

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA TOM XXVII.

PODREČNIK TEORYI MOSTÓW

DLA

INŻYNIERÓW I SŁUCHACZÓW SZKÓŁ POLITECHNICZNYCH

Z 94 RYSUNKAMI W TEKŚCIE

CZĘŚĆ II. ŁUKI I WIESZARY

OPRACOWAŁ

DR MAKSYMILIAN THULLIE

RADCA DWORU, PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE

Cena 5 koron.

LWÓW 1913

NAKŁADEM KOMISYI BIBLIOTEKI POLITECHNICZNEJ

I. ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE

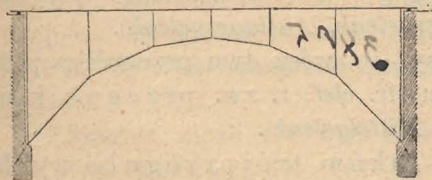
dar z biblioteki

Wstęp.

§ 1. Uwagi ogólne o belkach łukowych.

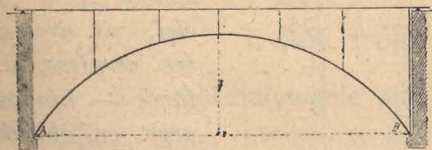
W części pierwszej Podręcznika teorii mostów podzieliśmy dźwigary na belki proste, łukowe, wiszące i układy złożone. Teorię belek prostych wyłożyliśmy w I. części podręcznika (tom I. i II.); w drugiej części mówić będziemy o łukach i wieszarach jakoteż układach złożonych. Wprawdzie teorie łuków i wieszarów mają wiele punktów stycznych i można je razem wykladać, to jednakże ze względu na jaśniejszy wykład rozdzielimy je i obecnie będziemy mówić tylko o łukach.

Dźwigar (rys. 1.), wywierający nawet przy pionowym obciążeniu ciśnienie ukośne na podpory i dążący do ich oddalenia, nazywamy rozpornicą lub dźwigarem rozporowym (n. *Sprengwerkträger*, fr. *poutre à jambettes*, *poutre de châssis*, a. *strut framed girder*, cz. *nosnik vzpěradlový*, *vzepřeny*).



Rys. 1.

Jeżeli oś takiego dźwigaru jest linią krzywą (rys. 2.), to nazywamy go dźwigarem łukowym lub łukiem (n. *Bogenträger*, fr. *poutre en arc*, *arc*, a. *arched girder*, *arch*, cz. *nosnik obloukový*, *oblouk*), zaś mosty, których dźwigary główne są łukami, nazywamy mostami łukowymi (n. *Bogenbrücken*, fr. *pont en arc*, a. *arched-bridge*, *arch-bridge*, cz. *most obloukový*).



Rys. 2. l = rozpiętość łuku.

f = strzałka łuku.

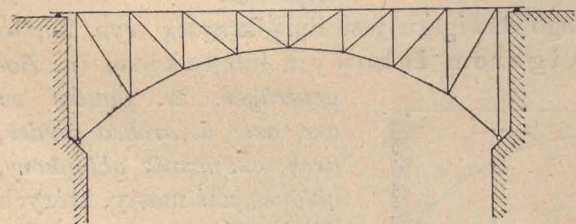
W podręczniku statyki budowli ¹⁾ podaliśmy zasady teorii łuków i udowodnili, że do określenia linii ciśnienia potrzebnem jest wyznaczenie trzech niewiadomych. W tym celu albo uciekamy się do prawideł spężystości i badamy odkształcenie łuku lub też budujemy łuk w ten sposób, aby trzem danym warunkom zadość uczynić, urządzać przeguby (n. *Gelenk*, fr. *charnière*, a. *joint*, cz. *kloub*).

Są to połączenia przegibne dwu części, na które dźwigar podzieliłiśmy. W stanie równowagi moment w miejscu przegubu jest równy zeru, a więc linia ciśnienia musi przechodzić przez przegub. Urządziwszy n przegubów, otrzymamy dla równowagi n równań, które uzyskamy, przyrównywując momenty sił zewnętrznych dla tych punktów do zera. A że dla łuku brakuje nam trzech równań, więc, jeżeli urządzimy w łuku trzy przeguby, otrzymamy dla równowagi jeszcze trzy równania, a łuk staje się statycznie wyznaczalnym. Jeśli urządzimy tylko dwa przeguby, to brakować nam będzie jeszcze jednego równania tak, że łuk będzie niewyznaczalnym pierwszego stopnia.

Przeguby, gdy jest ich tylko dwa, umieszczamy w dolnych końcach łuku t. zw. węzłowiach (n. *Kämpfer*, fr. *naissance*, *retombée*) i nazywamy je przegubami podporowymi lub węzłowymi (*Kämpfergelenk*, *Auflagergelenk*).

Gdy przegubów jest trzy, to prócz dwu przegubów podporowych dajemy w kluczu (fr. *clef*) t. zw. przegub kluczowy (n. *Scheitelscharnier*, *Mittelgelenk*).

W praktyce używamy łuków trójprzegubowych, (n. *Bogenträger mit drei Gelenken*, *Dreigelenkbogen*, fr. *arc*



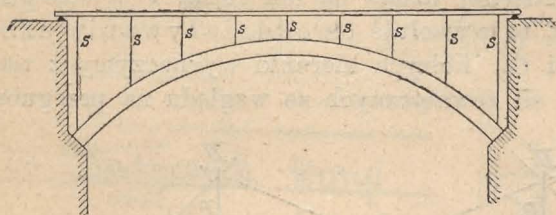
Rys. 3.

à trois articulations, *arc articulé aux naissances et à la clef*, wł. *arco a tre cerniere*, a. *three — hinged arch*, cz. *oblouk o třech kloubech*),

łuków dwuprzegubowych, (n. *Bogenträger mit Kämpfergelenken*, fr. *arc avec deux charnières*, wł. *arco a due cerniere*,

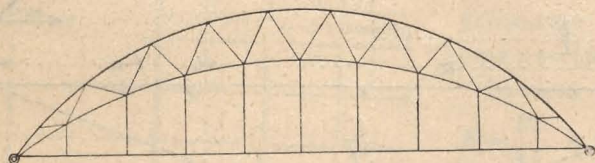
¹⁾ Dr. Thullie, Statyka budowli; II. wyd. str. 383 i dalsze.

a. *arch with hinged ends*, cz. *oblouk o dvou kloubech*) i łuków bezprzegubowych (n. *Bogenträger ohne Gelenke*, fr. *arc encastré aux naissances*, *arc sans articulations*, wł. *arco incastrato*, a. *hingeless arch*, cz. *oblouk bez kloubu*).



Rys. 4.

poziomy (rys. 3.), lub obydwie pasy krzywe (rys. 4.). W pierwszym wypadku (łuk prostopasowy) pomost układamy wprost



Rys. 5.

na górnym pasie prostym, w drugim pomost opieramy na łuku bądź za pomocą słupów pomostowych (s) (n. *Fahrbahnstütze*, fr. *tympan*), ustawionych na grzbiecie łuku, bądź też filarów pomostowych (n. *Fahrbahn Pfeiler*), umieszczonych w większych odstępach.

Pomost może też być zawieszony na łuku za pomocą słupów wiszących (rys. 5.) (n. *Hängestange*, *Tragstange*, fr. *tige de suspension*).

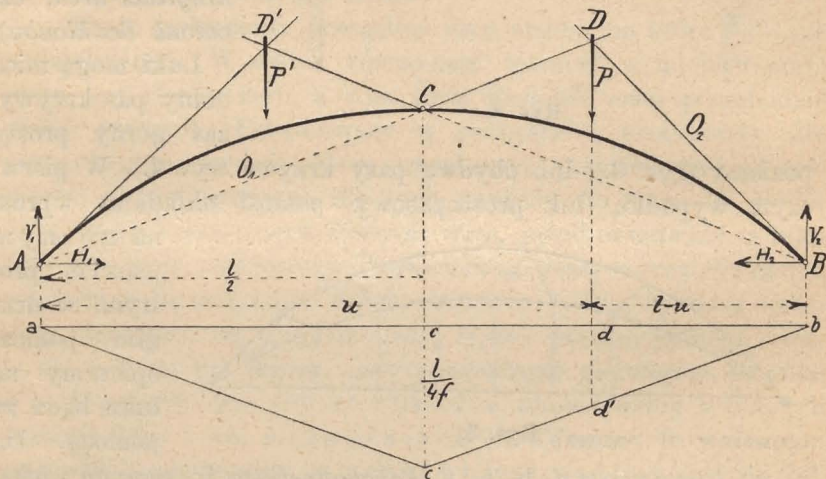
A. Teorya łuków.

I. Łuk trójprzegubowy.

§ 2. Oddziaływanie dla obciążenia pionowego.

Łuki mogą być obciążone pionowo lub też mogą na nie działać siły ukośne lub poziome. Dla mostów najważniejszym jest obciążenie pionowe; najprzód badać też będziemy łuki tylko pionowo obciążone, nie uwzględniając na razie innych rodzajów obciążenia.

W celu wyznaczenia oddziaływań podpór przyjmijmy łuk symetryczny trójpřzegubowy (rys. 6.) o przegubie C w połowie rozpiętości. Niechaj działa na łuk ciężar P w odstępzie u od lewej podpory, to wywołuje on oddziaływanie ukośne podpór O_1 i O_2 , których kierunki wyznaczymy z warunku, że momenty sił zewnętrznych ze względu na przeguby



Rys. 6.

A , B i C muszą być równe zero. Zatem O_1 ma kierunek AC , a że obydwa oddziaływania i siła P muszą się przecinać w jednym punkcie, więc kierunek drugiego oddziaływania O_2 jest BD .

Ukośne oddziaływania O_1 i O_2 dadzą się rozłożyć na składowe poziome H_1 i H_2 i pionowe składowe V_1 i V_2 . Składowe pionowe nazywamy pionowymi składowymi oddziaływań, poziome zaś parciem poziomem H (n. *Horizontalschub*, fr. *poussé*, a. *horizontal thrust*).

Dla równowagi musi być

$$H = H_1 = H_2$$

Aby wyznaczyć V_1 , ustawmy równanie momentów ze względu na punkt B :

$$V_1 l - P(l-u) = 0, \text{ stąd}$$

$$V_1 = \frac{P(l-u)}{l} \text{ i podobnie} \quad (1a)$$

$$V_2 = \frac{P \cdot u}{l} \quad (1b)$$

W punkcie C moment jest równy zeru, więc

$$1) \text{ dla } u > \frac{l}{2} \text{ będzie: } V_1 \cdot \frac{l}{2} - H \cdot f = 0$$

$$\text{stąd } H = \frac{V_1 \cdot l}{2f} = \frac{P \cdot (l-u)}{2f} \quad \dots \quad (2)$$

$$2) \text{ Dla } u < \frac{l}{2} \text{ będzie:}$$

$$V_1 \cdot \frac{l}{2} - H \cdot f - P \left(\frac{l}{2} - u \right) = 0, \text{ stąd}$$

$$H = \frac{V_1 l}{2f} - \frac{P(l-2u)}{2f} = \frac{Pu}{2f} \quad \dots \quad (3)$$

Z równań tych widzimy, że oddziaływania pionowe V_1 i V_2 są dla łuku trójprzegubowego takie same, jak dla belki w dwóch punktach podpartej, zaś linia wpływowa parcia poziomego składa się z dwóch prostych ac' i $c'b$, przecinających się w środku rozpiętości. Mamy bowiem z równania 2)

$$\text{dla } u=l, H=0; \text{ dla } u=\frac{l}{2}, H=\frac{Pl}{4f}, \text{ z rów. 3)}$$

$$, \text{ „ } u=0, H=0; \text{ „ } u=\frac{l}{2}, H=\frac{Pl}{4f};$$

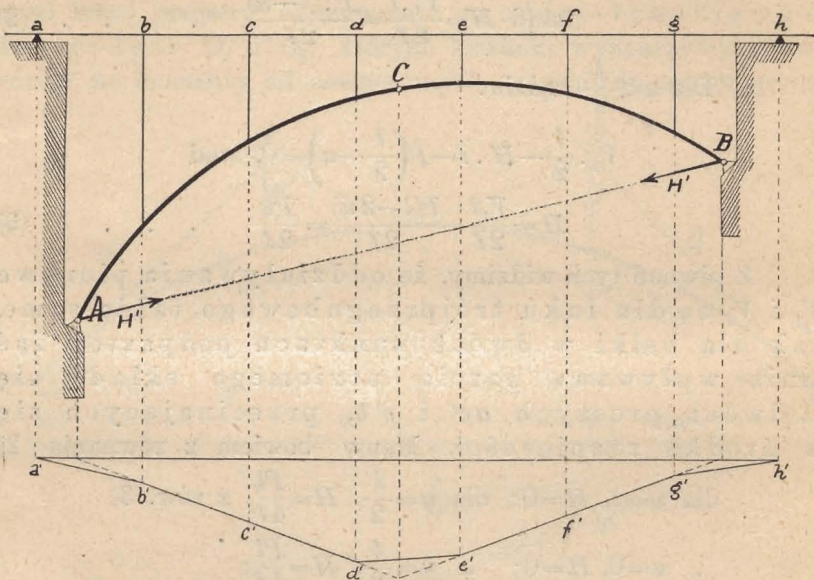
a zatem $cc' = \frac{l}{4f}$, jeżeli $P=1$.

Oddziaływania O_1 i O_2 przecinają się w punkcie D . Jeżeli siła P porusza się od C do B , to punkt D porusza się po prostej CD ; jeżeli siła działa po lewej stronie punktu C , to punkt D leży na prostej CD' .

Linia, po której się punkt D porusza, nazywa się linią przecięcia się oddziaływań $D'CD$ (n. *Kämpferdrucklinie*, *Schnittlinie der Kämpferdrücke*, fr. *ligne d'intersection des reactions*, a. *the line of intersections*, cz. *sečnice reakcí opěrových*). Dla łuku trójprzegubowego otrzymujemy więc jako linię przecięcia się oddziaływań dwie proste CD i CD' .

Linia wpływowa parcia poziomego wykreślona na rys. 6., odpowiada wypadkowi, gdy nad przegubami A , B i C leżą poprzecznice. W wypadku przeciwnym linia wpływowa parcia przedstawia się jak na rys. 7., albowiem linia wpływowa między poprzecznicami jest prostą. Tu jestto linia parcia ukośnego

H' , którą w ten sam sposób się kreśli, co linie parcia poziomego H . Z kształtu linii wpływowej H (rys. 6.) wynika, że na wielkość H mają mały wpływ ciężary bliskie węzłowi,



Rys. 7.

wielki blisko klucza. Znając linię wpływową, możemy łatwo obliczyć wielkość parcia poziomego dla jakiegokolwiek obciążenia i tak:

Dla obciążenia jednostajnego zupełnego, jeżeli przez g oznaczymy ciężar jednostkowy, będzie:

$$V_{1g} = V_{2g} = \frac{1}{2} gl \quad (4)$$

zaś
$$H_g = g \cdot \frac{l}{2} \cdot cc' = \frac{gl}{2} \cdot \frac{l}{4f} = \frac{gl^2}{8f} \quad (5)$$

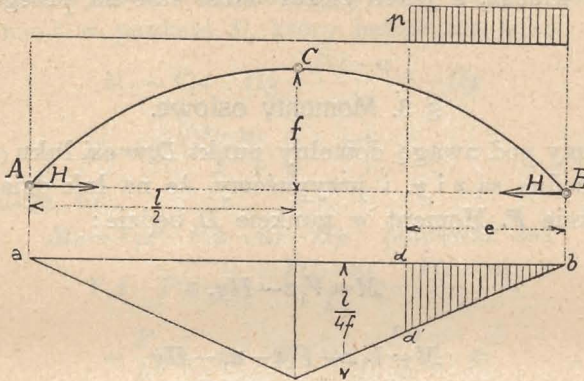
Dla obciążenia częściowego na długości e od podpory (rys. 8.) ciężarem jednostkowym P otrzymamy:

$$He = p \cdot \frac{e}{2} \cdot dd'$$

ponieważ zaś $dd' : \frac{l}{4f} = e : \frac{l}{2}$, a stąd: $dd' = \frac{le}{4f} : \frac{l}{2} = \frac{e}{2f}$,

więc
$$H_e = P \cdot \frac{e^2}{4f} \quad (6)$$

Jeżeli łuk obciążony jest układem ciężarów skupionych (rys. 9.) i gdy wypadkową ciężarów po lewej



Rys. 8.

stronie przegubu nazwiemy R' a po prawej R'' , to w tym wypadku będzie parcie poziome:

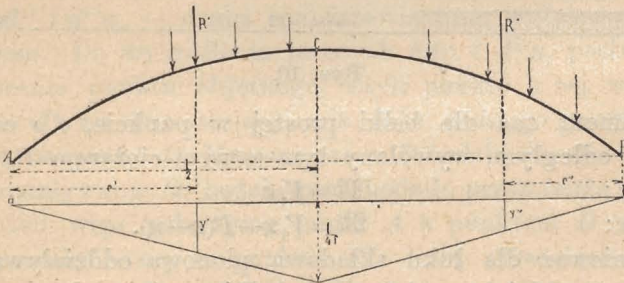
$$H_s = R'y' + R''y''$$

Z rysunku widać, że:

$$y' : ce' = e' : \frac{l}{2};$$

$$\text{więc } y' = \frac{e'}{2f}, \text{ podobnie } y'' = \frac{e''}{2f}$$

$$\text{stąd: } H_s = \frac{1}{2f} (R'e' + R''e'') \quad . \quad . \quad (8)$$



Rys. 9.

Z kształtu linii wpływowej parcia poziomego widzimy analogię do linii wpływowej momentów dla belki prostej w dwu punktach podpartej. A więc każdy ciężar wywołuje w łuku

punktach podpartej ze względu na przekrój pod tym punktem leżący, pomniejszonemu o iloczyn Hy .

W celu wyznaczenia linii wpływowej momentów wyznaczmy moment w punkcie D , który będzie dla $u > x$.

$$M_D = V_1 x - Hy = \frac{P(l-u)}{l} x - Hy$$

lub

$$M_D = y \left\{ \frac{P(l-u)}{l} \cdot \frac{x}{y} - H \right\} \quad (10a)$$

a jeżeli $u < x$, to

$$M_D = V_1 x - P(x-u) - Hy; \text{ ponieważ zaś}$$

$$\begin{aligned} V_1 x - P(x-u) &= \frac{P(l-u)}{l} x - \frac{P(x-u)}{l} l \\ &= \frac{P}{l} (lx - ux - lx + ul) = \frac{Pu}{l} (l-x) \end{aligned}$$

a więc:

$$M_D = y \left[\frac{P(l-x)}{l} \frac{u}{y} - H \right] \quad (10b)$$

Rzędne x i y są stałe dla punktu D ; wyłączwszy więc y przed nawias, możemy dla wyrażenia w nawiasie wykreślić linię wpływową w następujący sposób:

Z równań 10a i 10b widać, że M_D jest różnicą dwu funkcji u , z których pierwsza ma kształt: $\frac{P(l-u)}{l} \cdot \frac{x}{y}$ na prawo od

punktu D (rów. 10a), względnie $\frac{P(l-x)}{l} \cdot \frac{u}{y}$ na lewo od punktu

D (rów. 10b), a więc da się przedstawić dwiema liniami prostymi bd'' i $d''a$, — druga przedstawia linię wpływową parcia poziomego. Do wykreślenia prostych bd'' i $d''a$, posłużmy nam wyznaczenie punktu objętnego, czyli punktu o tej własności, że ciężar P , na nim stojący, nie daje żadnego momentu ze względu na punkt D . Moment zaś w D będzie się równał zeru, gdy oddziaływanie O_1 będzie przechodziło przez tenże punkt D .

Jeżeli więc połączymy punkt A z punktem D (rys. 10.), aż do przecięcia się w punkcie E z linią „przecięcia się oddziaływań“, — tedy oddziaływanie O_1 z powodu siły P' , działającej w pionowej przez E nie daje żadnego momentu ze względu na punkt D .

Jeżeli siła P' posunie się na prawo, wtedy O_1 daje moment ujemny, zaś dla siły P_2 na lewo od punktu E jest moment

dodatni. Z tego wynika, że punkt E jest punktem obojętnym, a zatem rzędna linii wpływowej M_D jest w tym miejscu równą zeru, czyli prosta bd'' przecina się z linią wpływową H w punkcie e' w pionowej, poprowadzonej przez E .

Linie wpływową momentów wykreślimy więc w ten sposób:

Najpierw kreślimy linię wpływową parcia poziomego $d c' b$, wyznaczamy E przedłużając AD do przecięcia się z bc , prowadzimy pionową z E aż do przecięcia się z prostą ac' w punkcie e' łączymy b z e' aż do pionowej przez D i kreślimy prostą ad'' .

W ten sposób otrzymamy kreskowaną powierzchnię wpływową (rys. 10.), której część $ad''e'$ jest dodatnią, część zaś $e'e'b$ ujemną.

Z kształtu linii wpływowej możemy bardzo łatwo wyznaczyć w wiadomy sposób najniekorzystniejsze położenie układu ciężarów skupionych, a z powierzchni wpływowej możemy wyznaczyć największe dodatnie i ujemne momenty dla obciążenia jednostajnego zupełnego.

Przypuśćmy, że oś łuku jest parabolą i obciążmy go zupełnie ciężarem jednostkowym g , to moment w dowolnym punkcie (rów. 9.) równa się $M = \mathfrak{M} - Hy$, a że

$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}g(l-x) \cdot x^1$, zaś parcie poziome wedle równ. 5), $H = \frac{gl^2}{8f}$,

$$\text{więc } M = \frac{1}{2}gx(l-x) - \frac{gl^2}{8f} \cdot y.$$

$$\text{Dla paraboli jest } y = \frac{4fx(l-x)}{l^2},$$

$$\text{stad } x(1-x) = \frac{yl^2}{4f}, \text{ zatem } M = \frac{gl^2}{8f} \cdot y - \frac{gl^2}{8f} \cdot y = 0.$$

Widzimy zatem, że dla łuku parabolicznego przy obciążeniu jednostajnem zupełnem jest moment ze względu na oś wszędzie równy zeru; ciężar własny zatem, jeżeli jest jednostajnie rozdzielony na długości l , i obciążenie zupełne wywołują tylko siłę podłużną, a linia ciśnienia wpada w oś.

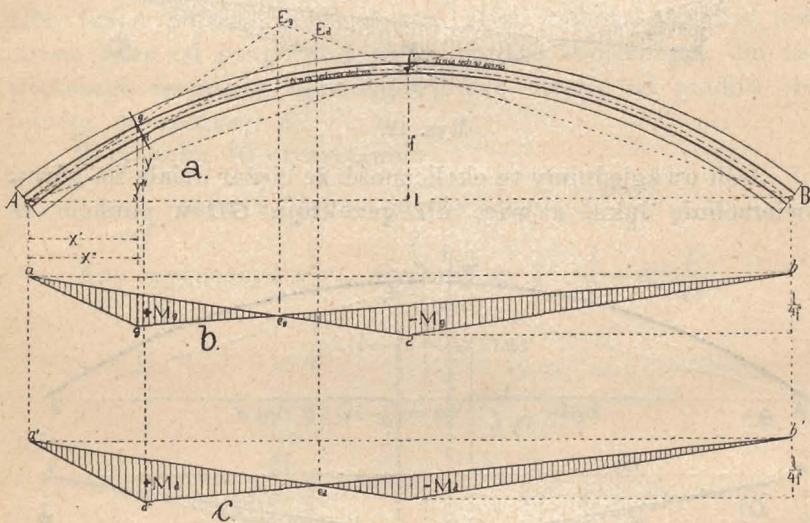
Z powyższego wypływa także, że dla łuku parabolicznego, powierzchnie wpływowe momentów: dodatnia i ujemna, muszą

¹⁾ Dr. Thullie: Statyka bud., str. 24, rów. 18.

być sobie równe, tem samem trójkąty $ad''b$ i $ab'b$ (rys. 10.) muszą być sobie równe, a punkty d'' i c' muszą leżeć na prostej poziomej.

§ 4. Momenty jędrne.

Dla obliczenia przekroju belki łukowej o ścianie pełnej potrzeba nam momentów nie ze względu na oś łuku, lecz tak zw. momentów jędrnych¹⁾ (n. *Kernmoment*, cz. *moment ku bodu jadroweho*) t. j. momentów sił zewnętrznych ze względu na punkty jędrne górne i dolne, momentu jędrnego górnego (n. *oberes Kernmoment*) i momentu jędrnego dolnego (n. *unteres Kernmoment*). Tu bowiem stosować możemy wzór: $\tau_g \cdot I = M_d \cdot e_g$ i $\tau_d I = M_g e_d$ przyczem M_d jest momentem jędrnym dolnym, M_g górnym. Licząc natężenia w warstwie



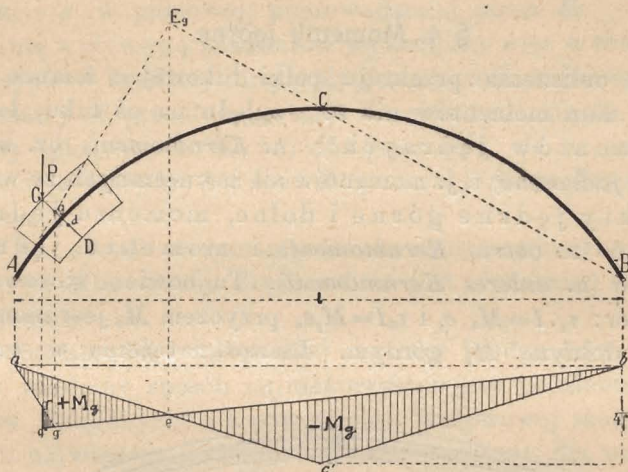
Rys. 11.

górnej, wstawiamy moment jędrny dolny i odwrotnie dla dolnej warstwy — moment jędrny górny.

Linie wpływowe momentów jędrnych wyznaczamy w ten sam sposób, jak linie wpływowe momentów osiowych, z tą tylko różnicą, że zamiast rzędnej y punktu leżącego w osi, bierzemy odnośne rzędne y' lub y'' punktu jędrnego górnego (g) lub dolnego (d) (rys. 11.).

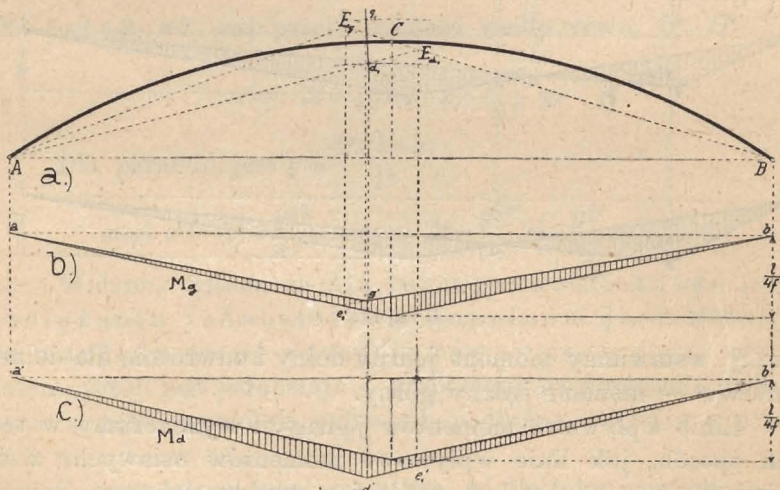
¹⁾ Dr. Thullie: Statyka budowli, str. 387.

Dla tego samego przekroju otrzymamy więc dla punktu jędrnego górnego inny punkt obojętny niż dla dolnego, zatem i inną linię wpływową (r. 11 *b* i *c*).



Rys. 12.

Jeśli uwzględnimy tę okoliczność, że ciężar działa na górną powierzchnię łuku, a więc dla przekroju *GD* w punkcie *G*



Rys. 13.

(rys. 12.), to musimy prostą *be* przedłużyć aż do *g''* i zwiększyć powierzchnię wpływową o trójkącik *g'g''g'''*.

Dla przekrojów blisko klucza, w których punkt jędry górny (g_1) leży powyżej BC lub dolny (d_1) poniżej AC (rys. 12.), niema właściwego punktu obojętnego. Pomimo tego konstrukcja pozostaje ta sama (rys. 13 b i c). Punktu e używamy do wykreślenia linii wpływowej, jak pierwiej, chociaż punkt obojętny E jest tu urojonym. Z rys. 13. b i c widać, że dla przekroju blisko klucza otrzymujemy dla M_g powierzchnię wpływową w całości ujemną, dla M_d zaś w całości dodatnią.

§ 5. Największe momenty.

Z kształtu linii wpływowej możemy wyznaczyć największy moment dodatni i ujemny. Jeżeli łuk obciążony jest ciężarem jednostajnym, jednostajnie rozłożonym, to dla największego momentu dodatniego w dowolnym punkcie D (rys. 10.) albo też w punkcie g lub d (rys. 11 a), należy obciążyć lewą stronę łuku od podpory A aż do punktu obojętnego, dla największego momentu ujemnego prawą stronę od punktu obojętnego do podpory B .

Z rysunku 10 otrzymamy:

$$\text{najw } (-M) = -pye'bc' = py(l-\xi) \frac{c'c''}{2}$$

Aby wyznaczyć $c'c''$, zważmy że $\xi: \frac{l}{2} = ee': \frac{l}{4f}$

$$\frac{l}{2}: (l-\xi) = cc'': ee'$$

więc $\xi: (l-\xi) = cc'': \frac{l}{4f}$, stąd

$$cc'' = \frac{\xi l}{4f(l-\xi)}; \text{ zatem } c'c'' = \frac{l}{4f} - \frac{l\xi}{4f(l-\xi)}$$

czyli $c'c'' = \frac{l}{4f} \cdot \frac{l-2\xi}{l-\xi}$. Wstawiając wartość za $c'c''$ otrzymamy:

$$\text{najw } (-M) = -\frac{lpy}{8f} \cdot (l-2\xi) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Z rys. 10 otrzymamy podobnie:

$$\text{najw } (=M) = +ypac'd'' = \frac{p \cdot y}{2} \cdot \xi d''.$$

Aby wyznaczyć $d'd''$ zważmy, że:

$$d'd'': c'c'' = (\xi - x): \left(\frac{l}{2} - \xi \right) \text{ więc:}$$

$$d'd'' = c'c'' \frac{\xi - x}{l} = \frac{l}{4f} \cdot \frac{l-2\xi}{l-\xi} \cdot \frac{2(\xi-x)}{l-2\xi}$$

$$d'd'' = \frac{l(\xi-x)}{2f(l-\xi)}, \text{ zatem:}$$

$$\text{najw (+M)} = \frac{p l y (\xi - x) \xi}{4 f (l - \xi)} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Wzory te możemy jeszcze inaczej napisać:

Z rysunku bowiem wynika, że:

$$x : y = \xi : EE_1$$

$$\text{a także } l - \xi : \frac{l}{2} = EE_1 : f, \text{ zatem}$$

$$x(l - \xi) : y \cdot \frac{l}{2} = \xi : f,$$

a stąd odstęp punktu obojętnego od lewej podpory

$$\xi = \frac{2fxl}{ly + 2fx} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\text{a stąd } y = \frac{2fx(l - \xi)}{l\xi}$$

co wstawiając w równ. 11. i 12. otrzymamy:

$$\text{najw (-M)} = -\frac{px}{4\xi} (l - f) (l - 2\xi) \quad . \quad (14)$$

$$\text{najw (+M)} = \frac{Px}{2} (\xi - x) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Dla ciężaru własnego otrzymamy z równań 11. i 12.:

$$M_g = -\frac{lgy}{8f} (l - 2\xi) + \frac{gly\xi(\xi - x)}{4f(l - \xi)}$$

$$\text{czyli: } M_g = \frac{gly}{8f(l - \xi)} (3l\xi - 2\xi x - l^2) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

lub też z równań 14. i 15.:

$$M_g = \frac{gx}{2} (\xi - x) - \frac{gx}{4\xi} (l - \xi) (l - 2\xi)$$

czyli

$$M_g = \frac{gx}{4\xi} [\xi(3l - 2x) - l^2] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Dla przekrojów blisko klucza, gdzie niema punktu obojętnego, otrzymamy najw (+M), względnie najw (-M), dla obciążenia zupełnego, więc wedle 17, jeżeli tylko zamiast g wstawimy p .

Tych samych wzorów możemy użyć dla momentów jedrnych, jeżeli za y wstawimy rzędne punktów jedrnych: $y' = y + i$, i $y'' = y - i$, a przez ζ oznaczymy odcinki odnośnych punktów obojętnych.

Chcąc wyznaczyć kształt linii najw $\pm M$, musimy przyjąć pewien kształt łuku. Dla łuku np. parabolicznego: $y = \frac{4fx}{l^2}(l-x)$, co wstawione w rów. 13. ważne dla momentów osiowych, da nam:

$$\zeta = \frac{2fxl}{ly + 2fx} = \frac{l^2}{3l - 2x} \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Jeżeli wartość tą wstawimy w równania 11. i 12., to otrzymamy:

$$\text{najw } (-M) = -\frac{px(l-x)(l-2x)}{2(3l-2x)} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{px}{2} - \frac{l^2 - 3lx + 2x^2}{3l - 2x} \quad \text{czyli}$$

$$\text{najw } (+M) = \frac{px(l-x)(l-2x)}{2(3l-2x)} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Z równań 19. i 20. widać, że

$$\text{najw } (-M) = \text{najw } (+M) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Momenty te różnią się tylko znakami.

W celu wykreślenia kształtu tych linii, wyznaczamy dla różnych punktów wartości na ζ , $(-M)$ i $(+M)$. I tak:

dla $\frac{x}{l} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\zeta =$	0,333;	0,357;	0,385;	0,417;	0,455;	0,500 l
najw $(-M) =$	-0	-0,0129;	-0,0185;	-0,0175;	-0,0109;	0 pl^2
najw $(+M) =$	0	0,0129;	0,0185;	0,0175;	0,0109;	0 pl^2

Najw. $M = 0,019 pl^2$ dla $x = 0,234 l$ i $\zeta = 0,395 l$.

Dalej otrzymamy dla momentu jedrnego dolnego:

$$M_d = N(c + i) = M + Ni$$

odstęp punktu obojętnego:

$$\zeta_d = \frac{2fxl}{ly - li + 2fx};$$

$$\text{a dla osi parabolicznej } \zeta_d = \frac{2fxl^2}{2fx(3l - 2x - il^2)} \quad a.$$

$$\text{Gdy } u = \frac{x}{l} \quad \text{a } i_1 = \frac{i}{l}, f_1 = \frac{f}{l} \quad \zeta_d = \frac{2f_1 u}{2f_1 u(3 - 2u) - i_1}, \quad (22)$$

$$\text{najw } (-M_d) = -\frac{lp(y-i)}{8f}(l - 2\zeta_d), \text{ a dla osi parabolicznej}$$



$$\text{najw } (-M_d) = -\frac{lp}{8f}(4fu(l-u)-i)(l-2\xi_d) \quad (23)$$

$$\text{a najw } (+M_d) = \frac{pl(y-i)(\xi_d-x)}{4f(l-\xi_d)} \quad (24)$$

Dla momentu rdzennego górnego mamy

$$M_g = N(c-i) = M - Ni$$

$$\xi_g = \frac{2fxl}{ly+li+2fx} = \frac{2fu}{2fu(3-2u)+i_1} \quad (25)$$

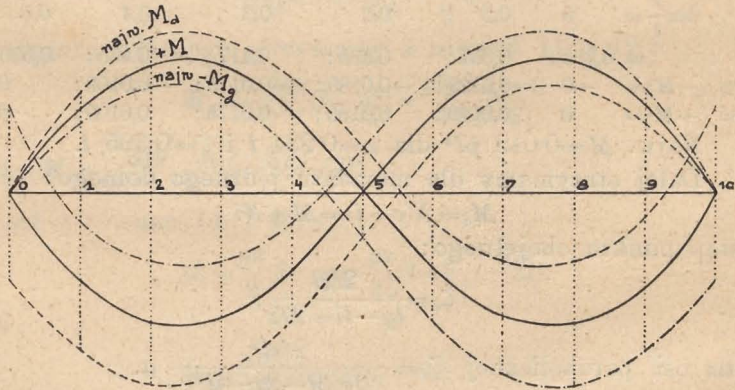
$$\text{najw } (-M_g) = -\frac{lp(y+i)}{8f}(l-2\xi_g) \quad (26)$$

$$\text{najw } (+M_g) = +\frac{pl(y+i)(\xi_g-x)}{4f(l-\xi_g)} \quad (27)$$

Z poprzednich równań otrzymamy więc n. p. dla $\frac{i}{l} = \frac{1}{100}$; $f=0,1l$; dla

$\frac{x}{l} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	l
$\xi_g =$	0	0,303	0,351	0,390	0,430	0,476	l
$\xi_d =$	0	0,435	0,425	0,448	0,482	0,526	l
najw $(-M_g) =$	-0,0125	-0,0226	-0,0276	-0,0259	-0,0183	-0,0066	pl^2
„ $(-M_d) =$	+0,0125	-0,0042	-0,0100	-0,0097	-0,0039	-0,0058	pl^2
„ $(+M_g) =$	0	0,0102	0,0151	0,0136	0,0060	-0,061	pl^2
„ $(+M_d) =$	0	0,0168	0,0225	0,0222	0,0164	0,0065	pl^2

Podług tych i poprzednio obrachowanych wartości wykresiliśmy rys. 14.



Rys. 14.

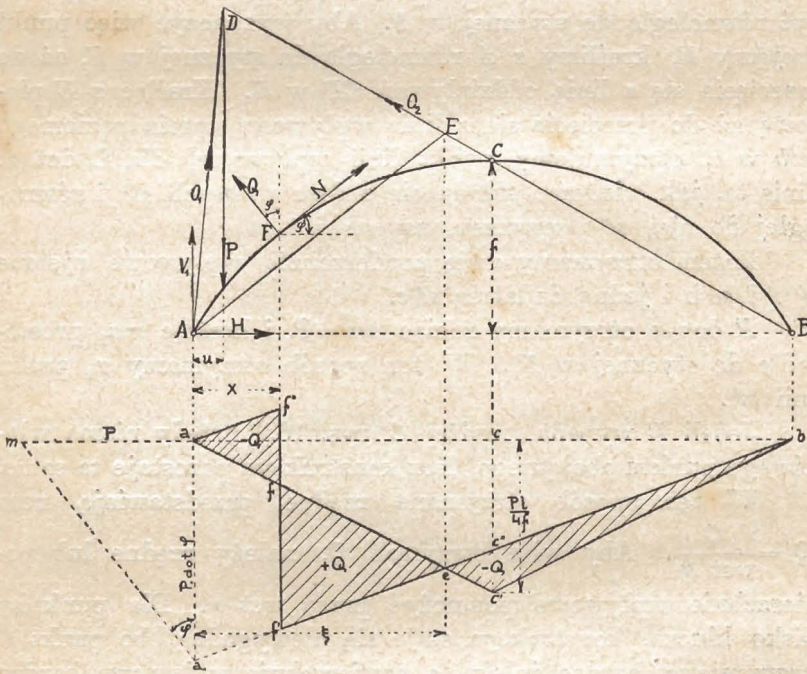
Jeżeli łuk obciążymy układem ciężarów skupionych, to dla najw $(+M)$ jeden ciężar ma stać na przekroju, a ciężary

¹⁾ Dr. Thullie: Podr. teorii mostów str. 42 i nast.

jednostkowe na długościach AD i DE mają być o ile możności równe. Dla najw ($-M$) ma jeden ciężar stać w kluczu, a długości EC i CB mają być o ile można równo obciążone¹⁾ (rys. 10. i 11.).

