

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA  
WYDZIAŁ ELEKTRYCZNY

---

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Sławomir Kwiećkowski

Matematyczne modelowanie  
trój- i dwuwymiarowego pola termicznego  
w elektrycznym układzie  
bezpośredniego grzejnika podłogowego

Promotor:

dr hab. inż. Jerzy Gołębiowski  
profesor Politechniki Białostockiej

BIAŁYSTOK 2000



---

## Spis treści

Wykaz oznaczeń.....	5
<b>1. Wstęp .....</b>	<b>9</b>
1.1. Uzasadnienie tematu rozprawy.....	9
1.2. Cele, tezy i oryginalne elementy pracy.....	11
1.3. Budowa elektrycznego grzejnika podłogowego typu bezpośredniego.....	13
1.4. Graniczne zagadnienie pola termicznego w grzejniku .....	16
<b>2. Analityczne i numeryczne modelowanie stacjonarnej składowej pola temperatury w trójwymiarowym układzie ogrzewania elektrycznego .....</b>	<b>19</b>
2.1. Wprowadzenie .....	19
2.2. Fizyczny model układu i zagadnienie graniczne.....	19
2.2.1. Symulacja analityczna .....	20
2.2.2. Symulacja numeryczna.....	23
2.3. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego .....	24
2.3.1. Rozwiązanie analityczne – rozwinięcie w szereg funkcji własnych ....	24
2.3.2. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych.....	29
2.4. Przykłady obliczeniowe .....	30
2.4.1. Symetryczne położenie odcinków kabla .....	30
2.4.2. Niesymetryczne położenie odcinków kabla .....	39
2.4.3. Ogólne informacje o przedstawionych przykładach.....	42
2.5. Porównanie stacjonarnych rozkładów trójwymiarowych i dwuwymiarowych.....	43
2.6. Uwagi końcowe .....	46
<b>3. Teoretyczna i doświadczalna weryfikacja trójwymiarowego modelu stacjonarnej składowej pola termicznego w grzejniku .....</b>	<b>47</b>
3.1. Symulacja wpływu zagięć kabla na rozkład stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku podłogowym .....	47
3.1.1. Wstęp .....	47
3.1.2. Brzegowe zagadnienie pola generowanego zagięciami kabla.....	48
3.1.2.1. Analityczna symulacja źródeł ciepła .....	48
3.1.2.2. Numeryczna symulacja źródeł ciepła .....	50
3.1.3. Rozwiązanie brzegowego zagadnienia pola, generowanego zagięciami kabla .....	50
3.1.3.1. Rozwiązanie analityczne – rozwinięcie w szereg funkcji własnych.....	50
3.1.3.2. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych	52
3.1.4. Przykłady obliczeniowe.....	53
3.1.5. Uwagi końcowe.....	65
3.2. Symulacja wpływu cieplnych i materiałowych nieliniowości na rozkład stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku podłogowym .....	67
3.2.1. Wstęp .....	67
3.2.2. Algorytm rozwiązania .....	68
3.2.3. Różnica rozwiązania nieliniowego i liniowego .....	69

3.2.4. Wnioski .....	73
3.3. Oszacowanie wpływu stratności izolacji cieplnej na stacjonarną składową pola temperatury w grzejniku podłogowym .....	74
3.3.1. Wstęp.....	74
3.3.2. Zagadnienie graniczne i jego rozwiązanie .....	74
3.3.3. Przykład obliczeniowy i wyniki symulacji .....	76
3.4. Doświadczalna weryfikacja symulacji stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku .....	79
3.4.1. Wstęp.....	79
3.4.2. Stanowisko badawcze .....	79
3.4.3. Uwagi końcowe .....	87
<b>4. Analityczne i numeryczne modelowanie nieustalonego pola temperatury w dwu- i trójwymiarowym układzie elektrycznego ogrzewania podłogowego.....</b>	<b>93</b>
4.1. Wstęp .....	93
4.2. Symulacja skokowej odpowiedzi układu .....	94
4.2.1. Wprowadzenie .....	94
4.2.2. Rozwiązanie analityczne – metoda superpozycji stanów .....	96
4.2.3. Przybliżone rozwiązanie analityczne – kryterium uśrednionej stałej czasowej .....	102
4.2.4. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych .....	104
4.2.5. Przykłady obliczeniowe .....	106
4.2.6. Uwagi końcowe .....	115
4.3. Symulacja układu sterowanego regulatorem.....	117
4.3.1. Wprowadzenie .....	117
4.3.2. Bezpośrednie rozwiązanie analityczne .....	118
4.3.3. Rozwiązanie numeryczne.....	123
4.3.4. Przybliżone rozwiązanie analityczne – kryterium uśrednionej stałej czasowej .....	125
4.3.5. Pośrednie rozwiązanie analityczne – superpozycja odpowiedzi skokowych.....	127
4.3.6. Przykłady obliczeniowe .....	128
4.3.7. Uwagi końcowe .....	136
4.4. Porównanie rozkładów dwu- i trójwymiarowych w stanie nieustalonym .....	138
4.5. Symulacja wpływu cieplnych i materiałowych nieliniowości na rozkład nieustalonego pola temperatury w układzie trójwymiarowym.....	143
4.5.1. Wstęp.....	143
4.5.2. Algorytm rozwiązania zagadnienia nieliniowego .....	144
4.5.3. Porównanie charakterystyk skokowych układu nieliniowego i liniowego .....	145
4.5.4. Wnioski .....	155
<b>5. Zakończenie .....</b>	<b>156</b>
Literatura .....	160
Dodatek .....	D1

---

## Wykaz oznaczeń

$A$	- stała bezwymiarowa określona wzorem (2.8a),
$(2a, 2b, l)$	- wymiary płyty podłogowej (rys. 1.4, 1.5),
$(2a^*, 2b, l)$	- wymiary segmentu obliczeniowego (rys. 3.2),
$B_{mni}, D_{mni}$	- współczynniki szeregów (2.7) i (3.6),
$F_{mn}, K_{mni}$	- współczynniki szeregów (4.13) i (4.18),
$C_0$	- techniczna stała promieniowania ciała doskonale czarnego,
$[C]$	- macierz pojemności cieplnej,
$c$	- ciepło właściwe betonu,
$G(z)$	- funkcja „bramki” określająca położenie i długość kabla grzewczego wzdłuż osi $OZ$ (rys. 1.4b),
$G_j(x)$	- ciąg „bramek” definiujący położenie i długość krótkich odcinków kabla grzewczego wzdłuż osi $OX$ (rys. 1.4b), dla $j=1$ lub $j=2$ ,
$\{G\}$	- wektor źródeł ciepła,
$g(x, y, t)$	- wydajność przestrzennych źródeł ciepła w modelu dwuwymiarowym,
$g(x, y, z, t)$	- wydajność przestrzennych źródeł ciepła w modelu trójwymiarowym,
$g_j(x, y, z)$	- wydajność przestrzennych źródeł ciepła układu z $j$ -tym zagięciu kabla w modelu trójwymiarowym, $j=1$ lub $2$ ,
$g_k(x, y)$	- wydajność przestrzennych źródeł ciepła układu z $k$ -tym odcinkiem kabla w modelu dwuwymiarowym,
$g_k(x, y, z)$	- wydajność przestrzennych źródeł ciepła układu z $k$ -tym odcinkiem kabla w modelu trójwymiarowym,
$H(x, y, t)$	- termiczna odpowiedź skokowa układu w modelu dwuwymiarowym,
$H(x, y, z, t)$	- termiczna odpowiedź skokowa układu w modelu trójwymiarowym,
$\overline{H}_N(t) \Big _{y=const}$	- uśredniona charakterystyka skokowa modelu nieliniowego na płaszczyźnie $y=const$ ,
$\overline{H}_L(t) \Big _{y=const}$	- uśredniona charakterystyka skokowa modelu liniowego na płaszczyźnie $y=const$ .
$H_p(x, y, t)$	- składowa przejściowa skokowej odpowiedzi układu w modelu dwuwymiarowym,
$H_p(x, y, z, t)$	- składowa przejściowa skokowej odpowiedzi układu w modelu trójwymiarowym
$H_u(x, y)$	- składowa ustalona skokowej odpowiedzi układu w modelu dwuwymiarowym,
$H_u(x, y, z)$	- składowa ustalona skokowej odpowiedzi układu w modelu trójwymiarowym,
$\{H\}$	- wektor odpowiedzi skokowej,
$\left\{ \dot{H} \right\}$	- wektor pochodnej odpowiedzi skokowej,
$k$	- indeks $k$ -tego odcinka kabla ( $k=1, 2, 3, \dots, K$ ),
$K$	- liczba odcinków kabla,

---

$\ N\ ^2$	- iloczyn kwadratów norm ciągów ortogonalnych,
$P$	- całkowita moc grzejnika,
$P_k$	- moc czynna k-tego odcinka kabla,
$Q_0$	- uśredniony strumień cieplny, przenikający przez izolowane ściany,
$Q_r(x,y,z,t)$	- strumień cieplny, przenikający przez izolowane ściany ( $r=1, 2, 3, 4, 5$ ),
$q$	- liniowa gęstość mocy odcinka żyły kabla grzejnego,
$q_k$	- liniowa gęstość mocy k-tego odcinka żyły kabla grzejnego,
$R$	- promień kabla i dewiacja współrzędnej $x_k$ wokół żyły kabla,
$r$	- promień żyły kabla i dewiacja współrzędnej $x_k$ na części prostej bifiurkacji (nie należącej do bezpośredniego otoczenia żyły),
$S$	- powierzchnia pięciu izolowanych ścian ( $8ab+4bl+2al$ ),
$T(x,y,t)$	- całkowite pole temperatury w płycie podłogowej w modelu dwuwymiarowym,
$T(x,y,z,t)$	- całkowite pole temperatury w płycie podłogowej w modelu trójwymiarowym,
$T_1(x,y,t')$	- pole temperatury w drugim etapie pracy układu w modelu dwuwymiarowym (pierwsze stygnięcie),
$T_1(x,y,z,t')$	- pole temperatury w drugim etapie pracy układu w modelu trójwymiarowym (pierwsze stygnięcie),
$T_2(x,y,t'')$	- pole temperatury w trzecim etapie pracy układu w modelu dwuwymiarowym (powtórne nagrzewanie),
$T_2(x,y,z,t'')$	- pole temperatury w trzecim etapie pracy układu w modelu trójwymiarowym (powtórne nagrzewanie),
$T_{2p}(x,y,t'')$	- składowa przejściowa pola temperatury w trzecim etapie pracy układu w modelu dwuwymiarowym (powtórne nagrzewanie),
$T_{2p}(x,y,z,t'')$	- składowa przejściowa pola temperatury w trzecim etapie pracy układu w modelu trójwymiarowym (powtórne nagrzewanie),
$T_H$	- temperatura wyłączenia zasilania grzejnika,
$T_k(x,y,z)$	- składowa ustalona pola temperatury pochodząca od k-tego odcinka kabla (przy wyłączonych pozostałych),
$T_L$	- temperatura włączenia zasilania grzejnika,
$T_L(x,y,z)$	- rozkład temperatury w stanie ustalonym w modelu liniowym,
$T_N(x,y,z)$	- rozkład temperatury w stanie ustalonym w modelu nieliniowym,
$T_0$	- temperatura otoczenia,
$T_u(x,y)$	- całkowita składowa ustalona pola temperatury w płycie podłogowej w modelu dwuwymiarowym,
$T_u(x,y,z)$	- całkowita składowa ustalona pola temperatury w płycie podłogowej w modelu trójwymiarowym,
$T_{sr}$	- temperatura średnia,
$\{T\}$	- wektor temperatur węzłowych,
$t$	- czas,
$t', t''$	- zmienione osie czasu,
$t_1$	- czas pierwszego nagrzewania podłogi (rozruch),
$t_2$	- czas pierwszego stygnięcia podłogi,
$t_3$	- czas ponownego nagrzewania podłogi,

---

---

$u_k$	- bezwymiarowy współczynnik wypełnienia $k$ -tym odcinkiem kabla długości $l$ (rys. 1.4b, $u_k \in \langle 0, 1 \rangle$ ),
$(x, y)$	- współrzędne punktu w płycie podłogowej w modelu dwuwymiarowym,
$(x, y, z)$	- współrzędne punktu w płycie podłogowej w modelu trójwymiarowym,
$(x^*, y^*)$	- współrzędne punktu położenia czujnika regulatora w płycie podłogowej w modelu dwuwymiarowym,
$(x^*, y^*, z^*)$	- współrzędne punktu położenia czujnika regulatora w płycie podłogowej w modelu trójwymiarowym,
$(x_k, y_k)$	- współrzędne położenia $k$ -tego odcinka żyły kabla w modelu dwuwymiarowym,
$(x_k, y_k, z)$	- współrzędne położenia $k$ -tego odcinka żyły kabla w modelu trójwymiarowym (dla $z \in \langle u_k l, (1 - u_k) l \rangle$ ),
$\alpha$	- uśredniony współczynnik przejmowania ciepła (suma współczynników konwekcji i radiacji),
$\alpha(T)$	- współczynnik przejmowania ciepła w modelu nieliniowym, zależny od temperatury (suma nieliniowych współczynników konwekcji i radiacji),
$\gamma_n$	- kolejne dodatnie pierwiastki równania przestępnego (2.8a),
$\overline{\Delta H}(x, y, z, t)$	- średniokwadratowa różnica skokowych charakterystyk modelu nieliniowego i liniowego,
$\delta$	- gęstość betonu (estrichu cementowego),
$\delta \overline{H}(t)$	- względna różnica uśrednionych charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego,
$\delta(x - x_k), \delta(y - y_k)$	- delty Diraca przesunięte odpowiednio do $x_k$ i $y_k$ ,
$\delta(y - y_j), \delta(z - z_j)$	- delty Diraca przesunięte odpowiednio do $y_j$ i $z_j$ ,
$\delta_{m0}, \delta_{2i0}$	- symbole Kroneckera,
$\delta T$	- względna różnica temperatury,
$\varepsilon$	- wskaźnik zbieżności szeregów lub współczynnik emisyjności betonu,
$[\lambda]$	- macierz przewodności cieplnej,
$[\lambda(H)]$	- uogólniona macierz przewodności cieplnej, zależna od wyznaczonej charakterystyki,
$[\lambda(T)]$	- uogólniona macierz przewodności cieplnej, zależna od temperatury,
$\lambda$	- średnia przewodność cieplna betonu (estrichu cementowego),
$\lambda(T)$	- przewodność cieplna betonu w modelu nieliniowym, zależna od temperatury,
$\lambda_c$	- przewodność żyły kabla grzewczego,
$\tau(x, y)$	- lokalna stała czasowa układu w modelu dwuwymiarowym,
$\tau(x, y, z)$	- lokalna stała czasowa układu w modelu trójwymiarowym,
$\tau_{2g}$	- globalna stała czasowa układu w modelu dwuwymiarowym,
$\tau_{3g}$	- globalna stała czasowa układu w modelu trójwymiarowym,
$\tau_{mn}$	- elementarna stała czasowa układu o parametrach rozłożonych w modelu dwuwymiarowym,

---

---

$\tau_{mni}$	- elementarna stała czasowa układu o parametrach rozłożonych w modelu trójwymiarowym,
$v(x, y, z)$	- przyrost pola temperatury od zagięć kabla grzewczego,
$v_1(x, y, t')$	- przyrost pola temperatury w drugim etapie pracy układu w modelu dwuwymiarowym (pierwsze stygnięcie),
$v_1(x, y, z, t')$	- przyrost pola temperatury w drugim etapie pracy układu w modelu trójwymiarowym (pierwsze stygnięcie),
$v_j(x, y, z)$	- składowa pola temperatury generowana jednym ciągiem zagięć kabla grzewczego, $j=1$ lub $j=2$ ,
$v_j^{(1)}(y, z)$	- dwuwymiarowa składowa rozkładu $v_j(x, y, z)$ , określona wzorami (3.8b) i (3.8e) odpowiednio dla $j=1$ lub $j=2$ ,
$v_j^{(2)}(x, y, z)$	- trójwymiarowa składowa rozkładu $v_j(x, y, z)$ , określona wzorami (3.8c) i (3.8e) odpowiednio dla $j=1$ lub $j=2$ ,
$v_k^{(1)}(x, y)$	- dwuwymiarowa składowa rozkładu $T_k(x, y, z)$ i $T_k(x, y)$ , określona odpowiednio wzorami (2.12b) i (2.19),
$v_k^{(2)}(x, y, z)$	- trójwymiarowa składowa rozkładu $T_k(x, y, z)$ , określona wzorem (2.12c),
$v_{mn}^{(k)}(x, y)$	- wyraz szeregu (4.5),
$v_{mni}^{(k)}(x, y, z)$	- wyraz szeregu (4.7a),
$\chi$	- dyfuzyjność,
$\mathbf{1}(\dots)$	- funkcja skoku jednostkowego.

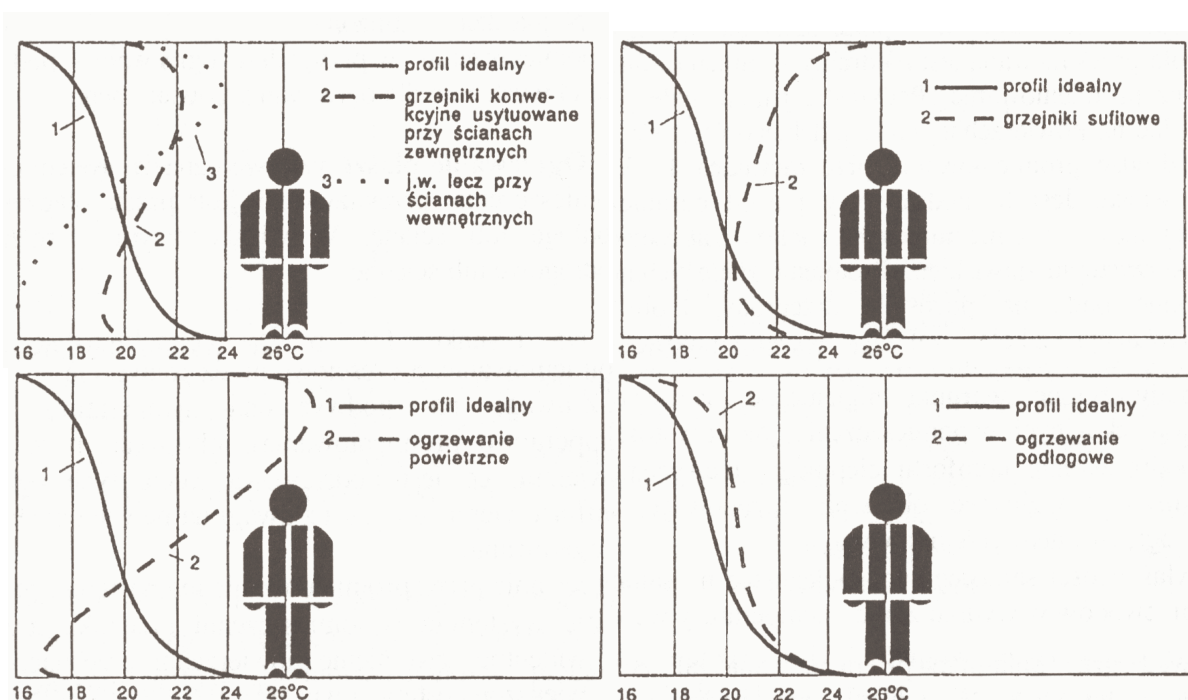


# 1. Wstęp

## 1.1. Uzasadnienie tematu rozprawy

Matematyczne modele pola temperatury, w środowisku stanowiącym beton, są przedmiotem zainteresowania wielu ośrodków naukowych. Jest to szczególnie widoczne w badaniach nad elektrycznymi grzejnikami podłogowymi. Konieczność przeprowadzenia wspomnianych analiz wynika z poważnych zalet i dużej atrakcyjności tych układów.

Jednym z najistotniejszych kryteriów oceny systemu ogrzewania jest rozkład temperatury w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek pomieszczenia. Na rys. 1.1 przedstawiono odpowiednie profile, dla różnych rodzajów ogrzewania przy średnich temperaturach zewnętrznych [6], [53].



Rys. 1.1. Pionowy rozkład temperatury w pomieszczeniach dla różnych typów ogrzewania.

Najbliższy idealnemu jest właśnie rozkład temperatury w przypadku ogrzewania podłogowego. Realizuje on podstawową zasadę ogrzewania: „nogi w ciepłe, głowa w chłodzie”. Do dalszych zalet tego typu ogrzewania należy zaliczyć:

1. brak zewnętrznych grzejników, co zwiększa estetykę i powierzchnię pomieszczenia,
2. mniejsze ruchy konwekcyjne powietrza, co utrudnia przemieszczanie się kurzu i tym samym ułatwia utrzymanie czystości,
3. niską temperaturę grzejnika, co eliminuje zjawisko „przypiekania kurzu”,
4. nie wysuszone powietrze w ogrzewanym pomieszczeniu,
5. niskie nakłady inwestycyjne, co wynika z braku kotła, pomp, zaworów, rur rozprowadzających wodę itd.,
6. niskie koszty eksploatacyjne w krajach o rozbudowanym systemie elektrowni wodnych (np. w Norwegii, Kanadzie) lub jądrowych (np. we Francji).

W systemie elektrycznego ogrzewania podłogowego można wyróżnić dwa jego typy: ogrzewanie akumulacyjne i ogrzewanie bezpośrednie. Obydwa typy ogrzewania mają podobną konstrukcję grzejnika. Różnią się natomiast czasem zasilania układu energią elektryczną. W ogrzewaniu akumulacyjnym zasilanie odbywa się w okresie tzw. taryfy nocnej (gdy koszt energii jest najniższy), tzn. przez okres około 8-10 godzin (przede wszystkim w nocy). Przez pozostałą część doby zgromadzona energia ogrzewa pomieszczenie. W związku z tym, grubość płyty podłogowej jest duża (kilkanaście centymetrów). Pozwala to gromadzić energię cieplną, lecz jest też przyczyną dużej bezwładności urządzenia. W przypadku ogrzewania bezpośredniego, układ zasilany jest w ciągu całej doby (nie licząc wyłączeń spowodowanych pracą automatyki regulacyjnej). Oprócz tego, grubość grzejnika jest znacznie mniejsza (kilka centymetrów). Przewody grzejne ułożone są bliżej powierzchni podłogi. Wszystko to sprawia, że bezwładność cieplna tego typu ogrzewania jest niższa. W niniejszej pracy zajmowano się wyłącznie układami bezpośrednimi.

O ile ogrzewanie akumulacyjne było badane metodami teorii pola [23], [24], [25], [26], [27], o tyle układy ogrzewania bezpośredniego analizowano i projektowano w oparciu o wartości średnie, nomogramy i wzory półempiryczne [1], [6], [37], [50], [51], [53]. Mimo tego, że teoria układów akumulacyjnych jest bardziej rozwinięta, to nie wykroczyła ona poza analizę układów dwuwymiarowych. Według najlepszej wiedzy piszącego te słowa, w układach elektrycznego ogrzewania podłogowego nie uwzględniano trzeciego wymiaru pola liczonego wzdłuż kabla. Jest to jednak

konieczne w dokładnych analizach problemów ogrzewania pomieszczeń małej i średniej wielkości o proporcjonalnych kształtach. Niniejsza praca ma być więc próbą rozwiązania wzmiankowanych zagadnień na gruncie teorii pola w odniesieniu do grzejników bezpośrednich. W rozprawie stosowano równolegle metody analityczne, numeryczne i doświadczalne, co umożliwi ich wzajemną weryfikację i jest pomocne przy poszukiwaniu krótszego rozwiązania.

## 1.2. Cele, tezy i oryginalne elementy pracy

**Zasadniczym celem** rozprawy jest

opracowanie matematycznego modelu pola termicznego w elektrycznym grzejniku podłogowym typu bezpośredniego.

Model rozumiany jest jako zestaw matematycznych relacji (ciągłych lub dyskretnych), które opisują zjawiska zachodzące w temperaturowym polu grzejnika. Opis ten powinien być dokonany jednoznacznie, spójnie i stabilnie. Bliższe określenie tych pojęć można znaleźć np. w [36]. Z uwagi na kompletność i pewność modelowania, zachodzi konieczność osiągnięcia **trzech celów cząstkowych**. Określono je następująco:

1. opracowanie algorytmów analizy trój- i dwuwymiarowego pola termicznego w grzejniku w stanie ustalonym i nieustalonym,
2. wzajemne zweryfikowanie wyników przez zastosowanie różnych metod fizyki matematycznej,
3. doświadczalne zweryfikowanie teoretycznych analiz przy największym obciążeniu termicznym.

Realizacja wymienionych celów pozwoliła sformułować następujące tezy rozprawy:

### **Teza 1**

Opis zjawisk krańcowych w grzejnikach podłogowych małej i średniej wielkości wymaga trójwymiarowej analizy pola temperatury w układzie.

## **Teza 2**

W strefie centralnej grzejnika analizy dwuwymiarowe są wystarczająco dokładne.

## **Teza 3**

W analizie pracy bezpośredniego grzejnika podłogowego przy stałej mocy układu, można pominąć zaburzenie pola termicznego generowane zagięciami kabla.

## **Teza 4**

W analizie pracy bezpośredniego grzejnika podłogowego przy prawidłowym doborze cieplnej przewodności betonu i współczynnika przejmowania ciepła, można pominąć wpływ nieliniowych właściwości układu.

## **Teza 5**

Jednoczesne zastosowanie metod analitycznych, numerycznych i doświadczalnych zapewnia wysoki stopień poprawności modelu grzejnika.

Z powyższymi celami i tezami są też związane następujące elementy pracy, które autor uważa za oryginalne:

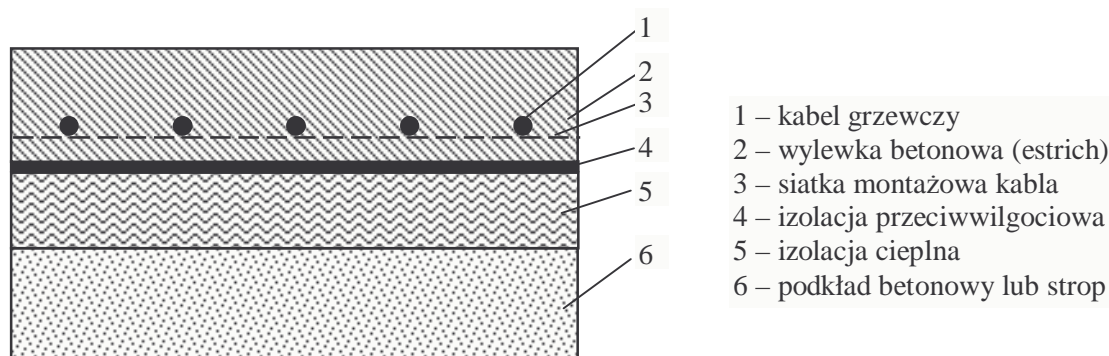
1. uwzględnienie trzeciego wymiaru w analizie stacjonarnej i niestacjonarnej pracy grzejnika,
2. opracowanie analitycznych procedur badania pola termicznego w grzejniku i ich oprogramowanie.

Autor od wielu miesięcy zajmuje się realizacją zadania wynikającego z przedstawionego celu pracy. W rezultacie tych badań opublikował szereg artykułów w *Electrical Engineering-Archiv für Elektrotechnik, Systems Analysis-Modelling-Simulation, Archives of Electrical Engineering* oraz w materiałach konferencyjnych: *Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice* i w innych [10], [40], [41], [42], [9], [44], [11], [43], [12], [39],

[38]. Wymienione publikacje tworzą cykl monotematycznych prac, które przedstawiono w postaci niniejszej rozprawy.

### 1.3. Budowa elektrycznego grzejnika podłogowego typu bezpośredniego

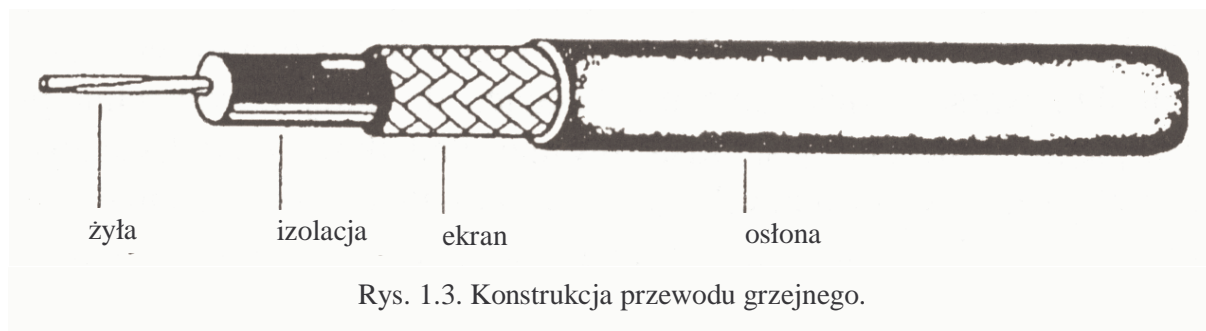
Konstrukcja grzejnika podłogowego jest prawie zawsze jednakowa, bez względu na jakim podłożu (na gruncie, czy na stropie) została wykonana. Na rys. 1.2 przedstawiono przekrój poprzeczny konstrukcji typowego układu.



Rys. 1.2. Przekrój poprzeczny grzejnika podłogowego.

Podłoże powinno być stabilne, wyrównane i poziome. Izolacja cieplna jest wykonana z utwardzonego styropianu lub prasowanej wełny mineralnej, o grubości zapewniającej odpowiedni opór cieplny. Izolacja termiczna wymusza również właściwe ukierunkowanie strumienia ciepłego w grzejniku. Izolacja przeciw wilgoci zabezpiecza izolację cieplną przed zawilgoceniem i jest wykonana z folii poliuretanowej o grubości 0.2 mm [6], [53]. Siatka montażowa utrzymuje przewody grzewcze w odległości około 1-1.5 cm [6], [53] nad izolacją. Zapewnia również stałe położenie kabla podczas wylewania warstwy betonu (estrichu cementowego). Podłoga (czyli właściwa część grzejnika) wykonana jest z estrichu cementowego wzbogaconego o plastyfikatory. Zapewnia to dokładne zalanie kabla grzewczego (ewentualne pęcherze powietrza mogą powodować przegrzanie drutu oporowego) i wzrost wytrzymałości mechanicznej oraz ułatwia samopoziomowanie masy. Grubość warstwy podłogi powinna wynosić około 3.5-5.5 cm [6], [53] nad płaszczyzną kabla. W zależności od wymagań użytkownika, grzejnik można przykryć wykładziną o cieplnym oporze nie przekraczającym  $0.15 \text{ (m}^2 \cdot \text{K)/W}$  [53].

Źródłem ciepła w systemie elektrycznego ogrzewania podłogowego jest kabel oporowy. Najczęściej stosuje się przewody dwustronnie zasilane o konstrukcji jak na rys. 1.3 [6], [18], [53].



