68
§ 215. Całka oznaczona jako funkcja swej górnej granicy. Związek całki oznaczonej z funkcji ciągłej z całką nieoznaczoną . . . . .	72
§ 216. Obliczanie całki oznaczonej przy pomocy całki nieoznaczonej . . . . .	74
§ 217. Wylączanie stałego czynnika przed całkę oznaczoną. Całka oznaczona z sumy . . . . .	77
§ 218. Całkowanie przez części (per partes) całek oznaczonych . . . . .	81
§ 219. Całkowanie przez podstawienie w całkach oznaczonych . . . . .	82
§ 220. Przykłady obliczania całek oznaczonych . . . . .	83
§ 221. Wzory Wallisa i Stirlinga . . . . .	92
§ 222. O ciągach, dążących do całki oznaczonej . . . . .	97
§ 223. Całki uogólnione . . . . .	103
§ 224. Całki niewłaściwe . . . . .	106
§ 225. Całkowanie graficzne . . . . .	114
§ 226. Całkowanie przybliżone liczbowe (numeryczne) . . . . .	117

## Rozdział XIX.

## Zastosowania całek oznaczonych do geometrii i do mechaniki.

✓ § 227. Pola wycinków . . . . .	126
§ 228. Planimetr biegunowy . . . . .	131
§ 229. Długość łuku . . . . .	133
§ 230. Zastosowania wzorów na długość łuku w geometrii różniczkowej płaskiej	140
§ 231. Obliczanie objętości przy pomocy całki pojedynczej . . . . .	147
§ 232. Pole powierzchni obrotowej . . . . .	152
✓ § 233. Moment statyczny łuku . . . . .	156
✓ § 234. Moment statyczny powierzchni płaskiej . . . . .	159
✓ § 235. Środek ciężkości czyli środek masy . . . . .	162
§ 236. Reguły Guldina . . . . .	166
✓ § 237. Moment bezwładności łuku . . . . .	168
✓ § 238. Momenty bezwładności płaskiej powierzchni względem osi . . . . .	171
✓ § 239. Moment " " " " punktu . . . . .	175
✓ § 240. Moment bezwładności powierzchni obrotowej i bryły obrotowej względem osi obrotu . . . . .	177
§ 241. Praca siły, działającej w kierunku drogi . . . . .	178

## Rozdział XX.

## Całki z funkcj dwóch i więcej zmiennych.

## Ustęp I. Całki krzywoliniowe.

§ 242. Całki krzywoliniowe . . . . .	182
§ 243. Całki krzywoliniowe w zagadnieniach geometrycznych . . . . .	190
§ 244. Zastosowanie całek krzywoliniowych w fizyce . . . . .	193
§ 245. Zastosowanie całek krzywoliniowych w teorii funkcj zmiennej zespolonej	198

## Ustęp II. Różniczkowanie i całkowanie całek według parametru.

§ 246. Całki pojedyncze z funkcj dwóch zmiennych niezależnych . . . . .	200
§ 247. Różniczkowanie całek właściwych według parametru . . . . .	203
§ 248. Całkowanie całek właściwych według parametru . . . . .	206
§ 249. Różniczkowanie i całkowanie całek niewłaściwych według parametru . . . . .	208

## Ustęp III. Całki podwójne.

§ 250. Całka podwójna po prostokącie . . . . .	216
§ 251. Sumowa definicja całki podwójnej o stałych granicach . . . . .	218
§ 252. Związek całki podwójnej z objętością . . . . .	222
§ 253. Całki podwójne po dowolnych obszarach (w zmiennych granicach całkowania) . . . . .	225
§ 254. Przykłady całek podwójnych po dowolnych obszarach . . . . .	231
§ 255. Pole powierzchni. (Komplanacja powierzchni) . . . . .	237
§ 256. Związek całki podwójnej z całką krzywoliniową. Twierdzenie Greena-Riemanna . . . . .	241
§ 257. Zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna do badania całek krzywoliniowych i różniczek zupełnych . . . . .	243

	str.
§ 258. Wprowadzenie nowych zmiennych w całkę podwójną . . . . .	250 ✓
§ 259. Całki podwójne niewłaściwe . . . . .	261
§ 260. Przybliżone metody obliczania całek podwójnych . . . . .	266

#### Ustęp IV Całki potrójne, wielokrotne i powierzchniowe.

§ 261. O całkach potrójnych i wielokrotnych . . . . .	270 ✓
§ 262. Zastosowanie całek podwójnych i potrójnych do obliczania mas i momentów	277
§ 263. Potencjał . . . . .	283
§ 264. Całki powierzchniowe . . . . .	287 ✓
§ 265. Związek całki powierzchniowej z całką krzywoliniową przestrzenną . . . . .	290
§ 266. Twierdzenie Gaussa i twierdzenie Greena dla przestrzeni trójwymiarowej . . . . .	293

#### Nota.

O liczbach zespolonych . . . . .	295
----------------------------------	-----