§ 6. Siły poprzeczne.

Przypuśćmy, że na łuk ABC (rys. 15.) działa siła P w odstępnie u od podpory A i chodzi nam o wyznaczenie siły poprzecznej Q w punkcie F . Jak wiemy, siła poprzeczna²⁾ jest to składowa, prostopadła do osi, wypadkowej wszystkich sił



Rys. 15.

działających po lewej stronie przekroju. Składamy więc wszystkie siły po lewej stronie przekroju leżące, a więc w wypadku naszym: V_1 , H i P w wypadkową i rozkładamy ją w kierunku stycznym do osi w punkcie F i w kierunku prostopadłym, przez co otrzymamy dwie składowe: siłę poprzeczną Q i siłę podłużną N .

¹⁾ Thullie: Podr. teor. mostów str. 42. i następne.

²⁾ Thullie: Statyka bud. str. 18. i 384.

Nazwijmy Ω siłę poprzeczną dla belki w dwu punktach podpartej, to otrzymamy

$$Q = \Omega \text{ dost } \varphi - H \text{ wst } \varphi, \text{ albo}$$

$$\frac{Q'}{\text{wst } \varphi} = \Omega \text{ dot } \varphi - H \quad (28)$$

Rzędne zatem linii wpływowej równają się różnicy rzędnych Ω dot φ i H .

Punkt przecięcia się tych linii otrzymamy dla $Q' = 0$. Będzie to punkt obojętny E . Jeżeli więc w E stoi ciężar, a Q ma być równe 0, to wypadkowa (tutaj oddziaływanie O_1) musi być równoległą do stycznej w F . Aby wyznaczyć więc punkt obojętny E , kreślimy z A równoległą do stycznej w F , aż do przecięcia się z linią oddziaływań CD w E . Kreśląc z E pionową aż do przecięcia się z linią wpływową parcia poziomego $ac'b$ w e , otrzymujemy punkt linii wpływowej dla Ω dot φ . Linia ta, jak wiadomo składa się z dwu prostych bf' i równoległej do niej af'' , przyczem $aa_1 = P$ dot φ .

Zatem otrzymamy dwie powierzchnie wpływowe ujemne $af''f$ i $ec'b$ i jedną dodatnią $ff'e$.

P dot φ otrzymamy robiąc $am = P$, i kreśląc ma_1 prostopadle do stycznej w F_1 . W ten sposób otrzymamy a_1 punkt linii bf' .

Jeżeli E wypada poniżej C (rys. 16.), wtedy niema właściwego punktu obojętnego, lecz konstrukcyja pozostaje ta sama.

W ten sposób otrzymane rzędne przedstawiają nam

$Q' = \frac{Q}{\text{wst } \varphi}$. Aby więc otrzymać Q , należy rzędne lub powierzchnie wpływowe pomnożyć przez $\text{wst } \varphi$. Dla punktów blisko klucza, konstrukcyja staje się niewygodną, bo punkt f' otrzymujemy bardzo daleko, a powierzchnię wpływową bardzo wielką, zaś czynnik $\text{wst } \varphi$ bardzo mały.

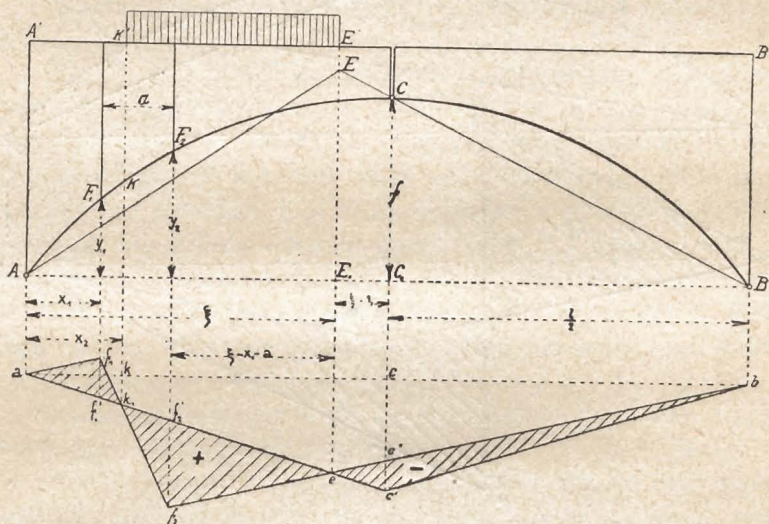
W obec tego, że dla małego kąta φ jest $\text{dost } \varphi \doteq 1$, zaś $\text{wst } \varphi \doteq 0$, więc dla przekrojów blisko klucza będzie w przybliżeniu po wstawieniu tych wartości w równanie 28:

$$Q = \Omega \quad (29)$$

jak dla belki prostej. Z równania 28 otrzymujemy nieco większe wartości, jak z równania 29. W przybliżeniu więc możemy linię wpływową dla przekrojów blisko klucza wykreślić jak dla belki prostej.

§ 7. Największe siły poprzeczne.

Z kształtu linii wpływowej sił poprzecznych (rys. 18.) wynika bezpośrednio najniekorzystniejsze obciążenie łuku. Widzimy mianowicie z rys. 18., że istnieją tu dwa punkty



Rys. 18.

obojętne K i E . Dla najw (+ Q) ma być łuk między tymi punktami obojętnymi obciążony, dla najw ($-Q$) reszta belki, a więc długości AK i EB .

Jeżeli łuk jest obciążony układem ciężarów skupionych, to dla najw (+ Q) jeden z ciężarów ma stać na prawej poprzecznicy F_2 , a ciężary jednostkowe na długościach KF_2 i F_2E mają być, o ile możliwości, równe. Podobne prawidło istnieje dla najw ($-Q$), dla którego ciężary muszą stać na lewej poprzecznicy F_1 i w kluczu C .

Jeżeli obciążymy łuk ciężarem jednostajnie rozłożonym, to możemy napisać:

$$\text{najw (+} Q) = +p \cdot k_1 f_2 e \cdot \text{wst } \varphi = \frac{p}{2} (\xi - x_2) f_2 f_2' \text{wst } \varphi$$

$$\text{Z rysunku mamy: } f_2 f_2' = c' c'' \frac{\xi - x_1 - a}{\frac{1}{2} - \xi}$$

chodzi teraz o wyznaczenie $c' c''$ i x_2 . Jak w § 6. mamy:

$$cc'' = \frac{l\xi}{4f(l-\xi)} \quad \text{stad} \quad c'c'' = \frac{l}{4f} \cdot \frac{l-2\xi}{l-\xi}$$

Z rysunku mamy dalej:

$$x_2 : (\xi - x_2) = f_1 f_1' : f_2 f_2' = x_1 : (\xi - x_1 - a)$$

$$\text{zatem: } x_2 : \xi = x_1 : (\xi - a) \quad \text{więc: } x_2 = \frac{\xi \cdot x_1}{\xi - a} \quad (30)$$

Wstawmy te wartości w równanie dla:

najw (+Q), a otrzymamy:

$$\text{najw (+Q)} = \frac{P}{2} \text{wst} \varphi \left(\xi - \frac{\xi x_1}{\xi - a} \right) \cdot \frac{l-2\xi}{l-\xi} \cdot \frac{\xi - x_1 - a}{l} \cdot \frac{l}{2-\xi} \cdot \frac{1}{4f}$$

czyli:

$$\text{najw (+Q)} = \frac{pl \text{wst} \varphi}{4f} \cdot \frac{\xi(\xi - x_1 - a)^2}{(l-\xi)(\xi - a)} \quad (31)$$

Dla $a=0$, a więc dla obciążenia bezpośredniego, zmieniając x_1 na x , otrzymujemy:

$$\text{najw (+Q)} = \frac{p \cdot l \cdot \text{wst} \cdot \varphi}{4f} \cdot \frac{(\xi - x)^2}{l - \xi} \quad (32)$$

Podobnie otrzymamy: najw (−Q) = −p · wst $\varphi(af_1 k_1 + ec'b)$

$$= -\frac{p}{2} \text{wst} \cdot \varphi \{ x_2 f_1 f_1' + (l - \xi) \cdot c'c'' \}$$

$$\text{Z poprzedniego mamy: } f_1 f_1' = f_2 f_2' \cdot \frac{x_1}{\xi - x_1 - a} = \frac{2c'c'' \cdot x_1}{l - 2\xi}$$

$$\text{zatem: najw (−Q)} = -\frac{p}{2} \text{wst} \cdot \varphi \cdot c'c'' \left\{ \frac{2x_1 x_2}{l - 2\xi} + (l - \xi) \right\}$$

a po wstawieniu wartości za x_2 i $c'c''$

$$\text{najw (−Q)} = -\frac{pl \cdot \text{wst} \varphi}{8f(l-\xi)(\xi-a)} \left\{ 2\xi x_1^2 + (l-\xi)(l-2\xi)(\xi-a) \right\} \quad (33)$$

dla $a=0$ i $x_1=x$ będzie:

$$\text{najw (−Q)} = -\frac{pl \text{wst} \varphi}{8f(l-\xi)} \left\{ 2x^2 + (l-\xi)(l-2\xi) \right\} \quad (34)$$

Wzory te możemy w innej formie przedstawić. Z rysunku bowiem wynika że:

$$\xi \text{ stycz} \cdot \varphi = EE_1 \quad \text{zatem}$$

$$\xi \text{ stycz} \varphi : f = (l - \xi) : \frac{l}{2} \quad \text{czyli}$$

$$\text{stycz} \varphi = \frac{2f(l-\xi)}{l\xi} \quad (35)$$

$$\text{zaś } \xi = \frac{2fl}{2f + l \text{ stycz} \varphi} \quad (36)$$

Wstawiając te wartości w równania 31, 32, 33 i 34 otrzymamy:

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p(\xi - x_1 - a)^2}{2(\xi - a)} \text{ dost } \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

dla $a=0$ i $x_1=x$ będzie:

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p(\xi - x)^2}{2\xi} \cdot \text{dost } \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Dalej otrzymamy podobnie:

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{p \text{ dost } \varphi}{4\xi(\xi - a)} \left\{ 2\xi x_1^2 + (l - \xi)(l - 2\xi)(\xi - a) \right\} \quad . \quad . \quad (39)$$

a dla $a=0$ i $x_1=x$ będzie:

$$\text{najw } (-Q) = -\frac{p \cdot \text{dost } \varphi}{4\xi} \left\{ 2x^2 + (l - \xi)(l - 2\xi) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Dla obciążenia całkowitego ciężarem własnym otrzymamy

$$Q_g = \frac{g \text{ dost } \varphi}{4\xi(\xi - a)} \left[2\xi(\xi - x_1 - a)^2 - 2\xi x_1^2 - (l - \xi)(l - 2\xi)(\xi - a) \right] \quad . \quad (41)$$

a bez względu na poprzecznice a więc dla $a=0$ i $x_1=x$ będzie:

$$Q_g = \frac{g \cdot \text{dost } \varphi}{4} \left[2(\xi - x)^2 - 2x^2 - (l - \xi)(l - 2\xi) \right]$$

$$Q_g = \frac{g \cdot \text{dost } \varphi}{4\xi} \left[\xi(3l - 4x) - l^2 \right] \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Dla łuku parabolicznego otrzymamy:

$$\text{stycz } \varphi = \frac{y_2 - y_1}{a}; \text{ ponieważ zaś}$$

$$y_1 = \frac{4f}{l^2} x_1(l - x_1); \text{ i } y_1 = \frac{4f}{l^2} (x_1 + a)(l - x_1 - a)$$

$$\text{więc} \quad \text{stycz } \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_1 - a)$$

a ze względu na równ. 35. jest:

$$\text{stycz } \varphi = \frac{2f(l - \xi)}{l\xi} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_1 - a)$$

więc odległość punktu obojętnego

$$\xi = \frac{l^2}{3l - 4x_1 - 2a} \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

a dla $a=0$ i $x_1=x$ będzie

$$\xi = \frac{l^2}{3l - 4x} \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

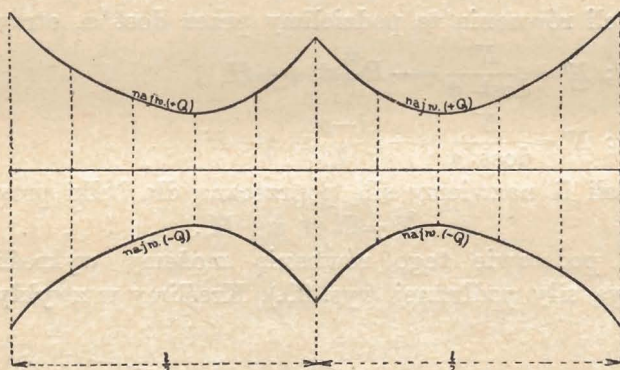
Wstawiając wartość tą za ξ w równanie 38., 40. i 42. otrzymamy dla łuku parabolicznego bez uwzględnienia poprzecznic:

$$\text{najw } (\pm Q) = \pm \frac{P(l^2 - 3lx + 4x^2)^2}{2l^2(3l - 4x)} \text{ dost } \varphi \quad (45)$$

zaś

$$Q_\varphi = 0 \quad (46)$$

Zatem: Dla łuku parabolicznego siła poprzeczna ze względu na ciężar własny jest równa zeru, to znaczy, że linia ciśnienia wpada w oś.



Rys. 19.

W celu wykreślenia kształtu linii najw. $(\pm Q)$, obliczamy dla poszczególnych wartości x , wielkość siły poprzecznej z równania 45. I tak:

dla $\frac{x}{l} =$	0;	0,1;	0,2;	0,3;	0,4;	0,5;	
najw $(\pm Q) =$	$\pm 0,167$;	$\pm 0,105$;	$\pm 0,071$;	$\pm 0,059$;	$\pm 0,069$;	$\pm 0,125$	pl dost φ
stycz $\varphi =$	0,4;	0,32;	0,24;	0,16;	0,08;	0	

Znając wartości na stycz φ , możemy obliczyć odpowiednią dost φ , którą to wartością pomnożymy wyniki otrzymane na najw $(\pm Q)$.

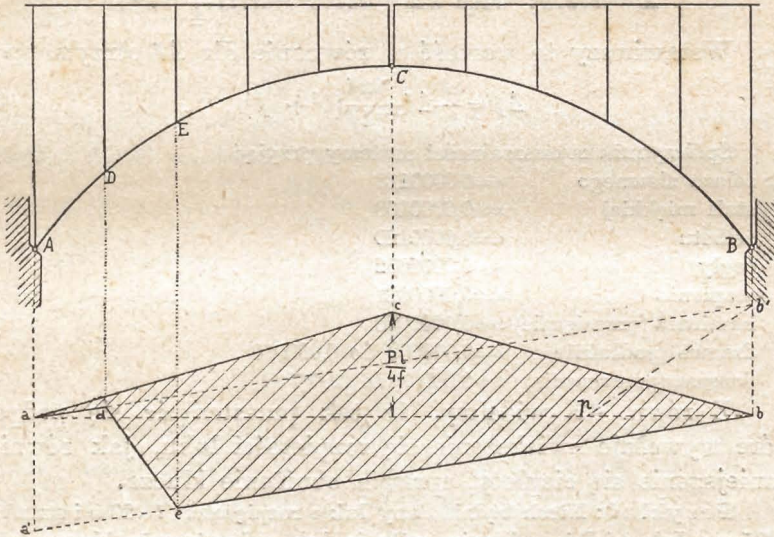
W ten sposób otrzymamy:

najw $(\pm Q) =$	0,155;	0,100;	0,069;	0,052;	0,069;	0,125	pl.
------------------	--------	--------	--------	--------	--------	-------	-----

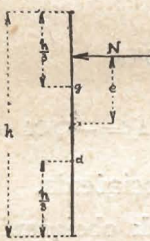
Podług tych wartości wykreślone linie (rys. 19.) przedstawiają najw $(\pm Q)$:

§ 9. Odkształcenie łuku z powodu zmiany ciepłoty i przesunięcia podpór.

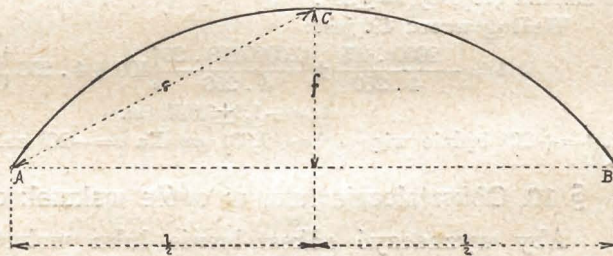
Niechaj przez przesunięcie się podpór powiększy się rozpiętość łuku o Δl (rys. 22.), a równocześnie zmieni się ciepłota o $\pm t^0$.



Rys. 21.



Rys. 21 a.



Rys. 22.

Z rys. 22. wynika $f = \sqrt{s^2 - \frac{l^2}{4}}$

Stąd zmiana strzałki: $\Delta f = \frac{1 \pm 2s \Delta s - \frac{l}{2} l \Delta l}{\sqrt{s^2 - \frac{l^2}{4}}}$

czyli: $\Delta f = -\frac{l}{4f} \Delta l \pm \frac{s \Delta s}{f}$

Znak $\pm$ wskazuje, że łuk z powodu zmiany ciepłoty zniża się lub podnosi. Jeżeli α oznacza współczynnik rozszerzalności, a s długość cięciwy łuku, to

$$\Delta s = \alpha \cdot t \cdot s; \text{ więc } s \Delta s = \alpha \cdot t \cdot s^2 = \alpha \cdot t \left(\frac{l^2}{4} + f^2 \right)$$

Wstawiając tę wartość w równanie dla Δf otrzymamy

$$\Delta f = \frac{l}{4f} \Delta l \pm \frac{\alpha t}{4f} (l^2 + 4f^2) \quad (49)$$

Współczynnik rozszerzalności możemy przyjąć

dla żelaza zlewnego	$\alpha = 0,0000118$
„ stali miękkiej	$\alpha = 0,0000108$
„ żelbetu	$\alpha = 0,0000120$
„ cegły	$\alpha = 0,0000052$
„ wapienia	$\alpha = 0,0000081$
„ kamienia (przeciętnie)	$\alpha = 0,0000070$
„ drzewa (podłużnie)	$\alpha = 0,000003 \text{ do } 0,000010$
„ drzewa (poprzecznie)	$\alpha = 0,00003 \text{ do } 0,00006$

Z równ. 49. widzimy, że tak przesunięcie się podpór, które wywołuje zwiększenie się rozpiętości łuku, jak również zmniejszenie się ciepłoty, sprawia obniżenie klucza.

Przykład: Niech będzie dany łuk o rozpiętości: $l = 20 \text{ m}$ i strzałce: $f = 2,5 \text{ m}$. Jak wielkiem będzie zniżenie lub podwyższenie klucza łuku, jeżeli przesunięcie $\Delta l = 0,5 \text{ cm}$, współczynnik rozszerzalności $\alpha = 0,0000118$, zaś zmiana ciepłoty $t = +20^\circ$?

Według wzoru 49. jest:

$$\Delta f = -\frac{2000 \cdot 0,5}{4 \cdot 250} \pm \frac{0,0000118 \cdot 20}{4 \cdot 250} \{400 + 4 \cdot 250\} 10^4 \text{ cm}$$

$$\Delta f = -1,0 + 3,304 \text{ cm.}$$

dla $t = +20^\circ$ będzie więc $\Delta f = +2,304 \text{ cm}$ dla $t = -20^\circ$ zaś $\Delta f = -4,304 \text{ cm}$.

§ 10. Odkształcenie łuku w ogóle wskutek obciążenia.

Aby wyznaczyć odkształcenie łuku wskutek obciążenia, odwołujemy się do wywodu zasadniczych wzorów, dla odkształcenia łuku, podanych w podręczniku „Statyki Budowli”¹⁾.

Niech będzie ACB osią łuku (rys. 23.), którego długość od pewnego punktu A nazwijmy $s = AD$, kąt zaś nachylenia stycznej w punkcie D do poziomu niech będzie φ (dodatni licząc w kierunku wskazówki na zegarze). Wskutek obciążenia zmienia się ilość φ i ilość s o $\Delta\varphi$ i Δs .

¹⁾ Dr. Thullie: Statyka Budowli str. 409.

Wtedy

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} dx + \int_0^x \Delta \varphi \cdot dy \\ \Delta y &= \int_0^x \frac{\Delta ds}{ds} \cdot dy - \int_0^x \Delta \varphi \cdot dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Δds jest to zmiana długości nieskończenie małej cząstki łuku ds , więc

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{N}{\varepsilon A} = -\frac{\nu}{\varepsilon} \dots \dots \dots (51)$$

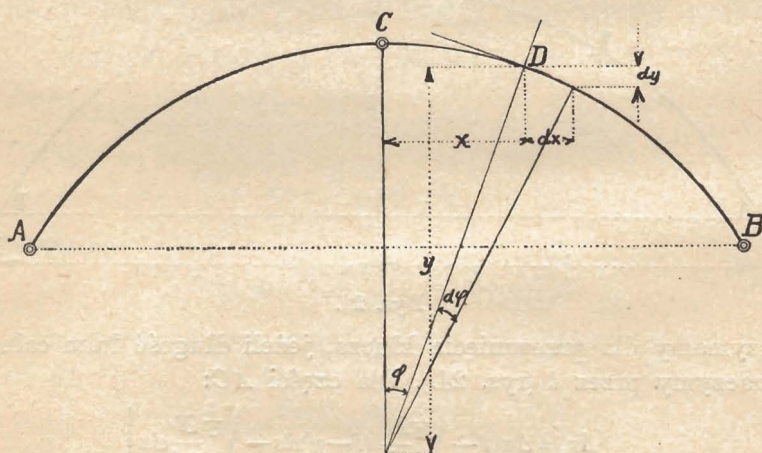
przyczem N oznacza siłę podłużną, a A powierzchnię przekroju. Dajemy znak $-$, bo N oznaczając ciśnienie, skracza łuk.

również
$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{\varepsilon I} \dots \dots \dots (52)$$

Scałkowawszy teraz równania 51. i 52. otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= -\int_0^x \frac{P}{\varepsilon A} ds \\ \Delta \varphi &= -\int_0^x \frac{M}{\varepsilon I} ds \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

Gdy kształt łuku jest dany, wtedy znaną jest zależność między zmiennymi x , y , s i φ , — a zapomocą powyższych równań, możemy wyznaczyć odkształcenie łuku.



Rys. 23.

Jeżeli ilości, odnoszące się do początku łuku, (lewego węzłowia) A , oznaczmy znaczkami $_0$, a do punktu B znaczkami $_1$, to otrzymamy całkując częściowo:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 - \Delta x_0 &= \Delta \varphi_1 y_1 - \Delta \varphi_0 y_0 - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\Delta d\varphi}{ds} y ds + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Delta ds}{ds} dx \\ \Delta y_1 - \Delta y_0 &= -\Delta \varphi_1 y_1 + \Delta \varphi_0 x_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\Delta d\varphi}{ds} x ds + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Delta ds}{ds} dy \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Zważywszy, że:

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\Delta d\varphi}{ds} ds,$$

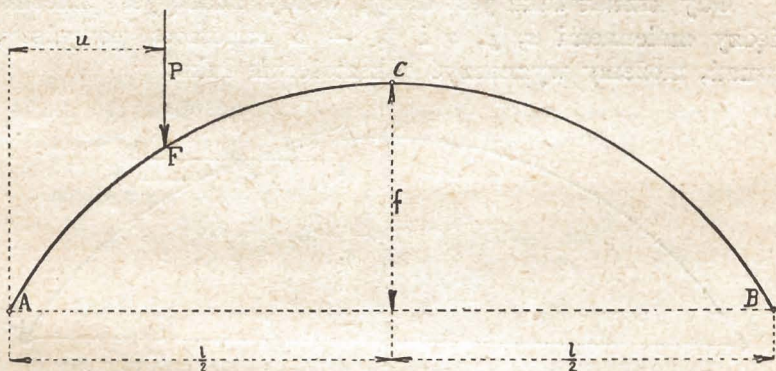
zaś: $\frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{\varepsilon I}; \quad \frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{N}{\varepsilon A},$

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_1 - \Delta x_0 &= \Delta \varphi_0 (y_1 - y_0) - \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{\varepsilon I} (y_1 - y_0) ds - \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{\varepsilon A} dx \\ \Delta y_1 - \Delta y_0 &= -\Delta \varphi_0 (x_1 - x_0) + \int_{s_0}^{s_1} \frac{M}{\varepsilon I} (x_1 - x_0) ds - \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{\varepsilon A} dy \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

§ 11. Odkształcenie łuku trójpřegubowego wskutek obciążenia.

Dla łuku trójpřegubowego nieznaną jest zmiana kąta w lewym węzłowie $\Delta \varphi_0$. Nazwijmy zmianę kąta w kluczu $\Delta \varphi_0$ i zastosujmy równanie 53. do obydwu połówek łuku, to



Rys. 24.

otrzymamy dla przesunięcia klucza, jeżeli długość łuku całego oznaczmy przez l (rys. 24.). Dla części AC:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_c &= \Delta \varphi_0 f - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{\varepsilon I} (f - y) ds - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N}{\varepsilon A} dx \\ \text{Dla części CB:} \\ -\Delta x_c &= -\Delta \varphi_0 f + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M}{\varepsilon I} y ds - \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{N}{\varepsilon A} dx \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Podobnie:

$$\begin{aligned} \Delta y_c &= -\Delta \varphi_0 \frac{l}{2} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{\varepsilon I} \left(\frac{l}{2} - x \right) ds - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N}{\varepsilon A} dy \\ -\Delta y_c &= +\Delta \varphi_0 \frac{l}{2} + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M}{\varepsilon I} (l-x) ds - \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{N}{\varepsilon A} dy \end{aligned} \quad (57)$$

Jeżeli teraz dodamy oba równania 56. i oba 57., a wyrugujemy Δx_c i Δy_c , następnie zaś dodamy te równania a wyrugujemy $\Delta \varphi_c$, to po uproszczeniu otrzymamy zmianę kąta $\Delta \varphi_0$:

$$\Delta \varphi_0 = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{\varepsilon I} \left(1 - \frac{y}{2f} - \frac{x}{l} \right) ds + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N}{\varepsilon A} \left(\frac{dx}{2f} - \frac{dy}{l} \right) \quad (58)$$

Ostatecznie zaś zmianę kąta w kluczu $\Delta \varphi_c$ otrzymamy z równ 56.:

$$\Delta \varphi_c = \Delta \varphi_0 - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{\varepsilon I} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{\varepsilon I f} dx - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{N}{l A f} dx \quad (59)$$

Dla łuku parabolicznego mamy:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$

Jeżeli łuk jest płaski, możemy przyjąć: $ds=dx$ zaś $N=H$. Jeżeli zaś dalej przyjmiemy I i A jako stałe, to gdy siła P działa w punkcie F , przyczem odstęp jej od lewej podpory $u < \frac{l}{2}$, wstawić możemy w równ. 58. dla $u > x$:

$$M = \frac{P(l-u)x}{l} - \frac{2Pu}{l^2}(l-x); \text{ a dla } u < x:$$

$$M = \frac{Pu}{l}(l-u) - \frac{2Pu}{l^2}x(l-x)$$

i otrzymamy:

$$-\Delta \varphi_0 = \frac{Pu[l^3 - 5(l-u)^3]}{30\varepsilon I l^2} - \frac{Pul}{4\varepsilon A f^2} \quad (60)$$

Podobnie też otrzymamy zmianę kąta $\Delta \varphi_1$ na prawej podporze B :

$$\Delta \varphi_1 = \frac{Pu[l^3 - 5u^2(l-u)]}{30\varepsilon I l^2} - \frac{Pul}{4\varepsilon A f^2} \quad (61)$$

Znając $\Delta \varphi_0$ możemy z równ. 55. wyznaczyć Δx i Δy dla dowolnego punktu łuku. Zrobimy to najpierw dla $x=u$, następnie zaś dla $x=\frac{l}{2}$. I tak dla $x=u$ będzie:

$$\Delta x_u = -\frac{Pfu^2}{15\varepsilon Il^4} \left[2(l-u)[l^3 - 5(l-u)^3] + u[5l(2l^2 - 9ul + 11u^2) - 16u^3] \right] + \frac{Pu^2}{2\varepsilon Afl}(l-2u) \quad (62a)$$

$$\Delta y_u = \frac{Pu^2}{30\varepsilon Il^2} [l^3 - 5(l-u)^3] + 5u[(l-u)^2 - lu] + \frac{Pu^2}{4\varepsilon Af^2 l^2} [l^3 + 8f^2(l-u)] \quad (62b)$$

Zaś dla $x = \frac{l}{2}$ otrzymamy:

$$\Delta x_c = \frac{Puf}{6\varepsilon Il^2} \left[\frac{l^3}{8} - u^2(l-u) \right] \quad (63a)$$

$$\Delta y_c = \frac{Pu}{480\varepsilon Il} \left[3l^3 - 40u^2(l-u) \right] - \frac{Pu(l^2 + 4f^2)}{8\varepsilon Af^2} \quad (63b)$$

Zmianę kąta w kluczu $\Delta\varphi_c$ dla łuku parabolicznego otrzymamy wstawiając w równ. 59. odpowiednie wartości za $\Delta\varphi_0$, M , i y :

$$\Delta\varphi_c = -\frac{Pu}{120\varepsilon Il^2} \left[l^3 + 20u^2(l-u) \right] - \frac{Pul}{4\varepsilon Af^2} \quad (64)$$

Równania 63a, 63b i 64. ważne są tylko dla $u < \frac{l}{2}$. Gdy ciężar działa po prawej stronie łuku, to możemy użyć tych samych wzorów, ale musimy liczyć u od prawego przegubu węzłowego, lub przyjąć: $(l-u)$ zamiast u .

Jeżeli ciężar P działa w kluczu, to otrzymamy z równań 63a, 63b i 64. dla $u = \frac{l}{2}$:

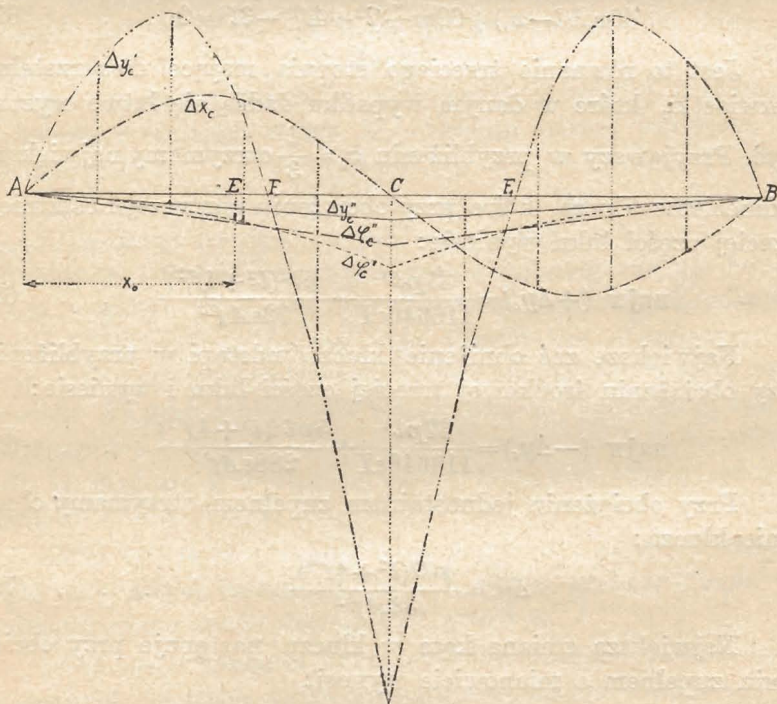
$$\left. \begin{aligned} \Delta x_c &= 0 \\ \Delta y_c &= -\frac{Pl^3}{480\varepsilon Il} - \frac{Pl(l^2 + 4f^2)}{16\varepsilon Af^2} \\ \Delta\varphi_c &= -\frac{7Pl^3}{480\varepsilon Il} - \frac{Pl^2}{8\varepsilon Af^2} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Wstawiając w równania 63., 64. i 65. różne wartości na iloczyn $\frac{u}{l}$ otrzymamy różne wyniki, które zestawimy w tabelce umieszczonej poniżej. Rozkładamy przytem Δy_c na dwie części $\Delta y'_c$ i $\Delta y''_c$ zaś $\Delta\varphi_c$ na $\Delta\varphi'_c$ i $\Delta\varphi''_c$ tak, że $\Delta y_c = \Delta y'_c + \Delta y''_c$; zaś $\Delta\varphi_c = \Delta\varphi'_c + \Delta\varphi''_c$. Otrzymane z rachunku wartości przedstawiamy:

dla :

$\frac{u}{l}=0,0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
$\Delta x_c=0$	0,0019	0,0031	0,0031	0,0019	0	$\frac{Pl^2}{\varepsilon I}$
$\Delta y'_c=0$	0,00055	0,00075	0,09031	-0,0007	-0,0021	$\frac{Pl^3}{\varepsilon I}$
$\Delta y''_c=0$	-0,0125	-0,0250	-0,0375	-0,0500	-0,0625	$\frac{Pl(l^2+4f^2)}{\varepsilon Af^2}$
$\Delta \varphi'_c=0$	-0,00098	-0,00293	-0,00565	-0,00973	-0,01468	$\frac{Pl^2}{\varepsilon I}$
$\Delta \varphi''_c=0$	-0,025	-0,050	-0,075	-0,1	-0,125	$\frac{Pl^2}{\varepsilon Af^2}$

Na podstawie powyższych wartości wykreślimy linie wpływowe dla Δx_c ; $\Delta y'_c$; $\Delta y''_c$; $\Delta \varphi'_c$ i $\Delta \varphi''_c$ ¹⁾ (rys. 25.).



Rys. 25.

Z kształtu linii wpływowych łatwo poznać możemy sposób obciążenia belki układem ciężarów skupionych dla największych odkształceń.

¹⁾ Porównaj też Jacquier M. Le calcul graphique des ponts en arc à triple articulation par la méthode des lignes d'influence.

Jeżeli łuk obciążony jest ciężarem jednostajnie rozłożonym, to największe odchylenie poziome klucza nastąpi dla obciążenia jednej połowy łuku. Otrzymamy wtedy:

$$\Delta x_c = \frac{pf}{6\epsilon Il^2} \int_0^{\frac{l}{2}} u \left[\frac{l^3}{8} - u^2(l-u) \right] du = \frac{pf l^3}{960\epsilon I} \quad (66)$$

Ponieważ $\Delta y_c = \Delta y'_c + \Delta y''_c$ a drugi wyraz jest ujemny, więc punkt obojętny E będzie leżał nieco na lewo od punktu F przecięcia się linii wpływowej $\Delta y'_c$ z osią. Jeżeli $AE = x_0$ to:

$$0 = \frac{Px_0}{480\epsilon Il} \left[3l^3 - 40x_0^2(l-x_0) \right] - \frac{Px_0(l^2 + 4f^2)}{8\epsilon Af^2}$$

Wstawiawszy $I = m.Af$, otrzymamy:

$$40x_0^2(l-x_0) + 60m \frac{l}{f} (l^2 + 4f^2) - 3l^3 = 0 \quad (67)$$

Jest to równanie trzeciego stopnia mające dwa rzetelne pierwiastki, które w danym wypadku dadzą się łatwo wyznaczyć. Przyjawszy w przybliżeniu $x_0 = \frac{l}{3}$ otrzymamy największe podniesienie klucza, które przy obciążeniu pierwszej i ostatniej, trzeciej części łuku wyniesie:

$$\text{najw } (+\Delta y_c) = \frac{37pl^4}{116640\epsilon I} - \frac{pl^2(l^2 + 4f^2)}{72\epsilon Af^2} \quad (68)$$

Największe zaś obniżenie klucza nastąpi w przybliżeniu przy obciążeniu środkowej trzeciej części łuku i wyniesie:

$$\text{najw } (-\Delta y_c) = \frac{37pl^4}{116640\epsilon I} + \frac{5pl^2(l^2 + 4f^2)}{288\epsilon Af^2} \quad (69)$$

Przy obciążeniu jednostajnem zupełnem otrzymamy obniżenie klucza:

$$\Delta y_c = \frac{pl^2(l^2 + 4f^2)}{32\epsilon Af^2} \quad (70)$$

Największa zmiana kąta w kluczu następuje przy obciążeniu zupełnem a mianowicie wynosi:

$$\text{najw } \Delta \varphi_0 = -\frac{2p}{120\epsilon Il^2} \int_0^{\frac{l}{2}} u \left[l^3 + 20u^2(l-u) \right] du - \frac{2pl}{4\epsilon Af^2} \int_0^{\frac{l}{2}} u \cdot du$$

ostatecznie wypada:

$$\text{najw } \Delta \varphi = -\frac{5l^3p}{960\epsilon I} - \frac{pl^3}{16\epsilon Af^2} = -\frac{pl^3}{16\epsilon} \left(\frac{5}{60I} + \frac{1}{Af^2} \right) \quad (71)$$

§ 12. Obliczenie przekroju łuku blaszanego.

Bezpośrednie dokładne wyznaczenie przekrojów łuków blaszanych natrafia na mnogie trudności, albowiem dla oznaczenia największych momentów są potrzebne linie jędrne, których znowu położenie zawisłe jest od wymiarów przekroju. Musimy używać więc metod przybliżonych, które tu kolejno przejdziemy.

1. Obliczenie tymczasowe. Łuki blaszane możemy obliczać w podobny sposób jak belki blaszane proste, a mianowicie podług wzoru $\tau I = M e^1$), jeżeli tylko zamiast momentów osiowych wstawimy momenty jędrne górne i dolne. I tak gdy chodzi o nateżenie τ_d w dolnej warstwie przekroju, bierzemy moment jędrny górny M_g i odstęp krawędzi dolnej łuku od osi obojętnej e_d

$$\tau_d \cdot I = M_g \cdot e_d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72a)$$

Gdy zaś chodzi o nateżenie τ_g w warstwie górnej przekroju, to bierzemy moment dolny M_d i odstęp górnej krawędzi od osi obojętnej e_g

$$\tau_g \cdot I = M_d \cdot e_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72b)$$

Jak wiemy momenty jędrne, górny i dolny, nie są sobie równe, z czego wynika, że jeśli przyjmiemy τ_g i τ_d równe, to przekrój nie będzie symetrycznym, a oś obojętna nie będzie leżała w środku przekroju, lecz nieco się przesunie. Tego przesunięcia osi obojętnej zazwyczaj jednak nie uwzględnia się przy obliczeniu tymczasowem, bo jest ono bardzo małe z tego powodu, że przy mniejszych rozpiętościach, dla których łuków blaszanych właśnie się używa, M_g i M_d mało się od siebie różnią tak, że możemy z wystarczającą dokładnością przyjąć oś obojętną w środku ścianki stojącej.