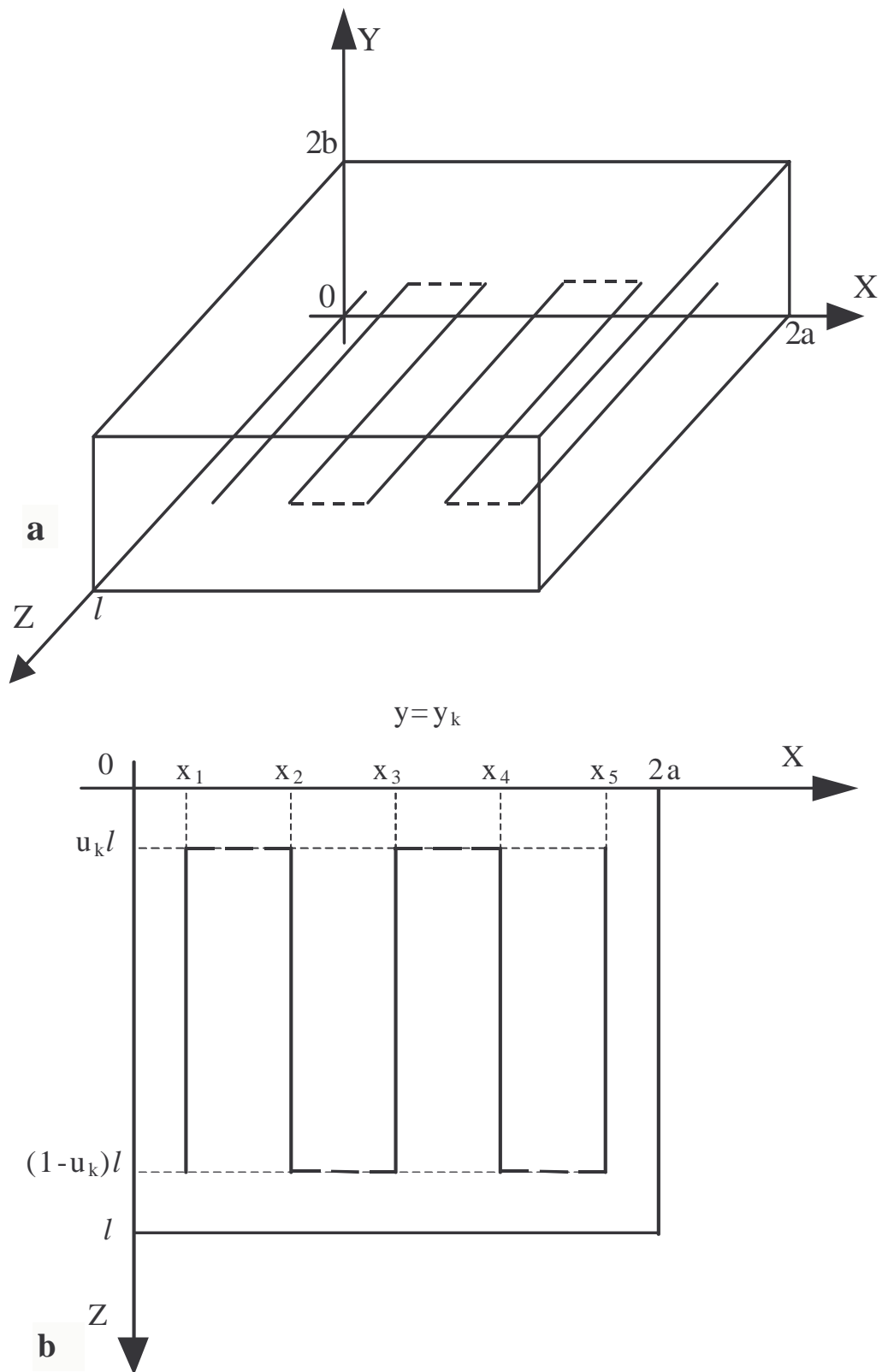
Rys. 1.3. Konstrukcja przewodu grzejnego.

Żyła, wykonana z drutu oporowego o promieniu  $r$ , zatopiona jest w ciepłoodpornej izolacji elektrycznej (np. w polwinicie). Całość jest ekranowana i osłonięta z zewnątrz drugą warstwą izolacji.

Kabel jest najczęściej ułożony w meander (zygzak), co w uproszczony sposób przedstawiono na rys. 1.4. Długie odcinki kabla są równoległe do siebie i znajdują się w odległości nie mniejszej niż 5 cm [6], [53] (właściwy rozstaw ustala projektant). Zagięcia kabla muszą bowiem tworzyć łuk, którego minimalny promień wynosi sześć zewnętrznych średnic [6], [53] kabla  $R$ . W ten sposób eliminuje się niebezpieczeństwo przegrzania przewodu. Grzejnik wolno uruchomić po związaniu estrichu (po około czterech tygodniach).

W celu zapewnienia bezpieczeństwa przeciwporażeniowego stosuje się podłączenie ekranu kabla do przewodu ochronnego PE. Należy również wykorzystać wyłącznik różnicowoprądowy o czułości 30 mA (może być wspólny z innymi urządzeniami).

Na rys. 1.4a i 1.4b przedstawiono uproszczony schemat omawianego grzejnika. Jest on prostopadłościanem o wymiarach  $(2a, 2b, l)$ . Osie długich odcinków kabla (linie ciągłe) znajdują się w punktach o współrzędnych  $x_k, y_k$  i mają długość  $(1-2u_k)l$ . Końce tych odcinków połączone są odpowiednimi zagięciami (linie przerywane). Dla uproszczenia przedstawiono je jako odcinki (a nie wyżej opisane łuki). Z uwagi na czytelność rys. 1.4, zamieszczono na nim tylko pięć długich odcinków przewodu. W dalej przedstawionych analizach można jednak uwzględnić dowolną liczbę odcinków.



Rys. 1.4. Trójwymiarowy model elektrycznego grzejnika podłogowego: a) uproszczony schemat, b) przekrój na wysokości kabla.

## 1.4. Graniczne zagadnienie pola termicznego w grzejniku

Biorąc pod uwagę skończone wymiary płyty podłogowej  $(2a, 2b, l)$  i jej proporcjonalne kształty, należy założyć trójwymiarowy model pola temperatury w urządzeniu. W ogólnym przypadku cieplna przewodność betonu jest nieliniowo zależna od temperatury  $\lambda(T)$ . Rozkład pola w urządzeniu opisuje zatem niejednorodne równanie dyfuzji [20], [33], [55]

$$\operatorname{div}[\lambda(T)\operatorname{grad}T(x, y, z, t)] - c\delta \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = -g(x, y, z, t), \quad (1.1)$$

gdzie stosowano oznaczenia wyjaśnione w wykazie zamieszczonym na początku rozprawy.

W celu ujednoznacznienia rozwiązania równania (1.1) sformułowano warunki graniczne. Wszystkie ściany grzejnika, oprócz jego powierzchni, są obłożone warstwą izolacji termicznej. Przenikający przez nią strumień ciepła jest niewielki (rzędu kilku procent mocy układu). Przy znanym rozkładzie strumienia strat, można postawić na omawianych ścianach warunki brzegowe drugiego rodzaju

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{Q_1(x=0, y, z, t)}{\lambda(T)}, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = -\frac{Q_2(x=2a, y, z, t)}{\lambda(T)}, \quad (1.2a, b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{Q_3(x, y=0, z, t)}{\lambda(T)}, \quad (1.2c)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{Q_4(x, y, z=0, t)}{\lambda(T)}, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = -\frac{Q_5(x, y, z=l, t)}{\lambda(T)}. \quad (1.2d, e)$$

Górna powierzchnia podłogi emituje energię przez konwekcję i promieniowanie jednocześnie. Emisję tę charakteryzuje współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha(T)$ , będący sumą współczynników konwekcji i promieniowania. W ogólnym przypadku jest on również zależny od temperatury. Zgodnie z prawem Newtona [20], [34],



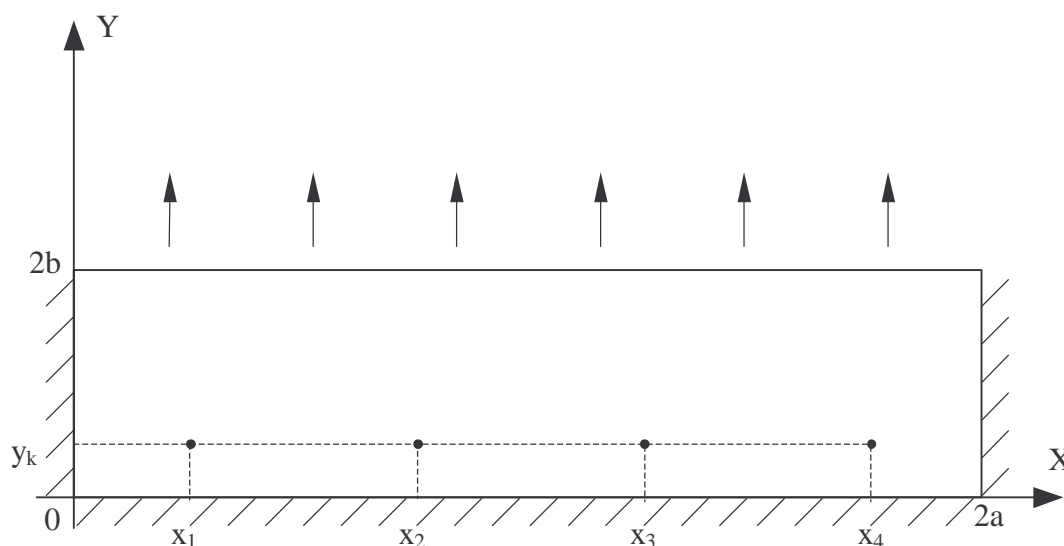
cieplny strumień jest iloczynem  $\alpha(T)$  oraz różnicy temperatury powierzchni grzewczej i otoczenia

$$-\lambda(T) \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{y=2b} = \alpha(T) [T(x, y=2b, z, t) - T_0]. \quad (1.2f)$$

W chwili  $t=0$  układ znajduje się w stanie ustalonym i wszystkie jego punkty mają temperaturę otoczenia  $T_0$

$$T(x, y, z, t=0) = T_0. \quad (1.2g)$$

W niektórych przypadkach długość układu jest znacznie większa od wymiarów jego przekroju poprzecznego. Warunek ten spełniają np. systemy ogrzewania korytarzy, tuneli ogrodniczych, ciągów komunikacyjnych itp. Pole temperatury można wówczas modelować jako płasko-równoległe, co znacznie upraszcza analizę.



Rys. 1.5. Dwuwymiarowy model elektrycznego grzejnika podłogowego.

Na rys. 1.5 przedstawiono uproszczony, dwuwymiarowy model grzejnika. Zgodnie z wyżej zamieszczonym opisem, zagadnienie graniczne można sformułować następująco

$$\operatorname{div}[\lambda(T)\operatorname{grad}T(x, y, t)] - c\delta\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = -g(x, y, t), \quad (1.3)$$

$$\left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{Q_1(x=0, y, t)}{\lambda(T)}, \quad \left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x}\right|_{x=2a} = -\frac{Q_2(x=2a, y, t)}{\lambda(T)}, \quad (1.4a, b)$$

$$\left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{Q_3(x, y=0, t)}{\lambda(T)}, \quad (1.4c)$$

$$-\lambda(T)\left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=2b} = \alpha(T)[T(x, y=2b, t) - T_0], \quad (1.4d)$$

$$T(x, y, t=0) = T_0. \quad (1.4e)$$

Równanie (1.1) jest znane od wielu dziesięcioleci. Informacja o polu termicznym jest jednak bardzo głęboko zakodowana w strukturze (1.1). Oprócz tego, analizowane obiekty i wyjściowe założenia badań stają się coraz bardziej złożone. Powyższe przyczyny sprawiają, że równanie (1.1) jeszcze długo będzie przedmiotem badań matematyków, fizyków i inżynierów.

---

## **2. Analityczne i numeryczne modelowanie stacjonarnej składowej pola temperatury w trójwymiarowym układzie ogrzewania elektrycznego**

### **2.1. Wprowadzenie**

Celem niniejszego rozdziału jest zbadanie stacjonarnej składowej pola temperatury w elektrycznym grzejniku podłogowym typu bezpośredniego. Założono przy tym, że wydajność źródeł ciepła nie zmienia się w czasie. Taki przypadek zachodzi:

1. w matematycznym modelowaniu przegrzania spowodowanego awarią układu regulacji automatycznej (czyli w modelowaniu maksymalnych obciążeń termicznych),
2. w matematycznym modelowaniu pola w grzejniku z ręczną regulacją (np. przez załączanie kolejnych grup kabli lub zmianę napięcia zasilającego za pomocą autotransformatora),
3. w matematycznym modelowaniu pola w warunkach silnego wychłodzenia otoczenia lub przy spadku mocy zasilania (gdy temperatura podłogi nie przekroczy górnej nastawy regulatora),
4. przy wyznaczaniu skokowej charakterystyki grzejnika metodą superpozycji stanów (znając składową stacjonarną wystarczy wyznaczyć składową przejściową przy wyłączonych źródłach ciepła).

### **2.2. Fizyczny model układu i zagadnienie graniczne**

Przez model fizyczny rozumie się układ fikcyjny, który odpowiada układowi rzeczywistemu pod względem jego cech istotnych dla badanego zagadnienia, ale jest prostszy (wyidealizowany) i dlatego łatwiej poddający się analizie [4]. Stosowane w pracy uproszczenia polegają głównie na linearyzacji środowiska i na pominięciu

małych wpływów. Na przykład zagięcia kabla (przerywane linie na rys. 1.4) wydzielają małą moc w stosunku do całkowitej mocy grzejnika. Można zatem pominąć wpływ tych krótkich odcinków (tzn. „zagięć”). Pomimo tego, w niniejszym paragrafie zwiększono cieplną wydajność długich odcinków równoległych (ciągłe linie na rys. 1.4) o wydajność pominiętych zagięć. Całkowita moc układu pozostała więc nie zmieniona. Tym sposobem zmniejszono i tak niewielki błąd spowodowany zaniedbaniem zakrzywionych fragmentów kabla.

Układ jest niskotemperaturowy. Kabel oddziela od powierzchni warstwa betonu o małej grubości (ogrzewanie typu bezpośredniego). Wynika stąd, że różnica między skrajnymi temperaturami płyty nie jest duża. Można więc przyjąć stałą wartość cieplnej przewodności betonu (uśredniając ją w niewielkim przedziale temperatury  $\langle T(x, y=2b, z), T(x, y=y_k, z) \rangle$ ). Innymi słowy założono liniowość środowiska ( $\lambda = \text{const}$ ).

Masa kabla jest pomijalna w stosunku do masy betonu. Podobnie można zaniedbać średnicę kabla ( $2R$ ) względem wymiarów poprzecznego przekroju płyty podłogowej ( $2a, 2b$ ). Z tych powodów nie zostanie uwzględniona struktura przewodu grzejnego i pole w jego wnętrzu. Oznacza to, że będzie obliczona temperatura powierzchni kabla, a nie jego żyły.

Ocena błędów wnoszonych przez wprowadzone uproszczenia zostanie przedstawiona w rozdziale trzecim.

### 2.2.1. Symulacja analityczna

Symulacja jest rozumiana jako odtworzenie właściwości układu za pomocą modelu matematycznego. W symulacji analitycznej każdy długi odcinek żyły kabla będzie modelowany osiowym źródłem ciepła o liniowej gęstości wydzielanej mocy  $q_k$  [W/m]. Położenie tego odcinka określają współrzędne  $x_k, y_k, z \in \langle u_k l, (1-u_k)l \rangle$ . Dogodnie jest wprowadzić równoważną wydajność objętościowych źródeł ciepła  $g_k$  [W/m<sup>3</sup>]. W podłodze z jednym fragmentem przewodu taka ekwiwalentna gęstość wydzielanej mocy zeruje się we wszystkich punktach poza odcinkiem żyły

$$g_k(x, y, z) = 0 \quad \text{dla } x \neq x_k \quad \text{lub } y \neq y_k \quad \text{lub } z \notin \langle u_k l, (1 - u_k) l \rangle. \quad (2.1)$$

Wiadomo też, że całka z wydajności  $g_k(x, y, z)$  po całej objętości podłogi równa się mocy czynnej  $k$ -tego odcinka

$$\int_0^l \int_0^{2b} \int_0^{2a} g_k(x, y, z) dx dy dz = P_k. \quad (2.2)$$

Warunki (2.1) i (2.2) określają funkcję wydajności równoważnych źródeł przestrzennych (patrz właściwości pseudofunkcji Diraca [45])

$$g_k(x, y, z) = q_k \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) G(z), \quad (2.3)$$

gdzie:  $q_k = P_k / [l(1 - 2u_k)]$ ,

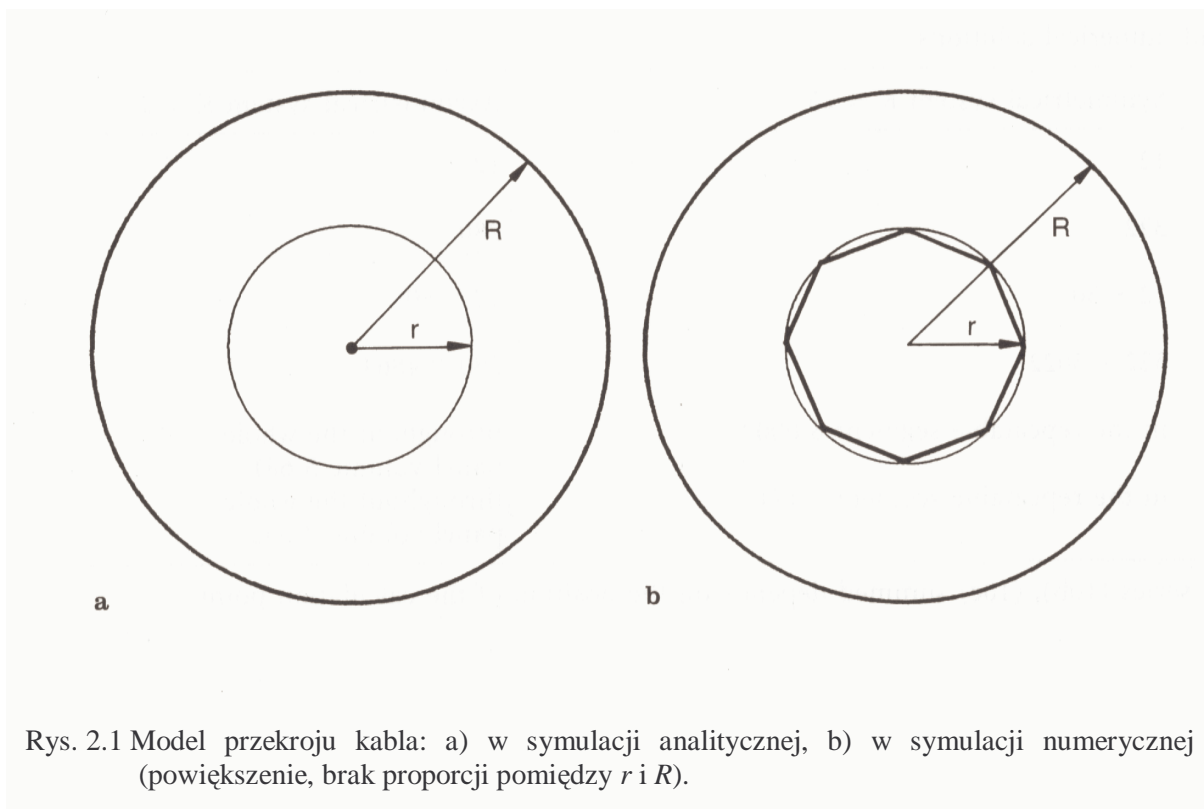
$$G(z) = \mathbf{1}(z - u_k l) - \mathbf{1}(z - l + u_k l).$$

Zakłada się, że temperaturą powierzchni przewodu jest temperatura punktów położonych w odległości  $R$  od dyskutowanego odcinka (rys. 2.1a).

W modelowaniu analitycznym każdy równoległy odcinek żyły będzie traktowany jako osobny grzejnik, wytwarzający swoją składową pola. Należy więc rozpatrzyć układ tylko z jednym grzejnikiem przy wyłączeniu pozostałych. W związku z wcześniejszym założeniem liniowości betonu ( $\lambda = \text{const}$ ), całkowity rozkład temperatury wyznacza się z zasady superpozycji. Dogodnie jest zatem analizować  $k$ -tą składową przyrostu pola termicznego

$$v_k(x, y, z) \stackrel{df}{=} T_k(x, y, z) - T_0. \quad (2.4)$$

Przyjęte założenia modyfikują w stanie ustalonym ( $t \rightarrow \infty$ ) równanie (1.1) do następującej postaci [20], [22], [34] względem przyrostu (2.4)



Rys. 2.1 Model przekroju kabla: a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej (powiększenie, brak proporcji pomiędzy  $r$  i  $R$ ).

$$\frac{\partial^2 v_k(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_k(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda} g_k(x, y, z), \quad (2.5)$$

gdzie  $g_k(x, y, z)$  określa wzór (2.3). Równanie (2.5) uzupełniono o warunki brzegowe.

Przy prawidłowo ułożonej izolacji, straty ciepła są małe i nie przekraczają kilku procent mocy układu. Można zatem przyjąć, że termicznie izolowane ściany są adiabatyczne. Z tego powodu we wzorach (1.2) przyjęto  $Q_r(x, y, z, t) = 0$ , dla  $r = 1, 2, \dots, 5$ . Zatem zależności (1.2a-e) przyjmują następującą postać

$$\left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (2.6a, b)$$

$$\left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (2.6c)$$

$$\left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0. \quad (2.6d, e)$$

Emisję energii przez górną powierzchnię podłogi charakteryzuje współczynnik przejmowania ciepła  $\alpha$ . Założono stałą wartość  $\alpha$ , określoną na podstawie średniej temperatury powierzchni  $y=2b$  i temperatury otoczenia  $T_0$ . Zatem zależność (1.2f), po wprowadzeniu przyrostu (2.4), przyjmuje postać

$$\left. \frac{\partial v_k(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} v_k(x, y=2b, z). \quad (2.6f)$$

### 2.2.2. Symulacja numeryczna

W symulacji numerycznej model odcinka żyły kabla wynika z kształtu elementów skończonych, na jakie podzielono objętość płyty (rys. 2.3). Źródłami ciepła są zatem ośmiokątne graniastosłupy prawidłowe, wpisane w walec żyły kabla. Ich poprzeczne przekroje są ośmiokątami foremnymi o bardzo małym polu powierzchni ( $0.707 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ ). K-ty graniastosłup wydziela moc  $P_k$ , taką samą jak w paragrafie 2.2.1. Proste prostopadłe poprowadzone ze środków ośmiokątów pokrywają się z osiami poszczególnych odcinków kabla. Długość każdego odcinka wynosi  $l(1-2u_k)$ . Za temperaturę powierzchni przewodu przyjmuje się temperaturę punktów znajdujących się w odległości  $R$  od środka ośmiokąta (rys. 2.1b).

Z uwagi na inny model źródła, w symulacji numerycznej nie można stosować wzoru (2.3). W modelowaniu cyfrowym zrezygnowano również ze stosowania zasady superpozycji. Z tej przyczyny zagadnienie brzegowe uzyskuje się usuwając indeks  $k$  we wzorach (2.4), (2.5), (2.6).

## 2.3. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego

### 2.3.1. Rozwiązanie analityczne – rozwinięcie w szereg funkcji własnych

Rozwiązanie równania Poissona (2.5) jest potrójnym nieskończonym szeregiem funkcji własnych operatora Laplace'a [13]. W prostokątnym układzie współrzędnych są nimi sinusy i cosinusy [33]. Z uwagi na warunki (2.6a, c, d) należy jednak odrzucić sinusy. Wartości własne względem zmiennych  $x, y, z$  wynikają odpowiednio ze związków (2.6b, f, e). Z powyższego wynika zależność

$$v_k(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} B_{mni} \cos\left(\frac{m\pi}{2a} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n}{2b} y\right) \cdot \cos\left(\frac{i\pi}{l} z\right), \quad (2.7)$$

gdzie  $\gamma_n$  są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równania przestępnego

$$\operatorname{ctg} \gamma_n = \frac{\gamma_n}{A}, \quad A = \frac{2\alpha b}{\lambda}, \quad (2.8a, b)$$

rozwiązywanego numerycznie metodą Newtona. W celu wyznaczenia współczynnika  $B_{mni}$ , podstawiono (2.7) do lewej strony równania (2.5). Ciągi funkcji  $\{\cos[m\pi x/(2a)]\}$ ,  $\{\cos[\gamma_n y/(2b)]\}$ ,  $\{\cos(i\pi z/l)\}$  są ortogonalne [33], [54] odpowiednio w przedziałach  $\langle 0, 2a \rangle$ ,  $\langle 0, 2b \rangle$ ,  $\langle 0, l \rangle$ .  $B_{mni}$  jest więc współczynnikiem uogólnionego szeregu Fouriera

$$B_{mni} \left[ \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \right] = \frac{1}{\lambda \|N\|^2} \int_0^l \int_0^{2b} \int_0^{2a} g_k(x, y, z) \cos\left(\frac{m\pi}{2a} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n}{2b} y\right) \cdot \cos\left(\frac{i\pi}{l} z\right) dx dy dz, \quad (2.9a)$$

gdzie  $g_k(x, y, z)$  określono wzorem (2.3) i



$$\|N\|^2 = \int_0^l \int_0^{2b} \int_0^{2a} \cos^2\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\gamma_n}{2b}y\right) \cdot \cos^2\left(\frac{i\pi}{l}z\right) dx dy dz. \quad (2.9b)$$

Po obliczeniu  $B_{mni}$  z (2.9a) i (2.9b), przekształceniu oraz podstawieniu do (2.7) otrzymano

$$v_k(x, y, z) = \frac{2q_k}{ab\pi\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x_k\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n}{2b}y_k\right) \cdot \sin[i\pi(1-2u_k)]}{i \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2\right]} \cdot \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\gamma_n}{2b}y\right) \cdot \cos\left(\frac{2i\pi}{l}z\right)}{(1 + \delta_{m0})(1 + \delta_{(2i)0})}, \quad (2.10)$$

gdzie przez wartość wyrazu nieoznaczonego dla  $i=0$  rozumie się jego granicę przy  $i \rightarrow 0$ . Następnie zsumowano szereg indeksowany wskaźnikiem  $m$ . W tym celu wykorzystano zależność [56]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\beta)}{m^2 + d^2} = -\frac{1}{2d^2} + \frac{\pi}{2d} \cdot \frac{\cosh[(\beta - \pi)d]}{\sinh(\pi d)} \quad \text{dla } 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (2.11)$$

Prowadzi to do innej postaci wzoru (2.10), dogodnej do numerycznego opracowania. Mianowicie potrójne sumowanie zastąpiono sumowaniem pojedynczym i podwójnym:

$$v_k(x, y, z) = v_k^{(1)}(x, y) + v_k^{(2)}(x, y, z), \quad (2.12a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 v_k^{(1)}(x, y) &= 2(1 - 2u_k) \frac{q_k}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\gamma_n \frac{y_k}{2b}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right)}{\gamma_n \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \sinh\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right)} \cdot \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{a}{b} - \frac{x_k}{2b}\right)\right] \cosh\left(\gamma_n \frac{x}{2b}\right) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_k \\ \cosh\left(\gamma_n \frac{x_k}{2b}\right) \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{2b}\right)\right] \quad \text{dla } x_k \leq x \leq 2a \end{array} \right. , \quad (2.12b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_k^{(2)}(x, y, z) &= \frac{4}{\pi} \frac{a}{b} \frac{q_k}{\lambda} \cdot \\
 &\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\gamma_n \frac{y_k}{2b}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) (-1)^i \sin[i(1 - 2u_k)\pi] \cos\left(2i\pi \frac{z}{l}\right)}{i\Gamma_{ni} \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \sinh(\Gamma_{ni})} \cdot \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \cosh\left[\Gamma_{ni} \left(1 - \frac{x_k}{2a}\right)\right] \cosh\left(\Gamma_{ni} \frac{x}{2a}\right) \quad \text{dla } 0 \leq x \leq x_k \\ \cosh\left(\Gamma_{ni} \frac{x_k}{2a}\right) \cosh\left[\Gamma_{ni} \left(1 - \frac{x}{2a}\right)\right] \quad \text{dla } x_k \leq x \leq 2a \end{array} \right. , \quad (2.12c)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ni} = \sqrt{\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right)^2 + \left(4\pi i \frac{a}{l}\right)^2} . \quad (2.12d)$$

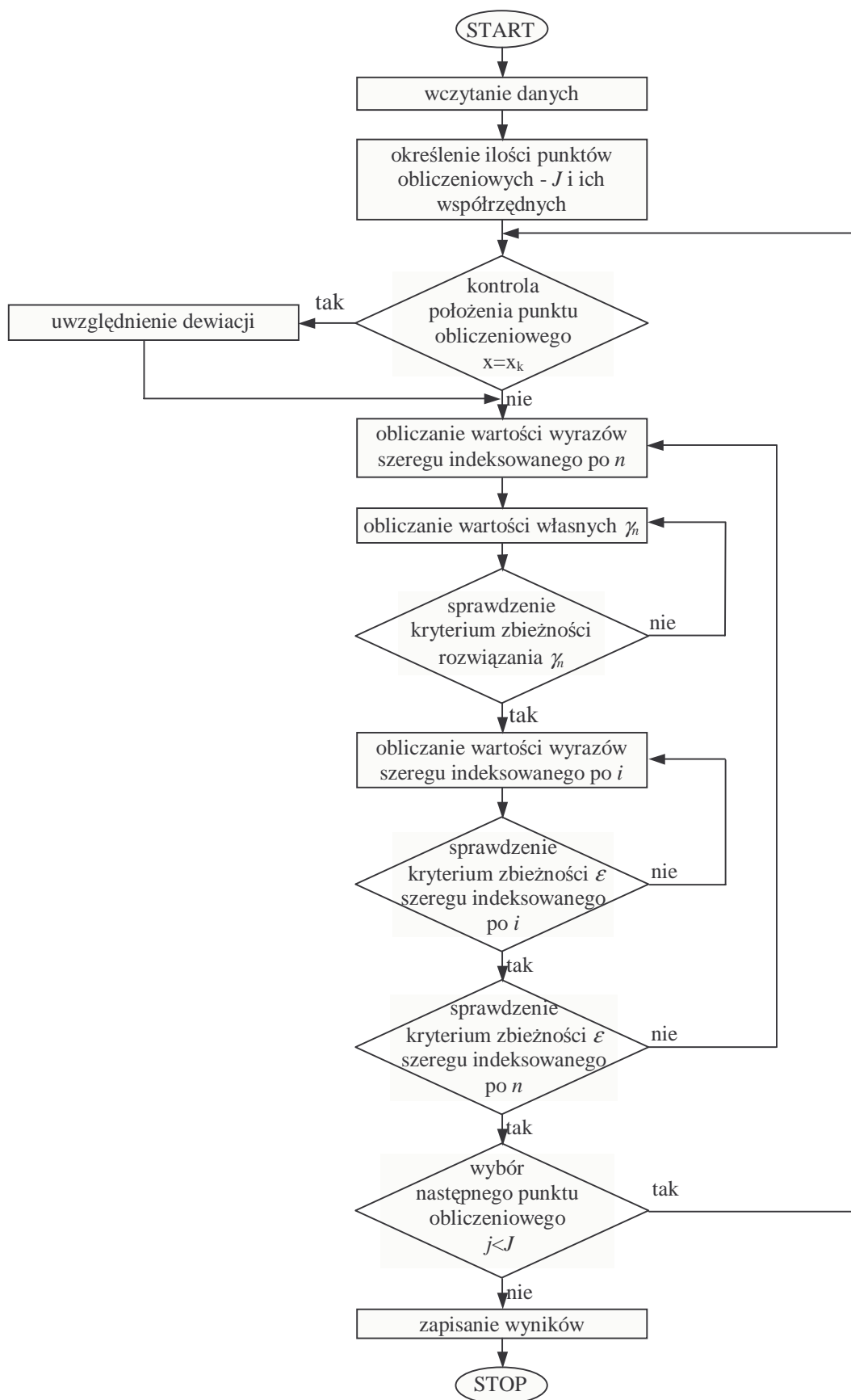
Zależności (2.12b), (2.12c) są ciągłe w całym obszarze. Jednak pochodne z (2.12b) i (2.12c) względem zmiennej  $x$  zmieniają się skokowo na prostej bifurkacji  $x=x_k$ . Wymieniona osobliwość sprawia, że przy obliczaniu  $v_k^{(1)}(x_k, y)$ ,  $v_k^{(2)}(x_k, y, z)$  należy nadać pewne odchylenie współrzędnej  $x_k$ . W bezpośrednim sąsiedztwie żyły promień odchylenia może być równy promieniowi kabla  $R$  (chodzi bowiem o wyznaczenie temperatury powierzchni przewodu a nie jego żyły). Na pozostałej części prostej bifurkacji dewiacja powinna być mniejsza (np.  $r=(R/\delta)$ ).

Przy obliczaniu (2.12b), (2.12c) należy wprowadzić wskaźnik zbieżności  $\varepsilon$ . Mianowicie sumowanie (2.12b), (2.12c) może być zakończone, gdy stosunek modułów sumy ostatnich dziesięciu wyrazów do modułu sumy globalnej jest mniejszy od  $\varepsilon$ . Aby powyższe kryterium (przy  $\varepsilon = \text{const}$ ) było spełnione, w miarę zbliżania się do prostej bifurkacji  $x = x_k$  należy sumować coraz większą liczbę wyrazów szeregów (2.12b), (2.12c) (patrz tabela 2.1, str. 42). Z uwagi na przekraczanie w trakcie obliczeń dopuszczalnego zakresu argumentu funkcji  $\sinh$  i  $\cosh$ , zastąpiono je funkcjami wykładniczymi i odpowiednio przekształcono. Gdy moduł wykładnika funkcji  $e^{-x}$  był większy od 300, przyjęto  $e^{-x} = 0$ . Powyższe uwagi wykorzystano przy numerycznym opracowaniu zależności (2.12b) i (2.12c). W celu stabilizowania poszczególnych składowych wzoru (2.12a), napisano oddzielne programy w języku Fortran. Na rys. 2.2 przedstawiono przykładowy schemat blokowy programu obliczającego składową (2.12c). Wszystkie inne programy tablicujące szeregi w niniejszej rozprawie mają podobną strukturę. Różnią się tylko ilością nieskończonych szeregów (jeden, dwa lub trzy) oraz niektórymi funkcjami. W dodatku do rozprawy znajdują się wydruki wszystkich programów, opracowanych w ramach niniejszej pracy.

