

DR. MARCIN ERNST  
PROFESOR ASTRONOMJI UNIwersYTETU JANA KAZIMIERZA  
WE LWOWIE.

# TEORJA ZAĆMIENÍ I ZJAWISK POKREWNYCH

Z 26 RYSUNKAMI W TEKŚCIE.



WYDAWNICTWO KASY IM. MIANOWSKIEGO.  
WARSZAWA. PAŁAC STASZICA.

1 9 3 6



**Egz. Archiwalny**

## PRZEDMOWA.

W przedmowie do swego podręcznika *Astronomji Sferycznej*, wydanego w r. 1928, ś. p. Prof. Marcin Ernst wyraził nadzieję, że opuszczony ze względów technicznych w tym kursie rozdział o zjawiskach zaćmieniowych będzie wydany później, jako oddzielna książka. Niestety, nadzieja ta ziściła się dopiero po śmierci Autora.

Na treść opuszczonego rozdziału, p. t. „Teorja zaćmień i zjawisk pokrewnych“, uporządkowanego przez p. A. Stachy'ego, składa się całokształt teorji zaćmień i zjawisk pokrewnych, zachodzących w naszym układzie planetarnym, a więc zaćmień Słońca i Księżycy, zakryć gwiazd przez Księżyc i planety, widocznych z Ziemi, oraz zaćmień w układach innych planet; wszystko to jest ujęte w najbardziej ogólnej matematycznej formie.

Wzory ogólne są następnie sprowadzane do postaci, nadającej się do zastosowań praktycznych, skutkiem czego podręcznik niniejszy stanowić może nie tylko bogaty materiał dla studjujących oraz chcących pogłębić tę dziedzinę astronomji, lecz i do podręcznego użytku astronomów przy obliczaniu momentów zaćmień oraz przebiegu tych zjawisk na powierzchni Ziemi.

Kasa im. Mianowskiego, podejmując wydanie tego podręcznika, nie tylko uczciła pamięć ś. p. Prof. Marcina Ernsta, wieloletniego pedagoga i zasłużonego uczonego, lecz i przyczyniła się do wzbogacenia polskiej literatury astronomicznej tak cennym nabytkiem jakim jest „Teorja zaćmień i zjawisk pokrewnych“.

*Prof. Michał Kamiński*

Dyrektor Obserwatorium Astronomicznego  
Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego  
w Warszawie

Warszawa, 19 listopada 1935.



## ROZDZIAŁ I.

### KLASYFIKACJA I OGÓLNA TEORJA ZJAWISK.

1. Określenie najogólniejsze zjawisk zaćmieniowych i ich podział. *Zaćmieniami* w znaczeniu najogólniejszym nazywać będziemy wszystkie te zjawiska, gdy jakieś ciało niebieskie częściowo lub w całości na pewien czas pogrąży się w cieniu, rzucanym przez inne jakieś ciało niebieskie. Przy zaćmieniu zatem wchodzą w rachubę zawsze przynajmniej trzy ciała niebieskie, mianowicie: 1. ciało niebieskie, które jest źródłem światła, 2. ciało niebieskie, rzucające cień i 3. ciało niebieskie, pogrążające się w cieniu. Oczywiście prócz tego znaczenie pierwszorzędne ma stanowisko obserwatora, który zjawisko zaćmienia ogląda. W praktyce zachodzić tu mogą trzy różne przypadki: 1. obserwator znajduje się na ciele, rzucającem cień, 2. obserwator znajduje się na ciele, pogrążonem w cieniu i 3. obserwator nie znajduje się na żadnym z wymienionych ciał.

Ograniczamy się do przypadku, gdy stanowiskiem obserwatora jest Ziemia i bierzemy pod uwagę tylko te zjawiska, w których ciałami zasłaniającemi są ciała naszego układu słonecznego, t. j. pomijamy np. zjawiska, zachodzące w układach gwiazd podwójnych tego rodzaju, jak gwiazdy zmienne typu Algola.

Klasyfikację zjawisk zaćmieniowych możemy oprzeć na roli, którą w zjawisku odgrywa Ziemia.

I. Ziemia jest ciałem zasłaniającem.

1. Zaćmienia Księżycy.

II. Ziemia jest pogrążona w cieniu.

2. Zaćmienia Słońca.

3. Przejęcia planet dolnych przez tarczę Słońca.



4. Pokrycia gwiazd, planet lub ich księżyców przez Księżyc lub przez planety.
  5. Przejścia księżyców planet przez tarczę planety.
- III. Ziemia znajduje się nazewnątrz cienia.
6. Zaćmienia księżyców planet przez ich planety lub też przez inne księżyce układu.
  7. Przejścia cienia księżyca przez tarczę planety.

Dokładne zbadanie przebiegu każdego z tych zjawisk wymaga dokładnego określenia elementów, od których zjawiska zależą, oraz określenia sposobu ich zmian. Do podstawowych elementów należą te wielkości, które określają kształt i rozmiary tej przestrzeni, do której promienie źródła światła nie dochodzą wcale albo też dochodzą tylko częściowo wskutek tego, że na drodze swej natrafiają na inne ciało. Przestrzeń, do której promienie źródła światła wcale nie dochodzą, nazywać będziemy *przestrzenią pełnego cienia*, przestrzeń zaś, do której promienie światła dochodzą tylko częściowo, nazywać będziemy *przestrzenią półcienia*. Oczywiście kształt tych przestrzeni zależy od kształtu źródła światła oraz ciała zasłaniającego. Zajmijmy się ogólnie wyznaczeniem kształtu powierzchni, ograniczających te dwie przestrzenie.

**2. Równanie powierzchni, ograniczających przestrzeń pełnego cienia i półcienia.** Niech będzie  $(x, y, z)$  dowolny układ współrzędnych prostokątnych i dane są dwa ciała, ograniczone krzywymi powierzchniami, których równania są

$$F_1(x, y, z) = 0$$

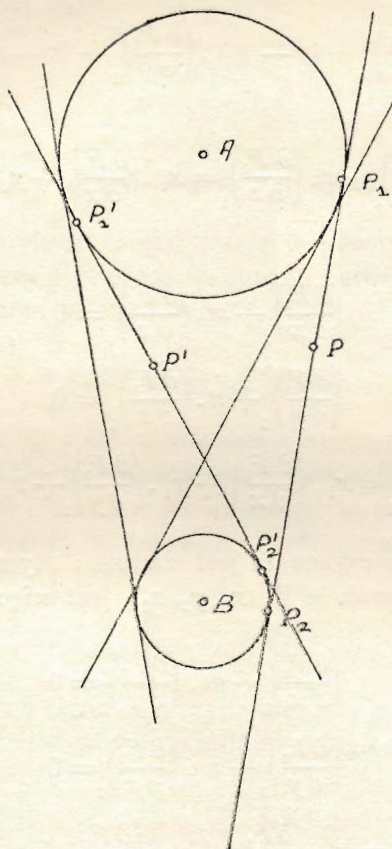
i

$$F_2(x, y, z) = 0.$$

Przypuśćmy, że jedno z tych ciał świeci, drugie zaś jest ciemne, i że należy znaleźć równanie powierzchni, ograniczających przestrzeń cienia i półcienia, rzucanego przez ciało ciemne. Załóżmy, że promienie światła nie doznają zbieżności od linii prostej także i wtedy, gdy są styczne do powierzchni ciała ciemnego; styczne te stanowią granice poszukiwanych przestrzeni.

Niechaj będzie  $P$  jakimś punktem tej powierzchni granicznej. Gdy przez ten punkt poprowadzimy płaszczyznę styczną do powierzchni cienia, to jest ona zarazem styczną do powierzchni  $F_1 = 0$  i  $F_2 = 0$ . Niechaj będą  $P_1$  i  $P_2$  odpowiednio punkty styczności tej płaszczyzny z wspomnianymi powierzchniami, to  $P_1, P_2$ , i  $P$  leżą na jednej linii

prostej. Uwagi powyższe dotyczą tak samo powierzchni pełnego cienia, jak i powierzchni półcienia z tą różnicą, że w przypadku pełnego cienia punkty  $P_1$  i  $P_2$  leżą po tej samej stronie powierzchni  $F_1=0$  i  $F_2=0$  (rys. 1), a w przypadku półcienia po przeciwnej.



Rys. 1.

chodzi o wyprowadzenie równania powierzchni granicznej, postępowanie w obu wypadkach jest jednakowe i niema potrzeby traktować każdego z nich oddzielnie.

Niech będzie ogólnie

$$z = m \cdot x + n \cdot y + p \quad (1)$$

równanie płaszczyzny, przechodzącej przez dowolny punkt  $P$  po powierzchni cienia. Jeżeli płaszczyzna ta jest styczna do powierzchni



$F_1(x, y, z) = 0$  i do  $F_2(x, y, z) = 0$  odpowiednio w punktach  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , to parametry  $m$ ,  $n$  i  $p$  mają w równaniu tej płaszczyzny stycznej wartości ściśle określone. Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni  $F_1(x, y, z) = 0$  w punkcie  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  ma postać

$$(x - x_1) \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 + (y - y_1) \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 + (z - z_1) \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 = 0 \quad (2)$$

albo

$$x \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 + y \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 + z \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 = x_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 + y_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 + z_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1.$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 + m \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 &= 0, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 + n \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 = x_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 + y_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 + z_1 \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1.$$

Ponieważ płaszczyzna ta jest zarazem styczna do powierzchni  $F_2(x, y, z) = 0$  w punkcie  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , jest więc także

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_2 + m \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_2 &= 0 \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_2 + n \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$p \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_2 = x_2 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_2 + y_2 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_2 + z_2 \cdot \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)_2.$$

Prócz tego oczywiście spełnione są równania

$$\begin{aligned} F_1(x_1, y_1, z_1) &= 0 \\ F_2(x_2, y_2, z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Gdy więc wartości  $x_1, y_1, z_1$ , wypływające z równań (3) podstawimy do pierwszego z równań (5), a wartości  $x_2, y_2, z_2$ , wypływające z równań (4), wprowadzimy do drugiego z równań (5), to otrzymamy dwa równania pomiędzy zmiennymi parametrami  $m, n$  i  $p$ .



Tak określone parametry  $m$ ,  $n$ ,  $p$  wyznaczają ogół płaszczyzn, stycznych równocześnie do powierzchni  $F_1(x, y, z) = 0$  i  $F_2(x, y, z) = 0$ . Z równań wyżej otrzymanych możemy wyrazić dwa z nich jako funkcje trzeciego i niechaj będzie

$$\begin{aligned} m &= g_1(n), \\ v &= g_2(n), \end{aligned}$$

to równanie

$$z = g_1(n) \cdot x + n \cdot y + g_2(n), \quad (6)$$

w którym  $n$  zmienia się w sposób ciągły w pewnym zakresie, przedstawia ogół płaszczyzn stycznych do danych powierzchni jednocześnie. Różniczkując względem  $n$ , otrzymujemy także

$$0 = g'_1(n) \cdot x + y + g'_2(n). \quad (7)$$

Gdy z równań (6) i (7) wyrugujemy  $n$ , to otrzymamy związek pomiędzy  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , który jest równaniem powierzchni, mającej tę własność, że płaszczyzna styczna w jakimkolwiek jej punkcie jest zarazem styczną do powierzchni  $F_1(x, y, z) = 0$  i do powierzchni  $F_2(x, y, z) = 0$ . Równanie to oznaczmy przez

$$F(x, y, z) = 0.$$

**3. Powierzchnia cienia w przypadku, gdy powierzchnie  $F_1 = 0$  i  $F_2 = 0$  są dowolnymi powierzchniami drugiego rzędu.** Najogólniejszy przypadek, zachodzący w teorii zaćmień, jest ten, że ciało, będące źródłem światła, oraz ciało, rzucające cień, są sferoidami obrotowymi, których małe osie mają w przestrzeni różne kierunki. Jednakże, stosując wzory poprzedniego ustępu, możemy przyjąć założenie ogólniejsze, że powierzchnie obu ciał, wchodzących w rachubę, są dowolnymi powierzchniami drugiego rzędu, co zbyt wiele pracy nie przysporzy.

Równania tych powierzchni, odniesione do danego układu współrzędnych  $(x, y, z)$ , niechaj będą:

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + 2d_1xz + 2e_1yz + \\ &\quad + f_1z^2 + 2g_1x + 2h_1y + 2j_1z + k_1 = 0, \\ F_2 &= a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 + 2d_2xz + 2e_2yz + \\ &\quad + f_2z^2 + 2g_2x + 2h_2y + 2j_2z + k_2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

a równanie płaszczyzny stycznej do obu tych powierzchni niech będzie

$$z = m \cdot x + n \cdot y + p. \quad (9)$$

Jeżeli  $x_1, y_1, z_1$  są współrzędnymi punktu, w którym płaszczyzna (9) styka się z powierzchnią  $F_1 = 0$ , to zachodzą warunki (3). W danym przypadku jest

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_1 &= 2a_1x_1 + 2b_1y_1 + 2d_1z_1 + 2g_1, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_1 &= 2b_1x_1 + 2c_1y_1 + 2e_1z_1 + 2h_1, \\ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)_1 &= 2d_1x_1 + 2e_1y_1 + 2f_1z_1 + 2j_1; \end{aligned} \quad (10)$$

a więc dla wyznaczenia  $m$  i  $n$  otrzymuje się wzory

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1y_1 + d_1z_1 + g_1 + m \cdot (d_1x_1 + e_1y_1 + f_1z_1 + j_1) &= 0, \\ b_1x_1 + c_1y_1 + e_1z_1 + h_1 + n \cdot (d_1x_1 + e_1y_1 + f_1z_1 + j_1) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Zamiast wzoru na  $p$  według (3), znajdujemy  $p$  z równania (9), które spełnione jest dla  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ . Mamy zatem oprócz (11) dwa równania następujące:

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + 2b_1x_1y_1 + c_1y_1^2 + 2d_1x_1z_1 + 2e_1y_1z_1 + \\ + f_1z_1^2 + 2g_1x_1 + 2h_1y_1 + 2j_1z_1 + k_1 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$z_1 = m \cdot x_1 + n \cdot y_1 + p.$$

Z równań (11) i (12) redukujemy  $x_1, y_1, z_1$ . W tym celu podstawiamy wartość  $z_1$  według drugiego z równań (12) w trzech pozostałych równaniach i otrzymujemy z pierwszego z równań (12)

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F_1 = 0, \quad (13)$$

a z równań (11)

$$\begin{aligned} A_1x_1 + B_1y_1 + D_1 &= 0, \\ B_1x_1 + C_1y_1 + E_1 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

W równaniach tych, jak łatwo sprawdzić, znaczenie współczynników jest następujące:



$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_1 + 2 \cdot d_1 \cdot m + f_1 \cdot m^2 \\
 C_1 &= c_1 + 2 \cdot e_1 \cdot n + f_1 \cdot n^2 \\
 F_1 &= k_1 + 2 \cdot j_1 \cdot p + f_1 \cdot p^2 \\
 B_1 &= b_1 + e_1 \cdot m + d_1 \cdot n + f_1 \cdot m \cdot n \\
 D_1 &= g_1 + j_1 \cdot m + d_1 \cdot p + f_1 \cdot m \cdot p \\
 E_1 &= h_1 + j_1 \cdot n + e_1 \cdot p + f_1 \cdot n \cdot p.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Celem wyrugowania  $x_1$  i  $y_1$  z równań (13) i (14), zastąpimy równanie (13) innem, tej samej postaci co równania (14). Gdy mianowicie pierwsze z równań (14) pomnożymy przez  $x_1$ , drugie zaś przez  $y_1$  i dodamy do siebie, to otrzymamy

$$A_1 x_1^2 + 2 B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 = 0.$$

Opuszczając więc w równaniu (13) wyrazy, stojące po lewej stronie równania, znajdziemy

$$D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 = 0. \tag{16}$$

Przez wyrugowanie  $x_1$  i  $y_1$  z równań (14) i (16), znajdujemy następujący związek między współczynnikami

$$(A_1 C_1 - B_1^2) \cdot (A_1 F_1 - D_1^2) = (A_1 E_1 - B_1 D_1)^2,$$

albo po uproszczeniu

$$A_1 \cdot (C_1 F_1 - E_1^2) = B_1 \cdot (B_1 F_1 - D_1 E_1) + D_1 \cdot (C_1 D_1 - B_1 E_1). \tag{17}$$

Podstawiając tu wartości współczynników według wzorów (15), znajdujemy poszukiwany związek między parametrami  $m, n, p$ , a mianowicie:

$$\begin{aligned}
 M_1' \cdot m^2 - 2 \cdot (Q_1 n + Q_1' \cdot p + M_1) \cdot m = N_1' \cdot n^2 + \\
 + 2 \cdot Q_1'' \cdot n \cdot p + P_1' \cdot p^2 + 2 \cdot N_1 \cdot n + 2 \cdot P_1 \cdot p + R_1.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Spółczynniki mają tu wartości następujące:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= b_1 \cdot \beta_1 - d_1 \cdot \alpha_1 + g_1 \cdot \gamma_1 \\
 N_1 &= -a_1 \cdot \beta_1 + d_1 \cdot \lambda_1 - g_1 \cdot \varepsilon_1 \\
 P_1 &= -a_1 \cdot \gamma_1 + b_1 \cdot \varepsilon_1 + d_1 \cdot \tau_1 \\
 Q_1 &= -d_1 \cdot \beta_1 + f_1 \cdot \lambda_1 - j_1 \cdot \varepsilon_1 \\
 Q_1'' &= b_1 \cdot \pi_1 - \varepsilon_1 \cdot \nu_1 + h_1 \cdot \sigma_1 \\
 M_1' &= -e_1 \cdot \beta_1 + f_1 \cdot \alpha_1 - j_1 \cdot \gamma_1 \\
 N_1' &= -a_1 \cdot \delta_1 + d_1 \cdot \mu_1 - g_1 \cdot \pi_1 \\
 P_1' &= -a_1 \cdot \alpha_1 + b_1 \cdot \rho_1 + d_1 \cdot \varphi_1 \\
 Q_1' &= -d_1 \cdot \gamma_1 + e_1 \cdot \varepsilon_1 + f_1 \cdot \tau_1 \\
 R_1 &= -a_1 \cdot \alpha_1 + b_1 \cdot \lambda_1 + g_1 \cdot \tau_1,
 \end{aligned} \tag{19}$$



gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= c_1 \cdot k_1 - h_1^2 \\
 \beta_1 &= e_1 \cdot k_1 - h_1 \cdot j_1 \\
 \gamma_1 &= c_1 \cdot j_1 - e_1 \cdot h_1 \\
 \delta_1 &= f_1 \cdot k_1 - j_1^2 \\
 \varepsilon_1 &= b_1 \cdot j_1 - e_1 \cdot g_1 \\
 \nu_1 &= c_1 \cdot f_1 - e_1^2 \\
 \lambda_1 &= b_1 \cdot k_1 - g_1 \cdot h_1 \\
 \mu_1 &= d_1 \cdot k_1 - g_1 \cdot j_1 \\
 \nu_1 &= a_1 \cdot j_1 - d_1 \cdot g_1 \\
 \pi_1 &= d_1 \cdot j_1 - f_1 \cdot g_1 \\
 \rho_1 &= b_1 \cdot f_1 - d_1 \cdot e_1 \\
 \sigma_1 &= a_1 \cdot f_1 - d_1^2 \\
 \tau_1 &= c_1 \cdot g_1 - b_1 \cdot h_1 \\
 \varphi_1 &= c_1 \cdot d_1 - b_1 \cdot e_1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

W sposób zupełnie podobny otrzymamy drugi związek pomiędzy  $m$ ,  $n$ ,  $p$  z warunku, że płaszczyzna (9) jest styczna do powierzchni  $F_2 = 0$  w punkcie  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , mianowicie:

$$\begin{aligned}
 M_2' \cdot m^2 - 2 \cdot (Q_2 \cdot n + Q_2' \cdot p + M_2) \cdot m = N_2' \cdot n^2 + \\
 2 \cdot Q_2'' \cdot n \cdot p + P_2' \cdot p^2 + 2 \cdot N_2 \cdot n + 2 \cdot P_2 \cdot p + R_2.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Wartość współczynników wypływa również ze wzorów (19) i (20), gdy zamiast wskaźnika 1 użyjemy wszędzie wskaźnika 2.

Z równań (18) i (21) można wyrazić  $m$  i  $n$  jako funkcje  $p$ . Jednakże postać tych funkcji w ogólnym przypadku jest bardzo skomplikowana i również rugowanie  $p$  z równań (6) i (7) jest bardzo trudne. Porzucimy więc w tym miejscu zagadnienie ogólne i przejdziemy do zagadnień specjalniejszych, z jakimi w teorii zaćmień istotnie się spotykamy.

**4. Powierzchnie cienia w przypadku, gdy ciało świecące i rzucające cień są elipsoidami obrotowymi lub kulami.** Niechaj będą  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  i  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  dwa prostokątne układy współrzędnych, których początki schodzą się ze środkiem ciała świecącego i ze środkiem ciała rzucającego cień. Niechaj będą dalej  $\bar{a}_1, \bar{b}_1$  i  $\bar{a}_2, \bar{b}_2$  odpowiednio połowy osi eliptycznych przekrojów osiowych obu ciał, spłaszczonych u biegunów. Jeżeli osi  $\zeta$  schodzą się z kierunkiem małych osi, a płaszczyzny  $(\xi, \eta)$  schodzą się z płaszczyznami równików, to równania obu elipsoid są następujące:

$$\frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{a_1^2} + \frac{\zeta_1^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{a_2^2} + \frac{\zeta_2^2}{b_2^2} = 1$$

albo, gdy położymy

$$\frac{a_1}{b_1} = \bar{\lambda}_1, \quad \frac{a_2}{b_2} = \bar{\lambda}_2, \quad (22)$$

to równania powyższe otrzymują postać

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \eta_1^2 + \bar{\lambda}_1^2 \cdot \zeta_1^2 &= \bar{a}_1^2 \\ \xi_2^2 + \eta_2^2 + \bar{\lambda}_2^2 \cdot \zeta_2^2 &= \bar{a}_2^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Gdy znane jest spłaszczenie elipsoid  $c = \frac{a-b}{a}$ , to  $\lambda = \frac{1}{1-c}$ .

Odnieśmy teraz równania obu elipsoid do wspólnego układu współrzędnych  $(x, y, z)$ ; niechaj w układzie tym współrzędne początku układu  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  mają wartości  $p_1, q_1, r_1$ , a współrzędne początku układu  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  wartości  $p_2, q_2, r_2$ . Rozumiejąc jako kąty między osiami współrzędnych kąty, zawarte między dodatnimi kierunkami tych osi, otrzymujemy wzory przejścia z układu  $(x, y, z)$  na układy  $(\xi, \eta, \zeta)$  w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (x - p_1) \cdot \cos(\xi_1 x) + (y - q_1) \cdot \cos(\xi_1 y) + (z - r_1) \cdot \cos(\xi_1 z) \\ \eta_1 &= (x - p_1) \cdot \cos(\eta_1 x) + (y - q_1) \cdot \cos(\eta_1 y) + (z - r_1) \cdot \cos(\eta_1 z) \\ \zeta_1 &= (x - p_1) \cdot \cos(\zeta_1 x) + (y - q_1) \cdot \cos(\zeta_1 y) + (z - r_1) \cdot \cos(\zeta_1 z) \end{aligned} \quad (24)$$

oraz

$$\begin{aligned} \xi_2 &= (x - p_2) \cdot \cos(\xi_2 x) + (y - q_2) \cdot \cos(\xi_2 y) + (z - r_2) \cdot \cos(\xi_2 z) \\ \eta_2 &= (x - p_2) \cdot \cos(\eta_2 x) + (y - q_2) \cdot \cos(\eta_2 y) + (z - r_2) \cdot \cos(\eta_2 z) \\ \zeta_2 &= (x - p_2) \cdot \cos(\zeta_2 x) + (y - q_2) \cdot \cos(\zeta_2 y) + (z - r_2) \cdot \cos(\zeta_2 z). \end{aligned} \quad (25)$$

Obieramy układ  $(x, y, z)$  w ten sposób, że początek jego znajduje się w początku układu  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , a oś  $z$  niech przechodzi przez początek układu  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ . Jest wtedy

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1 = r_1 = 0, \\ p_2 &= q_2 = 0, \\ r_2 &= r, \end{aligned} \quad (26)$$

w czym  $r$  oznacza w tym wypadku wzajemną odległość środków obu danych elipsoid.



Oznaczmy dalej

$$\begin{aligned}(\zeta_1 z) &= i_1, \\ (\zeta_2 z) &= i_2,\end{aligned}\tag{27}$$

i przyjmijmy jeszcze, że dodatnie kierunki osi  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  są tak określone, iż  $i_1 < 90^\circ$  oraz  $i_2 < 90^\circ$ .

Równania (23) są ważne przy dowolnym kierunku osi  $\xi_1$  i  $\xi_2$  w płaszczyznach, prostopadłych do osi  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$ . Płaszczyzny te oczywiście tworzą z płaszczyzną  $(x, y)$  odpowiednio kąty  $i_1$  i  $i_2$  oraz przecinają się z nią według pewnych linii prostych. Płaszczyzna  $(\xi_1, \eta_1)$  przecina się z płaszczyzną  $(x, y)$  według prostej, przechodzącej przez wspólny początek układów  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  i  $(x, y, z)$ . Gdy tę prostą obierzemy za oś  $\xi_1$  i za oś  $x$ , to oczywiście

$$\begin{aligned}(\xi_1 x) &= 0^\circ, & (\xi_1 y) &= 90^\circ, & (\xi_1 z) &= 90^\circ, \\ (\eta_1 x) &= 90^\circ, & (\eta_1 y) &= i_1, & (\eta_1 z) &= 90^\circ - i_1, \\ (\zeta_1 x) &= 90^\circ, & (\zeta_1 y) &= 90^\circ + i_1, & (\zeta_1 z) &= i_1.\end{aligned}\tag{28}$$

Podobnie przecina się według pewnej prostej płaszczyzna  $(\xi_2, \eta_2)$  z płaszczyzną  $[(x), (y)]$ , równoległą do płaszczyzny  $(x, y)$  i przechodzącą przez początek układu  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ ; tę prostą obieramy za oś  $\xi_2$ . Oznaczamy przez  $\psi$  (rys. 2) kąt, jaki tworzy dodatni kierunek osi  $\xi_2$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$ , a przez  $(X), (Y), (Z), (\xi_2), (\eta_2)$  i  $(\zeta_2)$  punkty, w których dodatnie kierunki osi układów  $[(x), (y), (z)]$  oraz  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  trafiają sklepienie niebieskie. Kąty  $\psi$  i  $i_2$  określają w zupełności położenie układu  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  względem układu  $[(x), (y), (z)]$ , który od układu  $(x, y, z)$  różni się tylko początkiem, ponieważ oś  $\xi_2$  przypada na prostą, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny  $[(x), (y)]$  i  $(\xi_2, \eta_2)$ . Wobec tego dostawy kierunkowe dziewięciu kątów, utworzonych przez dodatnie kierunki osi tych układów, można wyrazić jako funkcje dwóch kątów  $\psi$  i  $i_2$ , które z łatwością wyprowadzimy z rys. 2 w postaci następujących równań:

$$\begin{aligned}\cos(\xi_2 x) &= \cos \psi, & \cos(\xi_2 y) &= -\sin \psi, & \cos(\xi_2 z) &= 0, \\ \cos(\eta_2 x) &= \sin \psi \cos i_2, & \cos(\eta_2 y) &= \cos \psi \cos i_2, & \cos(\eta_2 z) &= -\sin i_2, \\ \cos(\zeta_2 x) &= \sin \psi \sin i_2, & \cos(\zeta_2 y) &= \cos \psi \sin i_2, & \cos(\zeta_2 z) &= \cos i_2.\end{aligned}\tag{29}$$

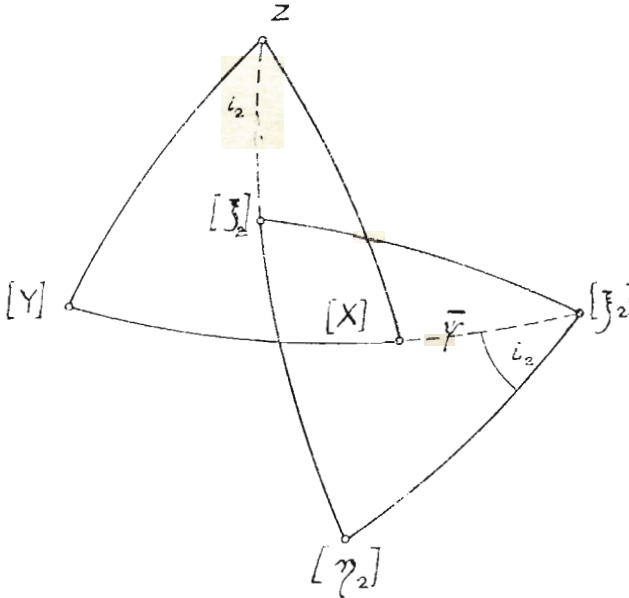
Uwzględniając wartości (28) i (29) oraz to, że początki układów  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  i  $(x, y, z)$  odległe są od siebie o  $r$ , otrzymujemy następujące wzory przejścia z układu  $(x, y, z)$  na układy  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  i  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x \\ \eta_1 &= y \cos i_1 + z \sin i_1 \\ \zeta_1 &= -y \sin i_1 + z \cos i_1\end{aligned}\tag{30}$$



ORAZ

$$\begin{aligned} \xi_2 &= x \cos \psi - y \sin \psi \\ \eta_2 &= x \sin \psi \cos i_2 + y \cos \psi \cos i_2 - (z - r) \sin i_2 \\ \zeta_2 &= x \sin \psi \sin i_2 + y \cos \psi \sin i_2 + (z - r) \cos i_2. \end{aligned} \quad (31)$$



Rys. 2.

Podstawiając te wartości w równaniach (23), otrzymujemy równania obu elipsoid, odniesionych do układu  $(xyz)$ . Oznaczmy jeszcze

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 - 1 &= \frac{\bar{a}_1^2 - \bar{b}_1^2}{\bar{b}_1^2} = \varepsilon_1^2, \\ \lambda_2^2 - 1 &= \varepsilon_2^2, \end{aligned} \quad (32)$$

to po łatwych redukcjach znajdujemy:

$$x^2 + y^2(1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i_1) + z^2(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 i_1) - 2yz\varepsilon_1^2 \sin i_1 \cos i_1 - \bar{a}_1^2 = 0 \quad (33)$$

oraz

$$\begin{aligned} x^2(1 + \varepsilon_2^2 \sin^2 i_2 \sin^2 \psi) + y^2(1 + \varepsilon_2^2 \sin^2 i_2 \cos^2 \psi) + \\ + (z - r)^2(1 + \varepsilon_2^2 \cos^2 i_2) + 2xy\varepsilon_2^2 \sin^2 i_2 \sin \psi \cos \psi + \\ + 2x(z - r)\varepsilon_2^2 \sin \psi \sin i_2 \cos i_2 + \\ + 2y(z - r)\varepsilon_2^2 \cos \psi \sin i_2 \cos i_2 - \bar{a}_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Gdy równania powyższe porównamy z równaniami ogólnymi (8), to widzimy, że równanie (34) posiada jeszcze postać najogólniejszą, ale w równaniu (33) jest

$$b_1 = d_1 = g_1 = h_1 = j_1 = 0.$$

Wskutek tego jest też

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 = \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = \tau_1 = \rho_1 = \tau_1 = \varphi_1 = 0$$

oraz

$$M_1 = P_1 = Q_1 = Q_1' = Q_1'' = 0.$$

Do wyrażenia zatem  $n$  i  $p$  jako funkcyj  $m$  służą dwa równania następującej postaci

$$\begin{aligned} M_1' m^2 &= N_1' n^2 + P_1' p^2 + 2 N_1' n + R_1 \\ M_2' m^2 - 2(Q_2 n + Q_2' p + M_2) m &= N_2' n^2 + 2 Q_2'' n p + \\ &+ P_2' p^2 + 2 N_2 n + 2 P_2 p + R_2. \end{aligned}$$

Równania te nie stanowią istotnego uproszczenia w porównaniu z równaniami (18) i (21). Gdy wszakże chodzi o zastosowanie ogólnej teorii do specjalnych okoliczności, jakie zachodzą istotnie w zagadnieniu zaćmień, to możliwe są dalsze uproszczenia. Mianowicie jedynym źródłem światła, które brać będziemy pod uwagę, jest Słońce, którego spłaszczenia dotąd nie zdołano stwierdzić, które zatem możemy uważać za kulę. Przyjmując więc za początek układu  $(xyz)$  środek ciała ciemnego, kładziemy  $\varepsilon_2 = 0$  i  $\bar{a}_2 = 1$ .

Pomijając więc wskaźniki, bierzemy pod uwagę następujące dwa równania wchodzących w rachubę ciał niebieskich

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 (1 + \varepsilon^2 \sin^2 i) + z^2 (1 + \varepsilon^2 \cos^2 i) - 2 y z \varepsilon^3 \sin i \cos i - a^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + (z - r)^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, b_1 = 0, c_1 = 1 + \varepsilon^2 \sin^2 i, d_1 = 0, e_1 = -\varepsilon^2 \sin i \cos i, \\ f_1 &= 1 + \varepsilon^2 \cos^2 i, g_1 = 0, h_1 = 0, j_1 = 0, k_1 = -a^2; \\ a_2 &= 1, b_2 = 0, c_2 = 1, d_2 = 0, e_2 = 0, f_2 = 1, g_2 = h_2 = 0, \\ j_2 &= -r, k_2 = r^2 - 1, \end{aligned}$$

a dalej

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -a^2 (1 + \varepsilon^2 \sin^2 i), \beta_1 = a^2 \varepsilon^2 \sin i \cos i, \gamma_1 = -a^2 (1 + \varepsilon^2 \cos^2 i), \\ \nu_1 &= 1 + \varepsilon^2, \sigma_1 = 1 + \varepsilon^2 \cos^2 i, \gamma_1 = \varepsilon_1 = \lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = \tau_1 = \rho_1 = \tau_1 = \varphi_1 = 0, \\ \alpha_2 &= r^2 - 1, \gamma_2 = -r, \delta_2 = -1, \nu_2 = 1, \nu_2 = -r, \sigma_2 = 1, \\ \beta_2 &= \varepsilon_2 = \lambda_2 = \mu_2 = \tau_2 = \tau_2 = \rho_2 = \varphi_2 = 0; \end{aligned}$$

wreszcie ze wzorów (19) wynika

$$\begin{aligned}
 M_1' &= -a^2(1 + \varepsilon^2), \\
 N_1 &= -a^2 \varepsilon^2 \sin i \cos i, \\
 N_1' &= a^2(1 + \varepsilon^2 \cos^2 i), \\
 P_1' &= -(1 + \varepsilon^2), \\
 R_1 &= a^2(1 + \varepsilon^2 \sin^2 i), \\
 M_1 &= P_1 = Q_1 = Q_1' = Q_1'' = 0; \\
 M_2' &= -1, \quad N_2' = 1, \quad P_2 = +r, \quad P_2' = -1, \quad R_2 = -(r^2 - 1), \\
 M_2 &= N_2 = Q_2 = Q_2' = Q_2'' = 0.
 \end{aligned}$$

Wobec tego równania (18) i (21) otrzymują postać następującą:

$$\begin{aligned}
 -a^2(1 + \varepsilon^2)m^2 &= a^2(1 + \varepsilon^2 \cos^2 i)n^2 - 2a^2 \varepsilon^2 \sin i \cos i \cdot n - \\
 &\quad - (1 + \varepsilon^2)p^2 + a^2(1 + \varepsilon^2 \sin^2 i), \\
 -m^2 &= n^2 - p^2 + 2rp - r^2 + 1,
 \end{aligned}$$

a po uporządkowaniu, gdy jeszcze uwzględnimy, że

$$\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{a^2(1 - e^2)}{a^2} e^2,$$

w czem  $e$  oznacza mimośród południkowego przekroju elipsoidy obrotowej,

$$\begin{aligned}
 m^2 + n^2 + 1 &= (p - r)^2 & (35) \\
 a^2(m^2 + n^2 + 1) &= a^2 e^2 (n \sin i + \cos i)^2 + p^2.
 \end{aligned}$$

Podstawiając wartość nawiasu z pierwszego z tych równań do drugiego, znajdujemy

$$a^2(p - r^2) - p^2 = a^2 e^2 (n \sin i + \cos i)^2, \quad (36)$$

a więc równanie, które możemy rozwiązać ze względu na  $m$  lub  $p$ .

Oznaczmy dla krótkości

$$n \sin i + \cos i = v \quad (37)$$

to, jak łatwo sprawdzić, jest

$$p = + \frac{a^2 r}{a^2 - 1} + \frac{a}{a^2 - 1} \sqrt{r^2 + e^2 v^2 \cdot (a^2 - 1)}. \quad (38)$$

Tu  $v$  jest funkcją  $n$ , gdy więc wartość na  $p$  według wzoru (38) podstawimy w pierwszym z równań (35), to otrzymamy z niego też  $m$  jako funkcję  $n$ . Wartości tych funkcji możemy podstawić w równa-



niach (6) i (7), z których przez wyrugowanie zmiennej  $n$  wynika równanie powierzchni cienia.

Jednakże i w tym przypadku równania te są tak skomplikowane, że rugowanie praktycznie nie da się wykonać. Tylko wtedy rugowanie jest wykonalne, gdy  $\nu$  ma wartość stałą, co zachodzi wtedy, gdy  $i=0$ , a więc  $\nu=1$ . W tym specjalnym wypadku  $p$  także ma wartość stałą.

Oznaczamy

$$(p - r)^2 - 1 = k^2, \quad (39)$$

to jest z pierwszego równania (35)

$$m^2 = g_1(n) = k^2 - n^2$$

oraz

$$g_1'(n) = -\frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}},$$

wtedy równania (6) i (7) przyjmują postać

$$z = \sqrt{k^2 - n^2} \cdot x + n \cdot y + p \quad (40)$$

$$0 = -\frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} \cdot x + y. \quad (41)$$

Wyrugowanie  $n$  z tych równań nie przedstawia trudności. Z równania (41) otrzymujemy

$$n = \frac{ky}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (42)$$

$$\sqrt{k^2 - n^2} = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

a po podstawieniu tych wartości w równaniu (40) i łatwych uproszczeniach

$$k^2(x^2 + y^2) = (z - p)^2. \quad (43)$$

Równanie (43) jest równaniem stożka kołowego, którego osią jest oś  $z$ , a  $p$  oznacza odległość wierzchołka stożka od początku układu. Z równania (38) otrzymuje się na  $p$  dwie wartości. Warunkom zadania odpowiadają więc dwa stożki kołowe, które w tym wypadku są powierzchniami ograniczającymi przestrzeń pełnego cienia i półcienia. Przestrzeń te więc możemy nazywać wprost odpowiednio stożkiem pełnego cienia i stożkiem półcienia.

Wartość na  $p$  znacznie się upraszcza, gdy ciało rzucające cień, jest kulą. Wtedy jest  $e = 0$ , a więc

$$p = \frac{a \cdot r}{a + 1} \quad (44)$$

Oznaczamy

$$p_1 = \frac{a \cdot r}{a + 1} \quad (45)$$

$$p_2 = \frac{a \cdot r}{a - 1}$$

to widzimy, że gdy  $a > 1$ , to obie wartości  $p$  są dodatnie, i  $p_1 < r$ ,  $p_2 > r$ ; gdy zaś  $a < 1$ , to  $p_1 > 0$ , a  $p_2 < 0$ . W obu więc wypadkach znak górny w mianowniku odnosi się do stożka półcienia, a znak dolny do stożka pełnego cienia. Wobec tego, że za jednostkę przyjęliśmy promień ciała świecącego, a tem w naszym układzie jest Słońce, którego rozmiary są największe, więc w praktyce zachodzić może tylko przypadek drugi, mianowicie  $a < 1$ .

5. Oś cienia. Wyznaczenie kierunku osi cienia. Spółrzędne cieniowe. Osią cienia nazywać będziemy prostą, określoną przez środek ciała niebieskiego, które jest źródłem światła, i przez środek ciała, rzucającego cień. Oczywiście mówiąc o środkach, zakładamy określony kształt geometryczny obu tych ciał niebieskich.

Położenie osi cienia, z którym ściśle związane jest położenie całej przestrzeni cienia, ma w teorii zaćmień znaczenie podstawowe. Zajmijmy się wyznaczeniem położenia osi cienia. Oznaczac będziemy stale przez A środek ciała, które jest źródłem światła, przez B środek ciała, rzucającego cień, a przez C środek ciała, na które pada cień, powodując przez to zjawisko zaćmienia.

Obierzmy punkt C za początek układu prostokątnego, którego osią z niech będzie prosta, równoległa do osi ziemskiej, na której za kierunek dodatni przyjmujemy kierunek ku biegunowi północnemu. Płaszczyzna  $(xy)$  jest więc płaszczyzną równika ziemskiego; osią  $x$  niech będzie prosta, równoległa do linii równonocy, której dodatni kierunek określony jest przez punkt wiosenny; wreszcie dodatni kierunek osi  $y$  niech będzie określony przez punkt nieba, którego współrzędne równikowe są  $\alpha = +90^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ .

W tym układzie niechaj  $x_1, y_1, z_1$  będą współrzędnymi punktu A, a  $x_2, y_2, z_2$  współrzędnymi punktu B. Niechaj dalej będą odpowiednio  $\alpha_1, \delta_1$  i  $\alpha_2, \delta_2$  współrzędne równikowe punktów A i B dla obserwatora, znajdującego się w początku układu C, a  $\rho_1$  i  $\rho_2$  odległości tych punk-



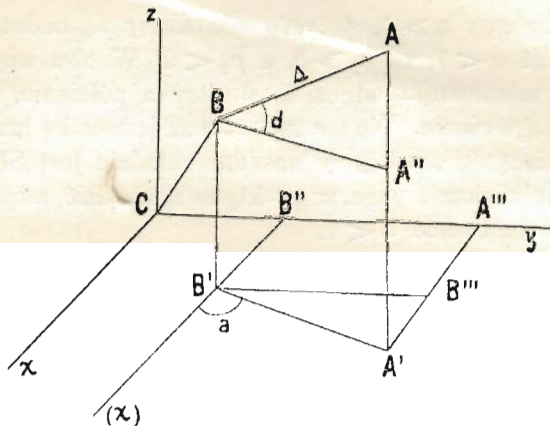


tów od początku układu, to wartości współrzędnych prostokątnych są — jak wynika z rys. 3 — następujące

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho_1 \cdot \cos \delta_1 \cdot \cos \alpha_1, \\y_1 &= \rho_1 \cdot \cos \delta_1 \cdot \sin \alpha_1, \\z_1 &= \rho_1 \cdot \sin \delta_1,\end{aligned}\tag{46}$$

oraz

$$\begin{aligned}x_2 &= \rho_2 \cdot \cos \delta_2 \cdot \cos \alpha_2, \\y_2 &= \rho_2 \cdot \cos \delta_2 \cdot \sin \alpha_2, \\z_2 &= \rho_2 \cdot \sin \delta_2.\end{aligned}\tag{47}$$



Rys. 3.