Aby otrzymać przekrój niesymetryczny, dajemy nakładki bądź to o różnej szerokości, bądź o różnej grubości, bądź też nakładki różne co do szerokości i grubości.

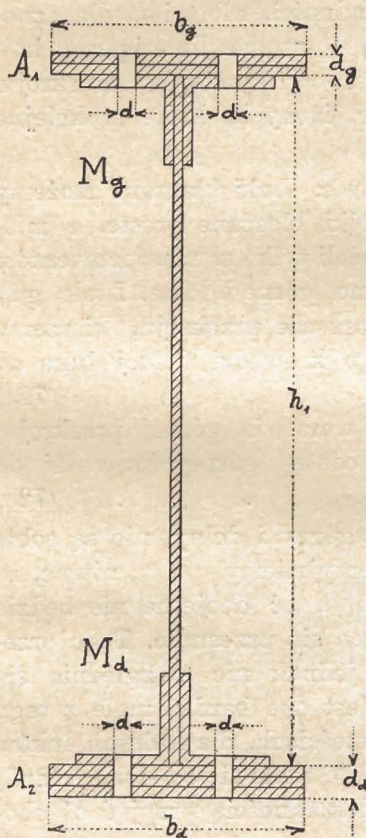
Obliczenie grubości nakładek uskuteczniamy, jak dla belek blaszanych prostych, tylko musimy wprowadzić takie same, jak poprzednio, zmiany. Tak więc dla górnej nakładki będzie powierzchnia jej użyteczna A_1 : (rys. 26.)

$$A_1 = b'_g \cdot d_g = \frac{M_d}{h_1 \cdot \tau} - \frac{2I_1}{h_1(h_1 + 2d_g)} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

¹⁾ Dr. Thullie: Statyka budowli, str. 108 i 387 rów, 577 i dalsze.

zaś dla dolnej nakładki powierzchnia jej użyteczna

$$A_2 = b'_d \cdot d_d = \frac{M_g}{h_1 \tau} - \frac{2I_1}{h_1(h_1 + 2d_d)} \quad (74)$$



Rys. 26.

gdzie b'_g i b'_d jest szerokością nakładki górnej względnie dolnej po odciągnięciu dziur na nity, a więc $b'_g = b_g - 2d$ zaś $b'_d = b_d - 2d$; h_1 wysokością ścianki, τ natężeniem dopuszczalnym na zginanie, I_1 momentem bezwładności ścianki i kątownek po odciągnięciu dziur na nity pionowe.

Przy obliczeniu przekroju tym sposobem zachodzi ta okoliczność, że musimy znać linie i momenty jędrne, do których wyznaczenia, znowu potrzebną jest znajomość przekroju. Musimy więc tu postępować zapomocą prób i liczyć dwa razy, przyczem jako pierwsze przybliżenie możemy przyjąć odstęp linii jędrnych równy przy licznych nakładkach $0,8 h_1$, przy małej ilości nakładek $0,7 h_1$, obliczyć następnie dla tego założenia momenty jędrne i przekrój, poczem wyznaczyć po raz wtóry już dokładnie linie jędrne

i w końcu przeprowadzić cały rachunek po raz drugi.

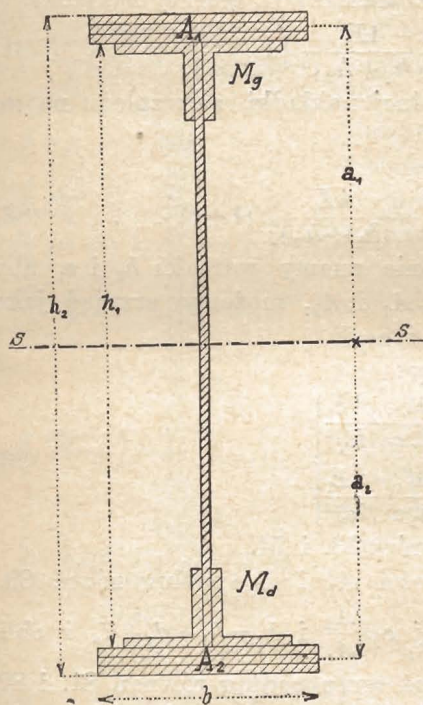
Wysokość łuków blaszanych przyjmujemy równą $\frac{1}{40}$

do $\frac{1}{60}$ rozpiętości. Ściankę dajemy 10 do 15 mm grubą, a to ze względu na to, że działa tu siła podłużna.

2. Sposób Müllera-Breslaua.

Według Müllera-Breslaua, aby odrazu liczyć z większym przybliżeniem grubości nakładek, postępujemy w następujący sposób:

Jeżeli mamy przekrój, którego moment bezwładności ścianki i kątówek ze względu na oś ss nazwiemy I_1 (rys. 27.),



Rys. 27.

przekrój górnej nakładki A_1 , dolnej A_2 , odstępów środków ciężkości nakładek od osi ss a_1 i a_2 , moment ze względu na punkt jądry górny M_g , zaś ze względu na dolny M_d , to moment bezwładności I całego przekroju ze względu na oś ss będzie z wielkiem przybliżeniem:

$$I = I_1 + A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 \quad (75)$$

I tak na podstawie równań 71. i 72. możemy w przybliżeniu napisać, że:

$$M_g = \frac{I \tau_d}{a_2} \quad \text{i} \quad M_d = \frac{I \tau_g}{a_1}$$

Nazwijmy

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\tau_g M_g}{\tau_d M_d} = c \quad (76)$$

W przybliżeniu jest

$$a_1 + a_2 = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (77)$$

więc

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{(h_1 + h_2) \cdot c}{2(1 + c)} \\ a_2 &= \frac{h_1 + h_2}{2(1 + c)} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (78)$$

Jeżeli teraz założymy, że oś obojętna ss ma przechodzić przez środek ciężkości przekroju, czyli że $A_1 a_1 = A_2 a_2$ to równ. 75. możemy w następujący sposób przekształcić:

$$I = I_1 + A_1 a_1 a_1 + A_1 a_1 a_2 = I_1 + A_1 a_1 (a_1 + a_2) = I_1 + A_1 a_1 \frac{h_1 + h_2}{2}$$

$$\text{a ze względu na rów. 78.: } I = I_1 + \frac{A_1 (h_1 + h_2)^2 c}{4(1 + c)} \quad \dots \quad (79)$$

Wedle równań 72. i 78. mamy:

$$I = \frac{M_d a_1}{\tau} = \frac{M_d (h_1 + h_2) c}{2(1 + c) \cdot \tau} \quad \dots \quad (80)$$

więc
$$I_1 + \frac{A_1(h_1 + h_2)^2 c}{4(1+c)} = \frac{M_d(h_1 + h_2)c}{2(1+c)\tau}$$

Stąd możemy wyznaczyć przekrój A_1 górnej nakładki:

$$A_1 = \frac{2M_d}{(h_1 + h_2)\tau} - \frac{4I_1}{(h_1 + h_2)^2} \left(1 + \frac{1}{c}\right) \quad (81)$$

Podobnie przekrój A_2 dolnej nakładki, ze względu na to, że: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{c}$ będzie:

$$A_2 = A_1 c = \frac{2M_g}{(h_1 + h_2)\tau} - \frac{4I_1}{(h_1 + h_2)^2} (1+c) \quad (82)$$

We wzorach 81. i 82. nie znamy wartości h_2 i c , aby więc umożliwić wyznaczenie A_1 i A_2 , możemy przyjąć jako pierwsze przybliżenie: $h_2 = h_1$ i $c = 1$.

W ten sposób otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_d}{h_1 \tau} - \frac{2I_1}{h_1^2} \\ A_2 &= \frac{M_g}{h_1 \tau} - \frac{2I_1}{h_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

zatem wzory podobne do wzorów 73. i 74.

Obliczywszy teraz wartości A_1 i A_2 podług równ. 83., możemy wyznaczyć dokładniej $c = \frac{A_2}{A_1}$ i $h_2 = h_1 + d_g + d_d$ i obliczyć A_1 i A_2 po raz wtóry już teraz podług równań 81. i 82.

Zaznaczyć tu musimy, że przy pierwszym liczeniu możemy wprowadzić jeszcze jedno uproszczenie. Mianowicie wzory 83. możemy ze względu na to, że różnica między M_g i M_d nie jest wielka, napisać ogólnie:

$$A_i = \frac{M_i}{h_1 \tau} - \frac{2I_1}{h_1^2} \quad (84)$$

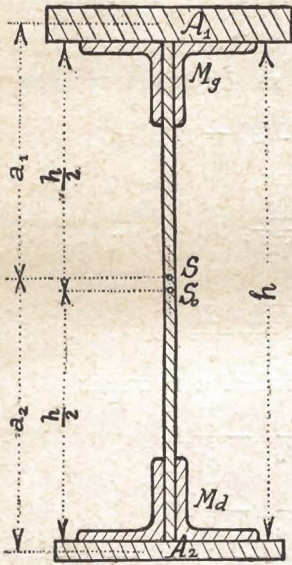
przyczem M_i oznacza większy moment jądry z momentów M_g i M_d , $M_i = M + Pi$, gdzie M jest to moment ze względu na oś, P jest siłą podłużną, zaś i promieniem jądrym.

Stąd:
$$A_i = \frac{M + Pi}{h_1 \tau} - \frac{2I_1}{h_1^2} \quad (85)$$

Do wzoru 84. wprowadzić należy M_i jak największe, co da się wyznaczyć dokładnie, względnie w przybliżeniu dla $x = 0,25 l$. Dla tego położenia musimy wyznaczyć odpowiednie

$$N = \frac{H}{\text{dost } \varphi} \text{ i wstawić wartość } i = \frac{2I}{h_2 A}, \text{ względnie w przybliżeniu}$$

$i = \frac{2I_1}{h_1 A_0}$, gdzie A jest powierzchnią całego przekroju, zaś A_0 przekrojem ścianki i kątownek. Aby zatem otrzymać dokładną



Rys. 28.

wartość na promień jądry należy liczyć najpierw podług wzoru przybliżonego, wynik trochę powiększyć i liczyć po raz drugi według wzoru dokładnego.

3. Sposób Melana. Niech dla przekroju przedstawionego na rys. 28. oznacza A_0 powierzchnię, I_0 moment bezwładności kątownek i ścianki, A_1 i A_2 powierzchnię nakładek, I moment bezwładności całego przekroju $A = A_0 + A_1 + A_2$, którego odstępów środka ciężkości S od środków ciężkości nakładek niech będą a_1 względnie a_2 , to z wielkiem przybliżeniem możemy napisać:

$$A_1 a_1 - A_2 a_2 - A_0 \left(a_2 - \frac{h}{2} \right) = 0$$

i

$$a_1 + a_2 = h,$$

skąd:
$$a_1 = \left(1 - \frac{A_1 - A_2}{A} \right) \cdot \frac{h}{2}, \quad a_2 = \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{A} \right) \cdot \frac{h}{2}$$

Nazwijmy $\frac{A_1 - A_2}{A} = \varphi$, (86)

to będzie:
$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (1 - \varphi) \cdot \frac{h}{2} \\ a_2 &= (1 + \varphi) \cdot \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

W przybliżeniu otrzymamy moment bezwładności I :

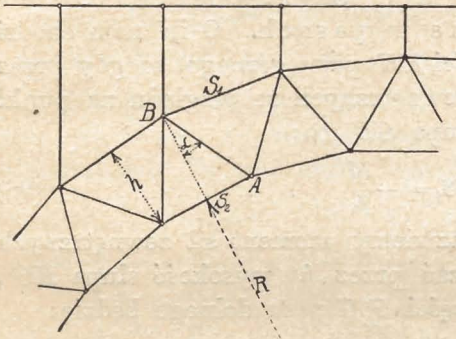
$$I = I_0 + A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_0 \left(\frac{h}{2} - a_1 \right)^2 = I_0 + A(1 - \varphi^2) \frac{h^2}{4} - A_0 \cdot \frac{h^2}{4}$$

Gdy natężenie w A_1 i A_2 ma być równe, to z równań 71. i 72. otrzymamy:

$$\tau = \frac{M_g \cdot a_2}{I} = \frac{M_d \cdot a_1}{I}$$

gdzie M_g i M_d oznaczają momenty jądry górny i dolny.

prętów. Najłatwiej atoli siły wewnętrzne możemy wyznaczyć wprost z linii wpływowych, kreślonych dla sił wewnętrznych

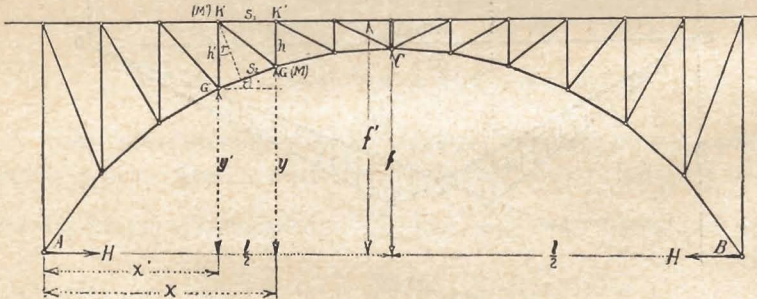


Rys. 29.

w każdej części pasu i w każdym krzyżulcu, z których zarazem też można poznać najniekorzystniejsze obciążenie ciężarem ruchomym. Ostatni ten sposób zaleca się swą prostotą, szczególnie w wypadku obciążenia układem ciężarów skupionych.

A) Jeżeli łuk stanowi belkę kratową o pasach równoległych, na której zapomocą słupów lub filarów pomostowych spoczywa pomost (rys. 29.), to linie jędrne wpadają w pasy, a do obliczenia sił wewnętrznych wystarczy znajomość M i Q , jak dla łuku blaszanego. O ile zatem przez h oznaczmy odstęp pasów łuku, zaś przez α kąt zawarty między krzyżulcem a promieniem łuku, to siła wewnętrzna w pasie górnym jest $S_1 = -\frac{M}{h}$ (93)

Podobnie siła wewnętrzna w pasie dolnym jest $S_2 = \frac{M'}{h}$ (94) gdzie M jest momentem sił zewnętrznych ze względu na punkt



Rys. 30.

A zaś M' ze względu na punkt B. Przytem najniekorzystniejsze obciążenie dla pasów jest takie, jak dla momentów.

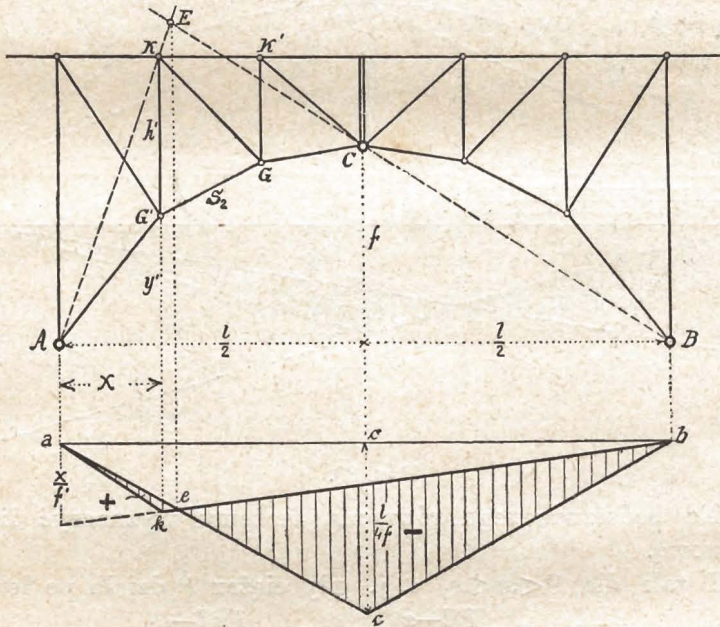
Siła wewnętrzna w krzyżulcach będzie $D = Q \sin \alpha$ (95)

$$S_1 = -\frac{1}{h} (\mathfrak{M} - Hy) = -\frac{y}{h} \left(\frac{\mathfrak{M}}{y} - H \right) \quad (98)$$

$$S_2 = \frac{1}{h'} (\mathfrak{M} - Hf') \text{ siecz } \tau = \frac{f'}{h'} \left(\frac{\mathfrak{M}}{f'} - H \right) \text{ siecz } \tau \quad (99)$$

przyczem f' jest odstęp pasu górnego od prostej AB .

Na podstawie powyższych równań możemy wyznaczyć linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach, które kreślimy podobnie jak dla momentów (rys. 31. i 32.).



Rys. 32. Linia wpływ. siły wewn. S_2 .

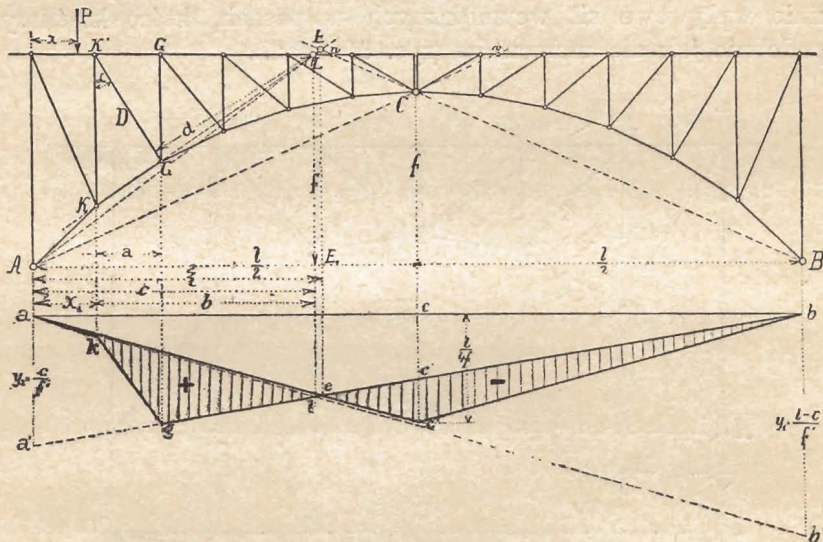
Siłę wewnętrzną w pasie górnym S_1 otrzymamy, mnożąc rzędne powierzchni wpływowej (rys. 31.) odpowiadające ciężarom skupionym, czynnikiem $\frac{y}{h}$, zaś siłę wewnętrzną w pasie dolnym S_2 (rys. 32.), mnożąc czynnikiem $\frac{f'}{h'}$ siecz τ .

b) Siły wewnętrzne w krzyżulcach. W celu wyznaczenia siły wewnętrznej w krzyżulcu $K'G$ utwórzmy moment sił zewnętrznych M ze względu na punkt L przecięcia się części pasów KG i $K'G'$ (rys. 33., 34. i 35.), należących do od-

nośnego przedziału, w którym znajduje się badany krzyżulec. Wtedy $M - D \cdot d = 0$. A że $M = \mathfrak{M} - Hf'$, więc $\mathfrak{M} - Hf' - D \cdot d = 0$.

Z rys. 33. widać, że: $d = b$. dost α ; stąd $D = \frac{\mathfrak{M} - Hf'}{b}$ siecz α

$$D = \left(\frac{\mathfrak{M}}{f'} - H \right) \frac{f'}{b} \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$



Rys. 33.

Na podstawie tego równania możemy wyznaczyć linię wpływową.

I tak dla $0 < x < x_1$ t. j. gdy ciężar P działa po lewej stronie przedziału, $V_1 = \frac{P(l-x)}{l}$, stąd $\mathfrak{M} = \frac{Px(l-c)}{l}$

$$\text{a więc } D = \left\{ \frac{Px(l-c)}{lf'} - H \right\} \frac{f'}{b} \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Zaś dla $l > x > x_1 + a$ t. j. gdy ciężar P działa po prawej stronie przedziału, będzie V_1 jak poprzednio, zaś: $\mathfrak{M} = \frac{P(l-x)c}{l}$.

$$\text{Stąd } D = \left\{ \frac{P(l-x)c}{lf'} - H \right\} \frac{f'}{b} \text{ siecz } \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Podług wzorów 101. i 102. ważnych dla długości x_1 względnie $(l - x_1 - a)$, można wykreślić linię wpływową dla krzyżulec, przyczem $\frac{f'}{b}$ siecz α jako czynnika stałego przy wykresie na-

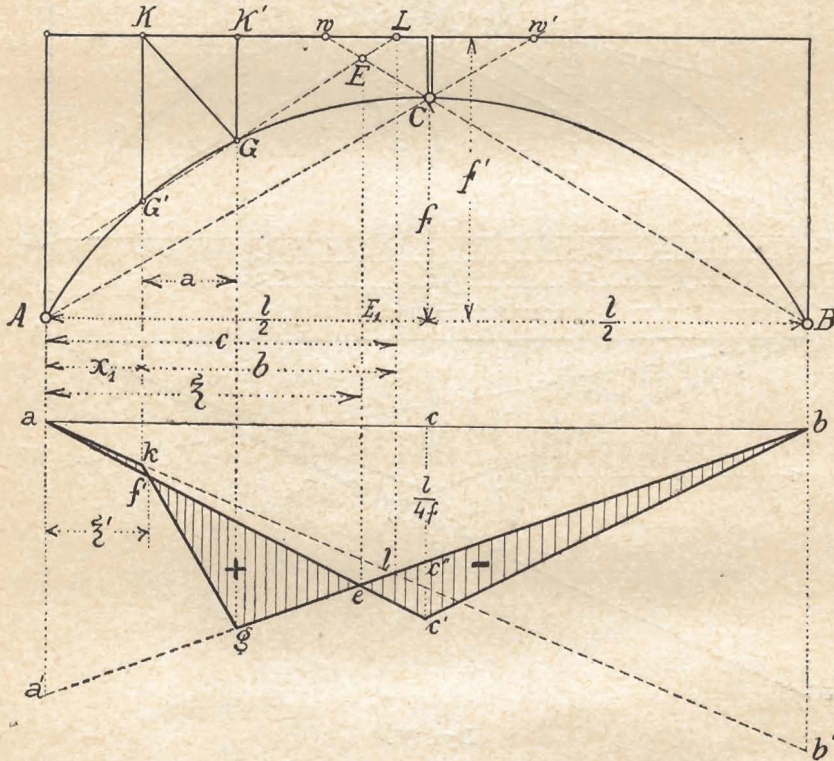
razie nie uwzględniamy, za to otrzymane rzędne powierzchni wpływowej ostatecznie pomnożyć mamy przez ten czynnik. Otrzymujemy więc dwa równania o dwu wyrazach, z których pierwszy

$$y_1 = \frac{Px(l-c)}{l \cdot f'} \quad (101a)$$

względnie

$$y_2 = \frac{P(l-x)c}{lf'} \quad (102a)$$

przedstawia proste ak i gb , drugi wyraz linię wpływową parcia



Rys. 34.

poziomego. Aby wyznaczyć proste, przedstawione równaniami 101a i 102a, założmy, że $P=1$. Dla $x=0$ $y_1=0$, dla $x=l$ $y_1=bb'=\frac{l-c}{f'}$. Z równania drugiego otrzymamy dla $x=0$, $y_2=-aa'=\frac{c}{f'}$, dla $x=l$ $y_2=0$, a więc punkt b . Prosta ab' ważną

zeru, musi być siła wewnętrzna w krzyżulcu $D=0$. Drugi zaś punkt obojętny f leży na przecięciu się linii kg z linią wpływową parcia poziomego (rys. 34. i 35.).

Odstęp tych punktów obojętnych możemy na podstawie rys. 33, 35. obliczyć.

I tak z rysunków tych widzimy, że:

$$(l-\xi):EE_1=\frac{l}{2}:f$$

$$EE_1:\xi=f':c$$

A stąd otrzymamy:

$$(l-\xi):\xi=f':\frac{l}{2}:f.c, \quad l:\xi=\left(\frac{f'.l}{2}+f.c\right):fc$$

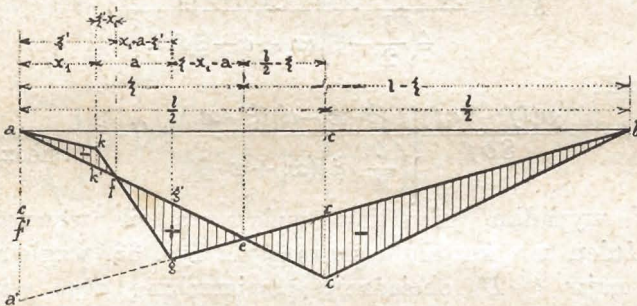
Więc odstęp punktu obojętnego E będzie

$$\xi=\frac{2cfl}{2fc+f'l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

odstęp zaś punktu obojętnego f (rys. 34. i 35.) będzie¹⁾:

$$\xi'=x_1+\frac{ax_1(c-\xi)}{\xi(c-x)-ac} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Znając odstęp punktów obojętnych od lewej podpory, możemy wyznaczyć z kolei największą dodatnią lub ujemną siłę wewnętrzną w danym krzyżulcu. I tak:



Rys. 36.

Z linii wpływowej na rys. 36. wynika, że największa dodatnia siła wewnętrzna w krzyżulcu $K'g$ dla obciążenia ciężarem jednostkowym p jest najw $(+D)=p\frac{f'}{b}.fge$. siecz $\alpha=$

$$=\frac{1}{2}p\frac{f'}{b}gg'(\xi-\xi') \text{ siecz } \alpha.$$

¹⁾ Porównaj Thullie: Linie influencyjne dla łuków trójpřzegubowych. Dřwignia, 1879, str. 62. i 69.

Z rysunku widać, że $gg' : (\xi - x_1 - a) = c'c'' : \left(\frac{l}{2} - \xi\right)$, więc

$$gg' = \frac{c'c''(\xi - x_1 - a)}{\left(\frac{l}{2} - \xi\right)}.$$

Dalej mamy z rysunku $cc'' = \frac{c}{2f'}$,

$$\text{zaś } c'c'' = cc' - cc'' = \frac{l}{4f} - \frac{c}{2f'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{lf' - 2cf}{ff'}.$$

$$gg' = \frac{(lf' - 2cf)(\xi - x_1 - a)}{4\left(\frac{l}{2} - \xi\right)ff'}$$

$$\text{najw } (+D) = \frac{1}{8} p \frac{(lf' - 2cf)(\xi - x_1 - a)(\xi - \xi')}{bf\left(\frac{l}{2} - \xi\right)} \text{ siecz } \alpha \quad (105)$$

Podobnie otrzymamy:

$$\text{najw } (-D) = -\frac{pf'}{2b} \left\{ \xi'KK' + (l - \xi)c'c'' \right\} \text{ siecz } \alpha$$

Z rysunku widzimy, że

$$KK' = \frac{gg'(\xi' - x_1)}{x_1 + a - \xi'}$$

$$KK' = \frac{(lf' - 2cf)(\xi - x_1 - a)(\xi' - x_1)}{4\left(\frac{l}{2} - \xi\right)(x_1 + a - \xi)f'f}.$$

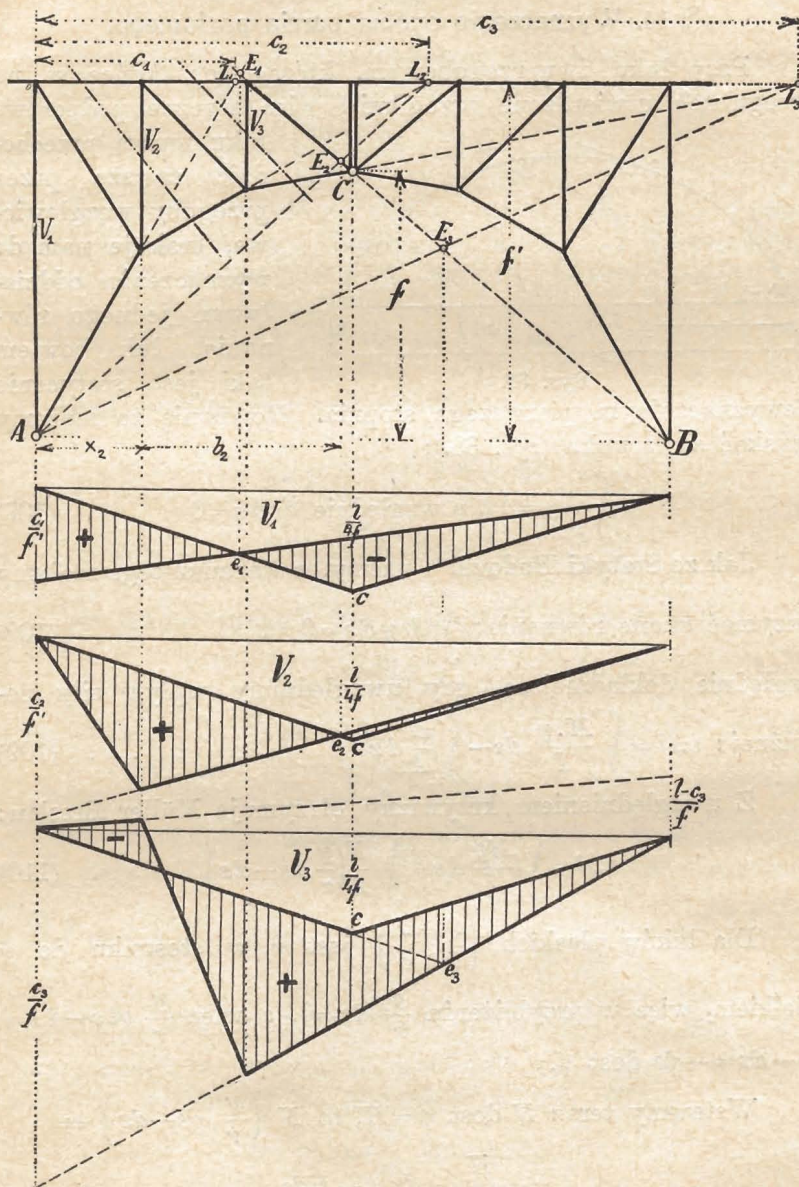
Stąd:

$$\text{najw } (D-) = -\frac{p(lf' - 2cf)}{8bf} \left\{ \frac{\xi'(\xi - x_1 - a)(\xi' - x_1)}{\left(\frac{l}{2} - \xi\right)(x_1 + a - \xi')} + (l - \xi) \right\} \text{ siecz } \alpha \quad (106)$$

W wypadku, gdy linia wpływowa sił wewnętrznych w krzyżulcu ma kształt wskazany na rys. 33. względnie 35., to dla najw $(+D)$ obciążamy powierzchnię *akge* względnie *fc'bgf*, dla najw $(-D)$ zaś powierzchnię *ec'b*, względnie *akf*. Wzory więc powyższe stosownie do tego się zmieniają.

Chcąc wyznaczyć siłę wewnętrzną w słupach, przecinamy je ukośnie równolegle do przekątnej. Linie wpływowe dla sił wewnętrznych w słupach pionowych zmieniają się więc nieco, jak również i czynnik stały $\frac{f'}{b}$ siecz α , który dla $\alpha = 0$ przechodzi w wartość $\frac{f'}{b}$.

Linie te przedstawia rysunek 37 a, b, c.

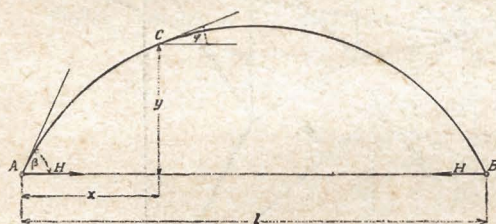


Rys. 37.

II. Łuk dwuprzegubowy.

§ 14. Wyznaczenie ogólne parcia poziomego.

Przy łuku dwuprzegubowym, którego oba końce są na przegubach utwierdzone przegibnie, więc styczne podporowe



Rys. 38.

niewyznaczalnym pierwszego stopnia. Równanie to możemy uzyskać z warunku (rys. 38.):

$$\int_A^B \Delta x = \Delta l, \text{ a względnie } \int_A^B \Delta x = 0 \quad . \quad . \quad (107)$$

Jak ze Statyki Budowli¹⁾ wiemy, z warunku tego możemy

$$\text{otrzymać znane równanie: } \int_A^B M y ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

względnie dokładniejsze, gdy uwzględnimy wpływ siły po-

$$\text{dłużnej: } \varepsilon \Delta l = \int_A^B \frac{M \cdot y}{I} ds - \int_A^B \frac{N}{A} dx \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Z uwzględnieniem krzywizny otrzymuje Müller Breslau:

$$\varepsilon \Delta l = \int_A^B \frac{M y}{I} ds + \int_A^B \frac{N}{A} \left(\frac{y}{r} ds - dx \right) \quad . \quad . \quad (110)$$

Dla łuków płaskich $\left(\frac{f}{l} < \frac{1}{5} \right)$ jest r w stosunku do y

wielkiem, więc w przybliżeniu $\frac{y}{r} ds = 0$, a więc $\frac{y}{r} ds - dx = -dx = -ds$ dost φ .

Wstawmy teraz N dost $\varphi = H$, to $N \left(\frac{y}{r} ds - dx \right) =$

$$-\frac{H}{\text{dost } \varphi} dx = -H ds.$$

¹⁾ Strona 411. i 412.

Wstawmy tę wartość w równanie 110., a otrzymamy:

$$\varepsilon \Delta l = \int_0^l \frac{My}{I} ds - H \int_0^l \frac{ds}{A} \quad (111)$$

Jeżeli ostatecznie w rachunek wprowadzimy średni przekrój łuku A_0 , który będziemy mogli obliczyć z wzoru

$$\frac{l}{A_0} = \int_0^l \frac{ds}{A} = \frac{s_1}{A_1} + \frac{s_2}{A_2} + \frac{s_3}{A_3} + \dots,$$

gdzie l oznacza długość osi łuku, zaś $A_1, A_2, A_3 \dots$ średnie przekroje części łuku o długości $s_1, s_2, s_3, \dots$ i wprowadzimy za M wartość z równania 9. $M = \mathfrak{M} - Hy$, to otrzymamy

$$\varepsilon \Delta l = \int_0^l \frac{\mathfrak{M} y}{I} ds - H \int_0^l \frac{y^2}{I} ds - \frac{Hl}{A_0} \quad . . . (112)$$

Stąd otrzymujemy parcie poziome

$$H = \frac{\int_0^l \frac{\mathfrak{M} y}{I} ds - \varepsilon \Delta l}{\int_0^l \frac{y^2}{I} ds + \frac{l}{A_0}} \quad (113)$$

Dla łuków płaskich jest w przybliżeniu $l = l$, więc

$$H = \frac{\int_0^l \frac{\mathfrak{M} y}{I} ds - \varepsilon \Delta l}{\int_0^l \frac{y^2}{I} ds + \frac{l}{A_0}} \quad (114)$$

Aby obliczyć H dzielimy przeszło na pewną ilość przedziałów o długościach n. p. $a_1, a_2, a_3, \dots a_m \dots$ i całki oznaczone

$\int_0^l \frac{\mathfrak{M} y}{I} ds$ i $\int_0^l \frac{y^2}{I} ds$ rachujemy jako sumy.

Jeżeli przytem wprowadzimy $I' = I$ dost $\varphi = I \frac{dx}{ds}$ (115)

i przyjmiemy, że w jednym przedziale na długości a I' jest stałym, to otrzymamy dla przedziału a_m (rys. 39.)

$$y = y_{m-1} + \frac{x'}{a_m} (y_m - y_{m-1}),$$

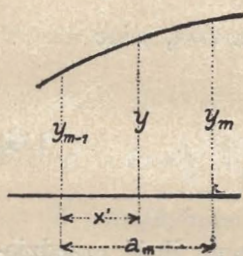
$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{m-1} + \frac{x'}{a_m} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}), \text{ więc}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{I'_m} \int_0^{a_m} \mathfrak{M} y \, dx &= \frac{1}{I'_m} \left[\int_0^{a_m} \mathfrak{M}_{m-1} y_{m-1} \, dx + \int_0^{a_m} \frac{y_m - y_{m-1}}{a_m} \mathfrak{M}_{m-1} x' \, dx + \right. \\
&+ \left. \int_0^{a_m} \frac{x' y_{m-1}}{a_m} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}) \, dx + \int_0^{a_m} \frac{x'^2 \, dx}{a_m^2} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}) (y_m - y_{m-1}) \right] = \\
&= \frac{1}{I'_m} \left[a_m \mathfrak{M}_{m-1} y_{m-1} + \frac{a_m}{2} (y_m - y_{m-1}) \mathfrak{M}_{m-1} + \frac{a_m}{2} y_{m-1} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}) + \right. \\
&+ \left. \frac{a_m}{3} (\mathfrak{M}_m - \mathfrak{M}_{m-1}) (y_m - y_{m-1}) \right] = \frac{a_m}{6 I'_m} (2 \mathfrak{M}_{m-1} y_{m-1} + \mathfrak{M}_{m-1} y_m + \\
&+ \mathfrak{M}_m y_{m-1} + 2 \mathfrak{M}_m y_m) = \frac{a_m}{6 I'_m} [\mathfrak{M}_{m-1} (2 y_{m-1} + y_m) + \mathfrak{M}_m (2 y_m + y_{m-1})] \quad (116)
\end{aligned}$$

W ten sam sposób otrzymamy

$$\frac{1}{I'_m} \int_0^{a_m} y^2 \, dx = \frac{a_m}{6 I'_m} [y_{m-1} (2 y_{m-1} + y_m) + y_m (2 y_m + y_{m-1})] \quad (117)$$

Mamy obliczyć



Rys. 39.

$$\int_0^l \frac{\mathfrak{M} \cdot y}{I} \, ds = \int_0^l \frac{\mathfrak{M} y}{I'} \, dx. \text{ Całkę tę obliczymy,}$$

jako sumę wyrazów $\frac{1}{I'_m} \int_0^{a_m} \mathfrak{M} y \, dx$, dla wszy-

stkich a_m od $m=1$ do $m=n$. Nazwijmy a_0 średnią długość przedziału, zaś I'_0 średnie I' , to

$$\begin{aligned}
\int_0^l \frac{\mathfrak{M} \cdot y}{I} \, ds &= \int_0^l \frac{\mathfrak{M} \cdot y}{I'} \, dx = \frac{a_0}{6 I'_0} \left[\dots + \frac{a_m I'_0}{a_0 I'_m} [\mathfrak{M}_{m-1} (2 y_{m-1} + y_m) + \right. \\
&+ \mathfrak{M}_m (2 y_m + y_{m-1})] + \frac{a_{m+1}}{a_0} \frac{I'_0}{I'_{m+1}} [\mathfrak{M}_m (2 y_m + y_{m+1}) + \mathfrak{M}_{m+1} (2 y_{m+1} + \\
&+ y_m) \dots + \left. \right] = \frac{a_0}{6 I'_0} \sum_0^n \mathfrak{M}_m \left[\frac{a_m I'_0}{a_0 I'_m} (2 y_m + y_{m-1}) + \frac{a_{m+1}}{a_0} \frac{I'_0}{I'_{m+1}} (2 y_m + \right. \\
&+ \left. y_{m+1}) \right] = \frac{a_0}{I'_0} \sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m, \dots \dots \dots (118)
\end{aligned}$$

jeżeli $v_m = \frac{a_m}{6a_0} \frac{I'_0}{I'_m} (2y_m + y_{m-1}) + \frac{a_{m+1}}{6a_0} \frac{I'_0}{I'_{m+1}} (2y_m + y_{m+1})$ (119)

Podobnie otrzymamy

$$\int_0^l \frac{y^2}{I} ds = \int_0^l \frac{y^2}{I'} dx = \frac{a_0}{I'_0} \sum_0^n y_m v_m \quad (120)$$

Wstawiając wartość z równania 118. i 120. w równanie 114., otrzymamy

$$H = \frac{\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m - \frac{\varepsilon \Delta l I'_0}{a_0}}{\sum_0^n y_m v_m + \frac{l I'_0}{A_0 a_0}} \quad (121)$$

Wartości v_m dadzą się łatwo obliczyć z równania 119.