Całkowite pole oblicza się zgodnie z zasadą superpozycji sumując składowe generowane przez poszczególne odcinki kabla

$$T_u(x, y, z) = T_0 + \sum_{k=1}^K v_k(x, y, z). \quad (2.13)$$

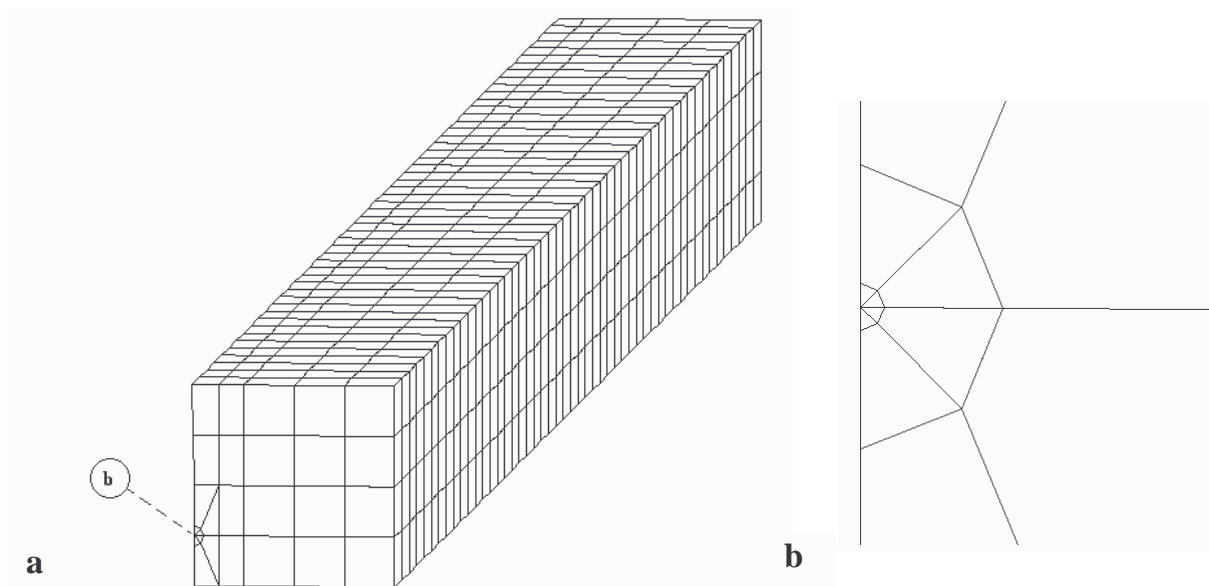
Rozwiązanie (2.12a) nawiązuje do ważnych fragmentów monografii [45]. W [45] zamieszczono bowiem ciekawe przykłady rozwiązań równania Poissona (2.5) z funkcją źródła w postaci impulsów Diraca. W niniejszej pracy przyjęto odmienny punkt wyjścia (potrójny szereg Fouriera zamiast rozdzielenia zmiennych). Oprócz tego w funkcji źródła (2.3) dodatkowo uwzględniono sygnał bramki  $G(z)$  i wprowadzono odmiennie niż w [45] warunki brzegowe (2.6). Inne zastosowanie dwuwymiarowego impulsu Diraca do modelowania pola termicznego za pomocą funkcji Greena przedstawiono w [13].



Rys. 2.2. Schemat blokowy programu komputerowego do obliczania trójwymiarowej składowej ustalonej temperatury  $v_k^{(2)}(x, y, z)$  w grzejniku.

### 2.3.2. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych

W symulacji numerycznej poszukiwany rozkład temperatury  $T_u(x,y,z)$  wyznaczono jednocześnie od wszystkich długich odcinków kabla (tzn. nie superponowano oddzielnie składowych  $v_k(x,y,z)$ ). Obliczenia wykonano metodą elementów skończonych [2] wykorzystując program NISA II/Heat Transfer [61] amerykańskiej firmy EMRC. Obszar podłogi podzielono na graniastosłupy trójkątne i czworokątne odpowiednio o sześciu i ośmiu węzłach. W strefie największego gradientu temperatury (tzn. wokół źródeł) zwiększono liczbę wyżej wymienionych elementów. Opisaną siatkę generowano automatycznie [27], [33]. Zdyskretyzowany w ten sposób fragment płyty podłogowej pokazano na rys. 2.3.



Rys. 2.3. Podział czwartej części segmentu powtarzalnego na elementy skończone: a) dyskretyzacja obszaru obliczeniowego (perspektywa), b) powiększenie rysunku w otoczeniu kabla (przekrój poprzeczny).

Do algebraizacji zagadnienia brzegowego (2.4) (2.5), (2.6) (bez indeksu  $k$ ) program NISA wykorzystuje procedurę Galerkiną [7]. W jej wyniku otrzymano układ równań algebraicznych opisujący temperaturę w węzłach [61]

$$[\lambda] \{T\} = \{G\}. \quad (2.14)$$

Program rozwiązuje układ (2.14) metodą Newtona – Raphsona [60], [61]. W ten sposób otrzymano poszukiwany wektor  $\{T\}$ , co kończy procedurę.

## 2.4. Przykłady obliczeniowe

Wzór (2.13) i zależność odwrotna względem (2.14) stanowią ogólne rozwiązanie postawionego zadania. W przypadku symetrycznego ułożenia kabla można jednak znacznie zawęzić obszar obliczeń. Z tego powodu dalej przedstawione przykłady uwzględniają dwie odmienne konfiguracje źródeł ciepła.

### 2.4.1. Symetryczne położenie odcinków kabla

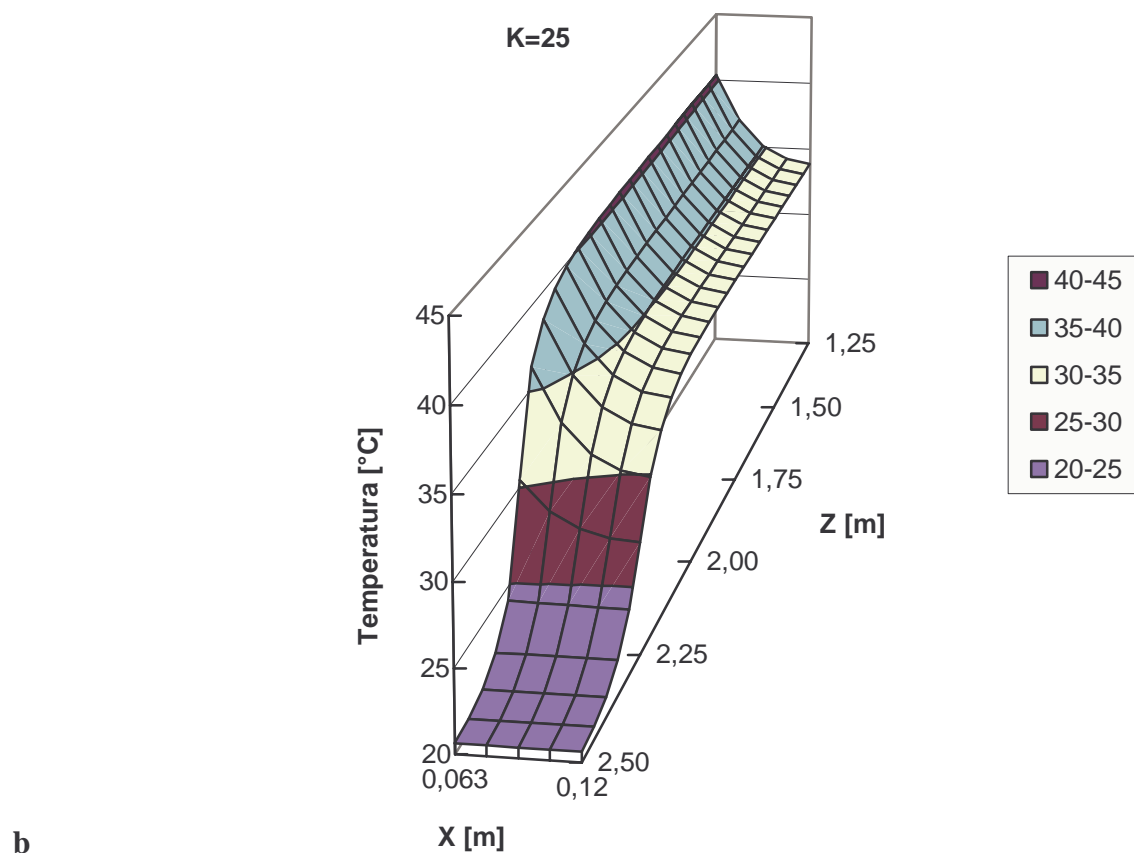
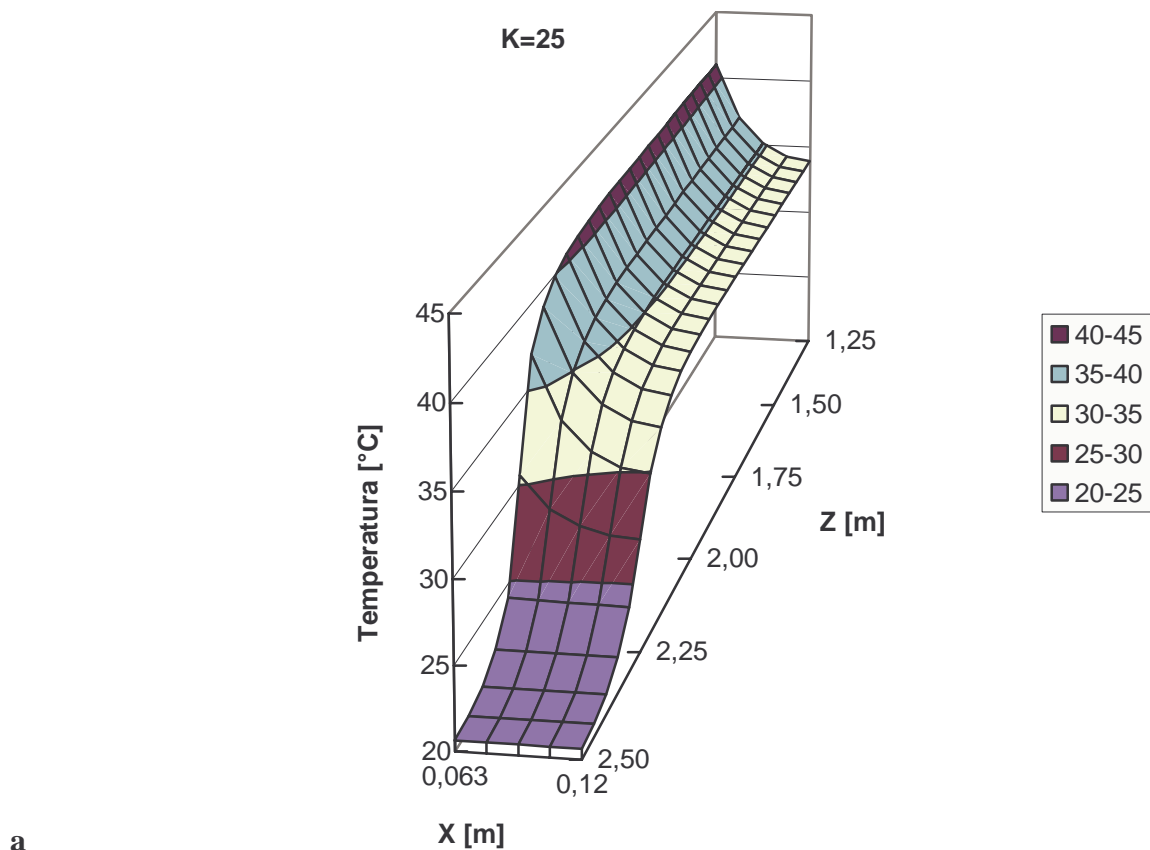
W praktyce odcinki kabla są niemal zawsze położone symetrycznie. Oznacza to, że odcięte grzejników wyrażają się zależnością

$$x_k = 2a(k - 0.5)/K, \quad k = 1, 2, 3 \dots K. \quad (2.15)$$

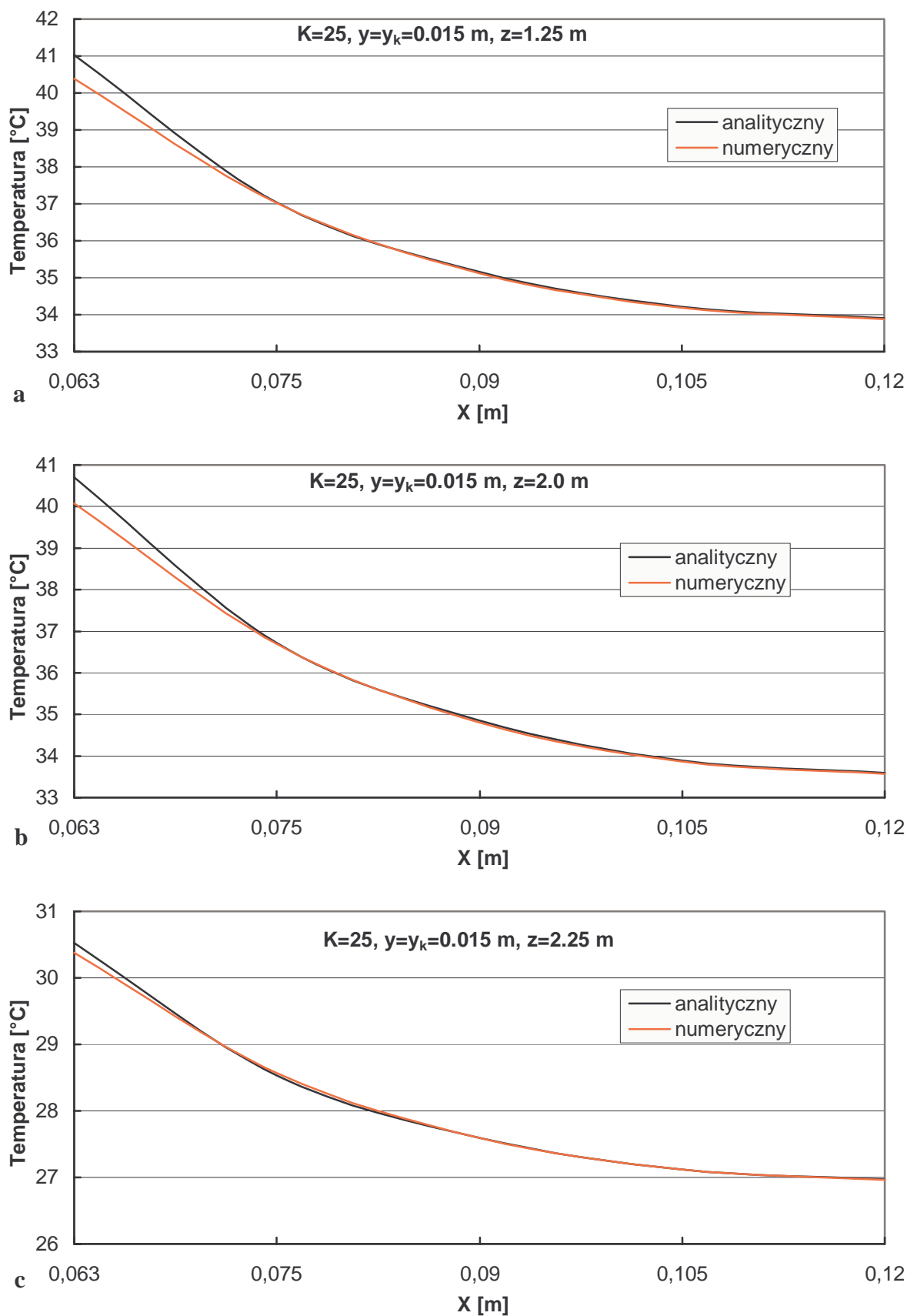
W tej sytuacji minima temperatury znajdują się w połowie odległości pomiędzy równoległymi odcinkami kabla

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0.5(3x_k - x_{k+1})} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0.5(x_k + x_{k+1})} = 0. \quad (2.16)$$

Związki (2.16) określają położenie płaszczyzn adiabatycznych. W omawianym przypadku nie ma więc przepływu ciepła w kierunku osi  $OX$ . Wystarczy zatem obliczyć rozkład temperatury w tzw. segmencie powtarzalnym, tzn. w przedziale  $\langle 0.5(3x_k - x_{k+1}), 0.5(x_k + x_{k+1}) \rangle$ . W pozostałych obszarach układu symetrycznego wyznaczony rozkład powtórzy się  $K$  razy. Szerokość segmentu powtarzalnego zależy oczywiście od  $2a$  i  $K$  (patrz wykaz oznaczeń).

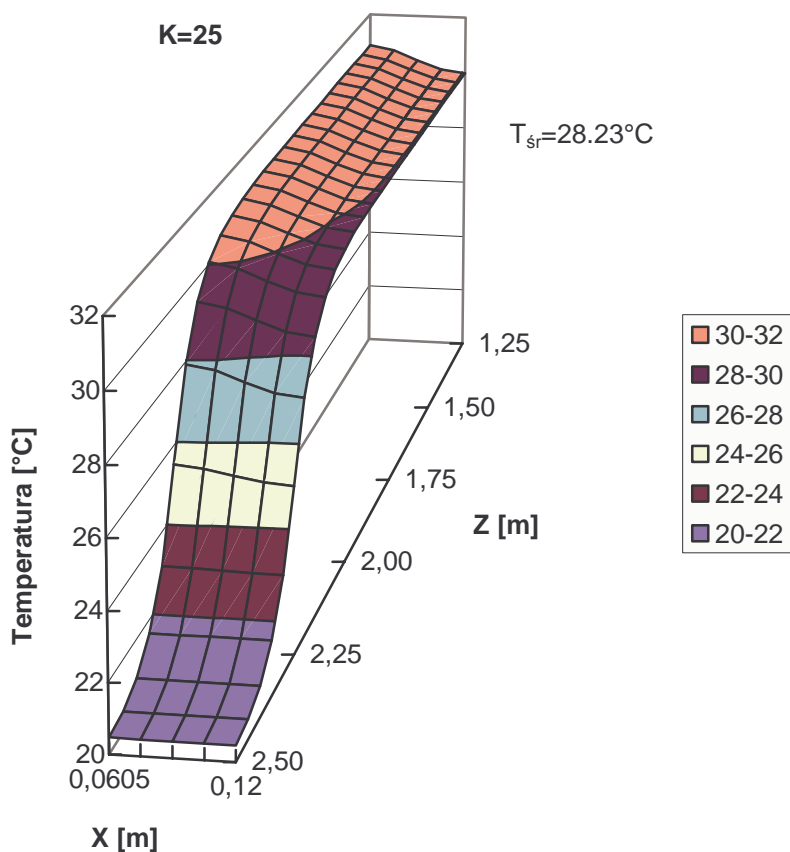


Rys. 2.4. Rozkład temperatury na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m) w segmencie powtarzalnym układu symetrycznego ( $K=25$ ): a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej.

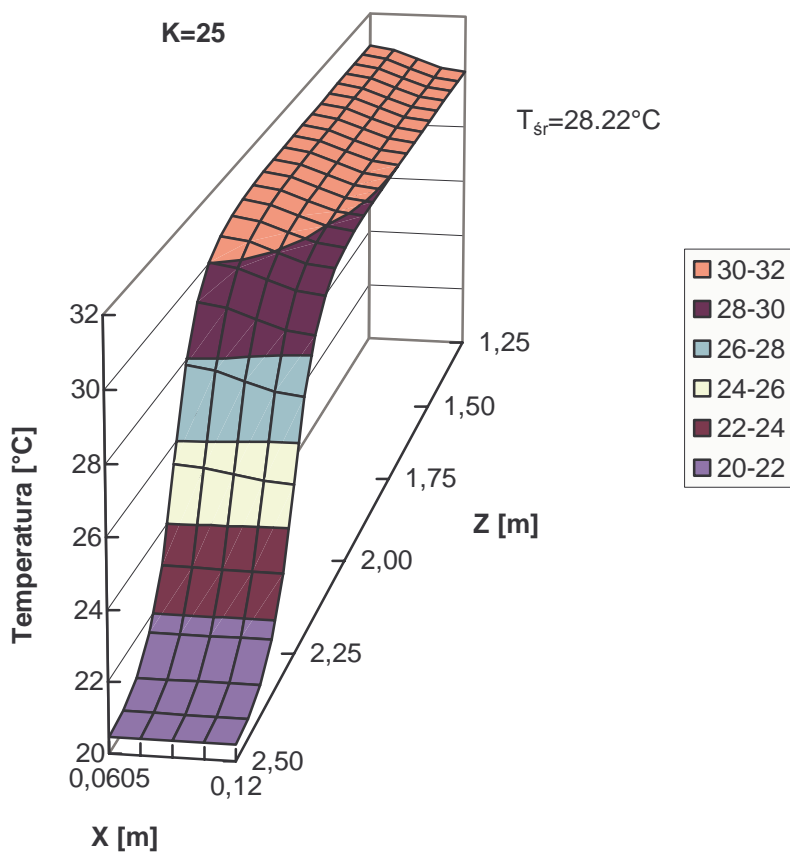


Rys. 2.5. Porównanie rozkładów wyznaczonych analitycznie i numerycznie na wysokości kabła grzewczego ( $y=y_k=0.015 \text{ m}$ ) w prawej połowie segmentu powtarzalnego ( $K=25$ ): a) dla  $z=1.25 \text{ m}$ , b) dla  $z=2.0 \text{ m}$ , c) dla  $z=2.25 \text{ m}$ .



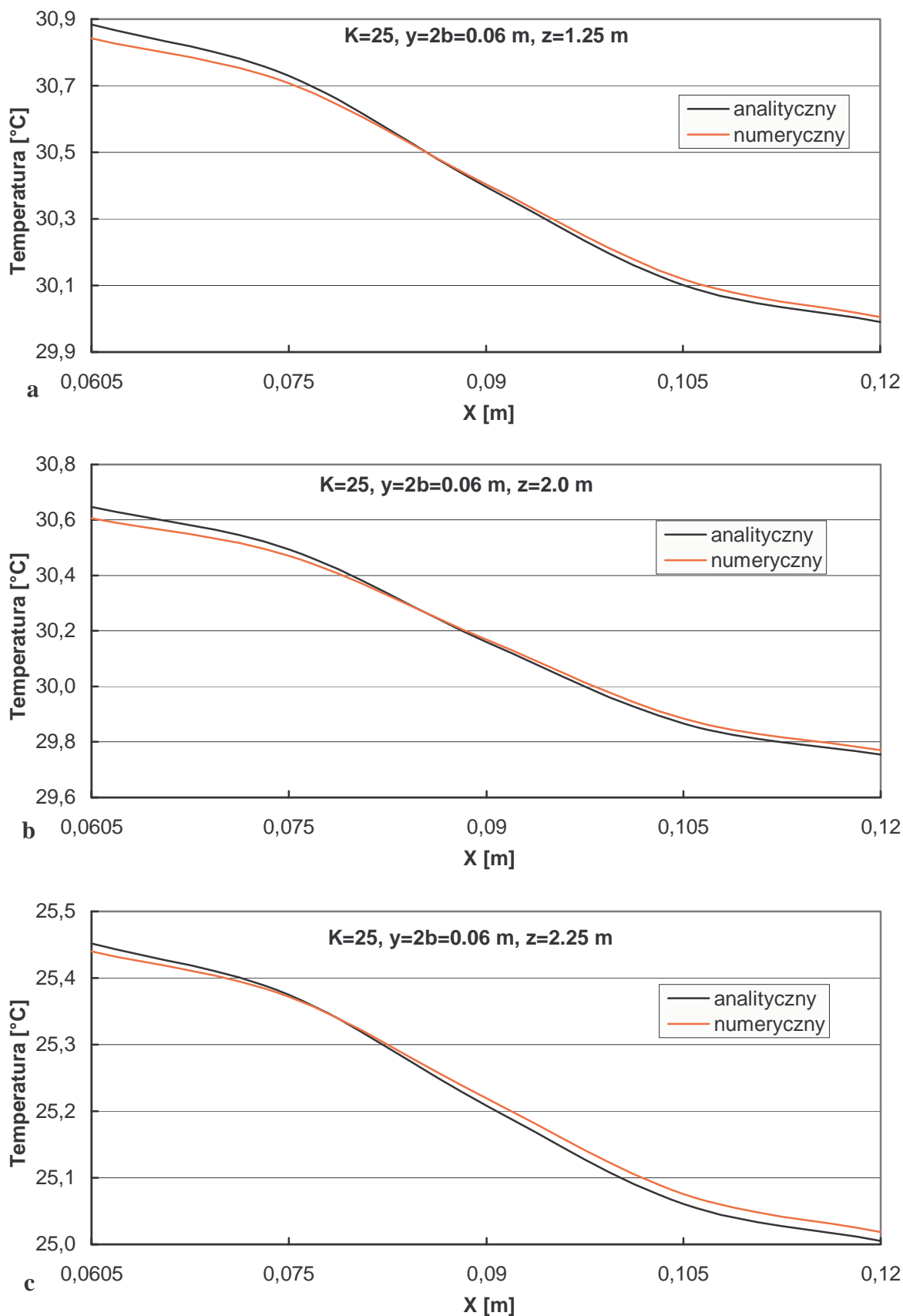


a

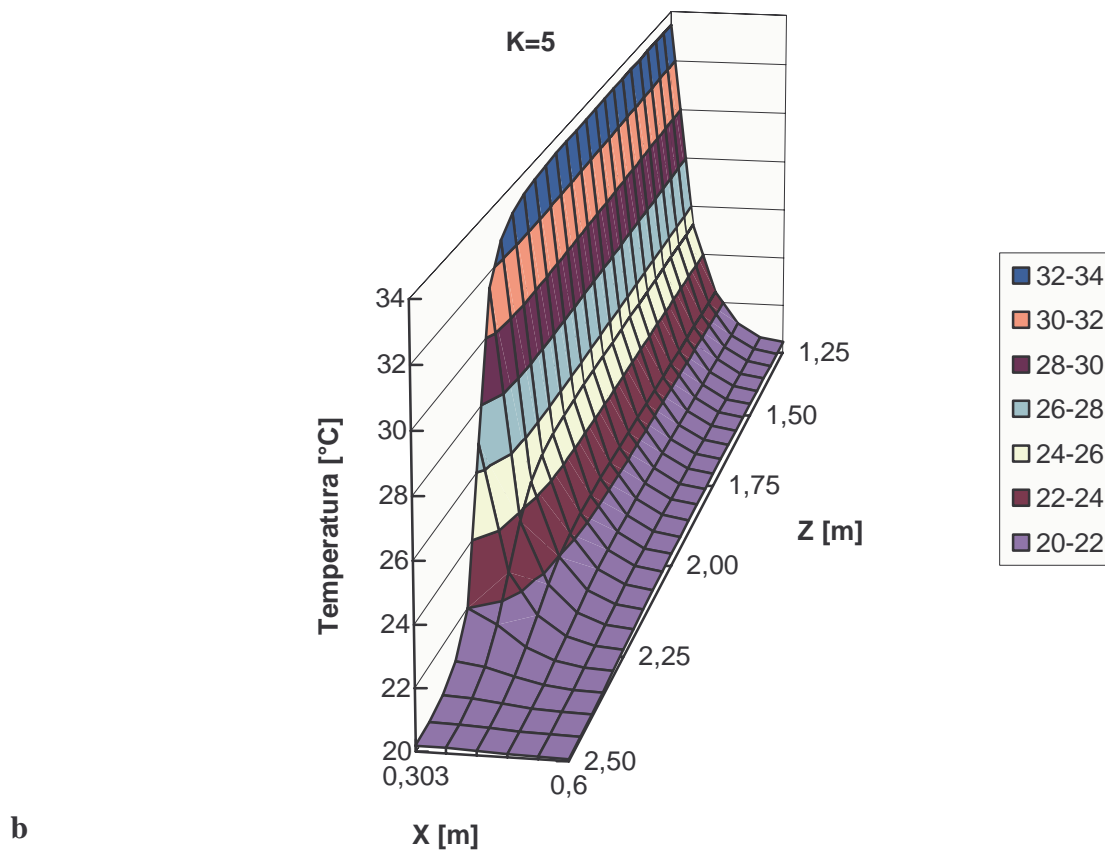
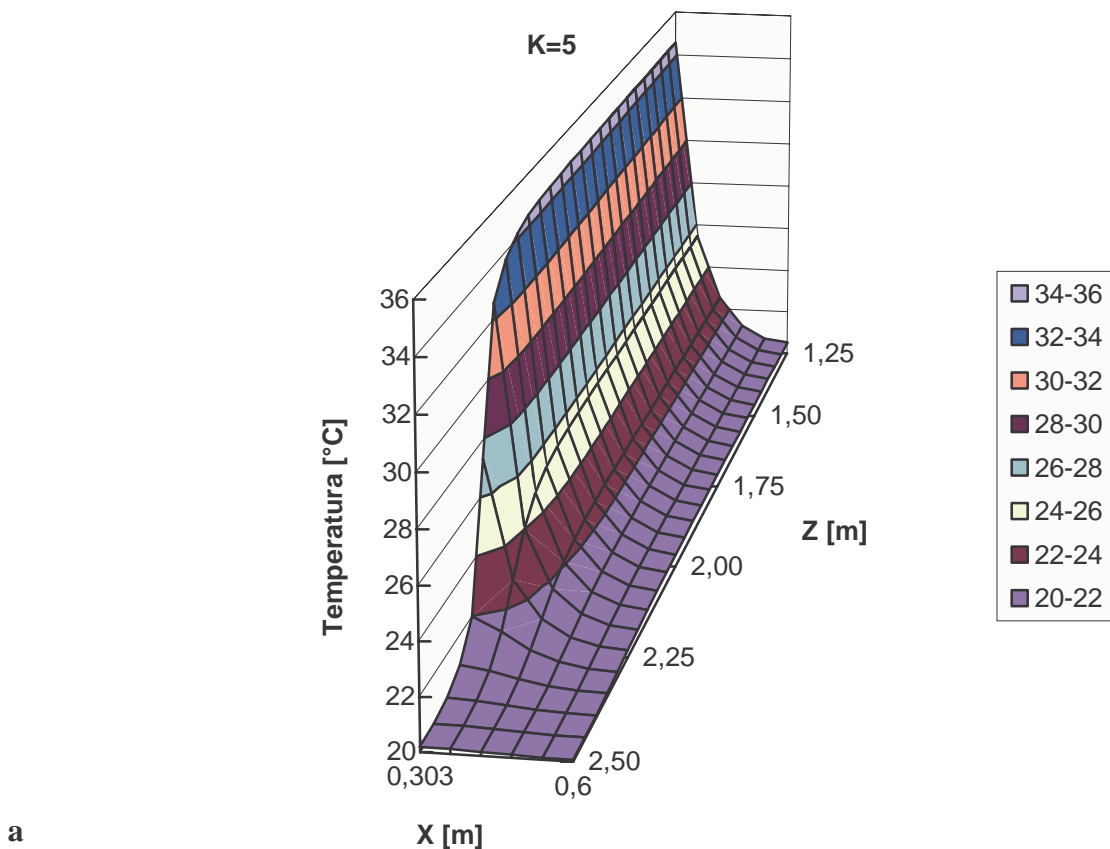


b

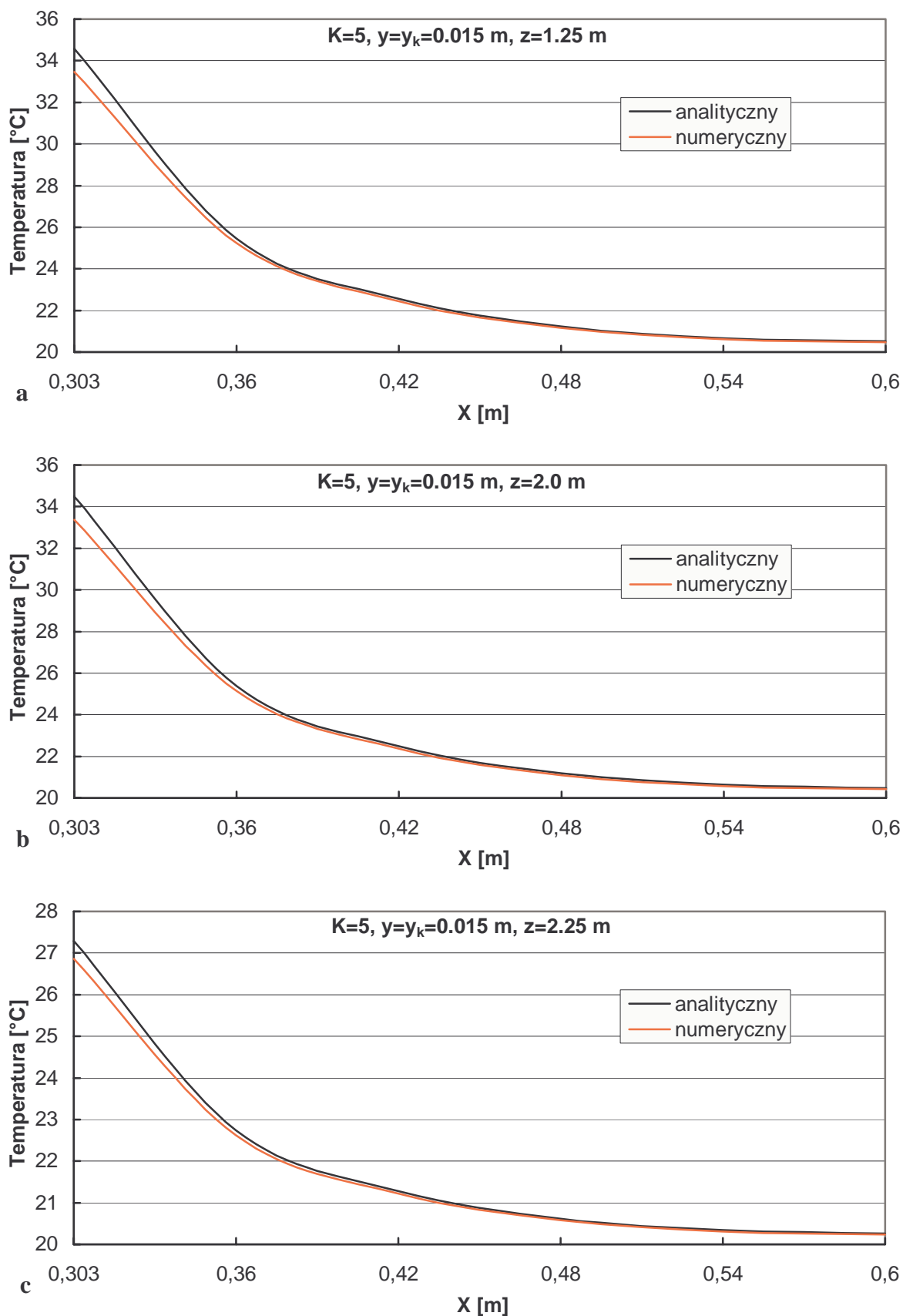
Rys. 2.6. Rozkład temperatury na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w segmencie powtarzalnym układu symetrycznego ( $K=25$ ): a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej.