Oznaczmy jeszcze przez  $\Delta$  odległość wzajemną punktów A i B, to jest

$$\Delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\tag{48}$$

Celem wyznaczenia kierunku osi cienia AB, weźmy pod uwagę rys. 3, na którym wyobrażony jest, przyjęty przez nas, układ współrzędnych. Prowadząc z punktów A i B proste równoległe do osi  $z$ , określamy punkty przecięcia się tych prostych z płaszczyzną  $(xy)$  A' i B'. Do prostej A'B' prowadzimy z punktu B równoległą, która z prostą AA' przecina się w punkcie A''. Kierunek AB tworzy z płaszczyzną  $(xy)$  kąt A''BA =  $d$ . Gdy jeszcze poprowadzimy prostą B'(x) || Cx, to kąt (x) B'A' =  $a$  jest kątem, który tworzy płaszczyzna ABB'A' z osią  $x$ . Kąty  $a$  i  $d$  są więc współrzędnymi równikowymi punktu A, widzianego z punktu B. Dalej znajdujemy

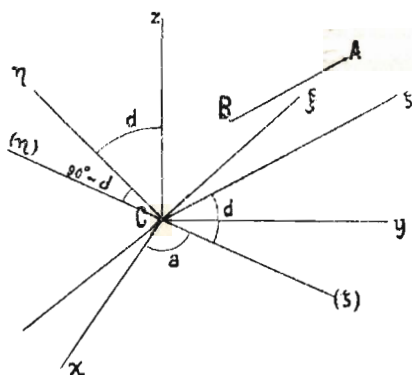
$$\begin{aligned}AA'' &= z_1 - z_2 = \Delta \sin d, \\A'B''' &= x_1 - x_2 = \Delta \cos d \cos a, \\B'B''' &= y_1 - y_2 = \Delta \cos d \sin a,\end{aligned}$$

a uwzględniając wzory (46) i (47)

$$\begin{aligned} \Delta \cos d \cos a &= \rho_1 \cos \delta_1 \cos \alpha_1 - \rho_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_2 \\ \Delta \cos d \sin a &= \rho_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1 - \rho_2 \cos \delta_2 \sin \alpha_2 \\ \Delta \sin d &= \rho_1 \sin \delta_1 - \rho_2 \sin \delta_2. \end{aligned} \quad (49)$$

Wzory te wyznaczają wartość kątów  $a$  i  $d$ , gdy znane są wartości współrzędnych  $\rho_1, \alpha_1, \delta_1$  i  $\rho_2, \alpha_2, \delta_2$ . Przez te kąty określony jest też kierunek osi cienia.

Gdy weźmiemy pod uwagę jakiś punkt, którego położenie w układzie  $(xyz)$  określone jest w danej chwili przez pewne wartości współrzędnych, to z powodu ruchu punktu C współrzędne te w innej chwili mieć będą inną wartość. Również z powodu zmiennego położenia punktów A i B ulegają zmianie wartości kątów  $a$  i  $d$ , określające kierunek osi cienia. Z położeniem osi cienia zmienia się też położenie całej przestrzeni cienia, a dla badania przebiegu zaćmienia jest rzeczą zasadniczą umieć podać współrzędne ogółu tych punktów, które w danej chwili przypadają w granicach przestrzeni cienia. Strona matematyczna tego zagadnienia otrzymuje postać najprostszą, gdy odniesiemy połączenie punktów do układu współrzędnych, określonego przez kierunek osi cienia. Układ taki poraz pierwszy zastosował Bessel w swojej teorii zaćmień Słońca.



Rys. 4.

Weźmy pod uwagę (rys. 4) układ współrzędnych prostokątnych  $(\xi \eta \zeta)$ , którego początkiem jest punkt C, a oś  $\zeta$  jest równoległa do prostej AB. Oś ta tworzy z płaszczyzną  $(xy)$  kąt  $d$ , a z osią Cz kąt  $90^\circ - d$ . Płaszczyzna  $(\xi \eta)$  przecina się z płaszczyzną  $(xy)$  według prostej C $\xi$ . Prosta ta jest oczywiście prostopadła do płaszczyzny  $(z \zeta)$ , a więc i do prostej C $(\zeta)$ , według której płaszczyzna ta przecina się z płasz-



czyzną  $(xy)$ . Prosta  $C\xi$  przyjmujemy za oś  $\xi$ . Ponieważ kąt  $xC(\zeta) = a$ , więc oś  $\xi$  z dodatnim kierunkiem osi  $x$  tworzy kąty  $90^\circ + a$  i  $-(90^\circ - a)$ , zależnie od tego, który kierunek osi  $\xi$  przyjmijemy za dodatni; obieramy za dodatni ten kierunek osi  $\xi$ , który z dodatnim kierunkiem osi  $x$  tworzy kąt  $90^\circ + a$ . Oś  $\eta$  jest prostopadła do osi  $\xi$  i leży w płaszczyźnie  $z\zeta$ ; za dodatni jej kierunek przyjmujemy ten, który z dodatnim kierunkiem osi  $z$  tworzy kąt  $d$ . Oznaczmy przez  $\Xi, H, Z$  punkty nieba, w których dodatnie kierunki nowych osi przecinają sklepienie niebieskie, to spólrzędne równikowe tych punktów są następujące

$$\Xi: \alpha = 90^\circ + a, \delta = 0^\circ$$

$$H: \alpha = 180^\circ + a, \delta = 90^\circ - d,$$

$$Z: \alpha = a, \delta = d.$$

W ten sposób nowy układ w stosunku do układu  $(xyz)$  jest dokładnie określony i można znaleźć spólrzędne danego punktu  $P$  w układzie  $(\xi\eta\zeta)$ , gdy znane są jego spólrzędne w układzie  $(xyz)$ , lub też odwrotnie.

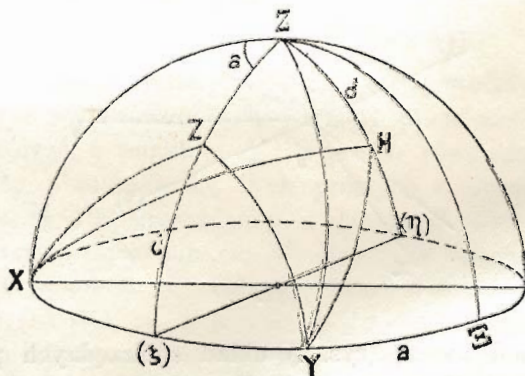
Według ogólnych wzorów przejścia jest

$$\xi = x \cos(x\xi) + y \cos(y\xi) + z \cos(z\xi)$$

$$\eta = x \cos(x\eta) + y \cos(y\eta) + z \cos(z\eta)$$

$$\zeta = x \cos(x\zeta) + y \cos(y\zeta) + z \cos(z\zeta)$$

i należy w nich podstawić wartości dostaw kierunkowych, ważne dla rozważanych układów  $(xyz)$  i  $(\xi\eta\zeta)$ . W tym celu zakresmy dokoła



Rys. 5.

punktu  $C$  dowolnym promieniem kulę i niech będą  $X, Y, Z$  i  $\Xi, H, Z$  punkty przecięcia się osi obu układów z powierzchnią kuli. Otrzymujemy wprost (rys. 5)

$$\begin{aligned} (x \xi) = X \Xi = 90^\circ + a, \quad \cos(x \xi) = -\sin a, \\ (y \xi) = Y \Xi = a, \quad \cos(y \xi) = \cos a, \\ (z \xi) = Z \Xi = 90^\circ, \quad \cos(z \xi) = 0, \\ (z \eta) = ZH = d, \quad \cos(z \eta) = \cos d \\ (z \zeta) = ZZ = 90^\circ - d, \quad \cos(z \zeta) = \sin d \end{aligned}$$

i dalej

$$\begin{aligned} \text{z trójkąta } XZH: \cos XH = \cos(x \eta) = -\sin d \cdot \cos a \\ \text{,, } YZH: \cos YH = \cos(y \eta) = -\sin d \cdot \sin a \\ \text{,, } XZZ: \cos XZ = \cos(x \zeta) = \cos d \cdot \cos a \\ \text{,, } YZZ: \cos YZ = \cos(y \zeta) = \cos d \cdot \sin a. \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości we wzorach ogólnych, znajdujemy

$$\begin{aligned} \xi &= -x \sin a + y \cos a \\ \eta &= -x \sin d \cos a - y \sin d \sin a + z \cos d \\ \zeta &= x \cos d \cos a + y \cos d \sin a + z \sin d, \end{aligned} \quad (50)$$

a gdy tu podstawimy

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\ y &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\ z &= \rho \sin \alpha, \end{aligned}$$

to otrzymamy

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cdot \cos \delta \sin(\alpha - a) \\ \eta &= \rho \cdot [\sin \delta \cos d - \cos \delta \sin d \cos(\alpha - a)] \\ \zeta &= \rho \cdot [\sin \delta \sin d + \cos \delta \cos d \cos(\alpha - a)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Gdy więc kąty  $a$  i  $d$  wyznaczone zostały zapomocą wzorów (49), to spólrzędne  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , punktu, którego spólrzędne równikowe są znane, wyznaczają się zapomocą wzorów (51). Układ  $(\xi, \eta, \zeta)$ , którego oś jest równoległa do osi cienia, nazywać będziemy *układem cieniowym* i podobnie spólrzędne punktu w tym układzie nazywać będziemy *spólrzędniemi cieniowemi*.

**6. Równanie przekroju przestrzeni cienia płaszczyzną, prostopadłą do osi cienia, w przypadku, gdy przestrzeń cienia jest stożkiem kołowym.** Gdy źródło światła i ciało, rzucające cień, są kulami, to przestrzeń cienia ma kształt stożka kołowego, określonego równaniem (43). Dla danego  $z$  równanie to oznacza koło o promieniu

$\frac{z-p}{k}$ , które jest przekrojem stożka w odległości  $z$  od płaszczyzny  $(xy)$ .



Równanie (43) odnosi się do układu spólrzędnych, którego początkiem jest punkt  $B$ . Spólrzędne tego punktu w układzie cieniowym są  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ . Jest zatem

$$\xi = \xi_2 + x, \quad \eta = \eta_2 + y, \quad \zeta = \zeta_2 + z$$

i gdy, wypływające stąd wartości  $x, y, z$ , podstawimy w równaniu (43) otrzymamy równanie stożka cienia w układzie cieniowym, mianowicie

$$k^2 [(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2] = (\zeta - \zeta_2 - p)^2. \quad (52)$$

Oznaczmy

$$\frac{\zeta - \zeta_2 - p}{k} = u, \quad (53)$$

to jest

$$(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 = u^2 \quad (54)$$

i widzimy, że  $u$  jest promieniem koła, według którego stożek cienia przecina płaszczyzna równoległa do płaszczyzny  $(\xi \eta)$  w odległości  $\xi$  od początku układu.

Niech będzie

$$\frac{\xi_0 - \xi_2 - p}{k} = 0,$$

to stąd wynika

$$\xi_0 - \xi_2 = p$$

i widzimy, że  $p$  jest to odległość wierzchołka stożka od punktu  $B$ .

Oznaczmy ogólnie

$$\sin f = \frac{a + 1}{r}, \quad (55)$$

to według wzoru (44) mamy

$$p = \frac{a}{\sin f}. \quad (56)$$

Ze wzoru (55) wynika

$$r = \frac{a + 1}{\sin f}. \quad (57)$$

Podstawiając wartości  $p$  i  $r$  według wzorów (56) i (57) we wzorze (39), znajdujemy

$$k^2 = \frac{1}{\sin^2 f} - 1 = \operatorname{ctg}^2 f. \quad (58)$$

Wzór (53) po podstawieniu wartości  $p$  i  $k$  według (56) i (58) otrzymuje postać następującą

$$u = \pm \left( \zeta - \zeta_2 - \frac{a}{\sin f} \right) \cdot \operatorname{tg} f. \quad (59)$$

Geometryczne znaczenie kąta  $f$  wyjaśnia rys. 6. Koła, których środkami są punkty A i B, są to przekroje kuli świecącej i rzucającej cień płaszczyzną rysunku. Wspólne styczne do tych kół określają przekroje stożków półcienia i pełnego cienia, których wierzchołkami są odpowiednio punkty  $W_1$  i  $W_2$ , i niech będzie

$$BW_1 = p_1, \quad BW_2 = -p_2.$$

Przyjmując za jednostkę promień kuli świecącej i odznaczając promień kuli rzucającej cień przez  $a$ , a odległość AB przez  $r$ , znajdujemy z rys. 6:

$$AN = AB \cdot \sin \angle ABN$$

$$AM = AB \cdot \sin \angle ABM,$$

skąd

$$\sin \angle ABN = \frac{AN}{AB} = \frac{a+1}{r}$$

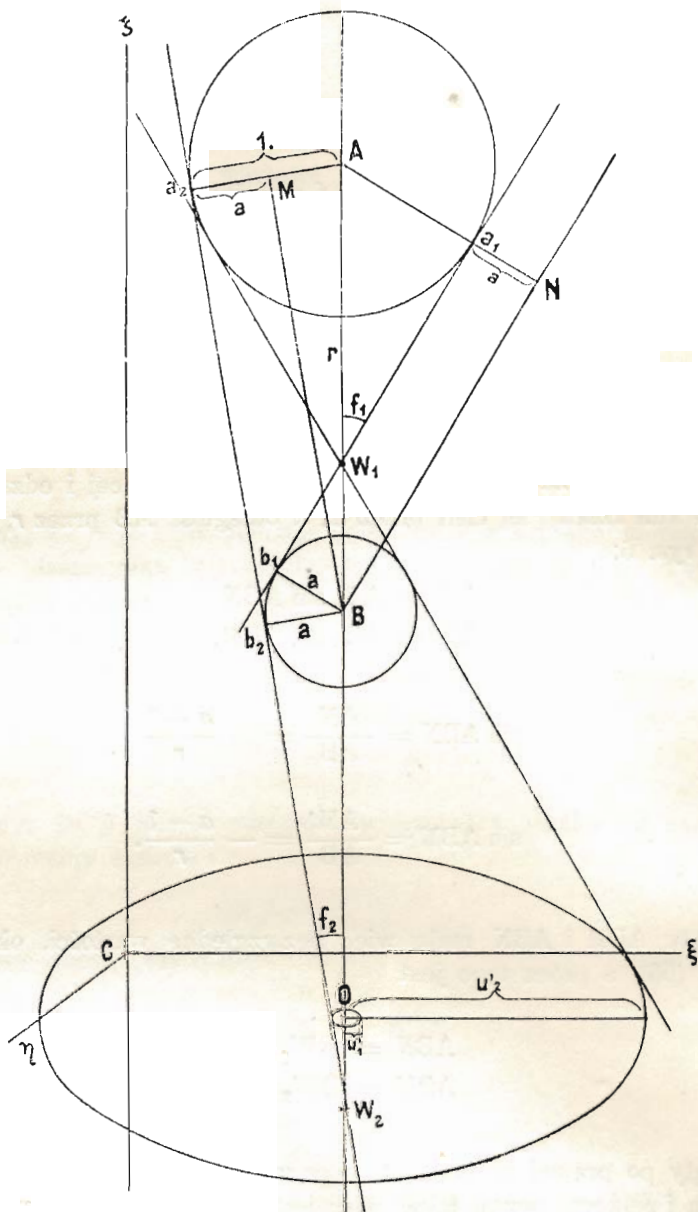
$$\sin \angle ABM = \frac{AM}{AB} = -\frac{a-1}{r}.$$

Kąty  $\angle ABM$  i  $\angle ABN$  mają więc bezwzględne wartości, określone wzorem (55), a prócz tego jest

$$\angle ABN = BW_1 b_1,$$

$$\angle ABM = BW_2 b_2.$$

Kąty po prawej stronie są to odpowiednio kąty tworzące stożków półcienia i pełnego cienia, takie więc jest też znaczenie geometryczne kąta  $f$  z tą uwagą, że znak górny we wzorze (55) odnosi się do stożka półcienia, dolny zaś do stożka pełnego cienia, więc kąt ten dla tego ostatniego stożka przyjmuje się za ujemny.



Rys. 6.



Co do znaku przy  $u$ , to podstawiając we wzorze (59)

$$\zeta_0 = \zeta_2 + \frac{a}{\sin f}, \quad (60)$$

przyjmujemy

$$u = (\zeta_0 - \zeta) \cdot \operatorname{tg} f. \quad (61)$$

W ten sposób  $u$  ma wartość dodatnią, gdy  $f$  i  $\zeta_0 - \zeta$  mają znaki jednakowe, a wartość ujemną, gdy znaki te są przeciwne.

Dla  $\zeta = 0$  otrzymujemy promień przekroju stożka płaszczyzną ( $\xi \eta$ ), który oznaczamy przez  $u'$ ; mianowicie jest

$$u' = \zeta_0 \cdot \operatorname{tg} f = \left( \zeta_2 + \frac{a}{\sin f} \right) \cdot \operatorname{tg} f, \quad (62)$$

i możemy także pisać

$$u = u' - \zeta \cdot \operatorname{tg} f. \quad (63)$$

Oczywiście  $u'$  ma wartość dodatnią lub ujemną zależnie od tego czy  $f$  i  $\zeta_0$  mają znak jednakowy, czy też przeciwny.

## ROZDZIAŁ II.

### ZAĆMIENIA SŁOŃCA.

7. Rodzaje zaćmień Słońca. Stożek półcienia i pełnego cienia Księżyca. Kierunek osi cienia. Przy zaćmieniach Słońca źródłem światła jest Słońce, a więc punkt A oznacza środek Słońca; ciałem, rzucającym cień, jest Księżyc, a więc punkt B jest środkiem Księżyca. Zaćmieniu ulega każdy punkt, znajdujący się od Księżyca po stronie przeciwnej, niż Słońce, gdy znajdzie się w granicach jednego ze stożków cienia Księżyca.

Do stożka półcienia dostają się tylko promienie, wysyłane przez pewną część tarczy Słońca, to też obserwator, znajdujący się w pewnym punkcie stożka półcienia, widzi tylko tę część tarczy, od której do tego punktu dochodzą promienie światła, podczas gdy część pozostała tarczy Słońca zakryta jest tarczą Księżyca. Zaćmienie, które spostrzega obserwator, znajdujący się wewnątrz stożka półcienia, nazywa się *zaćmieniem częściowym*.

Stożek pełnego cienia dzieli się na dwie części. Do tej części, która znajduje się między Księżycem a wierzchołkiem stożka, promienie Słońca wcale nie przenikają. Obserwator, znajdujący się w tej części stożka, nie widzi zupełnie tarczy Słońca, gdyż zasłonięta ona jest przez Księżyc, którego wielkość kątowa jest w tym przypadku większa, niż wielkość kątowa Słońca: zaćmienie jest wtedy *całkowite*.

Wielkości kątowe tarcz Słońca i Księżyca są równe sobie dla obserwatora, znajdującego się w wierzchołku stożka pełnego cienia, a więc tarcza Księżyca ściśle pokrywa tarczę Słońca. Poza wierzchołkiem stożka pełnego cienia przypada druga jego część, stanowiąca przedłużenie części pierwszej, do której promienie Słońca częściowo przenikają, ponieważ z punktów tego przedłużonego stożka tarcza

Księżycyca widzialna jest pod kątem mniejszym, aniżeli tarcza Słońca. Obserwator widzi w tym wypadku tarczę Księżycyca, jako rzut na tarczę Słońca, dokoła którego widzialne są niezakryte części tarczy Słońca: zaćmienie tego rodzaju nazywa się *pierscieniowem*.

Ażeby na Ziemi widzialne było zaćmienie Słońca częściowe, całkowite lub pierścieniowe, Ziemia przynajmniej częściowo pograżyć się musi odpowiednio w stożku półcienia, w stożku pełnego cienia lub w stożku, stanowiącym jego przedłużenie.

Niechaj środek Ziemi będzie początkiem układu cieniowego, w którym spólrzędne prostokątne środka Słońca są  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , a spólrzędne środka Księżycyca  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  i niech będzie  $\Delta$  odległość Księżycyca od Słońca, to jest

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2 + \Delta$$

i równanie stożka cienia ma postać

$$(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 = \left( \zeta - \zeta_2 - \frac{a}{\sin f} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 f. \quad (64)$$

Gdy przez  $f_1$  oznaczymy kąt tworzący stożka półcienia, przez  $f_2$  kąt tworzący stożka pełnego cienia, a przez  $r_1$  i  $r_2$  odpowiednio promienie Słońca i Księżycyca, to według wzoru (55) jest

$$\sin f_1 = \frac{r_2 + r_1}{\Delta}, \quad \sin f_2 = \frac{r_2 - r_1}{\Delta}. \quad (65)$$

Równanie (64) jest równaniem stożka półcienia, czy też stożka pełnego cienia, zależnie od tego, czy na miejsce  $f$  podstawimy w niem  $f_1$  czy  $f_2$ .

Niechaj będą  $x, y, z$  spólrzędne jakiegoś punktu na powierzchni Ziemi w układzie cieniowym, to

$$(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 = d^2 \quad (66)$$

wyraża kwadrat odległości tego punktu od osi cienia, a równanie

$$(x - \xi_2)^2 + (y - \eta_2)^2 = \left( z - \zeta_2 - \frac{r_1}{\sin f} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 f$$

jest równaniem koła, według którego płaszczyzna  $\zeta = z$ , t. j. pla-



szczyzna równoległa do płaszczyzny  $\xi \eta$  i przechodząca przez punkt  $(x, y, z)$  przecina stożek cienia. Promień tego koła ma wartość

$$u = (\zeta_0 - z) \cdot \operatorname{tg} f = \left( \zeta_2 - z + \frac{r_1}{\sin f} \right) \cdot \operatorname{tg} f. \quad (67)$$

Oczywiście warunkiem, ażeby w punkcie  $(x, y, z)$  zaszło zaćmienie, jest

$$d < |u|.$$

Ażeby móc stwierdzić, czy warunek ten zachodzi w istocie, trzeba znać wartości  $u$  i  $d$ . W tym celu należy wyznaczyć spólrzędne cieniowe Księżyca i punktu na powierzchni Ziemi oraz znaleźć wartość kąta  $f$ . Do wyznaczenia spólrzędnych cieniowych i odległości  $\Delta$  służą wzory (49) i (51). Gdy znane jest  $\Delta$ , to możemy przy pomocy wzorów (65) wyznaczyć  $f$ , przy pomocy zaś wzorów (62) i (63) wartość  $u$ .

Teraz oznaczyć będą  $\rho_1, \alpha_1, \delta_1$  geocentryczne spólrzędne równikowe środka Słońca, a  $\rho_2, \alpha_2, \delta_2$  także spólrzędne środka Księżyca. Ponieważ w czasie zaćmienia spólrzędne geocentryczne Słońca i Księżyca mało się od siebie różnią, więc również mało różnią się od nich kąty  $a$  i  $d$ , określające kierunek osi cienia. Skutkiem tego do ich wyznaczenia zamiast wzorów ścisłych (49) użyć można wzorów przybliżonych, prędkiej prowadzących do celu.

Gdy pierwsze z równań (49) pomnożymy przez  $\cos \alpha_1$ , a drugie przez  $\sin \alpha_1$ , i dodamy, a następnie pierwsze z tych równań pomnożymy przez  $-\sin \alpha_1$  drugie zaś przez  $\cos \alpha_1$  i dodamy, to otrzymamy dwa równania następujące:

$$\Delta \cos d \cos (a - \alpha_1) = \rho_1 \cos \delta_1 - \rho_2 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (68)$$

$$\Delta \cos d \sin (a - \alpha_1) = -\rho_2 \cos \delta_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (69)$$

Dzieląc drugie z tych równań przez pierwsze, znajdujemy

$$\operatorname{tg} (a - \alpha_1) = \frac{-\rho_2 \cos \delta_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1)}{\rho_1 \cos \delta_1 - \rho_2 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (70)$$

Gdy dalej pierwsze z równań (49) pomnożymy przez  $\cos a$ , a drugie przez  $\sin a$ , i dodamy, to jest

$$\Delta \cos d = \rho_1 \cos \delta_1 \cos (\alpha_1 - a) - \rho_2 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 - a), \quad (71)$$

a gdy wobec małej wartości różnic  $(\alpha_1 - a)$  i  $(\alpha_2 - a)$  przyjmiemy, że dostawy ich równają się jedności, można też napisać z dostatecznym przybliżeniem

$$\Delta \cos d = \rho_1 \cos \delta_1 - \rho_2 \cos \delta_2. \quad (72)$$

Prócz tego trzecie z równań (49) jest

$$\Delta \sin d = \rho_1 \sin \delta_1 - \rho_2 \sin \delta_2. \quad (73)$$

Z równań (72) i (73) wypływają w sposób prosty dwa następujące równania

$$\Delta \sin (d - \delta_1) = -\rho_2 \sin (\delta_2 - \delta_1), \quad (74)$$

$$\Delta \cos (d - \delta_1) = \rho_1 - \rho_2 \cos (\delta_2 - \delta_1), \quad (75)$$

z których otrzymujemy

$$\operatorname{tg} (d - \delta_1) = \frac{-\rho_2 \sin (\delta_2 - \delta_1)}{\rho_1 - \rho_2 \cos (\delta_2 - \delta_1)}. \quad (76)$$

Niechaj będą  $\pi_1$  i  $\pi_2$  paralaksy, odpowiadające odległościom  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , to jest

$$\rho_1 = \operatorname{cosec} \pi_1, \quad \rho_2 = \operatorname{cosec} \pi_2,$$

i oznaczymy

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sin \pi_1}{\sin \pi_2} = \mu. \quad (77)$$

Ponieważ jest  $\pi_1^0 = 8''.80$ ,  $\pi_2^0 = 57'2''.70$ , więc średnio  $\mu = \frac{1}{390}$ , i wogóle  $\mu$  ma wartość do tego ułamka zbliżoną. Wobec tego można też przyjąć z dostateczną dokładnością:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (a - \alpha_1) &= -\mu \cdot \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \left[ 1 + \mu \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \right] = \\ &= -\mu \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \sin (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{1}{2} \mu^2 \left( \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \right)^2 \sin 2(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (78)$$

oraz podobnie

$$\operatorname{tg} (d - \delta_1) = -\mu \sin (\delta_2 - \delta_1) - \frac{1}{2} \mu^2 \sin 2(\delta_2 - \delta_1). \quad (79)$$

Przyjmując jeszcze

$$\sin 2 (\alpha_2 - \alpha_1) = 2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\sin 2 (\delta_2 - \delta_1) = 2 \sin (\delta_2 - \delta_1),$$

$$\left( \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \right)^2 = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1},$$

otrzymujemy

$$\text{tg} (a - \alpha_1) = -\mu (1 + \mu) \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \sin (\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= -\frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \sin (\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\text{tg} (d - \delta_1) = -\mu (1 + \mu) \sin (\delta_2 - \delta_1) =$$

$$= -\frac{\mu}{1 - \mu} \sin (\delta_2 - \delta_1)$$

i wreszcie dostatecznie dokładne wzory przybliżone

$$a - \alpha_1 = -\frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} (\alpha_2 - \alpha_1), \quad (80)$$

$$d - \delta_1 = -\frac{\mu}{1 - \mu} (\delta_2 - \delta_1).$$

Prócz tego, gdy podniesiemy do kwadratu równania (49) i dodamy, to, przyjmując znowu  $\cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \cos (\delta_2 - \delta_1) = 1$ , znajdziemy wprost

$$\Delta = \rho_1 - \rho_2 = \rho_1 (1 - \mu). \quad (81)$$

Podstawiając tę wartość we wzorach (65), otrzymujemy ogólnie z dostateczną dokładnością

$$\sin f = \frac{r_2 + r_1}{\rho_1 (1 - \mu)}, \quad (82)$$

a wyrażając  $r_1$  i  $r_2$  w jednostkach planetarnych i wprowadzając wartości liczbowe, mamy

$$\sin f_1 = \frac{7 \cdot 6687623}{\rho_1 (1 - \mu)} \quad (82')$$

$$\sin f_2 = \frac{7 \cdot 6665918 n}{\rho_1 (1 - \mu)},$$

gdzie liczby, ujęte w nawiasy, oznaczają logarytmy wielkości  $(r_2 + r_1)$  wzgl.  $(r_2 - r_1)$ ; wartości  $\rho_1$  należy stosować według efemeryd.



Ponieważ  $f$  są małemi kątami, można też przyjąć  $\sin f = f'' \cdot \sin 1''$ , a wtedy jest z dostatecznem zazwyczaj przybliżeniem

$$f = (r_2 \pm r_1) \cdot (1 + \mu) \cdot \rho_1 \sin 1'' = (r_2 \pm r_1) \cdot (1 + \mu) \cdot \pi_1, \quad (83)$$

a po wprowadzeniu wartości liczbowych

$$\begin{aligned} f_1 &= (2 \cdot 0387048) \cdot (1 + \mu) \cdot \pi_1, \\ f_2 &= (2 \cdot 0365343 n) \cdot (1 + \mu) \cdot \pi_1. \end{aligned} \quad (83')$$

**8. Spółrzedne cieniowe Słońca, Księżyca i punktu na powierzchni Ziemi.** Dostatecznie dokładne spółrzedne cieniowe Słońca otrzymamy, podstawiając we wzorach (51)  $\rho_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\delta_1$  na miejsce  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  oraz wartości  $a$  i  $d$  według wzorów (80). Możemy tu przyjąć:

$$\sin(\alpha_1 - a) = (\alpha_1 - a) \sin 1'' = \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \sin 1'',$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 - a) &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha_1 - a}{2} = 1 - \frac{(\alpha_1 - a)^2}{2} \sin^2 1'' = \\ &= 1 - \frac{\mu^2}{(1 - \mu)^2} \cdot \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{2} \cdot \sin^2 1'', \end{aligned}$$

$$\sin(\delta_1 - d) = (\delta_1 - d) \cdot \sin 1'' = \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot (\delta_2 - \delta_1) \sin 1'',$$

$$\cos(\delta_1 - d) = 1 - \frac{(\delta_1 - d)^2}{2} = 1 - \frac{\mu^2}{(1 - \mu)^2} \cdot \frac{(\delta_2 - \delta_1)^2}{2} \sin^2 1'',$$

więc po podstawieniu jest:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\rho_1 \mu}{1 - \mu} \cos \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 1'' \\ \eta_{11} &= \rho_1 \left[ \frac{\mu}{1 - \mu} (\delta_2 - \delta_1) \sin 1'' - \frac{\mu^2}{2(1 - \mu)^2} \sin d \cos \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sin^2 1'' \right] \\ \zeta_1 &= \rho_1 \left\{ 1 - \frac{\mu^2}{2(1 - \mu)^2} \cdot [\cos d \cos \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\delta_2 - \delta_1)^2] \cdot \sin^2 1'' \right\}, \end{aligned} \quad (84)$$

przyczem najczęściej wyrazy, zawierające  $\mu^2$ , można opuścić.

Spółrzedne cieniowe środka Księżyca otrzymamy, gdy we wzorach (84) na miejsce wskaźnika 1 napiszemy 2, a na miejsce wskaźnika 2 napiszemy 1.

Również ze wzorów (51) wypływają spółrzedne cieniowe punktu na powierzchni Ziemi, gdy w nich na miejsce  $\rho$ ,  $\alpha$  i  $\delta$  wprowadzimy geocentryczne spółrzedne równikowe tego punktu.

Niech będzie  $\varphi'$  szerokość geocentryczna danego punktu,  $\lambda$  jego długość geograficzna, liczona od Greenwich na zachód dodatnio, a  $\rho$  jego odległość od początku układu t.j. od środka Ziemi; dalej niech  $\Theta$  oznacza czas gwiazdowy w tym punkcie, a  $\Theta_g$  czas gwiazdowy w Greenwich w tej samej chwili, to spółrzedne równikowe geocentryczne danego punktu są

$$\rho, \alpha = \Theta - \Theta_g + \lambda, \delta = \varphi'.$$

Podstawiając te wartości spółrzednych w równaniach (51), otrzymujemy następujące wartości spółrzednych cieniowych punktu:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi' \sin (\Theta - \alpha), \\ y &= \rho [\sin \varphi' \cos d - \cos \varphi' \sin d \cos (\Theta - \alpha)], \\ z &= \rho [\sin \varphi' \sin d + \cos \varphi' \cos d \cos (\Theta - \alpha)]. \end{aligned} \quad (85)$$

Wprowadzając wartości  $x$ ,  $y$  i  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  (lub równe im wartości  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ) do wzoru (66), znajdujemy odległość danego punktu od osi cienia. We wzorach (84) za jednostkę długości służy jednostka planetarna, we wzorach zaś (85) promień równika ziemskiego. Ażeby spółrzedne  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$  wyrazić również w promieniach równika Ziemi, należy prawe strony wzorów (84) pomnożyć przez  $\text{cosec } 8''.80$ .

W niektórych zagadnieniach teorii zaćmień spółrzedne  $x$ ,  $y$  i  $z$  są niewiadomymi, albo też niewiadomymi są należące do nich spółrzedne równikowe  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $\Theta$ . Jednakże wielkości te nie są wszystkie od siebie niezależne, ponieważ  $\rho$  można wyrazić jako funkcję  $\varphi'$ . Powyższe trzy niewiadome redukują się więc do dwóch. Można mianowicie  $\rho$  i  $\varphi'$  zastąpić przez t. zw. szerokość zredukowaną. Oznaczamy ją przez  $\varphi_1$  i określamy w sposób następujący:

$$\cos \varphi_1 = \rho \cdot \cos \varphi'. \quad (86)$$

Znaczenie geometryczne kąta  $\varphi_1$  wyjaśnia rys. 7. Przedstawia on przekrój sferoidalnej Ziemi płaszczyzną południka punktu  $O$  i jest  $CO = \rho$ ,  $\sphericalangle rCO = \varphi'$ . Prowadząc z punktu  $O$  prostopadłą do  $Or$ , widzimy, że

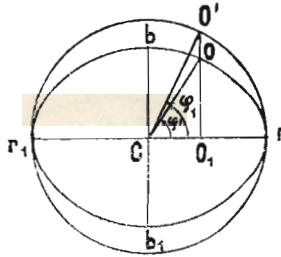
$$CO_1 = \rho \cdot \cos \varphi'.$$

Gdy zakreślimy dokoła  $C$  koło promieniem  $Cr = 1$ , to przecina ono prostopadłą  $OO_1$  w punkcie  $O'$ , i widzimy, że

$$CO_1 = \rho \cdot \cos \varphi' = \cos \sphericalangle rCO'.$$

Porównanie tego wyniku ze wzorem (86) wyjaśnia, że kąt  $rCO'$  jest szerokością zredukowaną  $\varphi_1$ . Wobec tego jest

$$O_1O' = \sin \varphi_1.$$



Rys. 7.

Gdy więc przez  $b$  oznaczymy połowę małej osi przekroju eliptycznego (którego połowę wielkiej osi przyjęliśmy za jednostkę), to mamy

$$\rho \sin \varphi' = b \sin \varphi_1 = (1 - a) \sin \varphi_1, \quad (87)$$

gdzie  $a$  jest spłaszczeniem Ziemi.

Zamiast  $\rho \cdot \sin \varphi'$  i  $\rho \cdot \cos \varphi'$  wprowadzamy we wzorach (85) ich wartości według wzorów (86) i (87). Prócz tego we wzorach tych zamiast czasu gwiazdowego wprowadzamy czas słoneczny prawdziwy  $\vartheta$ . Ponieważ wogóle jest  $t = \Theta - a$ , więc w danym przypadku jest

$$\vartheta = \Theta - a_1 = \Theta - a - (a_1 - a)$$

oraz

$$\Theta - a = \vartheta + (a_1 - a) = \vartheta + \Delta a,$$

gdzie zatem jest

$$\Delta a = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1} \cdot (a_2 - a_1). \quad (88)$$



Wzory (85) otrzymują więc postać następującą:

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi_1 \sin (\vartheta + \Delta a), \\y &= (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos d - \cos \varphi_1 \sin d \cos (\vartheta + \Delta a), \\z &= (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos (\vartheta + \Delta a).\end{aligned}\quad (89)$$

Gdy wszystkie wartości, stojące po prawej stronie powyższych wzorów są znane, to nadaje się tym wzorom postać dogodniejszą do rachunku przez wprowadzenie kątów pomocniczych. Oznaczmy

$$\begin{aligned}(1 - \alpha) \cdot \sin \varphi_1 &= c \cdot \cos C, \\ \cos \varphi_1 \cdot \cos (\vartheta + \Delta a) &= c \cdot \sin C,\end{aligned}\quad (90)$$

to wzory (89) otrzymują postać

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi_1 \sin (\vartheta + \Delta a), \\y &= c \cdot \cos (C + d), \\z &= c \cdot \sin (C + d).\end{aligned}\quad (89')$$

**9. Wpływ wzniesienia nad poziom morza oraz refrakcji na wartości współrzędnych punktu obserwacji.** Przez  $\rho$  we wzorach (85), (86) i (87) rozumieliśmy odległość od środka Ziemi punktu poziomu morza w szerokości geocentrycznej  $\varphi'$ . W ogólności jednakże w praktyce chodzi o punkty wzniesione nad poziom morza na pewną wysokość, którą oznaczamy przez  $h$ . W tym wypadku wartości współrzędnych otrzymamy, gdy we wzorach (85) zamiast  $\rho$  pisać będziemy  $\rho + h = \rho \cdot \left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$ . Wskutek tego logarytmy współrzędnych  $x, y, z$  powiększą się o  $\log \left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$ . Ponieważ  $\frac{h}{\rho}$  jest zawsze małym ułamkiem, więc według znanego rozwinięcia jest

$$\lg \left(1 + \frac{h}{\rho}\right) = \frac{h}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \dots,$$

a więc

$$\log \left(1 + \frac{h}{\rho}\right) = M \cdot \left[ \frac{h}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\rho}\right)^2 + \dots \right],$$

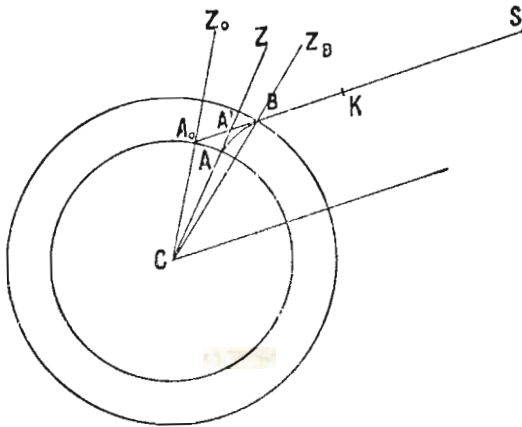
gdzie  $M$  jest modulem logarytmów zwyczajnych.

Przyjmując na  $\rho$  średnią wartość dla  $\varphi' = +45^\circ$ , t. j.  $\log \rho = 9.9992748$ , oraz wyrażając  $h$  i  $\rho$  w metrach, znajdujemy

$$\log \left( 1 + \frac{h}{\rho} \right) = 0.000000682 \cdot h. \quad (91)$$

Wzór ten wskazuje, że poprawka logarytmów współrzędnych  $x, y, z$  z powodu wzniesienia o  $h$  metrów nad poziom morza wynosi  $0.682 \cdot h$  jednostek 7-ego miejsca.

Na przebieg zjawiska zaćmienia ma też pewien wpływ refrakcja astronomiczna, która też da się uwzględnić przez stosowną poprawkę współrzędnych  $x, y, z$ . Dotyczy to mianowicie wartości tych współrzędnych w chwili początku i końca zaćmienia, gdy obserwator znajduje się na tworzącej jednego ze stożków cienia.



Rys. 8.

Niechaj będzie (rys. 8) prosta **KS** wspólna styczną Słońca i Księżyca, która spotyka powierzchnię Ziemi w punkcie  $A_0$ , a  $CZ_0$  niech wskazuje kierunek pionu w punkcie  $A_0$ . Koło, przechodzące przez  $A_0$ , oznacza przekrój pionowy Ziemi płaszczyzną  $Z_0A_0S$ , a spółśrodkowe większe koło granicę atmosfery ziemskiej.

Gdyby nie było atmosfery, każdy obserwator, znajdujący się na prostej  $SK$  po przeciwnej stronie od  $K$ , niż Słońce, widziałby zetknięcie się brzegów Księżyca i Słońca, a więc także obserwator w  $A_0$ . Z powodu refrakcji jednakże promień Słońca  $SK$ , który w punkcie  $B$  spotyka atmosferę, zakrzywia się i spotyka Ziemię w punkcie  $A$ . A więc



zamiast obserwatora w  $A_0$  zetknięcie się brzegów dostrzega obserwator w A. Promień SK przecina w punkcie  $A'$  pion AZ punktu A i oczywiście w tym punkcie również widzianoby zetknięcie, gdyby nie było refrakcji.

Z rozważania tego wynika, że obserwator, znajdujący się na powierzchni Ziemi w A, widzi zetknięcie się w tej samej chwili, w którejby je widział, znajdując się w punkcie  $A'$ , gdyby nie było refrakcji. Wpływ refrakcji zatem uwzględnimy, gdy za spólrzędne punktu obserwacji przyjmujemy nie spólrzędne punktu A, lecz spólrzędne punktu  $A'$ . Jeżeli więc jest  $AA' = g$ , to należy spólrzędne miejsca obserwacji A pomnożyć przez  $\left(1 + \frac{g}{\rho}\right)$ . W tym celu trzeba wyznaczyć wartość  $g$ , która wypływa z teorii refrakcji.

Oznaczmy przez  $\Delta$  odległość dowolnego punktu atmosfery od środka Ziemi, przez  $\mu$  współczynnik załamania powietrza w tym punkcie, a przez  $i$  kąt padania światła, to — jak wiadomo z teorii refrakcji astronomicznej — zachodzi związek

$$\Delta \cdot \mu \cdot \sin i = \text{const.}$$

Oznaczmy jeszcze przez  $r_0$  odległość punktu obserwacji A od środka Ziemi, przez  $\mu_0$  współczynnik załamania światła w tym punkcie, przez  $\zeta'$  odległość zenitalną, w której obserwator widzi punkt świecący; jeżeli ponadto  $BZ_B$  jest pionem punktu B, w którym promień SK spotyka atmosferę ziemską, i jeżeli zważymy, że w tymże punkcie współczynnik załamania światła,  $\mu_B = 1$ , to, stosując powyższe równanie do punktów A i B, mamy

$$BC \cdot \sin Z_B BS = r_0 \mu_0 \sin \zeta'. \quad (92)$$

Z trójkąta  $A'CB$  wypływa

$$A'C : BC = \sin Z_B BS : \sin ZA'S. \quad (93)$$

Kładąc  $A'C = r_0 + g$  i uwzględniając, że kąt  $ZA'S = \zeta$  jest prawdziwą odległością zenitalną punktu S, widzianego z punktów  $A'$  i A, otrzymujemy z proporcji (93) i wzoru (92)

$$(r_0 + g) \cdot \sin \zeta = r_0 \mu_0 \sin \zeta',$$

lub

$$\left(1 + \frac{g}{r_0}\right) \cdot \sin \zeta = \mu_0 \cdot \sin \zeta', \quad (94)$$



i z dostateczną dokładnością, ponieważ  $r_0 = \rho + h$  mało się różni od  $\rho$ ,

$$1 + \frac{g}{\rho} = \mu_0 \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta} \quad (95)$$

lub też z wystarczającą dokładnością

$$\log \left( 1 + \frac{g}{\rho} \right) = M \cdot \frac{g}{\rho} = M \cdot \left( \mu_0 \frac{\sin \zeta'}{\sin \zeta} - 1 \right). \quad (95')$$

Prosta SK co do kierunku bardzo nieznacznie różni się od osi cienia, gdy więc równoległą do niej, przechodzącą przez środek Ziemi C, zidentyfikujemy z osią  $\zeta$  układu cieniowego, to jest z dostateczną dokładnością wartość spólrzędnej cieniowej punktu A, równoległej do osi,

$$z = Ca = \cos a \text{ CA} = \cos \text{SA}'\text{Z} = \cos \zeta \quad (96)$$

albo

$$\log z = \log \cos \zeta.$$

Podstawiając we wzorze (95')  $\zeta' = \zeta - R$ , gdzie R oznacza wartość refrakcji przy pozornej odległości renitalnej  $\zeta'$ , znajdujemy

$$\log \left( 1 + \frac{g}{\rho} \right) = M \left( \mu_0 \frac{\sin (\zeta - R)}{\sin \zeta} - 1 \right) \quad (97)$$

i z wystarczającą dokładnością możemy tu przyjąć

$$\frac{\sin (\zeta - R)}{\sin \zeta} = \cos R - \text{ctg } \zeta \sin R = 1 - R' \text{ ctg } \zeta \sin 1'' - \frac{1}{2} R'^2 \sin^2 1'',$$

wskutek czego wzór (97) otrzymuje postać

$$\log \left( 1 + \frac{g}{\rho} \right) = M [\mu_0 (1 - R \text{ ctg } \zeta \sin 1'' - \frac{1}{2} R^2 \sin^2 1'') - 1] \quad (98)$$

lub wprowadzając  $\mu_0 = 1.0002922$  oraz wartość liczbową na  $\sin 1''$

$$\log \left( 1 + \frac{g}{\rho} \right) = 0.0001269 - (6.3235) R \cdot \text{ctg } \zeta - (12.7080) \cdot R^2. \quad (98')$$

Liczby zawarte w nawiasach oznaczają tu logarytmy, a wartość refrakcji wyrażona jest w sekundach łukowych.