Dla stałego a i stałego I' t. j. dla momentu bezwładności łuku, który na węzłowie zwiększa się proporcjonalnie do siecz φ (co zresztą przy łuku dwuprzegubowym rzadko się zdarza) jest

$$v_m = \frac{1}{6} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}) \quad (122)$$

Obliczymy więc v_m , jak przy wzorze Simpsona dla powierzchni. Jeżeli łuk jest płaski, możemy nawet przyjąć $v_m = y_m$ (123)

a jeżeli przekrój jest więcej zmienny, możemy w przybliżeniu

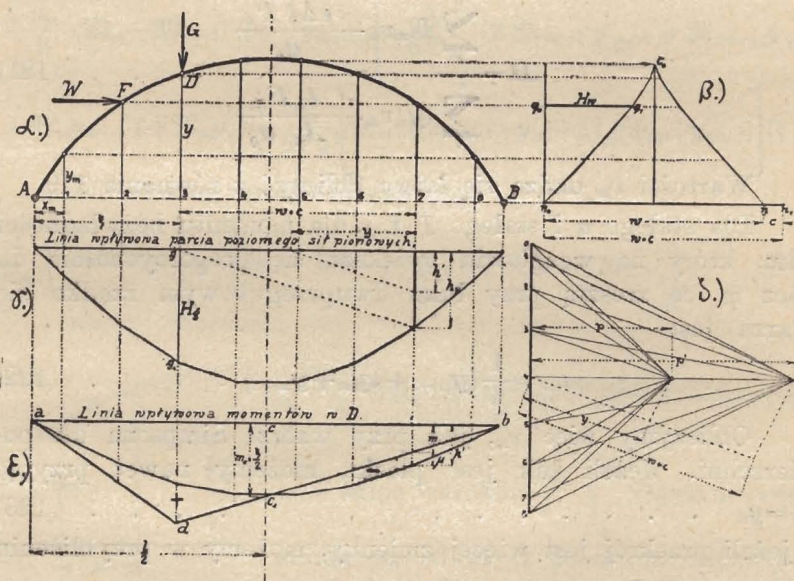
$$\text{przyjąć } v_m = \frac{I'_0}{I'_m} y_m \quad (124)$$

Wzory te przybliżone dla v_m nadają się przeważnie dla sklepień, jednak także i dla łuków blaszanych, których wysokość ścianki mało się zmienia.

Chcąc wyznaczyć linię wpływową H , przyjmijmy wedle Melana, że siła $G=1$ działa w punkcie D (rys. 40.).

Obliczamy naprzód v_m z równania 119. względnie 122—124. Wykreślamy teraz wielobok sił v_m (rys. δ) dla odległości biegunowej p , kreślimy wielobok sznurowy dla kierunku pionowego sił (rys. γ), jakoteż i dla kierunku poziomego sił (rys. β), kreśląc boki wieloboku prostopadle do promieni.

Z konstrukcyi wynika, że $n_0 n = \sum_0^n y_m v_m$. Jeżeli teraz obliczymy $nn_1 = \frac{l I_0}{A_0 a_0 p}$, to $n_0 n_1$ przedstawia mianownik wyrazu H (równ. 121.), zatem jeżeli przyjmiemy $n_0 n_1 = 1$, to

$$H = \sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m - \frac{\varepsilon \Delta l I_0}{a_0}.$$


Rys. 40.

Teraz możemy wyznaczyć $\mathfrak{M}_m$. Dla dowolnego punktu E , dla którego $x_m < \xi$, mamy $O_1 = \frac{G(l-\xi)}{l}$, więc $\mathfrak{M}_m = G \frac{(l-\xi)}{l} x_m$, jeżeli $x_m > \xi$, to $\mathfrak{M}_m = \frac{G\xi}{l} (l-x_m)$, więc

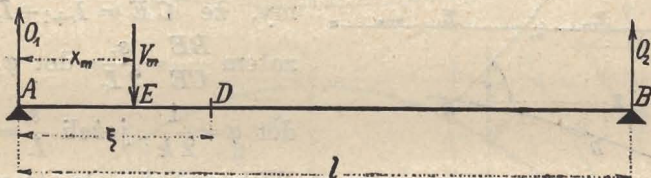
$$\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m = G \left[\frac{l-\xi}{l} \sum_0^{\xi} x_m v_m + \frac{\xi}{l} \sum_{\xi}^l (l-x_m) v_m \right]. \quad (125)$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że siła v_m działa w E (rys. 41.) to $O_2 = \frac{v_m x_m}{l}$, więc moment w D równa się $\frac{v_m x_m}{l} (l-\xi)$.

Jeżeli $x_m > \xi$, to moment w D równa się $\frac{v_m(l-x_m)}{l} \xi$, zatem, jeżeli belka AB jest obciążona siłami v_m (rys. 42.), to moment

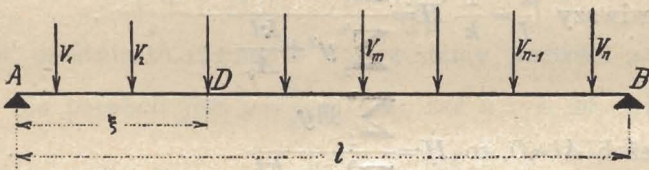
$$\text{w } D \quad M_\xi = \frac{(l-\xi)}{l} \sum_0^\xi x_m v_m + \frac{\xi}{l} \sum_\xi^l [l-x_m] v_m, \quad (126)$$

więc $\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m = G M_\xi.$



Rys. 41.

Z rys. 40. wynika, że $M_\xi = p m_\xi$, jeżeli $g g_1 = m_\xi$, zatem $\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m = p G m_\xi$. Od $G m_\xi$ należałoby jeszcze odciągnąć $\frac{\epsilon \Delta l l' g}{a_0 p}$, któryto wyraz dla $\Delta l = 0$ jest zerem, a wtedy dla $G = 1$ m_ξ przedstawia parcie poziome H , jeżeli za jednostkę siły, względnie za siłę G przyjmiemy $n_0 n_1$. Dla innego punktu zaczepienia siły G , otrzymamy także odnośną rzędną wieloboku sznurowego γ , który zatem jest linią wpływową parcia poziomego H .



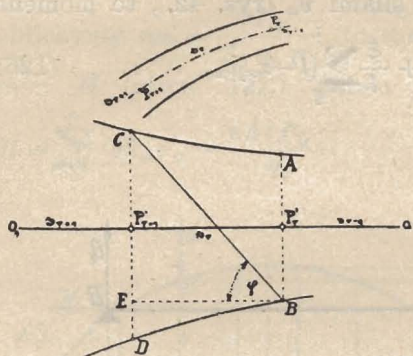
Rys. 42.

Analogicznie otrzymamy dla siły poziomej W , działającej w F $q_0 q_1 = H_w$, jeżeli $n_0 n_1 = W$, a zatem $n_0 c_0$ przedstawia nam linię wpływową dla sił poziomych W .

§ 15. Sposób Schönhöfera.

Schönhöfer stara się uprościć powyższą konstrukcję i nie przyjmuje a stałego, lecz dzieli oś łuku na części tak, aby $\frac{s_r}{l_r} = \frac{1}{k}$ było ilością stałą (rys. 43.). Niechaj OO_1 przedstawia rozwi-

niętą oś łuku. Odnieśmy w punktach podziału rzędne do góry i na dół $P'_r A = P'_r B = \bar{I}_r$; $P'_{r+1} C = P'_{r+1} D = \bar{I}_{r+1}$, a więc równe



Rys. 43.

odnośnym momentom bezwładności w punktach podziału, to moment bezwładności paska $P_r P_{r+1}$ będzie $I_r = \frac{\bar{I}_r + \bar{I}_{r+1}}{2}$. Z rysunku widzi-

my, że $CE = \bar{I}_{r+1} + \bar{I}_r = 2 \bar{I}_r$, zatem $\frac{BE}{CE} = \frac{s_r}{2 \bar{I}_r} = \text{dot } \varphi$, stąd $\text{dot } \varphi = \frac{1}{2k}$, jeżeli $\frac{s_r}{\bar{I}_r} = \frac{1}{k}$.

Widzimy więc, że otrzymamy

stały stosunek $\frac{1}{k}$, jeżeli podzielimy łuk tak, aby kąt φ był stałym.

Jeżeli to zrobimy, to wtedy na podstawie równania 114.

$$\text{możemy napisać } H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y \frac{s}{I} - \varepsilon \Delta l}{\sum_1^n y^2 \frac{s}{I} + \frac{l}{A_0}},$$

$$\text{a wstawiając } \frac{s}{I} = \frac{1}{k} \quad H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y - k \varepsilon \Delta l}{\sum_1^n y^2 + \frac{kl}{A_0}} \quad (127)$$

$$\text{Jeżeli } \Delta l = 0, \text{ to } H = \frac{\sum_1^n \mathfrak{M} y}{\sum_1^n y^2 + \frac{kl}{A_0}} \quad (128)$$

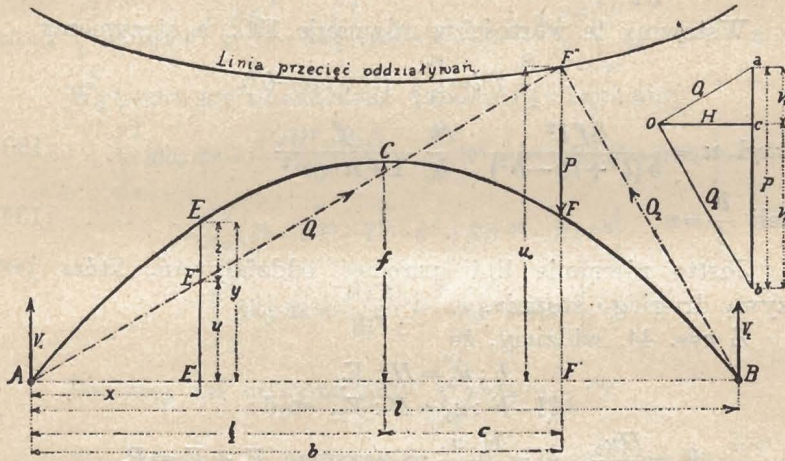
Wykreślnie wyznaczyć możemy H w ten sam sposób, co pierwszej, tylko zamiast v odcinamy w wieloboku δ (rys. 40.) rzędne y .

§ 16. Parcie poziome łuku parabolicznego płaskiego.

Przyjmijmy, że oś łuku jest paraboliczną i że na łuk działa siła P w odległości b od lewej podpory (rys. 44.).

Jeżeli przyjmiemy, że przekrój łuku jest zmienny tak, że moment bezwładności przekroju wzrasta od klucza ku pod-

porom tak, że I dost $\varphi = I' = I \frac{dx}{ds}$ jest stałym, dalej, jeżeli przyjmujemy $\Delta l = 0$ i nie uwzględnimy wpływu siły podłużnej, to otrzymamy z równ. 111. $\int_0^l M y dx = 0$ (129)



Rys. 44.

Mamy z rysunku $M = Hz = H(y - u)$, co wstawione w równanie 129. da: $H \int_0^l (y - u)y dx = 0$, a stąd $\int_0^l y^2 dx = \int_0^l y u dx$ (130)

W ostatnie to równanie wprowadźmy wartości za y i u . I tak: dla paraboli jest $y = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$, zaś z rys. 44. widać, że dla prostej AF'' $u : u_0 = x : b$. Stąd $u = \frac{u_0 x}{b}$ (131)

Dla prostej $F''B$ należy wstawić w to równanie $l - x$ zamiast x i $l - b$ zamiast b , więc: $u = \frac{l - x}{l - b} u_0$ (132)

Pierwszy wyraz równania 130. brzmi

$$\int_0^l y^2 dx = \frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (lx - x^2)^2 dx = \frac{16f^2}{l^4} \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx,$$

$$\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l.$$

Drugi zaś wyraz:

$$\int_0^l y u dx = \int_0^b y u dx + \int_b^l y u dx = \int_0^l \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) \frac{u_0 x}{b} dx + \\ + \int_b^l \frac{4f}{l^2} (lx - x^2) u_0 \frac{l-x}{l-b} dx = \frac{fu_0}{3l} \left\{ l^2 + lb - b^2 \right\}.$$

Wstawmy te wartości w równanie 130., a otrzymamy

$$\frac{8}{15} fl = \frac{fu_0}{3l} (l^2 + lb - b^2),$$

$$\text{a stąd } u_0 = \frac{8fl^2}{5(l^2 + lb - b^2)} = \frac{8}{5} \frac{f}{1+n-n^2} \quad (133)$$

$$\text{jeżeli } \frac{b}{l} = n \quad (134)$$

Jestto równanie linii przecięć oddziaływań, która jest krzywą drugiego stopnia.

Z rys. 44. widzimy, że

$$b : u_0 = H : V_1$$

$$(l-b) : u_0 = H : V_2, \text{ stąd:}$$

$$V_1 = \frac{Hu_0}{b}, \quad V_2 = \frac{H \cdot u_0}{l-b}, \text{ a przytem } V_1 + V_2 = P.$$

Z trzech tych równań możemy obliczyć parcie poziome

$$H = \frac{P(l-b)b}{lu_0}.$$

Jeżeli wstawimy wartość za u_0 z równ. 133. otrzymamy

$$H = \frac{5P(l-b)b(l^2 + lb - b^2)}{8fl^3} = \frac{5}{8} \frac{Pl(1-n)n}{f} (1+n-n^2) \quad (135)$$

Równanie to ustawione przez prof. Winklera nie uwzględnia siły podłużnej.

O ileby chodziło o wyprowadzenie wzorów z uwzględnieniem tejże siły, to możemy do tego dojść przez wstawienie odpowiednich wartości w równ. 114. Przyjmijmy: $\frac{Idx}{ds} = I'$ i jak

poprzednio $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$. Z rys. 44. wypływa, że gdy ciężar będzie po prawej stronie E , to znaczy w granicach od $x=0$ do $x=b$, $\mathfrak{M} = \frac{P(l-b)}{l} x$, gdy zaś ciężar będzie z lewej strony prze-

kroju, t. zn. w granicach od $x=b$ do $x=l$, $\mathfrak{M} = \frac{(l-b)x}{l} - P(x-b)$

więc dla pierwszego wypadku będzie :

$$\mathfrak{M}y = \frac{4Pf}{l^3} (l-b)x^2(l-x),$$

zaś dla drugiego wypadku będzie :

$$\mathfrak{M}y = \frac{4Pf}{l^3} (l-b)x^2(l-x) - \frac{4Pf}{l^2} (x-b)(l-x)x.$$

Stąd $\int_0^l \mathfrak{M}y dx = \frac{4Pf}{l^3} (l-b) \int_0^l (lx^2 - x^3) dx - \frac{4Pf}{l^2} \int_0^l (x-b)(l-x) x dx.$

Wykonawszy naznaczone działania, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_0^l \mathfrak{M}y dx &= \frac{Pf[l^2 - bl]}{3} + \frac{Pf}{3l^2} \{l^4 - b^4 - 2bl^3 + 2lb^3\} = \\ &= \frac{Pf}{3l^2} \{l^4 - bl^3 - l^4 + b^4 + 2bl^3 - 2lb^3\} \\ \int_0^l \mathfrak{M}y dx &= \frac{Pfb}{3l^2} \{l^3 - 2b^2l + b^3\}. \end{aligned}$$

Powyżej zaś otrzymaliśmy $\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$

Wstawiając te wartości w rów. 114., przyczem $\frac{Idx}{ds} = I'$,

otrzymamy: $H = \frac{\frac{Pfb}{3l^2} (l^3 - 2b^2l + b^3) - \varepsilon I' \Delta l}{\frac{8}{15} f^2 l + \frac{I'l}{A_0}},$

$$H = \frac{5Pfb(l^3 - 2b^2l + b^3)}{\left(8f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}\right) l^3} - \frac{15 \varepsilon I' \frac{\Delta l}{l}}{8f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}} \quad (136)$$

Dla $\Delta l = 0$ mamy $H = \frac{5Pbf(l^3 - 2b^2l + b^3)}{\left(8f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}\right) l^3}$ lub

$$H = \frac{5Pbf(l-b)(l^2 + lb - b^2)}{\left(8f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}\right) l^3} \quad (137)$$

Wstawiając $\frac{b}{l} = n$, otrzymamy

$$H = \frac{5Pfl}{8f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}} n(1-n)(1+n-n^2) \quad (138)$$

Nazwijmy $\frac{15}{8} \frac{I'}{f A_0} = \varphi$ a $f' = f \left(1 + \frac{15}{8} \frac{I'}{A_0 f^2} \right) = f(1 + \varphi)$, (139)

dalej $\frac{5}{8} (1 + n - n^2) = K$, to

$$H = \frac{P l K n (1 - n)}{f (1 + \varphi)} = \frac{P l K n (1 - n)}{f'} \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Otóż dla $n=0$ $K=0.625$

$$n = \frac{1}{2} \quad K = 0.781$$

Widzimy więc, że K jest mało zmiennem, to też Müller Breslau przyjmuje K stałe, mianowicie $K=0.75$, wtedy $H = \frac{3}{4} \frac{P l n (1 - n)}{f (1 + \varphi)}$, a w przybliżeniu, nieuwzględniając wpływu siły podłużnej, dla $\varphi=0$

$$H = \frac{3}{4} \frac{P l}{f} n (1 - n), \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

równanie paraboli.

Dla łuków płaskich dla $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$ lepiej przyjąć $K=0.78$.

Co się tyczy składowych pionowych oddziaływania V_1 i V_2 , to są one takie same, jak oddziaływania belki prostej w dwu punktach podpartej.

W celu wykreślenia linii przecięć oddziaływań i linii wpływowej parcia poziomego (rys. 45.), możemy obliczyć według równ. 133. i 135. wartości dla u_0 i H . I tak:

dla $n = \frac{b}{l} = 0 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.2 \quad 0.25 \quad 0.3 \quad 0.35 \quad 0.4 \quad 0.45 \quad 0.5$

$u_0 = 1.6 \quad 1.526 \quad 1.468 \quad 1.420 \quad 1.379 \quad 1.347 \quad 1.322 \quad 1.305 \quad 1.290 \quad 1.283 \quad 1.280 \quad f$

$H = 0 \quad 0.031 \quad 0.061 \quad 0.090 \quad 0.116 \quad 0.139 \quad 0.159 \quad 0.173 \quad 0.186 \quad 0.193 \quad 0.195 \quad P \frac{l}{f}$

Na podstawie tej tabliczki wykreśliśmy te linie na rys. 45.

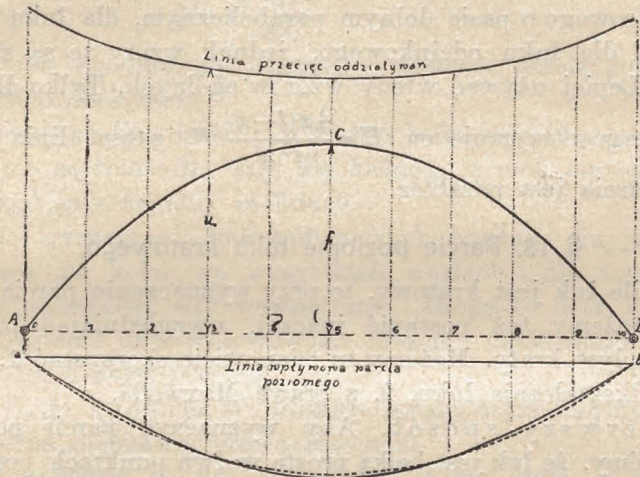
Linia wpływowa parcia poziomego jestto, jak widać z rów. 135., krzywa 4-go stopnia, lecz bardzo podobna do paraboli, wyrażonej rów. 140., dla której rzędne są następujące:

$n = 0 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.15 \quad 0.2 \quad 0.25 \quad 0.3 \quad 0.35 \quad 0.4 \quad 0.45 \quad 0.5$

$H = 0 \quad 0.036 \quad 0.068 \quad 0.096 \quad 0.120 \quad 0.141 \quad 0.158 \quad 0.171 \quad 0.180 \quad 0.186 \quad 0.188 \quad P \frac{l}{f}$

Widzimy, że parabola ma większe rzędne przy podporach, zaś mniejsze w kluczu. Dlatego też Weyrauch przyjmuje nieco

większy współczynnik w równaniu 141. mianowicie zamiast $\frac{3}{4}$ przyjmuje $\frac{35}{48}$ ¹⁾.



Rys. 45.

Jeżeli wpływ siły podłużnej także uwzględnimy, to otrzymamy wzór 140.

A więc możemy użyć powyższej tabliczki i linii wpływowej, jeżeli tylko zamiast f , wstawimy f' . Zresztą dla $\frac{f}{l} < \frac{1}{8}$

jest f' bardzo mało różne od f , zaś dla $\frac{f}{l} > \frac{1}{8}$ można w przy-

bliżeniu przyjąć $\frac{15}{4} \frac{I'}{A_0} = h_0^2$, jeżeli h_0 oznacza wysokość ścianki,

a wtedy $f' = f \left(1 + \frac{h_0^2}{2f^2} \right)$ (138)

§ 17. Parcie poziome łuku o pasach nierównoległych.

Wzorów, ustawionych w poprzednim paragrafie, można używać, gdy przekrój przynajmniej w przybliżeniu jest stałym, a więc w wypadku, gdy mamy belkę blaszaną lub kratową o pasach równoległych lub sklepienie o niebardzo zmniejszonej grubości. Jeżeli zaś mamy belkę o pasach nierównoległych np. łuk prostopasowy, to w tym razie wzory powyższe dałyby

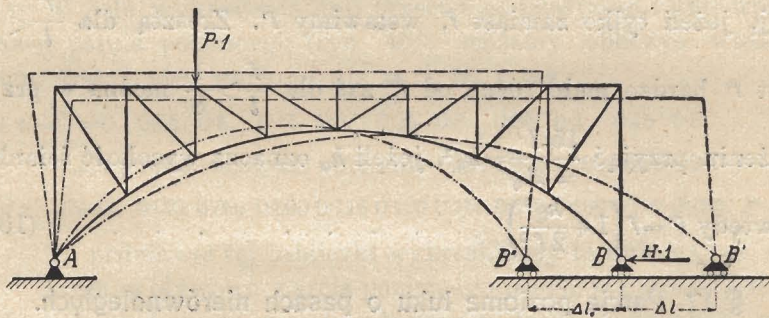
¹⁾ Weyrauch. Elastische Bogenträger IV. wyd. str. 115.

wyniki mniej lub więcej mylne. Więc dla tego rodzaju belek będziemy musieli stosować pravidła ogólne i postępowanie, jak w § 15. wskazano. Melan podaje wprawdzie wzory dla łuku prostopasowego o pasie dolnym parabolicznym, dla łuku sierpowatego i dla łuku odcinkowego, jednak wzory te są zanadto zawile. Lepiej używać wtedy wzorów ogólnych. Tylko dla łuku półkolistego otrzymuje on $H = \frac{4x(l-x)}{l^2 \pi} P$, zatem linia wpływowa parcia jest parabolą.

§ 18. Parcie poziome łuku kratowego.

O ile łuk jest kratowy, to przy wyznaczeniu parcia poziomego możemy też postąpić inaczej, uwzględniając przytem także wpływ kraty. Możemy tu mianowicie skorzystać 1. z pravidła odkształcenia łuku, 2. z prawa Maxwella.

Pierwszy sposób. Aby wyznaczyć parcie poziome, przypuśćmy, że łuk jest belką prostą w dwu punktach podpartą, wspartą jednym końcem na łożysku kołyskowym, z drugiej na łożysku kołyskowo-wałkowym (rys. 46.). Przypuśćmy dalej, że w punkcie C działa na belkę ciężar $P=1$ i dla tego obciążenia wyznaczmy linię ugięcia metodą Willota. Otrzymamy w ten sposób pewne poziome przesunięcie podpory np. $BB'=\Delta l$.



Rys. 46.

Zrobiwszy to, przypuszczamy z kolei, że siła $H=1$ działa na łożysko wałkowe w kierunku poziomym. Siła ta wywołuje znowu przesunięcia podpory ku środkowi $BB''=\Delta l_0$. W rzeczywistości przesunięcia nie ma, czyli jest ono równe zeru, dalej też w B działa siła H , zaś w C siła P , a więc H musi być

tak wielkie, aby przesunięcie BB'' było równe przesunięciu BB'' wywołanemu siłą P . A więc:

$$H \Delta l_0 - P \Delta l = 0.$$

Stąd
$$H = P \cdot \frac{\Delta l}{\Delta l_0} \quad (139)$$

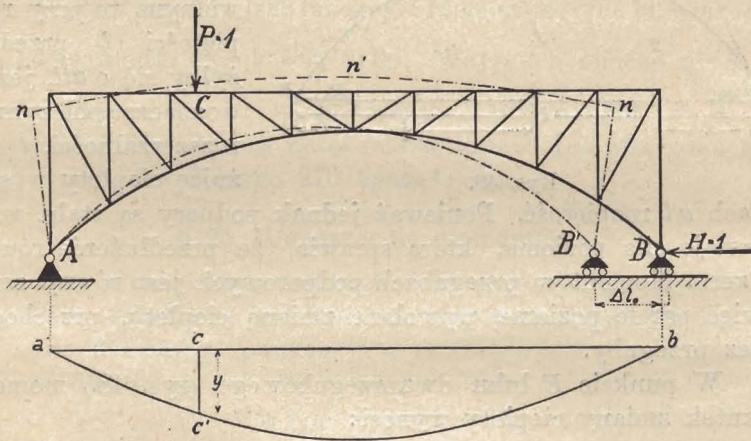
Z równania tego możemy wyznaczyć wielkość parcia poziomego dla danego obciążenia.

Ponieważ dla rozmaitych prętów belki najniekorzystniejsze obciążenia są rozmaite, więc dla każdego z nich musielibyśmy powtórzyć cały żmudny rachunek.

Dla wyznaczenia linii wpływowych trzeba przyjąć $P=1$, działającą po kolei we wszystkich węzłach i dla tych przypadków wyznaczyć siły wewnętrzne. Droga to dość żmudna; do wykreślenia linii wpływowych możemy dojść innym sposobem, który z kolei podamy.

Drugi sposób. W prostszy sposób wyznaczymy parcie poziome na podstawie prawa Maxwella¹⁾.

Przypuśćmy znowu, że podpora A jest stałą, zaś na ruchomą podporę B działa siła pozioma $H=1$ i przesuwa ją o Δl_0 (rys. 47.).



Rys. 47.

Pod wpływem tej siły, pas górny łuku wygnie się ku górze ($n n' n$), wielobokiem ugięcia będzie $a c' b$, a ugięcie w punkcie C będzie równe $CC'=y$. Linie ugięcia $a c' b$ możemy

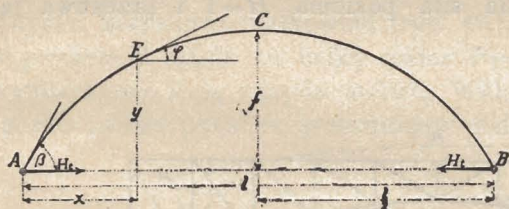
¹⁾ Por. Teoria mostów II. wyd. II. str. 106.

wykreślić albo sposobem Williota albo Müller-Breslaua na podstawie ciężarów sprężystych. Jednakowoż na podstawie twierdzenia Maxwella możemy powiedzieć, że gdy w punkcie C działa siła $P=1$, to przesunięcie podpory B będzie $\Delta l=y$. Linia więc $ac'b$ jest linią wpływową przesunięcia podpory B wskutek obciążenia siłą $P=1$, zaś $H=\frac{P \cdot \Delta l}{\Delta l_0}=\frac{Py}{\Delta l_0}$. Linia więc $ac'b$ będzie więc zarazem linią wpływową parcia poziomego H , tylko rzędne jej podzielić musimy przez Δl_0 .

Niedogodnem jest tu to, że dla wykreślenia wieloboku ugięcia musimy znać przekroje. Musimy więc jako pierwsze przybliżenie przyjąć przekroje pasów i krzyżulców stałe, lub wyznaczamy te przekroje jak dla belki trójprzegubowej. Następnie dopiero liczymy drugi raz dokładnie.

§ 19. Wpływ zmiany ciepłoty.

Przy łuku dwuprzegubowym ze zmianą ciepłoty zmienia się parcie poziome. I tak wskutek podwyższenia się ciepłoty



Rys. 48.

usiłuje się łuk przedłużyć i gdyby był wolnym, to przy rozpiętości l przedłużyłby się o $\alpha t l$, jeżeli α oznacza współczynnik rozszerzalności, t różnicę ciepłoty w stopniach αl rozpiętość. Ponieważ jednak podpory są stałe, więc powstaje siła pozioma, która sprawia, że przedłużenie równa się zeru. Moment w przegubach podporowych jest równy zeru, a więc parcie poziome, wywołane zmianą ciepłoty, przechodzi przez przeguby.

W punkcie E łuku dwuprzegubowego (rys. 48.) moment wskutek zmiany ciepłoty wynosi:

$$M_t = H_t \cdot y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{siła poprzeczna } Q_t = H_t \cdot \text{wst. } \varphi \\ \text{zaś siła podłużna } N_t = H_t \cdot \text{dost } \varphi \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Podwyższenie ciepłoty o t^0 wywołuje przedłużenie $\alpha t l$, równe skróceniu rozpiętości Δl wskutek siły H_t , czyli $\alpha t l = -\Delta l$.

Wstawiawszy tak to, jak i $\mathfrak{M}=0$ we wzór 116., otrzymamy:

$$H_t = \frac{\alpha \varepsilon t l}{\int_0^l \frac{y^2}{I} ds + \frac{l}{A_0}} \quad (142)$$

Używając wzoru Schönhöfera otrzymamy dla równych s

$$H_t = \frac{K \varepsilon \alpha t l}{\sum_1^n y^2 + \frac{Kl}{A_0}} \quad (143)$$

Dla łuków parabolicznych o stałym I' jest

$$H_t = \frac{\alpha \varepsilon t l}{\int_0^l \frac{y^2 dx}{I'} + \frac{l}{A_0}} = \frac{\alpha \varepsilon t l}{\frac{1}{I'} \frac{8}{15} f^2 l + \frac{l}{A_0}} = \frac{15 \varepsilon \alpha t I'}{8 f^2 + \frac{15 I'}{A_0}} \quad (144)$$

Wpływ skrócenia o $\Delta l = \frac{\nu}{\varepsilon} l$ możemy wyznaczyć, wstawiając w równanie 144. $-\frac{\nu}{\varepsilon} l$ zamiast $\alpha t l$,

$$\text{otrzymamy więc } H = -\frac{15 \nu I'}{8 f^2 + 15 \frac{I'}{A_0}} \quad (145)$$

Wpływ ciepłoty jest znacznym i tem większym, im większem $\frac{h}{f}$, gdzie h jest wysokością belki. Weyrauch oblicza dla łuku parabolicznego mostu w Koblencji ($l=98$ m) dla $t=\pm 30^\circ$ $H=59.27$ t. Największe natężenie w kluczu jest dla pasu górnego -193 , dla dolnego 270 kg/cm² (ciśn.).

§ 20. Wyznaczenie momentów.

Przy wyznaczeniu momentów dla łuku dwuprzegubowego (rys. 49.) postępujemy podobnie, jak przy łuku trójprzegubowym. Dla dowolnego punktu E w osi łuku jest

a) dla $b < x$

$$M = V_1 x - P(x-b) - H y$$

$$V_1 = \frac{P(l-b)}{l}$$

Stąd

$$M' = \frac{M}{y} = \frac{P(l-b)}{l} \frac{x}{y} - \frac{P(x-b)}{l} \frac{l}{y} - H$$

$$M' = \frac{P b (l-x)}{l y} - H \quad (146)$$

Dla danego położenia siły P wyznaczamy z linii wpływowej parcie m dla siły $a b = 1$, mamy więc biegun c . Kreślimy promienie i wielobok sznurowy $A K_1 b_1$, dalej $c n \parallel A b_1$, $n c_1 \parallel A B$, to c_1 jest prawdziwym biegunem. Kreślimy wtedy wielobok sznurowy $A K B$, to K jest punktem linii przecięcia się oddziaływań.

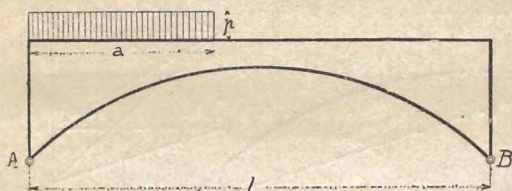
Linie przecięcia się oddziaływań możemy też wyznaczyć w inny sposób. Linia wpływowa siły V_1 jest prosta (rys. 51).



Rys. 51.

Dla danego położenia siły P (rys. 49.) wyznaczamy z linii wpływowej V_1 i H , składamy te dwie siły i wyznaczamy punkt przecięcia się z siłą P . Gdybyśmy chcieli

li wyznaczyć linię wpływową momentów jednych, to postępujemy także podobnie, jak przedtem. Postępowanie tak w wypadku pierwszym, jak



Rys. 52.

i drugim, jest uwidocznione na rys. 49., przyczem $a b c$ jest linią wpływową parcia poziomego, $a e b$ linią wpływową momentów belki prostej

dla $P=1$; punkty K , K_g i K_d są punktami obojętnymi. Miejscem geometrycznym punktów e , względnie g' lub d' , są parabole.

Z linii wpływowej rys. 49. można wyznaczyć najniekorzystniejsze obciążenia, największe momenty dodatnie i ujemne.

Dla łuku dwuprzegubowego oblicza Ramisch¹⁾, dokąd ma sięgać obciążenie dla najw. M i otrzymuje dla (rys. 52.)

$$a = 0.4 l \quad \text{.} \quad \text{najw } M = 0.0165 p l^2$$

$$a = 0.5 l \quad \text{.} \quad \text{najw } M = 0.0156 p l^2$$

§ 21. Wyznaczenie sił poprzecznych.

Przy wyznaczaniu sił poprzecznych dla łuku dwuprzegubowego (rys. 53.) postępuje się także podobnie, jak przy łuku

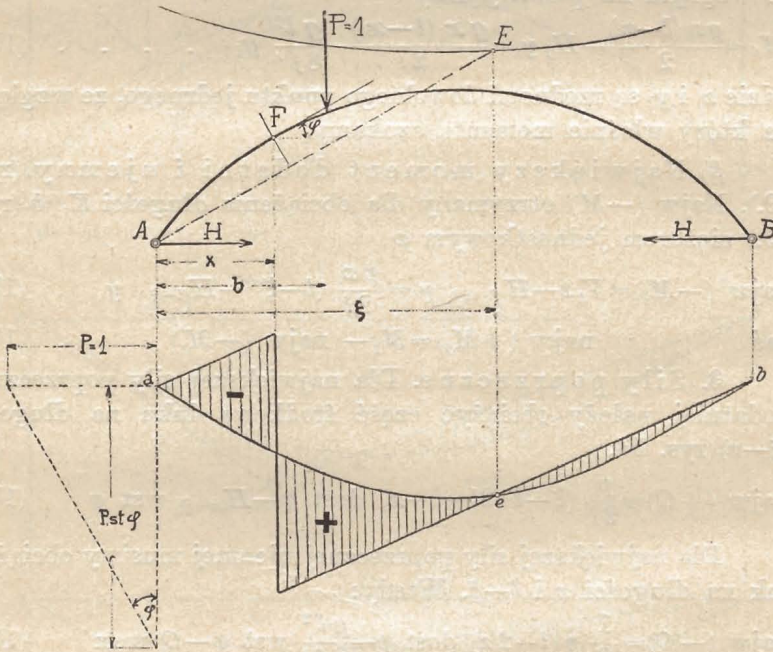
¹⁾ Zeitschrift d. öst. Ing. u. Arch. Verein. 1902 str. 458.

trójprzegubowym. Według równ. 28. jest $Q' = \frac{Q}{\text{wst } \varphi} =$
 $= Q \text{ dot } \varphi - H$. Stąd wynika konstrukcja linii wpływowej sił
 poprzecznych, przedstawiona na rys. 53.

§ 22. Momenty i siły poprzeczne dla łuku parabolicznego i pasów równoległych.

1. Parcie poziome.

a) Obciążenie jednostajne zupełne. Jeżeli mamy
 ciężar jednostajnie rozłożony g na całym łuku, to parcie po-



Rys. 53.

ziome dla obciążenia zupełnego otrzymamy ze względu na
 równ. 137. i 139.

$$H_g = \frac{5g}{8f'l^3} \int_0^l b(l-b)(l^2 + lb - b^2) db = \frac{1}{8} \frac{gl^2}{f'} \quad (148)$$

β) Obciążenie jednostajne częściowe. Gdy obciążymy ciężarem jednostkowym p tylko długość x_1 od lewej podpory, to:

$$H_{x_1} = \frac{5p}{8f'l^3} \int_0^{x_1} b(l-b)(l^2 + lb - b^2) lb$$

zaś po scałkowaniu:

$$H_{x_1} = \frac{5pl^2}{16f'} \left(\frac{x_1}{l}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{l}\right)^2 + \frac{2}{5} \left(\frac{x_1}{l}\right)^3 \right\} \quad (149)$$

2. Momenty.

a) Moment dla obciążenia zupełnego będzie ze względu na oś $M_g = \frac{gx(l-x)}{2} - \frac{gl^2}{8f'} y = \frac{gx(l-x)}{2} \frac{f'-f}{f}$ (150)

ze względu na punkt jędrny

$$M_i = \frac{gx_i(l-x_i)}{2} - H_g y_i = \frac{gx_i(l-x_i)}{2} - \frac{gl^2}{8f'} y_i \quad (151)$$

gdzie x_i i y_i są rzędnymi dowolnego punktu jędrnego, ze względu na który właśnie momentu szukamy.