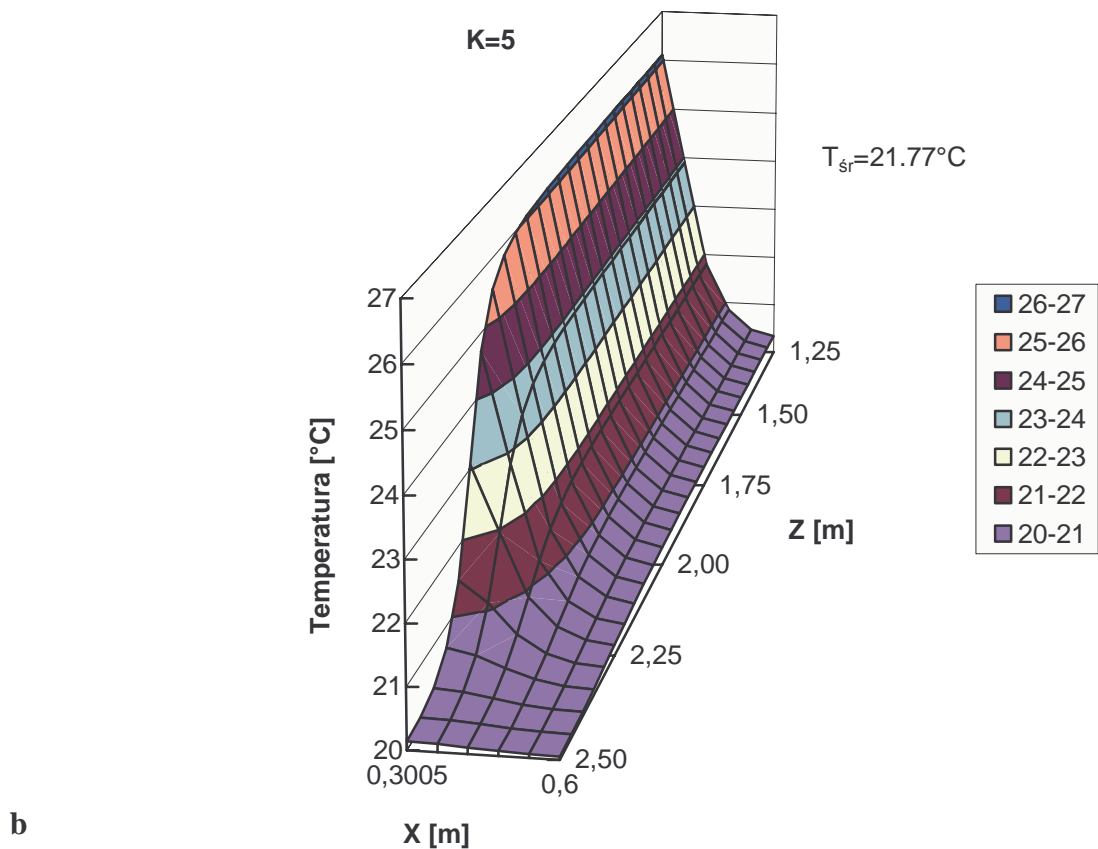
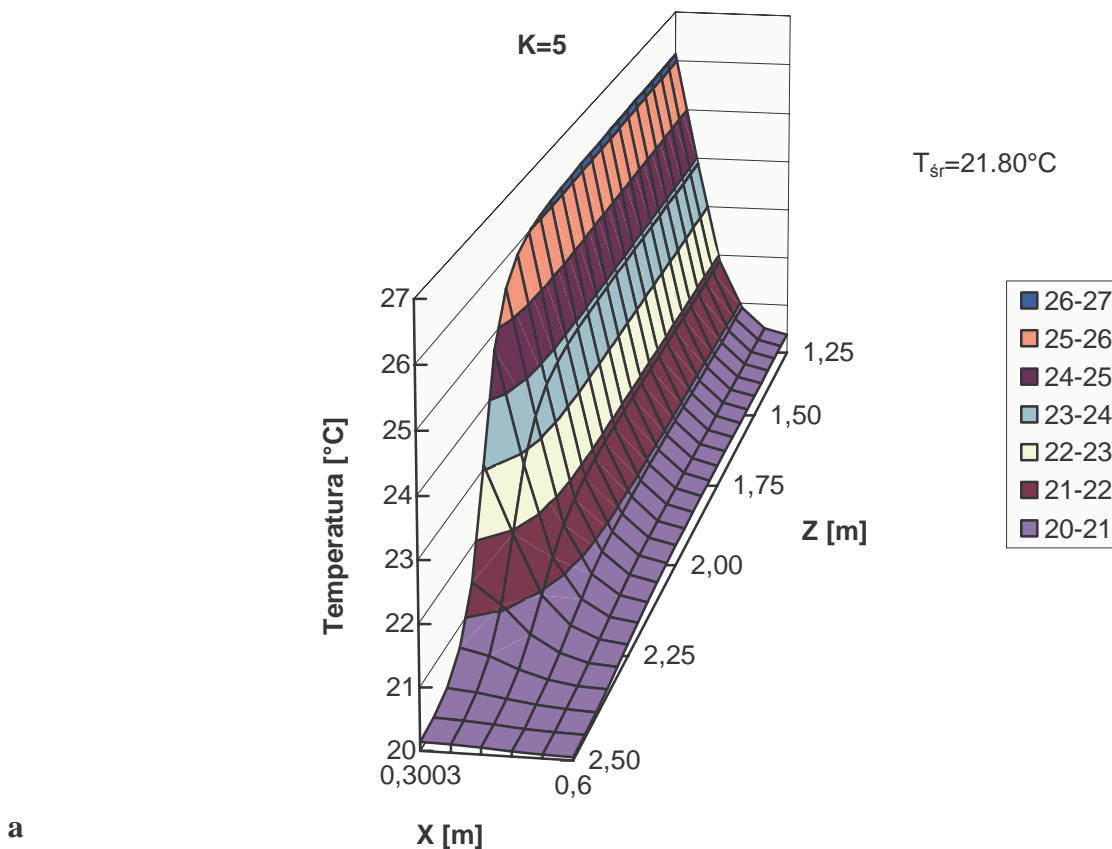
Rys. 2.7. Porównanie rozkładów wyznaczonych analitycznie i numerycznie na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06 \text{ m}$ ) w prawej połowie segmentu powtarzalnego ( $K=25$ ): a) dla  $z=1.25 \text{ m}$ , b) dla  $z=2.0 \text{ m}$ , c) dla  $z=2.25 \text{ m}$ .



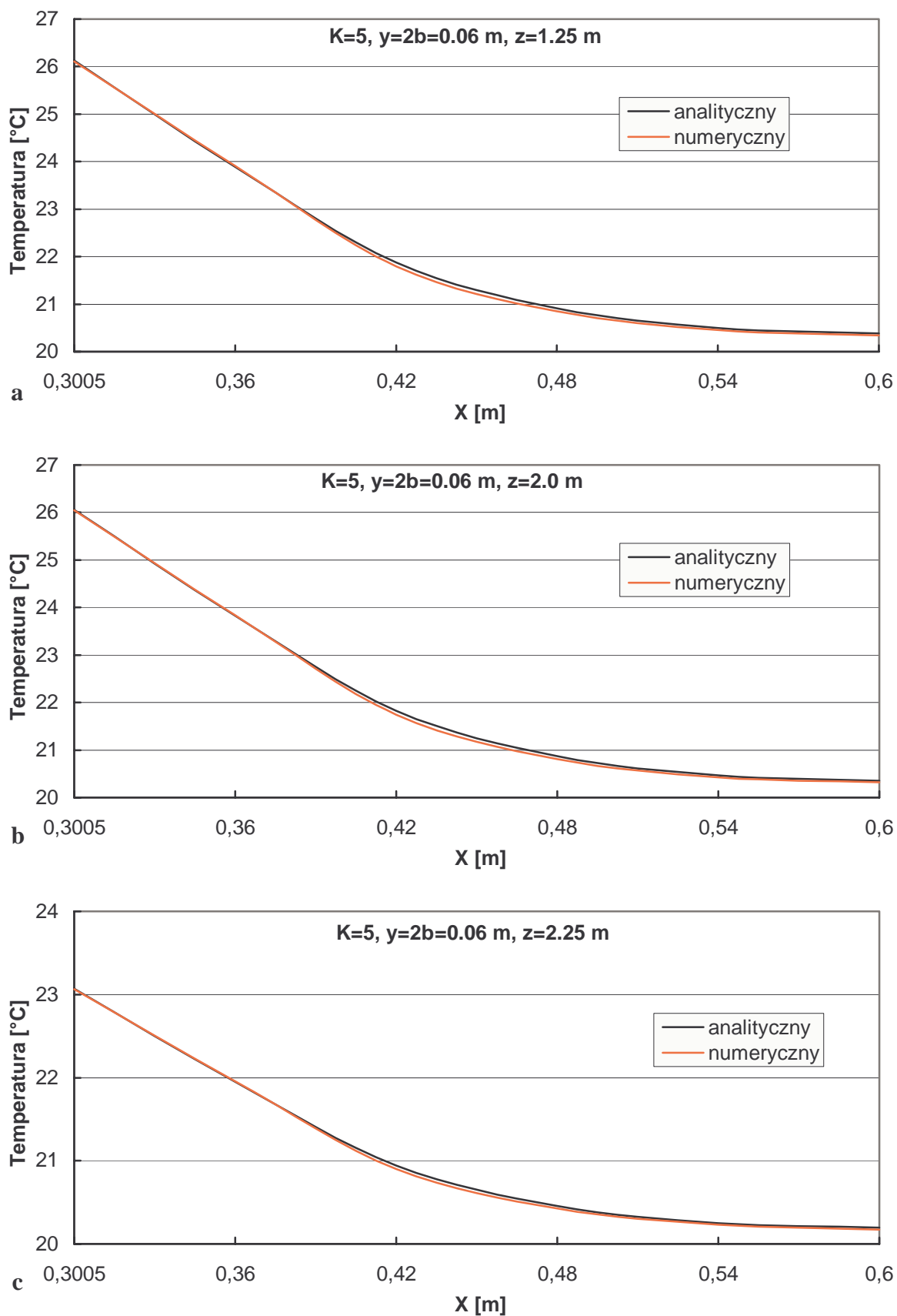
Rys. 2.8. Rozkład temperatury na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m) w segmencie powtarzalnym układu symetrycznego ( $K=5$ ): a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej.



Rys. 2.9. Porównanie rozkładów wyznaczonych analitycznie i numerycznie na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015 \text{ m}$ ) w prawej połowie segmentu powtarzalnego ( $K=5$ ): a) dla  $z=1.25 \text{ m}$ , b) dla  $z=2.0 \text{ m}$ , c) dla  $z=2.25 \text{ m}$ .



Rys. 2.10. Rozkład temperatury na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w segmencie powtarzalnym układu symetrycznego ( $K=5$ ): a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej.



Rys. 2.11. Porównanie rozkładów wyznaczonych analitycznie i numerycznie na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06 \text{ m}$ ) w prawej połowie segmentu powtarzalnego ( $K=5$ ): a) dla  $z=1.25 \text{ m}$ , b) dla  $z=2.0 \text{ m}$ , c) dla  $z=2.25 \text{ m}$ .

Przyjęto następujący zestaw danych:

$$\begin{aligned}
 2a &= 3 \text{ m}, & 2b &= 0.06 \text{ m}, & l &= 2.5 \text{ m}, & T_0 &= 20^\circ\text{C}, \\
 \lambda_c &= 63 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, & r &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, & R &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}, & y_k &= 0.015 \text{ m}, \\
 u_k &= 0.1, & q_k &= 15 \text{ W/m}, & \alpha &= 12 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}, & K &= 5 \text{ lub } K=25 \\
 \lambda &= 1.0 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, & \varepsilon &= 10^{-7}, & g_k &= 2.1213 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3.
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

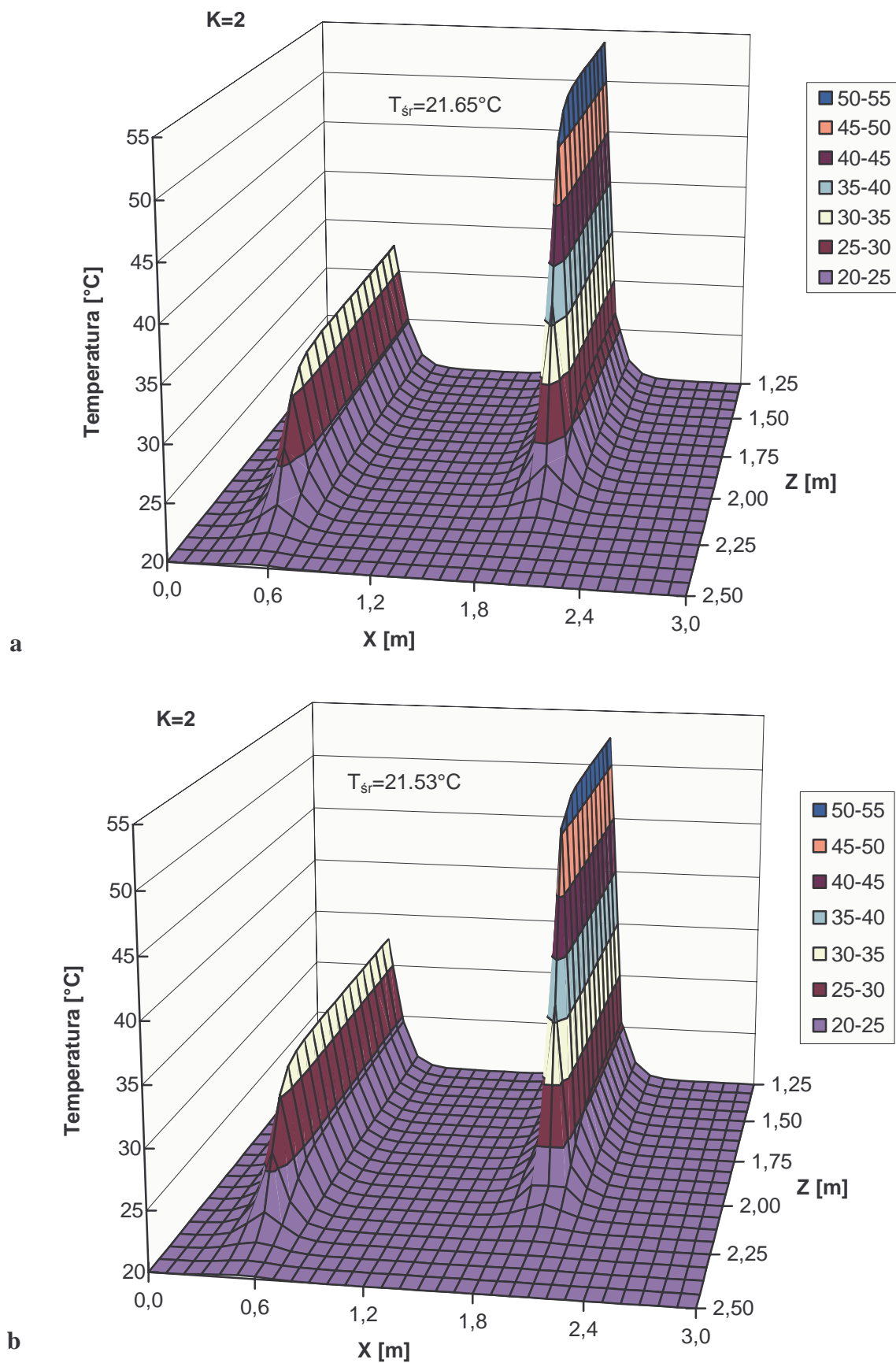
W całej pracy obliczenia wykonano za pomocą komputera Pentium 200MMX. Wyniki niniejszego rozdziału przedstawiono na rys. 2.4-2.11. Z uwagi na symetrię pola temperatury względem środkowych płaszczyzn segmentu powtarzalnego, ograniczono się do czwartej części zakresu. Jak widać większa jest temperatura punktów położonych na płaszczyźnie zawierającej przewód (np. rys. 2.4) niż temperatura punktów położonych na powierzchni podłogi (np. rys. 2.6). Wzrost liczby odcinków kabla powoduje większą równomierność rozkładu i wzrost temperatury średniej (np. rys. 2.6, 2.10). Temperatura zwiększa się też w kierunku środka płyty (np. rys. 2.7).

Porównanie wyników symulacji analitycznej i numerycznej przedstawiono na rys. 2.5, 2.7, 2.9, 2.11. Jak widać, pewne różnice występują dla  $x \approx x_k$  (tzn. w otoczeniu odciętych położenia przewodu grzejnego). Wynika to z odmiennych modeli żyły kabla w obliczeniach analitycznych i numerycznych.

#### 2.4.2. Niesymetryczne położenie odcinków kabla

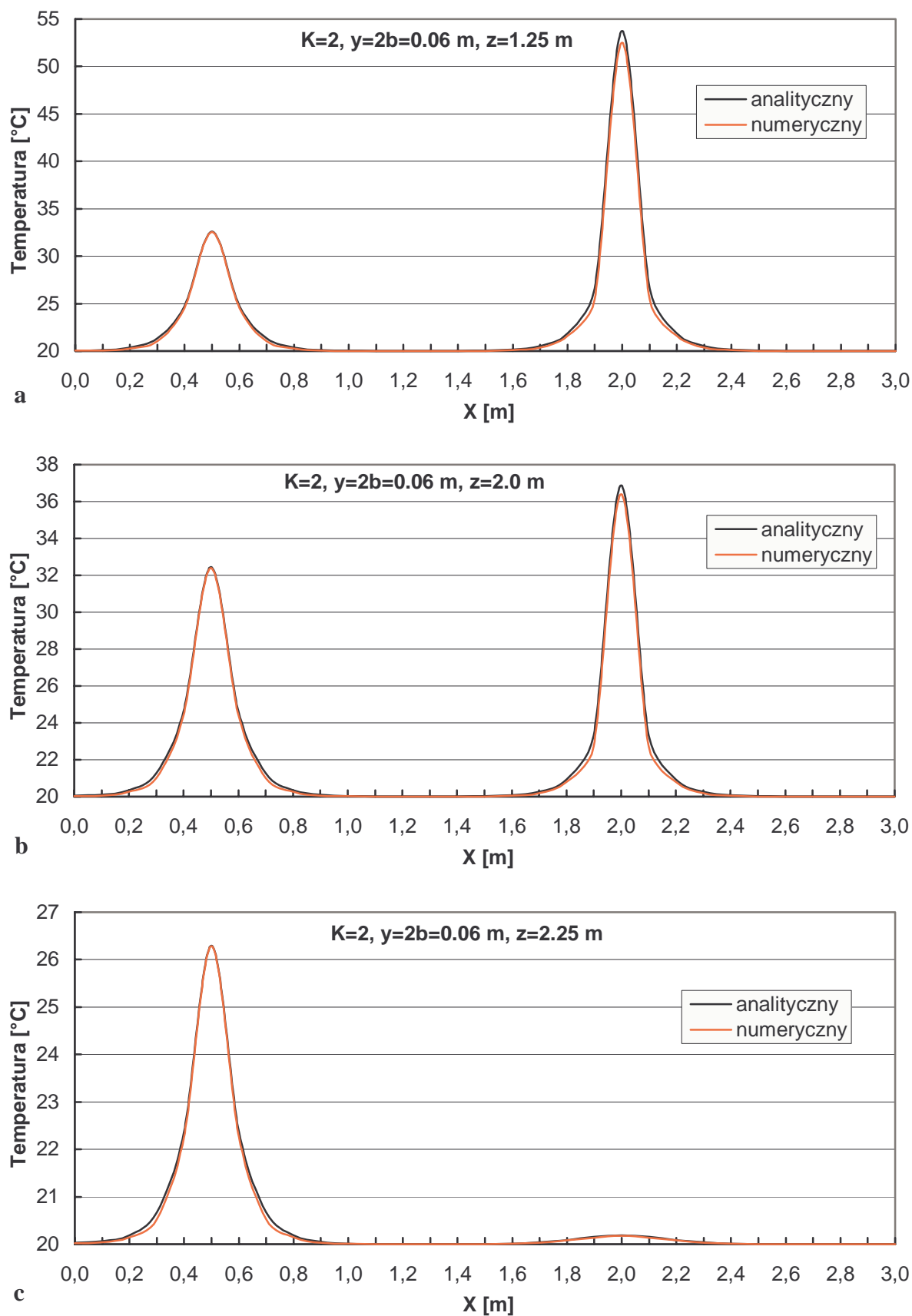
Przypadek ten ma wyłącznie teoretyczne znaczenie. Jest jednak ciekawy z poznawczego punktu widzenia i prezentuje w pełni możliwości przedstawionej metody. W celu uwzględnienia różnej mocy i długości grzejników oraz ich położenia na odmiennych poziomach, zmieniono niektóre parametry zestawu danych (2.15), (2.17)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.5 \text{ m}, & y_1 &= 0.02 \text{ m}, & u_1 &= 0.1, & q_1 &= 30 \text{ W/m}, & K &= 2 \\
 x_2 &= 2 \text{ m}, & y_2 &= 0.05 \text{ m}, & u_2 &= 0.2, & q_2 &= 50 \text{ W/m}, \\
 g_1 &= 4.2426 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3, & g_2 &= 7.071 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$



Rys. 2.12. Rozkład temperatury na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w układzie niesymetrycznym ( $K=2$ ): a) w symulacji analitycznej, b) w symulacji numerycznej.





Rys. 2.13. Porównanie rozkładów wyznaczonych analitycznie i numerycznie na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w układzie niesymetrycznym ( $K=2$ ): a) dla  $z=1.25$  m, b) dla  $z=2.0$  m, c) dla  $z=2.25$  m.

Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 2.12, 2.13. Jest na nich wyraźnie widoczny wpływ mocy, głębokości położenia i długości poszczególnych odcinków kabla na rozkład temperatury.

### 2.4.3. Ogólne informacje o przedstawionych przykładach

O liczbie

- uwzględnionych wyrazów w szeregach (2.12b), (2.12c),
  - wprowadzonych elementów skończonych i węzłów,
- informuje tabela 2.1.

Tabela 2.1. Wybrane informacje o rozwiązaniu analitycznym i numerycznym.

Informacja	układ symetryczny K=25	układ symetryczny K=5	układ niesymetryczny K=2
Minimalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (2.12b)	12	12	12
Maksymalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (2.12b)	322	317	280
Minimalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (2.12c)	12x50	12x50	12x50
Maksymalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (2.12c)	322x5022	317x4987	280x4864
Ilość elementów skończonych	w segmencie powtarzalnym 6000	w segmencie powtarzalnym 6800	w całej objętości płyty 5681
Ilość węzłów	w segmencie powtarzalnym 7171	w segmencie powtarzalnym 8181	w całej objętości płyty 7052

Podstawowym parametrem układu jest średnia temperatura powierzchni podłogi. Jej wartości podano na rys. 2.6, 2.10, 2.12. Jak widać, prawidłowy dobór mocy realizuje  $K=25$  odcinków kabla (rys. 2.6,  $T_{sr} \cong 28.2^{\circ}\text{C}$ , dopuszczalna wartość maksymalna według polskiej normy PN-85/N-08013 wynosi  $29^{\circ}\text{C}$ ). Generowany strumień cieplny wynosi więc  $[(1-2u_k)q_k \cdot K/(2a)] = 100 \text{ W/m}^2$ .

W dalszej części pracy ograniczono się do praktycznego przypadku układu symetrycznego z dwudziestoma pięcioma odcinkami kabla. Realizuje on bowiem właściwy dobór mocy grzejnej. Dla  $2a=3 \text{ m}$  i  $K=25$  szerokość segmentu powtarzalnego wynosi  $2a^*=0.12 \text{ m}$ .

## 2.5. Porównanie stacjonarnych rozkładów trójwymiarowych i dwuwymiarowych

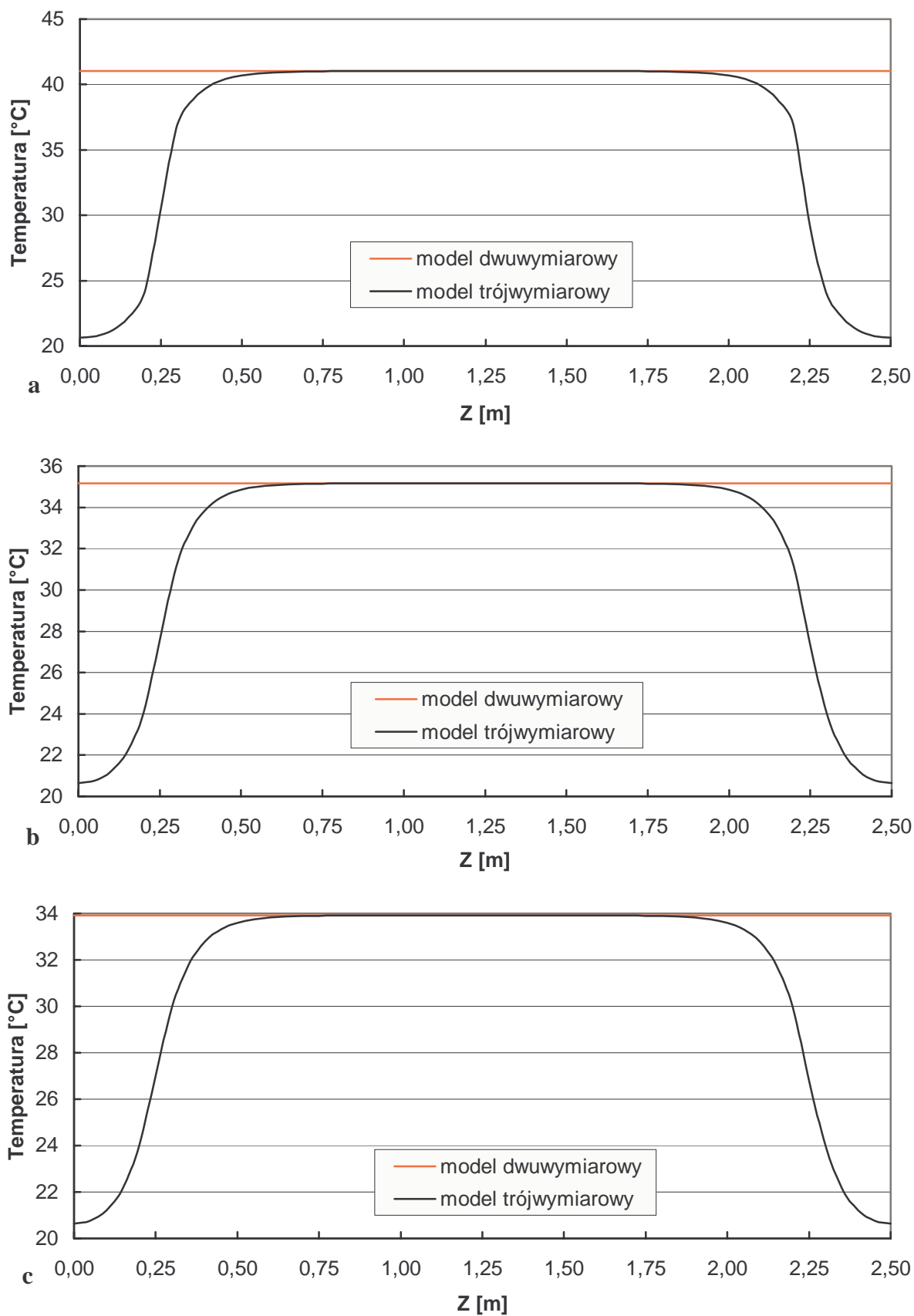
Rozkład temperatury w układzie trójwymiarowym opisują zależności (2.12) i (2.13). Jeżeli odcinki kabla ułożone są na całej długości  $l$  układu, to należy przyjąć  $u_k=0$  (rys. 1.4). W takim przypadku następuje nieznaczne uproszczenie składowej (2.12b) oraz wyzerowanie (2.12c). Prowadzi to do dwuwymiarowego rozkładu temperatury w grzejniku, pokazanym na rys. 1.5. Ostatecznie otrzymano następujące zależności

$$v_k^{(1)}(x, y) = \frac{2q_k}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\gamma_n \frac{y_k}{2b}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right)}{\gamma_n \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \sinh\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right)} \cdot \begin{cases} \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{a}{b} - \frac{x_k}{2b}\right)\right] \cosh\left(\gamma_n \frac{x}{2b}\right) & \text{dla } 0 \leq x \leq x_k \\ \cosh\left(\gamma_n \frac{x_k}{2b}\right) \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{a}{b} - \frac{x}{2b}\right)\right] & \text{dla } x_k \leq x \leq 2a \end{cases}, \quad (2.19)$$

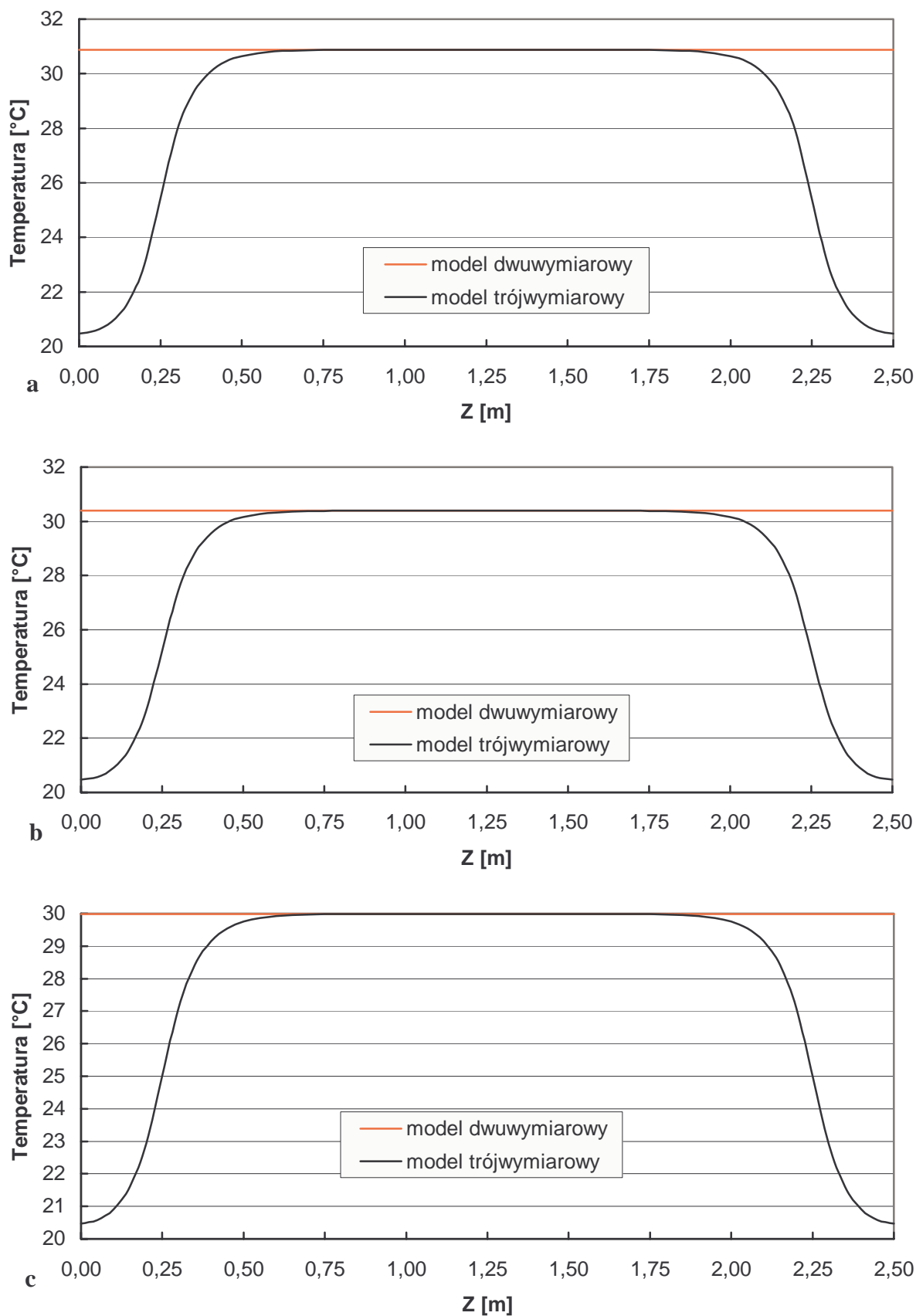
$$T_u(x, y) = T_0 + \sum_{k=1}^K v_k^{(1)}(x, y). \quad (2.20)$$

Jest to wynik zgodny z rezultatami pracy [14]. Należy więc stwierdzić, że [14] stanowi szczególnie przypadek ogólnych rozważań, zamieszczonych w niniejszym rozdziale.