Ponieważ, jak widzieliśmy,  $z = \cos \zeta$ , więc poprawkę na refrakcję oblicza się w ten sposób, że dla danego  $\log z = \log \cos \zeta$  bierze się z tablic logarytmów  $\text{ctg } \zeta$ , a z tablic refrakcji  $\log R$  i zapomożą wzo-

ru (98') oblicza się poprawkę, o którą należy powiększyć logarytmy współrzędnych  $x, y, z$ . Dopiero dla  $\log z = 9.97$  wynosi ta poprawka jednostkę 7-ego miejsca i osiąga wartość 1023 takich jednostek, gdy w chwili zaćmienia Słońce znajduje się na horyzoncie.

10. Wyznaczenie punktów powierzchni Ziemi, w których w danej chwili zachodzi początek lub koniec zaćmienia. Równanie

$$(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 = u^2, \quad (99)$$

w którym  $\xi_1, \eta_1$  oznaczają współrzędne cieniowe Słońca, przedstawia koło o promieniu  $u$  w płaszczyźnie, prostopadłej do osi cienia. Jeżeli jest

$$u = u' - \zeta \cdot \operatorname{tg} f, \quad (100)$$

to  $u$  jest promieniem koła, według którego powierzchnia stożka cienia przecina się z płaszczyzną, odległą od płaszczyzny  $(\xi, \eta)$  o  $\zeta$  i do niej równoległą, a równanie (99) przedstawia samo to koło.

Obserwator znajdujący się w którymkolwiek z punktów tego koła, widzi zetknięcie się brzegów tarczy Księżyca i Słońca, czyli kontakt. Jeżeli  $u'$  i  $f$  odnoszą się do stożka półcienia, to zachodzi kontakt brzegów zewnętrzny, gdy zaś odnoszą się do stożka pełnego cienia, to kontakt jest wewnętrzny. Wobec tego, że oś cienia, a więc i stożki cienia, zmieniają swe położenie, chwila kontaktu jest chwilą, w której punkt, znajdujący się przedtem nazewnątrz stożka, przechodzi do stożka, lub też chwilą, której punkt, znajdujący się przedtem wewnątrz stożka cienia, wychodzi z niego. Dla punktu, który wchodzi do stożka cienia, w chwili kontaktu zaćmienie się zaczyna, dla punktu, który wychodzi ze stożka cienia, zaćmienie się kończy. Ponieważ stożek pełnego cienia znajduje się wewnątrz stożka półcienia, więc w punkcie, który przechodzi przez stożek pełnego cienia, obserwuje się cztery kontakty: pierwszy kontakt, gdy zaczyna się zaćmienie częściowe, drugi kontakt, gdy zaczyna się zaćmienie całkowite lub pierścieniowe, trzeci kontakt, gdy kończy się zaćmienie całkowite lub pierścieniowe i czwarty kontakt, gdy kończy się zaćmienie częściowe. Jeżeli punkt przechodzi tylko przez stożek półcienia w przestrzeni nazewnątrz stożka pełnego cienia, to oczywiście obserwowane mogą być tylko dwa kontakty.

Jeżeli punkt  $\xi, \eta, \zeta$  ma być punktem powierzchni Ziemi, to muszą dla niego być spełnione warunki, określone przez wzory (89).

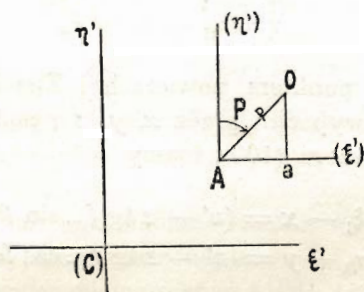


Gdy więc w równaniu (99) i we wzorze (100) wprowadzimy na miejsce  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  wartości, stojące po prawej stronie wzorów (89), to otrzymamy równanie pomiędzy dwiema zmiennymi  $\varphi_1$  i  $(\vartheta + \Delta a)$ , z którego można wyznaczyć  $(\vartheta + \Delta a)$  dla każdej, dowolnie przyjętej, wartości  $\varphi_1$ .

Przypuścimy, że dla danej wartości  $\varphi_1$  otrzymujemy z tego równania wartość rzeczywistą  $(\vartheta + \Delta a)$ . Ponieważ  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $u'$ ,  $f$  we wzorach (99) i (100) są obliczone dla danej wartości  $\vartheta_g$ , jak również  $\Delta a$  według wzoru (88), więc znając  $\vartheta + \Delta a$ , znajdujemy też  $\vartheta$  oraz  $\lambda = \vartheta_g - \vartheta$ .

Gdy jednakże dla danej wartości  $\varphi_1$  otrzymuje się urojoną wartość na  $(\vartheta + \Delta a)$ , to znaczy, że w szerokości zredukowanej  $\varphi_1$  niema na powierzchni Ziemi punktu, leżącego na powierzchni stożka cienia. Gdy dla wszystkich wartości  $\varphi_1$  od  $-90^\circ$  do  $+90^\circ$  otrzymuje się same urojone wartości na  $\vartheta + \Delta a$ , to znaczy, że cała Ziemia znajduje się nazewnątrz stożka cienia, że więc nigdzie na Ziemi zaćmienie nie zachodzi.

Jest naturalnie rzeczą ważną zgóry określić warunki, które muszą być spełnione, jeżeli zaćmienie w granicach kuli ziemskiej ma zachodzić, a gdy warunki te są spełnione, znaleźć sposób jak najprostszy wyznaczenia tych punktów, które w danej chwili mają początek lub koniec zaćmienia.



Rys. 9.

Poprowadźmy w tym celu przez dowolny punkt, którego odległość od płaszczyzny  $(\xi, \eta)$  niech będzie  $\zeta$ , płaszczyznę prostopadłą do osi cienia i niech będzie  $(C)$  punktem przecięcia się tej płaszczyzny z osią  $\zeta$ , (rys. 9), a  $(C)\xi'$  i  $(C)\eta'$  proste, według których płaszczyzna ta przecina się z płaszczyznami  $(\xi\zeta)$  i  $(\eta\zeta)$ , a więc równoległe do osi  $\xi$  i  $\eta$ . Punkt przecięcia się osi cienia z płaszczyzną  $(\xi'\eta')$  oznaczmy przez  $O$ ; punkt ten oczywiście jest środkiem koła, według którego stożek cienia przecina się z płaszczyzną  $(\xi'\eta')$ .



Gdy spólrzędne punktu O w układzie  $(\xi' \eta')$  oznaczymy przez  $\xi_1$  i  $\eta_1$ , to jest oczywiście  $\xi_1 = \xi_1'$ ,  $\eta_1 = \eta_1'$ . Oznaczmy jeszcze przez  $\xi', \eta'$  spólrzędne dowolnego punktu A w płaszczyźnie  $(\xi' \eta')$ , którego spólrzędne w układzie  $(\xi \eta \zeta)$  są  $\xi$  i  $\eta$ , to jest także  $\xi' = \xi$ ,  $\eta' = \eta$ .

Poprowadźmy przez punkt A proste A  $(\xi')$  i A  $(\eta')$ , równoległe do osi  $\xi'$  i  $\eta'$ , i niech będzie  $AO = p$  i  $\angle (\eta') A\bar{O} = P$ , to z rysunku 9 widzimy, że

$$\begin{aligned} Aa &= \xi_1' - \xi' = \xi_1 - \xi = p \cdot \sin P, \\ aO &= \eta_1' - \eta' = \eta_1 - \eta = p \cdot \cos P. \end{aligned}$$

Zakładając, że punkt A leży na kole cienia, przyjmujemy  $p = u$ ,  $P = P_u$ , a więc

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi &= u \cdot \sin P_u \\ \eta_1 - \eta &= u \cdot \cos P_u. \end{aligned} \quad (101)$$

Wzory (101) są równoznaczne z równaniem (99), w które przechodzą, gdy je podniesiemy do kwadratu i dodamy. Oczywiście każdej danej wartości kąta  $P_u$  odpowiada określony punkt na kole cienia, którego spólrzędne wypływają ze wzorów (101) mianowicie

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 - u \sin P_u \\ \eta &= \eta_1 - u \cos P_u \end{aligned} \quad (102)$$

Jeżeli A jest punktem powierzchni Ziemi, to oznaczając jego spólrzędne w tym wypadku przez  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i podstawiając na miejsce  $u$  wartość według wzoru (100), mamy

$$\begin{aligned} \xi_1 - x &= (u' - z \operatorname{tg} f) \cdot \sin P_u, \\ \eta_1 - y &= (u' - z \operatorname{tg} f) \cdot \cos P_u. \end{aligned} \quad (103)$$

Podstawiając tu na miejsce  $x$ ,  $y$ ,  $z$  wartości według wzorów (89), otrzymamy dwa równania, określające dwie niewiadome  $\varphi_1$  i  $(\vartheta + \Delta \alpha)$ . Zamiast tego jednakże łatwiej dochodzi się do celu, gdy określimy wartości trzech niewiadomych  $x$ ,  $y$ ,  $z$  z dwóch równań (103) i z trzeciego, które otrzymamy, podnosząc do kwadratu wzory (89) i dodając je do siebie. Jest ono następujące

$$x^2 + y^2 + z^2 = (1 - \alpha)^2 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 = 1 - (2\alpha - \alpha^2) \sin^2 \varphi_1. \quad (104)$$

Gdy  $x$ ,  $y$ ,  $z$  wyznaczmy z równań (103) i (104), to  $\varphi_1$  i  $(\vartheta + \Delta \alpha)$  za pomocą wzorów (89) można obliczyć bez trudności.

Celem rozwiązania równań (103) i (104), wprowadzamy zamiast  $z$  nową niewiadomą, określoną w sposób następujący. Utwórzmy  $y \cos d$  i  $z \sin d$ , to z drugiego i trzeciego z wzorów (89) wynika

$$y \cos d + z \sin d = (1 - \alpha) \sin \varphi_1. \quad (105)$$

Gdy wypływającą stąd wartość  $\sin \varphi_1$  podstawimy w równaniu (104), to wynika z dostatecznym przybliżeniem, po opuszczeniu wyrazu, zawierającego  $\alpha^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha(y \cos d + z \sin d)^2 = 1, \quad (106)$$

które piszemy w postaci

$$x^2 + y^2 + \dot{z}^2 = 1,$$

gdzie oznaczono

$$\dot{z}^2 = z^2 + 2\alpha(y \cos d + z \sin d)^2. \quad (107)$$

Ponieważ  $z$  występuje w równaniach (103) tylko w iloczynach, których jednym czynnikiem jest  $\operatorname{tg} f$ , mający bardzo małą wartość, więc bez wpływu na dokładność możemy w tych równaniach pisać  $\dot{z}$  zamiast  $z$ ; w ten sposób zastępujemy niewiadomą  $z$  przez  $\dot{z}$  i do wyznaczenia niewiadomych  $x$ ,  $y$ ,  $\dot{z}$  służą trzy równania następujące:

$$\begin{aligned} \xi_1 - x &= (u' - \dot{z} \operatorname{tg} f) \sin P_u, \\ \eta_1 - y &= (u' - \dot{z} \operatorname{tg} f) \cos P_u, \\ x^2 + y^2 + \dot{z}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (108)$$

Gdy z tych równań niewiadome zostaną wyznaczone, ze wzoru (107) wypływa też wartość spólrzędnej  $z$ .

Zajmijmy się rozwiązaniem równań (108). Oznaczmy w tym celu

$$\begin{aligned} \xi_1 - u' \sin P_u &= \sin \varepsilon \sin \gamma, \\ \eta_1 - u' \cos P_u &= \sin \varepsilon \cos \gamma. \end{aligned} \quad (109)$$

Jest zatem

$$\begin{aligned} x &= \sin \varepsilon \sin \gamma + \dot{z} \operatorname{tg} f \sin P_u, \\ y &= \sin \varepsilon \cos \gamma + \dot{z} \operatorname{tg} f \cos P_u, \end{aligned} \quad (110)$$

a gdy równania te podniesiemy do kwadratu i dodamy

$$x^2 + y^2 = \sin^2 \varepsilon + 2 \sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} f \cdot \dot{z} \cdot \cos(P_u - \gamma) + \dot{z}^2 \operatorname{tg}^2 f. \quad (111)$$

Ostatni wyraz jest tak mały, że zawsze można go opuścić. Podstawiając więc wartość na  $x^2 + y^2$  z równań (111) w trzecim z równań (108), otrzymamy

$$z^2 = \cos^2 \varepsilon - 2z \sin \varepsilon \operatorname{tg} f \cos (P_u - \gamma). \quad (112)$$

Ponieważ drugi wyraz z powodu czynnika  $\operatorname{tg} f$  jest bardzo mały, więc  $\cos \varepsilon$  można uważać za przybliżoną wartość  $z$  i tę wartość przybliżoną podstawić zamiast  $z$  w drugim wyrazie wzoru (112). Wtedy jest

$$z^2 = \cos^2 \varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos (P_u - \gamma) \operatorname{tg} f$$

oraz z dokładnością do pierwszej potęgi  $\operatorname{tg} f$

$$z = \pm [\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos (P_u - \gamma) \operatorname{tg} f]. \quad (113)$$

Z dwóch wartości  $z$ , wypływających z powyższego wzoru, tylko dodatnia czyni zadość warunkom zadania, gdyż półkula, na której jest widzialne zaćmienie, jest zwrócona ku Słońcu.

Gdy  $z$  zostało obliczone, wzory (110) służą do obliczenia współrzędnych  $x$  i  $y$ , a  $z$  oblicza się zapomocą wzoru (107), kładąc w wyrazie pomnożonym przez  $\alpha$ ,  $z$  zamiast  $z$ , mianowicie

$$z^2 = z^2 - 2\alpha (y \cos d + z \sin d)^2. \quad (107')$$

Spółrzędne geograficzne określamy następnie zapomocą wzorów (90) i (89'). Ze wzorów

$$c \cdot \cos (C + d) = y$$

$$c \cdot \sin (C + d) = z$$

znajdujemy  $c$  i  $C$ , poczem jest  $\sin \varphi_1 = \frac{c \cdot \cos C}{1 - \alpha}$ ; dalej zaś ze wzorów

$$\cos \varphi_1 \cdot \sin (\vartheta + \Delta a) = x$$

$$\cos \varphi_1 \cdot \cos (\vartheta + \Delta a) = c \cdot \sin C$$

wypływa  $(\vartheta + \Delta a)$ , a więc i  $\vartheta$  wobec tego, że  $\Delta a$  jest znane. Wreszcie jest  $\lambda = \vartheta_g - \vartheta$  i  $\operatorname{tg} \varphi' = (1 - \alpha) \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$ .

**11. Kilka innych postaci równań koła cienia.** Równania (101) w połączeniu ze wzorem (100), jak widzieliśmy, prowadzą do wzorów, które w dość prosty sposób pozwalają obliczyć współrzędne geograficzne tych punktów, które w danej chwili mają początek lub koniec zaćmienia. Jednakże zadanie takie w praktyce rzadko zachodzi, gdyż nie przedstawia ono większego interesu. Wobec zmienności wielkości  $\xi_1, \tau_1, u'$  i  $f$  oraz przedewszystkiem  $\vartheta$ , wartości współrzędnych

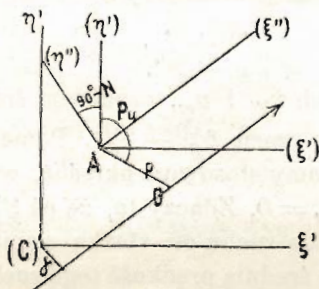


dla danego  $P_u$  ulegają szybkiej zmianie i jest rzeczą istotniejszą zbadać przebieg zjawiska zaćmienia z jednej strony dla danego punktu powierzchni Ziemi, w którym zaćmienie w istocie zachodzi, z drugiej zaś strony przebieg zaćmienia dla całej Ziemi. Do celów powyższych równania (101) nie są dogodne, gdyż elementy, od których przebieg zaćmienia najbardziej zależy, nie występują w nich w postaci wyraźnej i możliwie jak najprostszej.

Jest mianowicie rzeczą celową przejść z układu  $(\xi' \eta')$  na inny  $(\xi'' \eta'')$ , którego osie mają kierunek, określony przez ruch osi stożka cienia. Oznaczmy ogólnie przez  $(90^\circ - N)$  kąt, jaki nowe osie  $\xi''$  i  $\eta''$  tworzą z osiami  $\xi'$  i  $\eta'$ , to, gdy początek nowego układu pozostaje niezmienny, i zważywszy, że  $\xi' = \xi$  i  $\eta' = \eta$ , wzory przejścia z układu  $(\xi \eta)$  na  $(\xi'' \eta'')$  są następujące:

$$\begin{aligned}\xi'' &= \xi \sin N + \eta \cos N \\ \eta'' &= -\xi \cos N + \eta \sin N.\end{aligned}\quad (114)$$

Równania (101) zachowują swą postać także dla tego nowego układu z tą różnicą, że kąt  $P_u$  należy zastąpić przez  $P'_u$ , który kierunek AO tworzy z kierunkiem osi  $\eta''$ . Jak widzimy z rysunku 10,



Rys. 10.

jest  $P'_u = (\eta'') AO = 90^\circ + P_u - N$ . Gdy więc położymy

$$P_u - N = \psi \quad (115)$$

oraz przez  $\xi''_1$  i  $\eta''_1$  oznaczymy spórzędne środka cienia w układzie  $(\xi'' \eta'')$ , to równania koła cienia mają postać następującą:

$$\begin{aligned}\xi''_1 - \xi'' &= u \cdot \cos \psi \\ \eta''_1 - \eta'' &= -u \cdot \sin \psi,\end{aligned}\quad (116)$$

gdzie oczywiście wartości  $\xi''_1$  i  $\eta''_1$  wypływają ze wzorów (114) po podstawieniu w nich  $\xi_1$  i  $\eta_1$  zamiast  $\xi$  i  $\eta$ .

Kątem  $N$  możemy rozporządzić dowolnie, a więc też w ten sposób, ażeby przez odpowiedni wybór jego wartości uzyskać jak najprostszą postać współrzędnych środka cienia  $\xi_1'', \eta_1''$  jako funkcji czasu.

Niech będą  $\vartheta_g^{(1)}$  i  $\vartheta_g^{(2)}$  prawdziwe czasy słoneczne południka greenwichskiego w dwóch momentach przebiegu zaćmienia na Ziemi i współrzędne środka cienia w tych chwilach w układzie  $(\xi, \eta)$  niech będą odpowiednio  $\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}$  i  $\xi_1^{(2)}, \eta_1^{(2)}$ . Oznaczamy

$$\frac{\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}}{\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}} = v_\xi, \quad (117)$$

$$\frac{\eta_1^{(2)} - \eta_1^{(1)}}{\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}} = v_\eta,$$

to  $v_\xi$  i  $v_\eta$  oznaczają średnie prędkości zmian wartości współrzędnych środka cienia w czasie  $\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}$  w układzie  $(\xi, \eta)$ . Jest zatem

$$\xi_1^{(2)} = \xi_1^{(1)} + v_\xi \cdot (\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}), \quad (118)$$

$$\eta_1^{(2)} = \eta_1^{(1)} + v_\eta \cdot (\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}).$$

Podobnie jest też

$$\xi_1''^{(2)} = \xi_1''^{(1)} + v_{\xi''} \cdot (\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}), \quad (118')$$

$$\eta_1''^{(2)} = \eta_1''^{(1)} + v_{\eta''} \cdot (\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}).$$

i we wzorach powyższych  $v_{\xi''}$  i  $v_{\eta''}$  oznaczają średnie prędkości zmian współrzędnych  $\xi_1'', \eta_1''$  w czasie  $\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}$ . Ponieważ kąt  $N$ , a więc też i kierunek osi  $\xi''$  i  $\eta''$ , mamy stosownie określić, więc określamy go, stawiając warunek, że  $v_{\eta''} = 0$ . Znaczy to, że oś  $\xi''$  obieramy w kierunku równoległym do kierunku ruchu osi stożka cienia w czasie  $\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}$ ; a zatem  $v_{\xi''} = n$  oznacza średnią prędkość tego ruchu w czasie  $\vartheta_g^{(2)} - \vartheta_g^{(1)}$ . Ponieważ wzory przejścia (114) odnoszą się tak samo do składowych prędkości, jak i do współrzędnych, więc jest też

$$n = v_\xi \cdot \sin N + v_\eta \cdot \cos N \quad (119)$$

$$0 = -v_\xi \cdot \cos N + v_\eta \cdot \sin N$$

i z tych wzorów kąt  $N$  z łatwością się wyznacza. Mnożąc pierwsze z tych równań przez  $\sin N$ , a drugie przez  $-\cos N$ , i dodając, znajdujemy

$$v_\xi = n \cdot \sin N;$$

mnożąc zaś pierwsze równanie przez  $\cos N$ , a drugie przez  $\sin N$ , i dodając, znajdujemy

$$v_\eta = n \cdot \cos N.$$



Gdy jeszcze przy obranym kierunku osi  $\xi''$  i  $\eta''$   $n$  ma mieć zawsze wartość dodatnią i zawsze jest wobec kierunku ruchu stożka  $v_\xi > 0$ , więc wzory

$$\begin{aligned} n \sin N &= v_\xi \\ n \cos N &= v_\eta \end{aligned} \quad (120)$$

określają kąt  $N$ , którego wartość przypada zawsze między  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , oraz prędkość osi cienia  $n$ .

Oznaczamy  $\eta_1''^{(2)} = \eta_1''^{(1)} = \gamma$ , a odległość  $(C)O$  środka cienia od początku układu czyli też odległość osi cienia od środka Ziemi przez  $\Gamma$ , to jest oczywiście

$$\Gamma^2 = \xi_1''^{(2)} + \gamma^2 \quad (121)$$

i odległość ta jest najmniejsza, gdy  $\xi_1''^{(2)} = 0$ , mianowicie  $\Gamma = \gamma$ . Niechaj będzie  $\mu$  prawdziwy czas greenwichski, w którym odległość osi cienia od środka Ziemi jest najmniejsza, to jest oczywiście

$$\xi_1''^{(1)} + n \cdot (\mu - \vartheta_g^{(1)}) = 0, \quad (122)$$

a że według wzorów (114) jest

$$\xi_1''^{(1)} = \xi_1^{(1)} \sin N + \eta_1^{(1)} \cos N$$

więc jest też

$$\eta_1''^{(1)} = -\xi_1^{(1)} \cos N + \eta_1^{(1)} \sin N, \quad (123)$$

a z równania (122)

$$\mu = \vartheta_g^{(1)} - \frac{1}{n} \cdot (\xi_1^{(1)} \sin N + \eta_1^{(1)} \cos N). \quad (124)$$

Gdy więc ogólnie  $\xi_1''$  i  $\eta_1''$  są współrzędnymi środka cienia w czasie prawdziwym greenwichskim  $\vartheta_g$ , to

$$\begin{aligned} \xi_1'' &= n \cdot (\vartheta_g - \mu), \\ \eta_1'' &= \gamma, \end{aligned} \quad (125)$$

a współrzędne miejsca obserwacji są obecnie zgodne z wzorami (114)

$$\begin{aligned} x'' &= x \cdot \sin N + y \cdot \cos N \\ y'' &= -x \cdot \cos N + y \cdot \sin N \end{aligned} \quad (126)$$

i należy tu na miejsce  $x$ ,  $y$  podstawić wartości według wzorów (89).



Wprowadzając wartości współrzędnych według (125) i (126) w równaniach (116), nadajemy im postać następującą:

$$u \cos \phi = n (\vartheta_g - \mu) - \cos \varphi_1 \sin (\vartheta + \Delta a) \sin N - \\ - [(1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos d - \cos \varphi_1 \sin d \cos (\vartheta + \Delta a)] \cos N, \quad (127)$$

$$u \sin \phi = -\gamma - \cos \varphi_1 \sin (\vartheta + \Delta a) \cos N + \\ + [(1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos d - \cos \varphi_1 \sin d \cos (\vartheta + \Delta a)] \cdot \sin N,$$

albo też

$$u \sin \phi = -\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos d \sin N - \\ - \cos \varphi_1 [\sin (\vartheta + \Delta a) \cos N + \cos (\vartheta + \Delta a) \sin N \sin d], \quad (128)$$

$$u \cos \phi = n (\vartheta_g - \mu) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos d \cos N + \\ + \cos \varphi_1 [-\sin (\vartheta + \Delta a) \sin N + \cos (\vartheta + \Delta a) \cos N \sin d].$$

Piszemy tu jeszcze  $\vartheta_g = \vartheta + \lambda$  i wprowadzamy kąty pomocnicze  $g$ ,  $G$ ,  $k$  i  $K$ , określone przez wzory

$$\begin{aligned} \cos d \sin N &= \cos g \\ \sin d \sin N &= \sin g \sin G \\ \cos N &= \sin g \cos G \end{aligned} \quad (129)$$

oraz

$$\begin{aligned} \cos d \cos N &= \cos k \\ \sin N &= \sin k \cdot \sin K \\ \sin d \cos N &= \sin k \cdot \cos K. \end{aligned} \quad (130)$$

Kąty  $G$  i  $K$  określamy z tych wzorów, przyjmując  $\sin g > 0$  i  $\sin k > 0$ . Ponieważ prócz tego zawsze  $\sin N > 0$ , więc także  $\cos g > 0$  oraz  $\sin K > 0$ , a zatem też zawsze  $0 \leq g \leq 90^\circ$  oraz, ponieważ  $\cos k \geq 0$  i  $\cos K \geq 0$ , kąty  $K$  i  $k$  zawarte są zawsze między  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

Będziemy w dalszym ciągu uważali  $n$  za drogę osi cienia, zrobioną w ciągu godziny; ponieważ więc w drugim ze wzorów (128)  $\vartheta_g - \mu$  jest wyrażone w stopniach, więc należy jeszcze zastąpić  $n$  przez  $\frac{n}{15}$ .

Wzory (128) przyjmują więc postać następującą:

$$\begin{aligned} u \sin \phi &= -\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g - \cos \varphi_1 \sin g \sin (G + \vartheta + \Delta a), \\ u \cos \phi &= \frac{n}{15} (\vartheta + \lambda - \mu) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos (K + \vartheta + \Delta a), \quad (131) \\ u &= u' - [(1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos (\vartheta + \Delta a)] \cdot \operatorname{tg} f. \end{aligned}$$

Równania (127) oraz równania (131), stanowiące ich przekształcenie, są, jak to zobaczymy, bardzo użyteczne przy rozważaniu wielu poszczególnych zagadnień teorii zaćmień. Można je przekształcać w rozmaity sposób, dostosowując ich postać do właściwości danego zagadnienia. Na tem miejscu wyprowadzimy jeszcze tylko jedną ich postać, mającą bardzo rozległe zastosowanie.

Napiszmy

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta - \vartheta_0),$$

gdzie  $\vartheta_0$  oznacza kąt godzinny Słońca w jakiejś dowolnie obranej epoce początkowej, to jest ogólnie

$$\begin{aligned} \sin(A + \vartheta) &= \sin[A + \vartheta_0 + (\vartheta - \vartheta_0)] = \sin(A + \vartheta_0) \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \\ &+ \cos(A + \vartheta_0) \sin(\vartheta - \vartheta_0) = \sin(A + \vartheta_0) \cdot \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\right) + \\ &+ 2 \cos(A + \vartheta_0) \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} = \sin(A + \vartheta_0) - \\ &- 2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \left[ \sin(A + \vartheta_0) \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} - \cos(A + \vartheta_0) \cos \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \right] = \\ &= \sin(A + \vartheta_0) + 2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \cdot \cos\left(A + \vartheta_0 + \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\right) = \\ &= \sin(A + \vartheta_0) + 2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \cos\left(A + \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (132)$$

i podobnie

$$\cos(A + \vartheta) = \cos(A + \vartheta_0) - 2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \sin\left(A + \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}\right). \quad (133)$$

Dalej możemy napisać

$$2 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} = \frac{15 \sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}}{\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15}$$

i gdy oznaczymy

$$15 \cdot \frac{\sin \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}}{\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}} = z, \quad (134)$$

to jest  $\lim_{\vartheta \rightarrow \vartheta_0} z = 15$ , a wzery (132) i (133) otrzymują następującą postać:

$$\sin(A + \vartheta) = \sin(A + \vartheta_0) + z \cos\left(A + \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}\right) \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15}, \quad (135)$$

$$\cos(A + \vartheta) = \cos(A + \vartheta_0) - z \sin\left(A + \frac{\vartheta + \vartheta_0}{2}\right) \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15}. \quad (136)$$



Stosując te wzory do  $\sin(G + \vartheta + \Delta a)$ ,  $\cos(K + \vartheta + \Delta a)$  i  $\cos(\vartheta + \Delta a)$  we wzorach (131), znajdujemy:

$$u \sin \psi = -\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g - \cos \varphi_1 \sin g \sin(G + \vartheta_0 + \Delta a) - \\ - \varkappa \cos \varphi_1 \sin g \cos\left(G + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}\right) \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15},$$

$$u \cos \psi = \frac{n}{15} (\vartheta_0 + \lambda - \mu) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k + \\ + \cos \varphi_1 \sin k \cos(K + \vartheta_0 + \Delta a) + \quad (137) \\ + \left[ n - \varkappa \cos \varphi_1 \sin k \sin\left(K + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}\right) \right] \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15},$$

$$u = u' - \left[ (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos(\vartheta_0 + \Delta a) - \right. \\ \left. - \varkappa \cos \varphi_1 \cos d \sin\left(\Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}\right) \right] \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15} \cdot \operatorname{tg} f.$$

**12. Obliczenie wielkości, określających drogę osi cienia oraz środka cienia w płaszczyźnie ( $\xi \eta$ ).** Według wzorów (117)  $v_\xi$  i  $v_\eta$  są to średnie wartości zmian współrzędnych  $\xi_1$  i  $\eta_1$  w jednostce czasu w przeciągu czasu  $\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}$ . Te średnie wartości określają prędkość  $v_\xi$ , która w czasie  $\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}$  zmienia się tylko w przybliżeniu; dokładną wartość prędkości  $v_\xi$  i  $v_\eta$  w jakimś czasie przedstawiają pochodne  $\frac{d\xi_1}{d\vartheta}$  i  $\frac{d\eta_1}{d\vartheta}$ , obliczone dla tego czasu.

Ponieważ pochodne te są funkcjami czasu, więc zmiennymi są też wielkości  $n$  i  $N$ , określone przez wzory (120), oraz wielkości  $\gamma$  i  $\mu$ , wpływające ze wzorów (123) i (124). W równaniach zatem (128) należy wszystkie te wielkości uważać za zmienne i dla danej wartości  $\vartheta$ , użytej w nich, obliczone. Te same uwagi dotyczą wielkości  $g$ ,  $G$ ,  $k$  i  $K$ , występujących we wzorach (131) i (137). Są to wprawdzie wszystko wielkości powoli zmienne i w niektórych zagadnieniach teorii można uważać je nawet za stałe w ciągu niewielkich okresów czasu, w innych jednakże zagadnieniach znajomość ich wartości w każdej chwili jest wymagana. Zajmijmy się sprawą ich obliczenia.

Wzory (84) pozwalają obliczyć wartości współrzędnych  $\xi_1$  i  $\eta_1$  dla dowolnej epoki, natomiast utworzenie pochodnych  $\frac{d\xi_1}{d\vartheta}$  i  $\frac{d\eta_1}{d\vartheta}$  według tych wzorów nastęrczałoby wielkie trudności. Ponieważ jednakże chodzi tylko o wartości liczbowe tych pochodnych, więc możemy zastosować różniczkowanie liczbowe.



Piszmy ogólnie  $a$  zamiast  $\xi_1$  wzgl.  $\gamma_1$  i niech będzie  $\vartheta_0$  czas prawdziwy greenwichski w chwili bliskiej epoki geocentrycznego połączenia Księżyca i Słońca w rektascenzji, np. pełna godzina czasu słonecznego, najbliższa epoki połączenia; oznaczmy przez  $\tau$  określony stały przeciąg czasu, a przez

$$\dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \dots$$

szereg wartości funkcji  $a$  w epokach

$$\dots \vartheta_0 - 2\tau, \vartheta_0 - \tau, \vartheta_0, \vartheta_0 + \tau, \vartheta_0 + 2\tau, \dots$$

Do obliczenia tych wartości korzystamy z danych, zawartych w efemerydach astronomicznych. Wszystkie wielkości zmienne, występujące we wzorach (84), znajdujemy obliczone w efemerydach dla każdego średniego południa greenwichskiego. Niechaj będzie

$$t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$$

szereg epok efemerydy tak obranych, ażeby czas prawdziwy  $\vartheta_0 - 2\tau$  przypadał pomiędzy epokami  $t_{-1}$  i  $t_0$ . Jeżeli oznaczmy

$$(\vartheta_0 - 2\tau) - t_{-1} = q,$$

to jest oczywiście ogólnie

$$\vartheta_0 + n\tau = t_{-1} + q + (n+2)\tau. \quad (138)$$

Gdy więc, stosując dane, zawarte w efemerydach dla epok  $t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$ , obliczymy wartość spórzędnych  $\xi_1, \gamma_1$  według wzorów (84), które oznaczmy ogólnie przez  $A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$ , to wartości  $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$  można obliczyć przez interpolację. Jak wspomnieliśmy, interwałem efemerydy jest doba średnia, t. j. 24 godziny średnie, interwał zaś pomiędzy epoką  $t_{-1}$  a poszczególnymi epokami  $\vartheta_0 + n\tau$  wynosi ogólnie, jak wskazuje wzór (138),  $q + (n+2)\tau$ . Gdy  $q$  i  $\tau$  wyrażone są w godzinach średnich, to interwał ten w dobach średnich wynosi ogólnie

$$i_n = \frac{2 + (n+2)\tau}{24}, \quad (139)$$

a gdy jeszcze, jak to zwykle przyjmuje się w praktyce, jest  $\tau = 1^h$ , to

$$i_n = \frac{q + n + 2}{24}. \quad (140)$$

Tworząc więc tabelkę funkcj  $A$  i jej różnic

$A_{-1}$				
	$\Delta A_{-1}$			
$A_0$		$\Delta^2 A_{-1}$		
	$\Delta A_0$		$\Delta^3 A_{-1}$	
$A_1$		$\Delta^2 A_0$		.....
	$\Delta A_1$		$\Delta^3 A_0$	
$A_2$		$\Delta^2 A_1$		
	$\Delta A_2$			
$A_3$				

i stosując znany wzór interpolacyjny Newtona, znajdujemy ogólnie

$$a_n = A_{-1} + \binom{i_n}{1} \Delta A_{-1} + \binom{i_n}{2} \Delta^2 A_{-1} + \binom{i_n}{3} \Delta^3 A_{-1} + \dots \quad (141)$$

i gdy interwał obliczony jest zapomocą wzoru (140), to wartości  $a_n$  odpowiadają interwałom godzinnym, liczonym od epoki  $\vartheta_0$  czasu prawdziwego greenwichskiego.

Oznaczając

$$v_n = \left( \frac{da}{d\vartheta} \right) \cdot \vartheta = \vartheta_n,$$

możemy dla epoki  $\vartheta$ , zawartej pomiędzy  $\vartheta_n$  a  $\vartheta_{n+1}$ , przyjąć

$$a = a_n + v_n (\vartheta - \vartheta_n),$$

gdzie naturalnie interwał  $\vartheta - \vartheta_n$  wyrażony być musi w godzinach średnich. Mając wartości  $a_n$ , obliczone dla szeregu epok równoodległych, oraz tworząc tabelkę ich wartości i różnic, znajdujemy wartość  $v$ , według znanych wzorów różniczkowania liczbowego

$$v_n = \frac{1}{\tau} \left( \Delta a_n - \frac{1}{2} \Delta^2 a_n + \frac{1}{3} \Delta^3 a_n - \frac{1}{4} \Delta^4 a_n + \dots \right), \quad (142)$$

w czem  $\tau$  jest interwałem tabelki.

Gdy zaś zostały obliczone wartości  $v_n$ , to wartość  $v$ , odpowiadającą dowolnej epoce  $\vartheta_1$ , można obliczyć przez interpolację.

Celem ułatwienia obliczeń szczegółowych, odnoszących się do danego zaćmienia, w rocznikach astronomicznych podawane są zestawienia wartości wszystkich wielkości zmiennych, występujących we wzorach teorii zaćmień, czyli t. zw. *elementów zaćmienia*, dla całego czasu trwania zaćmienia w równych odstępach czasu. Odstęp czasu zazwyczaj używany wynosi  $\frac{1}{20}$  doby średniej i w granicach tego interwału dla każdej epoki pośredniej wartość każdego elementu obliczyć można przez interpolację.



13. Kryterja, określające możliwość zajścia zaćmienia oraz rodzaj zaćmienia, w przypadkach, gdy zaćmienie zachodzi. Gdy za jednostkę długości przyjmiemy promień równika ziemskiego, to wzór (60) daje

$$\zeta_0 = \zeta_2 + \frac{r_2}{\sin f}$$

i  $\zeta_0$  ogólnie przedstawia odległość wierzchołka stożka cienia od płaszczyzny ( $\xi \eta$ ), wyrażoną w tych jednostkach. Tylko dla  $f < 0$ , t. j. dla stożka pełnego cienia,  $\zeta_0$  może mieć wartość ujemną lub dodatnią. W pierwszym przypadku niemożliwe jest zaćmienie pierścieniowe, a możliwe tylko zaćmienie całkowite, w drugim przypadku możliwe jest zaćmienie całkowite i pierścieniowe.

Gdy przez  $\rho_\zeta$  oznaczymy promień Ziemi, przypadający w kierunku osi  $\zeta$ , to

$$\zeta_0 - \rho_\zeta = \zeta_2 + \frac{r_2}{\sin f_2}$$

wyraża odległość wierzchołka stożka pełnego cienia od płaszczyzny  $\zeta = \rho_\zeta$ . Jeżeli jest

$$0 < \zeta_0 < \rho_\zeta,$$

to wierzchołek stożka cienia biegnie pomiędzy płaszczyznami ( $\xi \eta$ ) i  $\zeta = \rho_\zeta$  i zatem w tych punktach Ziemi, dla których jest  $z > \zeta_0$  zachodzi zaćmienie całkowite, w tych zaś, dla których  $z < \zeta_0$ , zachodzi zaćmienie pierścieniowe.

Gdy wreszcie  $\zeta_0 > \rho_\zeta$ ,

zaćmienie całkowite jest niemożliwe, zajść może tylko zaćmienie pierścieniowe.

Kryterjum, jakim jest możliwy rodzaj zaćmienia, t. j. czy możliwe jest zaćmienie całkowite, czy pierścieniowe, czy mieszane, stanowi wartość promienia koła półcienia w płaszczyźnie ( $\xi \eta$ ). W obliczeniu tych wartości krytycznych można poprzestać na rachunku przybliżonym. Pisząc we wzorze (62)  $r_2$  zamiast  $a$  i uważając za jednostkę długości promień równika ziemskiego, mamy ogólnie

$$u' = \zeta_2 \cdot \operatorname{tg} f + r_2 \cdot \sec f$$



lub ze względu na małą wartość kąta  $f$  z dostatecznym przybliżeniem

$$u' = \zeta_2 \sin f \pm r_2.$$

Przyjmując tu według wzorów (65) i (81)

$$\sin f = \frac{r_2 \pm r_1}{\Delta} = (r_2 \pm r_1) \frac{\sin \pi_1}{1 - \mu}$$

oraz  $\zeta_2 = \rho_2 = \operatorname{cosec} \pi_2$ , znajdujemy

$$u' = r_2 \pm (r_2 \pm r_1) \cdot \frac{\mu}{1 - \mu},$$

a z pominięciem małego wyrazu, zawierającego  $\mu^2$ , wprost

$$u' = r_2 \pm (r_2 \pm r_1) \cdot \mu. \quad (143)$$

Wprowadzając tu wartości liczbowe

$$r_1 = 109 \cdot 0488, \quad r_2 = 0 \cdot 2725,$$

znajdujemy dla stożków półcienia i pełnego cienia

$$\begin{aligned} u'_1 &= 109 \cdot 3213 \cdot \mu + 0 \cdot 2725 \\ u'_2 &= -108 \cdot 7763 \cdot \mu + 0 \cdot 2725. \end{aligned} \quad (144)$$

W płaszczyźnie  $\zeta = \rho_\zeta$  promień koła pełnego cienia jest według wzoru (63)

$$u_2 = u'_2 - \rho_\zeta \cdot \operatorname{tg} f_2$$

albo, gdy z dostatecznym przybliżeniem położymy  $\rho_\zeta = 1$ ,  $\operatorname{tg} f_2 = \sin f_2$  oraz we wzorze

$$\sin f_2 = \frac{r_2 - r_1}{\Delta} = \frac{(r_2 - r_1) \sin \pi_1}{1 - \mu}$$

opuścimy mały wyraz, zawierający  $\mu \sin \pi_1$  i zamiast  $\pi_1$  przyjmiemy  $\pi_1^0 = 8'' \cdot 80$ , a więc  $\sin f_2 = (r_2 - r_1) \cdot \sin 8'' \cdot 80 = -0 \cdot 0045$ , to otrzymamy

$$u_2 = -108 \cdot 7763 \mu + 0 \cdot 2770. \quad (145)$$

Jak widzimy ze wzorów (144) i (145), wartości  $u'_1$ ,  $u'_2$  i  $u_2$  zmieniają się wraz z  $\mu$  i możemy wyznaczyć te wartości  $\mu$ , przy których zachodzi zaćmienie całkowite, pierścieniowe lub mieszane. Mianowicie warunkowi  $\zeta_0 < 0$  odpowiada warunek  $u'_2 \geq 0$ ; a więc z drugiego wzoru (144) wpływa

$$\begin{aligned} \mu &\leq \frac{0.2725}{108.7763}, \log \mu \leq 7.39881, \\ \mu &\leq 0.002505. \end{aligned} \quad (146)$$

Gdy warunek ten jest spełniony, możliwe jest tylko zaćmienie całkowite.

Warunkowi  $\zeta_0 > 0$  odpowiada warunek  $u_2 < 0$ , czyli według wzoru (145)

$$\begin{aligned} \mu &\geq \frac{0.2770}{108.7763}, \log \mu \geq 7.40595, \\ \mu &\geq 0.002547. \end{aligned} \quad (147)$$

Podstawiając wyżej otrzymane wartości graniczne na  $\mu$  we wzorze na  $u'_1$ , znajdujemy

$$\begin{aligned} \log \mu = 7.39881, & \quad u'_1 = 0.5464, \\ \log \mu = 7.40595, & \quad u'_1 = 0.5509 \end{aligned}$$

i warunki (146) i (147) możemy wyrazić też w sposób następujący:

gdy  $u'_1 \leq 0.5464$ , możliwe jest tylko zaćmienie całkowite,  
 „  $u'_1 \leq 0.5509$ , „ „ „ „ pierścieniowe,  
 „  $0.5464 \leq u'_1 \leq 0.5509$ , „ „ „ „ mieszane.