β) Największy moment dodatni i ujemny (rys. 49.). Najw ($-M$) otrzymany dla obciążenia długości $K_g''b$ (rys. 49.) ciężarem jednostkowym p

$$\text{najw } (-M_g) = V_1 x - H_{(l-\xi_g)} y_i = \frac{p x_i}{2l} (l-\xi)^2 - H_{(l-\xi_g)} y_i \quad (152)$$

$$\text{zaś} \quad \text{najw } (+M_g) = M_2 - \text{najw } (-M_g) \quad (153)$$

3. Siły poprzeczne. Dla największej siły poprzecznej dodatniej należy obciążyć część środkową łuku na długości $(\xi-x)$ (rys. 53.).

$$\text{najw } (+Q) = \frac{p}{2l} (\xi-x)(2l-\xi-x) \text{ dost } \varphi - H_{(x-\xi)} \text{ wst } \varphi \quad (154)$$

Dla największej siły poprzecznej ujemnej musimy obciążyć łuk na długości x i $l-\xi$. Wtedy:

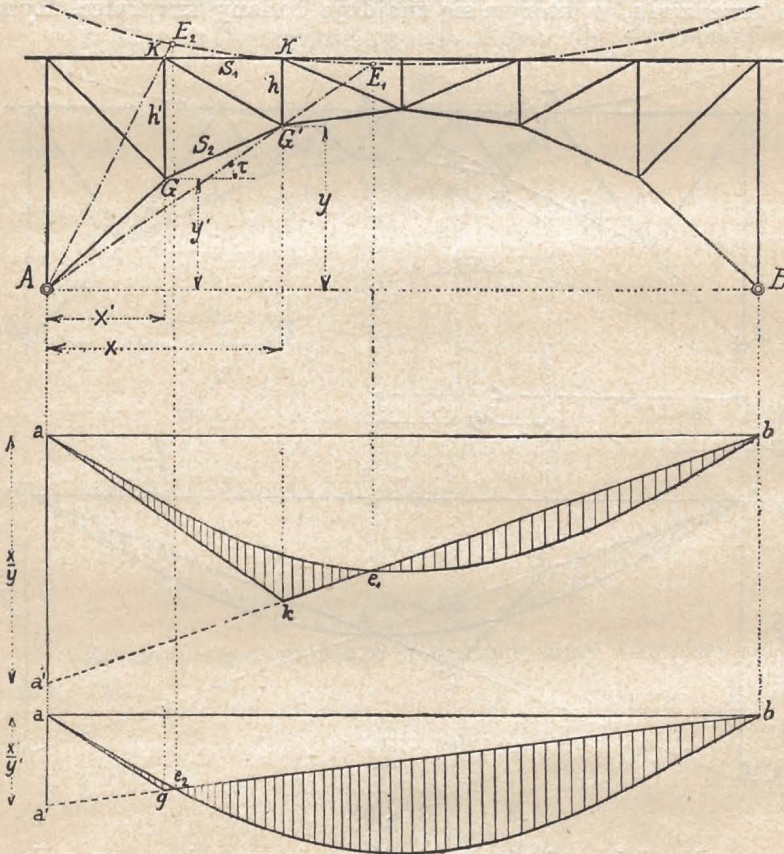
$$\text{najw } (-Q) = \frac{1}{2} p (l-2x) \text{ dost } \varphi - \frac{pl^2}{8f'} \text{ wst } \varphi - Q \text{ max} \quad (155)$$

§ 23. Obliczenie sił wewnętrznych łuku kratowego dwuprzegubowego.

Łuk dwuprzegubowy kratowy obliczamy podobnie, jak łuk kratowy trójpzregubowy. Linie wpływową sił wewnętrznych w pasach i krzyżulcach kreślimy podobnie, a zachodzi tu ta tylko różnica, że linia wpływowa dla parcia poziomego i linia przecięcia się oddziaływań są inne, niż w pierwszym wypadku.

Ponieważ są tu poprzecznice, to wpływ ich uwzględnimy, spuszczając z punktów, w których są poprzecznice, pionowe, a punkty przecięcia się ich z linią wpływową połączymy linią prostą.

1. Pasy. Dla siły wewnętrznej S_1 w części KK' pasu górnego kreślimy linię wpływową $akbe_1a$, jak dla momentu



Rys. 54.

ze względu na punkt G' (rys. 54 a), zaś dla siły wewnętrznej S_2 w części GG' pasu dolnego, kreślimy znowu linię wpływową $agbe_2a$, jak dla momentu w punkcie K (rys. 54 b). Siłę wewnętrzną w pasie górnym S_1 otrzymamy, mnożąc rzędne powierzchni wpływowej (rys. 54 a), odpowiadające ciężarom sku-

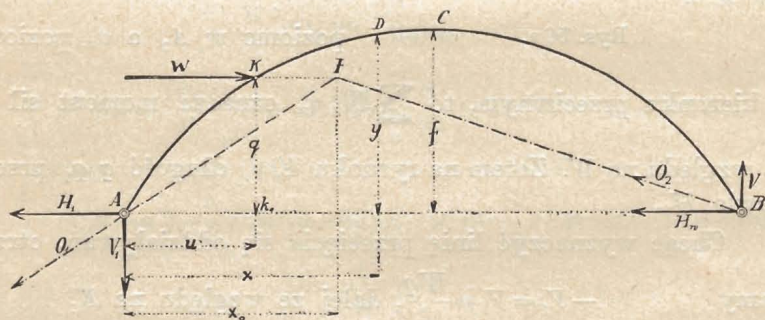
musimy pomnożyć rzędne, odpowiadające ciężarom, przez stały czynnik $\frac{f'}{b}$ siecz α .

Jeżeli krata jest dwukrotna, to zamiast p wprowadzamy $\frac{1}{2} p$.

§ 24. Wpływ sił poziomych na łuk dwuprzegubowy.

Z równ. 114. otrzymamy dla $\Delta l=0$ dla siły poziomej W

(rys. 56.)
$$H_w = \frac{\int_0^l \frac{\mathfrak{M} y ds}{I}}{\int_0^l \frac{y^2}{I} ds + \frac{l}{A_0}} \quad \dots \quad (157)$$



Rys. 56.

Zamiast tego możemy utworzyć sumy i napisać według rów. 121.

$$H_w = \frac{\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m}{\sum_0^n y_m v_m + \frac{l}{A_0} a_0} \quad \dots \quad (158)$$

W A działa parcie $H_1 = W - H_w \quad \dots \quad (159)$

Moment $\mathfrak{M}$ w dowolnym punkcie jest

$$\text{dla } x < u \quad \mathfrak{M} = W y - W \frac{q}{l} x \quad \text{i dla } x > u \quad \mathfrak{M} = W \frac{q}{l} (l-x)$$

A stąd

$$\begin{aligned} \sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m &= W \left[\sum_0^u y_m v_m - \frac{q}{l} \sum_0^n v_m x + \frac{q}{l} \sum_n^l v_m (l-x) \right] \\ &= W \left[\frac{q}{l} \sum_0^l (l-x) v_m - \sum_0^n (q-y) v_m \right] \quad . \quad . \quad (160) \end{aligned}$$

$\frac{1}{l} \sum_0^l (l-x) v_m$ jest oddziaływaniem w A dla sił pionowych v_m



Rys. 56 a.

da się łatwo wyznaczyć i wynosi dla łuku symetrycznego

$$\frac{1}{2} \sum_0^l v_m.$$

Jeżeli siła ta działa poziomo w A , a v_m poziomo

w kierunku przeciwnym, to $\sum_0^n \mathfrak{M}_m v_m$ oznacza moment sił v_m ze względu na W . Zatem na rysunku 40 β) długość $q_0 q_1$ przedstawia H_w .

Chcąc wyznaczyć linię przecięcia się oddziaływań, otrzymamy

$$-V_1 = V_2 = \frac{Wq}{l}, \text{ dalej ze względu na } K,$$

$$V_1 x_0 = H_w q, \text{ więc } x_0 = \frac{H_w}{V_1} q = \frac{H_w}{W} l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

§ 25. Wpływ siły poziomej na łuk paraboliczny.

Równ. 157. możemy ze względu na równ. 160. i przyjmując $v_m = y$ według 123. inaczej napisać

$$H_w = \frac{W \left[\frac{q}{l} \int_0^l (l-x) y dx - \int_0^u q y dx - \int_0^u y^2 dx \right]}{\int_0^l y^2 dx + \frac{l I'_0}{A_0 a_0}}$$

po opuszczeniu bardzo małej ilości $\frac{l I'_0}{A_0 a_0}$

zatem
$$x_0 = \frac{\frac{q}{l} \int_0^l (l-x)y dx - \int_0^u qy dx - \int_0^u y^2 dx}{\int_0^l y^2 dx} \cdot l$$

Dla paraboli $\int_0^l y^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l$. Wstawiając $y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2)$,

$q = \frac{4f}{l^2} (lu - u^2)$ i $u = nl$, więc $q = 4f (n - n^2)$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{q}{l} \int_0^l (l-x)y dx &= \frac{4fq}{l^3} \int_0^l (l-x)^2 x dx = \frac{1}{3} flq = \frac{4}{3} f^2 l (n - n^2); \\ -q \int_0^u y du &= -\frac{4fq}{l^2} \int_0^u (lx - x^2) dx = -\frac{4fq}{6l^2} \cdot u^2 (3l - 2u) = \\ &= \frac{8}{3} f^2 l n^2 (3 - 2n)(n - n^2); \end{aligned}$$

$$\int_0^u y^2 dx = \frac{16f^2}{l^4} \int_0^u (lx - x^2)^2 dx = \frac{8}{15} f^2 l n^3 (10 - 15n + 6n^2).$$

Zatem

$$\frac{x_0}{l} = \frac{\frac{4}{3} f^2 l (n - n^2) - \frac{8}{3} f^2 l n^2 (3 - 2n)(n - n^2) + \frac{8}{15} f^2 l n^3 (10 - 15n + 6n^2)}{\frac{8}{15} f^2 l}$$

$$\frac{x_0}{l} = \frac{n}{2} (5 - 5n - 10n^2 + 20n^3 - 8n^4) \quad . \quad (163)$$

Jestto równanie linii przecięcia się oddziaływań, którą wykreśliśmy na rys. 57.

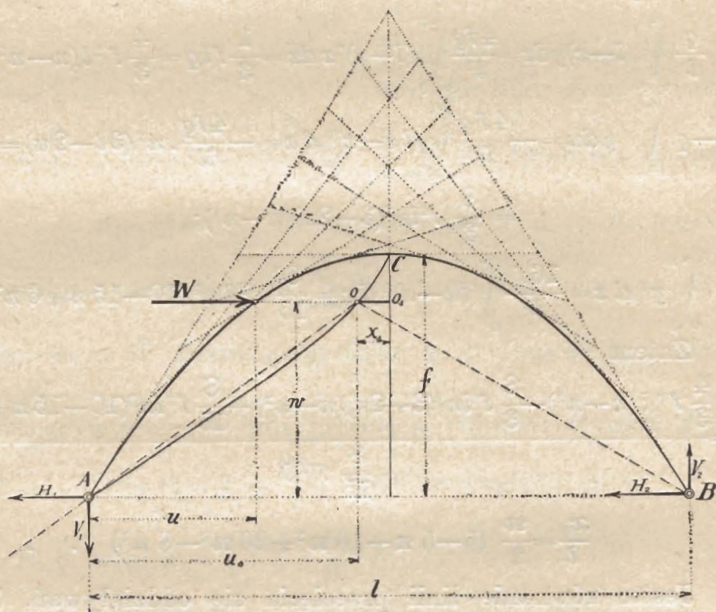
Linie tę więc da się użyć także wtedy, gdy łuk różni się od paraboli. Z rys. 57. wynika $-V_1 = V_2 = V$, dalej $Wl = Ww$, stąd $V = W \frac{w}{l}$. Jeżeli więc H_1 dokładnie wyznaczymy to z równania poprzedniego łatwo wyznaczyć V , a złożąwszy V_1 z H_1 otrzymamy O_1 i przecięcie się tej siły z W da nam punkt O . Na podstawie równania 163. da się wyznaczyć kształt linii COA otrzymamy wtedy dla

$$\begin{aligned} w &= 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, \quad f \\ X_1 &= 0.937, 0.875, 0.812, 0.752, 0.69, 0.629, 0.569, 0.51, 0.453, 0.398, \quad \frac{l}{2} \end{aligned}$$

$w = 0.55,$	$0.6,$	$0.65,$	$0.7,$	$0.75,$	$0.8,$	$0.85,$	$0.9,$	$0.95,$	$1,$	$\frac{l}{2}$
$x_1 = 0.343,$	$0.29,$	$0.23,$	$0.182,$	$0.15,$	$0.106,$	$0.067,$	$0.037,$	$0.012,$	$0,$	

§ 26. Łuk dwuprzegubowy ze ściągiem.

Jeżeli oba końce łuku połączymy ściągiem o przekroju A_1 (rys. 58.), to przedłużenie $\Delta l = \frac{H}{\varepsilon A_1} l + \alpha t l$, co wstawiwszy w równ. 113. i uwzględniając 144., otrzymamy



Rys. 57.

$$H = \frac{\int_0^l \frac{My}{I} ds}{\int_0^l \frac{y^2}{I} ds + \frac{l}{A_0} + \frac{l}{A_1}} \quad (164)$$

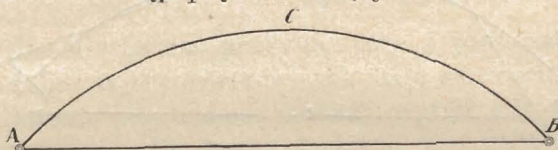
Jeżeli ściągiem jest wieloboczne (rys. 59.) i wisi na prętach pionowych, to $M = \mathfrak{M} - Hy + Hz = \mathfrak{M} - Hy'$.

Widzimy więc, że w przybliżeniu otrzymamy te same wyniki, co przedtem, tylko zamiast y trzeba wprowadzić y' .

Otrzymamy wtedy, gdy l_1 oznacza długość ścięgna ¹⁾,

$$H = \frac{\int_0^l \frac{My}{I} ds}{\int_0^l \frac{y'^2}{I} ds + \frac{l}{A_0} + \frac{1}{A_0} \sum_0^l y' \left(\frac{\Delta^2 z}{a} \right)^2} \quad (165)$$

jeżeli a oznacza odstęp prętów wiszących.

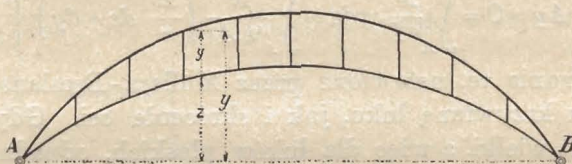


Rys. 58.

Konstrukcja wykreślna pozostaje ta sama, co w rys. 40., tylko zamiast y należy wszędzie wprowadzić y' .

§ 27. Tymczasowe obliczenie przekroju.

Do obliczeń powyższych potrzebną jest znajomość przekrojów i momentów bezwładności tychże, albowiem obliczenie parcia poziomego H , zasadzać się musi na znanym przekroju przy łuku statycznie niewyznaczalnym.



Rys. 59.

Przyjmujemy więc tymczasowo przekrój stały lub też obliczamy przekroje jak dla łuku trójprzegubowego, przy pierwszym już atoli liczeniu musimy uwzględnić wpływ zmiany ciepłoty, który tu jest znacznym. Dla belek kratowych linie jędrne wpadają w pasy.

III. Łuk bezprzegubowy.

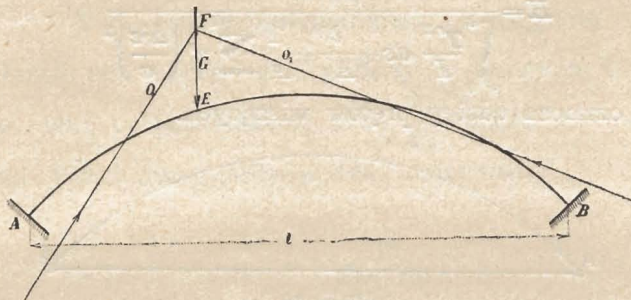
§ 28. Wyznaczenie ogólne parcia poziomego.

Łuki bezprzegubowe są to łuki, których oba końce są tak utwierdzone, że styczne podporowe się nie zmieniają.

Oddziaływania łuku bezprzegubowego nie przechodzą przez podpory, ale obok nich (rys. 60.). Ponieważ w łuku takim obie

¹⁾ Ballet: Analysis of elastic Arches str. 264.

podpory są stałe, więc odkształcenia Δx , Δy i $\Delta \varphi$ dla podpory B są równe zeru, otrzymujemy zatem trzy równania, które wystarczą do wyznaczenia sił zewnętrznych¹⁾.



Rys. 60.

Równania te brzmią:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \Delta \varphi = 0 &= \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} ds + \int_A^B \frac{N}{\epsilon A r} ds \\ 2. \quad \Delta x = 0 &= \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} y ds + \int_A^B \frac{N}{\epsilon A} \left(\frac{y}{r} ds - dx \right) \\ 3. \quad \Delta y = 0 &= \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} x ds + \int_A^B \frac{N}{\epsilon A} \left(\frac{x}{r} ds + dy \right) \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Równania te, ustawione przez Müllera-Breslaua, uwzględniają tak krzywiznę łuku, jak i skrócenie osi. Gdy promień łuku r jest wielki, a więc dla łuków płaskich, odpadną wyrazy z r . Otrzymamy w ten sposób:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} ds &= 0 \\ 2. \quad \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} y ds - \int_A^B \frac{N}{\epsilon A} dx &= 0 \\ 3. \quad \int_A^B \frac{M}{\epsilon I} x ds + \int_A^B \frac{N}{\epsilon A} dy &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (167)$$

Spółczynnik sprężystości ϵ przyjmujemy stały a dla przekroju stałego możemy I i A także wyłączyć przed znak całkowania i napisać:

¹⁾ Porównaj: Podręcznik Statyki Budowli; II. wyd. str. 411.

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_A^B M ds = 0 \\ 2. \quad & \int_A^B My ds - \frac{I}{A} \int_A^B N dx = 0 \\ 3. \quad & \int_A^B Mx ds + \frac{I}{A} \int_A^B N dy = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (168)$$

Dla łuków nie bardzo grubych, gdy I jest małe, drugi wyraz równ. 168. daje stosunkowo tak małe wartości, że jeżeli chodzi o obliczenie przybliżone, możemy wpływ siły podłużnej N opuścić i napisać dla łuku płaskiego nie nadto grubego o przekroju stałym:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_A^B M ds = 0 \\ 2. \quad & \int_A^B My ds = 0 \\ 3. \quad & \int_A^B Mx ds = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (169)$$

Przyjawszy zaś w przybliżeniu $ds = dx$, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_A^B M dx = 0 \\ 2. \quad & \int_A^B Mx dx = 0 \\ 3. \quad & \int_A^B My dx = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (170)$$

Na trzech tych zasadniczych równaniach, bądź to dokładnych, bądź przybliżonych bez uwzględnienia siły podłużnej i krzywizny, polega cała teoria belek łukowych bezprzegubowych i sklepień.

§ 29. Wyznaczenie oddziaływań.

W równaniu 168. wyrazy z siłą podłużną N są małe, możemy więc tu przyjąć $H = P$, a A średnie i r_0 średnie jako stałe, przyczem

$$\frac{l}{A_0} = \int_A^B \frac{dx}{A} = \frac{a_1}{A_1} + \frac{a_2}{A_2} + \frac{a_3}{A_3} + \dots + \frac{a_n}{A_n},$$

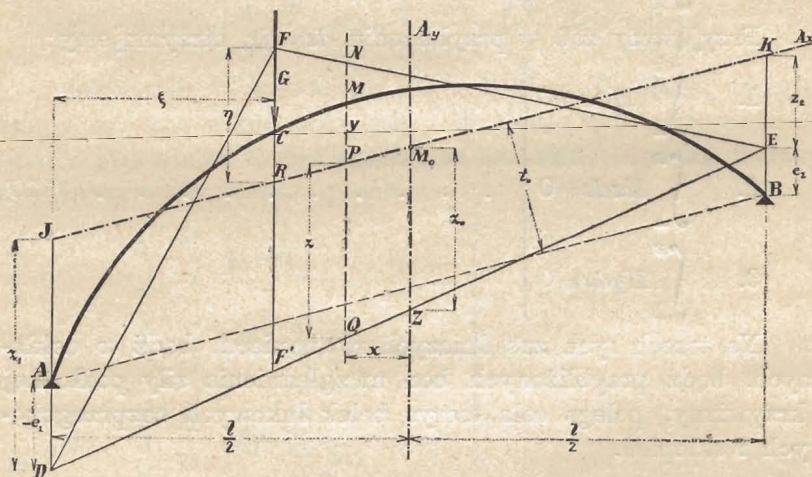
wtedy otrzymamy:

$$\int_A^B \frac{N ds}{\varepsilon A r} = \frac{Hl}{\varepsilon A_0 r_0}; \quad \int_A^B \frac{N}{\varepsilon A} \left(\frac{y}{r} ds - dx \right) = -\frac{Hl}{\varepsilon A_0} \quad \text{i} \quad \int_A^B \frac{N}{\varepsilon A} \left(\frac{x}{r} ds + dy \right) =$$

$$= \frac{Hl}{2 \varepsilon A_0 r_0} \quad \text{bo } y \text{ jest dla } A \text{ i } B \text{ równe zeru. Jeżeli jeszcze wsta-}$$

wimy $I' = I$ dost $\varphi = I \frac{dx}{ds}$, to otrzymamy następujące trzy równania:

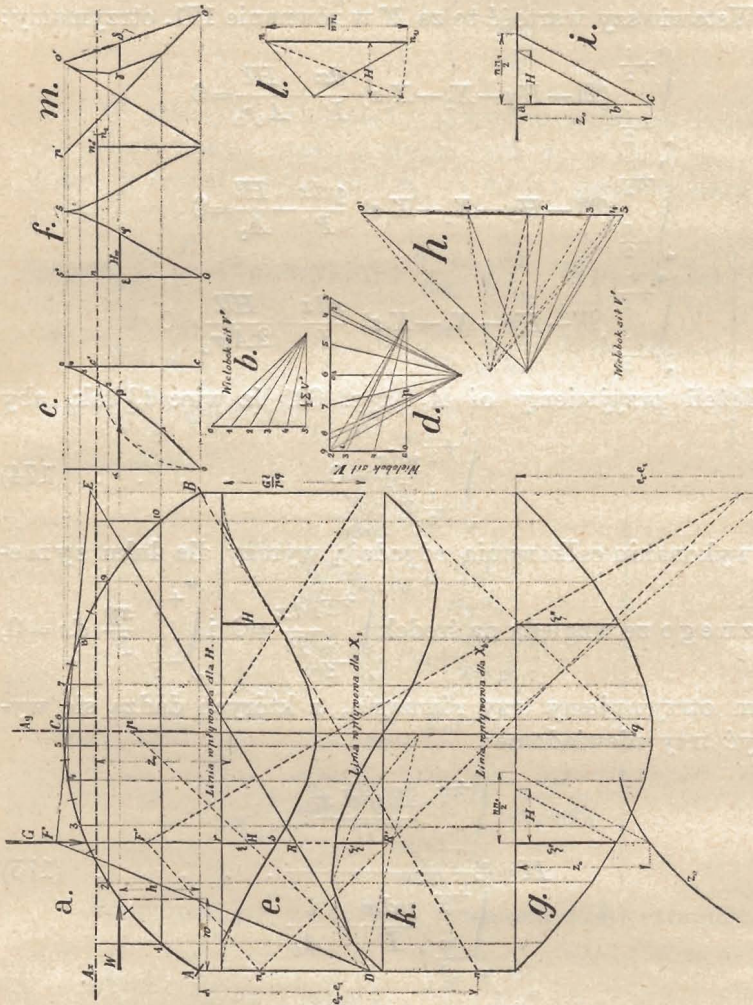
$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} dx + \frac{Hl}{A_0 r_0} = 0 \\ 2. \quad & \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} y dx - \frac{Hl}{A_0} = 0 \\ 3. \quad & \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} x dx + \frac{Hl}{2 A_0 r_0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (171)$$



Rys. 61.

Jeżeli siła G (rys. 61.) działa w C i jeżeli linia ciśnienia jest DFE , to przyjmijmy oś A_y pionową przez środek łuku, oś zaś A_x równoległą do AB w odstępnie t_0 od AB . W punkcie M dla danego x otrzymamy:

$M = H \overline{MN} = H(\overline{QN} - \overline{PM} - \overline{PQ}) = \mathfrak{M} - H(y + z)$, jeżeli $\mathfrak{M} = H \cdot \overline{QN}$ oznacza moment belki w dwu punktach podpartej.



Rys. 62.

Dalej mamy z rysunku $z = z_0 + \frac{e_2 - e_1}{l} x$. [Tutaj jest $\overline{AD} = e_1$ ujemne]. Wstawiwszy to w poprzednie równanie, otrzymamy

$$M = \mathfrak{M} - Hy - Hz_0 - H \frac{e_2 - e_1}{l} x.$$

$$\text{Nazwijmy } X_1 = H \frac{e_2 - e_1}{l}; \quad X_2 = H z_0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

$$\text{to otrzymamy } M = \mathfrak{M} - Hy - X_2 - X_1 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Wstawivszy wartość tę za M w równanie 171. otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\mathfrak{M} - Hy - X_2 - X_1 x) \frac{dx}{I'} + \frac{Hl}{A_0 r_0} &= 0 \\ \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\mathfrak{M} - Hy - X_2 - X_1 x) \frac{y dx}{I'} - \frac{Hl}{A_0} &= 0 \\ \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\mathfrak{M} - Hy - X_2 - X_1 x) \frac{x dx}{I'} + \frac{Hl}{2 A_0 r_0} &= 0 \end{aligned}$$

Jeżeli przyjmiemy oś A_x (rys. 62.) [a więc t_0] tak, aby

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{y dx}{I'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

to po wykonaniu całkowania odpadają wyrazy dla łuku syme-

trycznego ze względu na środek $\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{x dx}{I'} = 0$ i $\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{xy}{I'} dx = 0$,

poczem otrzymujemy trzy równania, z których dadzą się wyznaczyć trzy niewiadome:

$$H = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M} y dx}{I'}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{y dx}{I'} + \frac{l}{A_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

$$X_1 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\mathfrak{M}}{I'} x dx + \frac{Hl}{2 A_0 r_0}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{x^2 dx}{I'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176)$$

$$X_2 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \mathfrak{M} dx + \frac{Ht}{A_0 r_0}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{I'}} \quad (177)$$

W praktyce zamieniamy powyższe całki na sumy. Jeżeli podzielimy łuk na części o długościach $a_{m-1}, a_m, a_{m+1} \dots$, jeżeli dowolny średni odstęp jest a_0 , a średni moment bezwładności I_0 , to wstawiając:

$$\left. \begin{aligned} v_m &= \frac{a_m}{6a_0} \frac{I_0}{I'_m} (2y_m + y_{m-1}) + \frac{a_{m+1}}{6a_0} \frac{I_0}{I'_{m+1}} (2y_m + y_{m+1}) \\ v'_m &= \frac{a_m}{6a_0} \frac{I_0}{I'_m} (2x_m + x_{m-1}) + \frac{a_{m+1}}{6a_0} \frac{I_0}{I'_{m+1}} (2x_m + x_{m+1}) \\ v''_m &= \frac{1}{2} \frac{a_m}{a_0} \frac{I_0}{I'_m} + \frac{1}{2} \frac{a_{m+1}}{a_0} \frac{I_0}{I'_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{\sum_0^l \mathfrak{M}_m v_m}{\sum_0^l y_m v_m + \frac{I_0 l}{A_0 a_0}} \\ X_1 &= \frac{\sum_1^l \mathfrak{M}_m v'_m + \frac{H l t I_0}{2 a A_0 r_0}}{\sum_1^l X_m v'_m} \\ X_2 &= \frac{\sum_1^l \mathfrak{M}_m v''_m + H \frac{I_0 t}{A_0 a_0 r_0}}{\sum_1^l v''_m} \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Nazwijmy $y' = y + t_0$, to z równania 174.) otrzymamy

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{(y' - t_0)}{I'} dx = 0, \text{ a stąd } t_0 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{y'}{I'} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{I'}}, \text{ albo jeżeli całki zamie-}$$

$$\text{nimy na sumy } t_0 = \frac{\sum_0^l y'_m v''_m}{\sum_0^l v''_m} \quad (180)$$

Jeżeli I' jest stałym, to $t_0 = \frac{\int y' dx}{\int dx} = \frac{\text{pow. } ACB}{l}$, zatem

$t_0 l = \text{pow. } ACB$, więc oś A_x wyrównywa powierzchnię, zawartą między osią łuku a prostą AB .

Jeżeli podpory są w równej wysokości, to oddziaływanie

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= G \frac{l-\xi}{l} + \frac{M_2-M_1}{l} = [O_1] + H \frac{e_2-e_1}{l} = [O_1] + X_1 \\ V_2 &= [O_2] - X_1 \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

jeżeli $[O_1]$ i $[O_2]$ są oddziaływania dla belki prostej, w dwu punktach podpartej.

Ponieważ X_1 jest wedle 179. niezależnem od kształtu osi (y), więc i V_1 i V_2 są niezależne od kształtu osi, tylko zależne od zmienności przekroju.

30. Wyznaczenie linii wpływowych.

Już przy łuku dwuprzegubowym otrzymaliśmy równanie

$$125. \sum_0^l M_m v_m = G \left[\frac{l-\xi}{l} \sum_0^\xi x'_m v_m + \frac{\xi}{l} \sum_\xi^l (l-x'_m) v_m \right] = M_\xi \quad (182)$$

momentowi belki, w dwu punktach podpartej dla obciążenia siłami v_m .

Wyznamy najprzód położenie osi wyrównującej A_x .

W tym celu dzielimy łuk na n pasków (tu 10), szukamy środków ciężkości pasków (tu w połowie), dalej wyznaczamy z rów. 178. v'' i kreślimy wielobok sił b (rys. 62.). Ze środków ciężkości pasków, leżących na osi łuku kreślimy linie poziome

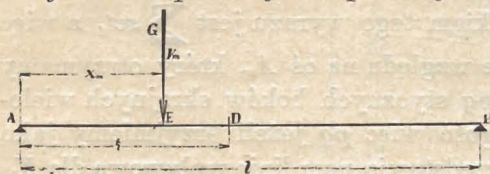
i pionowe, przyjmujemy jako odległość biegunową $\frac{1}{2} \sum v''$

i kreślimy wielobok sznurowy c , którego boki są prostopadłe do promieni wieloboku b . Odcinek oc jest momentem statycznym

$$\text{sił } v'' \text{ ze względu na } AB, \text{ więc } \frac{\frac{1}{2} \sum y' v''}{\frac{1}{2} \sum v''} = \frac{\sum y' v''}{\sum v''} = t_0 \text{ we-}$$

dle równania 180. Zróbmy $cc' = oc$, to przez c' przechodzi oś A_x , od której teraz będziemy liczyć y .

Teraz obliczymy v z równania 178. i kreślimy wielobok sił d (rys. 62.), przychem pierwsze 2 rzędne będą ujemne, dalsze dodatnie. Przyjmujemy teraz odległość biegunową p i kreślimy dla sił pionowych i poziomych wieloboki sznurowe e i f .



Rys. 63.

Krzywe sznurowe będą styczne do tych wieloboków w pionowych podziałowych, dlatego z początku i przy końcu wieloboków wykreskowaliśmy krzywe sznurowe.

Odcinek nn_0 między stycznymi boków skrajnych (pionowymi) w wieloboku f oznacza moment statyczny $\sum yv$, powiększamy

go o $\frac{I_0 l}{A_0 a_0 p} = n_0 n_1$ (co obliczymy, a co przedstawia małą dłu-

gość), a wtedy $nn_1 = \frac{1}{p} \left(\sum yv + \frac{I_0 l}{A_0 a_0} \right)$ przedstawia mianownik

wyrazu H w równaniu 179. Licznik zaś tego wyrazu $\sum \mathfrak{M}v$ przedstawia dla siły G , działającej w F , rzędna rs wedle równania 182., bo jestto moment dla belki, w dwu punktach podpartej, przy obciążeniu siłami v . Zatem jeżeli nn_1 przyjmujemy równą jednostce siły, to $rs = H$, zatem wielobok e przedstawia linię wpływową parcia poziomego H .

Teraz kreślimy dla v'' z wieloboku sił b wielobok sznurowy g dla sił pionowych. Rzędne tego wieloboku przedstawiają nam $\sum \mathfrak{M}v''$. Do tych rzędnych należałoby dodać poprawkę

$H \frac{I_0 l}{A_0 a_0 r \sum v''} = c H$. Ilość c jest jednak zwykle bardzo małą

tak, że poprawki tej zwykle nie robimy. Jestto licznik wyrazu dla X_2 (równ. 179.), mianownik tego wyrazu jest $\sum v''$. Widzimy więc, że wielobok g jest linią wpływową X_2 . Następnie obliczamy v' z równ. 178., przychem należy zwrócić uwagę, że oś A_y jest w środku rozpiętości, x więc jest dla jednej strony dodatnie, dla drugiej ujemne i kreślimy wielobok sił h i dla sił pionowych wielobok sznurowy k . Rzędne tego wieloboku przedstawiają nam $\sum \mathfrak{M}v'$. Do tych rzędnych należałoby do-

dać $\frac{H M I_0}{2 \alpha A_0 r_0 \sum x v'} = e_1 H$. Płóść e_1 jest jednak bardzo mała tak, że tej poprawki zwykle nie robimy. Jestto licznik wyrazu dla X_1 (równ. 179.). Mianownikiem tego wyrazu jest $\sum x v'$, a więc moment statyczny sił v' ze względu na oś A_y , który otrzymamy wykreślnie jako odcinek $p q$ stycznych boków skrajnych wieloboku h na osi A_y . Długość więc $p q$ jeżeli przyjmiemy jako jednostkę, to wielobok h przedstawia nam linię wpływową dla X_1 .

Aby wykreślić dla jednej siły G , działającej w F , wielobok sznurowy DFE , musimy wyznaczyć $e_2 - e_1$ i z_0 . Z równania 172.

$e_2 - e_1 = X_1 \frac{l}{H}$, $z_0 = \frac{X_2}{H}$. Więc, aby otrzymać $e_2 - e_1$, trzeba pomnożyć X_1 przez $\frac{G l}{H p q}$, aby zaś otrzymać z_0 , pomnożyć X_2

przez $\frac{G}{n H}$, bo rzędne X_2 odczytujemy w podziałce $\frac{1}{n}$, jeżeli

odległość biegunowa w b jest $\frac{1}{n} \sum v''$. Mnożenie to możemy

zrobić wykreślnie. Jeżeli dla jakiegoś położenia siły mamy H

i X_1 (rys. 64.) to w dowolnym odstepie odcinamy $uv = \frac{G l}{p q}$,

v łączymy z h_2 aż do przecięcia się z poziomą przez h_1 w o ,

odrzucaamy o_1 i kreślimy $o_1 v_1$ a wtedy $H : \frac{G l}{p q} = X_1 : w$, więc

$w = \frac{X_1 G l}{H p q} = e_2 - e_1$. Zrobiliśmy to na rysunku 62. dla punktu

$8\frac{1}{4}$, odpowiadającego punktowi $2\frac{3}{4}$, punktowi zaczepienia siły

G . Odcieśliśmy $\frac{G l}{p q}$ w rys. e , przyjmując $G = 1 = n n_1$ i zmieniając

je w stosunku $l : p q$, z konstrukcyi otrzymaliśmy odnośne $e_2 - e_1$.

Chodzi teraz o to, aby dla danego położenia siły wyznaczyć kierunek oddziaływań (rys. 62 a). Najprzód trzeba od osi A_x

odciąć w dół $z_0 = \frac{X_2}{H}$. Uwzględniając podziałki, mamy tu X_2

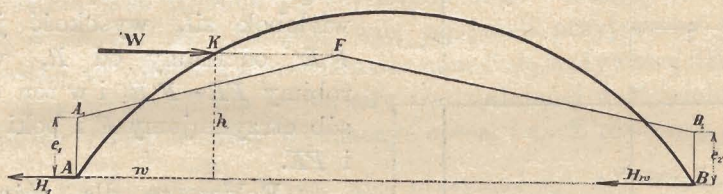
pomnożyć przez $\frac{G}{n H}$ czyli tu dla $n = 2$, $\frac{G}{2 H} = \frac{n n_1}{2 H}$, zatem $z_0 = \frac{X_2 n n_1}{H 2}$,

co łatwo skonstruujemy i uzyskamy $z_0 = f f_1$ (rys. 62 g). Zrobi-

liśmy to na tym rysunku także dla innych punktów, punkty f

H_w jest to parcie w B , zaś w punkcie A jest parcie $H_1 = H_w - W$.

Wyrazy z W w liczniku są bardzo małe, tak, że je zwykle opuszczamy. Zresztą konstrukcyja pozostaje ta sama. W wieloboku f (rys. 62.) długość $\varepsilon\varphi = H_w$, zmierzona jednostką nn_1 , więc $0\varphi 55'$ jest powierzchnią wpływową parcia poziomego H_w dla sił poziomych.



Rys. 65.

Dla wykreślenia X_1 posługujemy się tak samo wielobokiem sił v' (wielobok h), tylko kreślimy ze względu na y , więc prostopadłe do promieni wielobok sznurowy m , zatem $\gamma\delta = X_1$ mierzone przez $2o'p'$. Wreszcie X_2 otrzymamy wprost z wieloboku c , mianowicie $X_2 = \frac{\alpha\beta}{\sum v'}$. Dla $x = \frac{l}{2}$, więc dla punktu A

otrzymamy $y = -t_0$, $M = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \text{więc } M_1 &= Ht_0 - X_1 \frac{l}{2} - X_2 = H_1 e_1 \\ \text{zaś dla } x &= -\frac{l}{2}, \text{ więc dla punktu } B \\ M_2 &= Ht_0 + X_1 \frac{l}{2} - X_2 = H_w e_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (184)$$

§ 32. Wyznaczenie sił dla stałego I' .

Dla sklepień i łuków równoległych zwykle $I' = I$ dost. q jest mało zmiennem. Jeżeli przyjmiemy I' stałym i a stałym, to z równania 178. wynika:

$$\left. \begin{aligned} v_m &= \frac{1}{6} (y_{m-1} + 4y_m + y_{m+1}) \\ v'_m &= x_m; \quad v''_m = 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (185)$$

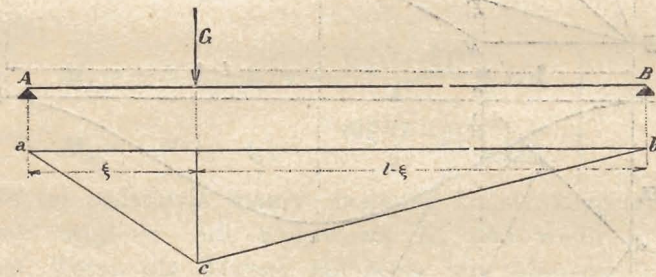
a jeżeli przyjęliśmy wiele pasków, to będzie $v_m = y_m$. Jeżeli

chcemy przecież uwzględnić zmienne I' , to często przyjmujemy

$$v_m = \frac{y}{I} \Delta s; \quad v'_m = \frac{x}{I} \Delta s; \quad v''_m = \frac{1}{I} \Delta s.$$

Z poprzedniego wyniku, że jeżeli $v''_m = 1$, to linia wpływowa dla X_2 jest parabolą. Ze względu na 182. otrzymamy (rys. 66.) $X_2 = \frac{abc + Cl}{l} = \frac{G(l-\xi)\xi l}{2l} + Cl$, $X_2 = G \frac{\xi(l-\xi)}{2l} + C$ (186)

jeżeli $C = H \frac{I_0 l}{A_0 l r_0}$. Jeśli C opuścimy jako bardzo małe, to z 172. otrzymamy $z_0 = \frac{X_2}{H} = \frac{1}{2} \frac{G}{H} \frac{\xi(l-\xi)}{l} = \frac{1}{2} FR$ (rys. 62.), bo moment w F dla belki, w dwu punktach podpartej, równa się $H \cdot FR = G \frac{(l-\xi)}{l} \xi$, więc $FR = \frac{G}{H} \frac{\xi(l-\xi)}{l} = 2z_0$.