Na rys. 2.14 i 2.15 przedstawiono porównanie rozkładu pola temperatury w modelu trójwymiarowym i dwuwymiarowym dla wybranych przekrojów na wysokości kabla grzewczego i powierzchni układu. W przypadku dwuwymiarowym (płasko-równoległym) rozkład temperatury nie zależy od współrzędnej  $Z$ . Zatem na rys. 2.14 i 2.15 (kolor czerwony) przyjęto stałą jej wartość wzdłuż całej długości układu  $l$ . Z rys. 2.14 i 2.15 wynika, że rozkłady temperatury rozpatrywanych modeli różnią się znacząco tylko w strefie krawędziowej.



Rys. 2.14. Porównanie rozkładu temperatury w modelu dwuwymiarowym i trójwymiarowym na wysokości kabła grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m): a)  $x=0.063$  m b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.



Rys. 2.15. Porównanie rozkładu temperatury w modelu dwuwymiarowym i trójwymiarowym na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m): a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.

## 2.6. Uwagi końcowe

Z przeprowadzonych badań wynika, że w stanie ustalonym wybór modelu żyły kabla (rys. 2.1) w niewielkim stopniu wpływa na rozkład temperatury w betonie (rys. 2.5, 2.7, 2.9, 2.11, 2.13). Uwaga ta nie odnosi się do małego obszaru przekrojów kabla. Termiczne pole wymienionych przekrojów nie ma jednak znaczenia w analizie przedstawionego zadania.

Niniejszy rozdział jest przykładem weryfikacji metody elementów skończonych [64] za pomocą potrójnego szeregu Fouriera (2.7). Oczywiście zależności (2.12), (2.13), (2.19), (2.20) mogą też służyć do testowania innych metod numerycznych (omówionych np. w [45]). Otrzymanie tego samego wyniku (rys. 2.5, 2.7, 2.9, 2.11, 2.13) za pomocą całkowicie odmiennych metod, potwierdza poprawność rozwiązania eliptycznego zagadnienia granicznego (2.5), (2.6). Udowadnia to częściowo tezę nr 5 (str. 12).

Z porównania modelu dwuwymiarowego i trójwymiarowego (rys. 2.14 i 2.15) wynika, że analizy dwuwymiarowe są wystarczająco dokładne w centralnej strefie układu dla  $z \in \langle 0.5, 2.0 \text{ m} \rangle$ . W przypadku strefy krawędziowej  $z \in \langle 0.0, 0.5 \text{ m} \rangle \cup \langle 2.0, 2.5 \text{ m} \rangle$  należy bezwzględnie stosować model trójwymiarowy. Udowadnia to odpowiednio tezę nr 2 i nr 1 (str. 12 i 11) w odniesieniu do ustalonego stanu grzejnika.

---

### **3. Teoretyczna i doświadczalna weryfikacja trójwymiarowego modelu stacjonarnej składowej pola termicznego w grzejniku**

W rozdziale 2 przedstawiono stacjonarny model grzejnika z założeniami upraszczającymi, które między innymi polegały na:

- pominięciu zagiętych części kabla grzewczego,
- założeniu stałych wartości  $\alpha$  i  $\lambda$ ,
- przyjęciu idealnej izolacji cieplnej.

W niniejszym paragrafie przedstawiono weryfikację tych założeń oraz wyniki eksperymentu wykonanego na rzeczywistym modelu podłogi. Powyższe analizy przeprowadzono dla stacjonarnej składowej pola termicznego. Ponieważ w stanie ustalonym układ pracuje przy największym obciążeniu termicznym, temperatura poszczególnych punktów grzejnika jest wówczas najwyższa. Należy zatem przypuszczać, że różnice powstałe z porównania modeli z przyjętymi założeniami upraszczającymi i bez nich, będą wówczas również największe. Wynika stąd możliwość majoryzacji przybliżeń dynamicznych przez stacjonarne.

#### **3.1. Symulacja wpływu zagięć kabla na rozkład stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku podłogowym**

##### **3.1.1. Wstęp**

Uproszczony schemat elektrycznego grzejnika podłogowego przedstawiono na rys. 1.4. W rozdziale 2 modelowano rozkład pola temperatury pochodzący od długich odcinków kabla grzewczego (linie ciągłe, rys. 1.4). Przyjęto przy tym określone założenia upraszczające. Jednym z nich było pominięcie wpływu zagiętych części kabla, które wydzielają małą moc w porównaniu do mocy urządzenia. Należy jednak podkreślić, że całkowita moc układu pozostawała niezmienną. W paragrafie 2 moc długich odcinków powiększono bowiem o moc pomijanych zagięć.

Celem paragrafu 3.1 jest:

- sprawdzenie prawidłowości powyższego postępowania,
- wyznaczenie dodatkowej składowej pola termicznego, pochodzącej od zagięć kabla.

Kabel w grzejniku jest ułożony w zygzak. W niniejszym rozdziale jego zagięcia będą modelowane krótkimi odcinkami przewodu (linie przerywane, rys. 1.4). Chociaż rys. 1.4 ilustruje tylko kilka „zagięć”, analiza przedstawiona w pracy dotyczy dowolnej ich ilości.

### 3.1.2. Brzegowe zagadnienie pola generowanego zagięciami kabla

Zgodnie z wcześniej założoną liniowością środowiska (betonu, rozdział 2.2), całkowite pole termiczne może być obliczone na podstawie zasady superpozycji. Z uwagi na wyniki rozdziału 2, w obecnym paragrafie wystarczy wyznaczyć tylko składową  $v(x,y,z)$  generowaną zagięciami przy zerowej temperaturze otoczenia.

#### 3.1.2.1. Analityczna symulacja źródeł ciepła

Każde zagięcie kabla łączy dwa długie odcinki przewodu oporowego (rys. 1.4). Położenie tych zagięć określają: prostokątne współrzędne  $y_k=y_1$ ,  $z_1=u_1l$  lub  $z_2=(1-u_1)l$  (w zależności od rozpatrywanego końca) oraz ciąg „bramek” definiujących położenie krótkich odcinków kabla wzdłuż osi  $OX$

$$G_1(x) = \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \mathbf{1}(x - x_k) \quad \text{dla } y = y_1, \quad z = z_1, \quad (3.1a)$$

$$\text{gdzie: } M = \begin{cases} K-1 & \text{dla } K \text{ parzystych} \\ K & \text{dla } K \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

i

$$G_2(x) = \sum_{k=1}^M (-1)^{k+1} \mathbf{1}(x - x_{k+1}) \quad \text{dla } y = y_1, \quad z = z_2, \quad (3.1b)$$



$$\text{gdzie: } M = \begin{cases} K-2 & \text{dla } K \text{ parzystych} \\ K-1 & \text{dla } K \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Z powyższych zależności wynika, że istnieją dwie konfiguracje źródeł ciepła o wydajnościach (rozdział 2.2.1)

$$g_j(x, y, z) = q\delta(y - y_1)\delta(z - z_j)G_j(x) \quad \text{dla } j = 1 \text{ lub } j = 2. \quad (3.2)$$

W związku z założoną liniowością betonu, poszukiwaną składową  $v(x, y, z)$  wyznacza się jako sumę przyrostów pola  $v_1(x, y, z)$ ,  $v_2(x, y, z)$  (pochodzących od ciągów zagięć kabla położonych odpowiednio na prostych  $z=z_1$  i  $z=z_2$ )

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^2 v_j(x, y, z). \quad (3.3)$$

W stanie ustalonym (rozdział 2.2.1) wspomniane przyrosty są opisane równaniem Poissona [20], [22], [34]

$$\frac{\partial^2 v_j(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_j(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda} g_j(x, y, z) \quad \text{dla } j = 1 \text{ lub } j = 2. \quad (3.4)$$

gdzie:  $g_j(x, y, z)$  określono zależnością (3.2).

W celu jednoznacznego rozwiązania (3.4) postawiono warunki brzegowe, szczegółowo omówione w rozdziale 2. Odnosząc (2.6) do rozkładu  $v_j(x, y, z)$  otrzymano

$$\left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (3.5a, b)$$

$$\left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (3.5c)$$

$$\left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (3.5d, e)$$

$$\left. \frac{\partial v_j(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} v_j(x, y = 2b, z), \quad (3.5f)$$

### 3.1.2.2. Numeryczna symulacja źródeł ciepła

W symulacji numerycznej źródła ciepła są aproksymowane podobnie jak w rozdziale 2.2.2. Należy jednak zmienić ich lokalizację przestrzenną (rys. 3.1, s. 53). Takie wirtualne źródła oraz krótkie odcinki żyły kabla (linie przerywane na rys. 1.4) mają jednakową długość, moc i położenie. Warto podkreślić, że w tym modelu nie jest prawdziwy wzór (3.2). Ponadto w symulacji numerycznej nie stosowano zależności (3.3) (czyli zrezygnowano z superponowania przyrostów). Z tej przyczyny zagadnienie brzegowe uzyskuje się usuwając indeks  $j$  we wzorach (3.4), (3.5).

### 3.1.3. Rozwiązanie brzegowego zagadnienia pola, generowanego zagięciami kabla

#### 3.1.3.1. Rozwiązanie analityczne – rozwinięcie w szereg funkcji własnych

Zagadnienie brzegowe (3.4), (3.5) należy rozwiązywać dwukrotnie dla  $j=1$  oraz dla  $j=2$ . Ponieważ w obu przypadkach algorytm obliczeń jest wspólny i podobny do przedstawionego w rozdziale 2.3.1, w dalszej części pracy ograniczono się do indeksu  $j=1$ .

Jak wykazano w rozdziale 2.3.1, rozwiązanie równania (3.4) ma postać potrójnego szeregu Fouriera. Z warunków (3.5a, c, d) wynika jednak, że w rozwinięciu trygonometrycznym należy pominąć sinusy. Na podstawie (3.5b, f, e) określono wartości własne zagadnienia. Przewiduje się więc następującą postać poszukiwanego przyrostu

$$v_1(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} D_{mni} \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) \cos\left(i\pi \frac{z}{l}\right), \quad (3.6)$$

gdzie  $\gamma_n$  określono wzorami (2.8a, b).

W celu wyznaczenia współczynnika  $D_{mni}$ , podstawiono (3.6) do lewej strony równania (3.4) (dla  $j=1$ ). Ciągi funkcji  $\{\cos[m\pi x/(2a)]\}$ ,  $\{\cos[\gamma_n y/(2b)]\}$ ,  $\{\cos[i\pi z/l]\}$  są ortogonalne [33] odpowiednio w przedziałach  $\langle 0, 2a \rangle$ ,  $\langle 0, 2b \rangle$ ,  $\langle 0, l \rangle$ .  $D_{mni}$  jest więc współczynnikiem uogólnionego szeregu Fouriera

$$D_{mni} \left[ \left( \frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_n}{2b} \right)^2 + \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{\lambda \|N\|^2} \int_0^l \int_0^{2b} \int_0^{2a} g_1(x, y, z) \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) \cos\left(i\pi \frac{z}{l}\right) dx dy dz, \quad (3.7)$$

gdzie  $\|N\|^2$  określono wzorem (2.9b), zaś  $g_1(x, y, z)$  zależnością (3.2) dla  $j=1$ .

$D_{mni}$  obliczono z (3.7) i podstawiono do (3.6). Następnie zgodne z zależnością (2.11) zsumowano szereg indeksowany wskaźnikiem  $i$ . W ten sposób po dalszych przekształceniach wyznaczono przyrost pola termicznego, pochodzący od jednego ciągu zagięć kabla (położonych na prostej  $z=z_1$ )

$$v_1(x, y, z) = v_1^{(1)}(y, z) + v_1^{(2)}(x, y, z), \quad (3.8a)$$

gdzie:

$$v_1^{(1)}(y, z) = \frac{q}{\lambda a} \sum_{k=1}^M (-1)^k x_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\gamma_n \frac{y_1}{2b}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right)}{\gamma_n \left[ 1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n} \right] \sinh\left(\gamma_n \frac{l}{2b}\right)}. \quad (3.8b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left[ \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{z_1 - l}{2b}\right)\right] \cosh\left(\gamma_n \frac{z}{2b}\right) \right] \text{ dla } 0 \leq z \leq z_1 \\ \left[ \cosh\left(\gamma_n \frac{z_1}{2b}\right) \cosh\left[\gamma_n \left(\frac{z - l}{2b}\right)\right] \right] \text{ dla } z_1 \leq z \leq l, \end{array} \right\}$$

$$v_1^{(2)}(x, y, z) = \frac{2ql}{\lambda\pi b} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin\left(m\pi \frac{x_k}{2a}\right) \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y_1}{2b}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right)}{m\Gamma_{mn} \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \sinh(\Gamma_{mn})}. \quad (3.8c)$$

$$\begin{cases} \cosh\left[\Gamma_{mn} \left(\frac{z_1-l}{l}\right)\right] \cosh\left(\Gamma_{mn} \frac{z}{l}\right) & \text{dla } 0 \leq z \leq z_1 \\ \cosh\left(\Gamma_{mn} \frac{z_1}{l}\right) \cosh\left[\Gamma_{mn} \left(\frac{z-l}{l}\right)\right] & \text{dla } z_1 \leq z \leq l, \end{cases}$$

$$\Gamma_{mn} = \sqrt{\left(m\pi \frac{l}{2a}\right)^2 + \left(\gamma_n \frac{l}{2b}\right)^2}. \quad (3.8d)$$

Obecnie należy określić rozkład drugiego przyrostu pola, pochodzącego od ciągu zagięć położonych na prostej  $z=z_2$ . W tym celu wystarczy dokonać następujących podstawień we wzorach (3.8a, b, c)

$$v_1(x, y, z) \rightarrow v_2(x, y, z), \quad v_1^{(1)}(y, z) \rightarrow v_2^{(1)}(y, z), \quad v_1^{(2)}(x, y, z) \rightarrow v_2^{(2)}(x, y, z), \quad (3.8e)$$

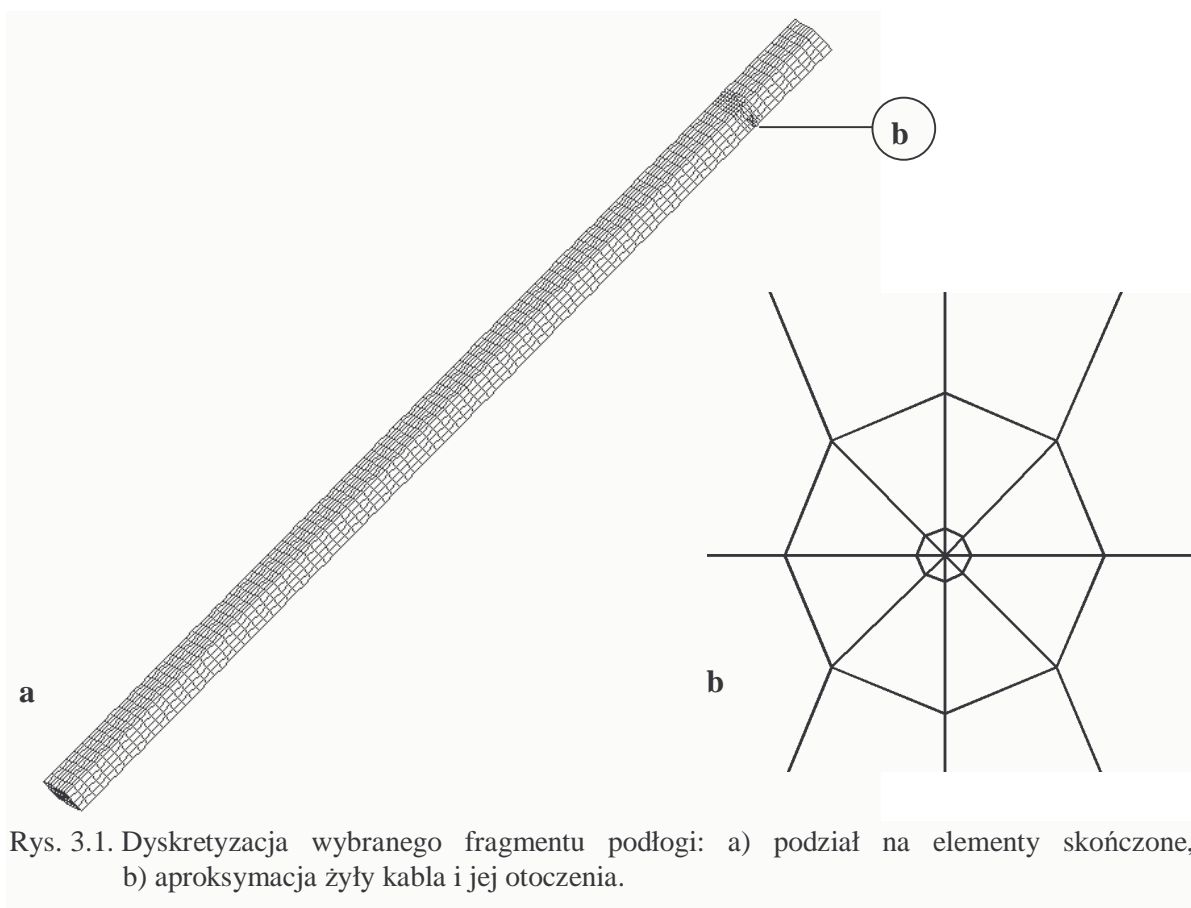
$$z_1 \rightarrow z_2, \quad x_k \rightarrow x_{k+1},$$

gdzie symbol „g→h” oznacza położenie „h” w miejsce „g”.

Z uwagi na osobliwość odcinków źródłowych położonych na prostych  $z=z_1$  i  $z=z_2$  (tzn. zawierających zagięcia), przy numerycznym tablicowaniu zależności (3.8b, c, e) skorzystano z uwag zamieszczonych w rozdziale 2.3.1 (za wzorem (2.12d)). Dla każdej składowej pola temperatury, generowanej danym ciągiem zagięć napisano oddzielne programy w języku Fortran. Ich wydruki znajdują się w załączniku.

### 3.1.3.2. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych

W symulacji numerycznej poszukiwaną składową  $v(x,y,z)$  wyznaczono jednocześnie od wszystkich zagięć kabla razem wziętych (tzn. nie superponowano oddzielnych przyrostów  $v_j(x,y,z)$ ). Do rozwiązania (3.4), (3.5) (bez indeksu  $j$ )



Rys. 3.1. Dyskretyzacja wybranego fragmentu podłogi: a) podział na elementy skończone, b) aproksymacja żyły kabla i jej otoczenia.

zastosowano program NISA II/Heat Transfer [61]. Sposób podziału układu na elementy skończone (rys. 3.1) oraz metodę dyskretyzacji zagadnienia (3.4), (3.5) podano w rozdziale 2.3.2. W jej wyniku otrzymano układ równań algebraicznych

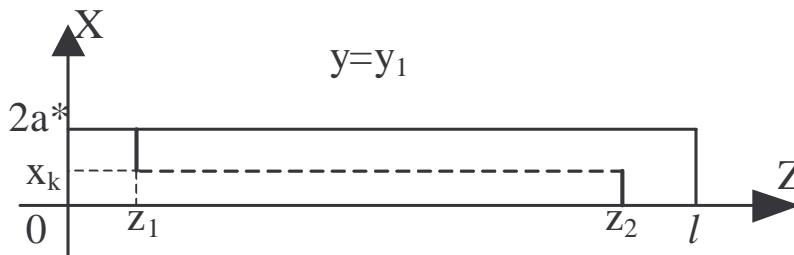
$$[\lambda] \{v\} = \{G\}. \quad (3.9)$$

Poszukiwany wektor  $\{v\}$  wyznaczono metodą Newtona-Raphsona [62], co kończy procedurę. Należy przypomnieć, że w niniejszym paragrafie przyjęto odmienne niż w 2.3.2 lokalizację kabla. Jest to wyraźnie widoczne przy porównaniu rys. 2.3 i rys. 3.1.

#### 3.1.4. Przykłady obliczeniowe.

Zależność odwrotna względem (3.9) oraz szeregi (3.8a–e) są rozwiązaniami badanego problemu, otrzymanymi odmiennymi metodami. Wraz z wynikami

rozdziału 2 umożliwiając one wyznaczenie rozkładu temperatury w dowolnej objętości połogi ogrzewanej kablem z zagięciami. Do prezentacji wyników wybrano fragment układu, który nie zawiera przewodów skrajnych (tzn. długich odcinków najbliższych prostym  $x=0$ ,  $x=2a$ , patrz rys. 1.4). Fragment ten pokazano na rys. 3.2. Za wyjątkiem górnej powierzchni  $y=2b$ , jest on ograniczony płaszczyznami adiabatycznymi. Wynika to z symetrii położenia wewnętrznych odcinków kabla i z warunków brzegowych (3.5). Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do rozdziału 2.4.1 wybrany segment nie jest powtarzalny (przeciwnie niż w 2.4.1).



Rys. 3.2. Fragment podłogi wybrany do prezentacji wyników symulacji (przekrój na wysokości kabla).

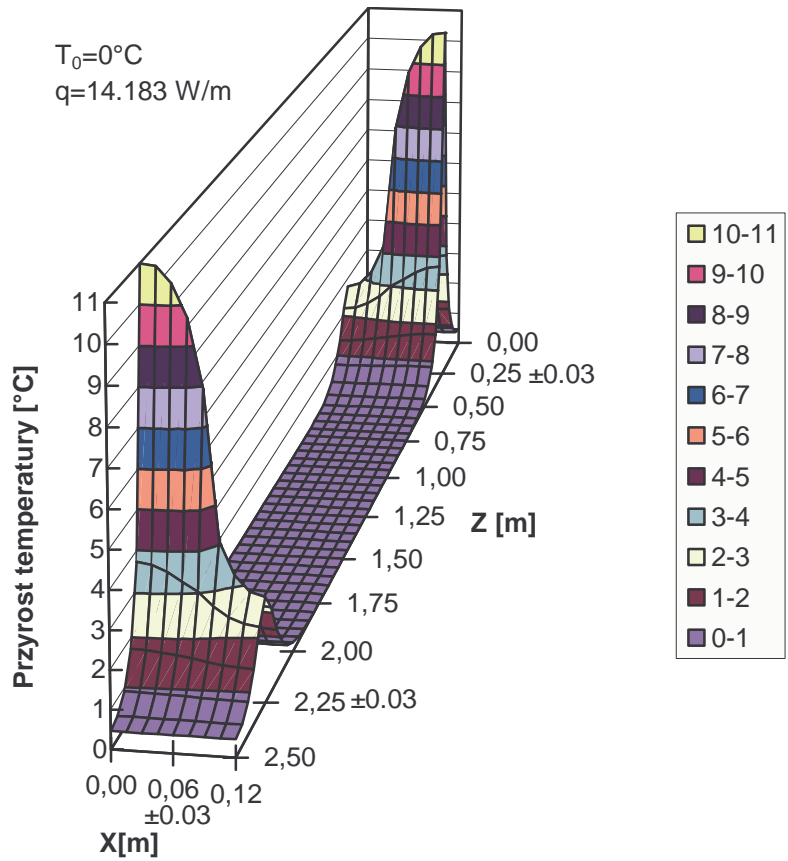
Zestaw danych (2.17) zmodyfikowano następująco:

$$\begin{aligned}
 q &= 14.183 \text{ W/m}, & z_1 &= 0.25 \text{ m}, & z_2 &= 2.25 \text{ m}, & 2a^* &= 0.12 \text{ m}, \\
 x_k = x_l &= 0.06 \text{ m}, & y_k = y_l &= 0.015 \text{ m}, & g &= 2.0057 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3.
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

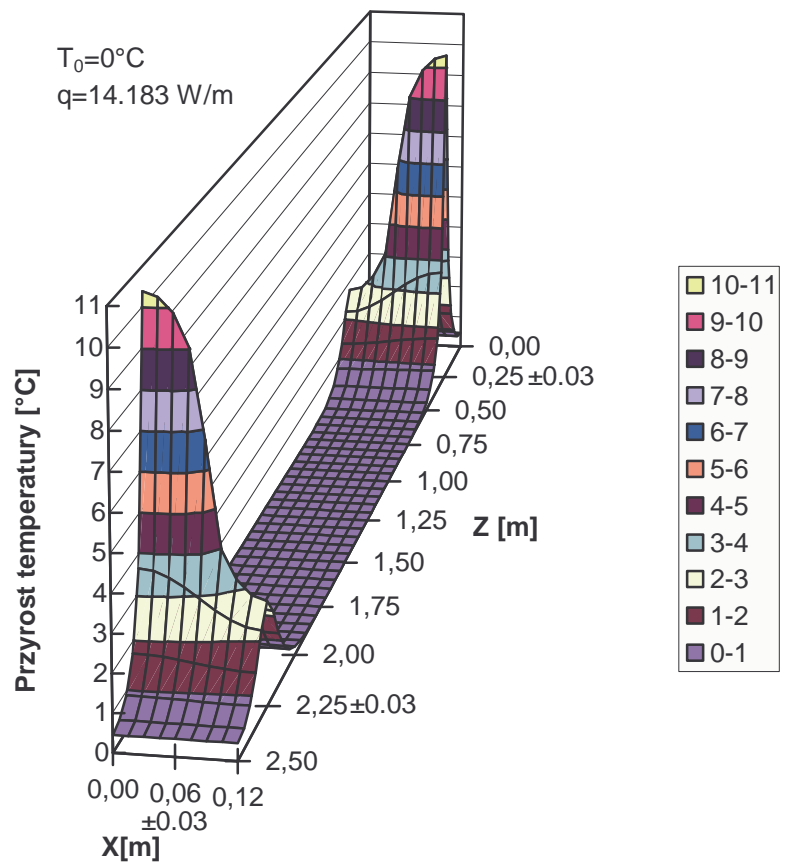
W celu stabilizowania rozwiązania analitycznego, w programie Excel [32] sumowano następujące komponenty pola:

- A. składową generowaną zagięciami kabla, obliczoną według wzorów (3.3), (3.8a–e) i przedstawioną na rys. 3.3a i 3.4a,
- B. składową generowaną długim odcinkiem kabla, obliczoną według zależności (2.12), (2.13) i przedstawioną na rys. 3.5a i 3.6a,
- C. temperaturę otoczenia  $T_0$  mierzoną daleko od powierzchni podłogi ( $T_0=20^0\text{C}$ ).

Superponując pozycje A, B, C otrzymano wypadkowy rozkład pola w układzie z zagięciami kabla (np. rys. 3.7a=rys. 3.3a+rys. 3.5a+ $T_0$ ). Oczywiście rozkłady A i B muszą być dodawane w tych samych punktach przestrzeni. Z tej przyczyny w każdym etapie superpozycji należało odpowiednio uwzględnić dewiacje współrzędnych (koniec rozdziału 3.1.3.1) wokół wszystkich płaszczyzn osobliwych (tzn.  $x=x_k$ ,  $z=z_1$ ,  $z=z_2$ ). Fakt ten utrudnił przygotowanie programów obliczających poszczególne składowe pola.