Ponieważ  $\pi_1$  zmienia się w granicach od  $8''.65$  do  $8''.95$ , a  $\pi_2$  w granicach od  $52'0''$  do  $62'0''$ , więc  $\mu$  zmienia się od

$$\frac{\sin 8''.65}{\sin 62'0''} = 0.002325 \text{ do } \frac{\sin 8''.95}{\sin 52'0''} = 0.002869.$$

Odpowiednio więc zmiany  $u_1'$  zawarte są w granicach od 0·5266 do 0·5859. Obszar wartości  $u_1'$ , przy których zachodzi zaćmienie z każdej z branych pod uwagę kategorii, wynosi odpowiednio

$$0·5464 - 0·5266 = 0·0198$$

$$0·5859 - 0·5509 = 0·0350$$

$$0·5509 - 0·5464 = 0·0045$$

i w stosunku do tych liczb w przybliżeniu znajduje się częstość występowania poszczególnych kategorii zaćmień. Na 100 zaćmień przypada więc średnio 33 zaćmień całkowitych, 59 pierścieniowych, a tylko 8 mieszanych.

Krańcowe wartości promienia przekroju stożka pełnego cienia płaszczyznę ( $\xi \eta$ ) są 0·0197 i — 0·0394.

Wartość  $\rho$ , albo związana z nią ściśle wartość  $u_1'$ , stanowi kryterjum konieczne dla danego rodzaju zaćmienia, ale samo przez się nie decyduje, czy zaćmienie w istocie zajdzie. Pod tym względem rozstrzygające znaczenie ma odległość osi cienia od środka Ziemi w chwili jej największego zbliżenia się do środka Ziemi.

Zaćmienie może zajść tylko wtedy, gdy w czasie największego zbliżenia się osi stożka do środka Ziemi, koło cienia w płaszczyźnie  $\xi \eta$  i koło, które jest przekrojem powierzchni Ziemi tą płaszczyzną, nie leżą nazewnątrz siebie. Gdy promień koła cienia w chwili największego zbliżenia się osi cienia bez względu na znak oznaczamy przez  $u'$ , a przez  $\gamma$  tę najmniejszą odległość, to, gdy Ziemię uważamy za kulę o promieniu równym jedności, musi być

$$\gamma \leq 1 + u',$$

jeżeli ma zajść zaćmienie. Gdy zaś spełniony jest warunek  $\gamma < 1$ , to os stożka cienia przecina powierzchnię Ziemi, a w punktach, gdzie to zachodzi, środki Słońca i Księżyca nakrywają się; takie zaćmienie nazywa się *centralnem*.

Gdy więc  $\gamma > 1 + u_1'$ , zaćmienie wogóle jest niemożliwe,

gdy  $1 + |u_2'| \leq \gamma \leq 1 + u_1'$ , zachodzi tylko zaćmienie częściowe,

gdy  $\gamma \leq 1 + |u_2'|$ , zachodzi zaćmienie całkowite lub pierścieniowe.

W związku z wyżej podanymi wartościami liczbowymi wyprowadzamy wnioski następujące:



1. gdy  $\gamma > 1.5859$ , zaćmienie wogóle jest niemożliwe;
2. gdy  $1.5266 \leq \gamma \leq 1.5859$ , możliwe jest zaćmienie częściowe;
3. gdy  $\gamma < 1.5266$ , pewne jest przynajmniej zaćmienie częściowe;
4. gdy  $1.0394 \leq \gamma \leq 1.5266$ , pewne jest zaćmienie częściowe; zaćmienie całkowite lub pierścieniowe niemożliwe;
5. gdy  $1.0197 \leq \gamma \leq 1.0394$ , zachodzi zaćmienie pierścieniowe, gdy  $u' \geq 0.5509$ ; w przeciwnym razie tylko częściowe;
6. gdy  $\gamma \leq 1.0197$ , zaćmienie jest pierścieniowe, gdy  $u' \geq 0.5509$ , zaćmienie jest mieszane, gdy  $0.5464 \leq u' \leq 0.5509$ , zaćmienie jest całkowite, gdy  $u' < 0.5464$ .
7. gdy  $\gamma < 1$ , to zaćmienie pierścieniowe, mieszane lub całkowite jest centralne; rodzaj zaćmienia określa wartość  $u'$ .

Do wyznaczenia  $\gamma$  służy wzór (123) w połączeniu z wzorami, określającymi współrzędne osi cienia oraz kąt  $N$ . Jednakże można wyrazić  $\gamma$  jeszcze w inny sposób, który pozwoli wyprowadzić jeszcze inne kryteria, określające możliwości rozmaitego rodzaju zaćmień.

Gdyby Księżyc znajdował się na ekliptyce, to oś cienia w czasie połączenia się Księżyca ze Słońcem przechodziłaby przez środek Ziemi i byłoby  $\gamma = 0$ . Jeżeli więc  $\gamma > 0$ , to wynika stąd, iż  $\beta_2 \geq 0^\circ$ , i w ścisłym związku z wartością  $\beta_2$  znajduje się wartość  $\gamma$ ; wobec tego przytoczonym poprzednio wartościom granicznym  $\gamma$  odpowiadają też określone wartości graniczne  $\beta_2$ . Zajmijmy się wyszukaniem tych wartości granicznych szerokości astronomicznej Księżyca.

Wartość  $\gamma$  oczywiście nie zależy od kierunku osi  $\xi$  i  $\eta$ . Jeżeli więc obierzemy kierunek osi tak, żeby osią  $\xi$  była prosta, według której płaszczyzna  $(\xi, \eta)$  przecina się z płaszczyzną ekliptyki, a osią  $\eta$  prostopadła do osi  $\xi$ , której dodatni kierunek zwrócony jest ku północy, to wartości współrzędnych osi cienia  $\xi_1, \eta_1$  w tym układzie od wartości  $\xi_1, \eta_1$  tem będą się różniły, że we wzorach (84) należy zastąpić  $\alpha$  przez  $\lambda$ ,  $\delta$  przez  $\beta$  i położyć  $\beta_1 = 0$ . Jest zatem, po opuszczeniu wyrazów, zawierających  $\mu^2$ ,

$$\xi_1 = \frac{\rho_1 \mu}{1 - \mu} \cos \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 1'', \quad (148)$$

$$\eta_1 = \frac{\rho_1 \mu}{1 - \mu} \beta_2 \sin 1''.$$

Jeżeli przyjmiemy, że epoką, dla której obliczono współrzędne, jest chwila geocentrycznego połączenia Księżyca i Słońca, gdy  $\lambda_2 = \lambda_1$ , i gdy przyjmiemy dla tej chwili  $\rho_1 = \rho_1^0$ ,  $\mu = \mu^0$ ,  $\beta_2 = \beta_2^0$ , to jest

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= 0 \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\rho_1^0 \mu^0}{1 - \mu^0} \beta_2^0 \sin 1'' \end{aligned} \quad (149)$$

Przez zmianę osi nie zmienia się oczywiście prędkość i kierunek osi cienia, ale kąt, który tworzy ten kierunek z osią  $\dot{\eta}$ , nie jest już  $\dot{N}$  lecz inny, który oznaczamy przez  $\dot{N}$ . Jest zatem według wzoru (123)

$$\gamma = \frac{\rho_1^0 \mu^0}{1 - \mu^0} \beta_2^0 \sin \dot{N} \sin 1'' \quad (150)$$

Co się tyczy kąta  $\dot{N}$ , to zgodnie ze wzorami (120) jest

$$\operatorname{tg} \dot{N} = \frac{\dot{v}_\xi}{\dot{v}_\eta},$$

gdzie przez  $\dot{v}_\xi$  i  $\dot{v}_\eta$  zostały oznaczone prędkości zmian współrzędnych  $\xi_1$  i  $\eta_1$  w epoce geocentrycznego połączenia w długości. Jeżeli przez  $\Delta \lambda_2$ ,  $\Delta \lambda_1$  i  $\Delta \beta_2$  oznaczymy zmiany współrzędnych  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$  i  $\beta_2$  na godzinę, to jest według wzorów (148)

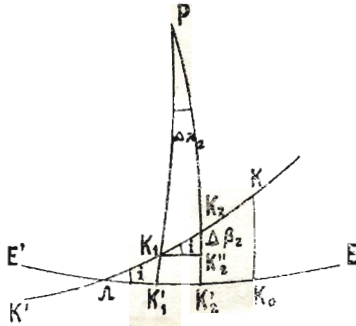
$$\begin{aligned} \dot{v}_\xi &= \frac{\rho_1^0 \mu^0}{1 - \mu^0} \cos \beta_2^0 (\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1) \sin 1'', \\ \dot{v}_\eta &= \frac{\rho_1^0 \mu^0}{1 - \mu^0} \Delta \beta_2 \sin 1'', \end{aligned}$$

a więc

$$\operatorname{tg} \dot{N} = \frac{\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1}{\Delta \beta_2} \cos \beta_2^0 = \frac{\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2} \cdot \frac{\Delta \lambda_2}{\Delta \beta_2} \cos \beta_2^0 \quad (151)$$

Znaczenie czynnika  $\frac{\Delta \lambda_2}{\Delta \beta_2} \cos \beta_2^0$  wyjaśnia rys. 11. Koło  $E'E$  oznacza na nim ekliptykę, koło  $K'K$  drogę Księżyca a  $\Omega$  węzeł drogi Księżyca, nachylonej do ekliptyki pod kątem  $i$ . Jeżeli  $P$  jest biegunem ekliptyki, a  $K_1$  i  $K_2$  położenia Księżyca w odstępie godzinnym, to prowadząc przez  $K_1$  i  $K_2$  koła szerokości, które na ekliptyce określają od-

powiednio punkty  $K_1'$  i  $K_2'$ , znajdujemy  $K_1'K_2' = \Delta\lambda_2$ . Prowadząc zaś przez  $K_1$  koło, równoległe do ekliptyki, określamy na kole szerokości punktu  $K_2$  punkt  $K_2''$  i łuk  $K_2''K_2 = \Delta\beta_2$  wyraża zmianę szerokości Księżyca w ciągu godziny.



rys. 11.

Uważając z dostatecznym przybliżeniem trójkąt  $K_1K_2''K_2$  za prostolinijny i prostokątny przy  $K_2''$ , znajdujemy

$$K_1K_2'' = K_2''K_2 \cdot \text{ctg } i.$$

Gdy zaś szerokość Księżyca w położeniu  $K_1$  oznaczymy przez  $\beta_2^0$ , to  $K_1K_2'' = \Delta\lambda_2 \cdot \cos \beta_2^0$ , i znajdujemy

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\Delta\beta_2} \cos \beta_2^0 = \text{ctg } i,$$

wobec czego wzór (151) otrzymuje postać

$$\text{tg } N = \frac{\Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} \cdot \text{ctg } i. \tag{152}$$

Gdy jeszcze oznaczymy

$$\frac{\Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} \text{ctg } i = \text{ctg } i_1, \tag{153}$$

to  $\text{tg } N = \text{ctg } i_1$  i  $N = 90^\circ - i_1$ ; zamiast wzoru (150) otrzymujemy więc

$$\gamma = \frac{\rho_1^0 \mu^0}{1 - \mu^0} \beta_2^0 \cos i_1 \sin 1''. \tag{154}$$



Wreszcie, ponieważ z dostatecznym przybliżeniem jest

$$\frac{\rho_1^0 \rho^0}{1 - \rho^0} = \frac{1}{\sin \pi_2 - \sin \pi_1} = \frac{1}{(\pi_2 - \pi_1) \sin 1''},$$

więc można przyjąć wprost

$$\gamma = \frac{\beta_2^0}{\pi_2 - \pi_1} \cos i_1. \quad (155)$$

Dla kąta  $i_1$  otrzymujemy wartość dostatecznie przybliżoną, gdy go obliczymy, przyjmując we wzorze (153) średnie wartości na  $\Delta \lambda_1$  i  $\Delta \lambda_2$ . Kładąc

$$\Delta \lambda_1 = \frac{360^0}{R_z}, \quad \Delta \lambda_2 = \frac{360^0}{M_z},$$

w czym  $R_z$  oznacza rok zwrotnikowy,  $M_z$  zaś miesiąc zwrotnikowy, znajdujemy

$$\frac{\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1}{\Delta \lambda_2} = \frac{R_z - M_z}{R_z}.$$

Przyjmując  $R_z = 365^d \cdot 24219879$  i  $M_z = 27^d \cdot 3215810832$ , znajdujemy  $\frac{R_z - M_z}{R_z} = 0.92520$ , a więc

$$\text{ctg } i_1 = 0.92520 \cdot \text{ctg } i. \quad (156)$$

Gdy znana jest wartość  $i$ , a kąt  $i_1$  wyznaczono zapomocą wzoru (156), to ze wzoru (155) wypływa

$$\beta_2^0 = \gamma \cdot (\pi_2 - \pi_1) \cdot \sec i_1. \quad (157)$$

Ze wzoru tego wypływają graniczne wartości na  $\beta$ , gdy podstawimy w nim graniczne wartości odległości  $\gamma$  oraz kątów  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  i  $i$ . Przyjmując, że  $i$  zmienia się w granicach od  $4^{\circ} 57' 4$  do  $5^{\circ} 20' 1$ , znajdujemy jako graniczne wartości kąta  $i_1$  odpowiednio  $5^{\circ} 21'$  i  $5^{\circ} 46'$ .

Ponieważ ogólnie jest  $\gamma \leq 1 + u'$  warunkiem możliwości zaćmienia, gdy  $u'$  ogólnie oznacza promień koła cienia w płaszczyźnie ( $\xi$ ,  $\eta$ ),

więc podstawiając tu na miejsce  $\gamma$  wartość według wzoru (155), mamy wzór

$$\beta_2^0 \leq \sec i_1 \cdot (\pi_2 - \pi_1) \cdot (1 + u'), \quad (158)$$

który pozwala określić wartości  $\beta_2^0$ , przy których możliwe lub niemożliwe jest zaćmienie.

Oznaczmy ogólnie

$$u' = k p. + r_2 = k \frac{\pi_1}{\pi_2} + r_2.$$

to jest

$$\beta_2^0 \leq \sec i_1 (\pi_1 - \pi_2) \left( 1 \pm r_2 \pm k \frac{\pi_1}{\pi_2} \right) \quad (159)$$

i znak górny odnosi się tu do przypadków zaćmienia częściowego lub całkowitego, dla których  $u' > 0$ , a znak dolny do zaćmienia pierścieniowego, dla którego  $u' < 0$ , ale we wzorze (159) wchodzi w rachubę tylko wartość bezwzględna promienia przekroju stożka.

Wpływ zmian kąta  $i_1$  na  $\beta_2^0$  jest nieznaczny i gdy  $\beta_2^0$  chcemy obliczyć tylko z dokładnością do dziesiątych minuty, to możemy przyjąć wartość średnią  $\sec i_1 = 1.0040$  i również zamiast  $\pi_1$  wartość średnią  $\pi_1^0 = 0.15$ . Otrzymujemy

$$\sec i_1 (\pi_2 - \pi_1) \left( 1 \pm r_2 \pm k \frac{\pi_1}{\pi_2} \right) = \sec i_1 \left[ (1 \pm r_2) \pi_2 - (1 + r_2 \mp k) \pi_1 \right],$$

a więc ostatecznie ogólny wzór, ważny dla wszystkich rodzajów zaćmień Słońca

$$\beta_2^0 \leq 1.004 \cdot (1 \pm r_2) \pi_2 - 0.15 \cdot (1 \pm r_2 \mp k). \quad (160)$$

Podstawiając odpowiednią wartość na  $k$  według wzorów (144) oraz uwzględniając odpowiedni znak, znajdujemy po wykonaniu rachunków:

1. zaćmienie częściowe,  $k = 109.3213$ , znak górny,  
 $52' \cdot 0 \leq \pi_2 \leq 62' \cdot 0$ ,  $\beta_2^0 \leq 1.2776 \cdot \pi_2 + 15' \cdot 8$ ;
2. zaćmienie całkowite,  $k = -108.7763$ , znak górny,  
 $58' \cdot 6 \leq \pi_2 \leq 62' \cdot 0$ ,  $\beta_2^0 \leq 1.2776 \cdot \pi_2 - 16' \cdot 2$ ;
3. zaćmienie pierścieniowe,  $k = -108.7763$ , znak dolny,  
 $52' \cdot 0 \leq \pi_2 \leq 57' \cdot 6$ ,  $\beta_2^0 \leq 0.7304 \cdot \pi_2 + 15' \cdot 8$ .



Podstawiając tu wartości graniczne na  $\pi_2$ , znajdujemy wyniki następujące:

1.  $\beta_2^0 > 95' \cdot 0$ ; zaćmienie wogóle niemożliwe.
2.  $82' \cdot 2 \leq \beta_2^0 \leq 95' \cdot 0$ ; zaćmienie częściowe zająć może, ale nie musi.
3.  $63' \cdot 2 \leq \beta_2^0 \leq 82' \cdot 2$ ; zaćmienie częściowe zachodzi z pewnością.
4.  $58' \cdot 6 \leq \beta_2^0 \leq 63' \cdot 0$ ; może zająć zaćmienie całkowite.
5.  $\beta_2^0 \leq 58' \cdot 6$ ; zaćmienie całkowite zachodzi z pewnością, gdy  $\pi_2 > 58' \cdot 6$ .
6.  $\beta^0 > 57' \cdot 8$ ; zaćmienie pierścieniowe nie jest możliwe.
7.  $53' \cdot 8 \leq \beta_2^0 \leq 57' \cdot 8$ ; zaćmienie pierścieniowe jest możliwe.
8.  $\beta_2^0 < 53' \cdot 8$ ; zaćmienie pierścieniowe zachodzi z pewnością, gdy  $\pi_2 < 57' \cdot 6$ .

Dla zaćmienia centralnego warunkiem jest  $\gamma \leq 1$ , a odpowiada mu według (155) z dostatecznym przybliżeniem warunek  $\beta_2 \leq \pi_2$ . Zaćmienie centralne jest całkowite, gdy  $\pi_2 \geq 58' \cdot 6$ , pierścieniowe, gdy  $\pi_2 < 57' \cdot 6$ , a mieszane, gdy  $57' \cdot 6 \leq \pi_2 \leq 58' \cdot 6$ .

Zaćmienie jest możliwe tylko wtedy, gdy w czasie połączenia ze Słońcem, t. j. w czasie nowiu, Księżyc znajduje się w pobliżu jednego z węzłów swej drogi. Z rys. 11 widzimy, że gdy  $\Omega K = l$ , a  $K_0 K = \beta$ , to jest z trójkąta  $K \Omega K_0$

$$\sin l = \frac{\sin \beta}{\sin i}.$$

Gdy przyjmiemy  $i = 4^\circ 57'$ , t. j. najmniejszą wartość tego kąta, to dla danych wartości  $\beta$  otrzymamy największe wartości  $l$ . Jest mianowicie:

jeżeli  $\beta_2^0 = 95' \cdot 0$ , to  $l = 18^\circ 41'$  przedstawia największą odległość Księżycy od węzła, przy której wogóle może zająć zaćmienie;

jeżeli  $\beta_2^0 = 63' \cdot 0$ , to przy wartości  $l = 12^\circ 17'$  zaćmienie całkowite nie jest możliwe;

jeżeli  $\beta_2^0 = 57' \cdot 8$ , to przy wartości  $l > 11^\circ 14'$  zaćmienie pierścieniowe zachodzić nie może.



Widzimy z tych liczb, że łuki, na których zajść może zaćmienie Słońca, stanowią 0'21 całego obwodu koła i liczba ta może być przybliżoną miarą prawdopodobieństwa, że w czasie nowiu zajdzie zaćmienie Słońca.

14. Uwagi ogólne, dotyczące przebiegu zaćmienia Słońca na Ziemi. Ruch geocentryczny Słońca i Księżycy odbywa się w sensie prostym, t. j. z zachodu na wschód, ale ruch Księżycy jest szybszy, wskutek czego Księżyc w chwili geocentrycznego połączenia ze Słońcem przechodzi z zachodu na wschód od Słońca. W związku z tem prosta, łącząca środki tych ciał, która jest zarazem osią stożka cienia Księżycy, przebiega przed geocentrycznym połączeniem Księżycy i Słońca na zachód od Ziemi, po połączeniu zaś na wschód od Ziemi; gdy więc stożek cienia spotyka Ziemię, obszar cienia na powierzchni Ziemi przesuwa się z zachodu na wschód. W tym samym kierunku poruszają się punkty powierzchni Ziemi z powodu jej obrotu dokoła osi, jednakże ruch stożka jest szybszy, wskutek czego obszar cienia także w stosunku do punktów powierzchni Ziemi przesuwa się na wschód.

Obszarem cienia na Ziemi w danej chwili jest część jej powierzchni, zawarta w stożku cienia. Wskutek ruchu stożka i obrotu Ziemi obszar cienia przesuwa się na wschód, określając pas cienia czyli strefę, wewnątrz której zaćmienie zaczyna się coraz później w długościach geograficznych coraz mniejszych.

Punktem Ziemi, w którym najwcześniej zachodzi zaćmienie, jest punkt, w którym stożek styka się zewnątrz z Ziemią. Chwila tego pierwszego zetknięcia jest początkiem zaćmienia na Ziemi wogóle. Ponieważ w punkcie styczności ta tworząca stożka, która jest styczna do powierzchni Ziemi, ma kierunek poziomy, więc na horyzoncie astronomicznym widzialny jest punkt, w którym tarczy Słońca i Księżycy stykają się zewnątrz. W punkcie pierwszego zetknięcia obserwator widzi zatem początek zaćmienia o wschodzie Słońca.

W miarę, jak powierzchnia Ziemi zanurza się w stożku cienia, wszystkie tworzące stożka po kolei stykają się z powierzchnią Ziemi i w każdym z punktów styczności zetknięcie ma miejsce w chwili wschodu Słońca. Ostatnią tworzącą, która się styka z powierzchnią Ziemi, jest ta, na której stożek cienia wewnątrz styka się z powierzchnią Ziemi.

Ponieważ wszystkie następne zetknięcia się tworzących z powierzchnią Ziemi zachodzą później, niż pierwsze, gdy już punkt pierw-

szego kontaktu z powodu obrotu Ziemi przesunął się nieco na wschód, więc punkty powierzchni Ziemi, w których te zetknięcia mają miejsce, położone są na zachód od punktu pierwszego kontaktu, a najdalej na zachodzie leży punkt wewnętrznego kontaktu powierzchni Ziemi ze stożkiem cienia.

Gdy podzielimy stożek cienia płaszczyzną, przechodzącą przez jego oś i prostopadłą do kierunku ruchu stożka, na dwie połowy, przednią i tylną, to w punktach, w których ta **płaszczyzna środkowa** przecina powierzchnię Ziemi i które znajdują się wewnątrz stożka, przypada środek zaćmienia czyli największa faza zaćmienia. Po pierwszym kontakcie z Ziemią punkty powierzchni Ziemi, przenikając coraz głębiej do stożka, dosięgają też tej płaszczyzny i wtedy mają największą fazę. A zatem w tych punktach Ziemi, w których tworzące przedniej połowy stożka stykają się z powierzchnią Ziemi, jest początek zaćmienia o wschodzie Słońca, w punktach zaś, w których z powierzchnią Ziemi stykają się tworzące tylnej połowy, jest koniec zaćmienia o wschodzie Słońca; wreszcie w punktach, które kolejno znajdują się na tej płaszczyźnie dzielącej zachodzi największa faza zaćmienia o wschodzie Słońca.

Punkty Ziemi, w których zaćmienie kończy się w chwili wschodu Słońca, stanowią *zachodnią granicę strefy zaćmienia*.

Analogiczne stosunki zachodzą, gdy stożek cienia wychodzi z granic Ziemi. Ostatnim punktem Ziemi, który widzi zaćmienie, jest ten, w którym stożek cienia styka się zewnętrznie z powierzchnią Ziemi, wychodząc z niej; jest to punkt, w którym najpóźniej na Ziemi zaćmienie kończy się w chwili zachodu Słońca. Ale punkt ten nie jest najbardziej wschodnim punktem strefy zaćmienia. Ten punkt, w którym stożek cienia przed wyjściem z granic Ziemi z powierzchnią jej styka się wewnętrznie, ma początek zaćmienia w chwili zachodu Słońca; wszystkie inne zetknięcia się z Ziemią tworzących stożka cienia zachodzą później, niż pierwsze, i później też stykają się z Ziemią tworzące tylnej połowy stożka, niż tworzące przedniej połowy. Gdy więc zaćmienie mają te punkty, w których zaćmienie kończy się w chwili zachodu Słońca, te punkty, w których zaćmienie zaczyna się w chwili zachodu Słońca, są już wskutek obrotu Ziemi przesunięte na wschód. Widzimy więc, że *zachodnią granicę strefy zaćmienia* tworzą punkty, w których zaćmienie zaczyna się w chwili zachodu Słońca, a najbardziej wschodnim jej punktem jest punkt drugiego wewnętrznego zetknięcia się stożka z powierzchnią Ziemi.



Obok tej wschodniej granicy na uwagę zasługuje linja, utworzona z punktów, w których zaćmienie kończy się w chwili zachodu Słońca, oraz linja, na której w chwili zachodu jest największa faza.

Granice północną i południową strefy zaćmienia określają te punkty, które w tej strefie przypadają najbardziej na południe i najbardziej na północ.

W rozważaniach powyższych mówiliśmy zawsze tylko o jednym stożku, ale oczywiście wnioski dotyczą w równej mierze stożka półcienia jak i stożka pełnego cienia. Ze względu na wchodzące w rachubę dwa stożki, należy odróżnić strefę zaćmienia wogóle i strefę całkowitego lub pierścieniowego zaćmienia. I ta strefa, przebiegająca pośrodku strefy zaćmienia częściowego, ma granicę zachodnią i wschodnią oraz północną i południową, gdy ogólną definicję granic zastosujemy do stożka pełnego cienia. Tak samo określenie początku i końca zaćmienia wogóle, w przypadku stożka pełnego cienia oznacza początek i koniec całkowitości lub zaćmienia pierścieniowego dla całej Ziemi.

Punkty, w których oś stożka cienia przecina się z powierzchnią Ziemi, określają *krzywą zaćmienia centralnego*. Początkiem i końcem tej krzywej są punkty, w których oś stożka cienia styka się z powierzchnią Ziemi po pierwszym zetknięciu się Ziemi z powierzchnią stożka i przed ostatniem zetknięciem.

15. **Północna i południowa granica zaćmienia Słońca. Krzywe jednakowej największej fazy.** Zaćmienie trwa w danym punkcie strefy zaćmienia tem dłużej, im dłuższą drogę przebywa punkt obserwacji wewnątrz stożka cienia. Granicę tej strefy stanowią te punkty, w których pomiędzy pierwszym a drugim kontaktem upływa czas zero, t. j. zachodzi tylko jeden kontakt. Ten warunek w połączeniu z warunkiem, że punkty te w chwili kontaktu znajdują się na obwodzie koła cienia, a więc spełniają równanie koła cienia, pozwala wyznaczyć granicę południową i północną strefy zaćmienia.

Nadajmy pierwszemu ze wspomnianych warunków postać matematyczną. Weźmy w tym celu pod uwagę równania koła cienia w postaci (137) i oznaczmy

$$\begin{aligned} \gamma - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g + \cos \varphi_1 \sin g \sin (G + \vartheta_0 + \Delta a) &= m \cdot \sin M, \\ \frac{n}{15} (\vartheta_0 + \lambda - \mu) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos (K + \vartheta_0 + \Delta a) &= m \cdot \cos M \end{aligned} \quad (161)$$

oraz

$$\begin{aligned} -z \cos \varphi_1 \sin g \cos \left( G + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) &= m' \cdot \sin M', \\ n - z \cos \varphi_1 \sin k \sin \left( K + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right) &= m' \cdot \cos M', \end{aligned} \quad (162)$$



to równania (137) przyjmują postać

$$\begin{aligned} u \sin \psi &= -m \sin M + m' \sin M' \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15}, \\ u \cos \psi &= m \cos M + m' \cos M' \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_0}{15}. \end{aligned} \quad (163)$$

Z równań tych w sposób, nie wymagający bliższego wyjaśnienia, znajdujemy

$$\begin{aligned} u \sin (M' - \psi) &= m \sin (M + M') \\ u \cos (M' - \psi) &= m \cos (M + M') + \frac{m'}{15} (\vartheta - \vartheta_0). \end{aligned} \quad (164)$$

Gdybyśmy z pierwszego z tych równań wyznaczyli kąt  $M' - \psi$ , to otrzymalibyśmy dwie wartości, a więc też dwie wartości na  $\cos (M' - \psi)$  z przeciwnymi znakami. Z drugiego zaś równania wypływa

$$\vartheta = \vartheta_0 - 15 \cdot \frac{m'}{m} \cos (M + M') + 15 \cdot \frac{u}{m'} \cos (M' - \psi). \quad (165)$$

Ponieważ  $\vartheta$  jest czasem kontaktu, a w ogólności są dwa kontakty, mianowicie w chwili wejścia punktu obserwacji do koła cienia i w chwili wyjścia, więc drugi wyraz powyższego wzoru określa czas, który upływa pomiędzy pierwszym a drugim kontaktem.

Gdy więc w punktach granicy północnej i południowej zaćmienia ma miejsce tylko jeden kontakt, więc spełniony tam musi być warunek  $\cos (M' - \psi) = 0$ , lub  $M' = \psi \pm 90^\circ$ . Podstawiając tę wartość we wzorach (162), znajdujemy

$$-\operatorname{ctg} M' = \operatorname{tg} \psi = \frac{n - z \cos \varphi_1 \sin k \sin \left( K + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right)}{z \cos \varphi_1 \sin g \cos \left( G + \Delta a + \frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2} \right)}. \quad (166)$$

Równanie powyższe w połączeniu z równaniami (131) określają warunki, że jakiś punkt w czasie miejscowym  $\vartheta$  znajduje się na północnej lub południowej granicy zaćmienia. Warunki te określone są dla danego  $\vartheta$  przez 4 równania z czterema niewiadomymi  $u$ ,  $\psi$ ,  $\varphi_1$  i  $\lambda$ , z których wszystkie niewiadome, a więc też współrzędne geograficzne punktu krzywej granicznej, o które właśnie chodzi, mogą być wyznaczone. Wartości tych współrzędnych, obliczone dla szeregu wartości  $\vartheta$ , określają dowolną ilość punktów tej krzywej.

Zadanie wyszukania tych punktów w praktyce upraszcza się znacznie przez to, że spólrzędne  $\varphi_1, \lambda$  wystarcza obliczyć z dokładnością do 1'. Skutkiem tego w równaniach (131) i (166) można opuścić mały kąt  $\Delta a$ , przyjmą  $d = \delta_1$  oraz uważać w tych wzorach wszystkie wielkości powoli zmienne za stałe, obliczając ich wartości dla czasu, bliskiego środka zaćmienia, więc np. dla czasu greenwichskiego  $\mu$ , w którym zachodzi najmniejsza odległość osi cienia od środka Ziemi  $\gamma$ .

Mając te wartości, określamy wielkości pomocnicze  $a, A, b, B, r$  i  $R$  z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} a \sin A &= \sin g \sin (G + \vartheta), \\ a \cos A &= (1 - z) \cos g, \\ b \sin B &= -\sin k \cos (K + \vartheta), \\ b \cos B &= -(1 - z) \cos k, \\ r \sin R &= \cos \delta_1 \cos \vartheta \operatorname{tg} f, \\ r \cos R &= -(1 - z) \sin \delta_1 \operatorname{tg} f \end{aligned} \quad (167)$$

oraz obliczamy

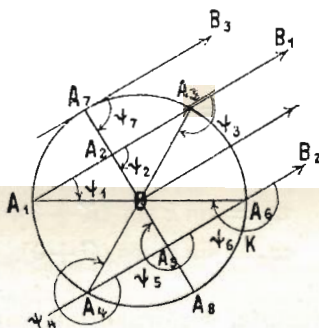
$$\begin{aligned} w_k &= \sin k \sin (K + \vartheta), \\ w_g &= \sin g \cos (G + \vartheta). \end{aligned} \quad (168)$$

Podstawiając te wartości w równaniach warunkowych (131) i (166) i pisząc w tych ostatnich  $\vartheta$  zamiast  $\frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}$  oraz  $z = 15$ , otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} u \sin \psi &= -\gamma + a \sin (\varphi_1 - A), \\ u \cos \psi &= (\vartheta + \lambda - \mu) \frac{n}{15} + b \sin (\varphi_1 - B), \\ u &= u' + r \sin (\varphi_1 - R), \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1}{w_g \cos \varphi_1}, \end{aligned} \quad (169)$$

z których należy wyznaczyć niewiadome  $u, \psi, \varphi_1$  i  $\lambda$ . Najwygodniej rozwiązuje się te równania przez przybliżenia w sposób następujący. Przypuśćmy, że dla danego  $\vartheta$  zostało obliczone  $\varphi_1$ , spełniające równania warunkowe, to z czwartego z tych równań dla tego  $\varphi_1$  wypływają dwie wartości  $\psi$ , różniące się o  $180^\circ$ . Przypomnijmy sobie znaczenie kąta  $\psi$ , wypływające ze wzoru (115). Jest to kąt, jaki w danej chwili tworzy w punkcie obserwacji kierunek ruchu osi cienia z kierunkiem promienia koła cienia, przechodzącego przez ten punkt. Wyja-

śnia to rys. 12. Niech będzie koło  $OA_1A_3\dots$  kołem cienia w płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzny  $(\xi, \eta)$ , a przechodzącej przez punkt  $A$  na powierzchni Ziemi, a ruch stożka niech się odbywa w kierunku, wskazanym przez strzałki. Weźmy pod uwagę dwie cięciwy tego koła  $A_1A_3$  i  $A_4A_6$  po dwóch stronach środka, równoległe do kierunku ruchu osi stożka. Według określenia kąta  $\psi$ , wartości tego kąta w punktach  $A_1A_3A_4$  i  $A_6$  są odpowiednio  $B_1A_1O = \psi_1$ ,  $B_1A_3O = \psi_3$ ,  $B_2A_4O = \psi_4$  i  $B_2A_6O = \psi_6$ , których wielkość określona jest przez łuki strzałek. Dla punktów  $A_2$  i  $A_5$ , leżących na środku cięciw, kąty te mają wartości odpowiednio  $B_1A_2O = \psi_2 = 90^\circ$  i  $B_2A_5O = \psi_5 = 270^\circ = -90^\circ$ .



Rys. 12.

Z powodu ruchu obrotowego Ziemi i ruchu stożka, który zbacza od kierunku momentalnego nieznacznie, punkt  $A_1$  w chwili największej fazy nie będzie znajdował się w punkcie  $A_2$ , a w momencie wyjścia ze stożka w punkcie  $A_3$ , tak, że odpowiednie wartości kąta  $\psi$  różnić się będą w tych chwilach od  $\psi_2$  i  $\psi_3$ ; ta sama uwaga dotyczy też punktu  $A_4$ . Jednakże w chwili największej fazy kąt  $\psi$  nie będzie się bardzo różnił od  $\pm 90^\circ$ . Gdy więc weźmiemy pod uwagę punkty granicy północnej i południowej strefy zaćmienia, w których zachodzi tylko jeden kontakt, to chwila kontaktu jest zarazem chwilą największej fazy, a więc w chwili kontaktu kąt  $\psi$  ma tam wartość bliską  $\pm 90^\circ$ . Znak plus odnosi się do granicy północnej, a znak minus do granicy południowej.

Korzystając z powyższych uwag, możemy system równań (169) rozwiązać przez przybliżenia w sposób następujący. Z pierwszego z tych równań wypływa

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u \sin \psi}{a}$$



Z tego wzoru możemy wyznaczyć przybliżoną wartość  $\varphi_1$ , przyjmując po prawej stronie przybliżone wartości na  $u$  i  $\psi$ . Co do  $\psi$ , to możemy przyjąć  $\psi = \pm 90^\circ$ ,  $u$  zaś różni się od  $u'$  tylko o wyraz  $r \cdot \sin(\varphi_1 - R)$ , który, jak wskazują wzory (167), jest tego samego rzędu, co  $\text{tg } f$ , a więc mały; możemy więc w pierwszym przybliżeniu przyjąć  $u = u'$ . Określmy więc w pierwszym przybliżeniu szerokość  $\varphi_1^0$  ze wzoru

$$\sin(\varphi_1^0 - A) = \frac{\gamma \pm u'}{a}.$$

Każdemu z dwóch znaków licznika z prawej strony odpowiadają dwie wartości kąta  $\varphi_1^0 - A$ ; należy z nich obrać tę, z której wypływa  $\varphi_1^0 \leq 90^\circ$ . Znak górny odnosi się do granicy północnej, a dolny do południowej.

Mając  $\varphi_1^0$ , obliczamy przybliżone wartości  $u^0$  i  $\psi^0$  ze wzorów

$$u^0 = u' + r \sin(\varphi_1^0 - R)$$

$$\text{tg } \psi^0 = \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1^0}{w_g \cos \varphi_1^0}$$

i z temi wartościami znajdujemy drugą przybliżoną wartość  $\varphi_1^{(1)}$  ze wzoru

$$\sin(\varphi_1^{(1)} - A) = \frac{\gamma \pm u^0 \sin \psi^0}{a}.$$

Dalej jest

$$u^{(1)} = u' + r \sin(\varphi_1^{(1)} - R),$$

$$\text{tg } \psi^{(1)} = \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1^{(1)}}{w_g \cos \varphi_1^{(1)}},$$

$$\sin(\varphi_1^{(2)} - A) = \frac{\gamma \pm u^{(1)} \sin \psi^{(1)}}{a} \quad \text{i t. d.}$$

Gdy  $n$ -ta wartość przybliżona  $\varphi_1^{(n)}$  już przy następnym przybliżeniu nie ulega zmianie, to jest  $\varphi_1^{(n)} = \varphi_1$ ,  $u^{(n)} = u$ ,  $\psi^{(n)} = \psi$ , i z temi wartościami z drugiego ze wzorów (169) obliczamy

$$\lambda = \mu - \vartheta + \frac{15}{n} [a \cos \psi - b \sin(\varphi_1 - B)].$$

Oczywiście osobno należy wykonać rachunek przybliżeń dla punktów granicy północnej i południowej.

Gdyby dla jednej z dwóch wartości  $\psi$  wpływało  $|\sin(\varphi_1 - A)| > 1$ , znaczyłoby to, że tej wartości  $\psi$  nie odpowiada żaden punkt powierzchni Ziemi, że więc istnieje tylko jedna granica, północna lub południowa, zależnie od tego, czy  $(\varphi_1 - A)$  ma wartość urojoną dla  $\psi < 0$ , czy dla  $\psi > 0$ .

Postępowanie wyżej wyjaśnione jednakże nie dla wszystkich wartości  $\vartheta$  prowadzi do wyników dokładnych, mianowicie wtedy nie może być zastosowane, gdy  $(\varphi_1 - A)$  mało się różni od  $\pm 90^\circ$ . Dla tych punktów krzywych granicznych należy jako zmienną niezależną przyjmując  $\varphi_1$  i uważać  $\vartheta$  za niewiadomą. Postępujemy w sposób następujący:

Dla przyjętej wartości  $\varphi_1$  obliczamy przybliżoną wartość z pierwszego równania (131), w którym opuszczamy  $\Delta a$  i kładziemy  $\psi = \pm 90^\circ$  i  $u = u'$ ; jest mianowicie

$$\sin(G + \vartheta^0) = \frac{-\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g \mp u'}{\cos \varphi_1 \sin g}, \quad (170)$$

przyczem znak górny odnosi się do granicy północnej, a dolny do południowej. Zazwyczaj zgóry nie będzie wiadomo, na której z tych dwóch granic znajduje się punkt, mający szerokość  $\varphi_1$ ; rozstrzyga tę sprawę znak przy  $u'$ , któremu odpowiada rzeczywista wartość kąta  $(G + \vartheta^0)$ . Z dwóch wartości kąta  $(G + \vartheta^0)$  w przypadku, gdy ma on wartość rzeczywistą, zagadnieniu odpowiada ta wartość, z której na  $\vartheta^0$  wpływa wartość, przypadająca na godzinyienne.

Z otrzymaną wartością  $\vartheta^0$  obliczamy  $r^0$  i  $R^0$  ze wzorów:

$$\begin{aligned} r^0 \sin R^0 &= \cos \delta_1 \cos \vartheta^0 \operatorname{tg} f, \\ r^0 \cos R^0 &= -(1 - \alpha) \sin \delta_1 \operatorname{tg} f, \\ u^0 &= u' + r^0 \sin(\varphi_1 - R^0), \\ w_k^0 &= \sin k \sin(K + \vartheta^0), \\ w_g^0 &= \sin g \cos(G + \vartheta^0), \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \psi^0 = \frac{\frac{n}{15} - w_k^0 \cos \varphi_1}{w_g^0 \cos \varphi_1}.$$

Ponieważ wiadomo już, na której granicy leży brany pod uwagę punkt, więc co do ruchu kąta  $\psi$  niema wątpliwości. Przypuśćmy, że  $\psi > 0$ , więc drugą przybliżoną wartość na  $\vartheta^0$  otrzymamy ze wzoru

$$\sin(G + \vartheta^{(1)}) = \frac{-\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g - u^0 \sin \psi^0}{\cos \varphi_1 \sin g}.$$



Z wartością  $\vartheta^{(1)}$  obliczamy podobnie jak poprzednio  $r^{(1)}$ ,  $R^{(1)}$ ,  $u^{(1)}$  i  $\psi^{(1)}$ , a następnie  $\vartheta^{(2)}$  i t. d., aż przy  $n$ -tem przybliżeniu wartość  $\vartheta^{(n)}$  nie ulega zmianie. Wtedy jest  $\vartheta^{(n)} = \vartheta$  i otrzymamy  $\lambda$  z drugiego ze wzorów (131), mianowicie

$$\lambda = \mu - \vartheta + \frac{15}{n} [u \cos \psi + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k - \cos \varphi_1 \sin k \cos (K + \vartheta)].$$

Zadanie wyznaczenia granicy północnej i południowej traktowaliśmy ogólnie, nie rozróżniając pomiędzy stożkiem półcienia i stożkiem pełnego cienia. Zależnie więc od tego, czy w równaniach warunkowych przyjmiemy  $u = u_1$ , czy  $u = u_2$ , i odpowiednie wartości na  $f$ , określimy z nich północną i południową granicę zaćmienia wogóle, lub też północną granicę strefy całkowitości zaćmienia, względnie zaćmienia częściowego.

Równania warunkowe granicy północnej i południowej można również zastosować, gdy chodzi o wykreślenie na powierzchni Ziemi tych krzywych, na których największa faza zaćmienia ma określoną wartość.

Jeżeli przez  $p$  oznaczymy ogólnie odległość punktu powierzchni Ziemi od osi cienia, a przez  $u$  promień koła cienia w płaszczyźnie prostopadłej do osi cienia i przechodzącej przez ten punkt, to warunkiem, aby zaszło w tym punkcie zaćmienie, jest, aby przynajmniej w czasie największego zbliżenia się osi cienia do tego punktu było  $p \leq u$ . Jeżeli jest  $p \leq |u_2|$ , to zachodzi zaćmienie całkowite lub pierścieniowe, jeżeli zaś jest  $|u_2| \leq p \leq u_1$ , to zachodzi zaćmienie częściowe.