Rys. 66.

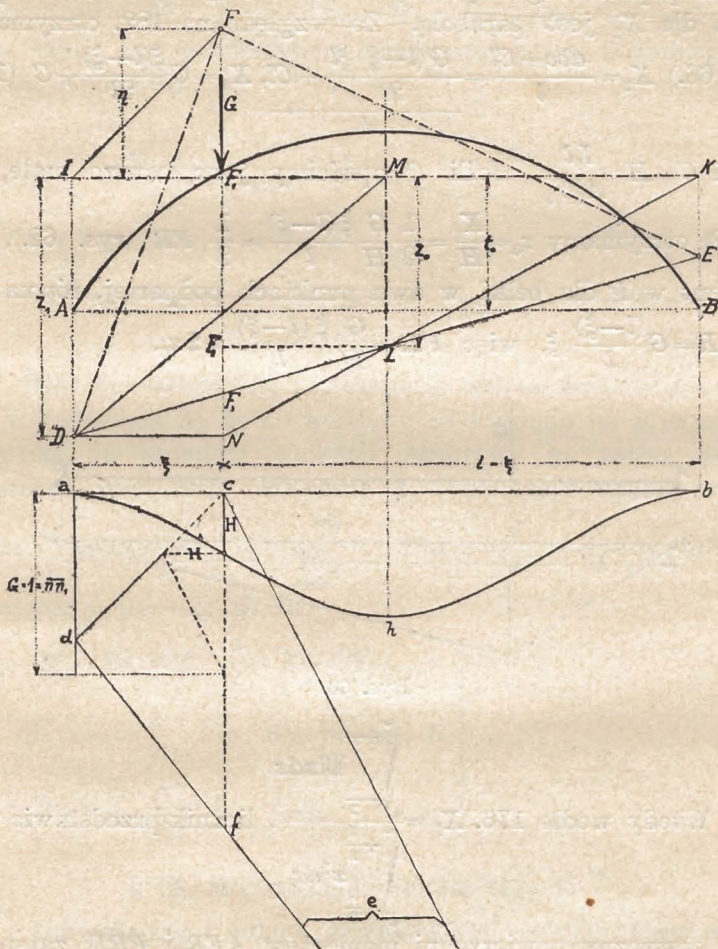
$$\text{Wtedy wedle 176. } X_1 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} Mx dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx}, \text{ licznik przedstawia mo-}$$

ment statyczny powierzchni momentów AFR i FRE , zatem

$$X_1 = \frac{\frac{G\xi(l-\xi)}{l} \left[\frac{\xi}{2} \left(\frac{l}{2} - \xi + \frac{\xi}{3} \right) + \frac{(l-\xi)}{2} \left(\frac{l}{2} - \xi - \frac{l-\xi}{3} \right) \right]}{2 \frac{l^3}{3.8}} = \frac{G(l-\xi)\xi(l-2\xi)}{l^3} = 2 X_2 \frac{l-2\xi}{l^2} \quad (187)$$

zaś $e_2 - e_1 = \frac{lX_1}{H} = \frac{2X_2(l-2\xi)}{Hl}$ (188)

Będziemy więc mogli z_0 i $e_2 - e_1$ łatwo skonstruować.



Rys. 67.

Dalej mamy wedle równania 181

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= [O] + X_1 = \frac{G(l-\xi)}{l} + \frac{G\xi(l-\xi)}{l} \frac{l-2\xi}{l^2} = \frac{G(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3} \\ V_2 &= [O] - X_1 = \frac{G\xi}{l} - \frac{G\xi(l-\xi)}{l} \frac{l-2\xi}{l^2} = \frac{G\xi^2}{l^3} (3l-2\xi) \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

a więc tak, jak dla belki poziomo utwierdzonej o przekroju stałym¹⁾. Z rys. 61. widzimy, że $\eta = FF' - z_0 - \frac{e_2 - e_1}{l} \left(\frac{l}{2} - \xi \right)$.

Wstawmy za FF' $z_0 = \frac{FF'}{2}$ i $e_2 - e_1$ wartości, to otrzymamy

$$\eta = \frac{G}{H} \frac{\xi(l-\xi)}{2l} - \frac{G}{H} \frac{(l-\xi)\xi(l-2\xi)}{l^3} \left(\frac{l}{2} - \xi \right) =$$

$$= \frac{2\xi^2(l-\xi)^2}{l^3} \frac{G}{H} = 8 \frac{H}{G} \frac{z_0^2}{l} \quad \dots \quad (190)$$

Dalej mamy (rys. 67.) $z_1 = z_0 + \frac{e_2 - e_1}{2} = z_0 + \frac{lX_1}{2H} = z_0 +$

$$+ \frac{G(l-\xi)\xi(l-2\xi)}{2Hl^2} = z_0 + \frac{z_0(l-2\xi)}{l} = \frac{2z_0(l-\xi)}{l},$$

więc $z_1 = \frac{\xi(l-\xi)^2 G}{l^2 H} = \frac{l}{2\xi} \eta \quad \dots \quad (191)$

wreszcie

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -H(z_1 - t_0) = -\frac{G\xi(l-\xi)^2}{l^2} + Ht_0 \\ M_2 &= -H(z_2 - t_0) = -\frac{G\xi^2(l-\xi)}{l^2} + Ht_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (192)$$

Na tej podstawie mamy następną konstrukcyę (rys. 67.). Kreślimy najpierw linię wpływową H_1 *ahb* wedle ogólnych prawideł. Teraz dla danego położenia siły (danego ξ) mamy parcie H , przyjmujemy $G=1=nn_1$ i dla danego H kreślimy wielobok sił i wielobok sznurowy *dce*. Wtedy wysokość trójkąta jest *cf*, a $z_0 = \frac{1}{2}cf = ML$.

Jeżeli prostą *KL* przedłużymy do *N*, to $F_1N : z_0 = (l-\xi) : \frac{l}{2}$, więc $F_1N = \frac{2z_0(l-\xi)}{l} = z_1 = ID$, jeżeli z *N* poprowadzimy poziomą do *D*. Połączmy teraz *D* z *L* i przedłużmy do *E*, to otrzymamy podstawę trójkąta, którego wysokość równa *cf* = F_3F . Punkt *F* możemy też otrzymać, kreśląc z *I* prostą *IF* równoległą do *DM*, bo wtedy $z_1 : \frac{l}{2} = FF_1 : \xi$, zatem $FF_1 = \frac{2\xi z_1}{l}$, więc $FF_1 = \eta$ wedle równ. 191. Jeżeli wykonamy całą konstrukcyę wedle rysunku

¹⁾ Porównaj Podręcznik Statyki Budowli, II. wyd. rów. 425. i 426.

62., to analogicznie do 189. otrzymamy z uwzględnienia I'

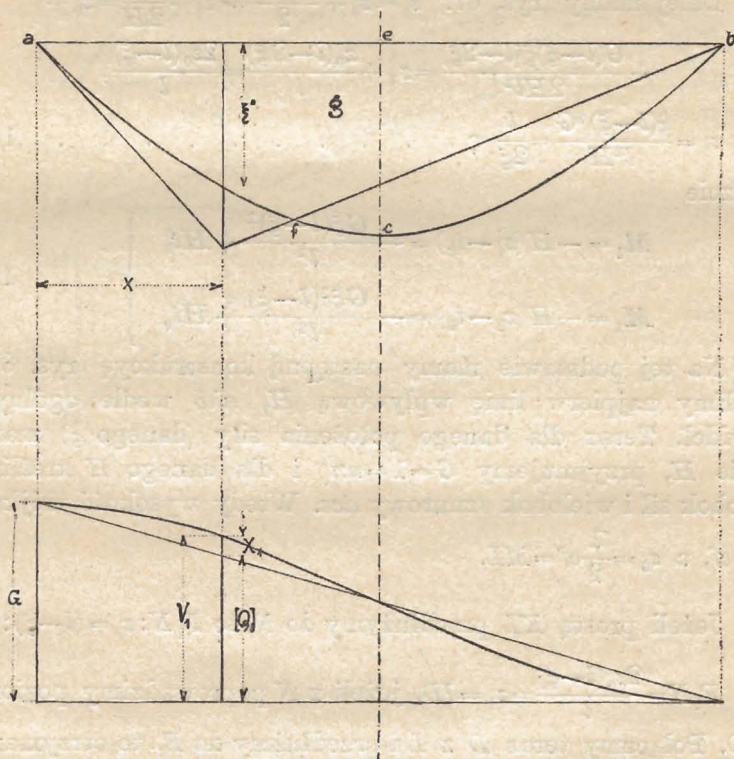
$$v_m = \frac{1}{6} \left(\frac{y_{m-1}}{I_{m-1}} + \frac{4y_m}{I_m} + \frac{y_{m+1}}{I_{m+1}} \right) \Delta x = \frac{1}{6} \left(w_{m-1} + 4w_m + w_{m+1} \right), \quad \text{jeżeli}$$

$$w_m = \frac{4y_m}{I_m} \Delta x.$$

Dalej będzie przedostatnie

$$v_{n-1} = \frac{1}{6} \left(w_{n-2} + 2w_{n-1} \right) + \frac{1}{6} \frac{\Delta x'}{\Delta x} \left(2w_{n-1} + w_n \right)$$

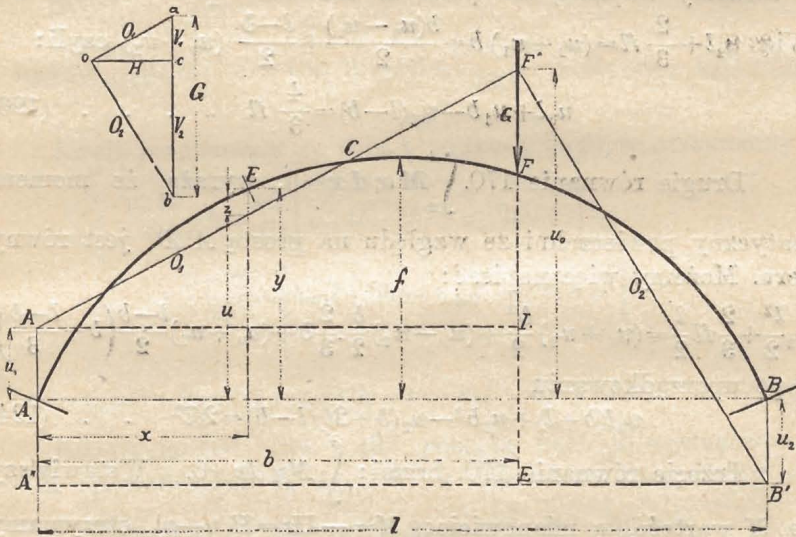
ostatnie $v_n = \frac{1}{6} \left(w_{n-1} + 2w_n \right) \frac{\Delta x'}{\Delta x}.$



Rys. 68.

Odległość biegunowa dla b (rys. 62.) jest $\frac{1}{2} \sum v''$, wielobok sznurowy z powodu $v''=1$ jest parabolą (rys. 62.), to w uwzględnieniu 179. $X_2 = \frac{1}{2} \xi'' G$, zatem odczytujemy ξ''

w podwójnej podziałce długości rysunku y . Dla momentu mamy równanie $M = \mathfrak{M} - Hy - X_1 x - X_2$. Zostawiamy podziałkę dla X_2 , więc podwójną podziałkę długości i odcinamy rzędne ξ i ξ' w (rys. 68.) w sprowadzonej podziałce $\frac{nn_1}{2y}$ i $\frac{pq}{2x}$, z uwzględnieniem znaków dodając i otrzymujemy te trzy wyrazy, czyli krzywą



Rys. 69.

abc . Teraz należy wrysować linię $\mathfrak{M}$ w podziałce podwójnej długości, więc $eg = x$. Podobnie rysujemy linię wpływową dla $V_1 = [Q] + X_1$, zmieniając tak samo podziałki, a wreszcie mamy $N = H$ dost $\varphi + V_1$ wst φ .

§ 33. Parcie poziome łuku parabolicznego i linie obwiedne oddziaływań.

Jeżeli oś łuku jest parabolą (rys. 69.) to równania, podane w poprzednich paragrafach, znacznie się upraszczają. Dla łuku parabolicznego jest $y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2)$. Z rys. 69. zaś widać, że jeżeli jedna siła G działa w F , to:

$$u = u_1 + \frac{u_0 - u_1}{b} x,$$

zaś:

$$z = y - u.$$

Dla oznaczenia linii ciśnienia $A'F''B'$ potrzebne są nam rzędne u_0 , u_1 , u_2 , które wyznaczymy w następujący sposób:

Pierwsze równanie 170. $\int_B^A M dx = 0$, oznacza, że powierzchnia momentów jest równą zeru. Poprowadźmy poziomą $A''B'$, a możemy napisać, że pow. $A''AECBB'$ = pow. $A''A'F''B'$.
Więc $u_2 l + \frac{2}{3} fl = (u_2 + u_1) b + \frac{b(u_0 - u_1)}{2} + \frac{l-b}{2} (u_0 + u_2)$ czyli:

$$u_0 l + u_1 b - u_2(l-b) = \frac{4}{3} fl \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

Drugie równanie 170. $\int_B^A M x dx = 0$, wyraża, że moment statyczny powierzchni ze względu na prostą $A'A''$ jest równy zeru. Możemy więc napisać:

$$u_2 \frac{l^2}{2} + \frac{2}{3} fl \frac{l}{2} = (u_1 + u_2) \frac{b^2}{2} + (u_0 - u_1) \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} b + (u_0 + u_2) \frac{l-b}{2} \left(b + \frac{l-b}{3} \right),$$

a po uporządkowaniu

$$u_0 l(b+l) + u_1 b^2 - u_2(b+2l)(l-b) = 2fl^2 \quad . \quad . \quad (194)$$

Trzecie równanie 170. brzmi: $\int M y dx = 0$. Wstawimy za M wartość, a mianowicie: $M = -Hz = H(u-y)$, otrzymamy

$$H - \int_A^B (u-y)y dx = 0$$

czyli:

$$\int_A^B y^2 dx = \int_A^B y u dx$$

Pierwszą stronę równania jużśmy scałkowali poprzednio i otrzymaliśmy $\frac{8}{15} f^2 l$. Drugą stronę równania t. j. całkę $\int_A^B u y dx$ musimy rozdzielić, bo funkcja zmienia się nagle w punkcie F , więc:

$$\begin{aligned} \int_A^F u y dx &= \frac{4f}{l^2} \int_A^F \left(u_1 + \frac{u_0 - u_1}{b} x \right) (lx - x^2) dx = \\ &= \frac{4f}{l^2} \left(\frac{u_1 lb}{2} - \frac{u_1 b^3}{3} + \frac{u_0 b^2 l}{3} - \frac{u_0 b^3}{4} - \frac{u_1 b^2 l}{3} + \frac{u_1 b^3}{4} \right) = \\ &= \frac{b^2 f}{3l^2} [u_0(4l - 3b) + u_1(2l - b)]. \end{aligned}$$

Całkę $\int_F^B u y dx$ otrzymamy, zmieniawszy u_1 na u_2 , a b na $(l-b)$, więc:

$$\int_F^B u y dx = \frac{(l-b)^2 f}{3l^2} [u_0(l+3b) - u_2(l+b)].$$

Stąd:

$$\int_A^B u y dx = \frac{b^2 f}{3l^2} [u_0(4l-3b) + u_1(2l-b)] + \frac{(l-b)^2 f}{3l^2} [u_0(l+3b) - u_2(l+b)].$$

Jeżeli porównamy ze sobą $\int_A^B y^2 dx = \int_A^B y u dx$, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} f^2 l = & \frac{b^2 f}{3l^3} [u_0(4l-3b) + u_1(2l-b)] + \\ & + \frac{(l-b)^2 f}{3l^2} [u_0(l+3b) - u_2(l-b)^3(l-b)] \end{aligned}$$

czyli:

$$\frac{8}{5} fl^3 = u_0 l(l^2 + bl - b^2) + u_1 b^2(2l-b) - u_2(l-b)^2(l+b) \quad . \quad . \quad (195)$$

Równania 193., 194. i 195. posłużą nam do wyznaczenia trzech niewiadomych u_0 , u_1 , i u_2 , a mianowicie otrzymamy

$$\text{Z równ. 193. i 194. } u_0 l^2 + 2u_1 bl = \frac{2}{3} fl(l+2b).$$

$$\text{Z równań 193. i 195.: } u_0 bl^2 + u_1 bl(2b-l) = \frac{4}{15} fl(5b^2 + l^2)$$

a z tych dwu równań wreszcie

$$u_0 = \frac{6}{5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

$$u_1 = \frac{2f}{15b} (5b-2l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

Wstawiawszy te wartości w równanie 193. otrzymamy:

$$u_2 = \frac{2f}{15} \frac{5b-3l}{l-b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

przyczem pamiętać musimy, że dodatnie u_2 liczymy na dół, przeciwnie jak u_0 i u_1 .

Równanie 196. okazuje, że u_0 jest ilością stałą, a więc linia przecięcia się oddziaływań jest równoległą do linii, łączącej węzłowiec łuku, a zatem, o ile podpory łuku są w tej samej wysokości, jest ona poziomą i prze-

Różnica między f i f' nie jest znaczną i tak np. dla:

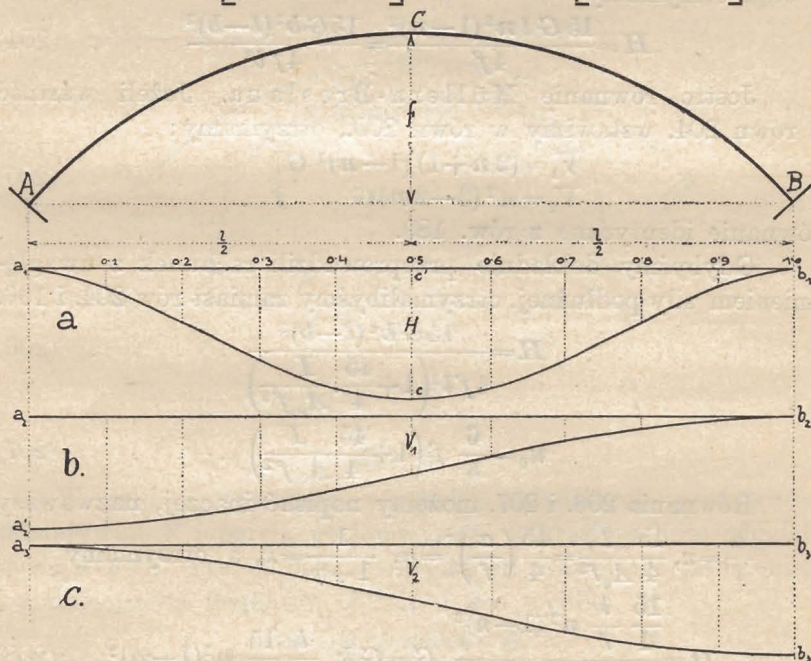
$$\frac{I}{A_0 f''} = \frac{1}{100} \text{ wynosi } f' = 1.11 f.$$

Dla jednej siły $G=1$ jest moment na podporze:

$$M_1 = H u_1 = H \frac{5}{2} n (1-n)^2 \left(nk - \frac{2}{5} \right) Gl \quad (212)$$

moment w punkcie zaczepienia siły $M_f = H(u_0 - y)$. A że $y = \frac{4f}{l^2} b(l-b) = 4fn(1-n)$, więc

$$M_f = \frac{15}{4} \frac{l}{f} kn^2(1-n)^2 \left[\frac{5}{6} \frac{f}{k} - 4fn(1-n) \right] - \frac{3Gl}{2} n^2(1-n)^2 \left[3 - 10nk(1+n) \right] \quad (213)$$



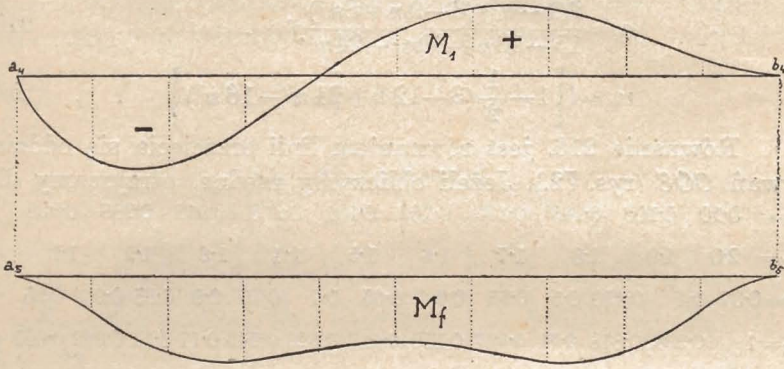
Rys. 71.

Dla różnych wartości $n = \frac{b}{l}$ możemy obliczyć następującą

tabliczkę dla $k=1$, $\varphi=0$.

$n=0$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	
$H=0$	0.0086	0.0304	0.0609	0.0960	0.1310	0.1654	0.1938	0.2160	0.2299	0.2344	$\frac{Gl}{f'}$
$V_1=1$	0.993	0.972	0.939	0.896	0.844	0.784	0.718	0.648	0.575	0.500	G
$V_2=0$	0.007	0.028	0.061	0.104	0.156	0.216	0.282	0.352	0.425	0.500	G
$M_1=0$	-0.0395	-0.0607	-0.0671	-0.0640	-0.0527	-0.0367	-0.0185	0	0.0170	0.0313	$\frac{Gl}{f'}$
$M_f=0$	0.0079	0.0255	0.0417	0.0538	0.0593	0.0595	0.0563	0.0518	0.0483	0.0469	Gl

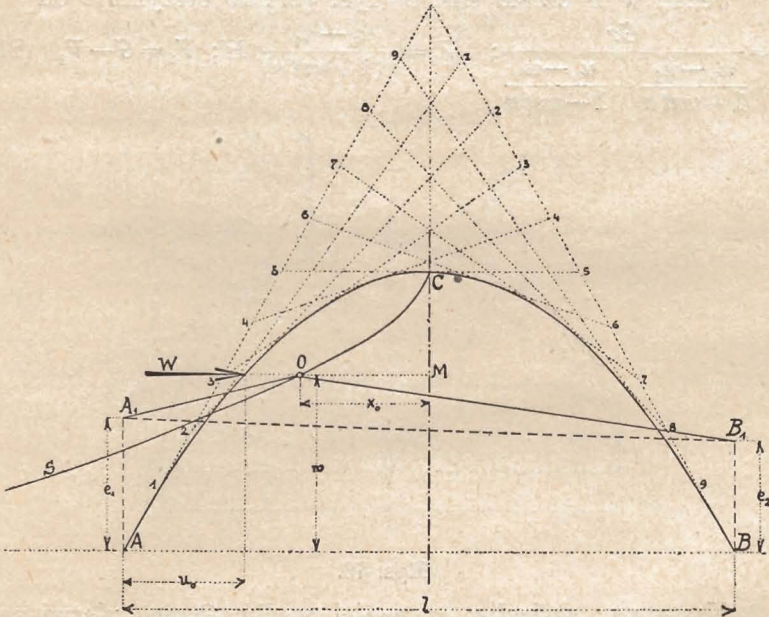
Na podstawie tej tabliczki wykreśliśmy w r. 71. linię wpływową dla H (rys. a), dla V_1 (rys. b), dla V_2 (rys. c), dla M_1 (rys. d).



Do rys. 71 c, d.

§ 34. Wpływ sił poziomych na łuk paraboliczny.

Wielkość parcia poziomego H_w , X_1 i X_2 wyznaczaliśmy już poprzednio (rów. 183.). Wstawiliśmy wartość dla y według



Rys. 72.

równania paraboli otrzymamy z rów. 183. i 184. dla łuku parabolicznego

$$e_1 = \frac{2n(1-n^2)(2-7n+8n^2)}{1+n^2[-15+50n-60n^2+24n^3]} f \quad . \quad . \quad (214)$$

$$e_2 = \frac{2(1-n^2)(3-9n+8n^2)}{15-50n+60n^2-24n^3} f \quad . \quad . \quad . \quad (215)$$

$$u_0 = l \left[1 - \frac{1}{2} (3-12n+24n^2-16n^3) \right] \quad . \quad . \quad (216)$$

Równanie 216. jest równaniem linii przecięcia się oddziaływań *COS* (rys. 72.). Jeżeli obliczymy rzędne, otrzymamy dla

$w=$	0.10	0.108	0.113	0.130	0.152	0.181	0.213	0.248	0.286	0.328	f		
$X_1=$	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	$\frac{l}{2}$		
$w=$	0.37	0.4	0.450	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	f		
$X_1=$	1	0.934	0.818	0.71	0.607	0.510	0.417	0.326	0.243	0.17	$\frac{l}{2}$		
										0.11	0.062	0.025	$\frac{l}{2}$

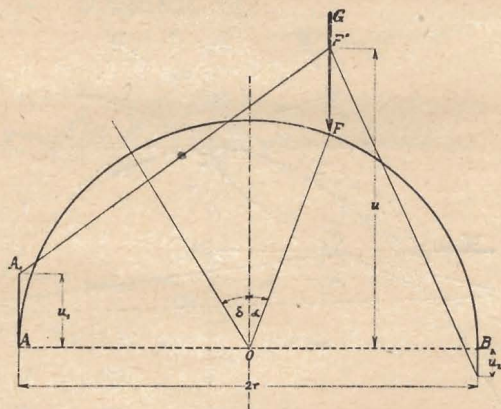
§ 35. Sklepienie półkoliste.

W podobny sposób badał Lindau ¹⁾ sklepienie półkoliste.

Podamy tu tylko wyniki, do których on doszedł.

Jeżeli w *F* działa siła *G* (rys. 72.), to otrzymuje on

$$H = \frac{Gr}{\frac{u_0 - u_1}{1 + w \sin \alpha} + \frac{u_0 - u_2}{1 - w \sin \alpha}}; \quad V_1 = \frac{u_0 - u_1}{r(1 + w \sin \alpha)} H; \quad V_2 = G - V_1 \quad (217)$$

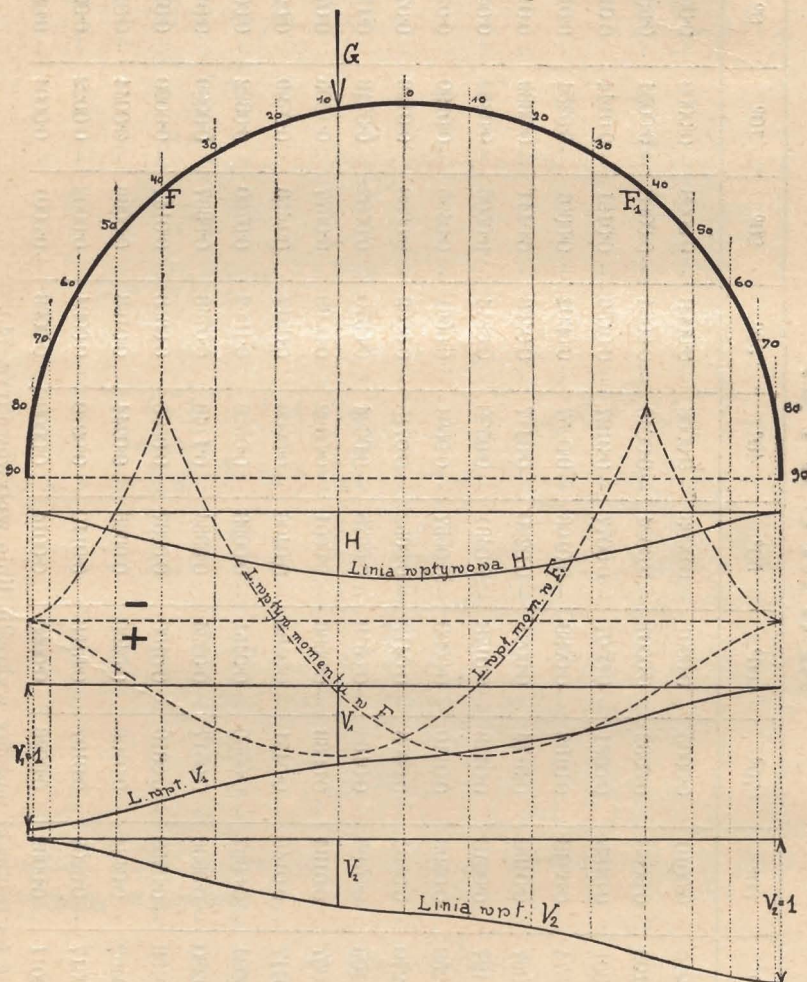


Rys. 73.

Następna tabliczka po części wedle *Greena* ułatwi nam zastosowanie wzorów 217.

¹⁾ Patrz Transaction of the Amer. society of civ. engineer. (1908/9 str. 387. tab. 61.).

$\alpha =$	0	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
$u_0 =$	1.330	1.326	1.316	1.298	1.275	1.245	1.210	1.170	1.125	r
$u_1 =$	0.241	0.288	0.326	0.360	0.387	0.413	0.434	0.455	0.475	r
$u_2 =$	0.241	0.183	0.108	0.011	-0.125	-0.330	-0.665	-1.333	-3.319	r



Rys. 74.

$H =$	0.459	0.441	0.386	0.313	0.224	0.139	0.069	0.0238	0.0085	G
$V_1 =$	0.500	0.458	0.382	0.294	0.199	0.115	0.054	0.017	0.002	G
$V_2 =$	0.500	0.542	0.618	0.706	0.801	0.885	0.946	0.983	0.998	G

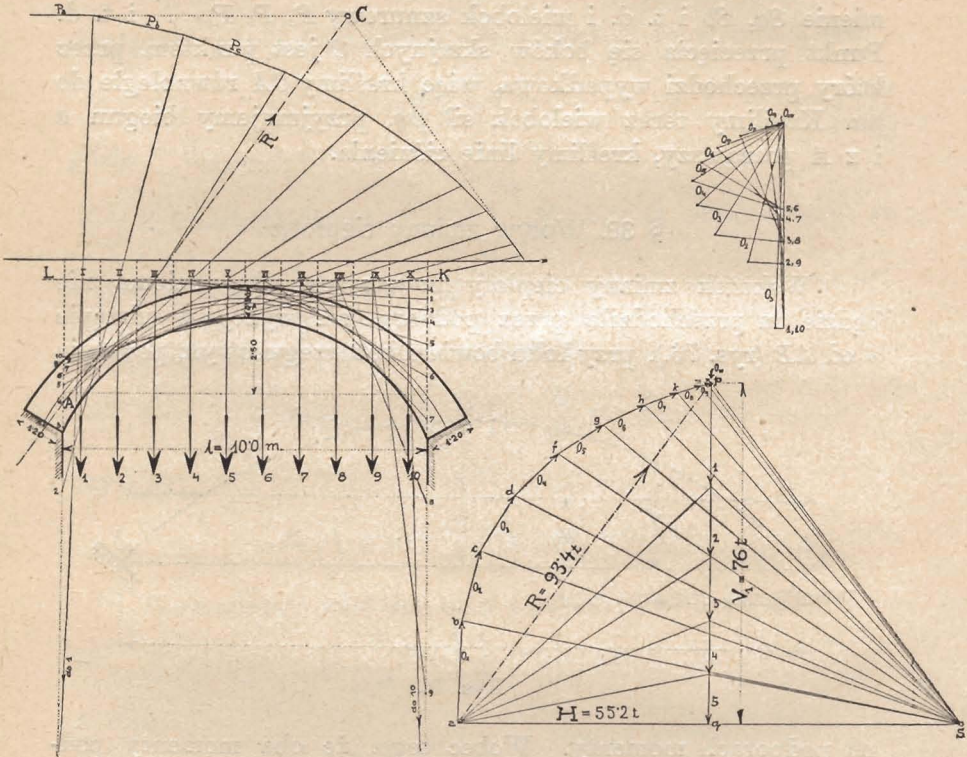
M o m e n t y.

Mom. w (%)		90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°	Gr
Siła w (%)												
prawa	80°	0.0016	0.0010	0.0005	0.0001	—0.0003	—0.0006	—0.0008	—0.0008	—0.0008	—0.0007	Gr
	70°	0.0108	0.0068	0.0032	0.0001	—0.0024	—0.0043	—0.0054	—0.0068	—0.0054	—0.0042	"
	60°	0.0301	0.0185	0.0081	—0.0007	—0.0077	—0.0127	—0.0156	—0.0161	—0.0144	—0.0104	"
	50°	0.0574	0.0343	0.0138	—0.0033	—0.0166	—0.0257	—0.0302	—0.0301	—0.0254	—0.0161	"
	40°	0.0867	0.0496	0.0174	—0.0091	—0.0290	—0.0417	—0.0468	—0.0441	—0.0339	—0.0162	"
	30°	0.1127	0.0613	0.0173	—0.0178	—0.0431	—0.0578	—0.0614	—0.0506	—0.0352	—0.0063	"
	20°	0.1258	0.0593	0.0110	—0.0290	—0.0557	—0.0681	—0.0661	—0.0495	—0.0190	0.0246	"
	10°	0.1270	0.0564	—0.0003	—0.0412	—0.0652	—0.0715	—0.0599	—0.0308	0.0146	0.0760	"
lewa	0°	0.1106	0.0785	—0.0162	—0.0519	—0.0675	—0.0624	—0.0370	0.0082	0.0716	0.1515	"
	10°	0.0807	0.0134	—0.0333	—0.0586	—0.0601	—0.0392	0.0038	0.0677	0.1505	0.0760	"
	20°	0.0417	—0.0146	—0.0451	—0.0564	—0.0406	—0.0009	0.0617	0.1453	0.0799	0.0246	"
	30°	0.0034	—0.0367	—0.0550	—0.0451	—0.0093	0.0515	0.1352	0.0790	0.0322	—0.0063	"
	40°	—0.0280	—0.0536	—0.0517	—0.0224	0.0334	0.1146	0.0743	0.0387	0.0089	—0.0162	"
	50°	—0.0459	—0.0558	—0.0370	0.0100	0.0337	0.0585	0.0353	0.0147	—0.0020	—0.0161	"
	60°	—0.0462	—0.0434	—0.0106	0.0498	0.0365	0.0244	0.0133	0.0036	—0.0044	—0.0104	"
	70°	—0.0317	—0.0209	0.0197	0.0153	0.0110	0.0070	0.0034	0.0002	—0.0022	—0.0042	"
	80°	—0.0011	0.0032	0.0026	0.0020	0.0014	0.0008	0.0003	—0.0001	—0.0004	—0.0007	"

Na podstawie tej tabliczki możemy wykreślić linie wpływowe (rys. 74.).

§ 36. Momenty i siły poprzeczne.

W celu wyznaczenia momentów i sił poprzecznych postępujemy tu podobnie, jak to robiliśmy przy łuku trój i dwuprzegubowym, tę tylko musimy wprowadzić zmianę, że tu



Rys. 75.

jest H odmienne, niż poprzednio. Uwzględnivszy tę okoliczność, kreślimy linię wpływową w zupełnie ten sam sposób, jak to przedtem czyniliśmy.

§ 37. Ciężar własny.

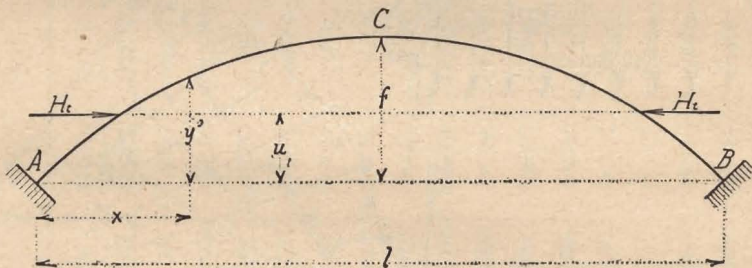
Dla ciężaru własnego możemy wykreślić linię ciśnienia w następujący sposób: jeżeli mamy wykreśloną linię przecięcia się oddziaływań LK (rys. 75.) i dla każdego położenia siły odnośne rzędne u , to chcąc wyznaczyć linię ciśnienia dla

ciężaru własnego, rozkładamy każdą siłę P na O_1 i O_1' i składamy O_1 w wielobok sił $abcd\dots p$, wtedy ap jest wypadkową, $aq=H$, $pq=V_1$. Chodzi jeszcze o punkt zaczepienia wypadkowej R .

W tym celu obieramy dowolny biegun S , kreślimy promienie Sa , Sb i t. d. i wielobok sznurowy $P_a P_b P_c\dots$ i t. d. Punkt przecięcia się boków skrajnych C jest punktem, przez który przechodzi wypadkowa, więc kreślimy CA równoległą do pa . Kreślimy teraz wielobok sił pq , przyjmujemy biegun a i z A począwszy, kreślimy linię ciśnienia.

§ 38. Wpływ zmiany ciepłoty.

Wskutek zmiany ciepłoty powstająca siła pozioma nie będzie tu przechodziła przez podpory, ale wyżej, w odstępzie u od AB (rys. 76.), przy łuku bowiem bezprzegubowym powstają



Rys. 76.

na podporach momenty. Wobec tego, że oba momenty podporowe są równe, kierunek parcia poziomego musi być poziomy i jeżeli nie uwzględnimy wpływu siły podłużnej, musi wypełniać warunki podane równaniami 170., 1., 2., 3.), przyczem dla dowolnego punktu E jest moment, wywołany zmianą ciepłoty,

$$M_t = -H_t(y-u) \quad \dots \quad (218)$$

Jeżeli przyjmiemy łuk paraboliczny, to pozioma poprowadzona w wysokości $u = \frac{2}{3}f$, wypełnia warunki podane równa-

niami: $\int_A^B M dx = 0$ i $\int_A^B M x dx = 0$; gdyż powierzchnie paraboli

Podwyższenie ciepłoty o t^0C wywołuje przedłużenie atl , równe skróceniu rozpiętości o $\Delta l = \frac{lH_t}{\varepsilon A_0}$, zatem zamiast H_t możemy wstawić $-\varepsilon A_0 at$, możemy więc napisać zamiast (171.):

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} dx - \varepsilon \alpha l \frac{t}{r_0} &= 0 \\ \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} y dx + \varepsilon \alpha t l &= \varepsilon \Delta l \\ \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{M}{I'} x dx + \frac{Hl}{2A_0 r_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (223)$$

Ponieważ tu $M=0$, więc według 173. $M = -Hy - X_2 - X_1 x$. Przyjmijmy oś A_x (rys. 62.) (więc t_0) znowu tak, aby

wedle 180. $\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{y dx}{I'} = 0$ i wykonajmy całkowanie, to otrzymamy trzy równania, z których wyznaczymy po opuszczeniu w trzecim równaniu bardzo małego wyrazu $\frac{Hl}{\varepsilon A_0 r_0}$.