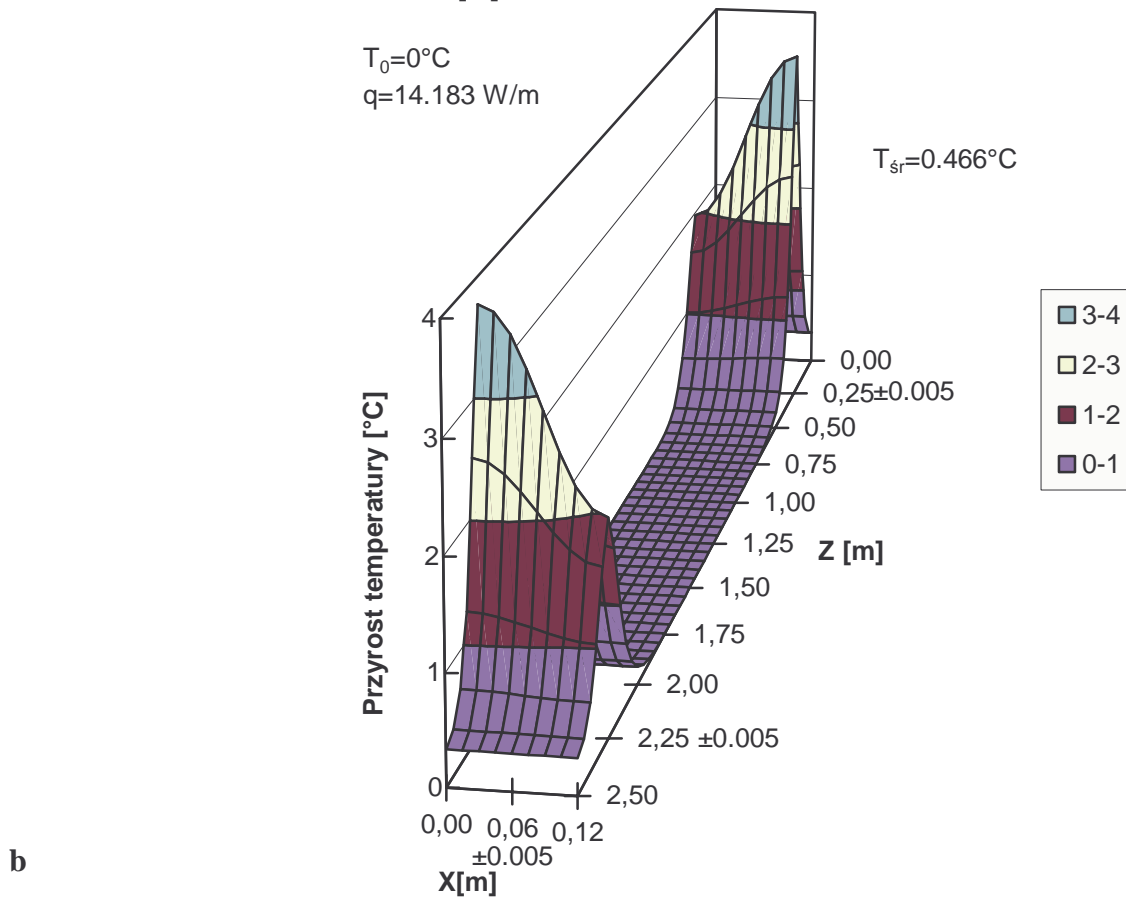
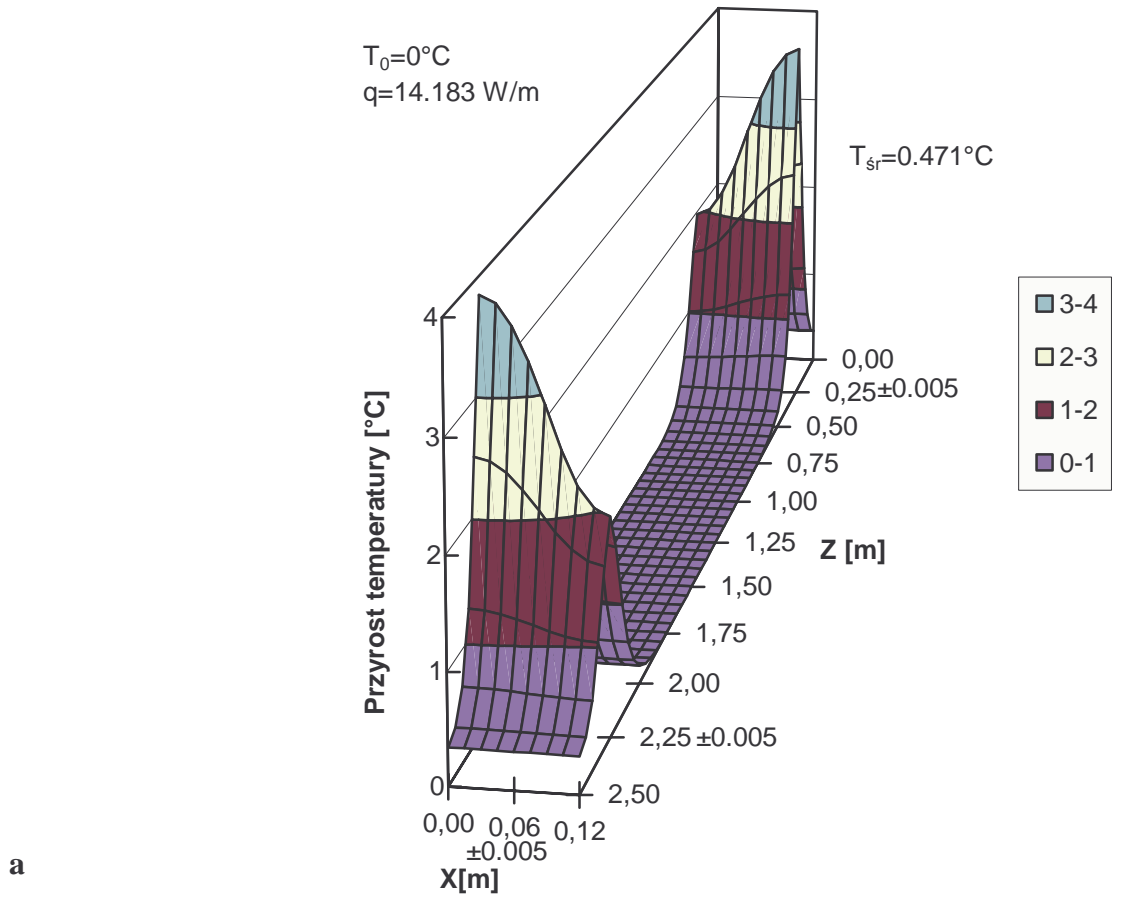


a



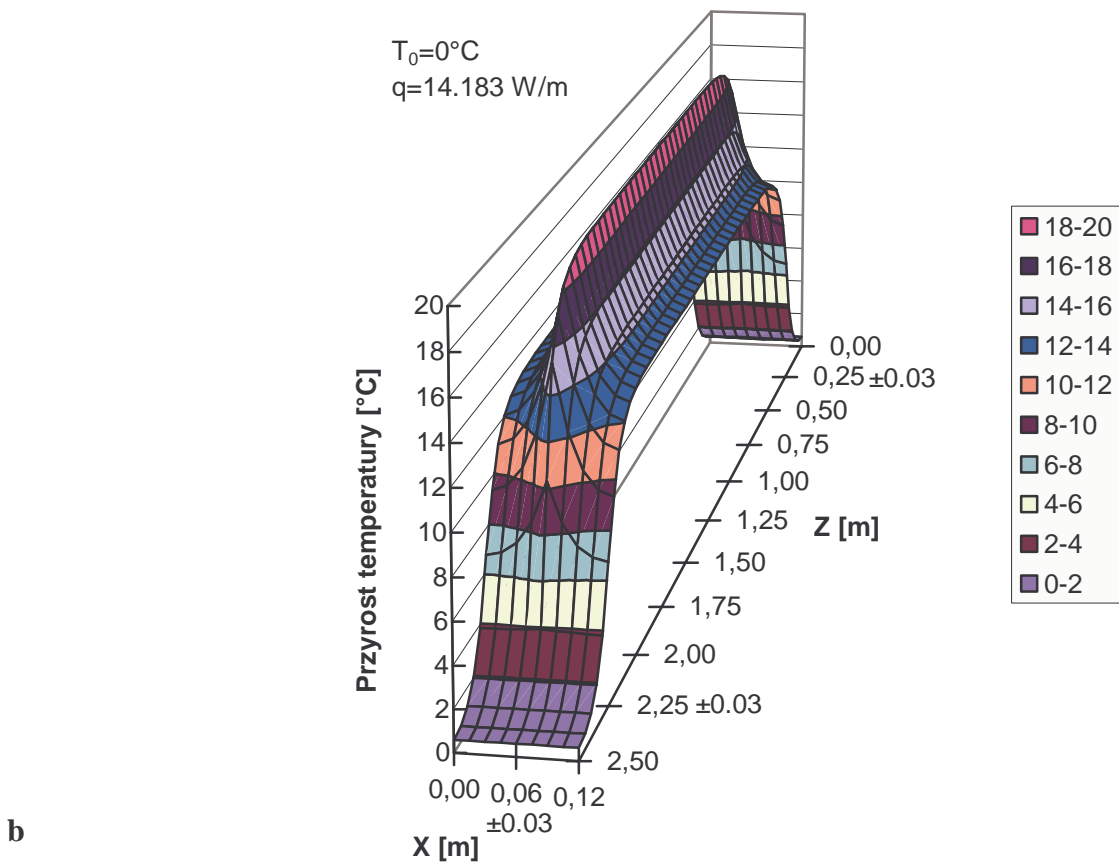
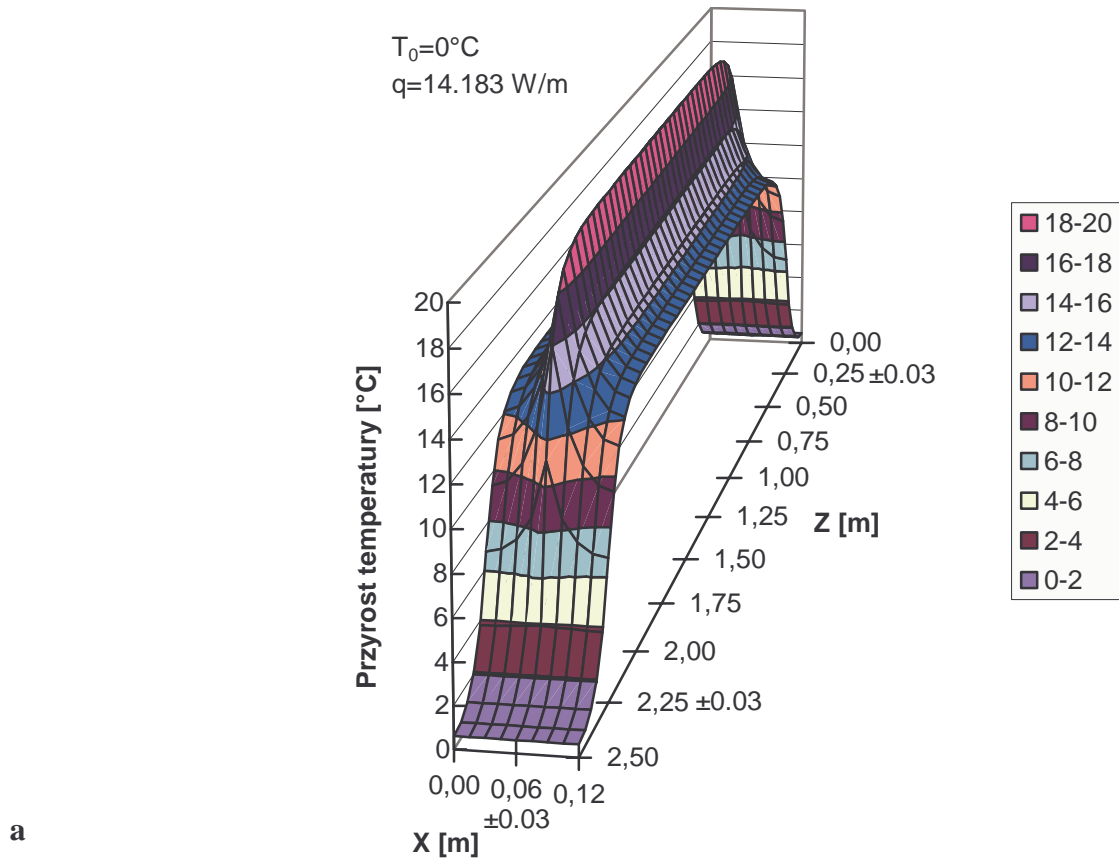
b

Rys. 3.3. Składowa pola temperatury generowana zagięciami kabla na jego wysokości ( $y=0.015\text{ m}$ ) we fragmencie podłogi ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.

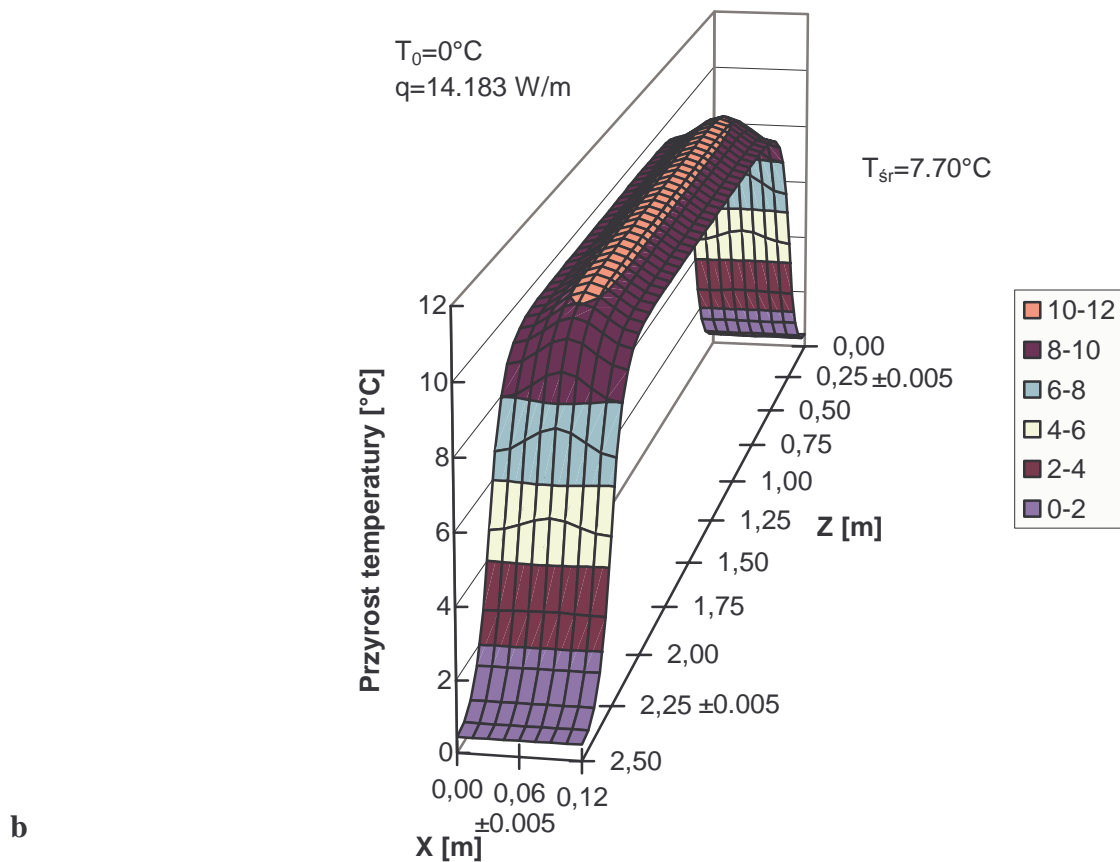
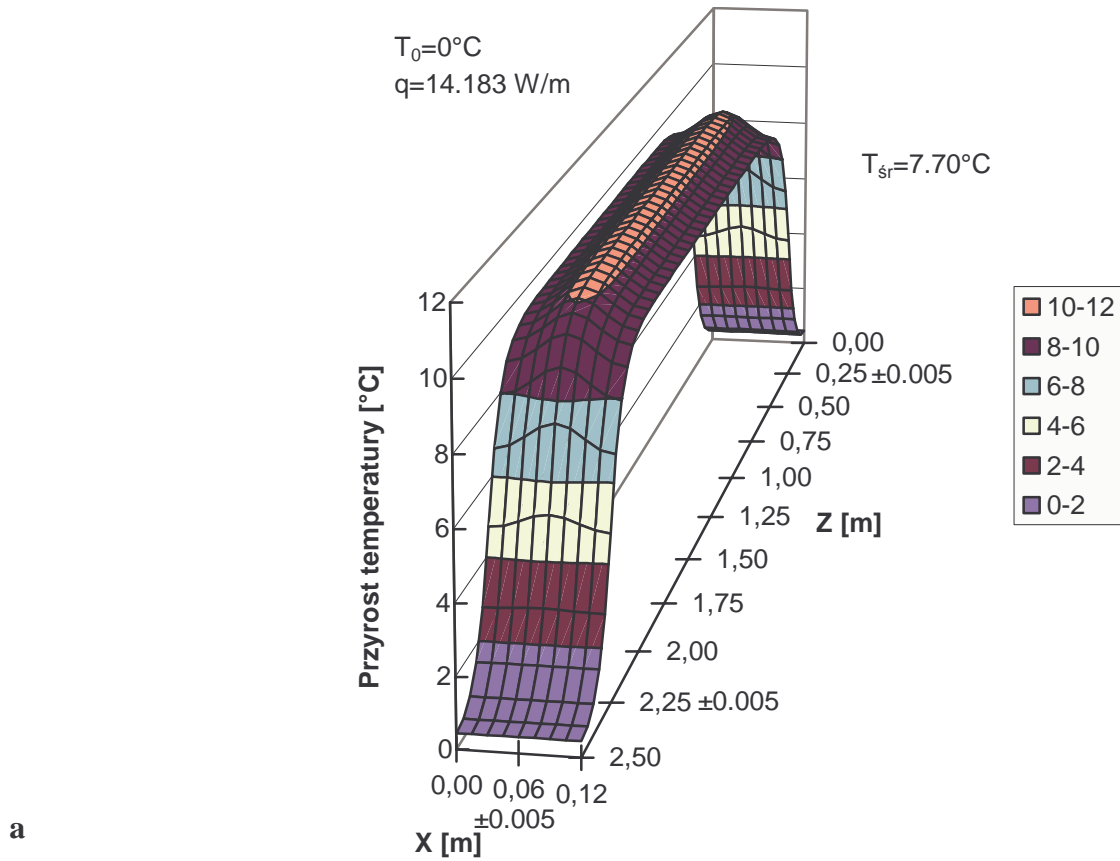


Rys. 3.4. Składowa pola temperatury generowana zagięciami kabla na powierzchni podłogi ( $y=0.06\text{ m}$ ) w fragmencie grzejnika ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.

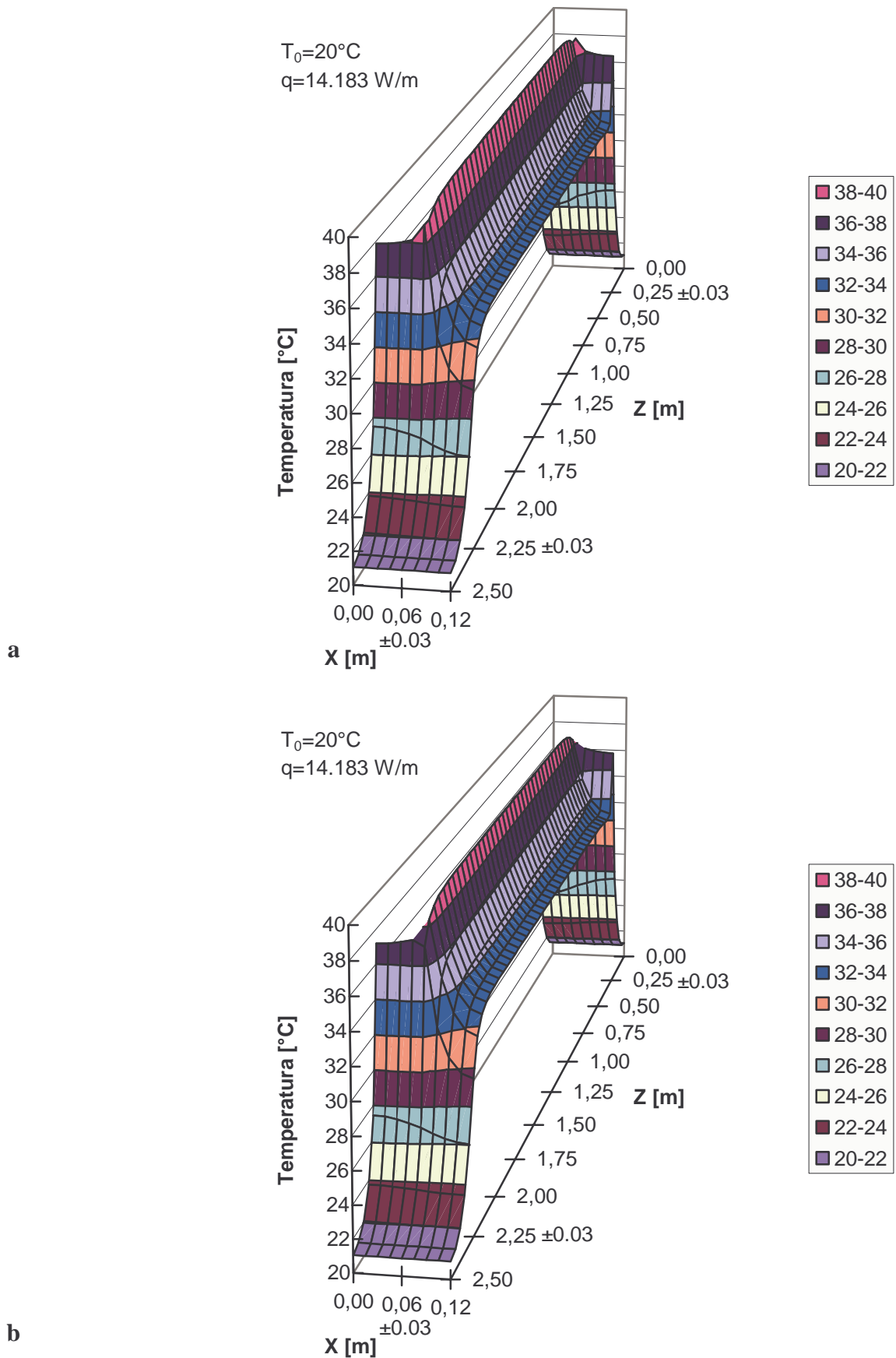




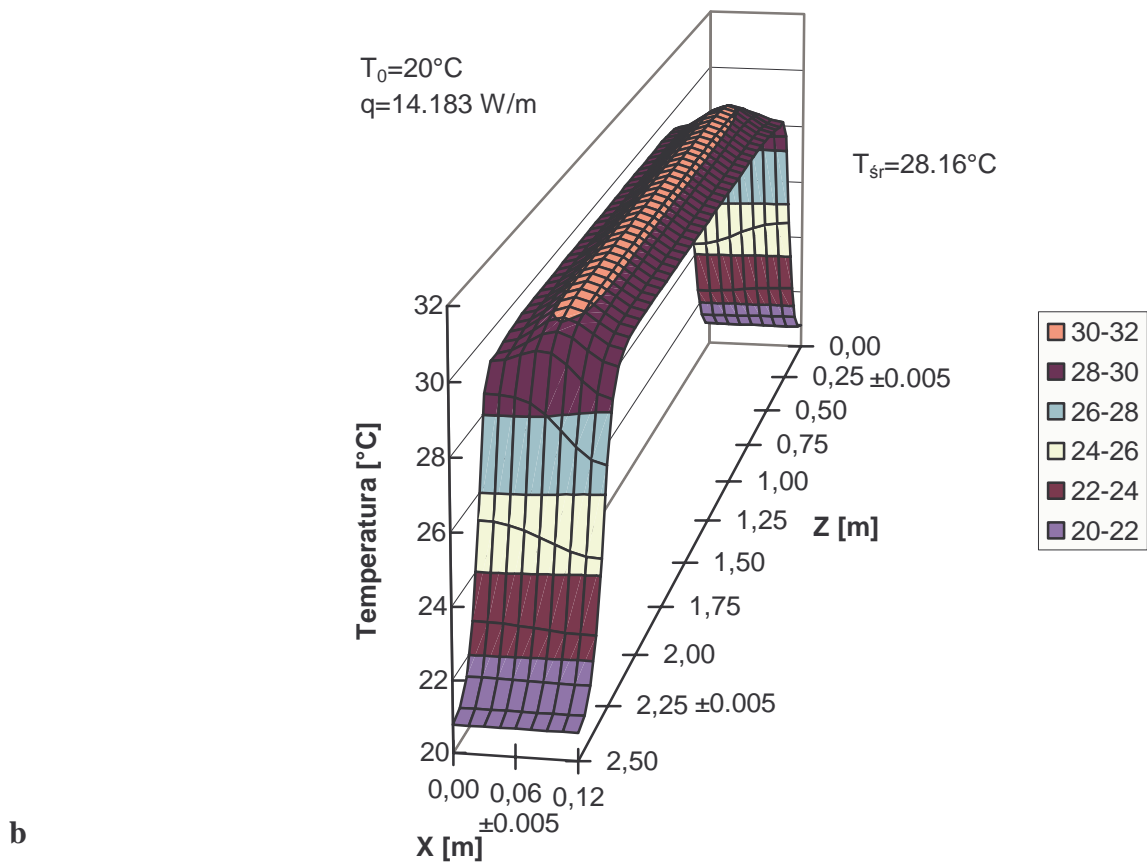
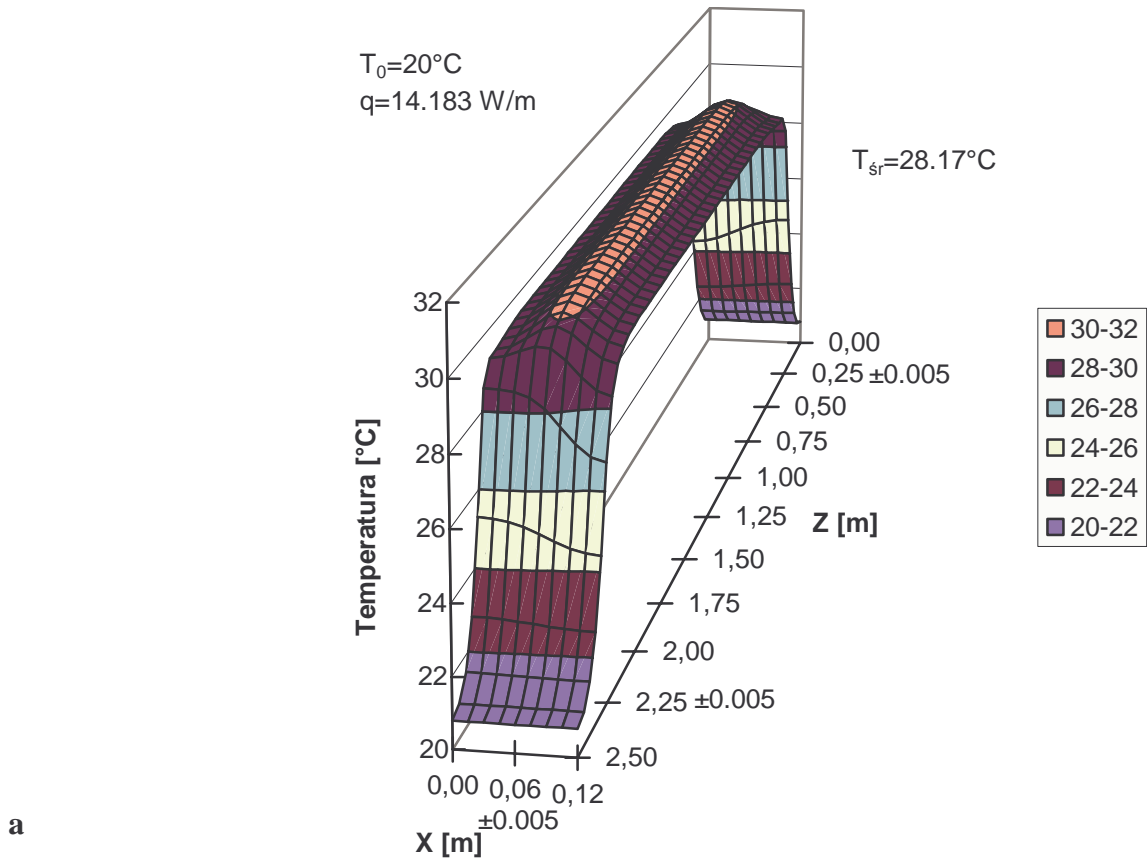
Rys. 3.5. Składowa pola temperatury generowana długim odcinkiem kabla na jego wysokości ( $y=0.015\text{ m}$ ) w fragmencie podłogi ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.



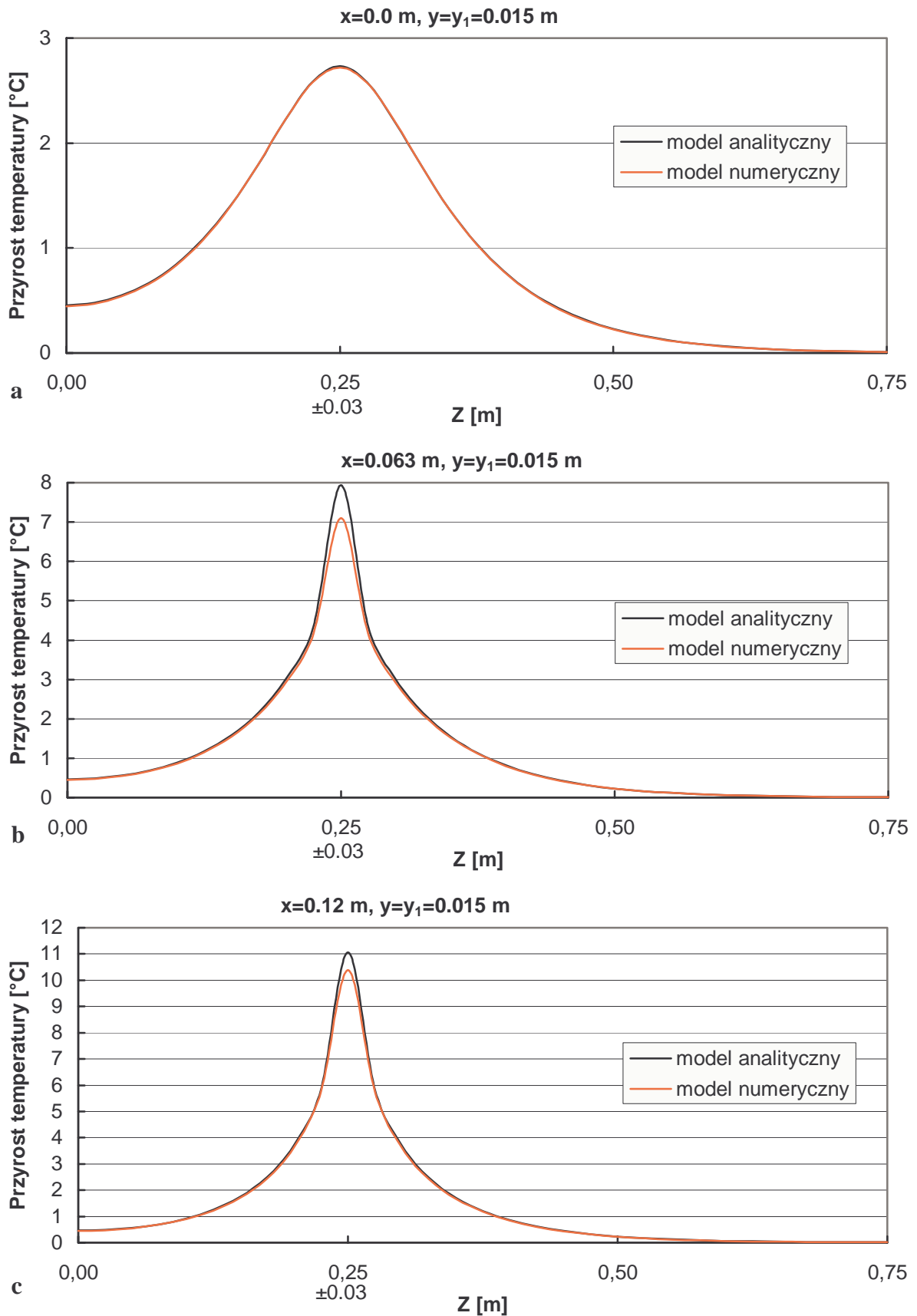
Rys. 3.6. Składowa pola temperatury generowana długim odcinkiem kabla na powierzchni podłogi ( $y=0.06\text{ m}$ ) we fragmencie grzejnika ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.



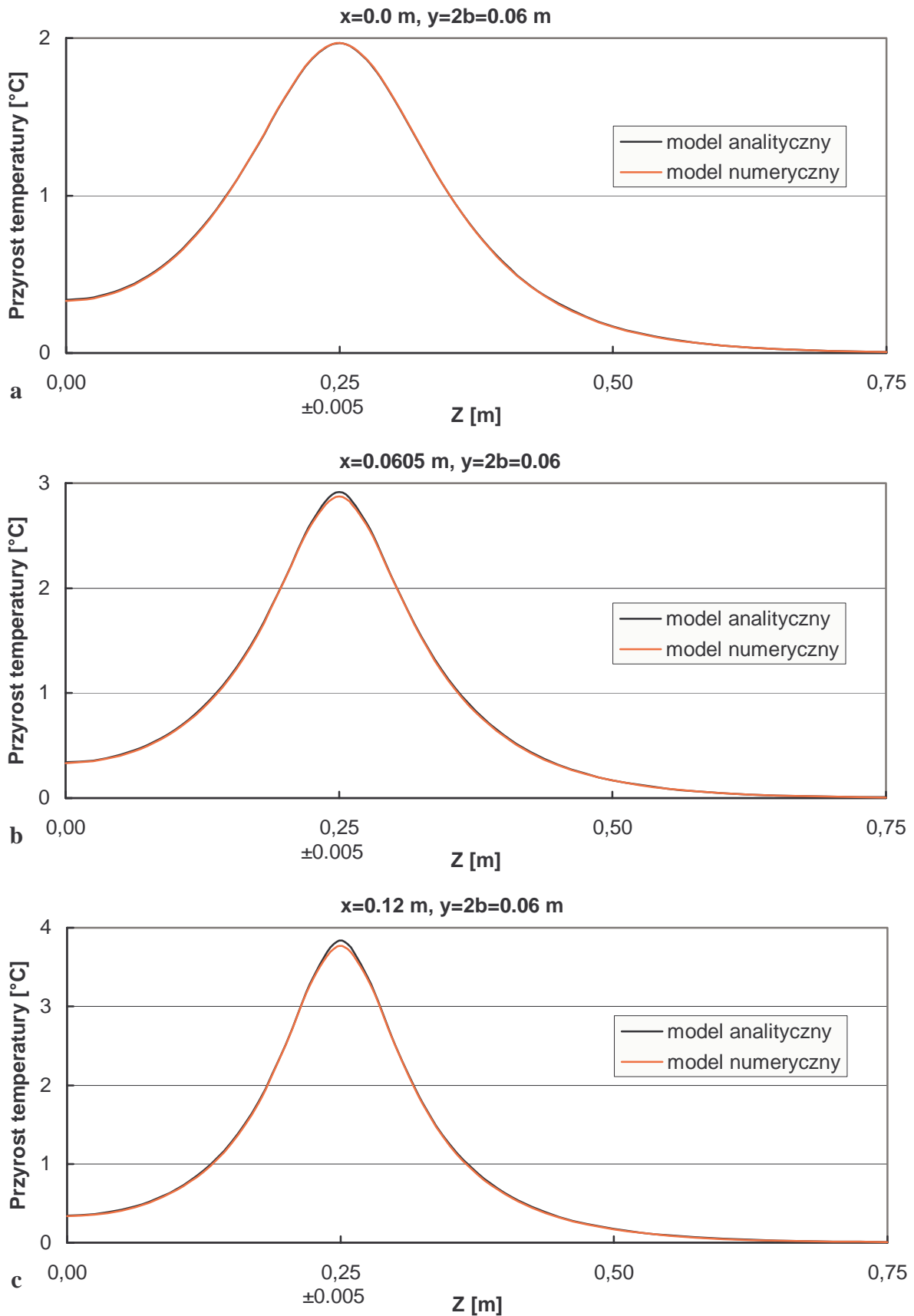
Rys. 3.7. Wypadkowe pole temperatury na wysokości kabla grzewczego ( $y=0.015\text{ m}$ ) we fragmencie podłogi ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.