Przypuśćmy, że  $p_m$  jest najmniejszą odległością punktu obserwacji od osi cienia, to największa faza zachodzi wówczas, gdy punkt obserwacji znajdzie się na obwodzie koła o promieniu  $p_m$ , spośródowego z kołem cienia. Dla tego punktu zatem spełnione być muszą dwa równania tej samej postaci, co (131), z tą różnicą, że zamiast  $u$  należy w nich użyć  $p_m$ . Prócz tego musi być spełnione równanie (166), wyrażające ten fakt, że największa faza w danym punkcie zajść może tylko raz jeden. Krzywą, na której w czasie największej fazy odległość punktów od osi stożka jest  $p_m$ , wyznaczają zatem trzy następujące równania:

$$\begin{aligned} p_m \sin \psi &= -\gamma + a \sin (\varphi_1 - A), \\ p_m \cos \psi &= (\vartheta + \lambda - \mu) \frac{n}{15} + b \sin (\varphi_1 - B) \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1}{w_g \cos \varphi_1}, \end{aligned} \tag{171}$$



z których dla danego  $p_m$  wyznacza się trzy niewiadome  $\psi$ ,  $\varphi_1$  i  $\lambda$ . Rozwiązując je w sposób podobny, jak równania (169), otrzymujemy dwie krzywe, mianowicie krzywą północną i południową największej fazy, określonej przez odległość  $p_m$ . W jakim związku odległość  $p_m$  znajduje się z wielkością fazy, zobaczymy później.

**16. Krzywa zaćmienia centralnego.** Gdy w danym punkcie powierzchni Ziemi zachodzi zaćmienie centralne, to znajduje się on wtedy na osi stożka cienia. Odległość jego  $p$  od osi stożka cienia jest więc równa zero, a że pozatem kąt  $\psi$  jest nieokreślony, ponieważ ramię AO kąta BAO (rys. 12) jest punktem, więc równania (171) dla punktów krzywej zaćmienia centralnego redukują się do następujących dwóch równań

$$\begin{aligned} -\gamma + a \sin(\varphi_1 - A) &= 0, \\ (\vartheta + \lambda - \mu) \frac{n}{15} + b \sin(\varphi_1 - B) &= 0. \end{aligned} \quad (172)$$

Wielkości  $a$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $B$  określone są, jak poprzednio, przez wzory (167).

Celem znalezienia punktów krzywej, dla których spełnione są równania (172), należy dla szeregu wartości  $\vartheta$  obliczyć wartości  $a$ ,  $A$ ,  $b$  i  $B$ . Podstawiając wartości  $a$  i  $A$  w pierwszym z równań (172), wyznaczymy  $\varphi_1$  ze wzoru

$$\sin(\varphi_1 - A) = \frac{\gamma}{a}. \quad (173)$$

Otrzymuje się z niego w ogólności dwie wartości ( $\varphi_1 - A$ ), a więc i na  $\varphi_1$ , z których jednakże tylko jedna określa punkt krzywej centralnej. Te dwie wartości  $\varphi_1$  odnoszą się do dwóch punktów przecięcia się osi cienia z powierzchnią Ziemi. Punktem krzywej centralnej jest ten z dwóch punktów przecięcia, w którym w czasie  $\vartheta$  Słońce znajduje się nad poziomem. Dodatkowy więc warunek, określający ten punkt, jest  $z > 0$ , a więc według trzeciego ze wzorów (89)

$$\cos \vartheta > -(1 - \alpha) \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \delta_1 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1. \quad (174)$$

Ponieważ równanie  $\cos \vartheta = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta_1$  określa kąt godzinny Słońca  $\vartheta$  w chwili wschodu wzgl. zachodu, wobec tego nierówność (174) oznacza, że wysokość Słońca jest w szerokości  $\varphi$  dodatnia.

Gdy  $\varphi_1$  zostało wyznaczone, to z drugiego z równań (172) znajdujemy

$$\lambda = \mu - \vartheta - \frac{15}{n} b \sin(\varphi_1 - B). \quad (175)$$

W punktach krzywej, gdzie  $\left| \frac{\gamma}{a} \right|$  zbliża się do jedności, wyznaczenie kąta  $(\varphi_1 - A)$ , a więc i  $\varphi_1$  staje się niedokładne, i należy w tej części krzywej za zmienną niezależną obrać  $\varphi_1$  i dla szeregu wartości  $\varphi_1$  wyznaczyć wartości  $\vartheta$ . W tym celu korzystamy ze wzoru (170), kładąc w nim  $u' = 0$ , który zatem w tym wypadku ma postać

$$\sin(G + \vartheta) = \frac{-\gamma + (1 - a) \sin \varphi_1 \cos g}{\cos \varphi_1 \sin g} \quad (176)$$

i z dwóch wartości  $\vartheta$ , które z tego wzoru wypływają, ta należy do punktu krzywej centralnej, dla której spełniony jest dodatkowy warunek (174).

Gdy  $\vartheta$  zostało znalezione, oblicza się odpowiednie wielkości  $b$  i  $B$  oraz  $\lambda$  według wzoru (175).

Oczywiście tylko wtedy w czasie  $\vartheta$  lub w szerokości  $\varphi_1$  istnieje punkt zaćmienia centralnego, gdy ze wzorów (173) i (176) otrzymuje się dla kątów  $(\varphi_1 - A)$  i  $(G + \vartheta)$  wartości rzeczywiste.

Gdy  $\left| \frac{\gamma}{a} \right| = 1$ , to ze wzoru (173) wypływa na  $(\varphi_1 - A)$  tylko jedna wartość, mianowicie  $\pm 90^\circ$ , i znak jest plus, gdy  $\gamma = a$ , a minus, gdy  $\gamma = -a$ . Znaczący to, że oś cienia w punkcie, dla którego w czasie  $\vartheta$  jest  $a = |\gamma|$ , styka się z powierzchnią Ziemi. W punktach, dla których warunek ten jest spełniony, linja zaćmienia centralnego zaczyna się albo się kończy. Spółrzędne tych punktów otrzymać można w sposób następujący: dwa pierwsze z równań (167) po podniesieniu do kwadratu i po dodaniu dają, gdy położymy  $a = \gamma$ ,

$$\sin^2(G + \vartheta) = \frac{\gamma^2 - (1 - a)^2 \cos^2 g}{\sin^2 g}. \quad (177)$$

Z tego wzoru, jeżeli wogóle zachodzi zaćmienie centralne, otrzymuje się dwie wartości na  $\sin(G + \vartheta)$  z przeciwnymi znakami. Ponieważ, jak wskazują wzory (167), zawsze jest  $\cos A > 0$ , a  $\sin A$



ma taki znak, jak  $\sin (G + \vartheta)$ , więc zawsze jest  $A \leq |90^\circ|$  i przytem  $A < 0$ , gdy  $\sin (G + \vartheta) < 0$ . Ze zaś  $\varphi_1 = A \pm 90^\circ$ , i zawsze  $\varphi_1 \leq |90^\circ|$ , więc gdy  $\gamma \leq 0$ , jest odpowiednio  $A \geq 0$ , a więc też  $\sin (G + \vartheta) \leq 0$ . Uwzględniając powyższe uwagi, wyznaczamy  $\varphi$ , kładąc we wzorze na  $a \cos A$ ,  $A = \varphi_1 \mp 90^\circ$  i  $a = \pm \gamma$ , mianowicie ogólnie

$$\sin \varphi_1 = \frac{(1 - \alpha) \cos g}{\gamma}.$$

Mając  $\varphi_1$ , określamy  $\vartheta$  ze wzoru (176) i  $\lambda$  ze wzoru (175).

Znacznie prostszy sposób wyznaczenia punktów końcowych krzywej centralnej wypływa ze wzorów, służących do znalezienia punktów granicy wschodniej i zachodniej zaćmienia, o których mowa w następnym rozdziale.

Ze wzoru (177) wnioskujemy, że warunkiem, ażeby kąt  $(G + \vartheta)$  miał wartość rzeczywistą, t. j. ażeby zetknięcie powierzchni Ziemi z osią cienia w istocie zajść mogło, jest

$$\gamma^2 - (1 - \alpha)^2 \cos^2 g \leq \sin^2 g$$

albo

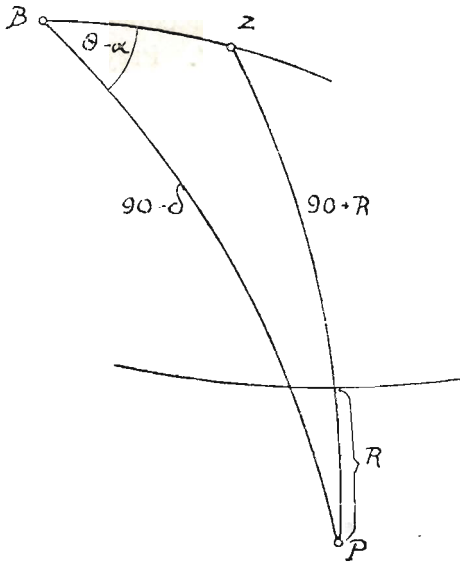
$$\gamma^2 \leq \sin^2 g + (1 - \alpha)^2 \cos^2 g.$$

Warunek ten dla  $g = 0^\circ$  przechodzi w  $|\gamma| \leq 1 - \alpha$ , a dla  $g = 90^\circ$  jest  $|\gamma| \leq 1$ . To znaczy, że zaćmienie centralne zajść musi, gdy  $|\gamma| \leq 1 - \alpha$ , zajść może, gdy  $1 - \alpha \leq |\gamma| \leq 1$ , a niemożliwe jest, gdy  $|\gamma| > 1$ . Warunek ten stanowi dokładną postać warunku, który w przybliżonej formie podaliśmy już na str. 52.

**17. Wschodnie i zachodnie granice zaćmienia. Punkty końcowe krzywych granicznych. Granice strefy zaćmienia całkowitego i pierścieniowego. Końcowe punkty krzywej zaćmienia centralnego.** Jak w całej strefie zaćmienia, tak i na jej granicach, każdy punkt musi przynajmniej raz znaleźć się na powierzchni cienia. Wtedy spórzędne tego punktu spełniają równania koła cienia w płaszczyźnie, przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do osi cienia, np. w postaci równań (131). Dodatkowym warunkiem, charakteryzującym specjalnie punkty granicy wschodniej i zachodniej, jest ten, że w momencie kontaktu tworząca stożka cienia, przechodząca przez punkt obserwacji, jest w tym punkcie styczna do powierzchni Ziemi. Tworząca ma więc kierunek poziomy; a zatem punkt zetknięcia się tarcz Słońca



i Księżycy znajduje się na horyzoncie astronomicznym tego punktu. Pozornie jednakże z powodu refrakcji atmosferycznej znajduje się on już wtedy nad horyzontem na wysokości  $R$ , na horyzoncie zaś znajduje się punkt kontaktu pozornie już nieco wcześniej w punkcie obserwacji, gdzie prawdziwa wysokość punktu kontaktu jest  $h = -R$ , gdzie  $R$  oznacza wartość refrakcji na horyzoncie. Gdy więc  $\varphi$  jest szerokością geograficzną tego punktu,  $\Theta$  czasem gwiazdowym chwili, gdy punkt kontaktu pozornie znajduje się na horyzoncie, a  $\alpha$  i  $\delta$  są



Rys. 13.

spółrzędnymi równikowymi tego punktu, wówczas jak wskazuje rys. 13, na którym  $Z$  oznacza zenit,  $B$  biegun świata, a  $P$  uważany punkt, mamy

$$-\sin R = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos (\Theta - \alpha). \quad (178)$$

Gdy wzór ten porównamy z trzecim ze wzorów (85), mianowicie

$$z = \rho [\sin \varphi' \sin d + \cos \varphi' \cos d \cos (\Theta - \alpha)] \quad (179)$$

to widzimy, że prawe strony obu wzorów różnią się tylko nieznacznie, a więc  $z$  posiada wartość małą tego samego rzędu, co  $-\sin R$ .

Wobec tego, ze względu na mały czynnik  $\operatorname{tg} f$  we wzorze (63), jest z dostatecznym przybliżeniem

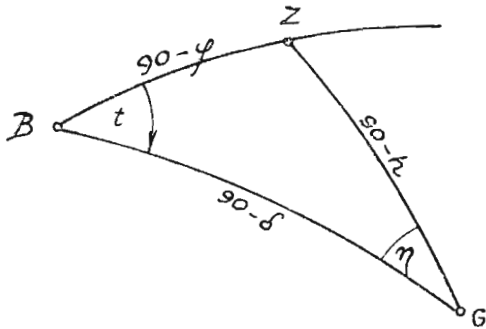
$$u = u' + \sin R \cdot \operatorname{tg} f. \quad (180)$$

Jednakże w praktyce nie zachodzi nigdy potrzeba bardzo dokładnego wyznaczenia przebiegu granicy zachodniej i wschodniej, gdyż obserwacje kontaktów na horyzoncie, albo bardzo blisko horyzontu, są zawsze bardzo niedokładne. Wobec tego więc, że drugi wyraz wzoru (180) wynosi co najwyżej kilka jednostek piątego miejsca, można go opuścić i przyjąć wprost, jako dodatkowy warunek dla punktów zachodniej i wschodniej granicy  $u = u'$ . Przy tem założeniu równania warunkowe tych krzywych granicznych są następujące:

$$u' \sin \psi = -\gamma + (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g - \cos \varphi_1 \sin g \sin (G + \vartheta), \quad (181)$$

$$u' \cos \psi = \frac{n}{15} (\vartheta + \lambda - \mu) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos (K + \vartheta).$$

Warunek  $u = u'$  jest identyczny z założeniem, że wysokość punktu kontaktu, którą identyfikujemy z wysokością środka Słońca, jest zerem. Wobec tego możemy równaniom (181) nadać jeszcze



Rys. 14.

znacznie prostszą postać. Z trójkąta paralaktycznego (rys. 14) wypływają wzory następujące:

$$\begin{aligned} \cos \varphi \sin t &= \cos h \sin \eta, \\ \cos \varphi \cos t &= \sin h \cos \delta - \cos h \sin \delta \cos \eta, \\ \sin \varphi &= \sin h \sin \delta + \cos h \cos \delta \cos \eta. \end{aligned} \quad (182)$$

Kładąc tu  $\delta = \delta_1$ ,  $t = \vartheta$ ,  $h = h_1 = 0$ , znajdujemy

$$\begin{aligned}\cos \varphi \sin \vartheta &= \sin \gamma, \\ \cos \varphi \cos \vartheta &= -\sin \delta_1 \cos \gamma, \\ \sin \varphi &= \cos \delta_1 \cos \gamma.\end{aligned}\quad (183)$$

Weźmy teraz pod uwagę równania koła cienia w postaci (127). Gdy w nich przyjmujemy  $\Delta a = 0$ ,  $d = \delta_1$ ,  $(1 - \alpha) \sin \varphi_1 = \sin \varphi$  i  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi$ , to dopełniamy przez to błędy tego samego rzędu wielkości, co przymując  $h_1 = 0$ , a więc  $u = u'$ . Wobec tego równania (127) dla granic zachodniej i wschodniej, gdy uwzględnimy wzory (183), otrzymują następującą postać

$$\begin{aligned}u' \sin \psi &= -\gamma - \sin \gamma \cos N + \cos \gamma \sin N = -\gamma + \sin(N - \gamma), \\ u' \cos \psi &= \frac{n}{15}(\vartheta + \lambda - \mu) - \sin \gamma \sin N - \\ &\quad - \cos \gamma \cos N = \frac{n}{15}(\vartheta + \lambda - \mu) - \cos(N - \gamma).\end{aligned}\quad (184)$$

Pierwsze z tych równań daje

$$\sin(N - \gamma) = \gamma + u' \sin \psi. \quad (185)$$

Gdy przybliżone wartości elementów  $u'$ ,  $\gamma$  i  $N$  są znane, to przyjmując dla kąta  $\psi$  szereg wartości, wyznaczamy według wzoru (185) odpowiednie wartości kąta  $N - \gamma$ , a więc i  $\gamma$ . Warunkiem, ażeby wartość tego kąta była rzeczywista, a więc aby przy kącie  $\psi$  w istocie zachodził kontakt, jest

$$|\gamma + u' \sin \psi| \leq 1$$

albo

$$\sin \psi \leq \frac{\pm 1 - \gamma}{u'}. \quad (186)$$

Gdy warunek ten jest spełniony, otrzymujemy dla każdego  $\psi$  po dwie wartości na  $\gamma$ , które łączą się w jedną wartość w specjalnym przypadku, gdy  $\sin(N - \gamma) = \pm 1$ . Mając  $\gamma$ , znajdujemy  $\varphi$  i  $\vartheta$  ze wzorów (183), a następnie  $\lambda$  ze wzoru

$$\lambda = \mu - \vartheta + \frac{15}{n}[\cos(N - \gamma) + u' \cos \psi]. \quad (187)$$



Pośród punktów w ten sposób określonych znajdują się wszystkie te punkty powierzchni Ziemi, w których punkt zetknięcia się tarcz Słońca i Księżyca widzialny jest na horyzoncie. Należy pośród tych punktów odróżnić cztery kategorie: 1. punkty, w których zaćmienie zaczyna się w chwili wschodu Słońca, 2. punkty, w których zaćmienie kończy się w chwili wschodu Słońca, 3. punkty, w których zaćmienie kończy się w chwili zachodu Słońca, 4. punkty, w których zaćmienie zaczyna się w chwili zachodu Słońca. Zajmijmy się znalezieniem tych specjalnych warunków, które powinny spełniać punkty każdej z powyższych kategorii, aby je można było odróżnić od siebie.

Ponieważ na granicy zachodniej Słońce wschodzi, a na wschodniej zachodzi w chwili kontaktu, więc na pierwszej jest  $\frac{dh}{d\vartheta} > 0$ , a na drugiej  $\frac{dh}{d\vartheta} < 0$ . Z określenia kąta  $\gamma$  wynika, że ma on wartość ujemną na wschodniej stronie nieba, a dodatnią na zachodniej; z pośród wartości kąta  $\gamma$ , wypływających ze wzoru (185), te więc, które przypadają w granicach od  $0^\circ$  do  $-180^\circ$ , odnoszą się do granic zachodnich, te zaś, które mają wartości od  $0^\circ$  do  $+180^\circ$ , odnoszą się do granic wschodnich.

Ażeby rozstrzygnąć, czy otrzymany kąt  $\eta$  odnosi się do początku czy do końca zaćmienia, należy stwierdzić, czy odległość punktu powierzchni Ziemi, do którego odnosi się kąt  $\eta$ , do osi stożka się zbliża, czy też oddala się od niej. Wyrażenia, stojące po prawej stronie równań koła cienia, są to, jak wiemy, współrzędne punktu obwodu koła, określonego na niem przez kąt  $\psi$ . Gdy po stronie lewej napiszemy zamiast  $u$  ogólnie odległość  $p$  od osi cienia, to i w tym przypadku prawe strony są wartościami współrzędnych punktu w odległości  $p$ . Mamy więc dla punktu, leżącego w płaszczyźnie koła cienia w odległości  $p$  od środka,

$$p \sin \psi = -\gamma + \sin(N - \gamma),$$

$$p \cos \psi = \frac{n}{15} (\vartheta + \lambda - \mu) - \cos(N - \gamma).$$

Zależnie od tego, czy punkt zbliża się do osi cienia, czy też oddala się od niej, jest odpowiednio  $\frac{dp}{d\vartheta} < 0$  lub  $\frac{dp}{d\vartheta} > 0$ . Z równań powyższych można wartość pochodnej  $\frac{dp}{d\vartheta}$  wyznaczyć. Wobec tego,

że ruch punktu względem środka koła pociąga za sobą też zmianę kąta  $\psi$ , więc różniczkując powyższe równania, znajdujemy

$$\frac{d p}{d \vartheta} \sin \psi + p \cos \psi \frac{d \psi}{d \vartheta} = -\cos (N-\eta) \frac{d \eta}{d \vartheta},$$

$$\frac{d p}{d \vartheta} \cos \psi - p \sin \psi \frac{d \psi}{d \vartheta} = \frac{n}{15} - \sin (N-\eta) \frac{d \eta}{d \vartheta},$$

a gdy pierwsze z tych równań pomnożymy przez  $\sin \psi$ , drugie zaś przez  $\cos \psi$ , i dodamy, to otrzymamy

$$\frac{d p}{d \vartheta} = \frac{n}{15} \cos \psi - \sin (N-\eta+\psi) \frac{d \eta}{d \vartheta}.$$

Z równań (182) dla  $h=0$  wypływa  $\frac{d \eta}{d \vartheta} = -\sin \delta$ , wobec czego jest też

$$\frac{d p}{d \vartheta} = \frac{n}{15} \cos \psi + \sin \delta_1 \sin (N-\eta+\psi). \quad (188)$$

W podobny sposób można wyznaczyć  $\frac{d p}{d \vartheta}$ , wychodząc z równań (131). Otrzymuje się wtedy, wprowadzając wielkości  $w_g$  i  $w_k$  według wzoru (168),

$$\frac{d p}{d \vartheta} = \frac{n}{15} \cos \psi - \cos \varphi_1 (w_g \sin \psi + w_k \cos \psi). \quad (189)$$

Warunkowi  $\frac{d p}{d \vartheta} \geq 0$  odpowiada ze wzoru (188)

$$\operatorname{tg} \psi \geq -\frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin (N-\eta)}{\sin \delta_1 \cos (N-\eta)}, \quad (190)$$

a ze wzoru (189)

$$\operatorname{tg} \psi \leq \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1}{w_g \cos \varphi_1}. \quad (191)$$

Reasumując wyniki otrzymane, określamy krzywe graniczne zachodnią i wschodnią w sposób następujący: Gdy ze wzoru (185) dla

danego  $\psi$  wyznaczymy dwie wartości  $\eta$ , jedną ujemną, drugą dodatnią, i dla każdej z nich obliczymy wartość wyrażenia

$$r = - \frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin (N - \eta)}{\sin \delta_1 \cos (N - \eta)}, \quad (192)$$

to w punktach Ziemi, dla których jest

1.  $\eta < 0$ ,  $\operatorname{tg} \psi > r$ , zaćmienie kończy się w chwili wschodu Słońca,
2.  $\eta < 0$ ,  $\operatorname{tg} \psi < r$ , zaćmienie zaczyna się w chwili wschodu Słońca,
3.  $\eta > 0$ ,  $\operatorname{tg} \psi > r$ , zaćmienie kończy się w chwili zachodu Słońca,
4.  $\eta > 0$ ,  $\operatorname{tg} \psi < r$ , zaćmienie zaczyna się w chwili zachodu Słońca.

Gdy  $\frac{dp}{d\psi} = 0$ , to  $p$  jest najmniejsze i zachodzi największa faza zaćmienia. Warunek ten w połączeniu z równaniami (184) wyznacza punkty, w których zaćmienie w chwili wschodu lub zachodu Słońca jednocześnie zaczyna się i kończy. W tych punktach krzywe początku i końca zaćmienia w czasie wschodu Słońca przechodzą jedna w drugą i podobnie krzywe początku i końca zaćmienia w chwili zachodu Słońca. W tych punktach największa faza zaćmienia redukuje się do zetknięcia z powierzchnią stożka cienia i zaćmienie trwa tylko jedną chwilę. Są one końcami krzywych granicznych, zachodniej i wschodniej, gdyż we wszystkich innych punktach tych krzywych kontakty zachodzą przy mniejszych fazach. Do określenia tych punktów służą zatem następujące trzy równania

$$\begin{aligned} u' \sin \psi &= -\gamma + \sin (N - \eta), \\ u' \cos \psi &= \frac{n}{15} (\vartheta + \lambda - \mu) - \cos (N - \eta), \\ \operatorname{tg} \psi &= - \frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin (N - \eta)}{\sin \delta_1 \cos (N - \eta)}, \end{aligned} \quad (193)$$

w których niewiadomymi są  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $\vartheta$  i  $\lambda$ . Jednakże  $\vartheta$  i  $\lambda$  występują tylko w drugim z powyższych równań, a w pozostałych dwóch równaniach



tylko dwie niewiadome  $\eta$  i  $\psi$ , z których te dwie niewiadome można wyznaczyć; gdy zaś  $\eta$  jest znane, to  $\varphi$  i  $\delta$  wypływają ze wzorów (183), a drugie z równań (184) służy tylko do wyznaczenia niewiadomej  $\lambda$ , jak to już kilkakrotnie widzieliśmy.

Niewiadome  $\eta$  i  $\psi$  z równań

$$u' \sin \psi = -\gamma + \sin(N - \eta)$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin(N - \eta)}{\sin \delta_1 \cos(N - \eta)} \quad (194)$$

wyznaczyć można zapomocą przybliżeń. Ponieważ warunkowi  $\frac{dp}{d\delta} = 0$  odpowiada też według wzoru (191) warunek

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{n}{15} - \omega_k \cos \varphi_1}{\omega_g \cos \varphi_1},$$

który zgodnie ze wzorem (166) i trzecim z równań (169) wyraża, że w punktach, dla których on jest spełniony, zachodzi tylko jeden kontakt w czasie największej fazy, widzimy więc, że punkty końcowe granic zachodnich i wschodnich są zarazem końcowymi punktami granicy południowej i północnej. Ponieważ, jak widzieliśmy w ustępie 15, dla punktów tych krzywych kąt  $\psi$  mało różni się od  $\pm 90^\circ$ , dotyczy to więc także punktów, określonych przez równania (184), i możemy równania (194) rozwiązać, przyjmując w pierwszym przybliżeniu  $\psi = \pm 90^\circ$ .

Wtedy jest

$$\sin(N - \eta^0) = \gamma \pm u',$$

przez znak dodatni odnosi się do granicy północnej, ujemny zaś do południowej. Dla każdej z dwóch wartości wyrażenia, stojącego po prawej stronie powyższego wzoru, otrzymujemy po dwie wartości kąta  $\eta^0$ , z których dodatnia odnosi się do granicy wschodniej, ujemna zaś do zachodniej. W ogólności zatem równania (184) określają 4 punkty, po dwa końce każdej z krzywych granicznych.

Z otrzymanymi wartościami  $\gamma^0$  obliczamy  $\psi^0$  według

$$\operatorname{tg} \psi^0 = - \frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin (N - \gamma^0)}{\sin \delta_1 \cos (N - \gamma^0)},$$

poczem znajdujemy drugą przybliżoną wartość na  $\gamma$  ze wzoru

$$\sin (N - \gamma^{(1)}) = \gamma \pm u' \sin \psi^0.$$

Postępujemy w sposób podobny, jak to wyjaśniliśmy w ustępie poprzednim, tak długo, aż użyta jako przybliżona wartość  $\psi^{(n)}$  wypadnie niezmienną po podstawieniu we wzorze na  $\operatorname{tg} \psi$  ostatniej przybliżonej wartości  $\gamma^{(n)}$ .

Wyznaczywszy  $\gamma$ , obliczamy  $\vartheta$  i  $\varphi$  z równań (183), a wreszcie  $\lambda$  zgodnie z drugim równaniem (184) ze wzoru

$$\lambda = \mu - \vartheta + \frac{15}{n} \left[ u' \cos \psi + \cos (N - \gamma) \right]. \quad (195)$$

Ponieważ wszystkie wnioski, dotyczące granic wschodnich i zachodnich, nie wymagają specjalnego założenia co do wartości  $u'$ , odnoszą się więc one do zaćmienia częściowego, gdy przyjmiemy przy obliczeniu  $u' = u'_1$ , a do całkowitego lub pierścieniowego, gdy  $u' = |u'_2|$ , wreszcie do zaćmienia centralnego, gdy położymy  $u' = 0$ . W tym ostatnim wypadku granice zachodnie i wschodnie redukują się do dwóch punktów, które stanowią początek i koniec linii zaćmienia centralnego. Do określenia tych punktów służy pierwsze równanie (184) w połączeniu z wzorami (183). Ze wzoru

$$\sin (N - \gamma) = \gamma \quad (196)$$

otrzymuje się dwie wartości na  $\gamma$ , z których dodatnia odnosi się do początkowego (t. j. najbardziej zachodniego) punktu krzywej centralnej, a ujemna do końcowego (t. j. najbardziej wschodniego) punktu krzywej. Ze wzorów (183) otrzymuje się dla tych punktów  $\vartheta$  i  $\varphi$ , a z drugiego równania (184) wobec  $u' = 0$

$$\lambda = \mu - \vartheta + \frac{15}{n} \cos (N - \gamma). \quad (197)$$

Gdy  $\sin (N - \gamma) = \pm 1$ , istnieje tylko jeden punkt krzywej centralnej, dla którego jest  $\gamma = N \mp 90^\circ$ , przyczem znak górny odpowiada  $\gamma = +1$ . Warunki, aby zaćmienie centralne mogło zajść, podane są dokładnie na końcu ustępu 16.



18. Krzywe danej fazy zaćmienia w danej chwili. Punkty, w których największa faza przypada w tym samym miejscowym czasie słonecznym. Punkty, w których największa faza zachodzi jednocześnie. Krzywe największej fazy w chwili wschodu lub zachodu Słońca. Wielkość fazy w danej chwili w punkcie Ziemi, w którym zaćmienie już się rozpoczęło, zależy jedynie od odległości punktu tego od osi stożka cienia. Oznaczmy tę odległość przez  $p$ , to w danej chwili mają jednakową fazę zaćmienia wszystkie te punkty, dla których spełnione są równania

$$\begin{aligned}\xi_1 - x &= p \cdot \sin P \\ \eta_1 - y &= p \cdot \cos P,\end{aligned}\tag{198}$$

w których  $\xi_1, \eta_1$  są spólrzędnymi osi stożka,  $x$  i  $y$  spólrzędnymi punktu obserwacji, a  $P$  oznacza kąt, który oś  $\eta$  tworzy z kierunkiem prostej, łączącej środek koła cienia w płaszczyźnie punktu obserwacji z tym punktem. Gdy dane jest  $p$ , a  $\xi_1$  i  $\eta_1$  zostały dla danej chwili  $\vartheta_g$  obliczone, otrzymujemy dla każdej wartości  $P$  wartości spólrzędnych

$$\begin{aligned}x &= \xi_1 - p \sin P \\ y &= \eta_1 - p \cos P\end{aligned}$$

i według wzoru (107')

$$z^2 = z^2 - 2a(y \cos d + z \sin d)^2,$$

gdzie  $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ . Mając  $x, y$  i  $z$ , obliczamy  $\varphi_1$  i  $\vartheta$  według wzorów (90) i (89') oraz  $\lambda = \vartheta_g - \vartheta$ .

Ażeby wyznaczyć te punkty na powierzchni Ziemi, dla których w danym czasie prawdziwym  $\vartheta$  zachodzi największa faza, piszemy we wzorach (169) ogólnie  $p_m$  zamiast  $u$  i opuszczamy równanie trzecie, przyjmując na  $p_m$  wartość dowolną. Mamy więc

$$\begin{aligned}p_m \sin \psi &= -\gamma + a \sin (\varphi_1 - A) \\ p_m \cos \psi &= (\vartheta + \lambda - \nu) \frac{n}{15} + b \sin (\varphi_1 - B) \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\frac{n}{15} - w_k \cos \varphi_1}{w_g \cos \varphi_1}.\end{aligned}\tag{199}$$

Obliczając dla danego  $\vartheta$  i przyjętej dowolnie wartości  $\varphi_1$  według wzorów (167) i (168)  $a, A, b, B, w_g$  i  $w_k$ , znajdujemy  $\operatorname{tg} \psi$  zapomocą



trzeciego z wzorów (199). Uważając więc  $tg \psi$  za wielkość znaną, otrzymujemy z podzielenia pierwszego równania przez drugie

$$\frac{-\gamma + a \sin(\varphi_1 - A)}{(\vartheta + \lambda - \mu) \frac{n}{15} + b \sin(\varphi_1 - B)} = tg \psi, \quad (200)$$

które rozwiązujemy względem  $\lambda$ . Wynika z niego

$$\lambda = \mu - \vartheta - \frac{15}{n} \left[ b \sin(\varphi_1 - B) + \frac{\gamma - a \sin(\varphi_1 - A)}{tg \psi} \right]. \quad (201)$$

Podstawiając po prawej stronie na  $\varphi_1$  szereg wartości, otrzymujemy z powyższego wzoru odpowiednie wartości na  $\lambda$ . Oczywiście należy na  $\varphi_1$  przyjmować tylko takie wartości, które mieszczą się w granicach strefy zaćmienia. Wzór

$$p_m = \frac{-\gamma + a \sin(\varphi_1 - A)}{\sin \psi} \quad (202)$$

określi wtedy wielkość największej fazy, jaka ma miejsce w punkcie, którego spórzędne  $\varphi_1$  i  $\lambda$  zostały obliczone.

Dla  $\vartheta = 0$  otrzymuje się te punkty, w których największa faza zaćmienia ma miejsce w prawdziwe południe.

Celem otrzymania krzywej, w której punktach największa faza zachodzi w tej samej chwili, mianowicie w danym czasie  $\vartheta_g$  głównego południka, postępujemy, jak następuje. Obliczamy dla danego  $\vartheta$  wielkości  $a$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $B$ ,  $\omega_k$  i  $\omega_g$ , jak w poprzednim zadaniu, poczem otrzymujemy dwa równania

$$\vartheta = \vartheta_g - \lambda$$

$$\frac{-\gamma + a \sin(\varphi_1 - A)}{(\vartheta_g - \mu) \frac{n}{15} + b \sin(\varphi_1 - B)} = \frac{\frac{x}{15} - \omega_k \cos \varphi_1}{\omega_g \cos \varphi_1}. \quad (203)$$

Drugie z tych równań, w którym niewiadomą jest  $\varphi_1$ , można rozwiązać przez przybliżenia. Ponieważ  $\psi$  ma wartość bliską  $\pm 90^\circ$ ,

więc mianownik po lewej stronie mało różni się od zera, określamy tedy przybliżoną wartość  $\varphi_1^0$ , przyjmując

$$b \sin (\varphi_1^0 - B) = \frac{n}{15} (\mu - \vartheta_g),$$

a więc

$$\sin (\varphi_1^0 - B) = \frac{n}{15} \cdot \frac{\mu - \vartheta_g}{b}$$

$$tg \psi^0 = \frac{\frac{n}{15} - \omega_k \cos \varphi_1^0}{\omega_g \cos \varphi_1^0}.$$

Następnie znajdujemy  $\varphi_1^{(1)}$  z równania

$$\frac{-\gamma + a \sin (\varphi_1^{(1)} - A)}{(\vartheta_g - \mu) \frac{n}{15} + b \sin (\varphi_1^{(1)} - B)} = tg \psi^0,$$

które ze względu na  $\varphi_1^{(1)}$  rozwiązujemy w sposób następujący. Położmy

$$\gamma + \frac{n}{15} (\vartheta_g - \mu) = R$$

$$R \cdot tg \psi^0 = r^0$$

$$a \cos A - b \cos B \cdot tg \psi^0 = q^0 \cos Q^0$$

$$a \sin A - b \sin B \cdot tg \psi^0 = q^0 \sin Q^0,$$

to jest

$$\sin (\varphi_1^{(1)} - Q^0) = \frac{r^0}{q^0}.$$

Z wartością  $\varphi_1^{(1)}$  obliczamy  $tg \psi^{(1)}$ , a następnie  $r^{(1)}$ ,  $q^{(1)}$ ,  $Q^{(1)}$  oraz  $\sin (\varphi_1^{(2)} - Q^{(1)}) = \frac{r^{(1)}}{q^{(1)}}$ . W ten sposób po kilku przybliżeniach otrzymamy dokładną wartość  $\varphi_1$ , a z pierwszego równania  $\lambda = \vartheta_g - \vartheta$ . Wielkość największej fazy wypływa z wartości  $p_m$ , która dla określonych wartości  $\varphi_1$ ,  $\lambda$  i  $\psi$  wypływa ze wzoru

$$p_m = \frac{-\gamma + a \sin (\varphi_1 - A)}{\sin \psi}.$$

Aby znaleźć te punkty, w których największa faza zachodzi na horyzoncie, możemy te punkty uważać za końcowe punkty granicy



zachodniej i wschodniej zaćmienia w założeniu, że koło cienia ma promień nie  $u'$ , lecz  $p_m < u'$ . Równania zatem (184), w których zamiast  $u'$  napiszemy  $p_m$  określają te punkty, w których w czasie wschodu lub zachodu Słońca przypada największa faza, odpowiadająca odległości  $p_m$  punktu obserwacji od środka cienia. Równania

$$p_m \sin \psi = -\gamma + \sin(N - \gamma_1)$$

$$p_m \cos \psi = (\vartheta + \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \cos(N - \gamma_1)$$

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\frac{n}{15} + \sin \delta_1 \sin(N - \gamma_1)}{\sin \delta_1 \cos(N - \gamma_1)}$$

rozwiązujemy przez przybliżenia w ten sam sposób, jak równania (184), przyjmując dla  $p_m$  szereg wartości, zawartych między 0 a  $u'$ . Dla  $p_m = u'$  otrzymamy końcowe punkty zachodnich i wschodnich granic zaćmienia, a dla  $p_m = 0$  końcowe punkty krzywej zaćmienia centralnego.

Z dwóch wartości  $\gamma$ , które z równań warunkowych wypływają, wartość ujemna odnosi się do krzywej zachodniej, wartość dodatnia zaś do wschodniej. Dodatnie wartości kąta  $\psi$  należą do punktów, położonych na północ od linii zaćmienia centralnego, ujemne zaś do punktów, położonych na południe od tej linii.

**19. Punkty styczności powierzchni Ziemi z powierzchnią stożka cienia. Czas trwania zaćmienia dla całej Ziemi.** Gdy z równań (184) wyznaczamy  $\vartheta$  i  $\lambda$  dla szeregu wartości  $\psi$ , to widzimy, że  $\vartheta + \lambda = \vartheta_g$  dla pewnych wartości  $\psi$  ma wartość najmniejszą lub największą. Ponieważ równania te wyrażają, że w punktach Ziemi, określonych przez nie, tworząca stożka cienia jest styczna do powierzchni Ziemi, a zetknięcia następują kolejno po sobie w miarę, jak stożek cienia posuwa się naprzód. Gdy więc stożek cienia, wkracza w obręb Ziemi, ze wszystkich tworzących stożka najwcześniej styka się z powierzchnią Ziemi ta, na której zachodzi pierwszy zewnętrzny kontakt z powierzchnią Ziemi, najpóźniej zaś ta, na której zachodzi pierwszy wewnętrzny kontakt z powierzchnią Ziemi. A więc dla punktu pierwszego kontaktu  $\vartheta_g$  jest minimum, dla punktu drugiego kontaktu  $\vartheta_g$  jest maximum. Podobnie, gdy stożek wychodzi z granic Ziemi,



najwcześniej styka się z powierzchnią Ziemi ta tworząca, na której zachodzi trzeci kontakt, t. j. drugie wewnętrzne zetknięcie powierzchni stożka z powierzchnią Ziemi. Dla punktu Ziemi, w którym kontakt zachodzi, jest więc  $\vartheta_g$  minimum. Wreszcie dla punktu czwartego kontaktu czyli drugiego zewnętrznego zetknięcia, jest  $\vartheta_g$  maximum.

Gdy więc do równań (184) dodamy jeszcze warunek  $\frac{d(\vartheta + \lambda)}{d\psi} = 0$ , to będziemy w stanie wyznaczyć spólrzędne  $\varphi_1$  i  $\lambda$  punktów czterech wspomnianych kontaktów oraz czas greenwichski, w którym zetknięcia te zachodzą.

Różniczkując równania (184) względem  $\psi$ , znajdujemy

$$u' \cos \psi = -\cos(N - \eta) \frac{d\eta}{d\psi}$$

$$u' \sin \psi = \sin(N - \eta) \frac{d\eta}{d\psi} - \frac{d(\vartheta + \lambda)}{d\psi} \cdot \frac{n}{15},$$

a stąd, gdy według warunku jest  $\frac{d(\vartheta + \lambda)}{d\psi} = 0$ , po łatwych przekształceniach

$$u' \cdot \sin(N - \eta + \psi) = 0.$$

Z tego wzoru wypływają dwie wartości kąta  $\psi$ , mianowicie

$$\psi_1 = -(N - \eta),$$

$$\psi_2 = 180^\circ - (N - \eta),$$

dla których jest odpowiednio

$$\sin \psi = \mp \sin(N - \eta),$$

$$\cos \psi = \mp \cos(N - \eta).$$

Podstawiając te wartości we wzorach (184), znajdujemy

$$\mp u' \sin(N - \eta) = -\gamma + \sin(N - \eta)$$

$$\pm u' \cos(N - \eta) = \frac{n}{15} (\vartheta + \lambda - \mu) - \cos(N - \eta)$$

i z pierwszego z tych równań wypływa

$$\sin(N - \eta) = \frac{\gamma}{1 \pm u'}, \quad (204)$$

z drugiego zaś

$$\vartheta + \lambda = \vartheta_g = \mu + \frac{n}{15} (1 \pm u') \cos(N - \eta). \quad (205)$$

Gdy znamy  $\eta$ , to ze wzorów (183) otrzymujemy  $\varphi_1$  i  $\vartheta$ , a wreszcie  $\lambda = \vartheta_g - \vartheta$ .

Z czterech wartości  $\eta$  dwie ujemnie odnoszą się do początku i końca zaćmienia o wschodzie Słońca, dwie dodatnie do początku i końca zaćmienia w chwili zachodu Słońca.

Ponieważ, jak widzieliśmy, w punktach zetknięć jest

$$\sin(N - \eta + \psi) = 0, \text{ więc według wzoru (188) jest tam } \frac{dp}{dt} = \frac{n}{15} \cdot \cos \psi;$$

gdy więc  $\cos \psi \leq 0$ , albo  $\psi \geq 90^\circ$ , to znak górny odnosi się do punktów, w których zaćmienie się zaczyna, a znak dolny do punktów, w których zaćmienie się kończy. Zaczyna się zaćmienie w punktach pierwszego i trzeciego kontaktu, kończy się w punktach drugiego i czwartego kontaktu.

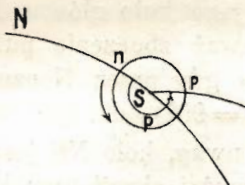
Gdy przez  $\vartheta_g^{(1)}$  i  $\vartheta_g^{(2)}$  oznaczymy czasy prawdziwe greenwichskie pierwszego i ostatniego kontaktu, a przez  $\eta_g^{(1)}$  i  $\eta_g^{(2)}$  odpowiadające im czasy średnie, to  $T = \eta_g^{(2)} - \eta_g^{(1)}$  jest czasem trwania zaćmienia dla całej Ziemi.

Gdy w powyższych wzorach jest  $u' = u'_1$ , to odnoszą się one do zaćmienia częściowego, gdy zaś  $u' = (u'_2)$ , to dotyczą one zaćmienia całkowitego lub pierścieniowego.

**20. Kąt pozycyjny punktów zetknięcia się tarcz Księżyca i Słońca. Wielkość fazy.** Kąt  $BAO = \psi$ , albo też kąt  $B\hat{O}A = 180^\circ - \psi$  (p. rys. 12) określa na kole cienia punkty, w których znajduje się obserwator w chwili początku lub końca zaćmienia. W tych momentach, jak wiemy, obserwator widzi zetknięcie się tarczy Słońca z tarczą Księżyca. Oczywiście punkty kontaktów dla rozmaitych obserwatorów rozmieszczone są na całym obwodzie tarczy Słońca, i należy ich położenie dokładnie określić. Określamy je przez kąt pozycyjny, mający wierzchołek w środku Słońca, utworzony przez jakiś dowolnie obrany i dający się dokładnie wyznaczyć kierunek oraz przez kierunek promienia tarczy Słońca, przechodzącego przez punkt kontaktu.



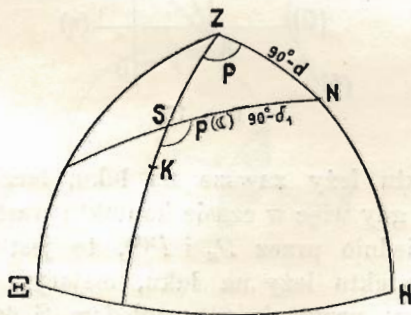
Niechaj na rys. 15 punkt  $N$  oznacza północny biegun świata,  $S$  środek Słońca, a więc  $NS$  koło godzinne środka Słońca. Punkt  $n$ , w którym to koło godzinne przecina brzeg tarczy Słońca, jest punktem północnym tej tarczy. Za kąt pozycyjny punktu  $p$  na tarczy



Rys. 15.