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \frac{\varepsilon(\alpha t l - \Delta l)}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} y^2 \frac{dx}{I'}} \\ X_1 &= 0 \\ X_2 &= -\frac{\varepsilon \alpha t t}{r_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{dx}{I'}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (224)$$

Jeżeli teraz wstawimy wartości dla v_m , v'_m i v''_m wedle 178., to otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} H_t &= \frac{\varepsilon I'}{a_0} \frac{(atl - \Delta l)}{\sum_0^l y_m v_m} \\ X_1 &= 0 \\ X_2 &= - \frac{I_0 t}{A_0 r_0 a_0} \frac{\varepsilon A_0 \alpha t}{\sum_0^l v''_m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (225)$$

X_2 wypada bardzo małe tak, że możemy w przybliżeniu przyjmując $X_2=0$, czyli $z_0=0$, więc przyjmujemy, że parcie H_t działa w osi A_x , wyznaczonej już poprzednią konstrukcją dla ciężarów pionowych. Mianownik pierwszego równania 225. już wyznaczyliśmy także przedtem, jestto nn_0 , licznik da się łatwo obliczyć, przyczem, jeżeli przyczółki są stałe $\Delta l=0$.

Mając H_t możemy łatwo wyznaczyć momenty i siły poprzeczne.

Ze wzorów 221. i 225. wyrachowane parcie poziome jest prawie 6 razy większe, niż przy łuku dwuprzegubowym.

§ 39. Łuk bezprzegubowy kratowy.

Sposób Skibińskiego.

Do obliczenia sił wewnętrznych w pasach i kracie łuku bezprzegubowego możemy użyć wykreślnej metody Williota-Skibińskiego¹⁾, polegającej na zastosowaniu wieloboku odkształceń (*Deformationspolygon*) do obliczenia zeskładów statycznie niewyznaczalnych.

Jeżeli przypuścimy chwilowo, że łuk bezprzegubowy (rys. 77.) jest podparty w A i B , a mianowicie w punkcie A spoczywa na łożysku kołyskowem, zaś w punkcie B na kołyskowo-wałkowem, które może się przesunąć w kierunku poziomym, to pod wpływem pionowego obciążenia odkształci się w ten sposób, że punkty BCD przesuną się do $B'C'D'$. Jeżeli dalej przypuścimy, że pręty $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ są niesprężyste, to wystarczy spowodować przesunięcie punktu C' o x_1 , D' o x_2 i B' o x_3 aby pręty $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ przybrały swe pierwotne położenie. Na-

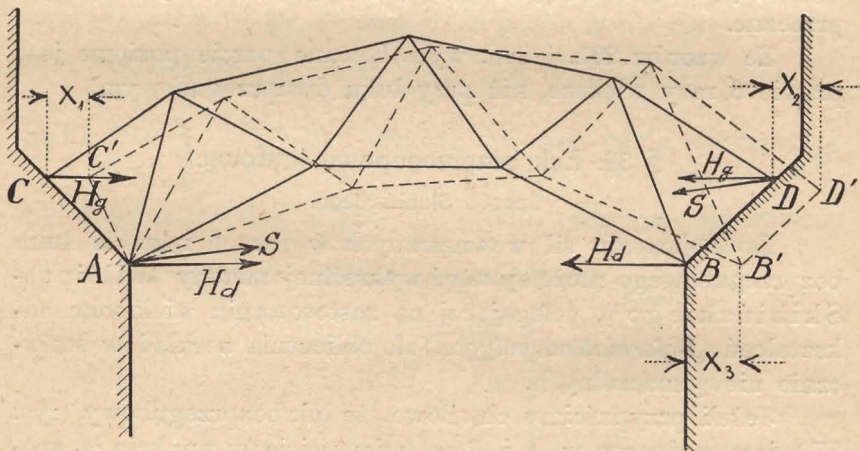
¹⁾ Skibiński. Das Deformationspolygon und dessen Anwendung zur graphischen Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke (Zeitschr. d. öst. Ing. u. Arch. V. 1883).

stepstwem tych przesunięć będą pewne oddziaływania w punktach A, B, C i D , które możemy wyznaczyć.

Jeżeli mianowicie przypuścimy, że na belkę zamiast ciężarów pionowych działają w punktach C i D dwie równe lecz przeciwne siły poziome $H_g=1$, to pod ich wpływem nastąpią pewne przesunięcia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ węzłów C, B i D . Jeżeliby te przesunięcia stały względem siebie w tym samym stosunku, co przesunięcia, wywołane obciążeniem pionowym, to parcie poziome

$$H_g=1 \cdot \frac{x_1}{\alpha_1}=1 \cdot \frac{x_2}{\alpha_2}=1 \cdot \frac{x_3}{\alpha_3}$$

wywoła przesunięcie węzłów w pierwotne położenie. W ogólności rzecz się będzie miała trochę inaczej. Musimy mianowicie przyjąć, że i w punktach A i B działają równe lecz odwrotne siły poziome $H_d=1$ i wyznaczyć odpowiednie przesunięcia β_1, β_2 i β_3 .



Rys. 77.

Dla symetrycznego obciążenia symetrycznej belki możemy więc w każdym wypadku wyznaczyć wartości H_g i H_d , które znoszą całkowicie przesunięcia, wywołane obciążeniem pionowym, muszą one bowiem wynikać z równań:

$$H_g \alpha_1 + H_d \beta_1 = x_1; \quad H_g \alpha_2 + H_d \beta_2 = x_2; \\ H_g \alpha_3 + H_d \beta_3 = x_3; \quad \dots \dots \dots (226)$$

gdzie zużytkowujemy tylko dwa równania, gdyż przy symetrycznej belce musi być:

$$x_2 = x_1 + x_3; \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3; \quad \beta_2 = \beta_1 + \beta_3 \quad \dots \dots (227)$$

Dla niesymetrycznego obciążenia belki także musimy dodać niesymetrycznie działające siły zewnętrzne, które same dla siebie są w równowadze. Jako takie przyjmuje prof. Skiński równe, lecz odwrotne siły S , działające w linii AD (względnie BC). Pod działaniem sił $S=1$ następują znowu przesunięcia pewne, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Siły H_g, H_d i S wystarczają dla zniesienia przesunięć węzłów B, C, D , spowodowanych obciążeniem pionowym, o ile zadość czynią równaniom:

$$\left. \begin{aligned} H_g \cdot \alpha_1 + H_d \cdot \beta_1 + S\gamma_1 &= x_1 \\ H_g \cdot \alpha_2 + H_d \cdot \beta_2 + S\gamma_2 &= x_2 \\ H_g \cdot \alpha_3 + H_d \cdot \beta_3 + S\gamma_3 &= x_3 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

Skąd:

$$H_g = \frac{\{\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2\}x_1 + \{\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3\}x_2 + \{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\}x_3}{+N} \quad . \quad . \quad (229)$$

$$H_d = \frac{\{\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2\}x_1 + \{\alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3\}x_2 + \{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\}x_3}{-N} \quad . \quad . \quad (230)$$

$$S = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

gdzie mianownik N ma wartość:

$$N = c \left\{ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

przyczem

$$c = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \quad . \quad . \quad (233)$$

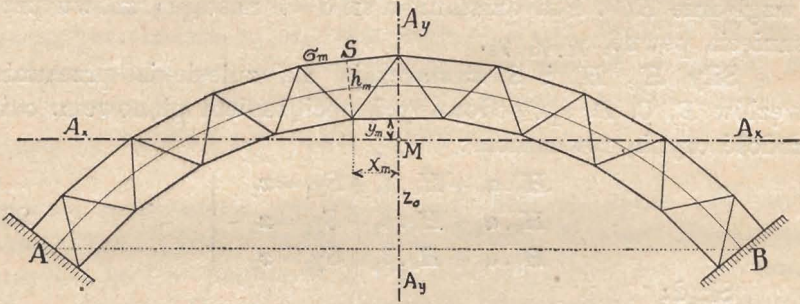
Z tych ostatnich równań widać, że dla symetrycznego obciążenia, dla którego $x_2 = x_1 + x_3$, znika S . Jeżeli przesunięcia wywołane siłami $H_g=1, H_d=1, S=1$ wyznaczymy, to we wzorach powyższych współczynniki przy x_1, x_2, x_3 , jakoteż N są stałe tak, że możemy je naprzód poobliczać. Zmienia się więc tylko x_1, x_2, x_3 , dla rozmaitych pionowych obciążeń. Wyznaczenie przesunięć, spowodowanych temi obciążeniami, możemy łatwo uskutecznić zapomocą planu przesunięć Williota.

§ 40. Obliczenie analityczne łuku bezprzegubowego kratowego.

Możemy tu postępować wedle Melana podobnie, jak przy łuku o ścianie pełnej, a więc wedle § 28. Jeżeli oś łuku jest wybitna (rys. 78.), to przyjmujemy znów oś A_x i pionową oś

A_y i otrzymamy jak pierwiej moment ze względu na punkt x_my_m wedle 173. $M = \mathfrak{M} - Hy_m - X_1x_m - X_2$, przyczem

$$X_1 = H \frac{e}{l}, \quad X_2 = Hz_0.$$



Rys. 78.

Jeżeli teraz nie uwzględnimy wpływu kraty na H , a $S = \pm \frac{M}{h_m}$ siecz σ_m , to wedle prawa najmniejszości pracy odkształcenia otrzymamy dla stałych podpór i niezmienniej ciepłoty, jeżeli s oznacza długość pręta a A jego przekrój:

$$\sum \frac{S}{\varepsilon A} \frac{dS}{dH} s = 0, \quad \sum \frac{S}{\varepsilon A} \frac{dS}{dX_1} s = 0, \quad \sum \frac{S}{\varepsilon A} \frac{dS}{dX_2} s = 0$$

a ponieważ $\frac{dS}{dH} = \pm \frac{y_m}{h_m}$ siecz σ_m , $\frac{dS}{dX_1} = \pm \frac{x_m}{h_m}$ siecz σ_m

$\frac{dS}{dX_2} = \pm \frac{\text{siecz } \sigma_m}{h_m}$, więc otrzymamy $\sum \frac{My_ms_m}{\varepsilon h_m^2 A_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m = 0$,

$\sum \frac{Mx_ms_m}{\varepsilon h_m^2 A_m} \text{ siecz } \sigma_m = 0$, $\sum \frac{Ms_m}{\varepsilon h_m^2 A_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m = 0$. Jeżeli dla skró-

cenia nazwiemy $q_m = \frac{s_m A_1}{h_m^2 A_m}$ siecz $^2 \sigma_m = \frac{a_m A_0}{h_m^2 A_m}$ siecz $^3 \sigma_m$. (234)

przyczem A_0 jest średnią powierzchnią pasu, i jeżeli przyjmie-

my ε stałe, i wstawimy wartość za M , otrzymamy

$$\sum \mathfrak{M} q_m y_m - H \sum q_m y_m^2 - X_1 \sum q_m y_m x_m - X_2 \sum q_m y_m = 0$$

$$\sum \mathfrak{M} q_m x_m - H \sum q_m x_m y_m - X_1 \sum q_m x_m^2 - X_2 \sum q_m y_m = 0$$

$$\sum \mathfrak{M} q_m - H \sum q_m y_m - X_1 \sum q_m x_m - X_2 \sum q_m = 0.$$

Przyjmijmy osie tak, aby

$$\sum q_m x_m y_m = 0, \quad \sum q_m x_m = 0, \quad \sum q_m y_m = 0 \quad . \quad . \quad (235)$$

Jeżeli przyjmiemy że w punkcie $x_m y_m$ działa siła q_m , to równanie 235. wyznacza nam środek ciężkości tych sił. Wtedy otrzymamy

$$H = \frac{\sum m q_m y_m}{\sum q_m y_m^2}, \quad X_1 = \frac{\sum m q_m x_m}{\sum q_m x_m^2}, \quad X_2 = \frac{\sum m q_m}{\sum q_m} \quad . \quad . \quad (236)$$

Jeżeli teraz przypuścimy, że siła G działa w jednym punkcie $x y$, to otrzymamy analogicznie do 178. i 179.

$$\left. \begin{aligned} v_m &= q_m y_m = \frac{a_m y_m A_0}{h_m^2 A_m} \text{ siecz }^3 \sigma_m \\ v_m' &= q_m x_m = \frac{a_m x_m A_0}{h_m^2 A_m} \text{ siecz }^3 \sigma_m \\ v_m'' &= q_m = \frac{a_m A_0}{h_m^2 A_m} \text{ siecz }^3 \sigma_m \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (237)$$

a wtedy

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{Mv}{\sum vy} \\ X_1 &= \frac{Mv'}{\sum v'x} \\ X_2 &= \frac{Mv''}{\sum v''} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

Wyznaczenie linii wpływowych nastąpi wtedy wedle § 30. rys. 62., jeżeli tylko v_m , v_m' i v_m'' obliczymy wedle 237.

Jeżeli łuk ma pionową oś symetrii, to druga oś A_x jest poziomą. Jeżeli rzędne punktów od osi AB nazwiemy y' , to $y' = y + z_0$, więc $\sum q_m (y'_m - z_0) = 0$, stąd

$$z_0 = \frac{\sum q_m y'_m}{\sum q_m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

§ 41. Wpływ zmiany ciepłoty.

Jeżeli uwzględnimy zmianę ciepłoty o t^0 , to s przedłuża się o ats , zatem otrzymamy na podstawie prawa najmniejszości pracy

$$\sum \left(\frac{S}{\varepsilon A} + at \right) s \frac{dS}{dH} = 0, \quad \sum \left(\frac{S}{\varepsilon A} + at \right) s \frac{dS}{dX_1} = 0, \quad \sum \left(\frac{S}{\varepsilon A} + at \right) s \frac{dS}{dX_2} = 0.$$

Wstawmy teraz $\mathfrak{M}=0$, i przyjmijmy te same osie, co poprzednio, a wtedy otrzymamy, uwzględnivszy rów. 235.,

$$\begin{aligned}\sum \frac{\alpha t s_m y_m}{h_m} \text{ siecz } \sigma_m - H \sum q_m y_m^2 &= 0 \\ \sum \frac{\alpha t s_m x_m}{h_m} \text{ siecz } \sigma_m - X_1 \sum q_m x_m^2 &= 0 \\ \sum \frac{\alpha t s_m}{h_m} \text{ siecz } \sigma_m - X_2 \sum q_m &= 0,\end{aligned}$$

a stąd

$$\left. \begin{aligned}H &= \frac{\varepsilon \alpha t A_0 \sum \frac{s_m y_m}{h_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m}{\sum q_m y_m^2} \\ X_1 &= \frac{\varepsilon \alpha t A_0 \sum \frac{s_m x_m}{h_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m}{\sum q_m x_m^2} \\ X_2 &= \frac{\varepsilon \alpha t A_0 \sum \frac{s_m \text{ siecz }^2 \sigma_m}{h_m}}{\sum q_m}\end{aligned} \right\} \dots \dots (240)$$

Jeżeli łuk jest symetryczny do osi A_y , to w przybliżeniu wedle Melana $\sum \frac{s_m y_m}{h_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m = l$

$$\begin{aligned}\sum \frac{s_m x_m}{h_m} \text{ siecz }^2 \sigma_m &= 0, \quad \sum \frac{s_m \text{ siecz }^2 \sigma_m}{h_m} = 0 \\ \text{więc } H &= \frac{\varepsilon \alpha t l A_0}{\sum q_m y_m^2} \dots \dots \dots (241)\end{aligned}$$

i działa w osi A_x , wyznaczonej jak poprzednio.

B. Teoria wieszarów.

IV. Wieszar gibki.

§ 42. Linia sznurowa dla dowolnego obciążenia pionowego.

Jeżeli mamy sznur w dwu punktach A_0 i B_0 przytrzymamy (rys. 79.) i obciążony pionowymi siłami $P_1, P_2, \dots, P_r, P_m, P_{m+1}$, to otrzymamy dla równowagi wielobok sznurowy, którego kształt zależny jest od sił P . Siły, działające w sznurze, nazwijmy

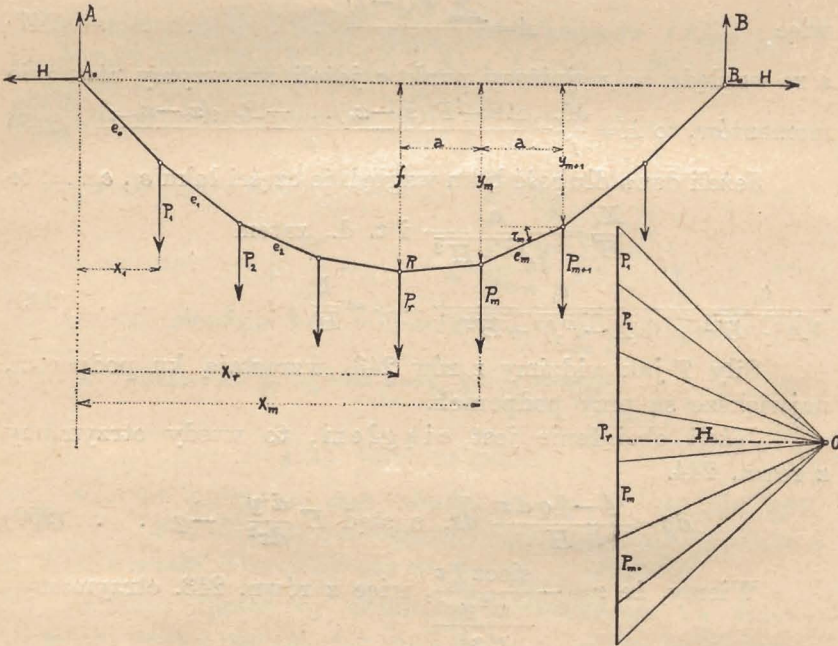
T , więc w m -tym boku T_m . Oddziaływanie pionowe nazwijmy A i B , poziome zaś H . Składowa pozioma jakiejkolwiek siły T będzie stała i równa H . Składowa pionowa siły T_m będzie

$$V_m = A - P_1 - P_2 - \dots - P_m,$$

a kąt nachylenia siły T_m do poziomu

$$\text{st } \tau_m = \frac{V_m}{H} = \frac{A - P_1 - P_2 - \dots - P_m}{H} \quad . \quad . \quad . \quad (242)$$

$$\text{Siła } T_m = \sqrt{V_m^2 + H^2} = H \text{ siecz } \tau_m \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$



Rys. 79.

Nazwijmy y rzędne wierzchołków wieloboku sznurowego, mierzone od AB , odstęp poziomy wierzchołków a , to

$$y_{m+1} - y_m = a \text{ st } \tau_m = \frac{A - P_1 - P_2 - \dots - P_m}{H} (x_{m+1} - x_m) \quad . \quad . \quad . \quad (244)$$

$$\text{albo } \Delta y_m = \frac{A - P_1 - P_2 - \dots - P_m}{H} \Delta x_m.$$

$$\text{Podobnie } \Delta y_{m-1} = \frac{A - P_1 - P_2 - \dots - P_{m-1}}{H} \Delta x_{m-1}, \text{ więc}$$

$$\Delta^2 y_m = \Delta y_m - \Delta y_{m-1} = -\frac{P_m}{H} \Delta x_m + \frac{A - P_1 - P_2 - \dots - P_{m+1}}{H} (\Delta x_m - \Delta x_{m-1})$$

$$\text{a także } \Delta^2 y_m = y_{m+1} - y_m - y_m + y_{m-1} = y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}.$$

$$\text{A że jeżeli } \Delta x_m = \Delta x_{m-1} = a, \text{ to } \Delta^2 y_m = -\frac{P_m}{H} a \quad . \quad . \quad (245)$$

$$\text{więc } \frac{\Delta y_m}{a} - \frac{\Delta y_{m-1}}{a} = st \tau_m - st \tau_{m-1} = -\frac{P_m}{H} \quad . \quad . \quad . \quad (246)$$

Jeżeli punkty A i B leżą w poziomej, to oddziaływania pionowe są jak dla belki prostej w dwu punktach podpartej,

$$\text{więc } A = \sum_l \frac{P(l-x)}{l} \quad . \quad . \quad . \quad (247)$$

$$\text{a ze względu na najniższy punkt } r, \text{ jeżeli utworzymy równanie momentów, to } H = \frac{M_r}{f} = \frac{Ax_r - P_1(x_r - x_1) \dots - P_{r-1}(x_r - x_{r-1})}{f} \quad (248)$$

Jeżeli dana długość łuku względnie części łuku $e_0, e_1 \dots$, to

$$\frac{X_1}{H} = \frac{e_0}{\sqrt{A^2 + H^2}} \text{ i t. d., zatem}$$

$$\frac{e_0}{\sqrt{A^2 + H^2}} + \frac{e_1}{\sqrt{(A - P_1)^2 + H^2}} + \dots = \frac{l}{H} \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

Siły T jak widzimy z rów 243. wzrastają ku podporom, największe są przy podporach.

Jeżeli obciążenie jest ciąglem, to wtedy otrzymamy z równ. 244.

$$dy = \frac{A - \int q dx}{H} dx, \text{ a stąd } H \frac{d^2 y}{dx^2} = -q \quad . \quad . \quad (250)$$

$$\text{Wiemy, że } r = -\frac{\text{siecz }^3 \tau}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \text{ więc z równ. 243. otrzymamy}$$

$$T_x = H \text{ siecz } \tau_m = -\frac{q}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \text{ siecz } \tau_m = \frac{qr}{\text{siecz}^2 \tau} = qr \text{ dost } \frac{2}{l} \quad . \quad (251)$$

$$\text{W środku, gdzie } \tau = 0, \text{ niech będzie } q_0 \text{ i } r_0, \text{ więc } H = q_0 r_0 \quad (252)$$

$$\text{Jeżeli obciążenie jest jednostajnie rozdzielonem, to dla stałego } q \text{ otrzymamy z 250. } y = \frac{qx^2}{2H} \quad . \quad . \quad . \quad (253)$$

więc linia sznurowa jest wtedy parabolą.

Dla $x = \frac{l}{2}$ jest $y = f$, więc $H = \frac{ql^2}{8f}$ (254)

a więc równanie identyczne z rów. 5. dla łuków.

Wstawmy wartość za H w równ. 253. a otrzymamy

$$y = 4f \frac{x^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

Najw T_m jest dla $x=0$; więc najw $T = \sqrt{H^2 + \left(\frac{l}{2} ql\right)^2} =$
 $= \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{l}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (256)$

Jeżeli ciężar przyjmieśmy jednostajnie rozłożony na długości linwy, to $q = g$ siecz t , więc z 250.

$H \frac{d^2y}{dx^2} = -g$ siecz $\tau = -g \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{l}{2}}$. Jeżeli równanie to scałkujemy, otrzymamy $y = \frac{H}{2g} \left(e^{\frac{Hx}{g}} + e^{-\frac{Hx}{g}} - 2 \right)$.

Jeżeli nazwiemy $\frac{H}{g} = \frac{1}{c}$, to $y = \frac{1}{2c} \left(e^{cx} + e^{-cx} - 2 \right) \quad . \quad (257)$

Jestto równanie linii łańcuskowej, a długość jej od podpory do punktu x, y , będzie $s = \frac{1}{l} \sqrt{2cy + c^2y^2} \quad . \quad . \quad (258)$

§ 43. Wieszar gibki.

Wieszar gibki możemy utworzyć albo z łańcucha albo z linwy. Wedle tego rozróżniamy mosty łańcuchowe (n. *Kettenbrücke*) i mosty linwowe (n. *Seilbrücke*).

Ciężar jednostkowy zeskładu, zawieszonego na linwie, i pomostu wraz z obciążeniem ruchomem zupełnem jednostajnie rozdzielonem niech będzie q_0 .

a) Most łańcuchowy. Ponieważ linia łańcuskowa nie wiele różni się od paraboli, więc możemy przyjąć ciężar łańcucha w przybliżeniu, zakładając, że kształt łańcucha jest paraboliczny, i że ciężar jego jest proporcjonalny do siły, w nim działającej.

Jeżeli ciężar łańcucha na mb w kluczu nazwiemy g_0 , to $g_x = (g_0$ siecz $\tau)$ siecz τ , a że siecz $^2 \tau = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{4f \cdot 2x}{l^2} \right)^2 =$

$$= 1 + \frac{64f^2x^2}{l^2} \text{ więc } g_x = g_0 \left(1 + \frac{64f^2x^2}{l^4} \right) \quad (259)$$

Ciężar prętów wiszących na jednostkę długości pomostu $gy = g \frac{4fx^2}{l^2}$ bo dla paraboli jest $y = \frac{4fx^2}{l^2}$.

Otrzymamy więc z 250. zmieniawszy znak, bo teraz y liczymy do góry jako dodatnie,

$$H \frac{dy}{dx^2} = q_0 + g_0 + \left(\frac{64f^2}{l^4} g_0 + g' \frac{4f}{l^2} \right) x^2, \text{ a jeżeli nazwiemy } q_0 + g_0 = q,$$

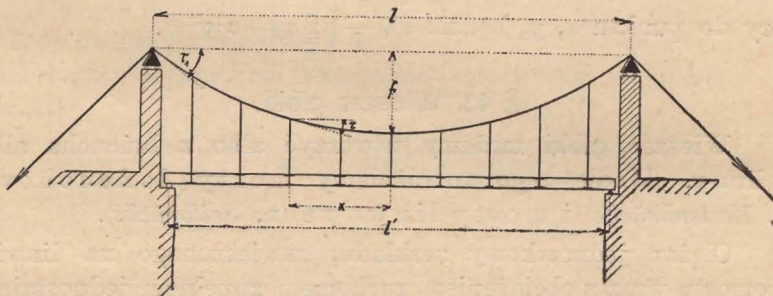
$$\text{to } H \frac{dy}{dx} = qx + \left(\frac{64f^2g_0}{l^4} + \frac{4g'f}{l^2} \right) \frac{x^3}{3}, \text{ a}$$

$$y = \frac{qx^2}{2H} + \left(\frac{64f^2g_0}{l^4} + \frac{4g'f}{l^2} \right) \frac{x^4}{l^2}. \text{ Nazwijmy}$$

$$\frac{2}{3} \frac{f}{l^2} \left(\frac{16fg_0}{l^2} + g' \right) = k \quad (260)$$

$$\text{to } y = \frac{x^2}{2H} (q + kx^2) \quad (261)$$

$$\text{Dla } x = \frac{l}{2}, y = f, \text{ więc } H = \frac{l^2}{8f} \left(q + k \frac{l^2}{y} \right) \quad (262)$$



Rys. 80.

Jeżeli l' długość pomostu jest nieco mniejsza od rozpiętości łańcucha l , i jeżeli w rów. 262. wstawimy wartość dla y i k , to otrzymamy

$$H = g_0 \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right) \frac{l^2}{8f} + \left(q_0 + \frac{fg'}{6} \right) \frac{l'(2l-l')}{8f} \quad (263)$$

Jeżeli nazwiemy A_0 przekrój łańcucha w wierzchołku w cm^2 , γ ciężar gatunkowy wyrażony w $\frac{kg}{dm^3}$, τ natężenie do-

puszczalne, w kg/cm^2 , to $g_0 = C \frac{A_0 \gamma}{10} kg/m$, a $A_0 = \frac{H}{\tau}$, przyczem C współczynnik ustrojowy wynosi 1.15 do 1.20. Wstawmy to w rów. 260. i 262., a otrzymamy

$$A_0 \tau = C A_0 \gamma \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2} \right) \frac{f^2}{8 f} + \left(q_0 + \frac{q' f}{6} \right) \frac{l^2}{8 f}, \text{ a stąd}$$

$$A_0 = \frac{q_0 + \frac{q' f}{6}}{\tau - \frac{C \gamma}{10} \left(\frac{l^2}{8 f} + \frac{f}{3} \right)} \frac{l^2}{8 f} \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

Ciężar łańcucha na połowie przęsła

$$G = \int_0^{\frac{l}{2}} g_x dx = \int_0^{\frac{l}{2}} g_0 \left(l + \frac{64 f^2 x^2}{l^4} \right) dx = g_0 \left(\frac{l}{2} + \frac{8 f^2}{3 l} \right) =$$

$$= \frac{A_0 \gamma l}{20} \left(1 + \frac{16 f^2}{3 l^2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (265)$$

Więc składowe pionowe oddziaływania dla obciążenia zupełnego $V = \frac{l}{2} g_0 l + \frac{1}{2} g' \cdot \frac{1}{3} f l + G = \frac{l}{2} \left(q_0 + \frac{g' f}{3} \right) + G$. (266)

Zaś największa siła w łańcuchu najw $T = \sqrt{H^2 + V^2}$ (267)

$$\text{stąd najw } A = \frac{H}{\tau} \sqrt{l + \frac{V^2}{H^2}} = A_0 \sqrt{l = \frac{V^2}{H^2}} = A_0 \sqrt{1 + st^2 \tau_1} =$$

$$= A_0 \text{ siecz } \tau_1 \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

b) Most linwowy. Tu przekrój jest stałym, ciężar linwy g na mb linwy. Jeżeli w przybliżeniu przyjmiemy kształt paraboliczny, to ciężar linwy na mb pomostu

$g_x = g$ siecz $\tau = g \sqrt{1 + st^2 \tau} = g \sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}}$. Ciężar prętów wiszących otrzymamy jak poprzednio, więc wedle 250.

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = q_0 + g \sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}} + \frac{4 f g' x^2}{l^2}.$$

Wyraz z pierwiastkiem możemy rozwinąć w szereg i wziąć tylko pierwsze dwa wyrazy, mianowicie $\sqrt{1 + \frac{64 f^2 x^2}{l^4}} = 1 + \frac{32 f^2 x^2}{l^4}$.

Otrzymamy więc $H \frac{d^2 y}{dx^2} = q_0 + g + \left(\frac{32 g f^2}{l^4} + \frac{4 f g'}{l^2} \right) x^2$

$$H \frac{dy}{dx} = (q_0 + g) x + \left(\frac{32 g f^2}{l^4} + \frac{4 f g'}{l^2} \right) \frac{x^3}{3}$$

$$Hy = (q_0 + g) \frac{x^2}{l} + \left(\frac{32gf^2}{l^4} + \frac{4fq'}{l^2} \right) \frac{x^4}{l^2}$$

$$y = \frac{x^2}{2H} (q_0 + g + \kappa x^2) \quad . \quad . \quad . \quad (269)$$

$$\text{jeżeli } \kappa = \frac{2}{3} \frac{f}{l^2} \left(\frac{8gf}{l^2} + g' \right) \quad . \quad . \quad . \quad (270)$$

Z równ. 269. otrzymamy dla $y=f$, $x = \frac{l}{2}$

$$H = \frac{l^2}{8f} \left(q_0 + g + \kappa \frac{l^2}{4} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (271)$$

$$\text{Ciężar połowy linwy } G = \int_0^{\frac{l}{2}} g_x dx = \int_0^{\frac{l}{2}} g \sqrt{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}}$$

$$G = \int_0^{\frac{l}{2}} g \left(1 + \frac{32f^2 x^2}{l^4} \right) = g \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) \quad . \quad . \quad (272)$$

V i najw T otrzymamy jak w równ. 266. i 267. $stv_i = \frac{V}{H}$. Prze-

krój linwy $A = \frac{\text{najw } T}{\tau} = \frac{H}{\tau}$ siecz τ_1 .

Wstawmy wartość za H i $g = \frac{\gamma A}{10}$, to otrzymamy

$$A = \frac{q_0 + \frac{fg'}{6}}{\tau - \frac{\gamma}{10} \left(\frac{l^2}{8f} + \frac{f}{6} \right) \text{ siecz } \tau_1} \frac{l^2}{8f} \text{ siecz } \tau_1 \quad . \quad . \quad (273)$$

Długość L linwy lub łańcucha otrzymamy z równania

$L = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$. Scałkować możemy ten wyraz, rozwinięty w szereg.

Dla małych wartości κ , a więc dla małego $\frac{f}{l}$, otrzymuje Melan w przybliżeniu

$$L = l \left(1 + \frac{8}{3} \frac{f^2}{l^2} - \frac{32}{5} \frac{f^4}{l^4} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (274)$$

§ 44. Największa rozpiętość.

Teoretycznie największą rozpiętość otrzymamy dla warunku, aby przekrój był jeszcze skończoną wartością. Więc dla mostów łańcuchowych otrzymamy z 264.

$$\tau > \frac{C\gamma l}{10} \left(\frac{l}{8f} + \frac{f}{3l} \right), \text{ zatem}$$

$$\text{najw } l \leq \frac{\frac{80\tau}{C\gamma}}{\frac{l}{f} + \frac{3}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad (275)$$

Dla linwowych mostów mamy

$$\tau > \frac{\gamma}{10} \left(\frac{l^2}{8f} + \frac{f}{6} \right) \text{ siecz } \tau', \text{ więc}$$

$$\text{najw } l \leq \frac{\frac{80\tau}{\gamma \text{ siecz } \tau'}}{\frac{l}{f} + \frac{4}{3} \frac{f}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

Dla $x = \frac{l}{2}$ możemy wstawić siecz $\tau_1 = \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}$.

Otrzymamy więc dla rozmaitych τ następane teoretyczne największe rozpiętości

$\frac{f}{l} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$	
most łańc. $C\gamma = 9.0$	$\tau = 800$	853	692	582	501	440 m
	$\tau = 1200$	1280	1039	873	752	660 "
most linwowy $\gamma = 7.8$	$\sigma = 3000$	3364	2819	2416	2018	1800 "
	$\sigma = 4000$	4485	3754	3228	2690	2400 "

Rzeczywiste największe rozpiętości są mniejsze.

Przy budowie mostu na North Riwer przyjęto $\tau = 4200$ kg/cm^2 , przekrój 32740 cm^2 , $\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$ a $l = 1321 \text{ cm}$, więc znacznie mniej, niż wedle tej tablicy.

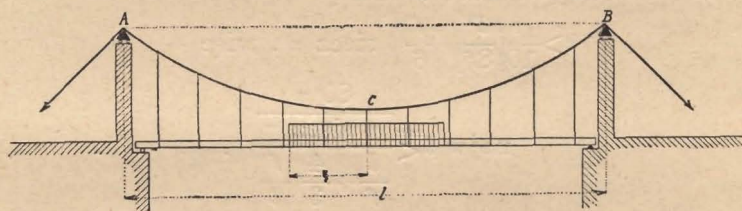
Od stosunku $\frac{l}{f}$, jak widzimy, zależny jest bardzo ciężar łańcucha, a także ciężar prętów pomostowych i koszt pylonów. Melan oblicza najkorzystniejszy stosunek $\frac{f}{l}$ dla $l = 100 \text{ m}$ i otrzymuje $\frac{f}{l} = \frac{1}{9}$.

§ 45. Zmiana kształtu wieszara.

Ze względu na to, że obecnie wieszarów gibkich prawie nie używamy, ograniczymy się tylko do podania wyników wedle Melana.

Największe zniżenie wierzchołka C (rys. 81.) nastąpi dla obciążenia średniej części wieszara, przyczem $\frac{\xi}{l} = 0.1 + 0.025 \frac{g}{p}$

$$\text{a } \Delta f_1 = \left(0.007 + 0.046 \frac{p}{g} - 0.0075 \frac{p^2}{g^2} \right) f \quad . \quad . \quad . \quad (277)$$

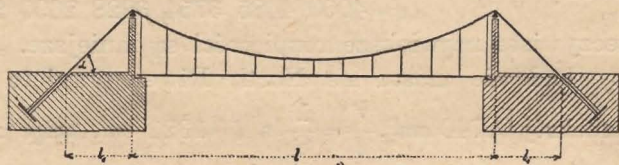


Rys. 81.

Zniżenie wierzchołka z powodu przedłużenia łańcucha otrzymamy, zróżniczkowawszy równanie 269. i nazwawszy $n = \frac{f}{l}$,

$$\Delta f_2 = \frac{15}{16(5n - 24n^3)} \Delta L \quad . \quad . \quad . \quad (278)$$

Przedłużenie ΔL może być albo sprężyste albo wskutek zmiany ciepłoty albo przesunięcia się podpór.



Rys. 82.

Obliczywszy je i wstawiając w 278., otrzymamy (rys. 82.)

$$\Delta f_2 = \left\{ \frac{1}{2} l - l_1 + \frac{15 + 96n^4}{16(5n - 24n^3)} (l + 2l_1) \right\} c \quad . \quad (279)$$

jeżeli

$$c = \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{g+p}} \pm at \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

V. Wieszar stężony belką prostą.

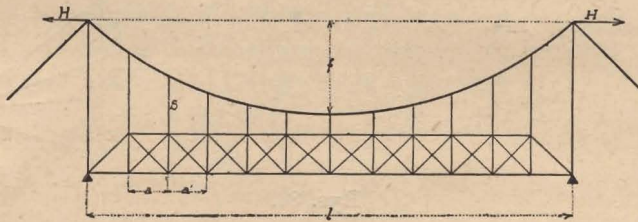
§ 46. Zasada obliczenia.

Przy gibkim wieszarze są zmiany kształtu za wielkie, więc łączymy go z belką stężającą (n. *Versteifungsbalken*) za pośrednictwem prętów wiszących. Dźwigar ten złożony jest albo w dwu punktach podpartym, albo ciągłym, dwu lub trzyprzęsłowym. Jest on statycznie niewyznaczalnym, ale przez użycie przegubów zrobić go możemy statycznie wyznaczalnym lub przynajmniej zmniejszyć stopień niewyznaczalności.

Jeżeli belka stężająca jest dość tęga, to ugięcie jej jest małe, a także i zmiana kształtu wieszaru jest niewielką. Licząc w przybliżeniu, przypuścimy, że zmiana kształtu wieszaru jest tak mała, że nie wpływa na rozkład sił działających na wieszar i belkę, że więc przez to nie zmieniają się ramiona sił, działających na wieszar. Zazwyczaj przybliżone to obliczenie jest dla praktyki wystarczającym.

§ 47. Warunki równowagi wieszaru.

Równania 242. do 248. pozostają dla wieszaru ważne i w tym wypadku, jeżeli zamiast sił P wstawimy do tych wzorów siły, działające w prętach S (rys. 83.), powiększone ciężarem węzłowym wieszaru własnym K .



Rys. 83.

Jeżeli odstęp prętów wiszących jest równy, więc $a=a'$, to z 245. otrzymamy $-H\Delta^2 y_m = (S+K) a$.

Jeżeli kształt wieszaru jest paraboliczny, to wtedy siły S muszą być wszędzie równe, a więc belka stężająca ma zadanie rozłożenia obciążenia w ten sposób na pręty wiszące, aby S były równe.

Wedle równ 246. $st \tau_m - st \tau_{m-1} = -\frac{S_m + K}{H}$.