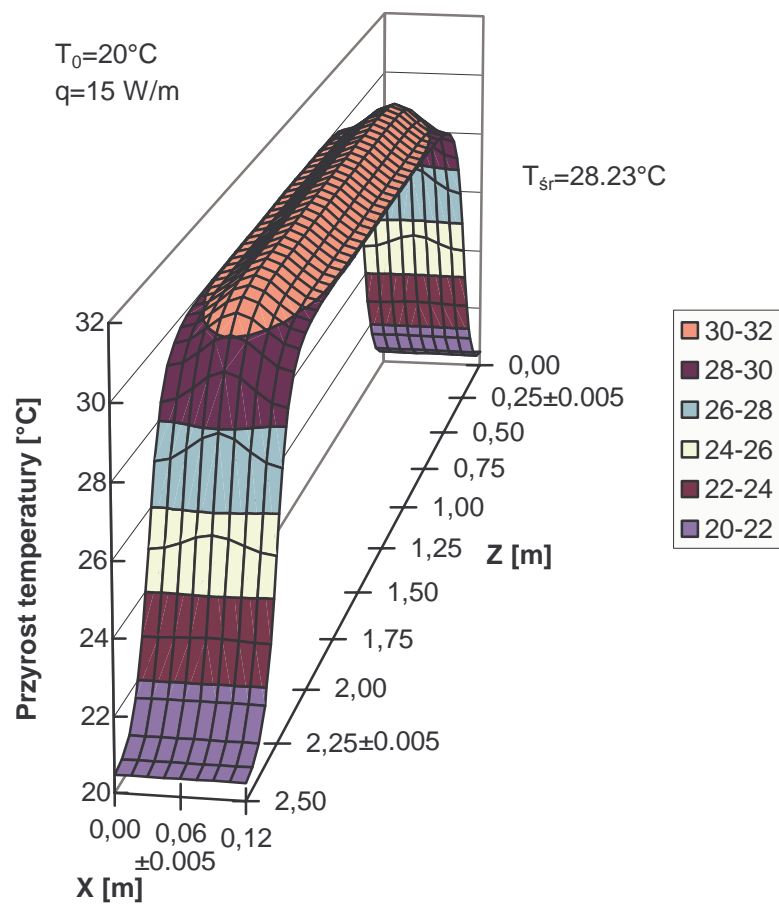
Rys. 3.8. Wypadkowe pole temperatury na powierzchni podłogi ( $y=0.06\text{ m}$ ) we fragmencie grzejnika ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ;  $q=14.183\text{ W/m}$ ): a) symulacja analityczna, b) symulacja numeryczna.



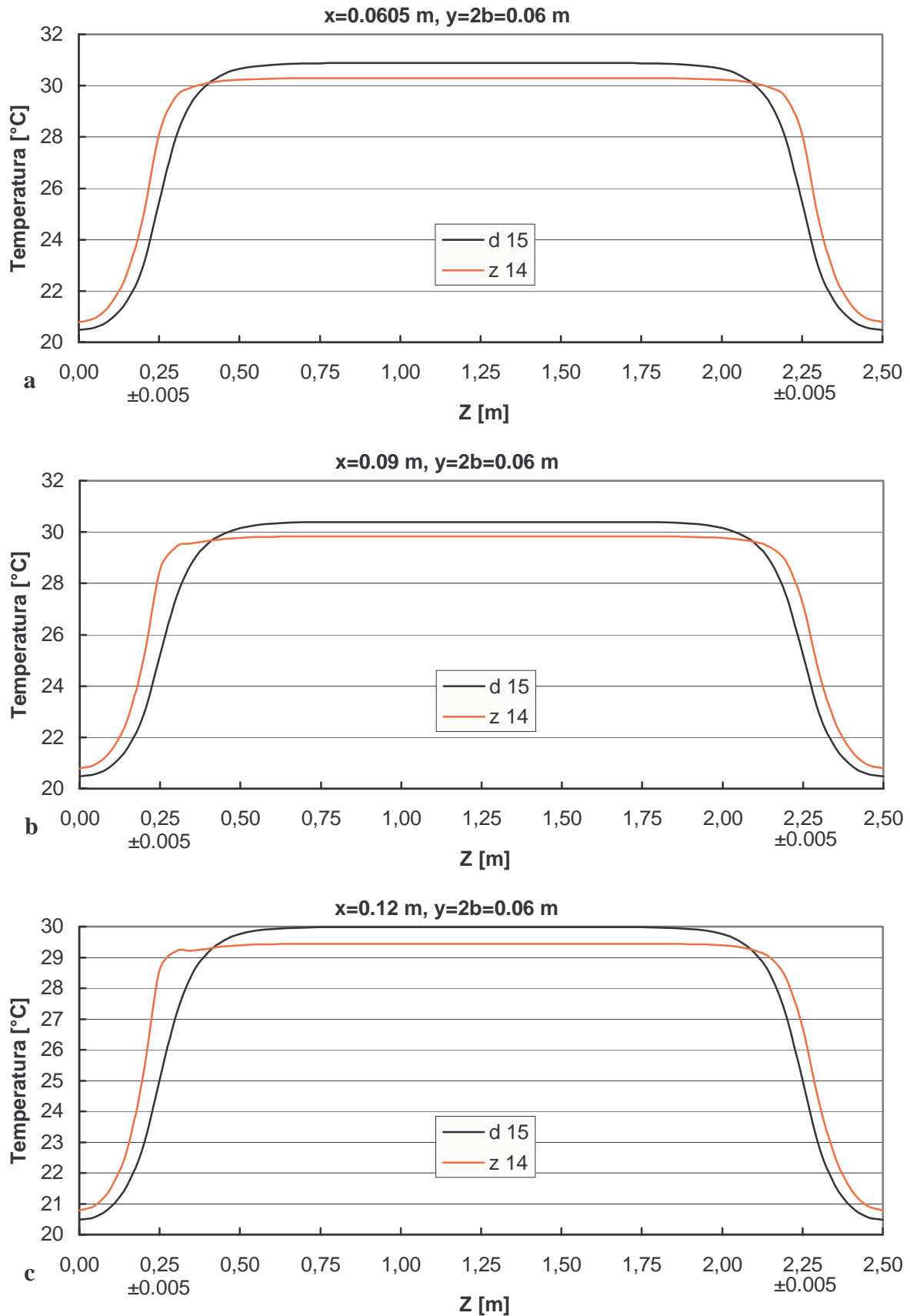
Rys. 3.9. Porównanie analitycznych i numerycznych obliczeń składowej pola generowanej zagięciami kabla na jego wysokości ( $y=0.015 \text{ m}$ ) we fragmencie podłogi ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183 \text{ W/m}$ , otoczenie zagięcia  $z_1=0.25 \text{ m}$ ): a)  $x=0.0 \text{ m}$ , b)  $x=0.063 \text{ m}$ , c)  $x=0.12 \text{ m}$ .



Rys. 3.10. Porównanie analitycznych i numerycznych obliczeń składowej pola generowanej zagięciami kabla na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m) we fragmencie grzejnika ( $T_0=0^\circ\text{C}$ ,  $q=14.183$  W/m, otoczenie zagięcia  $z_1=0.25$  m): a)  $x=0.0$  m, b)  $x=0.0605$  m, c)  $x=0.12$  m.



Rys. 3.11. Pole temperatury generowane na powierzchni podłogi ( $y=0.06\text{ m}$ ) długim odcinkiem kabla o zwiększonej liniowej gęstości mocy ( $q=15\text{ W/m}$ ,  $T_0=20^\circ\text{C}$ ).



Rys. 3.12. Porównanie analitycznych rozkładów pola modelu z zagięciami (z14,  $q=14.183$  W/m) i bez zagieć (d15,  $q=15$  W/m) na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m) we fragmencie grzejnika ( $T_0=20^\circ\text{C}$ ): a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.



Zasadniczym celem rozdziału 3.1 było wyznaczenie składowej pola generowanej zagięciami kabla (rys. 3.3a i 3.4a). Z tego powodu wspomnianą składową obliczono również numerycznie (rozdział 3.1.3.2). Wyniki przedstawiono na rys. 3.3b i 3.4b. Jak widać na rys. 3.3 i 3.4, wpływ zagięć kabla na pole termiczne ogranicza się do niewielkiego otoczenia źródeł ciepła. Wpływ ten jest symetryczny na środkowej płaszczyźnie badanego fragmentu  $x=x_k$  i niesymetryczny dla  $x=const. \neq x_k$  (względem powierzchni  $z=1.25$  m). Asymetria ta objawia się najsilniej na zewnętrznych płaszczyznach ograniczających fragment ( $x=0, x=2a^*$ ). Powyższe wynika z cieplnych warunków analizowanego segmentu (rys. 3.2).

Porównanie wyników symulacji analitycznej i numerycznej przedstawiono na rys. 3.9 i 3.10. Wspierają one tezę nr 5 (str. 12). Dostrzegalne różnice występują bowiem tylko w bezpośrednim otoczeniu zagięć kabla  $z=z_j$  (rys. 3.9b, c). Wynika to z odmiennych modeli żyły kabla przyjętych w obliczeniach (rozdziały 3.1.2.1, 3.1.2.2). W obszarze bezźródłowym wspomniane różnice prawie zanikają (rys. 3.9a i 3.10). Średnie temperatury rozkładów z rys. 3.4a ( $T_{sr}=0.471^\circ\text{C}$ ) i rys. 3.4b ( $T_{sr}=0.466^\circ\text{C}$ ) są niemal takie same na powierzchni analizowanego fragmentu. O liczbie uwzględnianych wyrazów szeregów (3.8a–e) oraz o ilości elementów skończonych i węzłów w wybranym fragmencie podłogi informuje tabela 3.1.

Tabela 3.1. Wybrane informacje o rozwiązaniu analitycznym i numerycznym.

Informacja	
Minimalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (3.8b), (3.8e)	12
Maksymalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (3.8b), (3.8e)	312
Minimalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (3.8c), (3.8e)	12x50
Maksymalna liczba uwzględnionych wyrazów szeregu (3.8c), (3.8e)	312x16240
Ilość elementów skończonych	8284
Ilość węzłów	10297

### 3.1.5. Uwagi końcowe

Z rys. 3.7a wynika, że maksymalna temperatura układu z zagięciami nie przekracza  $40^\circ\text{C}$ . Dodatkowe odcinki kabla nie spowodują więc jego przegrzania (dopuszcza się  $60^\circ\text{C}$ ).

Użytkowe właściwości grzejnika najlepiej charakteryzuje rozkład temperatury na jego płaszczyźnie roboczej ( $y=0.06$  m). Z tej przyczyny pełna analiza problemu wymaga jeszcze porównania pola termicznego na powierzchni podłogi w segmencie z zagięciami (rys. 3.2) i bez nich. Wspomniane porównanie ma sens przy jednakowej mocy obu układów. Z tego powodu zwiększono liniową gęstość mocy długiego odcinka kabla bez zagięć z 14.183 W/m do 15 W/m. Generowane takim źródłem pole prezentuje rys. 2.6a. Ten sam rozkład przedstawiono na rys. 3.11 w konwencji przyjętej w niniejszym rozdziale.

Porównując ze sobą rys. 3.8a i rys. 3.11 można zauważyć niewielkie różnice między nimi. Jak widać, na płaszczyznach  $z=\text{const}$  rozkłady temperatury są niesymetryczne na rys. 3.8a i symetryczne na rys. 3.11 (względem płaszczyzny  $x=0.06$  m). Na rys. 3.12 przedstawiono porównanie wyników symulacji analitycznych w modelu z zagięciami (z14) i bez zagięć (d15) (dla  $x=\text{const}$ ). Jak widać, maksymalna temperatura układu z zagięciami (rys. 3.12a) jest o  $0.6^{\circ}\text{C}$  niższa od ekstremum rozkładu w modelu bez zagięć. Jednocześnie obserwuje się cieplejsze obrzeża wybranego fragmentu. Zatem zagięcia powodują pewien wzrost równomierności pola. Pomimo tych drobnych różnic, podstawowy parametr układu (tzn. średnia temperatura powierzchni podłogi) jest praktycznie taki sam w obu przypadkach ( $T_{sr}=28.17^{\circ}\text{C}$  na rys. 3.8a,  $T_{sr}=28.23^{\circ}\text{C}$  na rys. 3.11).

Z przedstawionych badań symulacyjnych wynika więc, że przy stałej mocy grzejnika pominięcie zagięć kabla jest dopuszczalne i w pełni uzasadnione racjonalnością dodatkowych analiz. Wniosek ten potwierdza tezę nr 3 (str. 12). Wspomniana teza ma praktyczne znaczenie, pozwala istotnie uprościć proces projektowania elektrycznego grzejnika podłogowego.

### 3.2. Symulacja wpływu cieplnych i materiałowych nieliniowości na rozkład stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku podłogowym

#### 3.2.1. Wstęp

Analizę układu w stanie ustalonym przeprowadzono przy założeniach upraszczających, dokładnie opisanych w rozdziale 2.2. Między innymi przyjęto tam stałą wartość cieplnej przewodności betonu  $\lambda$  i współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha$ . W dokładniejszym przybliżeniu wielkości te nieliniowo zmieniają się z temperaturą według zależności [27]

$$\lambda(T) = 0.929 + 3.56 \cdot 10^{-3} \cdot T(x, y, z) + 1.63 \cdot 10^{-6} \cdot T^2(x, y, z), \quad (3.11)$$

$$\alpha(T) = 2.92 [T(x, y = 2b, z) - T_0]^{0.31} + \varepsilon C_0 \frac{\left( \frac{T(x, y = 2b, z) + 273.15}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_0 + 273.15}{100} \right)^4}{T(x, y = 2b, z) - T_0}. \quad (3.12)$$

Związki (3.11) i (3.12) powodują, że parametry  $\lambda$  i  $\alpha$  zależą od wyznaczonego pola. Celem niniejszego rozdziału jest więc sprawdzenie, czy było dopuszczalne zastąpienie zależności (3.11), (3.12) stałymi wartościami  $\lambda$  i  $\alpha$  w rozdziale 2.

Wspomniane sprawdzenie będzie polegać na wyznaczeniu różnicy między rozwiązaniem nieliniowego i liniowego zagadnienia brzegowego. W stanie ustalonym, nieliniowe równanie przewodnictwa cieplnego (1.1) przyjmuje następującą postać [20], [33], [34]

$$\operatorname{div}[\lambda(T) \cdot \operatorname{grad} T(x, y, z)] = -g(x, y, z). \quad (3.13)$$

W celu jednoznacznego rozwiązania równania (3.13), sformułowano warunki brzegowe. Po uwzględnieniu (2.6), (3.11) i (3.12) przyjmują one następującą postać

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (3.14a, b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (3.14c)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (3.14d, e)$$

$$-\lambda(T) \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=2b} = \alpha(T) [T(x, y = 2b, z) - T_0]. \quad (3.14f)$$

Zależności (3.13) i (3.14) tworzą nieliniowe zagadnienie brzegowe.

### 3.2.2. Algorytm rozwiązania

Zagadnienie brzegowe (3.13), (3.14) rozwiązano metodą elementów skończonych [2], [31] przy pomocy profesjonalnego programu NISA II/Heat Transfer, który do dyskretyzacji (3.13), (3.14) wykorzystuje procedurę Galerkina [31], [32]. W jej wyniku uzyskuje się następujący układ nieliniowych równań algebraicznych względem temperatury w węzłach

$$[\lambda(T)]\{T\} = \{G\}. \quad (3.15)$$

Należy podkreślić, że  $[\lambda(T)]$  zawiera składowe pochodzące od nieliniowego konwekcyjnego warunku brzegowego (3.14f). Program do rozwiązania układu (3.15) wykorzystuje metodę Newtona-Raphsona [60].

Obliczenia wykonano dla segmentu powtarzalnego z siatką elementów skończonych wykorzystaną w modelu liniowym (rozdział 2.3.2, rys 2.3). Zestaw danych (2.17) zmieniono i uzupełniono następująco:

$$K=25, \quad C_o=5.67 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4), \quad \varepsilon=0.95 \text{ [27], [49]}, \quad (3.16)$$

$\lambda(T)$  i  $\alpha(T)$  określają odpowiednio zależności (3.11) i (3.12).

W przypadku modelu nieliniowego, założoną zbieżność ( $10^{-7}$ ) uzyskano w dziesiątej iteracji. Czas obliczeń pola w segmencie wynosił ok. 3 minut i był dwukrotnie dłuższy niż w przypadku liniowym.

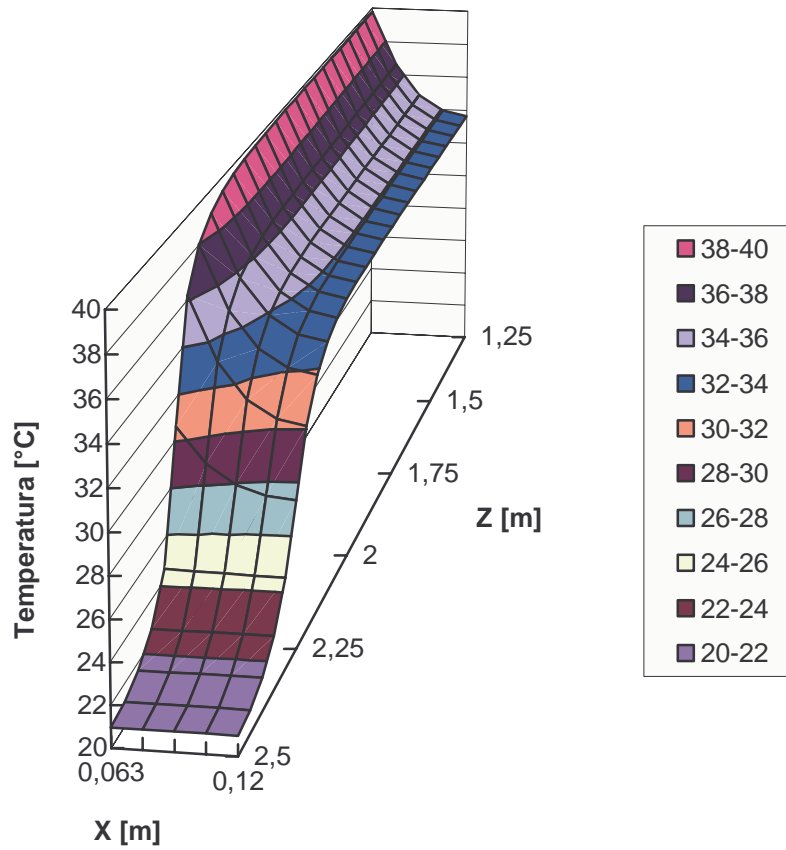
Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 3.13. Ilustrują one rozkład temperatury w przypadku nieliniowym na dwóch najważniejszych płaszczyznach (wysokości kabla i powierzchni grzejnika). Ze względu na symetrię pola ograniczono się do czwartej części segmentu powtarzalnego.

### **3.2.3. Różnica rozwiązania nieliniowego i liniowego**

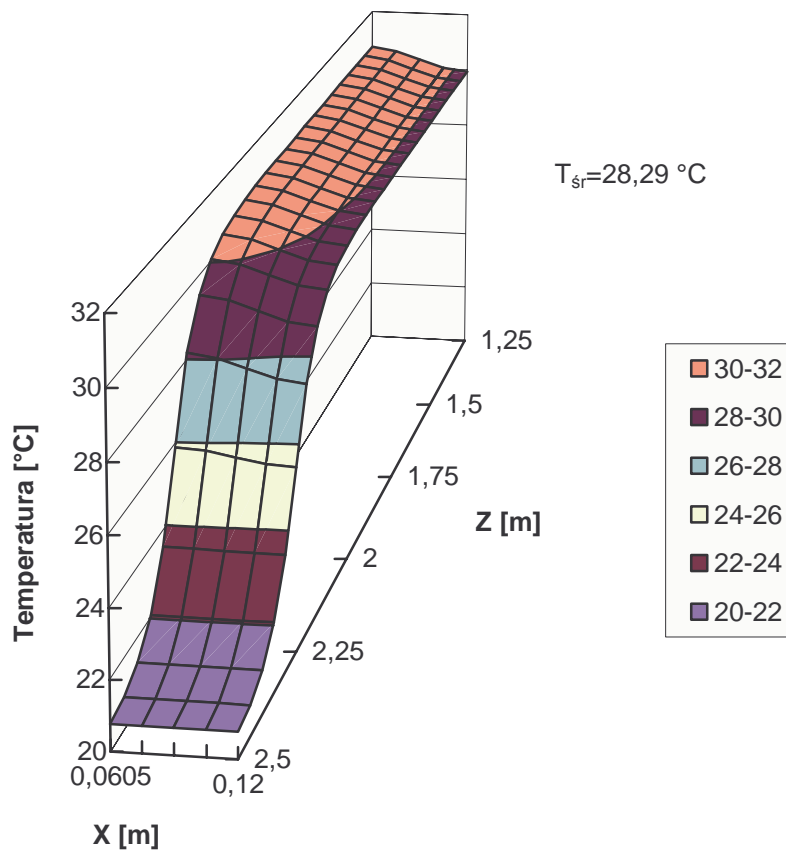
W celu zbadania zmian wnoszonych przez nieliniowości, należy porównać otrzymane wyniki z rezultatami obliczeń modelu liniowego (paragraf 2.4.1, rys. 2.4b i 2.6b). Przy bezpośredniej obserwacji rysunków 3.13a, b oraz 2.4b, 2.6b różnice między nimi są mało widoczne. Z tego powodu na rys. 3.14 przedstawiono dla wybranych płaszczyzn rozkład różnicy temperatury w modelu nieliniowym i liniowym. Jak można zauważyć, waha się ona w zakresie od  $-0.6^\circ\text{C}$  do  $0.5^\circ\text{C}$  i jest większa na płaszczyźnie kabla. Wpływ nieliniowości objawia się więc najsilniej w bezpośrednim otoczeniu kabla i w krawędziowej strefie układu (tj. dla  $z \in (2.25, 2.5 > \text{m})$ ). Na rys. 3.15 przedstawiono również względną różnicę temperatury, wyznaczoną zgodnie z zależnością

$$\delta T = \frac{T_N(x, y, z) - T_L(x, y, z)}{T_N(x, y, z)} \cdot 100\% . \quad (3.17)$$

Jak widać, maksymalna różnica względna jest niewielka i nieznacznie przekracza 2%.

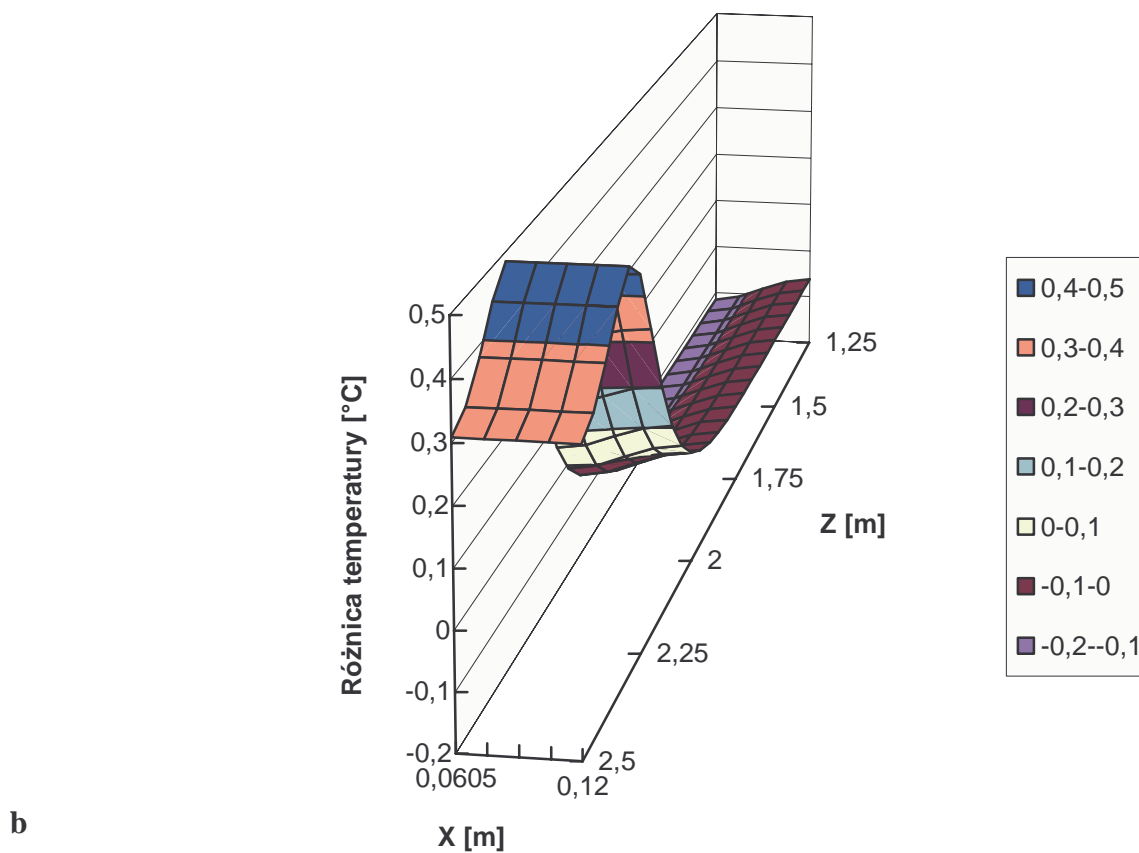
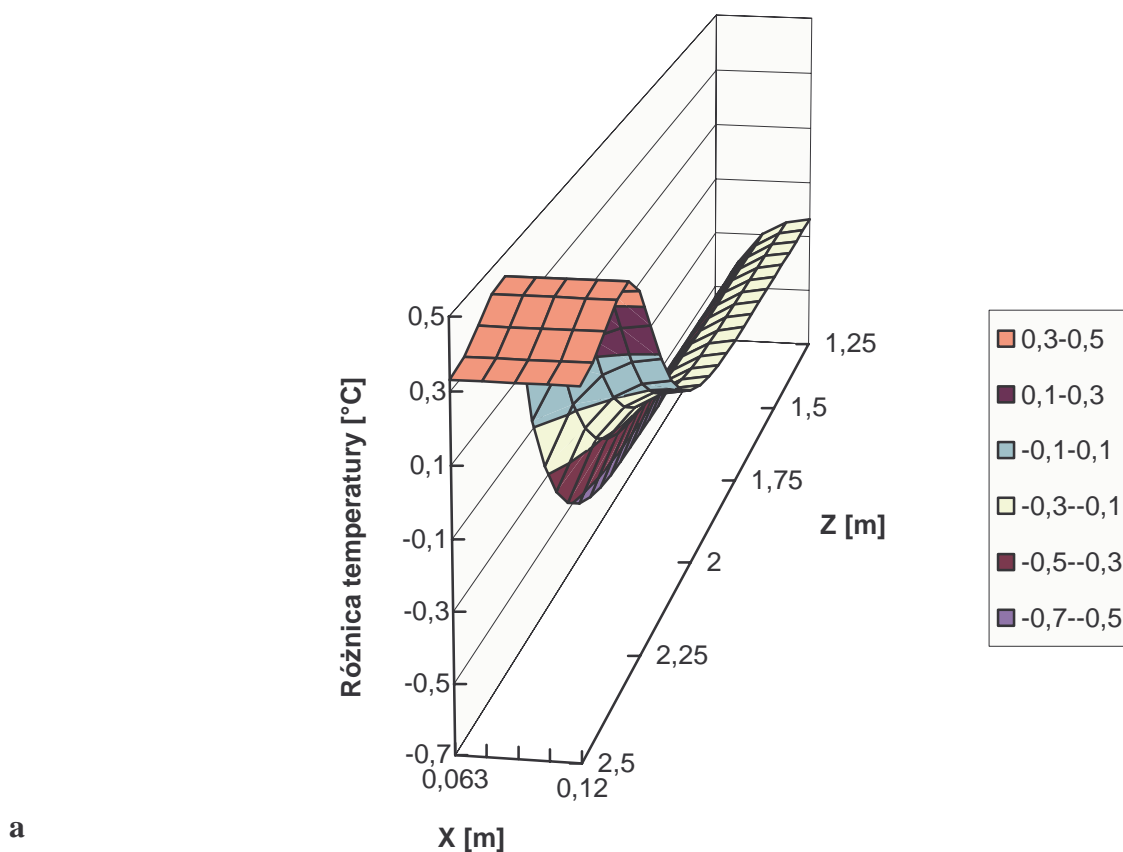


a

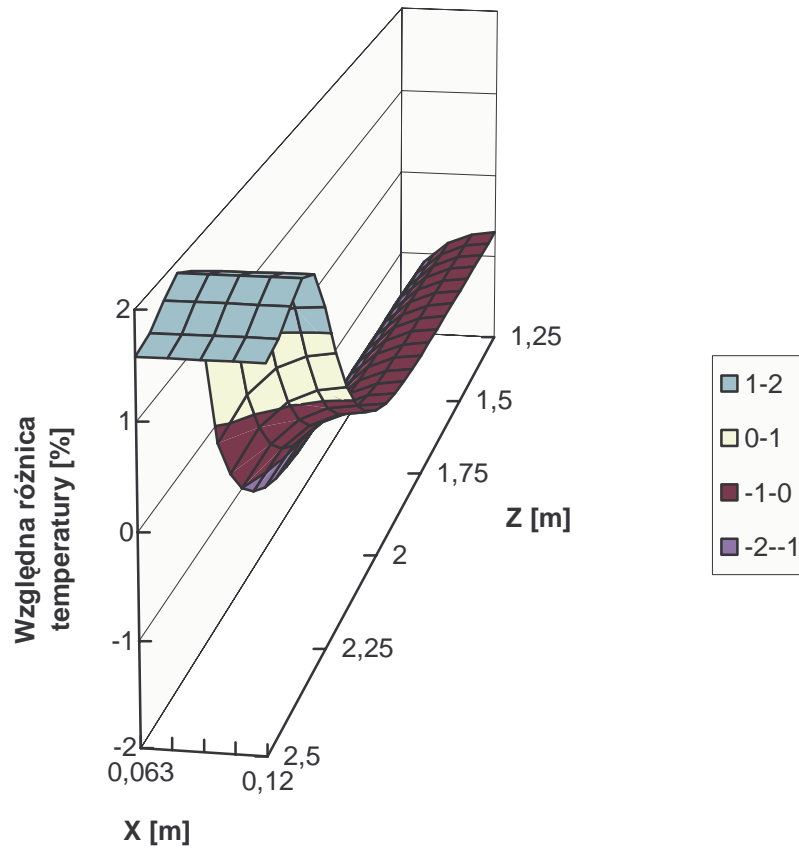


b

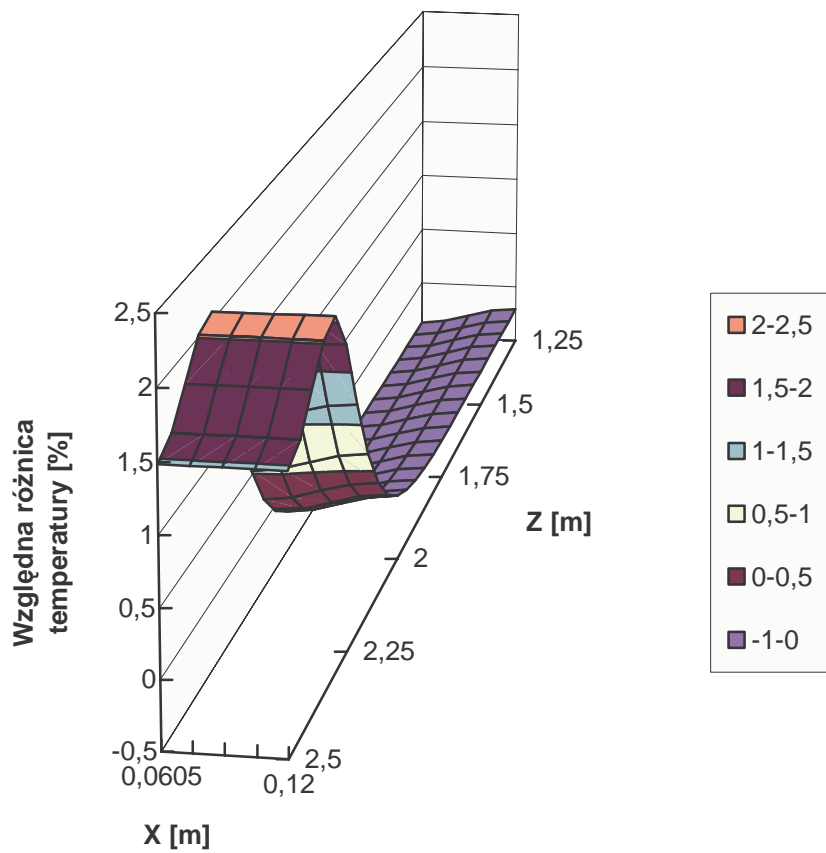
Rys. 3.13. Rozkład temperatury w symulacji numerycznej w segmencie powtarzalnym: a) na wysokości kabla grzewczego ( $y=0.015$  m), b) na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m).