Słońca można przyjąć kąt  $nSp$ , liczony w kierunku wskazanym przez strzałkę, t. j. dla obserwatora, patrzącego na Słońce od północy przez wschód na południe. Oznaczmy go przez  $P^{(k)}$ .

Celem znalezienia tego kąta  $P^{(k)}$ , zastanówmy się nad znaczeniem kąta  $P$ , wprowadzonego w ustępie 10. Z podanego tam określenia tego kąta wynika, że jest to kąt, który tworzy płaszczyzna  $\eta\zeta$  z płaszczyzną, przechodzącą przez oś  $\zeta$  i punkt obserwacji  $A$ . Ponieważ oś  $\zeta$  jest równoległa do prostej, przechodzącej przez środki Księżyca i Słońca, więc płaszczyzna, która przechodzi przez punkt  $A$  i oś  $\zeta$ , przecina się ze sklepieniem niebieskim według wielkiego koła, na którym znajdują się środki Księżyca i Słońca.



Rys. 16.

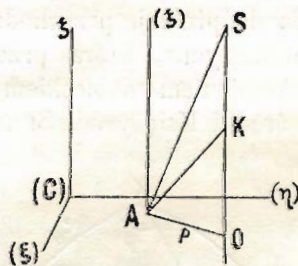
Niechaj na rys. 16 punkty  $K$  i  $S$  oznaczają środki Księżyca i Słońca na niebie, to na wielkim kole, przechodzącym przez te dwa punkty znajduje się też punkt, w którym oś  $\zeta$  przecina sklepienie niebieskie. Oznaczmy przez  $\Xi$ ,  $H$  i  $Z$  punkty przecięcia się osi  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\zeta$



ze sklepieniem niebieskiem, to oczywiście kąt HZS równa się kątowi pomiędzy płaszczyzną  $(\eta, \zeta)$  a płaszczyzną przechodzącą przez oś  $\zeta$  i punkt obserwacji A. Jest więc  $\sphericalangle HZS = P$ .

Z określenia układu  $(\xi, \eta, \zeta)$  — p. ust. 5 — wypływają współrzędne równikowe punktów  $\Xi, H, Z$ , podane na str. 18. Mianowicie punkt  $\Xi$  leży na równiku, a więc jego koło główne HZ przechodzi przez biegun świata. Dalej, ponieważ zboczenie punktów H i Z jest odpowiednio  $90^\circ - d$  i  $d$ , więc gdy przez N oznaczymy biegun północny świata, jest  $NH = d$  i  $NZ = 90^\circ - d$ .

Wobec powyższych uwag, koło NS jest kołem godzinnym środka Słońca, a więc kąt NSK wyżej określonym kątem pozycyjnym środka Księżyca, który oznaczymy przez  $P^{(\mathbb{E})}$ . Że zaś, pomijając paralaksę Słońca, jest  $NS = 90^\circ - \delta_1$ , a  $\delta_1$  mało różni się od  $d$ , więc w przybliżeniu jest też  $NZ = NS$ . Z drugiej strony łuk ZS równa się kątowi  $(\zeta)$   $AS = \sphericalangle ASO$  (rys. 17) i, jak widzimy, jest  $\text{tg } ASO = \frac{AO}{OS}$ . Jest to więc, wobec wielkiej odległości Słońca w stosunku do AO, kąt bardzo mały. Można więc z dostateczną dokładnością przyjąć  $P^{(\mathbb{E})} = P$ .



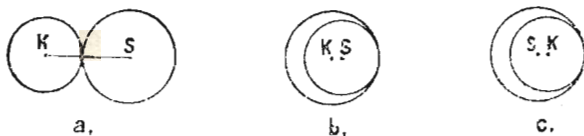
Rys. 17.

Punkt kontaktu leży zawsze na łuku, łączącym środki tarcz Księżyca i Słońca, gdy więc w czasie kontaktu wartości kątów  $P$  i  $P^{(\mathbb{E})}$  oznaczymy odpowiednio przez  $P_n$  i  $P^{(k)}$ , to jest i wtedy  $P^{(k)} = P_n$  i zatem punkt kontaktu leży na łuku, mającym kąt pozycyjny  $P_n$ . Jednakże nie zawsze przypada on względem S po tej samej stronie, co K. Zawsze po tej samej stronie, co środek Księżyca, przypadają punkty kontaktów zewnętrznych (rys. 18a) oraz punkty kontaktów wewnętrznych wówczas, gdy tarcza Księżyca wydaje się mniejsza od tarczy Słońca, t. j. w czasie zaćmienia pierścieniowego (rys. 18b). Gdy zaś w czasie kontaktów wewnętrznych tarcza księżycowa wydaje się większa od tarczy Słońca, t. j. gdy zaczyna się lub kończy się za-

ćnienie całkowite, to środek Słońca S znajduje się pomiędzy środkiem Księżyca K a punktem kontaktu (rys. 18c). Gdy więc ogólnie oznaczymy przez  $Q$  kąt pozycyjny punktu kontaktu, to jest

$Q = P_n + 180^\circ$  dla wszystkich punktów kontaktu wewnętrznego przy zaćmieniu całkowitem i

$Q = P_n$  we wszystkich innych możliwych przypadkach.



Rys. 18.

Według wzoru (115) jest  $P_n = N + \psi$ , a wartości  $\psi$  w czasie kontaktów wypływają naprzykład ze wzorów (164). Oznaczamy jeszcze

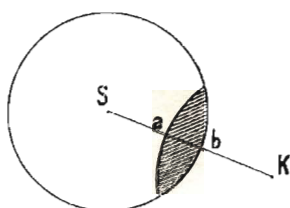
$$M' - \psi = \chi, \quad (206)$$

to jest zatem

$Q = N + M' - \chi + 180^\circ$  dla wewnętrznych kontaktów przy zaćmieniu całkowitem,

$Q = N + M' - \chi$  dla wszystkich innych kontaktów.

Gdy w czasie zaćmienia tarcza Księżyca częściowo pokrywa tarczę Słońca, to najszersza część zakrytego przez Księżyc odcinka przypada na łuku, łączącym środki tarcz Księżyca i Słońca (rys. 19).



Rys. 19.

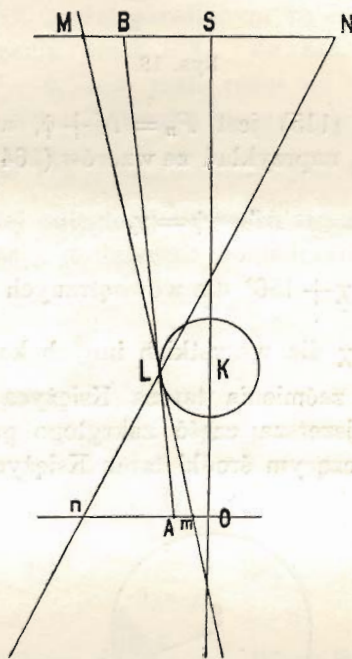
Gdy przez  $\rho_{\odot}$  oznaczymy wielkość promienia tarczy Słońca, a przez  $\varphi$  szerokość  $ab$  części zakrytej w kierunku SK, to przez wielkość fazy rozumiemy stosunek  $F = \frac{\varphi}{2\rho_{\odot}}$ .

Wielkość fazy stoi w ścisłym związku z odległością  $p$  miejsca obserwacji od osi cienia. Ponieważ w chwili kontaktów zewnętrznych

jest  $p = u_1$ , więc oczywiście, aby wogóle miała miejsce jakaś faza zaćmienia, musi być  $p \leq u_1$ . Największa faza, jaka wogóle może się zdarzyć w czasie danego zaćmienia, jest

$$F = 1,$$

Ponieważ w określeniu wielkości fazy z obserwacji nie można osiągnąć wielkiej dokładności, więc też niema potrzeby obliczać jej bardzo dokładnie. Przybliżoną wartość można otrzymać w sposób następujący.



Rys. 20.

Niech na rys. 20 punkty S i K oznaczają odpowiednio środki Słońca i Księżyca, a O środek koła cienia, wewnątrz którego w punkcie A znajduje się punkt obserwacji; Om i On niech będą odpowiednio promieniami kół, określonych w płaszczyźnie punktu A, prostopadłej do osi stożka cienia odpowiednio przez stożek pełnego cienia i półcienia, t. j.  $On = u_1$ ,  $Om = |u_2|$ . Ze względu na małe rozmiary Księżyca możemy przyjąć bez wielkiego błędu, że styczne do powierzchni Księżyca, poprowadzone z punktów m, A i n, przechodzą



przez ten sam punkt L tej powierzchni. Styczne mL i nL są zarazem stycznymi do powierzchni Słońca i niech będą M i N punktami styczności z tą powierzchnią; z dostateczną dokładnością można przyjąć, że są one końcami tej samej średnicy, równoległej do promienia On. Styczna AL niechaj przecina tę średnicę w punkcie B. Do obserwatora w A dochodzą tylko promienie od części średnicy MB, podczas gdy jej część BN jest zakryta przez Księżyc; wielkość fazy zatem, którą obserwator w A dostrzega, jest

$$F = \frac{NB}{MN}.$$

Ale z podobieństwa trójkątów MNL i mnL z jednej strony i trójkątów BNL i AnL z drugiej strony wynika

$$\frac{MN}{mn} = \frac{NL}{nL} = \frac{NB}{nA}$$

a więc też

$$\frac{NB}{MN} = \frac{nA}{mn}.$$

Gdy więc odległość punktu A od osi cienia oznaczymy przez  $p$ , to widzimy, że jest

$$F = \frac{nO - AO}{nO - mO} = \frac{u_1 - p}{u_1 - |u_2|}. \quad (207)$$

Ponieważ  $u$  różni się od  $u'$  tylko o mały wyraz  $z \operatorname{tg} f$ , który przy tej dokładności, z jaką określa się fazę, można pominąć, więc można też przyjąć

$$F = \frac{u_1' - p}{u_1' - |u_2'|} \quad (207')$$

albo też nawet, opuszczając  $|u_2'|$ ,

$$F = 1 - \frac{p}{u_1'}. \quad (207'')$$

21. Przebieg zaćmienia Słońca w danym punkcie obszaru widzialności. Momenty kontaktów i kąty pozycyjne punktów zetknięcia. Czas i wielkość największej fazy. Gdy dane są współ-

rzędne geograficzne  $\varphi$  i  $\lambda$  punktu powierzchni Ziemi, przypadającego w granicach strefy zaćmienia, to przebieg zaćmienia w tym punkcie określają następujące szczegóły:

1. miejscowy czas kontaktów, t. j. początku i końca zaćmienia wogóle, a, gdy punkt przypada w granicach strefy zaćmienia całkowitego, także początku i końca zaćmienia całkowitego lub pierścieniowego,

2. kąty pozycyjne punktów kontaktu na tarczy Słońca,

3. czas miejscowy danej fazy zaćmienia, specjalnie zaś wielkość i czas największej fazy.

Obliczamy najpierw  $\varphi_1$  według wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{1 - \alpha} = (0.00147) \cdot \operatorname{tg} \varphi', \quad (208)$$

w którym liczba w nawiasie jest logarytmem współczynnika. Gdy zaćmienie zaczyna się i kończy, spełnione muszą być dla punktu obserwacji równania koła cienia, w których niewiadomymi są  $\phi$  i  $\vartheta$  oraz naturalnie wszystkie wielkości, które ulegają powolnej zmianie, mianowicie  $u'$ ,  $u$ ,  $f$ ,  $n$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $d$ ,  $\Delta a$ ,  $N$ ,  $g$ ,  $G$ ,  $k$  i  $K$ .

Za podstawę obliczenia najdogodniej przyjąć równania koła cienia w postaci (137) i przy rozwiązywaniu stosować metodę kolejnych przybliżeń. Równania te spełnione są oczywiście tylko wtedy, gdy wszystkie występujące w nich wielkości zmienne obliczone zostały dla miejscowego czasu kontaktów  $\vartheta$ . Ale właśnie ten czas  $\vartheta$  ma być znaleziony zapomocą przybliżeń. Gdy więc  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$  i t. d. są kolejno otrzymywanymi wartościami przybliżonemi, to dla tych wartości przybliżonych należy też za każdym razem wartości elementów zaćmienia obliczyć. Służą do tego wzory (80), (83'), (144), (63), (89), (142), (120), (123), (124), (129), (130). Najlepiej obliczyć elementy dla szeregu epok czasu greenwichskiego w równych odstępach czasu, ażeby można było znaleźć je przez interpolację dla każdej epoki czasu  $\vartheta_g^{(i)} = \vartheta_i + \lambda$ . Obliczanie tych elementów jest zazwyczaj zbyt ciężkie, gdyż w rocznikach astronomicznych (p. ust. 12) elementy zaćmienia podawane są w postaci najdogodniejszej do użytkowania ich przy rozwiązywaniu poszczególnych zadań.

W dalszym ciągu tego wykładu nie będziemy już za każdym razem wspominali o tem, że występujące w równaniach kontaktów elementy zmienne mają zawsze wartości, otrzymane przez interpolację dla występującej w nich jako wielkość znana, przybliżonej wartości  $\vartheta_i$ .



Obierając za punkt wyjścia dowolną epokę  $\vartheta_0$ , o ile możności jak najbliższą epoki  $\vartheta$ , a gdy o tej ostatniej nic nie wiemy, najlepiej epokę, bliską geocentrycznego połączenia Księżyca i Słońca, obliczamy dla niej elementy, następnie znajdujemy  $m_0, M_0, m'_0, M'_0$  według wzorów (161) i (162), w których zamiast  $\frac{\vartheta_0 + \vartheta}{2}$  piszemy wprost  $\vartheta_0$  oraz  $u$  według trzeciego wzoru (137), w którym również kładziemy  $\vartheta = \vartheta_0$  i pomijamy  $\Delta\alpha$ . Jest więc

$$u_0 = u' - [(1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos \vartheta_0] \operatorname{tg} f. \quad (209)$$

Następnie według wzorów (164) określamy  $\psi_1$  i  $\vartheta_1$ , mianowicie

$$\begin{aligned} u_0 \sin(M'_0 - \psi_1) &= m_0 \sin(M_0 + M'_0) \\ u_0 \cos(M'_0 - \psi_1) &= m_0 \cos(M_0 + M'_0) + \frac{m'_0}{15} (\vartheta_1 - \vartheta_0). \end{aligned} \quad (210)$$

Z pierwszego z tych równań znajdujemy dwie wartości kąta  $\psi_1$ , jedną dla początku zaćmienia, drugą dla końca; tym dwóm wartościom odpowiadają dwie wartości  $\cos(M'_0 - \psi_1)$ , różniące się tylko znakiem. Następnie według wzoru (165) jest

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 - 15 \frac{m_0}{m'_0} \cos(M_0 + M'_0) + 15 \frac{u_0}{m'_0} \cos(M'_0 - \psi_1). \quad (211)$$

Z równania tego dla dwóch znaków trzeciego wyrazu otrzymujemy dwie wartości na  $\vartheta_1$ , z których mniejsza odnosi się do początku zaćmienia, a większa do końca zaćmienia. Ponieważ mniejszą wartość na  $\vartheta_1$  otrzymuje się, gdy  $u_0 \cos(M_0 - \psi_1) < 0$ , więc do początku zaćmienia wogóle należy ta wartość  $\psi_1$ , dla której  $u_0 \cos(M' - \psi)$  ma wartość ujemną; druga z otrzymanych wartości  $\psi_1$  odnosi się więc do końca zaćmienia.

Dalszy rachunek przybliżeń musi być wykonany oddzielnie dla początku zaćmienia, dla którego mniejsza z wartości  $\vartheta_1$  stanowi pierwsze przybliżenie, oraz oddzielnie dla końca zaćmienia, dla którego pierwsze przybliżenie stanowi większa z otrzymanych wartości  $\vartheta_1$ . Ponieważ postępowanie jest jednakowe, więc przyjmujemy, że  $\vartheta_1$  oznacza wprost mniejszą z dwóch wartości. Obliczywszy elementy dla czasu greenwichskiego  $\vartheta_g^{(1)} = \vartheta_1 + \lambda$ , kładziemy

$$\begin{aligned} \gamma - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos g + \cos \varphi_1 \sin g \sin(G + \vartheta_1 + \Delta\alpha) &= m_1 \sin M_1, \\ \frac{n}{15} (\vartheta_1 + \lambda - \vartheta) - (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos k + \cos \varphi_1 \sin k \cos(K + \vartheta_1 + \Delta\alpha) &= m_1 \cos M_1, \\ u_1 &= u' - [(1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin d + \cos \varphi_1 \cos d \cos(\vartheta_1 + \Delta\alpha)] \operatorname{tg} f. \end{aligned}$$



oraz określamy ze wzoru

$$\sin(M_1' - \phi_2) = \frac{m_1}{u_1} \sin(M_1 + M_1')$$

kąt  $\phi_2$  w ten sposób, ażeby było  $\cos(M' - \phi_2) < 0$ . Z tą wartością  $\phi_2$  znajdujemy

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - 15 \frac{m_1}{m_1'} \cos(M_1 + M_1') + 15 \frac{u_1}{m_1'} \cos(M_1' - \phi_2).$$

W ten sposób postępujemy tak długo, aż otrzymamy  $\vartheta_i = \vartheta_{i+1}$ ; wtedy jest  $\vartheta_i = \vartheta$ .

Niechaj wartościom  $\vartheta$ , otrzymanym dla początku i dla końca zaćmienia, odpowiadają odpowiednio czasy średnie  $\eta_1$  i  $\eta_2$ , to  $T = \eta_2 - \eta_1$  oznacza czas trwania zaćmienia. Oczywiście, gdy rozwiążemy równania koła cienia, stosując wartość  $u = u_1$ , otrzymamy wartości  $\vartheta$  i  $\phi$ , odnoszące się do początku i końca zaćmienia wogóle, a więc i  $T$  oznacza w tym wypadku czas trwania zaćmienia wogóle. Gdy zaś punkt  $(\varphi, \lambda)$  leży w strefie zaćmienia całkowitego lub pierścieniowego, to wtedy otrzymuje się też wartości rzeczywiste dla  $\phi$  i  $\vartheta$ , gdy położymy  $u = |u_2|$ . Wartości te odnoszą się wówczas do początku i końca zaćmienia całkowitego lub pierścieniowego, a odpowiadająca im wartość  $T$  oznacza czas trwania zaćmienia całkowitego lub pierścieniowego.

Oznaczając  $M' - \phi = \gamma$ , obliczamy, jak to zostało wyjaśnione w ustępie 20, kąty pozycyjne kontaktów zapomocą wzoru

$$Q = N + M' - \gamma + 180^\circ \cdot i \quad (212)$$

gdzie  $i = 1$  dla wewnętrznych kontaktów w przypadku zaćmienia całkowitego, a  $i = 0$  dla wszystkich innych przypadków.

Gdybyśmy w równaniach (137) zamiast  $u$  wprowadzili wartość  $p$  taką, że  $p < u$ , to wyrażałyby one warunek, aby punkt obserwacji znajdował się na kole spółśrodkowym z kołem cienia o promieniu  $p$ . W sposób zupełnie podobny, jak dla kontaktów, otrzymuje się w tym przypadku

$$p \sin(M' - \phi) = m \sin(M + M')$$

$$\vartheta = \vartheta_0 - 15 \frac{m}{m'} \cos(M + M') + 15 \frac{p}{m'} \cos(M' - \phi). \quad (213)$$

Jeżeli na  $\phi$  z pierwszego z tych równań otrzymuje się wartość rzeczywistą, to znaczy, że w danym punkcie obserwacji zachodzi faza zaćmienia wielkości  $F = \frac{u_1 - p}{u_1 - |u_2|}$  (wzór 207). W ogólności faza taka

w tym wypadku zachodzi dwa razy w momentach, określonych przez drugie z równań (213). Gdy ta faza zachodzi, oblicza się przez przybliżenia tak samo jak dla kontaktów. Tylko gdy w specjalnym przypadku, jak to już widziliśmy w ustępie 15, jest  $\cos(M' - \psi) = 0$ , a więc  $M' = \psi \pm 90^\circ$ , faza  $p$  zachodzi tylko raz; jest to największa faza.

Gdy  $\vartheta_m$  jest czasem największej fazy, a  $p_m$  odpowiadającą jej odległością obserwatora od środka koła cienia, i gdy dla tej wartości zostały obliczone wartości  $m$ ,  $M$ ,  $m'$  i  $M'$ , to ponieważ w tym przypadku w drugim ze wzorów (164) drugi wyraz po prawej stronie odpada, a  $\cos(M' - \psi_m) = 0$ , więc też

$$\cos(M + M') = 0.$$

Gdy więc w pierwszym z równań (164) podstawimy  $\sin(M' - \psi_m) = \sin(M + M') = 1$ , to wynika, jako warunek największej fazy,

$$p_m = m. \quad (214)$$

Celem obliczenia  $\psi_m$ ,  $\vartheta_m$  i  $p_m$  stosujemy rachunek przybliżeń. Jako przybliżony czas największej fazy przyjmujemy średnią z czasów kontaktów  $\vartheta_0 = \frac{\vartheta_p + \vartheta_k}{2}$ . Dla tej wartości  $\vartheta_0$  obliczamy elementy oraz  $m_0$ ,  $M_0$ ,  $m'_0$ ,  $M'_0$ . Ponieważ dla największej fazy  $\cos(M'_m - \psi_m) = 0$ , więc znajdujemy drugą wartość przybliżoną  $\vartheta_1$  ze wzoru

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 - 15 \frac{m_0}{m'_0} \cos(M_0 + M'_0).$$

Z wartością  $\vartheta_1$  znajdujemy  $m_1$ ,  $M_1$ ,  $m'_1$ ,  $M'_1$  oraz

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 - 15 \frac{m_1}{m'_1} \cos(M_1 + M'_1).$$

W ten sposób postępujemy tak długo, aż  $M_i + M'_i = \pm 90^\circ$ , wtedy jest  $\psi_m = M'_i \pm 90^\circ$ ,  $p_m = m_i$ ;  $\psi_m$  ma wartość dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy zakryciu ulega górna czy dolna część tarczy Słońca. Wynika to z wartości kątów pozycyjnych punktów kontaktów:  $\psi_m$  ma wartość bliską średniej arytmetycznej wartości  $\psi$  dla kontaktów. Znając  $\psi_m$ , znajdujemy dla największej fazy kąt pozycyjny

$$Q_m = N + M' \pm 90^\circ, \quad (215)$$

gdzie naturalnie  $N$  i  $M'$  obliczone są dla czasu  $\vartheta_m$ .

Wartość największej fazy jest

$$F_m = \frac{u_2 - p_m}{u_1 - \|u_2\|} \quad (216)$$



## ROZDZIAŁ III.

### ZACMIENIA KSIĘŻYCA.

22. Spółrzędne cieniowe selenocentryczne. Stożek cienia, rzuconego przez Ziemię. Koło cienia w płaszczyźnie, przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do osi stożka. Zaćmienie Księżyca zachodzi wtedy, gdy Księżyc znajduje się wewnątrz stożka cienia, rzucanego przez Ziemię. Należy i tu odróżniać stożek pełnego cienia i stożek półcienia; jednakże obserwacja stwierdza, że gdy Księżyc znajduje się wewnątrz stożka półcienia, nie objawia się to dostatecznie wyraźnie dostrzegalną zmianą w wyglądzie tarczy Księżyca, a pewne osłabienie jasności tarczy Księżyca występuje dopiero wtedy, gdy Księżyc znajduje się bardzo blisko powierzchni stożka pełnego cienia. Zazwyczaj więc też, gdy badamy warunki zaćmienia Księżyca, bierzemy pod uwagę tylko stożek pełnego cienia Ziemi.

W myśl umowy, podanej w ustępie 5, punkt C jest obecnie środkiem Księżyca, jako tego ciała, na które pada cień, a punkt B jest środkiem Ziemi. Gdy więc za początek układu  $(x, y, z)$  obierzemy środek Księżyca, a osiom współrzędnych nadamy kierunki takie, jak to zostało wyjaśnione w ustępie 5, to wzory (49) oraz przybliżone wzory (80), (81) i (81') także i w tym przypadku określają kierunek osi cienia oraz odległość  $AB = \Delta$ . Podobnie też i wzory (51) określają współrzędne cieniowe punktu w układzie cieniowym, którego początek znajduje się w środku Księżyca, jeżeli  $\rho$  oznacza odległość tego punktu od środka Księżyca, a  $\alpha$  i  $\delta$  współrzędne równikowe tego punktu, widziane ze środka Księżyca, czyli *selenocentryczne*. Oczywiście też we wzorach określających  $a$  i  $d$  należy rozumieć przez  $\alpha_1$  i  $\delta_1$  współrzędne równikowe selenocentryczne środka Słońca, przez  $\alpha_2$  i  $\delta_2$  także współ-



rzędne środka Ziemi, przez  $\rho_1$  i  $\rho_2$  odpowiednio odległości Słońca i Ziemi od Księżycy, a wreszcie przez  $\mu$  stosunek  $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ .

Możemy jednakże wartości selenocentryczne w tych wzorach zastąpić przez wartości geocentryczne. Gdy dla odróżnienia oznaczymy kreseczkami spólrzędne równikowe i odległości selenocentryczne, to dla spólrzędnych cieniowych otrzymamy wzory

$$\begin{aligned}\xi &= \rho' \cos \delta' \sin (\alpha' - a) \\ \eta &= \rho' [\sin \delta' \cos d - \cos \delta' \sin d \cos (\alpha' - a)] \\ \zeta &= \rho' [\sin \delta' \sin d + \cos \delta' \cos d \cos (\alpha' - a)].\end{aligned}\quad (217)$$

Gdy przez  $\alpha_1$  i  $\delta_1$  oznaczymy spólrzędne geocentryczne Słońca, przez  $\alpha_2$  i  $\delta_2$  także spólrzędne Księżycy, przez  $\rho_1$  i  $\rho_2$  odległości Słońca i Księżycy od Ziemi, to ponieważ geocentryczny kierunek ku Księżycowi i selenocentryczny kierunek ku Ziemi są sobie wprost przeciwne, więc

$$\begin{aligned}\rho_2' &= \rho_2, \\ \alpha_2' &= \alpha_2 + 180^\circ, \\ \delta_2' &= -\delta_2.\end{aligned}$$

Z drugiej strony, kąty  $a$  i  $d$  określają kierunek osi cienia Ziemi, t. j. kierunek ze środka Ziemi ku środkowi Słońca, ten zaś określony jest przez geocentryczne spólrzędne środka Słońca. Jest więc

$$\begin{aligned}a &= \alpha_1 \\ d &= \delta_1.\end{aligned}$$

Wobec tego otrzymujemy następujące wzory, określające spólrzędne prostokątne środka Ziemi w układzie cieniowym

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \rho_2 \cos \delta_2 \sin (\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1) \\ \eta_2 &= \rho_2 [-\cos \delta_1 \sin \delta_2 - \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1)] \\ \zeta_2 &= \rho_2 [-\sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1)].\end{aligned}\quad (218)$$

Spólrzędne cieniowe środka Słońca, który przypada na osi cienia w odległości  $\rho_1$  od środka Ziemi są oczywiście

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_2 \\ \eta_1 &= \eta_2 \\ \zeta_1 &= \zeta_2 + \rho_1.\end{aligned}\quad (219)$$

Zaćmienie Księżyca zachodzi zawsze w epokach niezbyt odległych od geocentrycznej opozycji Księżyca i Słońca, a więc  $(\alpha_2 + 180^\circ)$  mało różni się od  $\alpha_1$ , a  $\delta_2$  od  $-\delta_1$ . Kładąc więc

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1) &= (\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1) \sin 1'', \\ \cos(\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1) &= 1, \\ \sin(\delta_1 + \delta_2) &= (\delta_1 + \delta_2) \cdot \sin 1'', \\ \cos(\delta_1 + \delta_2) &= 1,\end{aligned}$$

otrzymujemy następujące dostatecznie przybliżone wartości współrzędnych cieniowych środka Ziemi i środka Słońca:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_2 = \rho_2 \cos \delta_2 (\alpha_2 + 180^\circ - \alpha_1) \sin 1'', \\ \eta_1 &= \eta_2 = -\rho_2 (\delta_1 + \delta_2) \sin 1'', \\ \zeta_2 &= \rho_2, \\ \zeta_1 &= \rho_1 + \rho_2.\end{aligned}\tag{220}$$

Zaćmieniu podlegają wszystkie punkty powierzchni Księżyca, znajdujące się wewnątrz stożka pełnego cienia Ziemi. Punkt tej powierzchni, dla którego jest  $\zeta = z$ , podlega zaćmieniu, gdy znajduje się wewnątrz koła, według którego płaszczyzna  $\zeta = z$  przecina stożek cienia. Promień tego koła określają wzory (55), (62) i (63) po podstawieniu w nich odpowiednich wartości. Mianowicie, gdy w tym przypadku oznaczymy przez  $r_2$  promień Ziemi, to kąt  $f$  dla stożka pełnego cienia znajdujemy ze wzoru

$$\sin f = \frac{r_2 - r_1}{\rho_1},\tag{221}$$

a promień koła cienia w płaszczyźnie  $(\xi \eta)$  ma wartość

$$u' = \left( \rho_2 + \frac{r_2}{\sin f} \right) \operatorname{tg} f = \zeta_0 \operatorname{tg} f,\tag{222}$$

w płaszczyźnie zaś  $\zeta = z$  wartość

$$u = u' - z \operatorname{tg} f.\tag{223}$$

Ponieważ Ziemia jest sferoidą, więc promień jej  $r_2$  zmienia się w zależności od szerokości geograficznej. Jednakże ze względu na niewielką dokładność, z którą chwile początku i końca zaćmienia Księżyca w jakimś punkcie jego powierzchni mogą być obserwowane,



można nie uwzględniać różnic w długości promienia  $r_2$  i przyjmując dla  $r_2$  wartość dla  $\varphi = 45^\circ$ , t. j.  $r_2 = 0.99837$ . Kładąc dalej  $r_1 = 109.0488$ ,  $\rho_1 = \operatorname{cosec} \pi_1 = \operatorname{cosec} \pi_1^0 \cdot \frac{\pi_1^0}{\pi_1}$  oraz przyjmując  $\pi_1^0 = 8''.80$ , znajdujemy

$$\sin f = (7.66368 n) \cdot \frac{\pi_1}{8''.80}, \quad (224)$$

$$f = -108.05 \cdot \pi_1.$$

Dalej znajdujemy

$$\zeta_0 = \rho_2 + \frac{r_2}{r_2 - r_1} \rho_1 = \rho_1 \left( \mu + \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) = \operatorname{cosec} \pi_1^0 \left( \mu + \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) \cdot \frac{8''.80}{\pi_1}$$

albo po obliczeniu

$$\zeta_0 = [(4.36994) \mu - 216.58] \cdot \frac{8''.80}{\pi_1}, \quad (225)$$

a wreszcie

$$u' = \zeta_0 \operatorname{tg} f = \rho_2 \operatorname{tg} f + r_2 \cos f. \quad (226)$$

Ponieważ  $f$  jest małym kątem, więc też z dostatecznym przybliżeniem

$$u' = r_2 + \rho_2 \sin f = r_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (r_2 - r_1) = r_2 + \mu (r_2 - r_1) \quad (227)$$

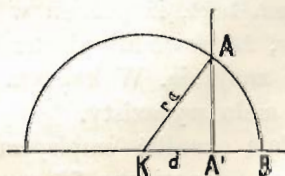
albo w liczbach

$$u' = 0.99837 + (2.03362 n) \mu = 0.99837 - (7.66368) \operatorname{cosec} \pi_2.$$

Dla punktów powierzchni Księżyca jest co najwyżej  $z = r_{\odot} = 0.27248$ ; gdy więc  $0 \leq \theta \leq 1$ , to w ogólności jest  $z = 0.27248 \cdot \theta$ , a więc

$$u = u' - 0.27248 \cdot \theta \operatorname{tg} f = u' - 0.00126 \cdot \theta. \quad (228)$$

Wartość tego ułamka  $\theta$  dla danego punktu tarczy Księżyca zale-



Rys. 21.

ży od odległości tego punktu od środka tarczy, jak to wyjaśnia rys. 21. Punkt A powierzchni Księżyca widoczny jest z Ziemi w odległości



$KA' = d$  od środka tarczy Księżyca. Dla tego punktu jest  $z = A'A = = \Theta r_{\oplus}$ ; jest więc

$$d^2 + \Theta^2 r_{\oplus}^2 = r_{\oplus}^2$$

$$\Theta = \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r_{\oplus}}\right)^2}$$

albo, gdy oznaczymy  $\frac{d}{r_{\oplus}} = \frac{KA'}{KB} = \cos \eta$ , to  $\Theta = \sin \eta$  oraz

$$u = u' - 0.00126 \cdot \sin \eta. \quad (229)$$

Wartość  $u$  zmienia się dla różnych punktów powierzchni Księżyca w zależności od kąta  $\eta$  w granicach od  $u = u'$  do  $u = u' - -0.00126$ , a więc brzeg cienia na tarczy Księżyca nie jest kołem, lecz elipsą, której mała oś przechodzi przez oś stożka cienia i ośrodek tarczy księżyca.

Uwzględnienie tych różnych wartości  $u$  jest tylko wtedy pożyteczne, gdy chodzi o możliwie dokładne obliczenie początku i końca zaćmienia dla poszczególnych punktów powierzchni Księżyca, np. kraterów, szczytów górskich i t. p. Jednakże wobec niewielkiej dokładności, z jaką te momenty obserwować można z powodu zamazanego wyglądu brzegów cienia, zazwyczaj nie uwzględnia się różnic wartości, przyjmując wprost  $u = u'$ . Punkty styczności stożka cienia z powierzchnią Księżyca leżą oczywiście w płaszczyźnie  $(\xi, \eta)$ , a więc zarówno dla początku jak i dla końca zaćmienia, t. j. pierwszego i drugiego kontaktu, wchodzi w rachubę tylko  $u'$ .

Jednakże obserwacje wykazują, że ta teoretyczna wartość  $u'$  jest zmała, gdyż zaćmienie zaczyna się zawsze trochę wcześniej, a kończy nieco później, niż oblicza się z tej wartości teoretycznej. Stoi to prawdopodobnie w związku z refrakcją atmosferyczną, która powoduje pewne odchylenie kierunku promieni od linii prostej, a częściowo być może jest też następstwem tego, iż półcień w bliskości stożka pełnego cienia jest już tak gęsty, że powoduje dostrzegalne zmniejszenie jasności ciał, które tam się znajdują. W każdym razie jest to powodem, że brzeg cienia jest tak mało wyrazisty.

Obserwacje pozwalają określić empiryczną poprawkę promienia cienia. Według Hartmanna wynosi ona 2% wartości teoretycznej. Należy więc jako podstawę dalszych obliczeń przyjmować

$$\begin{aligned} u' &= 1.01834 - (7.67228) \operatorname{cosec} \pi_2 \\ u &= u' - 0.00128 \cdot \sin \eta. \end{aligned} \quad (230)$$



zależnie od tego czy A i O znajdują się po tej samej stronie względem K czy po przeciwnej

$$\xi = \pm r_{\odot} \cdot \sin P_n,$$

$$\eta = \pm r_{\odot} \cdot \cos P_n,$$

a więc

$$\xi_1 = (u' \pm r_{\odot}) \sin P_n,$$

$$\eta_1 = (u' \pm r_{\odot}) \cos P_n. \quad (233)$$

Oznaczmy ogólnie  $KO = q$ ,  $\sphericalangle \eta KO = Q$ , to współrzędne środka koła cienia są

$$\xi_1 = q \sin Q,$$

$$\eta_1 = q \cos Q.$$

Niechaj jeszcze będzie punkt  $O^0$  położeniem środka cienia w jakiejś epoce początkowej  $t_g^0$ , więc gdy położenie O przypada w epoce  $t_g$ , to  $O^0O$  jest drogą osi cienia w czasie  $t_g - t_g^0 = \tau$ . Jeżeli przez  $n$  oznaczymy drogę, którą oś cienia przebywa w ciągu godziny i  $\tau$  wyrazimy w godzinach, a dalej przez  $N$  oznaczymy kąt, jaki tworzy kierunek ruchu  $O^0O$  z dodatnim kierunkiem osi  $\eta$ , to

$$v_{\xi} = n \sin N,$$

$$v_{\eta} = n \cos N$$

(234)

są odpowiednio rzutami drogi  $n$  na osi  $\xi$  i  $\eta$ .

Gdy  $\xi_1^0$  i  $\eta_1^0$  są współrzędnymi punktu  $O^0$ , to jest

$$\xi_1 = \xi_1^0 + \tau n \sin N,$$

$$\eta_1 = \eta_1^0 + \tau n \cos N$$

(235)

albo też, gdy jest  $KO^0 = q_0$ ,  $\sphericalangle \eta KO^0 = Q_0$ , możemy pisać

$$q \sin Q = q_0 \sin Q_0 + \tau n \sin N$$

$$q \cos Q = q_0 \cos Q_0 + \tau n \cos N.$$

(236)

Z tych równań można dla każdego  $t_g = t_g^0 + \tau$  obliczyć  $q$  i  $Q$ , gdy znane są wartości  $q_0$ ,  $Q_0$ ,  $n$  i  $N$ .

Można wszakże uważać też  $\tau$  za niewiadomą; w takim razie równania (236) określają także jedną z niewiadomych  $q$  lub  $Q$ , gdy druga z nich jest dana. Pomnożmy w tym celu pierwsze z równań (236) przez  $\cos N$ , drugie przez  $-\sin N$ , i dodajmy, to otrzymamy

$$q \sin(Q - N) = q_0 \sin(Q_0 - N).$$

(237)



Gdy zaś pierwsze z równań (236) pomnożymy przez  $\sin N$ , drugie przez  $\cos N$ , i dodamy, to otrzymamy

$$q \cos (Q - N) = q_0 \cos (Q_0 - N) + \tau \cdot n. \quad (238)$$

Jeżeli  $q$  jest niewiadomą, to wartość jej otrzymujemy ze wzoru (237), mianowicie

$$q = q_0 \cdot \left| \frac{\sin (Q_0 - N)}{\sin (Q - N)} \right| \quad (239)$$

a po podstawieniu w równaniach (238), także  $\tau$  ze wzoru

$$\tau = - \frac{q_0}{n} \cdot \frac{\sin (Q - Q_0)}{\sin (Q - N)}. \quad (240)$$

Wzory (239) i (240) wskazują, że dana wartość  $Q$  zachodzi tylko raz w określonym czasie  $t_g = t_g^0 + \tau$  i w określonej odległości  $KO = q$ .

Jeżeli zaś niewiadomymi są  $Q$  i  $\tau$ , a odległość  $q$  jest daną, to otrzymujemy następujące dwa wzory, określające  $Q$  i  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \sin (Q - N) &= \frac{q^0}{q} \sin (Q_0 - N) \\ \tau &= - \frac{q^0}{n} \cos (Q_0 - N) + \frac{q}{n} \cos (Q - N). \end{aligned} \quad (241)$$

Z pierwszego z tych równań wypływają dla danego  $q$  dwie wartości na  $Q$ , o ile  $\left| \frac{q^0}{q} \cdot \sin (Q_0 - N) \right| \leq 1$ . Dana więc odległość zachodzi w ogólności dwa razy i dla tych dwóch wartości  $Q$  z drugiego z równań (241) wypływają dwie wartości na  $\tau$ , mniejsza dla malejących wartości  $q$ , większa dla wzrastających.

Jedynie gdy  $\cos (Q_0 - N) = 0$ , otrzymuje się jedną wartość na  $Q$  i  $\tau$ . Wtedy jest  $Q - N = \pm 90^\circ$ , a więc  $Q = N \pm 90^\circ$ , przyczem znak zależy od znaku  $\sin (Q_0 - N)$ , oraz  $q = q_0 \sin (Q_0 - N)$ . Oznaczmy w tym przypadku  $q = \gamma$ , to  $\gamma$  jest oczywiście najmniejszą odległością osi cienia od środka Księżyca; gdy jeszcze wartość  $\tau$ , odpowiadającą tej odległości, oznaczymy przez  $\tau_m$ , to jest

$$\begin{aligned} \gamma &= q_0 \sin (Q_0 - N) \\ \tau_m &= - \frac{q_0}{n} \cos (Q_0 - N). \end{aligned} \quad (242)$$

Gdy więc  $\mu$  oznacza czas greenwickski tej najmniejszej odległości, to

$$\mu = t_g^0 - \frac{q_0}{n} \cos(Q_0 - N). \quad (243)$$

Ażeby ze wzorów (241) i (242) wyznaczyć niewiadome, obieramy za  $t_g^0$  jakąś epokę, bliską geocentrycznej opozycji, i dla tej epoki obliczamy  $\xi_1^0$  i  $\eta_1^0$  według wzorów (220), poczem wartości  $q_0$  i  $Q_0$  wypływają ze wzorów

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= q_0 \sin Q_0, \\ \eta_1^0 &= q_0 \cos Q_0. \end{aligned} \quad (244)$$

Celem otrzymania  $n$  i  $N$  obliczamy wartości współrzędnych  $\xi_1$  i  $\eta_1$  dla szeregu epok w odstępach godzinnych, następnie zaś znajdujemy  $v_\xi$  i  $v_\eta$ , stosując wzór (142); wreszcie obliczamy według wzoru (234) odpowiednie wartości  $n$  i  $N$ .

Ponieważ  $n$  i  $N$  zmieniają się bardzo powoli, więc równania (241) można rozwiązać przez przybliżenia, przyjmując w pierwszym przybliżeniu wartości  $n$  i  $N$  dla epoki  $t_g^0$ . Otrzymamy w ten sposób przybliżone wartości  $Q_1$  i  $\tau_1$ , poczem z tabelki wartości  $n$  i  $N$  znajdujemy przez interpolację ich wartości dla epoki  $t_g^{(1)} = t_g^{(0)} + \tau_1$ ; stosując te wartości, obliczamy drugie przybliżone wartości  $Q_2$  i  $\tau_2$ . Oczywiście dla każdej z dwóch wartości  $\tau_1$  należy wykonać rachunek drugiego przybliżenia oddzielnie z odpowiednimi wartościami  $n$  i  $N$ .

Również  $\tau_m$  według wzoru (242) oblicza się najpierw z wartościami  $n$  i  $N$ , ważnymi dla epoki  $t_g^0$ ; otrzymawszy zaś w pierwszym przybliżeniu wartość  $\tau_m^{(1)}$ , znajdujemy dla tej epoki  $n$  i  $N$  oraz  $\tau_m^{(2)}$ . Wartości  $Q_2$ ,  $\tau_2$  i  $\tau_m^{(2)}$  są zazwyczaj dostatecznie dokładne. We wzorze na  $\gamma$  należy oczywiście użyć wartości  $N$ , odpowiadającej epoce  $\tau_m$ .

Nie byłby zresztą dotkliwy błąd, którybyśmy popełnili, przyjmując, że  $n$  i  $N$  mają wartość stałą dla całego czasu zaćmienia, odpowiadającą np. środkowi zaćmienia, t. j. epoce  $\mu$ , którą zatem przedewszystkiem wypadnie określić.