Dla paraboli $y = 4f \frac{x^2}{l^2}$, $st \tau_{m-1} = \frac{y_m - y_{m-1}}{a} = \frac{4f}{l^2} (2x - a)$

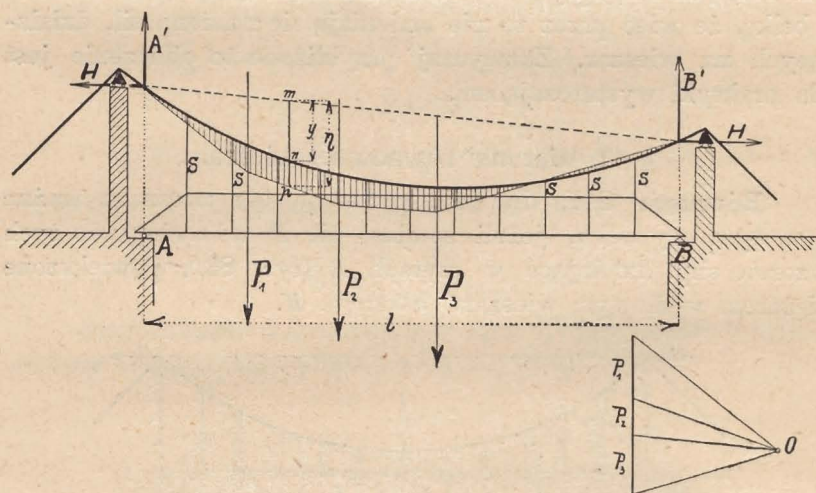
$st \tau_m = \frac{4f}{l^2} (2x + a')$, więc

$st \tau_m - st \tau_{m-1} = \frac{4f}{l^2} (a' + a) = \frac{S_m + K}{H}$,

więc $H \frac{4f}{l^2} (a + a') = S_m + K$ (281)

Dla bardzo małych $a = a' = dx$, gdy s_m i k liczymy na jednostkę długości w poziomie, $st_m + k = -H \frac{d^2 y}{dx^2}$, a więc dla

paraboli $s + k = H \frac{8f}{l^2}$ (282)



Rys. 84.

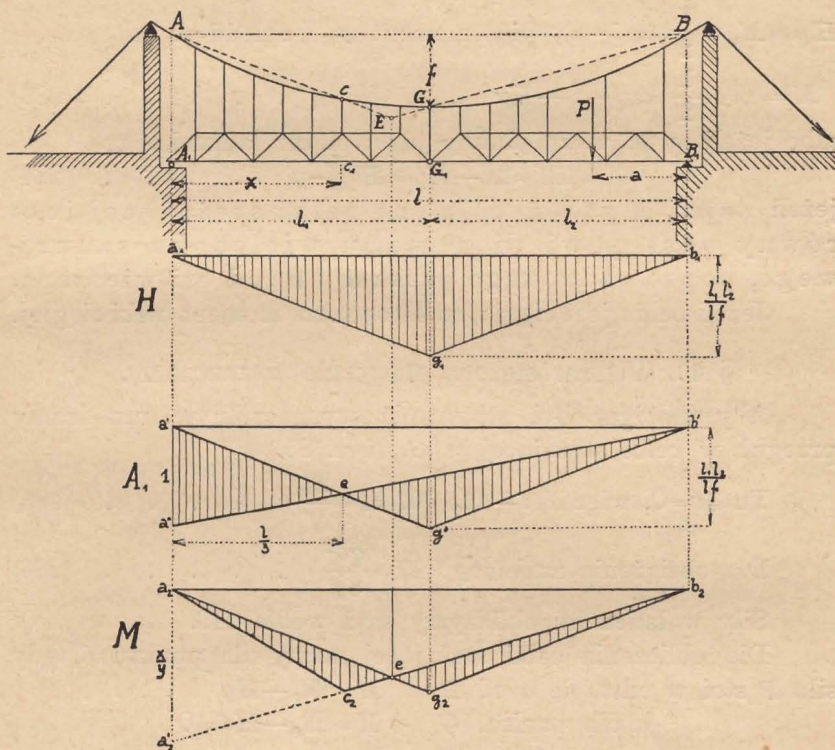
Na podstawie założenia przyjmujemy, że te wzory są też ważne i po odkształceniu, co się sprawdza tem bardziej, im więcej sztywną jest belka stężająca.

48. Siły zewnętrzne belki stężającej.

Na belkę stężającą działają ciężar własny belki i pomostu, ciężar ruchomy i siły, działające w prętach wiszących. Jeżeli by je opuścić, to otrzymamy siły zewnętrzne belki zwykłej. Na-

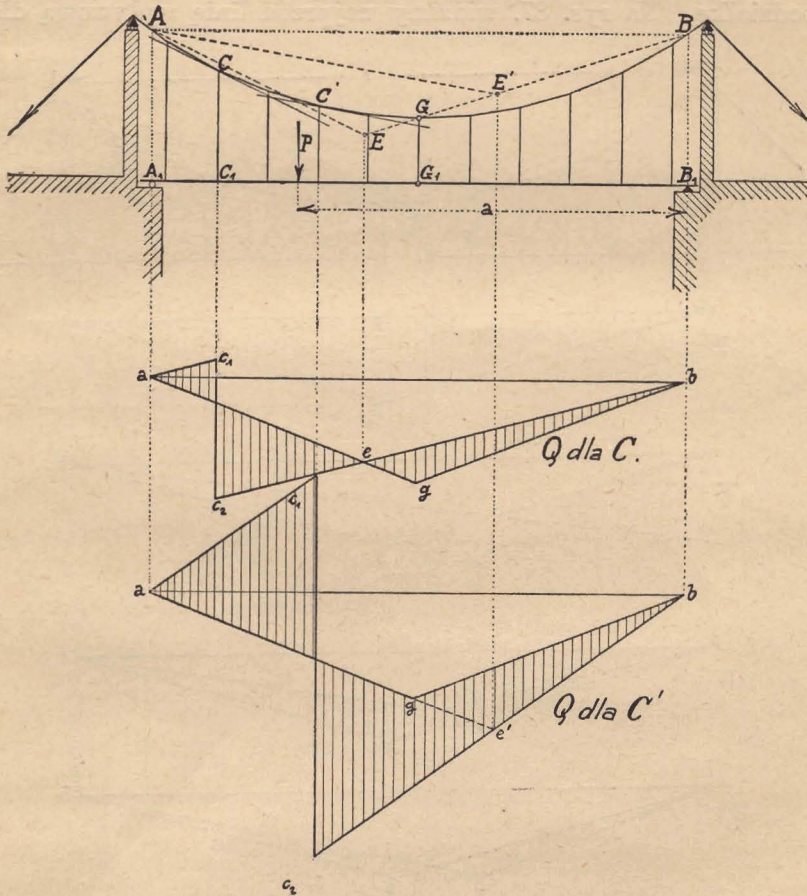
Dla $l_1 = \frac{l}{2}$ mamy z 287. dla $a < \frac{l}{2}$ $H = \frac{Pa}{2f}$

a z 282. $s = \frac{4Pa}{l}$, więc $\frac{sl}{2} = \frac{2Pa}{l}$, dla $a = \frac{l}{2}$, $\frac{sl}{2} = P$, więc pierwszy wyraz daje nam prostą $a''b'$, drugi $a'e'b'$. Punkt obojętny e leży w jednej trzeciej rozpiętości.



Siła poprzeczna w przekroju CC_1 (rys. 86.).

$$Q = V_1' + sx = \frac{Pa}{l} - P \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{4a}{l^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{a gdy } a > \frac{l}{2} \quad Q = \frac{Pa}{l} - P \left(\frac{l}{2} - x \right) \frac{8(l-a)}{l^2} \end{array} \right\} \quad (290)$$



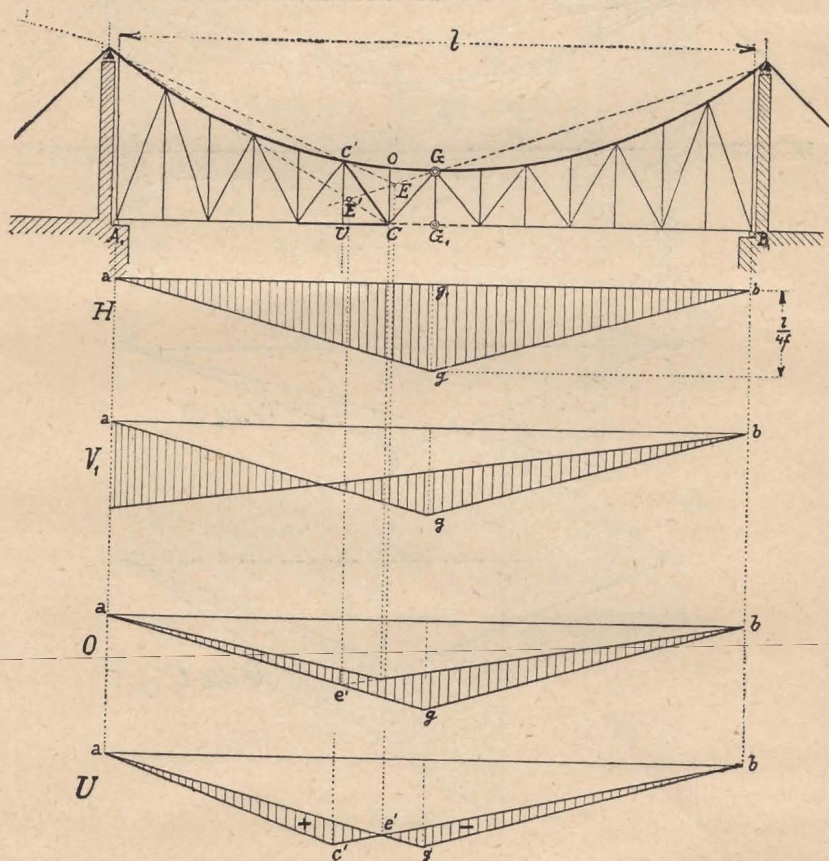
Rys. 86.

Punkt obojętny E otrzymamy, gdy z A wykreślimy prostą AE równoległą do stycznej w C . Jeżeli równoległą do stycznej przetnie BG_1 na prawo od G_1 to E' jest urojonym punktem obojętnym, konstrukcja pozostaje jednak ta sama.

Siły w prętach wiszących, w odstępach λ umieszczonych, są $Z = \lambda s$ dla obciążenia zupełnego, więc z uwzględnieniem 282. i 286. $Z = \lambda q$ (291)

§ 50. Wieszar stężony kratą.

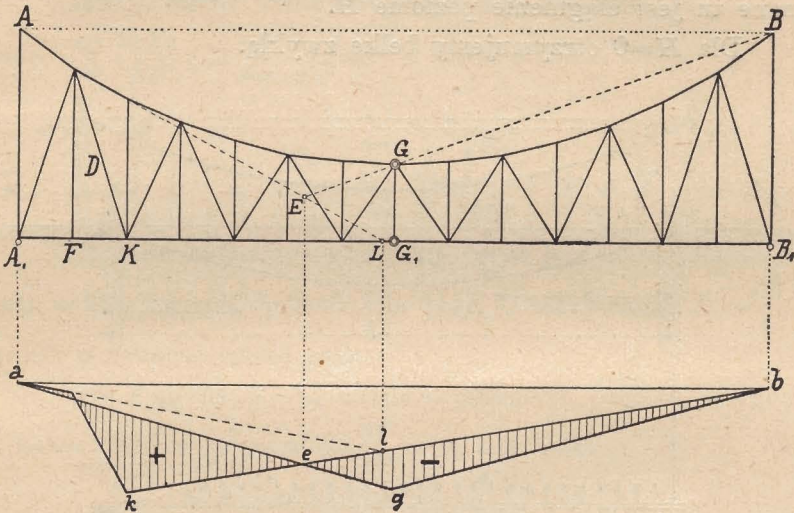
Wieszar możemy stężyć też kratą, przyczem pas górny jest łańcuchem, pas dolny poziomy. W takim razie mamy wieszar stężony kratą prostopasowy. Linia wpływowa obu pasów jest taka sama jak momentów, należy tylko zmienić podziałkę. Na rys. 87. widzimy najprzód linię wpływową dla



Rys. 87.

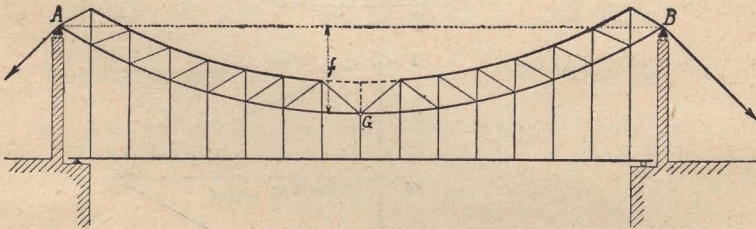
H , przyczem $gg_1 = \frac{8^2}{4f}$ dalej linię wpływową dla V_1 wykreśloną jak na rys. 85., linię wpływową dla pasu górnego O , wykreśloną dla momentu w punkcie C , dalej widzimy linię wpływową dla pasu U wykreśloną dla momentu w C' . Na rysunku

88. wykreśliłiśmy linię wpływową dla krzyżulca D zupełnie analogicznie, jak dla łuku prostopasowego na rys. 33. Przedłużwszy przecięte pasy, otrzymujemy punkt L . Punkt przecięcia



Rys. 88.

się prostej AL i BG daje nam punkt obojętny E . Możemy więc wykreślić prostą bk przez e . Na tej prostej oznaczamy l , rzut punktu L , i kreślimy al aż do f .



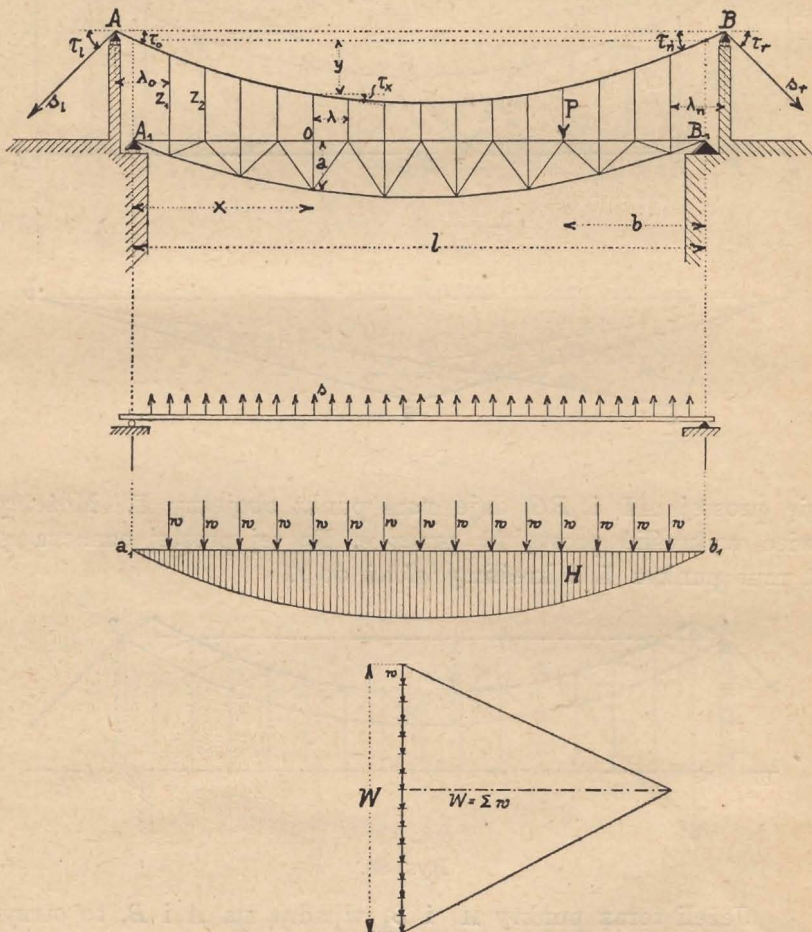
Rys. 89.

Jeżeli teraz punkty A_1 i B_1 wpadną na A i B , to otrzymamy wieszak kratowy równoległy (rys. 89.) trójpřzegubowy, który jest odwróconym łukiem kratowym równoległym trójpřzegubowym. Linie wpływowe wyznacza się podobnie, jak poprzednio, a zresztą wedle § 12. jak dla łuku.

§ 51. Wieszar stężony belką bezprzegubową.

Jeżeli belką stężającą jest belka prosta w dwu punktach podparta, to wieszar jest raz statycznie niewyznaczalnym. Nieznane tu jest ciągnięcie poziome H .

Dla $H=0$ otrzymujemy belkę zwykłą.



Rys. 90.

Jeżeli jakaś siła P (rys. 90.) stoi w odstępnie b od prawej podpory, to siła w jakimś przecie $S=S_0+HK$, jeżeli S_0 oznacza siłę w belce zwykłej a K siłę wywołaną $H=1$.

Jeżeli s oznacza długość pręta, F jego przekrój, E współczynnik sprężystości, to $\Delta s = \frac{(S_0 + KH)s}{EF}$.

Wedle prawa pracy przygotowanej $\sum K \Delta s = 0$,
więc $\sum \frac{S_0 K s}{EF} + H \sum \frac{K^2 s}{EF} = 0$, a stąd

$$H = - \frac{\sum S_0 K \frac{s}{EF}}{\sum K^2 \frac{s}{EF}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

Przytem możemy uwzględnić tylko siły K w pasach, zaś siły w krzyżulcach opuścić. Dla pasu O otrzymamy $S_0 = \frac{Pb}{l} \frac{x}{a}$, jeżeli a oznacza ramię pasu.

Siły K są dla $H=1$, siłami w łańcuchu, prętach wiszących i belce. Siły w prętach $s = \frac{8f}{l^2}$, więc dla belki

$$K = -\frac{sl}{2} \frac{x}{a} + \frac{sx^2}{2a} = -\frac{s}{2a} (lx - x^2) = -\frac{4f}{al^2} (lx - x^2),$$

a że $y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2)$, więc $K = -\frac{y}{a}$.

Więc licznik rów 292. możemy napisać dla $P=1$

$$-\sum S_0 K \frac{s}{EF} = + \sum \frac{b}{al} \frac{xy}{a} \frac{s}{EF} = \frac{b}{l} \sum \frac{y}{EF} \frac{s}{a^2} x.$$

$$\text{Nazwijmy } w_x = \frac{ys}{EFa^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (293)$$

ciężar sprężysty (*das elastische Gewicht*) pręta, to

$$-\sum S_0 K \frac{s}{EF} = \frac{b}{l} \sum w_x x = M_w \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

Jestto więc moment w punkcie zaczepienia siły P dla obciążenia siłami w_x zaczepiającego w punkcie obrotu odnośnej części pasu. Licznik zatem rów 292. jest równy momentowi M_w .

W mianowniku suma rozciąga się też na łańcuch i pręty wiszące. Dla łańcucha K dost $\tau_x = H$, a $K=1$ siecz τ_x . Dla łańcuchów kotwicznych mamy $K_l=1$ siecz τ_l , $K_r=1$ siecz τ_r , siła w prętach $K=s\lambda = \lambda \frac{8f}{l^2}$.

Niech będą przekroje łańcucha F_k , kotwicznych łańcuchów F_l i F_r , prętów wiszących F_z , to

$$\sum \frac{K^2 s}{EF} = \sum \frac{y^2 s}{\alpha^2 EF} + \left[\lambda \sum \frac{\text{siecz}^3 \tau_x}{EF_k} + \lambda_0 \frac{\text{siecz}^3 \tau_0}{EF_k} + \lambda_u \frac{\text{siecz}^3 \tau_u}{EF_u} + \right. \\ \left. + \lambda_l \frac{\text{siecz}^3 \tau_l}{EF_l} + \lambda_r \frac{\text{siecz}^3 \tau_r}{EF_r} \right] + \frac{\lambda^2 64 f^2}{El^4 F_z} \sum Z.$$

Ostatni wyraz $\frac{64 \lambda^2 f^2}{El^4 F_z}$ jest zawsze bardzo mały, możemy go opuścić, pierwszy zaś wyraz równa się $\sum w_x y$.

Jeżeli mamy łańcuch, to $F_k = F$ siecz τ_x , $F_0 = F$ siecz τ_0 , $F_u = F$ siecz τ_u przyczem F oznacza przekrój łańcucha w punkcie szczytowym paraboli.

Wtedy będzie

$$\sum \frac{K^2 s}{EF} = \sum w_x y + \frac{1}{EF} \left[\sum \lambda \text{ siecz}^3 \tau_l + s_l \text{ siecz } \tau_l + s_x \text{ siecz } \tau_x \right].$$

Wyraz $\sum \lambda \text{ siecz}^2 \tau_x = l + \frac{16 f^2}{3 l} + K$ jeżeli wyrazimy go zapomocą równ. paraboli więc

$$\sum \frac{K^2 s}{EF} = \sum w_x y + \frac{1}{EF} \left[l + \frac{16 f^2}{3 l^2} + s_n \text{ siecz } \tau_r + s_n \text{ siecz } \tau_r \right] \quad (295)$$

Jeżeli mamy linwę, to przekrój stały F , wtedy

$$\sum \frac{K^2 s}{EF} = \sum w_x y + \frac{1}{EF} \left[x \sum \text{ siecz}^3 \tau_x + s_l \text{ siecz } \tau_l + s_r \text{ siecz } \tau_r \right].$$

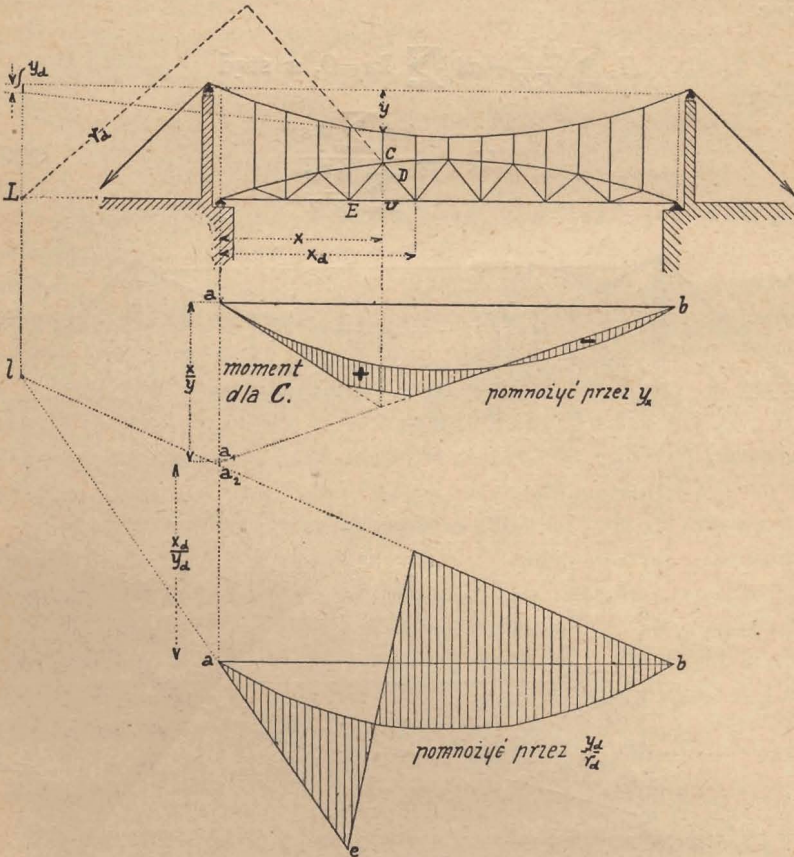
Wstawmy $\lambda \sum \text{ siecz}^3 \tau_x = l + 8 \frac{f^2}{l}$, otrzymamy

$$\sum \frac{K^2 s}{EF} = \sum w_x y + \frac{1}{EF} \left[l + 8 \frac{f^2}{l} + s_l \text{ siecz } \tau_l + s_r \text{ siecz } \tau_r \right] \quad (296)$$

W ten sposób wyznaczyliśmy licznik i mianownik wzoru 292. Krzywa a , c , b , jest linią wpływową H , przyczem rzędne musimy pomnożyć przez W a podzielić przez mianownik wyrażony równaniem 294. lub 294. Linia ta jest zarazem linią ugięcia belki dla $H=1$.

Znając linię wpływową dla H możemy podobnie jak dla belki stężającej wieszaru statycznie wyznaczalnego (§ 50.) wyznaczyć linie wpływowe dla belki stężającej w tym wypadku.

Dla momentu w C (rys. 91.) odcinamy $aa_1 = \frac{x}{y}$ kreślimy a, b i linię wpływową H . Powierzchnia kreskowana jest powierzchnią wpływową. Dla siły D szukamy w podobny sposób momentu w L , przyczem odcinamy $aa_2 = \frac{x_d}{y_d}$, y_d mierzone w pionowej przez L . Moment ten dzielimy przez ramię r_d .



Rys. 91.

Jeżeli belka stężająca jest równoległą (rys. 92.), to otrzymamy linie wpływowe dla Q podobnie jak w rys. 53. Robimy $aa_1 = \text{dot } \tau$, kreślimy ba_1 i $ac \parallel ba_1$ i kreślimy linię wpływową dla H .

§ 52. Wpływ zmiany ciepłoty.

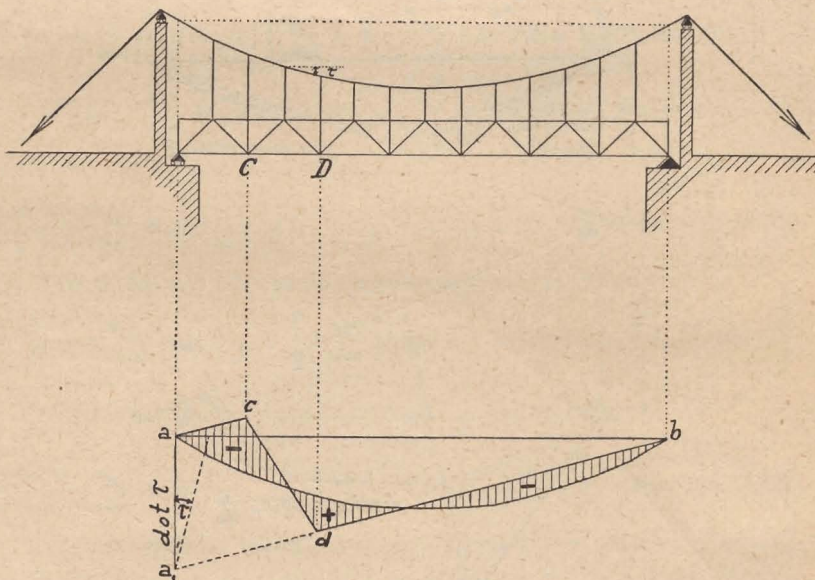
Tu S_0 jest równe 0, więc $S = H_t k$, gdy H_t oznacza ciągnięcie poziome wskutek zmiany ciepłoty. Wtedy

$$\Delta s = H_t \cdot k \frac{s}{EF} + at s.$$

Wedle prawa pracy przygotowanej będzie $\sum k \Delta s = 0$, więc

$$H_t \sum \frac{k^2 s}{EF} + at \sum ks = 0, \text{ a stąd}$$

$$H_t = - \frac{at \sum ks}{\sum \frac{k^2 s}{EF}} \dots \dots \dots (297)$$



Rys. 92.

Mianownik jest tu ten sam, co w równaniu 292., licznik należałoby obliczyć podobnie, jak w poprzednim paragrafie. W przybliżeniu możnaby przy tem obliczeniu opuścić siły w belce stężającej, a uwzględnić tylko łańcuch i pręty wiszące.

§ 53. Wieszar ciągły.

Jeżeli łańcuch ciągnie się przez kilka przęseł (rys. 93.), to zeskład ten jest także tylko statycznie niewyznaczalny pierwszego rzędu i niewiadomą jest H . Na podstawie równ.

$$254. \text{ musi być wtedy } \frac{l_1^2}{f_1} = \frac{l_2^2}{f_2} = \frac{l_3^2}{f_3} = \frac{l_n^2}{f_n} \dots \dots \dots (298)$$



Rys. 93.

I tu liczyć musimy H wedle równ. 292. Jeżeli jedno przęsło obciążymy, to w równaniu tem S_0 odnosi się tylko do tego przęsła, licznik więc jest tak wielki, jak dla wieszaru jednoprzęsłowego. Sumowanie naznaczone w mianowniku musimy jednak rozszerzyć na wszystkie przęsła, a więc gdy mamy n przęseł równych, mianownik jest n razy większy. A zatem dla n przęseł równych ciągnięcie poziome H jest n razy mniejsze, niż dla wieszaru jednoprzęsłowego.

Wpływ ciepłoty wyznaczamy z 296. Tu jednak sumujemy licznik i mianownik przez wszystkie przęsła, tu więc ciągnięcie poziome jest tak wielkie, jak dla jednego przęsła.

Ze względu na 284. stwierdzić musimy, że z powodu zmniejszenia się H , zwiększają się momenty dla belki stężającej i zbliżają dla większej ilości przęseł coraz bardziej do momentów belki w dwu punktach podpartej.

Te same uwagi stosują się do łuków ciągłych.

§ 54. Wieszar kilkakrotnie statycznie niewyznaczalny.

Jeżeli wieszar ciągły stężony jest belką prostą ciąglą lub wieszar jednoprzęsłowy łukiem, to mamy wieszary kilkakrotnie statycznie niewyznaczalne.

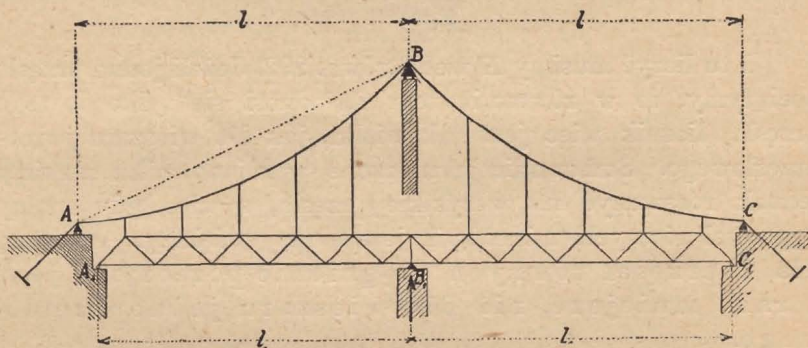
Zbadajmy tu najprostszy przypadek wieszaru dwuprzęsłowego o przęsłach równych a belce stężającej ciągłej (rys. 94.). Tu mamy dwie niewiadome H i oddziaływanie O_2 . Wtedy siła w jakimś przecie będzie $S = S_0 + Hk + O_2 k_1 \dots \dots \dots (299)$

*

przyczem k_1 oznacza siłę wywołaną w przęcie siłą $O_2=1$, działającą w B_1 .

Przedłużenie $\Delta s = \frac{S_0 s}{EF} + H \frac{ks}{EF} + O_2 \frac{k_1 s}{EF}$, a na mocy prawa pracy przygotowanej możemy napisać

$$\left. \begin{aligned} \sum k \Delta s &= 0 \text{ i } \sum k_1 \Delta s = 0. \text{ Stąd otrzymamy} \\ \sum S_0 \frac{ks}{EF} + N \sum \frac{k^2 s}{EF} + O_2 \sum \frac{k_1^2 s}{EF} &= 0 \\ \text{i } \sum S_0 k_1 \frac{s}{EF} + H \sum k k_1 \frac{s}{EF} + O_2 \sum \frac{k_1^2 s}{EF} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (300)$$



Rys. 94.

Z tych dwu równań dadzą się wyznaczyć H i O_2 , a na tej podstawie wszystkie siły wewnętrzne.

Müller-Breslau podał sposób wyznaczenia linii wpływowych na podstawie tych równań i twierdzenia o związku linii ugięcia z linią wpływową¹⁾, co do którego jednak odsyłamy czytelnika do źródła.

Wpływ ciepłoty wyznaczymy zważając, że $S = H_t k + O_{2r} k_1$ dalej mamy $\Delta s = H_t k \frac{s}{EF} + O_{2r} k_1 \frac{s}{EF} + \alpha t s$.

Stąd otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} H_t \sum k^2 \frac{s}{EF} + O_2 \sum k k_1 \frac{s}{EF} + \alpha t \sum ks &= 0 \\ H_t \sum k k_1 \frac{s}{EF} + O_2 \sum k_1^2 \frac{s}{EF} + \alpha t \sum k_1 s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (301)$$

Z obu tych równań otrzymamy łatwo H_t i O_{2r} .

¹⁾ Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre 2 wyd.

DODATEK.

§ 55. Literatura.

Z licznej bardzo literatury, dotyczącej naszego przedmiotu, podajemy tylko niektóre ważniejsze dzieła:

Fränkel. Berechnung eiserner Bogenbrücken. Civiling. 1867.

Durand Claye. Sur la vérifications de la stabilité des arcs métalliques et sur l'emploi des courbes de pression Ann. des ponts et chaus. 1868.

Winkler. Berechnung der eiserner Bogenbrücken. Mitt. d. Arch. u. Ing. Ver. f. Böhm. 1869.

Mohr. Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger. Zeit. d. Arch. u. Ing. Ver. zu Hannover. 1870.

Steiner. Ueber Theorie der Bogenbrücke. All. Bauz. 1874.

Culmann. Die graphische Statik 2 wyd. 1875.

Fränkel. Ueber die ungünstigste Einstellung eines System von Einzellasten mit Hilfe von Influenz-Curven. Civiling. 1876.

Weyrauch. Theorie der elastischen Bogenträger. Zeit. f. Baukunst. 1878.

Gros de Perrodil. Résistance des voutes et arcs métalliques employes dans la construction des ponts. Paryż 1879.

Burr W. A course on the stresses in bridge and roof trusses, arched ribs and suspension bridges. New York 1880.

Engesser. Theorie und Berechnung der Bogenfachwerkträger ohne Scheiteltgelenk. Berlin 1880.

Müller-Breslau. Theorie und Berechnung eiserner Bogenbrücken. Berlin. 1880.

Heaford A. S. Strains on braced iron arches and arched iron bridges. Londyn 1883.

Ritter W. Statische Berechnung der Versteifungsfachwerke der Hängebrücken Schw. Bauzeit. 1883.

Skibiński. Das Deformationspolygon. Zeit. d. öster. Ing. u. Arch. Ver. 1883.

Thullie. Analityczne wyznaczenie linii wpływowych dla łuku parabolicznego. Przegląd techniczny. 1883.



Haase H. Die Theorie der parabolischen u. elliptischen Bögen. Wieden 1886.

Lévy. Calcul des ponts suspendus rigides. Ann. d. pont et chaus. 1886.

Müller-Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. Lipsk 1886, 2 wyd. 1893.

Ritter W. Der elastische Bogen. Zurich 1886.

Schwend C. Ueber Berechnung und Konstruktion von Hängebrücken. Lipsk 1887.

Bohny. Der Kontinuirliche Zweigelenkbogen. Zeit. d. Verein deüts. Ingen. 1896.

Weyrauch Dr. Jakób. Die elastischen Bogenträger. Monachium 1899. 2 wyd.

Am Ende. Suspension bridges with stiffening girders. Minut. of proced. of the Inst. of Civil Eng. 1899.

Bohny Dr. F. Theorie und Konstruktion versteifter Hängebrücken. Lipsk 1903.

Müller-Breslau. Graphische Statik der Baukonstruktion t. I. 3 wyd. Lipsk 1901, t. II. Lipsk 1903.

Melan. Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken w Handb. der Ingenieurwiss. t. II. oddział V. 3 wydanie. Lipsk 1906.

Mörsch. Berechnung von eingespannten Gewölben. Schw. Bauzeit. 1906 str. 83.

Schöthöfer Dr. R. Konstante Bogengrößen bei Bögen. Berlin 1908.

Balet. Analysis of elastic arches. New York 1908.

Ritter Dr. Max. Beiträge zur Theorie und Berechnung der Bogenträger ohne Gelenk. Berlin 1909.

Brabandt. Der vollwandige Zweigelenkbogen. Berlin 1910.

Weyrauch. Die elastischen Bogenträger. 1910.

Marcus Dr. Henri. Studien über mehrfach gestützte Rahmen und Bogenträger. Berlin 1911.



TREŚĆ.

Belki łukowe.

§ 1. Uwagi ogólne	1
-----------------------------	---

A. Teorya łuków.

I. Łuk trójpřzegubowy.

§ 2. Oddziaływania dla obciążenia pionowego . . .	3
§ 3. Momenty osiowe	8
§ 4. Momenty jędrne	11
§ 5. Największe momenty	13
§ 6. Siły poprzeczne	17
§ 7. Największe siły poprzeczne	20
§ 8. Siły podłużne	24
§ 9. Odształcenie łuku z powodu zmiany ciepłoty i przesunięcia podpór	25
§ 10. Odształcenie łuku w ogóle wskutek obciążenia .	26
§ 11. Odształcenie łuku trójpřzegubowego wskutek obciążenia	28
§ 12. Obliczenie przekroju łuku blaszanego	33
§ 13. Siły wewnętrzne w łuku kratowym	38

II. Łuk dwupřzegubowy.

§ 14. Wyznaczenie ogólne parcia poziomego	48
§ 15. Sposób Schönhöfera	53
§ 16. Parcie poziome łuku parabolicznego płaskiego .	54
§ 17. Parcie poziome łuku o pasach nierównoległych .	59
§ 18. Parcie poziome łuku kratowego	60
§ 19. Wpływ zmiany ciepłoty	62
§ 20. Wyznaczenie momentów	63
§ 21. Wyznaczenie sił poprzecznych	66
§ 22. Momenty i siły poprzeczne dla łuku parabolicznego i pasów równoległych	67
§ 23. Obliczenie sił wewnętrznych łuku kratowego dwu- přzegubowego	68
§ 24. Wpływ sił poziomych na łuk dwupřzegubowy .	71
§ 25. Wpływ siły poziomej na łuk paraboliczny . .	72
§ 26. Łuk dwupřzegubowy ze ścięgnem	74
§ 27. Tymczasowe obliczenie przekroju	75

III. Łuk bezprzegubowy.

§ 28.	Wyznaczenie ogólne parcia poziomego	75
§ 29.	Wyznaczenie oddziaływań	77
§ 30.	Wyznaczenie linii wpływowych	82
§ 31.	Działanie siły poziomej	85
§ 32.	Wyznaczenie sił dla stałego I'	86
§ 33.	Parcie poziome łuku parabolicznego i linie ob- wiedne oddziaływań	91
§ 34.	Wpływ sił poziomych na łuk paraboliczny	97
§ 35.	Sklepienie półkoliste	98
§ 36.	Momenty i siły poprzeczne	101
§ 37.	Cieężar własny	101
§ 38.	Wpływ zmiany ciepłoty	102
§ 39.	Łuk bezprzegubowy kratowy. Sposób Skibińskiego	105
§ 40.	Obliczenie analityczne łuku bezprzegubowego kratowego	107
§ 41.	Wpływ zmiany ciepłoty	109

B. Teorya wieszarów.

IV. Wieszar gibki.

§ 42.	Linia sznurowa dla dowolnego obciążenia piono- wego	110
§ 43.	Wieszar gibki	113
§ 44.	Największa rozpiętość	117
§ 45.	Zmiana kształtu wieszara	118

V. Wieszar stężony belką prostą.

§ 46.	Zasada obliczenia	119
§ 47.	Warunki równowagi wieszaru	119
§ 48.	Siły zewnętrzne belki stężącej	120
§ 49.	Wieszar stężony statycznie wyznaczalny	121
§ 50.	Wieszar stężony kratą	124
§ 51.	Wieszar stężony belką bezprzegubową	126
§ 52.	Wpływ zmiany ciepłoty	130
§ 53.	Wieszar ciągły	131
§ 54.	Wieszar kilkakrotnie statycznie niewyznaczalny	131

Dodatek.

§ 55.	Literatura	133
-------	----------------------	-----