**24. Kryterja, określające możliwość zajścia zaćmienia Księżyca oraz rodzaj zaćmienia.** Gdy koło cienia i tarcza Księżyca stykają się zewnętrznie, jest  $KO = u' + r_\odot$ , gdy zaś stykają się wewnętrznie, jest  $KO = u' - r_\odot$ . Ażeby więc zaćmienie Księżyca było możliwe, muszą środki tych kół bardziej zbliżyć się do siebie, aniżeli w czasie zewnętrznego kontaktu, musi więc być  $\gamma \leq u' + r_\odot$ . Gdy zaćmienie jest całkowite, cała tarcza Księżyca znajduje się we-

wnętrz koła cienia, początkiem więc zaćmienia całkowitego jest chwila kontaktu wewnętrznego. Warunek zatem, aby zaćmienie całkowite było możliwe, jest  $\gamma \leq u' - r_{\oplus}$ . Gdy więc

1.  $\gamma \leq u' - r_{\oplus}$ , zachodzi całkowite zaćmienie Księżyca,
2.  $u' - r_{\oplus} < \gamma < u' + r_{\oplus}$ , to zachodzi tylko częściowe zaćmienie Księżyca.

Gdy  $\gamma = 0$ , co zresztą zdarzyć się może tylko w przybliżeniu, to zaćmienie całkowite jest zaćmieniem centralnym, gdyż środki cienia i tarczy Księżyca nakrywają się wzajemnie.

Wartość  $u'$  jest zmienna głównie w zależności od paralaksy Księżyca. Krańcowe wartości są dla krańcowych wartości, paralaksy 52' i 62' odpowiednio 0.7075 i 0.7576. Wartości  $u' + r_{\oplus}$  zawarte więc są w granicach od 0.9800 do 1.0301, a wartości  $u' - r_{\oplus}$  w granicach od 0.4350 do 0.4851. Należy więc rozróżniać wypadki następujące:

1.  $\gamma > 1.0301$ , zaćmienie Księżyca niemożliwe;
2.  $0.9800 \leq \gamma < 1.0301$ , możliwe częściowe zaćmienie Księżyca;
3.  $0.4851 < \gamma < 0.9800$ , zaćmienie częściowe zachodzi napewno;
4.  $0.4350 \leq \gamma < 0.4851$ , zaćmienie całkowite możliwe, częściowe pewne;
5.  $\gamma \leq 0.4350$ , całkowite zaćmienie Księżyca zachodzi z pewnością.

Wartość  $\gamma$  znajduje się w ścisłym związku z wartością geocentrycznych współrzędnych Księżyca, ale nie zależy od kierunku osi  $\xi$  i  $\eta$ . Obierając więc układ współrzędnych  $(\xi, \eta)$  w ten sposób, jak w ustępie 13 (str. 54), ale selenocentryczny, otrzymamy współrzędne środka koła cienia  $\xi_1$  i  $\eta_1$ , kładąc we wzorach (220)  $\lambda$  zamiast  $\alpha$  i  $\beta$  zamiast  $\delta$ . W tych wzorach występują geocentryczne wartości współrzędnych sferycznych, jest zatem  $\beta_1 = 0$ , i wzory otrzymują postać następującą:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho_2 \cos \beta_2 (\lambda_2 + 180^\circ - \lambda_1) \sin 1'', \\ \eta_1 &= -\rho_2 \beta_2 \sin 1''. \end{aligned} \quad (245)$$

Z pierwszego ze wzorów (242) w związku z wzorem (239) wypływa, gdy przez  $\dot{N}$  oznaczymy kąt, który tworzy kierunek ruchu stożka z kierunkiem osi  $\eta_1$ ,

$$\gamma = |\dot{\xi}_1^0 \cos \dot{N} - \dot{\eta}_1^0 \sin \dot{N}|. \quad (246)$$



Obierzmy za epokę  $t_g^0$  chwilę geocentrycznej opozycji w długości i niech będzie wtedy  $\beta_2 = \beta_2^0$  oraz  $\rho_2 = \rho_2^0$ , to ponieważ  $\lambda_2^0 + 180^\circ = \lambda_1^0$ , więc jest

$$\dot{\xi}_1^0 = 0$$

$$\dot{\eta}_1^0 = -\rho_2^0 \beta_2^0 \sin 1''$$

oraz

$$\dot{\gamma}' = |\rho_2^0 \beta_2^0 \sin \dot{N} \sin 1''|. \quad (247)$$

We wzorze powyższym należy jeszcze określić kąt  $\dot{N}$ . Jak wiemy jest  $\text{tg } \dot{N} = \frac{\dot{\psi}_\xi}{\dot{\psi}_\eta}$ . Gdy przez  $\Delta \lambda_1$ ,  $\Delta \lambda_2$  i  $\Delta \beta_2$  oznaczymy zmiany na godzinę spólrzędnych  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\beta_2$  w epoce  $t_g^0$ , to z dostateczną dokładnością jest

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\xi &= \rho_2 \cos \beta_2^0 (\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1) \sin 1'', \\ \dot{\psi}_\eta &= -\rho_2 \Delta \beta_2 \sin 1'' \end{aligned} \quad (248)$$

oraz

$$\text{tg } \dot{N} = -\cos \beta_2^0 \cdot \frac{\Delta \lambda_2 - \Delta \lambda_1}{\Delta \beta_2}.$$

Gdy jeszcze napiszemy  $\dot{N} = 90^\circ - i_1$ , określając kąt  $i_1$  według wzoru (153), to znajdujemy wreszcie z dostateczną dokładnością

$$\dot{\gamma} = \rho_2^0 \beta_2^0 \cos i_1 \sin 1'' = \frac{\beta_2^0}{\pi_2^0} \cos i_1, \quad (249)$$

w czym przez  $\pi_2^0$  oznaczono wartość paralaksy Księżyca w epoce geocentrycznej opozycji.

Wzór (249) byłby co do postaci identyczny ze wzorem (155), gdybyśmy w wyrażeniach spólrzędnych nie pominęli wyrazów drugiego rzędu. Jednakże można w tym przypadku stosować ten mniej dokładny wzór, ponieważ także  $u'$  obliczyliśmy z mniejszą dokładnością, aniżeli ta, która jest potrzebna w przypadku zaćmień Słońca. Ze wzoru (249) wypływa

$$\beta_2^0 = \gamma \pi_2^0 \sec i_1 \quad (250)$$

albo gdy na  $\sec i_1$  przyjmiemy średnią wartość, jest też

$$\beta_2^0 = 1.0040 \gamma \pi_2^0.$$

Warunkiem, aby zaćmienie Księżyca zachodziło, jest  $\gamma < u' + r_{\oplus}$ , a więc też

$$1.0040 (u' + r_{\oplus}) \pi_2^0 > \beta_2^0.$$

Podstawmy wartość  $u'$  według wzoru (230), który można też napisać w postaci

$$u' = 1.01834 - \frac{969''.9}{\pi_2^0},$$

jest więc, gdy wykonamy mnożenie przez 1.0040,

$$\beta_2^0 \leq (1.0224 \pm 0.2726) \pi_2^0 - 16'.2. \quad (251)$$

Podstawiając krańcowe wartości na  $\pi_2$ , znajdujemy, że wartość prawej strony zmienia się w granicach od  $51'.2$  do  $64'.1$ , gdy znak drugiego wyrazu jest dodatni, a w granicach od  $22'.8$  do  $30'.3$ , gdy znak ten jest ujemny. Wypływają stąd następujące kryteria:

1.  $\gamma > 64'.1$ , zaćmienie Księżyca jest niemożliwe;
2.  $51'.2 \leq \gamma \leq 64'.1$ , częściowe zaćmienie Księżyca jest możliwe,
3.  $30'.3 \leq \gamma \leq 51'.2$ , częściowe zaćmienie Księżyca jest pewne;
4.  $22'.8 \leq \gamma \leq 30'.3$ , możliwe jest zaćmienie całkowite, częściowe jest pewne.
5.  $\gamma \leq 22'.8$ , całkowite zaćmienie Księżyca jest pewne.

Wreszcie odległość  $l$  Księżyca od węzła obliczamy ze wzoru  $\sin l = \sin \beta_2^0 \cdot \operatorname{cosec} i$ . Dla najmniejszej wartości nachylenia  $i = 4^{\circ}57'$  otrzymuje się największe wartości odległości  $l$ , odpowiadające danemu  $\beta_2^0$ , a dla największej wartości nachylenia  $i = 5^{\circ}7'$ , najmniejsze wartości  $l$ . Kryteria, stąd wypływające, są następujące:

1.  $\beta_2^0 \geq 64'.1$ ,  $i = 4^{\circ}57'$ ,  $l > 12^{\circ}28'.7$ , zaćmienie niemożliwe
2.  $\beta_2^0 \geq 30'.3$ ,  $i = 4^{\circ}57'$ ,  $l > 5^{\circ}51'.8$ , całkowite zaćmienie niemożliwe;
3.  $\beta_2^0 \leq 51'.2$ ,  $i = 5^{\circ}7'$ ,  $l \leq 9^{\circ}38'.3$ , zaćmienie częściowe pewne;
4.  $\beta_2^0 \leq 22'.8$ ,  $i = 5^{\circ}7'$ ,  $l \leq 4^{\circ}15'.8$ , całkowite zaćmienie pewne.

Największa z wartości  $l$ , przy której zaćmienie Księżyca przestaje być możliwe, wskazuje, że łuk czterokrotny, t. j. odpowiadający dwom węzłom oraz wartościom dodatnim i ujemnym, wynosi około 0.14 całego obwodu koła. Gdy tę liczbę, podobnie jak w ustępie 13, uważać będziemy za miarę prawdopodobieństwa, że w czasie danej pełni zajdzie zaćmienie Księżyca, to ponieważ wynosi ona  $\frac{2}{3}$  analogicznej liczby, otrzymanej dla zaćmień Słońca (ust. 13), to wnosimy, że ilości zaćmień Księżyca i Słońca mają się do siebie w przybliżeniu, jak 2:3.



25. **Czas i kąt pozycyjny kontaktów. Środek zaćmienia i największa faza.** Gdy w równaniach (236) położymy  $q = u' \pm r_{\oplus}$ , to wyrażają one warunek, że zachodzi zetknięcie się tarczy Księżyca z kołem cienia. Kąt  $Q = \eta KO$ , określający kierunek prostej KO, na której znajduje się punkt zetknięcia, oraz odstęp czasu  $\tau$ , wpływający od epoki  $t_g^0$  do momentu kontaktu, wypływają ze wzorów (241) po podstawieniu w nich wyżej podanej wartości na  $q$ . Gdy w tych wzorach podstawimy jeszcze wartości według wzorów (242) i (238), to otrzymują one postać następującą:

$$\sin(Q - N) = \frac{\gamma}{u' \pm r_{\oplus}}$$

$$\tau = \mu - t_g^0 + \frac{u' \pm r_{\oplus}}{n} \cos(Q - N) \quad (252)$$

i widzimy, że tylko wtedy kąt  $Q$  ma wartość rzeczywistą, a więc kontakt w rzeczywistości zaistnieć może, gdy  $\gamma \leq u' \pm r_{\oplus}$ , zgodnie z uwagami poprzedniego ustępu.

Każdej z dwóch wartości  $q$  odpowiadają w ogólności dwie wartości  $Q$  i  $\tau$ . Gdy  $u' - r_{\oplus} \leq \gamma \leq u' + r_{\oplus}$ , zachodzą tylko dwa kontakty zewnętrzne, zaćmienie jest zatem częściowe; gdy  $\gamma \leq u' - r_{\oplus} \leq u' + r_{\oplus}$ , zachodzą dwa kontakty zewnętrzne i dwa wewnętrzne, zaćmienie zatem jest całkowite. W specjalnym przypadku, gdy  $u' + r_{\oplus} = \gamma$ , zachodzi tylko jeden kontakt zewnętrzny, zaćmienie trwa wogóle tylko jeden moment; gdy zaś  $u' - r_{\oplus} = \gamma$ , zachodzą dwa kontakty zewnętrzne i tylko jeden wewnętrzny, zaćmienie całkowite trwa zatem tylko jeden moment.

Wobec zmienności kąta  $N$  i prędkości  $n$  należałoby wartości  $Q$  i  $\tau$  ze wzorów (252) wyznaczyć przez przybliżenia. Jednakże gdy za epokę  $t_g^0$  przyjmiemy  $\mu$ , t. j. epokę środka zaćmienia, i dla tej epoki obliczymy  $n$  i  $N$ , to możemy nie uwzględniać zmian tych wielkości w ciągu trwania zaćmienia i przyjąć wprost

$$\sin(Q - N) = \frac{\gamma}{u' \pm r_{\oplus}},$$

$$\tau = \frac{u' \pm r_{\oplus}}{n} \cos(Q - N), \quad (253)$$

przyczem należy liczyć  $\tau$  od epoki  $\mu$ . Epokom  $\mu \pm \tau$  odpowiadają w punktach ziemi, mających długość geograficzną  $\lambda$ , czasy miejscowe  $t = \mu \pm \tau - \lambda$ .



Czas trwania zaćmienia w godzinach jest  $T = 2 \cdot |\tau|$ . Pisząc

$$\cos(Q - N) = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{(u' + r_{\oplus})^2}},$$

znajdujemy

$$T = 2 \frac{u' + r_{\oplus}}{n} \cos(Q - N) = \frac{2}{n} \sqrt{(u' - \gamma + r_{\oplus})(u' + \gamma + r_{\oplus})}, \quad (254)$$

w czym znak górny odnosi się do zaćmienia wogóle, a dolny do całkowitości.

Znaczenie kąta  $Q$  wypływa z rozważań, podobnych do tych, które w przypadku zaćmień Słońca podaliśmy w ustępie 21. Jest to selenocentrycznie kąt, który tworzy łuk, poprowadzony przez środek tarczy Słońca i środek Ziemi widzianej z Księżycą jako tarczy, z kołem godzinnym środka Słońca. W chwili selenocentrycznego zetknięcia się tych tarcz jest to kąt pozycyjny punktu zetknięcia, liczony od punktu północnego tarczy Słońca z północy przez wschód na południe. Geocentrycznie kątowi  $Q$  równa się kąt, jaki tworzy w środku tarczy Księżycą łuk, przechodzący przez ten środek i środek koła cienia z kołem godzinnym środka Księżycą. Jest to więc kąt pozycyjny środka koła cienia w środku tarczy Księżycą.

Ze wzorów (253) widzimy, że dla początku zaćmienia musi być  $\cos(Q - N) < 0$ . Że zaś ze wzoru na  $\sin(Q - N)$  wypływają dwie wartości na  $(Q - N)$ , z których jedna  $\phi$  przypada w pierwszej ćwiartce, druga zaś  $(180^\circ - \phi)$  w drugiej; ta druga zatem odnosi się do początku zaćmienia, a pierwsza do końca. Oznaczmy przez  $Q_1$  i  $Q_2$  odpowiednio wartości  $Q$ , odnoszące się do początku i do końca zaćmienia, więc jest

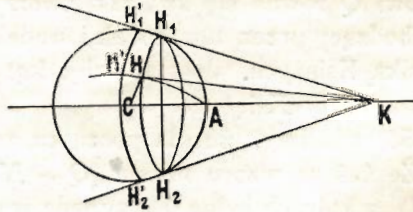
$$\begin{aligned} Q_1 &= N - \phi + 180^\circ, \\ Q_2 &= N + \phi. \end{aligned} \quad (255)$$

Gdy  $q = \gamma$ , jest  $Q - N = 90^\circ$ ,  $\tau = 0$ . Zachodzi wtedy środek zaćmienia wogóle, a gdy  $\gamma > u' - r_{\oplus}$ , zachodzi największa faza zaćmienia. Szerokość części zaćmionej jest  $\varphi = u' + r_{\oplus} - \gamma$ , a stosunek tej części do średnicy jest miarą wielkości fazy. Oznaczmy przez  $F$  największą fazę, to jest

$$F = \frac{u' + r_{\oplus} - \gamma}{2r_{\oplus}} \quad (256)$$

26. **Obszar powierzchni Ziemi, na którym widzialne jest zaćmienie Księżyca.** Ponieważ część powierzchni Księżyca, zanurzona w stożku cienia ziemskiego, podlega istotnemu zaćmieniu w tym znaczeniu, że promienie Słońca, które ją w normalnych warunkach oświetlają, wtedy do niej nie dochodzą, więc zjawisko zaćmienia zachodzi jednocześnie dla wszystkich obserwatorów, którzy je widzieć mogą. Różnią się tylko czasy miejscowe dwóch obserwatorów, widzących daną fazę zaćmienia jednocześnie, o tyleż, o ile różnią się długości geograficzne ich stanowisk. Z tego powodu obserwacje kontaktów lub przejść brzegu cienia przez różne punkty powierzchni Księżyca, np. przez kratery, mogą być zużytkowane do wyznaczenia długości geograficznej. Niestety z powodu niewielkiej dokładności, z jaką odpowiednie momenty mogą być obserwowane, także i określenia długości z takich obserwacji są mało dokładne.

Obszar widzialności zaćmienia Księżyca na powierzchni Ziemi jest to cały ten obszar, na którym Księżyc w czasie zaćmienia znajduje się nad horyzontem. Granice tego obszaru łatwo wyznaczyć.



Rys. 23.

Oznaczmy przez  $\alpha'_0, \delta'_0, \rho'_0$  geocentryczne współrzędne równikowe i geocentryczną odległość środka Księżyca w chwili początku zaćmienia, a przez  $\alpha''_0, \delta''_0, \rho''_0$  współrzędne i odległość Księżyca w chwili końca zaćmienia. Gdy na rys. 23 punkt C jest środkiem Ziemi, którą uważamy za kulę o promieniu  $R = 0.99837$  (p. ust. 22), a punkt K oznacza środek Księżyca, to stożek którego wierzchołkiem jest punkt K, styczny do powierzchni Ziemi, określa na niej koło styczności  $H_1HH_2$ , którego płaszczyzna jest prostopadła do osi stożka KC. W każdym punkcie tego koła, np. w H, promień Ziemi CH jest prostopadły do kierunku HK, w którym obserwator widzi środek Księżyca. Gdyby nie było refrakcji, to koło  $H_1HH_2$  byłoby miejscem wszystkich tych punktów na powierzchni Ziemi, w których środek Księżyca K widzialny jest na horyzoncie, a więc wschodzi lub zachodzi.

Oznaczmy  $CK = \rho$ , to z trójkąta  $CHK$  wynika  $CH = \rho \sin CKH$ . Z drugiej strony, gdy przez  $\pi$  oznaczymy paralaksę równikową poziomą Księżyca, to  $\rho \sin \pi = 1$ . Jest zatem  $\sin CKH = CH \cdot \sin \pi$ , albo też z dostateczną dokładnością

$$\sphericalangle CKH = 0.99837 \cdot \pi = \pi_r. \quad (257)$$

Ponieważ  $\pi_r$  tylko o kilka sekund różni się od  $\pi$ , a niema potrzeby określać spórzędnych geograficznych punktów koła  $H_1HH_2$  z dokładnością większą, jak na  $1'$ , więc można zawsze przyjąć  $\sphericalangle CKH = \pi$ .

Oznaczmy przez  $A$  punkt, w którym prosta  $CK$  przecina powierzchnię Ziemi, to widzimy, że jest  $\sphericalangle HCK = \sphericalangle HCA = 90^\circ - \pi$ .

W punkcie  $A$ , na którego pionie znajduje się środek Księżyca, jest on widoczny w zenicie; na kole, zakreślonym z punktu  $A$  łukiem  $AH = 90^\circ - \pi$ , widoczny jest środek Księżyca na horyzoncie, i koło to jest zatem granicą obszaru  $AH_1HH_2$ , na którym Księżyc jest widoczny nad poziomem.

Z powodu refrakcji jednakże na kole  $H_1HH_2$  Księżyc jest już wzniesiony nad horyzont na wysokość  $R_0 = 36'$ ; pozornie zatem środek Księżyca wschodzi i zachodzi na kole  $H'_1H'H'_2$ , równoległym do koła  $H_1HH_2$  i i odległym od niego na  $R_0$ . Łuk zatem określający obszar widzialności środka Księżyca, jest  $AH' = 90^\circ + R_0 - \pi$ .

Gdy chodzi o obraz widzialności zaćmienia, to granicą tego obszaru są punkty, w których punkty kontaktu widoczne są na horyzoncie.

Gdy  $\alpha_0$  i  $\delta_0$  oznaczają spórzędne środka Księżyca (ryc. 24),  $\rho_{\oplus}$  wielkość kątową promienia jego tarczy, a  $\alpha$  i  $\delta$  spórzędne punktu tarczy, którego kąt pozycyjny, liczony od punktu północnego tarczy przez wschód na południe jest  $Q$ , wówczas, jak wypływa z rys. 24, jest

$$\begin{aligned} (\alpha_0 - \alpha) \cos \delta_0 &= \rho_{\oplus} \cdot \sin Q, \\ \delta - \delta_0 &= \rho_{\oplus} \cdot \cos Q, \end{aligned}$$

a stąd

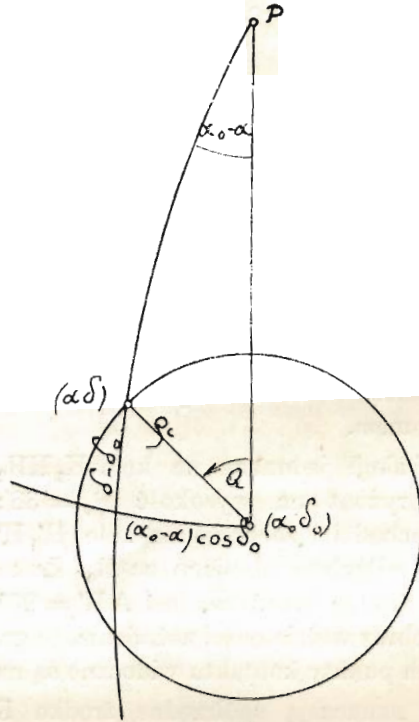
$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \rho_{\oplus} \sin Q \sec \delta_0, \\ \delta &= \delta_0 + \rho_{\oplus} \cos Q. \end{aligned} \quad (258)$$

Niechaj będzie  $\theta'$  czas gwiazdowy greenwichski pierwszego kontaktu i  $\alpha'$ ,  $\delta'$  spórzędne równikowe punktu pierwszego kontaktu na tarczy Księżyca. Jeżeli przez  $\varphi'$  i  $\lambda'$  oznaczymy spórzędne geogra-



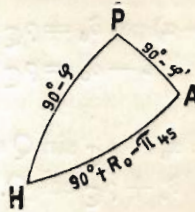
ficzne punktu A, który w czasie  $\Theta'_g$  widzi punkt kontaktu w zenicie, a przez  $\Theta'$  lokalny czas gwiazdowy, to jest oczywiście

$$\begin{aligned} \varphi' &= \delta' \\ \lambda' &= \Theta'_g - \Theta' = \Theta'_g - \alpha'. \end{aligned} \quad (259)$$



Rys. 24.

Weźmy pod uwagę trójkąt PAH (rys. 25), w którym punkt P jest północnym biegunem ziemskim, A punktem Ziemi, w którym pierwszy



Rys. 25.

kontakt jest widoczny w zenicie, a H jednym z punktów, w którym kontakt widoczny jest na horyzoncie. Niechaj będą  $\varphi$  i  $\lambda$  współrzędne

geograficzne tego punktu. Ponieważ  $PA = 90^\circ - \varphi'$ ,  $AH = 90^\circ + R_0 - \pi$ ,  $PH = 90^\circ - \varphi$ ,  $\sphericalangle APH = \lambda - \lambda'$ , więc znajdujemy

$$\sin(\pi - R_0) = \sin \varphi' \sin \varphi + \cos \varphi' \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda'), \quad (260)$$

albo, gdy podstawimy wartości według wzorów (258) i (259), także

$$\begin{aligned} \sin(\pi - R_0) &= \sin \varphi \sin(\delta'_0 + \rho_{\oplus} \cos Q) + \\ &+ \cos \varphi \cos(\delta'_0 + \rho_{\oplus} \cos Q) \cos[\Theta'_{\odot} + \rho_{\oplus} \sin Q \sec \delta'_0 - \lambda - \alpha'_0]. \end{aligned}$$

Z tego wzoru dla danego  $\lambda$  można obliczyć  $\varphi$ . Kładziemy w tym celu

$$\begin{aligned} \sin(\delta'_0 + \rho_{\oplus} \cos Q) &= g \sin G \\ \cos(\delta'_0 + \rho_{\oplus} \cos Q) \cos(\Theta'_{\odot} + \rho_{\oplus} \sin Q \sec \delta'_0 - \alpha'_0 - \lambda) &= g \cos G, \end{aligned} \quad (261)$$

poczem równanie (260) otrzymuje postać następującą:

$$\sin(\pi - R_0) = g \sin(G + \lambda). \quad (262)$$

Wypływa stąd

$$\sin(G + \lambda) = \frac{\sin(\pi - R_0)}{g}. \quad (263)$$

Z dwóch wartości  $\varphi$ , które z tego wzoru wypływają, ta tylko jest rozwiązaniem zadania, której wartość bezwzględna jest mniejsza niż  $90^\circ$ .

Przyjmując na  $\lambda$  szereg wartości, otrzymujemy odpowiedni szereg wartości  $\varphi$ ; każda para wartości  $\varphi$  i  $\lambda$  określa na powierzchni Ziemi punkt, w którym pierwszy kontakt widoczny jest na horyzoncie, a wszystkie te punkty razem wzięte określają koło graniczne tego obszaru, na którym pierwszy kontakt może być obserwowany. Pośród tych punktów należy rozróżnić te, w których w czasie pierwszego kontaktu Księżyc wschodzi, od tych, w których w tej samej chwili Księżyc zachodzi, gdzie zatem dalsze fazy zaćmienia nie są widoczne.

Rozstrzyga o tem wartość kąta godzinowego Księżycy, która jest ujemna w czasie wschodu, dodatnia zaś w czasie zachodu. Oznaczając kąt godzinny Księżycy w czasie pierwszego kontaktu przez  $t'$ , obliczamy  $t' = \Theta'_{\odot} - \alpha' - \lambda$ . Wschód jest w tych punktach, gdzie  $t' < 0$ , zachód zaś tam, gdzie  $t' > 0$ . Gdy  $t' = 0$ , zachodzi tylko jeden kontakt na horyzoncie w chwili górowania.

Podobnie postępujemy dla ostatniego kontaktu i znajdujemy na ziemi koło, w którego punktach punkt ostatniego kontaktu widoczny jest na horyzoncie. Część wspólna obszarów, ograniczonych przez koła, na których pierwszy wzgl. ostatni kontakt widoczne są na horyzoncie, jest to obszar, na którym w czasie całego zaćmienia księżyc znajduje się nad horyzontem, na obszarze zaś, położonym nazewnątrz części wspólnej, Księżyc wschodzi albo też zachodzi częściowo zaćmiony.

## ROZDZIAŁ IV.

### PRZEJŚCIA PLANET DOLNYCH PRZEZ TARCZĘ SŁONECZNĄ.

27. Epoki, w których mogą zachodzić przejścia. Kierunek osi cienia. Stożki cienia pełnego i półcienia. Równanie koła cienia. Przebieg zjawiska i uwagi, dotyczące jego obliczenia. Gdy w danym punkcie powierzchni Ziemi widoczna jest w pewnej chwili jedna z planet dolnych, t. j. Merkury lub Wenus, jako rzut na tarczę Słońca, to oczywiście kierunek, w którym obserwator widzi planetę, może tworzyć tylko niewielki kąt z kierunkiem prostej, łączącej środek Ziemi ze środkiem Słońca. Ta ostatnia prosta przypada w płaszczyźnie ekliptyki, szerokość więc planety w czasie jej przejścia jest niewielka.

Planeta znajduje się na ekliptyce, gdy przechodzi przez jeden ze swoich węzłów, a zatem tylko wtedy może ona przechodzić przez tarczę słoneczną, gdy znajduje się w bliskości węzła.

Długość węzłów Merkurego wynosiły w r. 1921:  $\vartheta = 227^{\circ} 24'$  i  $\Omega = 47^{\circ} 24'$ , a długości węzłów Wenusy  $\vartheta = 225^{\circ} 59'$  i  $\Omega = 75^{\circ} 55'$ . Przez węzły drogi Merkurego słońce przechodzi w dniach 7 maja ( $\vartheta$ ) i 9 listopada ( $\Omega$ ), a przez węzły drogi Wenusy w dniach 6 czerwca ( $\vartheta$ ) i 7 grudnia ( $\Omega$ ). Przejścia Merkurego przez tarczę Słońca mogą zatem zachodzić tylko w dniach 7 maja i 9 listopada, a przejścia Wenusy około 6 czerwca i 7 grudnia, gdy w tych dniach planety te znajdują się w pobliżu swych węzłów.

Jest rzeczą oczywistą, że zjawiska te, skoro raz zajść mogą, powtarzają się periodycznie w stałych odstępach czasu. Tak więc dla Merkurego każdemu jego przejściu przez tarczę słoneczną odpowiada przejście następne po 46 latach, dla Wenusy danemu przejściu odpo-



wiada przejście po 243 latach. W okresie 46-letnim Merkurego przypada 6 przejść w odstępach, wynoszących 13, 7,  $9 \cdot 5$ ,  $3 \cdot 5$ ,  $9 \cdot 5$ ,  $3 \cdot 5$  lat, w okresie 243-letnim Wenerę zachodzą 4 przejścia w odstępach, wynoszących 8,  $121 \cdot 5$ , 8,  $105 \cdot 5$  lat.

W okresie od 1894 do 1940 przypadają następujące przejścia Merkurego:

1 listopada 1894, 2 listopada 1907, 3 listopada 1914, 4 maja 1924, 5 listopada 1927, 6 maja 1937, 1 listopada 1940 i t. d. i widzimy, że na dwa przejścia przy węźle zstępującym przypadają w każdym okresie 46-letnim cztery przejścia przy węźle wstępującym.

W okresie od 1872 do 2117 przypadają następujące przejścia Wenerę:

1 grudnia 1874, 2 grudnia 1882, 3 czerwca 2004, 4 czerwca 2012, 10 grudnia 2117 i t. d.

Tu liczba przejść przy obu węzłach jest jednakowa.

Zjawisko przejść jest zjawiskiem zupełnie podobnym do zaćmienia Słońca; badanie więc jego przebiegu w ogólności wykonywa się też w sposób podobny.

Oporając się na ogólnej teorii zaćmień, wyłożonej w ustępach 5 i 6, obieramy układ współrzędnych prostokątnych, określony tak samo, jak w ustępie 5, oraz układ cieniowy, którego oś  $\zeta$  jest równoległa do prostej, łączącej środek Słońca ze środkiem planety dolnej, t. j. do jej promienia wodzącego. Kierunek osi cienia określony jest przez współrzędne  $a$ ,  $d$  punktu, w którym promień wodzący planety, przecina sklepienie niebieskie; są to oczywiście współrzędne środka Słońca, widziane ze środka planety.

Oznaczmy przez  $\alpha_1$  i  $\delta_1$  geocentryczne współrzędne środka Słońca, przez  $\alpha_2$  i  $\delta_2$  także współrzędne środka planety, wreszcie przez  $\pi_1$  i  $\pi_2$  odpowiednio paralaksę Słońca i planety, to do określenia  $a$  i  $d$  służą

wzory (70) i (76). Kładąc w tych wzorach  $\frac{\sin \pi_1}{\sin \pi_2} = p$ , otrzymujemy

$$\operatorname{tg}(a - \alpha_1) = \frac{-p \cos \delta_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\cos \delta_1 - p \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (264)$$

$$\operatorname{tg}(d - \delta_1) = \frac{-p \sin(\delta_2 - \delta_1)}{1 - p \cos(\delta_2 - \delta_1)}.$$

Odległość planet dolnych w czasie przejść przez tarczę Słońca równa się w przybliżeniu różnicy pomiędzy promieniem wodzącym

Ziemi a promieniem wodzącym planety; wynosi ona średnio dla Merkurego 0·61, a dla Wenusy 0·28, oddalając się od tych średnich wartości tylko nieznacznie. Wartości powyższe są jednocześnie średnimi wartościami stosunku  $\mu$ , gdyż średnią odległością Ziemi od Słońca jest jednostka planetarna.

Wobec tego, że  $\mu$  w przypadku pokryć ma zawsze wartość znaczną, należy do wyznaczenia  $a$  i  $d$  stosować wzory ścisłe (264) lub też wobec tego, że różnice  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  i  $(\delta_2 - \delta_1)$  są zawsze niewielkie, następujące wzory przybliżone:

$$a - \alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \frac{\mu}{\cos \delta_1 - \mu} \quad (265)$$

$$\alpha - \delta_1 = (\delta_1 - \delta_2) \cdot \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Odległością  $\Delta$  w przypadku przejść przez tarczę Słońca jest promień wodzący planety, który oznaczamy będziemy przez  $R_2$ ; wartość jego, jako dającą się dla każdej chwili obliczyć i podawaną pośród elementów przejścia uważamy za wielkość znaną. Gdy promień wodzący Ziemi oznaczymy przez  $R_1$ , to jest  $\rho_1 = R_1$  i z dostateczną dokładnością  $\rho_2 = R_1 - R_2$ .

Spółrzędne cieniowe punktu przecięcia się osi stożka cienia z płaszczyzną ( $\xi, \eta$ ) wypływają ze wzorów (51) po podstawieniu w nich zamiast  $\alpha$ ,  $\delta$  i  $\rho$  wartości tych spółrzędnych dla Słońca i planety przechodzącej przez tarczę Słońca. Jest więc, gdy uwzględnimy, że  $(\alpha_1 - a)$  i  $(\delta_1 - d)$  są małymi kątami,

$$\xi_1 = \rho_1 \cos \delta_1 \sin (\alpha_1 - a) = \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} \cos \delta_1 \quad (266)$$

$$\eta_1 = \rho_1 [\sin \delta_1 \cos d - \cos \delta_1 \sin d \cos (\alpha_1 - a)] = \frac{\delta_1 - d}{\rho_1}.$$

Prócz tego jest dla środka planety

$$\xi_2 = \rho_2 [\sin \delta_2 \sin d + \cos \delta_2 \cos d \cos (\alpha_2 - a)] = \rho_2. \quad (267)$$

Kąt tworzący stożków cienia, rzucanych przez planetę wypływa ze wzoru (55) po odpowiednich podstawieniach. Jest

$$\sin f = \frac{r_2 + r_1}{\Delta}, \quad (268)$$

gdzie  $r_1$  oznacza promień Słońca,  $r_2$  promień planety, przy czym znak dodatni odnosi się do stożka półcienia, ujemny zaś do stożka pełnego cienia. Oznaczmy jeszcze przez  $a$  średnią odległość planety od Słońca,

to pisząc  $R_2 = a \cdot \frac{R_2}{a}$  oraz

$$\sin f_0 = \frac{r_2 \pm r_1}{a}, \quad (269)$$

mamy z wystarczającą dokładnością

$$f = f_0 \cdot \frac{a}{R_2}. \quad (270)$$

Celem otrzymania wartości liczbowych, przyjmujemy dla **Mer-**  
**kurego**

$$\begin{aligned} r_2 &= 0.380 \text{ promienia równika ziemskiego,} \\ a &= 0.38710 \text{ jednostki planetarnej,} \end{aligned}$$

a dla **Wenery**

$$\begin{aligned} r_2 &= 0.998 \text{ promienia równika ziemskiego,} \\ a &= 0.72333 \text{ jednostki planetarnej.} \end{aligned}$$

Otrzymujemy dla **Merkurego**

$$\log \sin f_1^0 = 8.08138, \quad f_1 = 2487''.9 \cdot \frac{a}{R_2}, \quad (271)$$

$$\log \sin f_2^0 = 8.07835n, \quad f_2 = -2470''.6 \cdot \frac{a}{R_2},$$

a dla **Wenery**

$$\log \sin f_1^0 = 7.81230, \quad f_1 = 1339''.8 \cdot \frac{a}{R_2}, \quad (272)$$

$$\log \sin f_2^0 = 7.80435n, \quad f_2 = -1314''.5 \cdot \frac{a}{R_2}.$$

Ponieważ  $R_2 = R_1 - \rho_2 = R_1(1 - \mu) = \frac{\pi_1^0}{\pi_1} (1 - \mu)$ , więc we wzorach (271) i (272) można też pisać

$$\frac{a}{R_2} = \frac{a}{\pi_1^0} \cdot \frac{\pi_1}{1 - \mu}. \quad (273)$$





Mając  $f$ , znajdujemy odległości wierzchołków stożków cienia od płaszczyzny  $(\xi, \eta)$  ze wzoru (60), mianowicie

$$\zeta_0 = \rho_2 + \frac{r_2}{\sin f} \quad (274)$$

oraz promień przekroju stożków płaszczyzną  $(\xi, \eta)$  i płaszczyzną do niej równoległą w odległości  $\zeta$

$$\begin{aligned} u' &= \zeta_0 \operatorname{tg} f, \\ u &= u' - \zeta \operatorname{tg} f. \end{aligned} \quad (275)$$

Wartości  $\zeta_0$  różnią się niewiele od  $\rho_2$  i są dodatnie dla obu stożków; wynika stąd, że Ziemia znaleźć się może tylko wewnątrz stożków półcienia oraz wewnątrz przedłużenia stożka pełnego cienia. W pierwszym przypadku planeta częściowo widoczna jest na tle tarczy Słońca, w drugim przypadku widoczna jest w całości jako rzut na tarczy Słońca.

Oznaczmy przez  $x, y, z$  spórzędne jakiegos punktu na powierzchni Ziemi, to ogólnie warunkiem kontaktu jest równanie

$$(\xi_1 - x)^2 + (\eta_1 - y)^2 = (u' - z \operatorname{tg} f)^2.$$

Jest rzeczą oczywistą, że wszelkie szczegóły przebiegu zjawiska przejść wypływają z obliczeń zupełnie podobnych do tych, które stosowaliśmy w przypadku zaćmień Słońca. Wobec znacznych wartości  $u'$  i znacznej drogi, jaką Ziemia przebiega wewnątrz stożków cienia planet dolnych, nie może być naturalnie mowy w przypadku przejść o jakichś krzywych granicznych w znaczeniu tem, jak w przypadku zaćmień Słońca. O ile tylko Ziemia wewnątrz stożka cienia znaleźć się może, to oczywiście warunkiem dodatkowym widzialności zjawiska przejścia jest przede wszystkim ten, aby Słońce w tym czasie znajdowało się nad horyzontem miejsca spostrzeżeń.

## ROZDZIAŁ V.

### ZAKRYCIA GWIAZD PRZEZ KSIĘŻYC LUB PLANETY.

28. Zjawisko zakryć gwiazd. Specjalizacja ogólnej teorii zaćmień w przypadku zakryć. Walec cienia. Spółrzędne punktów, leżących na powierzchni walca cienia. Zakrycie gwiazdy przez Księżyc lub planetę zachodzi wtedy, gdy jakiś punkt tarczy Księżyca lub planety znajduje się na promieniu widzenia gwiazdy. W celu zbadania przebiegu zjawiska zakrycia możemy zastosować zasady ogólnej teorii zaćmień, uważając gwiazdę za źródło światła.

Gdy ciałem zakrywającym, a więc rzucającym cień, jest Księżyc, osią  $\zeta$  układu cieniowego jest prosta, przechodząca przez środek Ziemi i równoległa do prostej, przechodzącej przez gwiazdę i środek Księżyca. Kierunek tej osi określony jest przez współrzędne równikowe tego punktu nieba, w którym widziałby gwiazdę obserwator, znajdujący się w środku Księżyca; są one  $a$  i  $d$ . Ponieważ paralaksa dzienna gwiazdy jest znikoma, więc także  $\mu = 0$ , a zatem można przyjąć, że  $\rho_1 = \infty$ , a więc także  $\Delta = \rho_1 - \rho_2 = \infty$ ; ze wzorów zaś (80) wynika

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1, \\ d &= \delta_1. \end{aligned}$$

Spółrzędne cieniowe środka Księżyca wypływają ze wzorów (51) po uproszczeniu z tego powodu, że różnice  $(\alpha_2 - \alpha_1)$  i  $(\delta_2 - \delta_1)$  są małe, mianowicie

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \rho_2 \cos \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 1'' \\ \eta_2 &= \rho_2 (\delta_2 - \delta_1) \sin 1'' \\ \zeta_2 &= \rho_2. \end{aligned} \tag{276}$$

Spółrzędne  $\xi_2$  i  $\eta_2$  są zarazem spółrzednymi punktu, w którym oś cienia przecina się z płaszczyzną  $(\xi, \eta)$ . Spółrzędne zaś cieniowe punktu na powierzchni Ziemi mają wartości [p. wzory (85)] następujące:

$$\begin{aligned}x &= \cos \varphi_1 \sin (\Theta - \alpha_1), \\y &= (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \cos \delta_1 - \cos \varphi_1 \sin \delta_1 \cos (\Theta - \alpha_1), \\z &= (1 - \alpha) \sin \varphi_1 \sin \delta_1 + \cos \varphi_1 \cos \delta_1 \cos (\Theta - \alpha).\end{aligned}\quad (277)$$

Ponieważ przyjmujemy  $\Delta = \infty$ , to ze wzoru (55) wynika  $f_1 = f_2 = 0$ . Znaczy to, że w przypadku zakryć gwiazd stożek cienia przechodzi w walec cienia styczny do powierzchni ciała, rzucającego cień. Promień koła cienia równa się oczywiście promieniowi zasłaniającej kuli, co wypływa też ze wzoru (62); jest mianowicie

$$\begin{aligned}u' &= z_2 \operatorname{tg} f + a \operatorname{sec} f, \\u &= u' - z \operatorname{tg} f.\end{aligned}$$

Gdy tu położymy  $f = 0$  oraz  $a = r_2$ , to wynika  $u' = u = r_2$ . Gdy ciałem zakrywającym jest Księżyc, to jest, jak to widzieliśmy wyżej,  $r_2 = 0.2725$ .

Gwiazda jest zakryta przez Księżyc wtedy, gdy punkt obserwacji znajduje się wewnątrz walca cienia, a początek lub koniec zakrycia zachodzi wtedy, gdy miejsce spostrzeżeń znajduje się na powierzchni walca cienia czyli na obwodzie koła cienia w płaszczyźnie  $z = z$ . Równanie warunkowe początku i końca zakrycia gwiazdy przez Księżyc jest zatem

$$(\xi_2 - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 = r_2^2, \quad (278)$$

które zastąpić można przez dwa następujące

$$\begin{aligned}\xi_2 - x &= r_2 \cdot \sin P, \\ \eta_2 - y &= r_2 \cdot \cos P.\end{aligned}\quad (279)$$

Tu  $P$  oznacza, podobnie jak w ustępie 10, kąt, którego wierzchołkiem jest miejsce spostrzeżeń, a ramionami dodatni kierunek osi  $\eta$  oraz promień koła cienia, przechodzący przez miejsce spostrzeżeń.

Ponieważ spółrzedne środka koła mogą być zapomocą wzorów (276) obliczone dla dowolnej epoki, np. dla czasu gwiazdowego green-



wichskiego  $\Theta$ , można więc z równań (279) dla każdej wartości  $P$  znaleźć parę wartości spólrzędnych prostokątnych

$$\begin{aligned}x &= \xi_2 - r_2 \sin P, \\y &= \eta_2 - r_2 \cos P.\end{aligned}\quad (280)$$

Celem znalezienia spólrzędnych  $\varphi$  i  $\lambda$  tego miejsca spostrzeżeń, do którego należą spólrzędne  $x$  i  $y$ , postępujemy w sposób podobny, jak w ustępie 10. Ponieważ  $x$  i  $y$  są znane, możemy więc określić kąty  $\varepsilon$  i  $\gamma$  ze wzorów

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon \sin \gamma &= x \\ \sin \varepsilon \cos \gamma &= y.\end{aligned}\quad (281)$$

Gdy więc półożymy  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , to wynika  $z = \cos \varepsilon$  oraz zgodnie ze wzorem (107')

$$z^2 = \dot{z}^2 - 2\alpha (y \cos \delta_1 + z \sin \delta_1)^2 \quad (282)$$

lub też po podstawieniu wartości według wzorów (281)

$$z^2 = \cos^2 \varepsilon [1 - 2\alpha (\operatorname{tg} \varepsilon \cos \gamma \cos \delta_1 + \sin \delta_1)^2]. \quad (283)$$

Oznaczmy jeszcze

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varepsilon \cos \gamma &= \operatorname{tg} \varepsilon' \\ 2\alpha \frac{\sin^2 (\varepsilon' + \delta_1)}{\cos^2 \varepsilon'} &= \sin^2 \varepsilon_1,\end{aligned}\quad (284)$$

to otrzymujemy ostatecznie

$$z = \cos \varepsilon \cos \varepsilon_1. \quad (285)$$

Dalej obliczamy  $c$  i  $C$  ze wzorów

$$\begin{aligned}z &= c \sin (C + \delta_1), \\ y &= c \cos (C + \delta_1)\end{aligned}\quad (286)$$

oraz  $\varphi_1$  i  $(\Theta - \alpha_1)$  ze wzorów

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 \sin (\Theta - \alpha_1) &= x \\ \cos \varphi_1 \cos (\Theta - \alpha_1) &= c \sin C.\end{aligned}\quad (287)$$

Znając  $(\Theta - \alpha_1)$ , otrzymujemy też  $\Theta$  oraz  $\lambda = \Theta_g - \Theta$ .

29. Przebieg zakrycia dla całej Ziemi. Niektóre kryteria możliwości zakrycia. Ruch Księżyca i obrót Ziemi dokoła osi powoduje przesuwanie się walca cienia w stosunku do punktów powierzchni Ziemi. Przebieg zjawiska dla całej Ziemi można zbadać w sposób podobny, jak przebieg zaćmienia Słońca. Zagadnienie to jednakże w przypadku zakrycia jest znacznie uproszczone przez to, że promień koła cienia jest niezmienny i że położenie osi cienia zmienia się tylko wskutek ruchu Księżyca.

Niechaj będzie  $\gamma_{1g}^0$  czas średni głównego południka w epoce bliskiej geocentrycznego połączenia Księżyca z gwiazdą we wznoszeniu prostym, np. najbliższa pełna godzina, poprzedzająca to połączenie, i niech będą w tym czasie  $\alpha_2^0$  i  $\delta_2^0$  geocentryczne współrzędne równikowe Księżyca, a  $\rho_2^0 = \text{cosec } \pi_2^0$  jego odległość, to współrzędne prostokątne środka cienia zgodnie z wzorami (276) są w tej epoce

$$\begin{aligned}\xi_2^0 &= \rho_2^0 \cos \delta_2^0 (\alpha_2^0 - \alpha_1) \sin 1'', \\ \gamma_{12}^0 &= \rho_2^0 (\delta_2^0 - \delta_1) \sin 1''.\end{aligned}\quad (288)$$

Prędkość zmian współrzędnych można obliczyć w sposób podobny, jak to wyjaśniono w ustępie 12, albo też prościej uzyskać wprost przez różniczkowanie wzorów (276). Jest mianowicie

$$\begin{aligned}\xi'_2 &= \rho_2 \left[ \cos \delta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \sin \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{d\delta_2}{dt} \right] \sin 1'' + \\ &+ \frac{d\rho_2}{dt} \cos \delta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sin 1'',\end{aligned}\quad (289)$$

$$\gamma'_{12} = \rho_2 \frac{d\delta_2}{dt} \sin 1'' + \frac{d\rho_2}{dt} (\delta_2 - \delta_1) \sin 1'',$$

a zatem w chwili geocentrycznego połączenia, gdy  $\alpha_2 = \alpha_1$  i gdy

$$\text{przyjmujemy } \frac{d\rho_2}{dt} = 0,$$

$$\xi'_2 = \rho_2 \cos \delta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} \sin 1'',$$

$$\gamma'_{12} = \rho_2 \frac{d\delta_2}{dt} \sin 1''.$$

Przyjmując za jednostkę czasu godzinę średnią i oznaczając przez  $\Delta \alpha_2$  i  $\Delta \delta_2$  zmiany współrzędnych  $\alpha_2$  i  $\delta_2$  na godzinę, znajdujemy dla epoki  $\eta_g^0$

$$\begin{aligned}(\xi'_2)_0 &= \left( \frac{\Delta \alpha_2}{\pi_2} \right)_0 \cos \delta_2^0, \\(\gamma'_{12})_0 &= \left( \frac{\Delta \delta_2}{\pi_2} \right)_0.\end{aligned}\tag{290}$$

Tu wskaźnik  $o$  oznacza, że wszystkie występujące we wzorach wielkości odnoszą się do czasu  $\eta_g^0$ . Wartości  $\xi'_2$  i  $\gamma'_{12}$  zmieniają się w ciągu trwania zjawiska na Ziemi bardzo mało i można je przyjąć za niezienne, t. j. położyć  $\xi'_2 = (\xi'_2)_0$  i  $\gamma'_{12} = (\gamma'_{12})_0$ .

Przy tem założeniu w jakiejś epoce  $\eta_g = \eta_g^0 + \tau$ , gdy  $\tau$  wyrażone jest w godzinach średnich, współrzędne cieniowe środka cienia są:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \xi_2^0 + \tau \xi'_2, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}^0 + \tau \gamma'_{12}.\end{aligned}\tag{291}$$

Gdy określimy  $n$  i  $N$ , kładąc

$$\begin{aligned}\xi'_2 &= n \sin N, \\ \gamma'_{12} &= n \cos N,\end{aligned}\tag{292}$$

to, podobnie jak w teorii zaćmień Słońca, kąt  $N$  określa kierunek ruchu osi cienia, a  $n$  prędkość tego ruchu. Dalej zaś jest

$$\gamma = -\xi_2^0 \cos N + \gamma_{12}^0 \sin N\tag{293}$$

oraz

$$\mu = \gamma_g^0 - \frac{1}{n} (\xi_2^0 \sin N + \gamma_{12}^0 \cos N),\tag{294}$$

w czem  $\gamma$  oznacza najmniejszą odległość osi cienia od środka Ziemi, a  $\mu$  czas średni głównego południka, w którym to największe zbliżenie się osi cienia do środka Ziemi zachodzi.

Zakrycie dla obserwatora ziemskiego zajść może oczywiście tylko wtedy, gdy w czasie największego zbliżenia się osi walca cienia przynajmniej pewna część powierzchni Ziemi zawarta jest w granicach tego walca. Gdy więc przez  $R_\gamma$  oznaczymy promień Ziemi przypadający w kierunku najmniejszej odległości  $\gamma$ , to warunkiem możliwości zakrycia



jest  $\gamma \leq R_\gamma + r_2$ . Przybliżone kryterjum otrzymamy, kładąc  $R_\gamma = 1$ ; wtedy warunek zajścia zakrycia jest:  $\gamma < 1 \cdot 2725$ . Warunek ten wystarcza dla orientacji prawie zawsze.

Oczywiście możnaby, opracowując szczegółowo przebieg zakrycia dla Ziemi, wyznaczyć strefę widzialności przez obliczenie jej granic, punkty pierwszego i ostatniego zetknięcia Ziemi z walcem cienia i t. d. w sposób podobny, jak dla zaćmień Słońca. Rachunki te są tu o wiele prostsze z powodów wyżej podanych oraz dlatego, że mamy tu do czynienia tylko z jednym walcem, a nie z dwoma stożkami cienia, jak przy zaćmieniach Słońca. Jednakże takie szczegółowe badania bywają rzadko, ponieważ zakrycia są zjawiskami dosyć częstymi i tylko dla astronomów mają znaczenie, a każdy z nich bez trudu może obliczyć te szczegóły, które określają przebieg zjawiska w jego miejscu spostrzeżeń. W rocznikach astronomicznych dla jaśniejszych gwiazd, które w danym roku mają ulec zakryciu przez Księżyc, można znaleźć dane, które w znacznym stopniu ułatwiają obliczenia dla danego miejsca spostrzeżeń.

**30. Przebieg zjawiska zakrycia gwiazdy przez Księżyc w danym punkcie powierzchni Ziemi, leżącym w strefie widzialności tego zakrycia.** Ponieważ równania

$$\begin{aligned}\xi_2 - x &= r_2 \cdot \sin P, \\ \eta_2 - y &= r_2 \cdot \cos P\end{aligned}\tag{295}$$

wyrażają warunek, że punkt powierzchni Ziemi, którego spólrzędne cieniowe są  $x, y, z$ , leży na powierzchni walca cienia, więc gdy spólrzędne  $\xi_2$  i  $\eta_2$  są znane, można po wyrugowaniu kąta  $P$  z tych równań znaleźć związek pomiędzy  $x, y$  i znanymi wielkościami. Gdy spólrzędne geograficzne miejsca spostrzeżeń uważamy za znane, to wartości  $x$  i  $y$  są znanymi funkcjami czasu. Wprowadzając zatem te funkcje zamiast spólrzędnych  $x$  i  $y$ , otrzymamy równanie, w którym jedyną niewiadomą jest czas.

Jednakże  $\xi_2$  i  $\eta_2$  są także funkcjami czasu, toteż w równaniach warunkowych kontaktu należy użyć tych wartości spólrzędnych osi cienia, które te spólrzędne przybierają w czasie kontaktu; ten zaś ostatni nie jest znany i właśnie dopiero z tych równań warunkowych ma być wyznaczony. Zadanie to można **zatem** rozwiązać tylko za pomocą kilku kolejnych przybliżeń.

Niechaj będzie  $\Theta^0$  czas gwiazdowy w miejscu spostrzeżeń w chwili, gdy czas średni grenwichski wynosi  $\eta_g^0$ . W epoce tej spólrzędne środka cienia mają wartości  $\xi_2^0$  i  $\eta_{12}^0$ , określone przez wzory (288), a spólrzędne cieniowe miejsca spostrzeżeń  $x_0$ ,  $y_0$  i  $z_0$  wypływają ze wzorów (277) po podstawieniu w nich  $\Theta^0$  zamiast  $\Theta$ . Prędkości zmian spólrzędnych  $\xi_2$  i  $\eta_{12}$  wypływają ze wzorów (290), prędkości zaś spólrzędnych  $x$ ,  $y$  i  $z$  otrzymuje się przez różniczkowanie wzorów (277). Oznaczamy przez  $\sigma$  zmianę kąta  $\Theta$  na godzinę średnią, wyrażona w mierze łukowej, to jest

$$\sigma = \frac{366 \cdot 2422 \dots}{365 \cdot 2422 \dots} \cdot \frac{2\pi}{24} \quad (296)$$

a więc

$$\log \sigma = 9 \cdot 41916, \quad \sigma = 0 \cdot 26252. \quad (297)$$

Ze wzorów (277) wypływa więc dla  $\Theta = \Theta^0$

$$\begin{aligned} x' &= \sigma \cos \varphi_1 \cos (\Theta^0 - \alpha_1) \\ y' &= \sigma \cos \varphi_1 \sin \delta_1 \sin (\Theta^0 - \alpha_1) \\ z' &= -\sigma \cos \varphi_1 \cos \delta_1 \sin (\Theta^0 - \alpha_1). \end{aligned} \quad (298)$$

Przypuśćmy, że równania (295) spełnione są w czasie grenwichskim  $\eta_g = \eta_g^0 + \tau$ , jest zatem, gdy  $\tau$  jest wyrażone w godzinach średnich,

$$\begin{aligned} \xi_2^0 - x_0 + \tau (\xi_2' - x') &= r_2 \sin P, \\ \eta_{12}^0 - y_0 + \tau (\eta_{12}' - y') &= r_2 \cos P. \end{aligned} \quad (299)$$

Celem znalezienia niewiadomych  $\tau$  i  $P$ , kładziemy

$$\begin{aligned} \xi_2^0 - x_0 &= m \cdot \sin M, \\ \eta_{12}^0 - y_0 &= m \cdot \cos M \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \xi_2' - x' &= m' \cdot \sin M', \\ \eta_{12}' - y' &= m' \cdot \cos M', \end{aligned}$$

skąd wypływają rozwiązania

$$\sin (P - M') = \frac{m}{r_2} \sin (M - M') \quad (300)$$

$$\tau = -\frac{m}{m'} \cos (M - M') + \frac{r_2}{m'} \cos (P - M'). \quad (301)$$



Oznaczmy jeszcze

$$P - M' = 90^\circ \mp \psi, \quad (302)$$

to ze wzoru (300) wypływa

$$\cos \psi = \frac{m}{r_2} \sin (M - M'). \quad (303)$$

Otrzymujemy stąd dwie wartości na  $\psi$  równe i z przeciwnymi znakami, którym odpowiadają dwie wartości kąta  $P$ , mianowicie

$$P = M' \pm 90^\circ \mp \psi. \quad (304)$$

Pierwsza z tych wartości odnosi się do początku zakrycia, druga zaś do końca zakrycia. Odpowiednio do tego z dwóch wartości  $\tau_0$ , wypływających ze wzoru

$$\tau = -\frac{m}{m'} \cos (M - M') \mp \sin \psi \quad (305)$$

do początku zakrycia należy ta, której odpowiada znak górny, do końca zaś ta, której odpowiada znak dolny.

Wartości  $P$  i  $\tau$ , wypływające ze wzorów (304) i (305) są tylko przybliżone. Wzory (298) wskazują, że prędkości  $x'$ ,  $y'$  i  $z'$  zmieniają się szybko wraz z  $\theta$ . Ponieważ wartości spólrzędnych  $x$  i  $y$  w równaniach (299) wypływają dla epoki  $\eta_0^\circ \pm \tau$  w założeniu, że prędkości w czasie  $\tau$  są niezienne, co nie jest ściśle zgodne z prawdą, więc też wartości  $P$  i  $\tau$ , wypływające z tych równań, tem bardziej zbliżać się będą do wartości dokładnych, im mniejsze będzie  $\tau$ , t. j. im bliższa będzie obrana epoka początkowa epoki kontaktu.

Taką dosyć bliską epoką początkową, którą z dostatecznym przybliżeniem łatwo obliczyć, jest chwila pozornego (t. j. topocentrycznego) połączenia środka Księżyca i gwiazdy w miejscu spostrzeżeń. Użyskujemy ją zapomocą następującego rozważania.

Widzieliśmy w ustępie 21, że oś świata przypada w płaszczyźnie  $(\zeta, \eta)$ ; płaszczyzna ta jest zarazem płaszczyzną godzinną gwiazdy, której zakryciem zajmujemy się, gdyż oś  $\zeta$  wobec wielkiej odległości gwiazdy schodzi się z kierunkiem ku gwieździe. Dla obserwatora na powierzchni Ziemi płaszczyzną godzinną gwiazdy jest płaszczyzna, równoległa do płaszczyzny  $(\zeta, \eta)$ , przechodząca przez miejsce spostrzeżeń w odległości  $x$  od tej płaszczyzny. Oczywiście gdy Księżyc ma być w topocentrycznym połączeniu z gwiazdą we wznoszeniu prostym, to musi się on znajdować na tem samym kole godzinnem co gwiazda, a więc w danym przypadku w płaszczyźnie  $\xi = x$ . Gdy jak poprzed-



nio, oznaczmy przez  $\xi_2$  wartość spólrzędnej  $\zeta$  dla środka Księżyca, to widzimy, że warunkiem topocentrycznego połączenia Księżyca i gwiazdy jest  $\xi_2 = x$ .

Gdy więc  $\eta_g^0$  jest średnim czasem greenwichskim, bliskim geocentrycznego połączenia gwiazdy i Księżyca, i gdy oznaczmy przez  $\xi_2^0$  i  $x_0$  spólrzrędną  $\xi$  dla Księżyca i dla miejsca obserwacji w epoce  $\eta_g^0$ , przez  $\xi'_2$  i  $x'$  zmianę tych spólrzędnych na godzinę, a przez  $\tau_0$  oznaczmy odstęp czasu, który upływa od epoki  $\eta_g^0$  do chwili topocentrycznego połączenia we wznoszeniu prostem, to jest zgodnie z wyżej przytoczonym wnioskiem

$$\xi_2^0 + \tau_0 \xi'_2 = x_0 + \tau_0 x',$$

skąd wypływa

$$\tau_0 = \frac{x_0 - \xi_2^0}{\xi'_2 - x'}. \quad (306)$$

Gdy zaś specjalnie  $\eta_g^0$  jest epoką geocentrycznego połączenia Księżyca i gwiazdy, to jest wtedy dla Księżyca  $\xi_2 = 0$ , a wzór (306) po podstawieniu wartości na  $x$ ,  $\xi'_2$  i  $x'$  według wzorów (277), (290) i (298) otrzymuje postać

$$\tau_0 = \frac{\cos \varphi_1 \sin (\Theta^0 - \alpha_1)}{\frac{\Delta \alpha_2}{\pi_2} \cos \delta_2 - \sigma \cdot \cos \varphi_1 \cos (\Theta^0 - \alpha_1)}. \quad (307)$$

We wzorze tym  $\Theta^0$  oznacza czas gwiazdowy w miejscu spostrzeżeń w chwili geocentrycznego połączenia Księżyca i gwiazdy. Ponieważ w rocznikach astronomicznych podawany jest dla wielu gwiazd średni czas greenwichski geocentrycznego połączenia z Księżycem, można więc w tych przypadkach również  $\Theta_0$  uważać za dane.

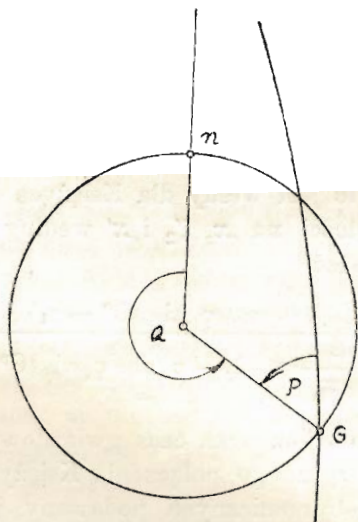
Ponieważ  $\xi'_2 = \frac{\Delta \alpha_2}{\pi_2} \cos \delta_2$  zmienia się wskutek zmian  $\alpha_2$ ,  $\delta_2$  i  $\pi_2$  w niewielkich granicach, w przybliżeniu od 0.50 do 0.62, a drugi wyraz w mianowniku ma najwyżej wartość  $\pm 0.26$ , więc widzimy, że mianownik wzoru (307) ma zawsze wartość dodatnią;  $\tau_0$  ma zatem zawsze taki znak, jak licznik, t. j. jak  $\sin (\Theta^0 - \alpha_1)$ . Jest mianowicie

$$\begin{aligned} \tau_0 > 0, & \text{ gdy } 0^h < \Theta^0 - \alpha_1 \leq 12^h \\ \tau_0 < 0, & \text{ gdy } 12^h < \Theta^0 - \alpha_1 < 24^h \end{aligned}$$

Przy pomocy wzoru (307) można obliczyć tabelkę dla danej wartości  $\varphi$ , z której wartości  $\tau_0$  wypływają bezpośrednio. Tabelkę taką

należałoby obliczyć według wspomnianego wzoru dla dwóch argumentów, mianowicie dla  $(\Theta^0 - \alpha_1)$  i dla  $\xi_2' = \frac{\Delta\alpha_2}{\pi_2} \cos \delta_2$ . Jednakże z praktyki wynika, że otrzymamy dostatecznie przybliżoną wartość na  $\tau_0$ , gdy zamiast dokładnej wartości  $\xi_2'$  przyjmujemy wartość średnią  $\left(\frac{\Delta\alpha_2}{\pi_2} \cos \delta_2\right) = 0.5646$ . Wtedy wartości  $\tau_0$  otrzymujemy z tabelki z jednym tylko argumentem  $(\Theta^0 - \alpha_1)$ .

Epokę  $\tau_1^{s0} + \tau_0$  uważamy za epokę początkową, od której liczymy wartość  $\tau$ , wypływającą ze wzoru (301) lub (305). Wartości  $P$  i  $\tau$  są wówczas już tak dokładne, że drugie przybliżenie jest zbyteczne.



Rys. 26.

Kąt  $P$ , jak wynika z rozważań podobnych do tych, które podaliśmy w ustępie 21, równy jest kątowi pozycyjnemu środka Księżyca, liczonemu od północnej części koła godzinowego gwiazdy przez wschód na południe, jak to widzimy na rys. 26. Dla obserwatora jest rzeczą pożądaną wiedzieć, w jakim punkcie brzegu tarczy Księżyca gwiazda ukaże się lub zniknie. Oznaczmy kąt pozycyjny tego punktu, liczony w środku tarczy od punktu północnego tej tarczy, przez  $Q$ , to z rysunku widzimy, że  $Q = P + 180^\circ$ , a więc, zgodnie z wzorem (304)

$$Q = M' - 90^\circ \mp \psi, \quad (308)$$

przyczem znak ujemny (górnny) odnosi się do wejścia gwiazdy za tarczę Księżyca, a znak dolny do jej wyjścia z poza tarczy.



31. **Niektóre kryteria widzialności zakrycia gwiazdy w danym punkcie na powierzchni Ziemi.** Roczniki astronomiczne podają niektóre podstawowe dane, czyli t. zw. elementy zakrycia dla jaśniejszych gwiazd, które w danym roku mają ulec zakryciu przez Księżyc. Należy do tych elementów przede wszystkim średni czas greenwichski geocentrycznego połączenia środka Księżyca i gwiazdy we wznoszeniu prostym  $\eta_g^0$  oraz wartość spólrzędnej  $\eta_2$  ( $\xi_2$  jest wtedy równe zeru) i prędkości  $\xi'_2$  i  $\eta'_2$  w tym czasie.

Dane te dają możliwość wyciągnięcia niektórych wniosków, dotyczących widzialności zakrycia w danym miejscu spostrzeżeń, którego spólrzędne geograficzne są  $\varphi$  i  $\lambda$ .

Niech będzie  $K$  czas średni greenwichski górowania Księżyca w Greenwich w dniu zakrycia; gdy więc  $\eta_g^0$  jest czasem greenwichskim geocentrycznego połączenia Księżyca i gwiazdy, to w przybliżeniu  $T_g = \eta_g^0 - K$  jest kątem godzinnym Księżyca w Greenwich w chwili geocentrycznego połączenia z gwiazdą, a  $T = \eta_g^0 - K + \lambda$  kątem godzinnym Księżyca w tej samej chwili w miejscu spostrzeżeń.

Pierwszym warunkiem, aby w danym miejscu było widoczne zakrycie, jest, ażeby w czasie zakrycia Księżyc znajdował się nad poziomem, a Słońce w tym samym czasie pod poziomem. Gdy w epoce  $\eta_g^0$  spólrzędne Księżyca są  $\alpha_0$  i  $\delta_0$ , to możemy z tablicy łuków dziennych dla szerokości  $\varphi$  i zboczenia  $\delta_0$  wyznaczyć chwile wschodu i zachodu Księżyca, wiedząc, że  $K + \lambda$  jest w dniu zakrycia lokalnym czasem średnim górnej kulminacji Księżyca. W ten sposób stwierdzimy, czy przy kącie godzinnym  $T$  Księżyc znajduje się pod horyzontem, czy też nad nim, i czy w tym ostatnim przypadku Słońce jest pod horyzontem.

Gdy stwierdzono w ten sposób, że w chwili geocentrycznego połączenia Księżyca z gwiazdą Księżyc znajduje się w miejscu spostrzeżeń nad horyzontem, a Słońce pod horyzontem, można przystąpić do wyszukania dalszych kryteriów widzialności zakrycia w danym miejscu spostrzeżeń.

W czasie zakrycia musi być, jak wiemy, spełniony warunek

$$(\xi_2 - x)^2 + (\eta_2 - y)^2 < r_2^2.$$

Ponieważ w chwili pozornego (t. j. topocentrycznego) połączenia jest  $\xi_2 = x$ , musi więc być też przez pewien czas spełniony warunek  $|\eta_2 - y| < r_2$ . Aby się przekonać, czy ten warunek także jest spełniony, można poprzestać na stosowaniu wartości przybliżonych, wchodzących w rachubę wielkości.



Przybliżoną wartość różnicy  $\tau_0$  pomiędzy geocentrycznym a topocentrycznym połączeniem otrzymamy z tabelki wartości  $\tau_0$  (p. ustęp poprzedni), przyjmując  $\Theta^0 - \alpha_1 = T$ . Z tą wartością znajdujemy dla chwili topocentrycznego połączenia

$$\eta_2 = \eta_2^0 + \tau_0 \eta',$$

a wartość  $y$  otrzymamy w przybliżeniu, kładąc w drugim ze wzorów (277)  $\alpha = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $\Theta^0 - \alpha_1 = T$ , mianowicie

$$\begin{aligned} y &= \sin \varphi \cos \delta_1 - \cos \varphi \sin \delta_1 \cos T = \\ &= \sin (\varphi - \delta_1) + 2 \cos \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

Rachunek jest doprowadzony do minimum, gdy dla danego  $\varphi$  istnieje tabelka wartości  $\sin (\varphi - \delta)$  i  $\cos \varphi \cos \delta$  z argumentem  $\delta$ .

Gdy dla obliczonych w ten sposób przybliżonych wartości  $\eta_2$  i  $y$  warunek  $|\eta_2 - y| < r_2$  jest spełniony, to w ogólności zakrycie w miejscu spostrzeżeń zachodzi. Wątpliwość może istnieć tylko wtedy, gdy różnica  $|\eta_2 - y|$  bardzo mało różni się od  $r_2$  tak, że przy większej dokładności rachunku mogłoby wypaść  $|\eta_2 - y| > r_2$ ; w tych wypadkach koniecznym jest dokładniejsze obliczenie  $y$ .

### 32. Zakrycia gwiazd przez planety oraz planet przez Księżyc.

Gdy zachodzi zakrycie gwiazdy przez planetę, to obliczenie przebiegu takiego zjawiska wykonywa się w zasadzie w taki sam sposób, jak w przypadku zakrycia gwiazdy przez Księżyc. Oczywiście są to zjawiska rzadkie, średnio tyle razy rzadsze od pokryć gwiazd przez Księżyc, ile razy tarcza planety zakrywającej jest mniejsza od tarczy Księżyca. Tak np. zakrycia gwiazd przez Jowisza zdarzać się mogą 5200 razy rzadziej niż zakrycia przez Księżyc. W danym miejscu (w Warszawie) według Banachiewicza (p. Wiadomości Matematyczne VII, 31) jedno zakrycie gwiazdy do 7 w. zdarza się co najwyżej raz na 144 lat.

W obliczeniu przebiegu zakrycia gwiazdy przez planetę zachodzi ta komplikacja, że należy uwzględnić spłaszczoną postać planety a więc eliptyczny kształt tarczy, co szczególnie wielką stanowi trudność wobec tego, że rozmiary planet znane są znacznie mniej dokładnie, aniżeli promień tarczy Księżyca. Z drugiej strony atmosfery planet stanowią czynnik, którego w badaniu przebiegu zakrycia nie jesteśmy w stanie uwzględnić w sposób, odpowiadający jego znaczeniu.

Dlatego też w obliczeniu zakrycia przez planety nie ma potrzeby dążyć do zbyt wielkiej dokładności, lecz można w większości przypadków zadowolić się grubym przybliżeniem. Przyjmując np. jako średnicę tarczy planety, uważanej za okrągłą, średnicę jej równika, wprowadzoną z dotychczasowych badań, oraz pomijając atmosferę, możemy stosować do przybliżonego obliczenia przebiegu zakrycia wzory ustępu 31.

W przypadku zakryć planet przez Księżyc można postępować w sposób dwojaki: albo, uważając planety za punkty nieskończenie odległe, stosować te same wzory, które są ważne dla zakryć gwiazd, albo też, gdy chodzi o większą dokładność, postępować w sposób podobny, jak w przypadku zaćmień Słońca, uważając planety za źródła światła. W tym ostatnim przypadku przyjmuje się zazwyczaj planety za ciała kuliste, a to również dla uproszczenia postępowania.

Nie wchodzimy w szczegóły. W specjalnych przypadkach, które w praktyce mogą nastąpić, każdy, kto obierze sobie za zadanie zbadanie jakiejś kwestji, związanej z zagadnieniem zakrycia, zastosuje sposób i dokładność taką, jaka w danym przypadku jest niezbędna lub możliwa.

## ROZDZIAŁ VI.

### ZJAWISKA ZAĆMIENI, POKRYĆ I PRZEJŚĆ W UKŁADACH DRUGORZĘDNYCH.

32. **Ogólne uwagi, dotyczące zjawisk zaćmieniowych w układach poszczególnych planet.** Tylko planety górne mają księżyce. Dla obserwatora, znajdującego się na planecie, posiadającej jeden lub więcej księżyców, zachodzi zaćmienie danego księżycyca wtedy, gdy księżyc znajduje się wewnątrz cienia, rzucanego przez planetę, zaćmienie zaś Słońca wtedy, gdy obserwator znajduje się wewnątrz stożka cienia, rzucanego przez jeden z księżyców.

Gdy księżyc planety pogrążony jest w cieniu planety, wskutek czego nie dochodzą do niego promienie Słońca, staje się on niewidoczny dla obserwatora, przebywającego gdziekolwiek, który mógłby widzieć ten Księżyc, gdyby Księżyc był ciałem świecącym własnym światłem. Gdy zaś dla mieszkańca planety zachodzi zaćmienie Słońca, to obserwator znajdujący się poza tą planetą, może zaćmienie to stwierdzić w ten sposób, że dostrzega na powierzchni planety cień, który na nią rzuca księżyc, powodujący zaćmienie, w postaci małej ciemnej plamki.

Prócz tego, gdy księżyc dla obserwatora ziemskiego znajduje się w połączeniu dolnem z planetą, może on być widoczny jako rzut na tarczy planety; zachodzi więc wtedy przejście księżycyca przez tarczę planety, gdy zaś księżyc znajduje się w połączeniu górnem z planetą, to może on być zakryty przez planetę.

Dokładną teorię wszystkich tych zjawisk możnaby oprzeć na ogólnej teorii zaćmieni, wyłożonej w rozdziale pierwszym i zastosowanej następnie do zaćmieni Słońca i szeregu innych zjawisk zaćmienio-



wych. Jednakże zachodzi tu ta trudność zasadnicza, że drogi księżyców planet nie są znane z dostateczną dokładnością, gdyż podlegają bardzo skomplikowanym perturbacjom. Z drugiej strony warunki obserwacji nie pozwalają na osiągnięcie w obserwacji precyzji, która odpowiadałaby dokładności ścisłej teorii.

Pozatem warunki, występujące w poszczególnych układach drugorzędnych, są bardzo różne tak, że jest rzeczą konieczną przystosowanie teorii ogólnej do tych specjalnych warunków. Należy tu brać pod uwagę zarówno okoliczności, mające wpływ na zjawisko zaćmieniowe, jakoteż warunki, w jakich zjawisko to może być obserwowane na Ziemi. Weźmy pod tym względem pod uwagę poszczególne planety.

**W układzie Marsa** księżycy biegają po elipsach, których płaszczyzny nachylone są pod znacznym kątem (około  $25^\circ$ ) do płaszczyzny drogi planety; wskutek tego zaćmienia są tam zjawiskami rzadkimi, zachodzącymi tylko wtedy, gdy w czasie konjunkcji lub opozycji księżycy Marsa i Słońca dla obserwatora na Marsie, t. j. w czasie konjunkcji wzgl. opozycji areocentrycznej, księżyc znajduje się bardzo blisko węzła swej drogi na drodze Marsa. Dla każdego więc z dwóch księżyców Marsa istnieją dwa takie krótkotrwałe okresy, oddzielone przerwą około 11-miesięczną, w ciągu których zachodzi kilka zaćmień jedno po drugim.

Jednakże księżycy Marsa są to bardzo małe ciała niebieskie, a z Ziemi widoczne są zawsze w bardzo małej odległości od tarczy planety, gdzie prawie giną w jej promieniach; wobec tego obserwacja zaćmień księżyców jest nadzwyczaj trudna i nawet przy pomocy najpotężniejszych lunet udaje się bardzo rzadko. Cienie księżyców na tarczy Marsa wobec drobnych rozmiarów tych ciał nigdy jeszcze nie były obserwowane. Wobec tych trudności opracowywanie jakiejś dokładnej teorii zjawisk zaćmieniowych w układzie Marsa nie ma uzasadnienia rzeczowego.

Zaćmienia księżyców Urana i Neptuna, jako ciałek zbyt drobnych dla obserwatora ziemskiego i zawsze w bardzo małej odległości od tarczy tych planet widocznych, nigdy jeszcze dotąd nie było obserwowane.

W najkorzystniejszych warunkach ze względu na obserwacje zaćmień znajduje się układ księżyców Jowisza, mianowicie jego cztery wielkie księżycy, odkryte przez Galileusza (Io, Europa, Ganymed, Kallisto). Cień tej olbrzymiej planety sięga daleko poza średnią odległość najdalszego z tych księżyców, a średnica przekroju cienia w tej odległości nie jest o wiele mniejsza od średnicy Jowisza.

Wobec niewielkiego nachylenia płaszczyzn dróg tych księżyców do płaszczyzny drogi Jowisza, trzy bliższe z księżyców Galileusza podlegają zaćmieniu w czasie każdej swojej pełni, a więc około epoki opozycji zenocentrycznej (t. j. dla obserwatora na Jowiszu), a w czasie bliskim każdej koniunkcji zenocentrycznej rzucają cień na powierzchnię Jowisza, powodując zaćmienia Słońca w tych punktach, przez które cień przechodzi. Tylko u najdalszego z tych księżyców (Kallisto) zjawiska te nie zachodzą wówczas, gdy w czasie zenocentrycznej opozycji lub koniunkcji księżyc ten znajduje się daleko od węzłów swej drogi na drodze Jowisza.

Prócz tego w czasie każdego dolnego połączenia danego księżycy Jowisza z planetą, widzianego z Ziemi, księżyc przechodzi przez tarczę Jowisza, a w czasie każdego górnego połączenia obserwować można zakrycie księżycy przez planetę.

Widzimy więc, że zjawiska zaćmieniowe, zachodzące w układzie Jowisza, są bardzo liczne, a dzięki znacznym rozmiarom wielkich jego księżyców i stosunkowo niewielkiej ich odległości wszystkie te zjawiska mogą być z Ziemi obserwowane.

Przebieg tych zjawisk zależy w wysokim stopniu od wzajemnej odległości geocentrycznej księżycy i Słońca, t. j. od kąta, jaki tworzą ze sobą kierunki, w których obserwator widzi Słońce i Jowisza. Oczywiście w czasie opozycji i koniunkcji Jowisza ze Słońcem tarcza Jowisza przykrywa stożek cienia, a więc zaćmienia księżyców są wtedy niewidoczne; obserwować można wtedy tylko pokrycia księżyców przez Jowisza, przejścia księżyców przez tarczę Jowisza oraz przejścia cieniów tych księżyców. Dopiero przy pewnym nachyleniu kierunków ku Słońcu i ku Jowiszowi, różnym od  $0^\circ$  i od  $180^\circ$ , cień Jowisza ma takie położenie, że część stożka cienia może być wtedy widziana z Ziemi, wtedy więc staje się też możliwe dostrzeżenie przenikania księżycy do cienia, wskutek czego tenże znika, lub też ukazywania się księżycy po wyjściu ze stożka cienia.

W czasie pomiędzy opozycją a połączeniem zjawiska te zachodzą na wschód od tarczy Jowisza, w czasie zaś między połączeniem a opozycją na zachód od Jowisza. Gdy księżyc znika w cieniu na wschód od tarczy Jowisza, to po wyjściu z cienia jest on w ogólności niewidoczny, gdyż w czasie wyjścia z cienia zakryty on jest również przez tarczę Jowisza; księżyc staje się widoczny dopiero po wyjściu z poza tarczy Jowisza. Podobnie w czasie między połączeniem a opozycją na zachód od tarczy Jowisza obserwować można w ogólności tylko wyjście księżycy ze stożka cienia, natomiast punkt,



w którym księżyc pogrąża się w cieniu, zakryty jest przez tarczę Jowisza. Tylko u dalszych księżyców mianowicie III i IV, można obserwować początek i koniec zaćmienia w epokach, znacznie oddalonych od opozycji, jeden i drugi po tej samej stronie względem Jowisza; gdy wejście zachodzi na wschód od Jowisza, to wyjście ma wtedy miejsce bardzo blisko tarczy, gdy zaś wyjście zachodzi na zachód od tarczy Jowisza, to wejście zachodzi tuż przy brzegu tarczy.

Księżyce Saturna biegną po drogach, których płaszczyzny tworzą z płaszczyzną drogi Saturna znaczne kąty; zaćmienia tych księżyców zachodzić więc mogą tylko wtedy, gdy w czasie opozycji ze Słońcem znajdują się one w bliskości węzłów swych dróg. Drogi te, z wyjątkiem drogi księżycza Japeta, przypadają prawie dokładnie w płaszczyźnie pierścieni Saturna.

W czasie gdy Słońce znajduje się w płaszczyźnie pierścienia, a więc w bliskości węzłów dróg księżyców Saturna, pierścień jego, jak wiadomo, staje się niewidoczny, gdyż oświetlony jest tylko jego wąski brzeg, zwrócony ku Słońcu. Okres niewidzialności pierścienia schodzi się zatem z okresem, w którym zachodzą i mogą być obserwowane zaćmienia księżyców Saturna.

W ciągu obiegu Saturna dokoła Słońca przechodzi on raz przez węzeł wstępujący i raz przez węzeł zstępujący swych pierścieni. Odstęp czasu, który upływa między dwoma przejściami, a więc też dwoma epokami występowania zaćmień księżyców Saturna, wynosi około 14 lat. Oczywiście czas, w ciągu którego zaćmienia księżycza zachodzą, jest tem dłuższy, im mniejsza jest odległość księżycza od planety.

Księżyc Japet, którego droga jest znacznie nachylona do płaszczyzny pierścienia, stanowi pod tym względem wyjątek pośród księżyców Saturna. Zaćmienia tego księżycza również zachodzą tylko w epokach przejścia Słońca przez węzły jego drogi; okres czasu w którym zachodzą zaćmienia, jest bardzo krótki ze względu na znaczną jego odległość od planety. Odstęp czasu pomiędzy dwoma takimi okresami widzialności zaćmień Japeta wynosi oczywiście, również około 14 lat; jednakże w tym czasie Słońce znajduje się daleko od węzłów pierścieni, a więc pierścień Saturna są wtedy z Ziemi widoczne. Wskutek tego Japet jest jedynym księżycem Saturna, który podlega zaćmieniu nie tylko przez zanurzenie się w stożku cienia planety, ale też w cieniu jego pierścieni.

Na tych ogólnych uwagach poprzestajemy, odsyłając czytelników, pragnących sprawę zjawisk zaćmieniowych u układach drugorzędnych poznać dokładniej, do obfitej literatury tego przedmiotu.



## SPIS RZECZY.

	Str.
PRZEDMOWA . . . . .	III
ROZDZIAŁ I. KLASYFIKACJA I OGÓLNA TEORJA ZJAWISK . . . . .	1
1. Określenie najogólniejsze zjawisk zaćmieniowych i ich podział. 2. Równanie powierzchni, ograniczających przestrzeń pełnego cienia i półcienia. 3. Powierzchnia cienia w przypadku, gdy powierzchnie $F_1=0$ i $F_2=0$ są dowolnymi powierzchniami drugiego rzędu. 4. Powierzchnie cienia w przypadku, gdy ciało świecące i rzucające cień są elipsoidami obrotowymi lub kulami. 5. Oś cienia. Wyznaczenie kierunku osi cienia. Spółrzędne cieniowe. 6. Równanie przekroju przestrzeni cienia płaszczyzną prostopadłą do osi cienia, w przypadku, gdy przestrzeń cienia jest stożkiem kołowym.	
ROZDZIAŁ II. ZAĆMIENIE SŁOŃCA . . . . .	24
7. Rodzaje zaćmień Słońca. Stożek półcienia i pełnego cienia Księżyca. Kierunek osi cienia. 8. Spółrzędne cieniowe Słońca, Księżyca i punktu na powierzchni Ziemi. 9. Wpływ wzniesienia nad poziom morza i refrakcji na wartości współrzędnych miejsca obserwacji. 10. Wyznaczenie punktów powierzchni Ziemi, w których w danej chwili zachodzi początek lub koniec zaćmienia. 11. Kilka innych postaci równań koła cienia. 12. Obliczenie wielkości, określających drogę osi cienia oraz środka cienia w płaszczyźnie $(\xi, \eta)$ . 13. Kryteria, określające możliwość zajścia zaćmienia oraz w przypadkach, gdy zaćmienie zachodzi, rodzaj zaćmienia. 14. Uwagi ogólne, dotyczące przebiegu zaćmienia Słońca na Ziemi. 15. Północna i południowa granica zaćmienia Słońca. Krzywe jednakowej największej fazy. 16. Krzywa zaćmienia centralnego. 17. Wschodnie i zachodnie granice zaćmienia. Punkty końcowe krzywych granicznych. Granice strefy zaćmienia całkowitego i pierścieniowego. Końcowe punkty krzywej zaćmienia centralnego. 18. Krzywe danej fazy zaćmienia w danej chwili. Punkty w których największa faza przypada w tym samym miejscowym czasie słonecznym. Punkty, w których największa faza zachodzi jednocześnie. Krzywe największej fazy w chwili wschodu lub zachodu Słońca. 19. Punkty styczności powierzchni Ziemi z powierzchnią stożka cienia. Czas trwania zaćmienia dla ca-	

łej Ziemi. 20. Kąt pozycyjny zetknięcia się tarcz Księżycy i Słońca. Wielkości fazy. 21. Przebieg zaćmienia Słońca w danym punkcie obszaru widzialności. Momenty kontaktów i kąty pozycyjne punktów zetknięcia. Czas i wielkość największej fazy.

ROZDZIAŁ III. ZAĆMIENIA KSIĘŻYCA . . . . . 94

22. Spółrzędne cieniowe selenocentryczne. Stożek cienia, rzucanego przez Ziemię. Koło cienia w płaszczyźnie, przechodzącej przez dany punkt prostopadłej do osi stożka. 23. Kierunek i prędkość ruchu osi stożka cienia ziemskiego. Najmniejsza odległość osi stożka od środka Księżycy i czas tej najmniejszej odległości. 24. Kryterja, określające możliwość zajścia zaćmienia Księżycy oraz rodzaj zaćmienia. 25. Czas i kąt pozycyjny kontaktów. Środek zaćmienia i największa faza. 26. Obszar powierzchni Ziemi, na którym widzialne jest zaćmienie Księżycy.

ROZDZIAŁ IV. PRZEJŚCIA PLANET DOLNYCH PRZEZ TARCZĘ SŁONECZNĄ . . . . . 112

27. Epoki, w których mogą zachodzić przejścia. Kierunek osi cienia. Stożki cienia pełnego i półcienia. Równanie koła cienia. Przebieg zjawiska i uwagi, dotyczące jego obliczenia.

ROZDZIAŁ V. ZAKRYCIA GWIAZD PRZEZ KSIĘŻYC LUB PLANETY 117

28. Zjawisko zakryć gwiazd. Specjalizacja ogólnej teorii zaćmień w przypadku zakryć. Walec cienia. Spółrzędne punktów, leżących na powierzchni walca cienia. 29. Przebieg zakrycia dla całej Ziemi. Niektóre kryterja możliwości zakrycia. 30. Przebieg zjawiska zakrycia gwiazdy przez Księżyc w danym punkcie powierzchni Ziemi, leżącym w strefie widzialności tego zakrycia. 31. Niektóre kryterja widzialności zakrycia gwiazdy w danym punkcie na powierzchni Ziemi. 32. Zakrycia gwiazd przez planety i planet przez Księżyc.

ROZDZIAŁ VI. ZJAWISKA ZAĆMIENI, POKRYĆ I PRZEJŚĆ W UKŁADACH DRUGORZĘDOWYCH . . . . . 130

33. Ogólne uwagi, dotyczące zjawisk zaćmieniowych w układach poszczególnych planet.