Rys. 3.14. Rozkład różnicy temperatury pomiędzy modelem nieliniowym i liniowym, w symulacji numerycznej, w segmencie powtarzalnym: a) na wysokości kabla grzewczego ( $y=0.015$  m), b) na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m).



a



b

Rys. 3.15. Rozkład względnej różnicy temperatury pomiędzy modelem nieliniowym i liniowym, w symulacji numerycznej, w segmencie powtarzalnym: a) na wysokości kabla grzewczego ( $y=0.015$  m), b) na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m).



### **3.2.4. Wnioski**

Przyczyną różnic powstałych w strefie krawędziowej jest fakt, iż temperatura w tej części układu wynosi 20-25°C (rys. 3.13b). Współczynnik przejmowania ciepła (3.12) jest więc mniejszy ( $\alpha(T=25^{\circ}\text{C})=10.38 \text{ W}/(\text{K}\cdot\text{m}^2)$ ) na obrzeżach układu nieliniowego niż liniowego (gdzie przyjęto  $\alpha=12 \text{ W}/(\text{K}\cdot\text{m}^2)$ ). Powoduje to słabsze oddawanie ciepła i tym samym wyższą temperaturę krawędziowego obszaru układu nieliniowego. Natomiast w bezpośrednim otoczeniu kabla, temperatura układu jest najwyższa. Wartość przewodności cieplnej  $\lambda$  (3.11) jest więc tam największa, co powoduje lepszy przepływ ciepła. W ślad za tym temperatura otoczenia kabla jest niższa w układzie nieliniowym ( $\lambda=1.08 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) niż liniowym ( $\lambda=1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) o około 0.6°C. Rysunki 3.14 mają więc dobrą interpretację fizyczną.

Najważniejszym parametrem układu jest średnia temperatura powierzchni podłogi, odnotowana na rys. 3.13b (model nieliniowy) i rys. 2.6b (model liniowy). Różnica tych wartości wynosi zaledwie 0.07°C. Wartość maksymalnej różnicy względnej nieznacznie przekracza 2% (rys. 3.15). Należy zatem przyjąć wniosek, że założenie modelu liniowego nie wpływa w istotny sposób na wyznaczony rozkład temperatury. Sformułowany wniosek jest słuszny pod warunkiem właściwego doboru cieplnej przewodności i współczynnika przejmowania ciepła w modelu liniowym. Udowadnia to tezę nr 4 (str. 12) w odniesieniu do stanu ustalonego. Możliwość założenia stałych wartości  $\alpha$  i  $\lambda$  wynika z niewielkiej różnicy między skrajnymi temperaturami grzejnika (tzn. na powierzchni kabla i na obrzeżach powierzchni podłogi – ok. 20°C). W przypadku układów nie spełniających tego warunku [49], należy oczekiwać znacznie większego wpływu nieliniowości.

### **3.3. Oszacowanie wpływu stratności izolacji cieplnej na stacjonarną składową pola temperatury w grzejniku podłogowym**

#### **3.3.1. Wstęp**

W rozdziale 2 przeprowadzono analizę układu przy założeniu, że podłoga nie wymienia ciepła na termicznie izolowanych ścianach. W rzeczywistości występują jednak niewielkie straty ciepła. Przy prawidłowo ułożonej izolacji, są one rzędu kilku procent całkowitej mocy urządzenia [6], [27], [53]. W związku z powyższym, celem niniejszego paragrafu jest oszacowanie wpływu dyskutowanych strat na średnią wartość stacjonarnego rozkładu temperatury w najważniejszych płaszczyznach układu.

Górna powierzchnia grzejnika podłogowego jest płaszczyzną roboczą. W przeprowadzonej symulacji straty ciepła rozłożono równomiernie na pięciu pozostałych (tzn. izolowanych) ścianach. Założenie to jest również pewnym przybliżeniem. Modeluje jednak ono lepiej przebieg zjawiska niż postulat adiabatyczności izolacji.

#### **3.3.2. Zagadnienie graniczne i jego rozwiązanie**

W dotychczasowych analizach obszar obliczeń zawężano do tzw. segmentu powtarzalnego. Na takie postępowanie pozwalała symetria układu (m. in. ułożenie kabla). W obecnie badanym przypadku, lokalne ekstrema temperatury przesunięte są przez strumień strat i obliczenia należy przeprowadzić dla większego fragmentu urządzenia. Na rys. 1.4 można zauważyć dwie płaszczyzny symetrii warunków cieplnych (dla  $x=a$  i  $z=l/2$ ). W tych miejscach występują więc maksima rozkładu temperatury. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum oraz z prawa Fouriera wynika, że wymienione płaszczyzny są adiabatyczne. W związku z powyższym, analizę grzejnika można ograniczyć tylko do ćwiartki urządzenia. W tym celu wybrano obszar  $\{ x \in \langle a, 2a \rangle, y \in \langle 0, 2b \rangle, z \in \langle l/2, l \rangle \}$ .

Rozkład temperatury  $T(x,y,z)$  opisany jest równaniem przewodnictwa cieplnego (1.1), które w stanie stacjonarnym przyjmuje następującą postać [20], [22], [34]

$$\frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda} g(x, y, z). \quad (3.18)$$

Górna powierzchnia podłogi emituje energię zgodnie z prawem Newtona. Pozostałe warunki brzegowe są drugiego rodzaju [33]. W rezultacie korzystając z (1.2) i uwag przedstawionych powyżej, równanie (3.18) można uzupełnić następująco:

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=2a} = -\frac{Q_0}{\lambda}, \quad (3.19a, b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{Q_0}{\lambda}, \quad (3.19c)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=\frac{l}{2}} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=l} = -\frac{Q_0}{\lambda}, \quad (3.19d, e)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} [T(x, y = 2b, z) - T_0]. \quad (3.19f)$$

Hipotetyczny strumień  $Q_0$  wyznaczono przy założeniu siedmioprocentowych strat ciepła

$$Q_0 = 0.07 \frac{P}{S}. \quad (3.20)$$

Do rozwiązania zagadnienia brzegowego (3.18), (3.19) użyto programu NISA II/Heat Transfer [61], opartego na metodzie elementów skończonych. Fragment siatki modelu opisano i przedstawiono w rozdziale 2.3.2, rys. 2.3. W celu zdyskretyzowania czwartej części obszaru urządzenia, należy wielokrotnie powtórzyć wspomniany fragment siatki. Następnie na odpowiednich ścianach grzejnika zadano warunki

brzegowe (3.19). Procedura algebraizacji zagadnienia brzegowego (3.18), (3.19) oraz jego rozwiązanie są analogiczne do przedstawionych w rozdziale 2.3.2.

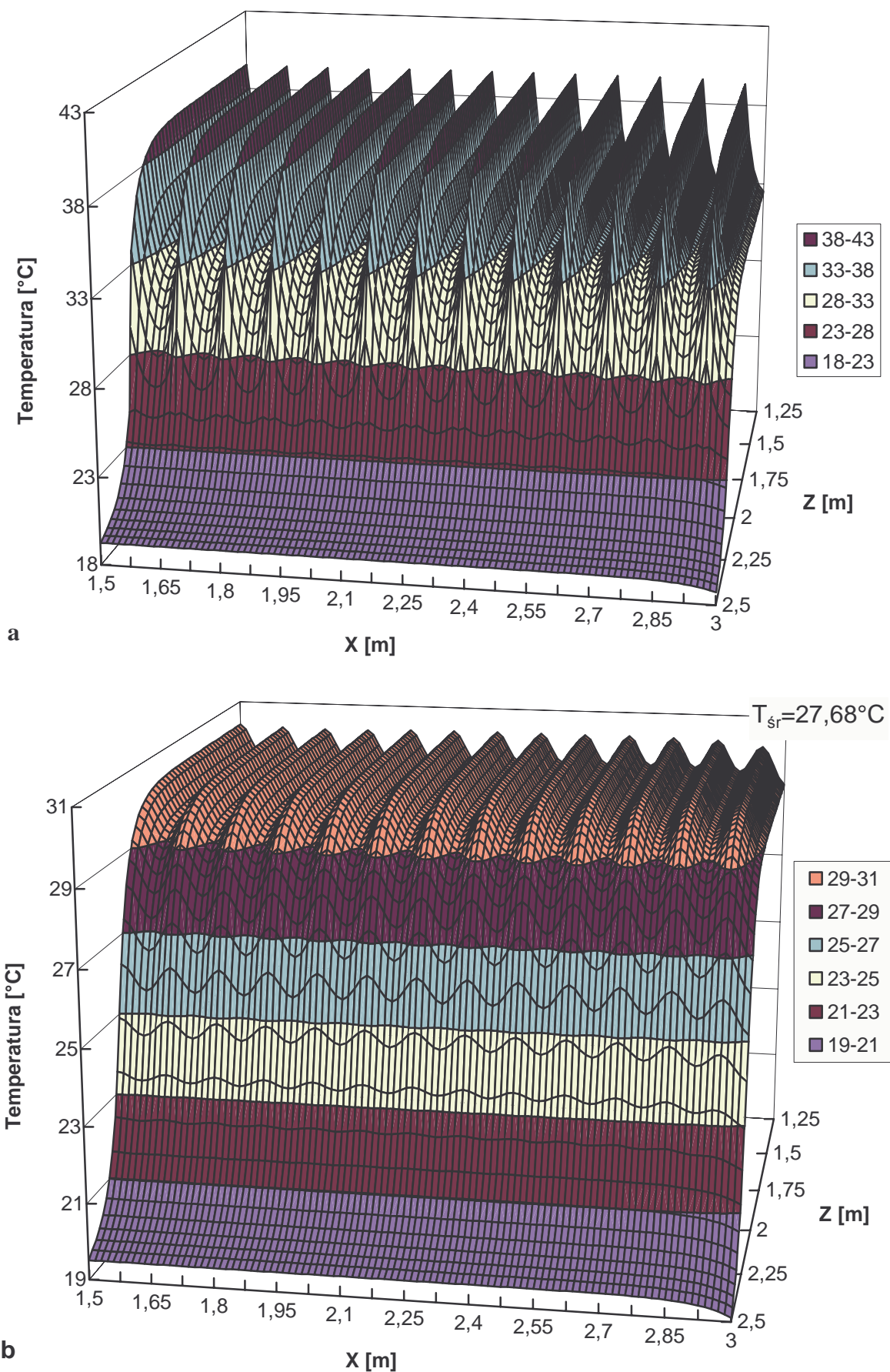
### **3.3.3. Przykład obliczeniowy i wyniki symulacji**

Przyjęto zestaw danych (2.15), (2.17) dla  $K=25$ . Z powyższych parametrów wynika, że czynna moc grzejnika wynosi  $P=(1-2u)lq_kK=750$  W. Zatem zgodnie ze wzorem (3.20), strumień ciepły przenikający przez izolację ma wartość  $Q_0=6.43$  W/m<sup>2</sup>. Czwartą część podłogi podzielono na 37500 elementów o 42432 węzłach. Obliczenia trwały ok. 21 minut.

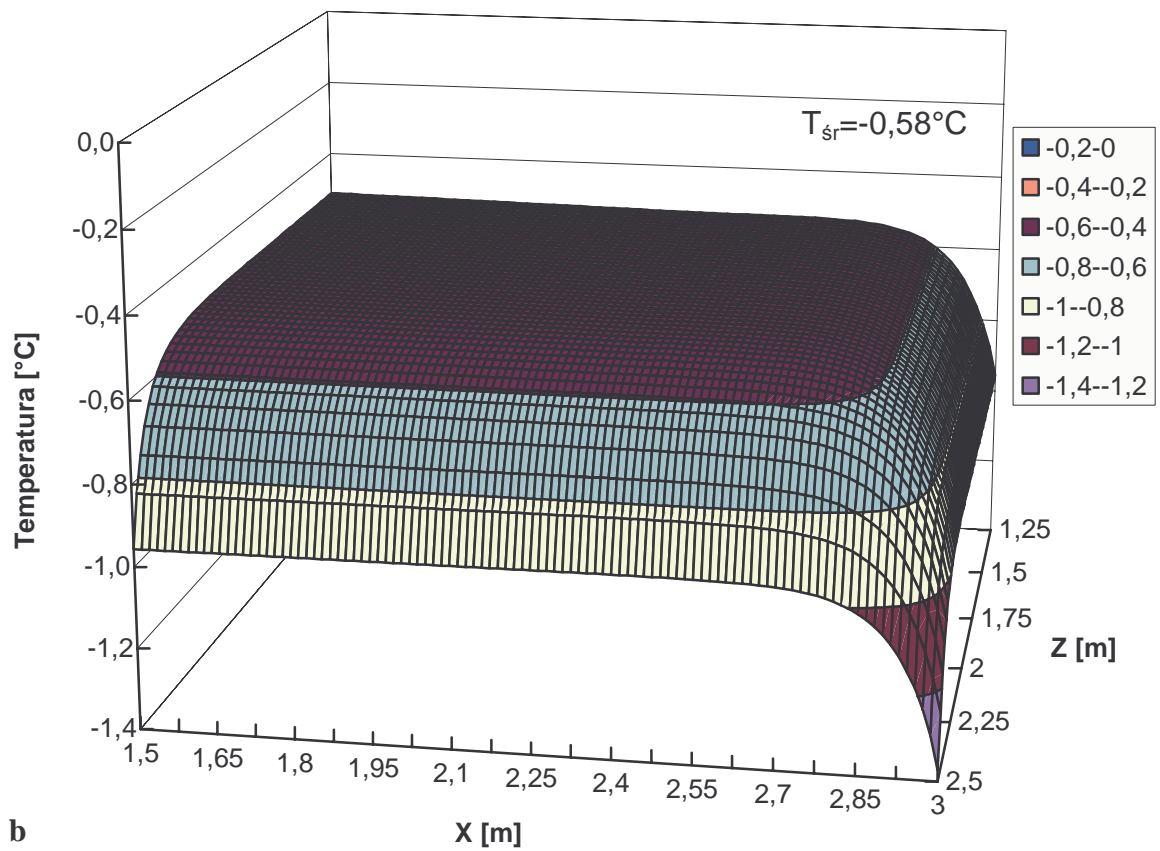
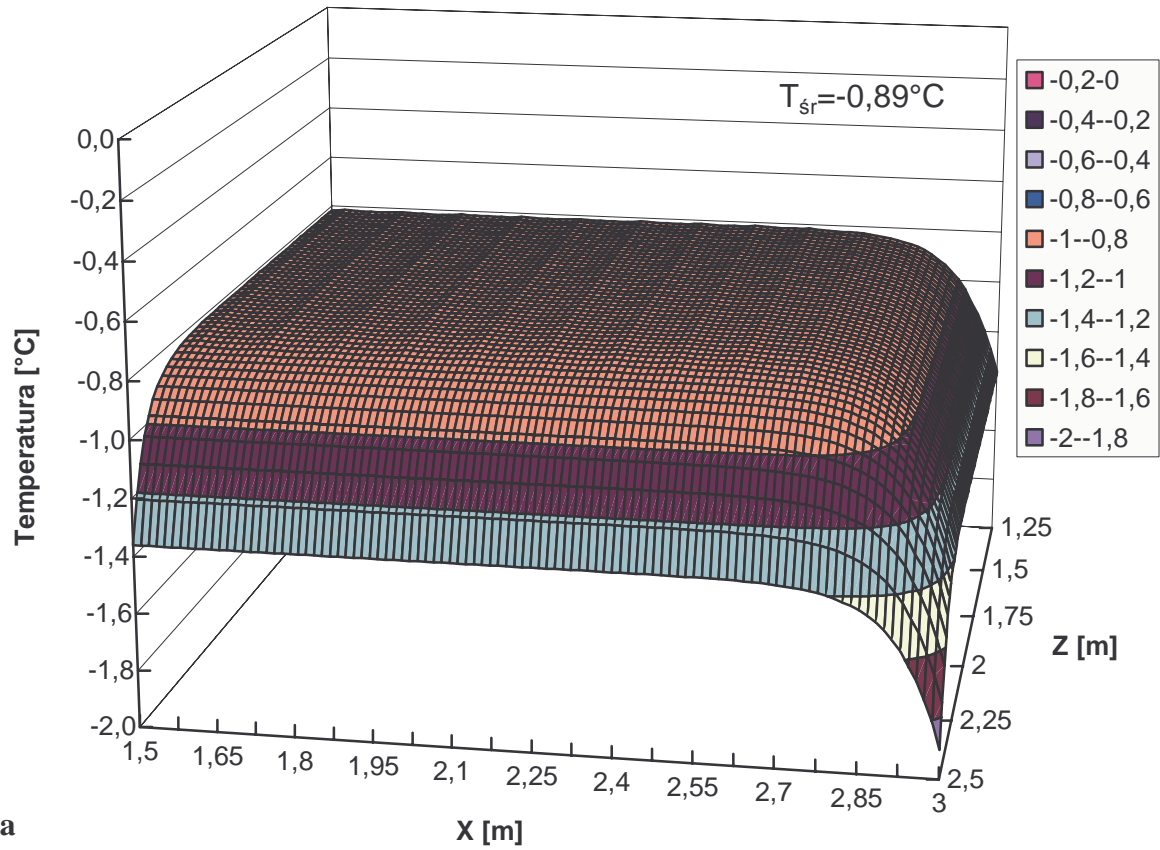
Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.16 i 3.17. Rys. 3.16 ilustruje rozkład temperatury w analizowanym fragmencie układu ze stratną izolacją. Rozpatrzono pole na wysokości kabla grzewczego i na powierzchni podłogi ( $T_{sr}=27.68^{\circ}\text{C}$ ). Są to poziomy, które najbardziej interesują użytkownika z uwagi na maksymalną temperaturę układu (niebezpieczeństwo przegrzania) i na temperaturę powierzchni roboczej grzejnika (komfort ciepły). Pole na powierzchni podłogi (rys. 3.16b) jest znacznie bardziej równomierne niż na wysokości kabla (rys. 3.16a). Wynika to z tłumiącego działania warstwy betonu (tzn. z akumulacji ciepła w płycie o grubości  $2b-y_k=0.045$  m oraz w mniejszym stopniu z warunków wymiany ciepła na powierzchni podłogi). Wyniki dla układu z idealną izolacją otrzymano metodami podanymi w rozdziałach 2.2.2, 2.3.2.

Na rys. 3.17 przedstawiono różnicę temperatury układu stratnego i idealnego. Jest ona największa w narożnikach, gdzie ma miejsce najintensywniejsza ucieczka ciepła (przez trzy ściany). Dyskutowana różnica zmniejsza się w centralnej części grzejnika i osiąga minimum na powierzchniach adiabatycznych w najcieplejszym obszarze podłogi. Średnia różnica temperatury jest bardzo mała i wynosi  $0.89^{\circ}\text{C}$  na wysokości kabla i  $0.58^{\circ}\text{C}$  na powierzchni układu.

Przeprowadzone oszacowanie wykazało więc, że siedmioprocentowa strata mocy nieznacznie wpływa na zasadniczy parametr układu (tzn. na średnią temperaturę ważnych powierzchni). Dowodzi to słuszności założenia przyjętego w rozdziale 2.2.



Rys. 3.16. Rozkład temperatury w układzie ze stratną izolacją: a) na wysokości kabla ( $y=y_k=0.015$  m), b) na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m).



Rys. 3.17. Rozkład różnicy temperatury układu ze stratną izolacją i idealnego: a) na wysokości kabła ( $y=y_k=0.015$  m), b) na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m).

### **3.4. Doświadczalna weryfikacja symulacji stacjonarnej składowej pola temperatury w grzejniku**

#### **3.4.1. Wstęp**

Dotychczas w rozprawie analizowano składową ustaloną pola temperatury w elektrycznym układzie bezpośredniego ogrzewania podłogowego. W obliczeniach zastosowano zarówno metodę analityczną (funkcji własnych) jak i numeryczną (elementów skończonych). Otrzymano zgodne wyniki (np. rozdziały 2, 3.1).

Celem niniejszego rozdziału jest doświadczalne sprawdzenie dotychczas otrzymanych rezultatów obliczeniowych. Należy jednak zdecydowanie podkreślić, że zamierzeniem autora **nie** była kontrola dokładności metod stosowanych w pracy. Chodziło raczej o eliminację ewentualnych grubych błędów przypadkowych i o weryfikację kierunków zmian pola temperatury. Ponieważ różnice wartości zmierzonych i obliczonych mogą wynikać z bardzo wielu przyczyn, z góry akceptowano jedynie szacunkową zgodność wyników symulacji i eksperymentu.

#### **3.4.2. Stanowisko badawcze**

Realizując przedstawiony (we wstępie) cel, zbudowano nieco zmniejszony i uproszczony model grzejnika podłogowego. Rozpoczęto od przygotowania jego formy o wymiarach 1.8x2.5x0.06 m. Formę wykonano ze styropianu grubości 0.1 m (rys. 3.18). Następnie wylano pierwszą warstwę podłogi grubości 0.01 m, co zapewniło założony poziom położenia osi kabla  $y_I=0.015$  m. Do wykonania układu wykorzystano zaprawę samopoziomującą Sam 200 firmy Atlas (odnosi się to również do drugiej warstwy podłogi). Według przedstawiciela firmy Atlas, przewodność cieplna ( $\lambda$ ) zaprawy wynosi ok. 1.5 W/(m·K). W dalszej kolejności ułożono siatkę i przymocowano do niej przewód grzewczy firmy Elektra (rys. 3.19). Z uwagi na teoretyczny model źródła ciepła (rozdział 3.1.2), kablowi nadano kształt

zbliżony do pokazanego na rys. 1.4. Długie odcinki przewodu ułożono na odciętych  $x_k=2a(k-0.5)/K$ , gdzie  $K=15$ ,  $2a=1.8$  m. Do siatki przytwierdzono również termoelementy (rys. 3.20). W końcowym etapie wykonano drugą warstwę podłogi grubości 0.05 m (całkowita wysokość grzejnika wynosi więc  $2b=0.06$  m, rys. 3.21). Po czterech tygodniach podłoga uzyskała odpowiednie właściwości mechaniczne. Następnie włączono zasilanie w celu wygrzania urządzenia. Do regulacji mocy grzejnika użyto autotransformatora, zaś zasilanie układu nastąpiło poprzez stabilizator napięcia. Po dwóch miesiącach od zbudowania stanowiska, przystąpiono do pomiarów stacjonarnego rozkładu temperatury.

Wybór punktów pomiarowych wynikał z wcześniejszych rozdziałów niniejszej rozprawy. Przy symetrycznym położeniu kabla rezultaty zawsze przedstawiano w tzw. segmencie grzejnika i na dwóch płaszczyznach szczególnego znaczenia: na wysokości kabla oporowego i na powierzchni podłogi. Z tego powodu wyniki eksperymentu będą również prezentowane w tej konfiguracji. W tym celu wybrano środkowy segment podłogi, przedstawiony na rys. 3.22. Kropki wskazują położenie czujników do pomiaru temperatury. Ponieważ pole jest „antysymetryczne” (rozdział 3.1.4), wystarczy umieścić czujniki tylko po jednej stronie kabla oporowego. Rozkład temperatury w pozostałym obszarze badanego fragmentu, uzyskuje się odpowiednio przestawiając współrzędne punktów pomiarowych.

Na wysokości kabla grzewczego, pomiaru dokonano za pomocą termoelementów (NiCr-Ni). Mierzą one temperaturę w wyżej określonych punktach. Podłączono je do przetworników APTu, które zamieniają sygnał pomiarowy na użyteczny sygnał prądowy o zakresie 4-20 mA. Przekazywany on jest następnie do systemu pomiarowo-akwizycyjnego DAQ BOOK 100 z kartami pomiarowymi DBK 15. Z kolei do pomiarów temperatury na powierzchni podłogi użyto pirometru MI firmy Raytek (z możliwością ustawienia współczynnika emisyjności  $\epsilon$ ). Jest to pirometr radiacyjny. Przyrząd mierzy zatem całkowite promieniowanie temperaturowe. Pomiar odbywa się w sposób bezstykowy (w odległości ok. 3 mm). Istniejące pole temperatury nie ulega więc zakłóceniu. Sygnałem wyjściowym jest prąd w zakresie 0-20 mA. Wyniki rejestrowano również





Rys. 3.18. Styropianowa forma podłogi grzewczej.



Rys. 3.19. Siatka montażowa z przymocowanym kablem grzewczym.





a

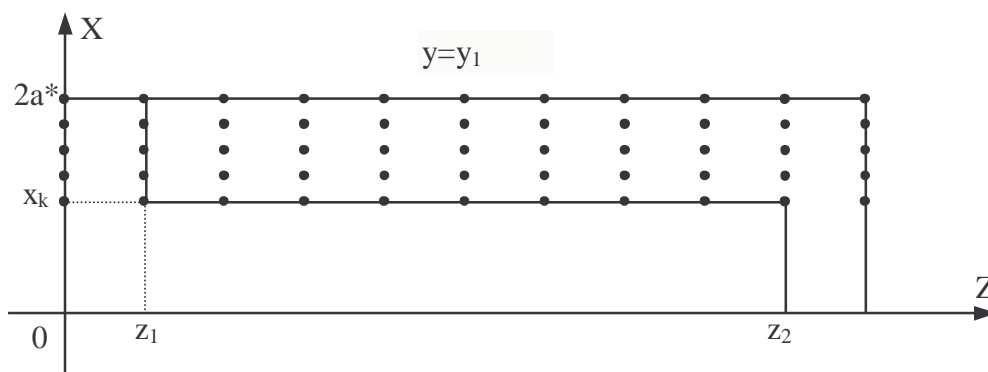
b

Rys. 3.20. Rozmieszczenie termoelementów na wysokości kabla grzewczego: a) widok ogólny, b) zbliżenie.





Rys. 3.21. Stanowisko doświadczalne do badań podłogi grzewczej.



Rys. 3.22. Segment podłogi z zaznaczonymi punktami pomiarowymi (przekrój na wysokości kabla).

za pomocą systemu DAQ BOOK. Temperaturę wszystkich wybranych punktów mierzono jednym pirometrem. Czas trwania pełnej serii pomiarów wynosił ok. 300 s. Jednak z uwagi na dużą masę grzejnika (czyli dużą bezwładność cieplną układu,  $\tau_{3g}=13503$  s, rys. 4.6), ta niejednoczesność pomiarów nie miała wpływu na uzyskany rozkład pola temperatury. Pomiary powtarzano w ciągu kilku dni, przy różnej temperaturze otoczenia. Z tej przyczyny przy opracowaniu wyników posłużono się przyrostami temperatury względem temperatury otoczenia. Za wynik



końcowy pomiaru przyjęto średnią arytmetyczną obliczoną ze wszystkich pomiarów w danym punkcie obszaru.

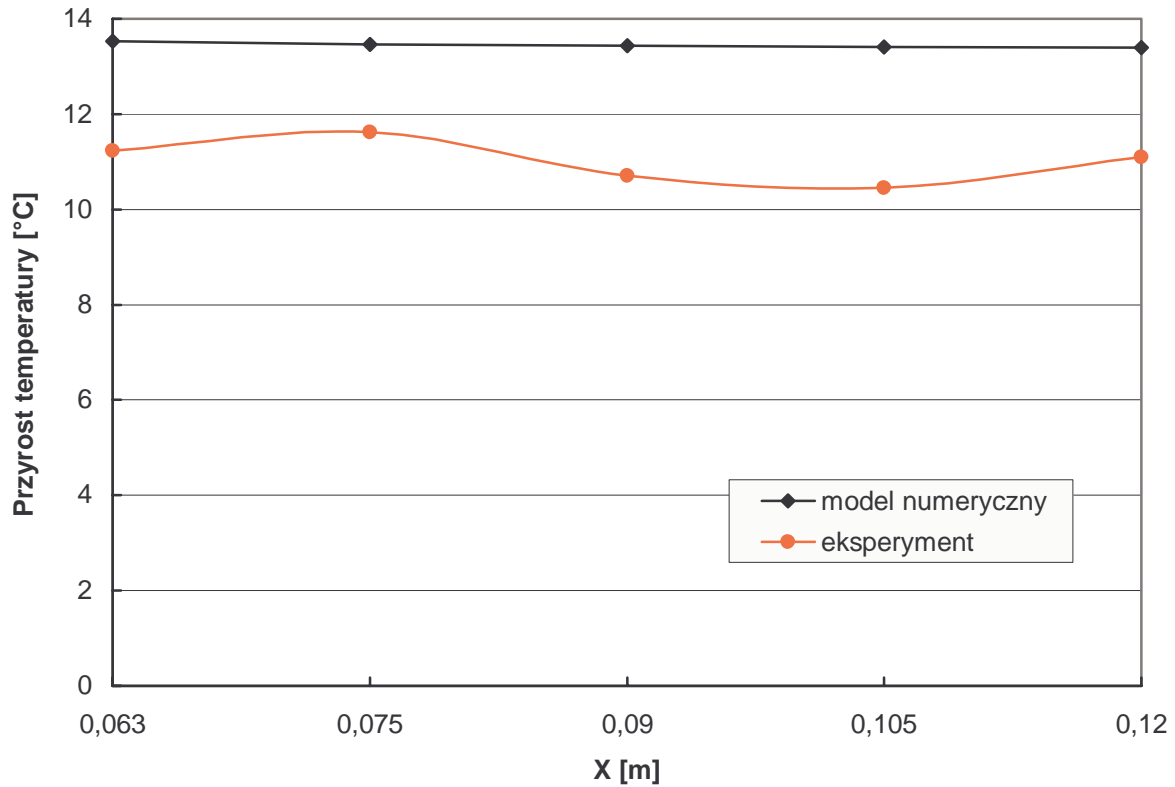
### **3.4.3. Uwagi końcowe**

Wyniki otrzymane na drodze eksperymentu porównano z rezultatami symulacji numerycznej, którą wybrano ze względu na bliższy rzeczywistości model źródła ciepła (rozdziały 2 i 3.1). Metodę numeryczną opisano dokładnie w rozdziale 3.1.3.2. W obliczeniach wykorzystano zestaw danych (2.17) i (3.10), gdzie zmieniono wartość przewodności cieplnej przyjmując  $\lambda=1.5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ .

Rys. 3.23 i 3.24 przedstawiają rozkład temperatury w wybranych przekrojach ( $z=\text{const}$ ), odpowiednio na wysokości kabła grzewczego i powierzchni podłogi. Jak widać, przyrosty obliczone są zawsze większe od zmierzonych. W symulacji komputerowej założono bowiem adiabatyczność izolacji termicznej, która w rzeczywistości nie jest idealna. Podstawową przyczyną różnicy między wynikami symulacji i pomiarów jest jednak tylko przybliżona znajomość współczynnika przewodności ( $\lambda$ ) i wymiany ciepła ( $\alpha$ ). Daleko mniejsze znaczenie ma fakt, że w zbudowanym układzie krótkie i długie odcinki kabła nie są do siebie dokładnie prostopadłe (jak na rys. 1.4).

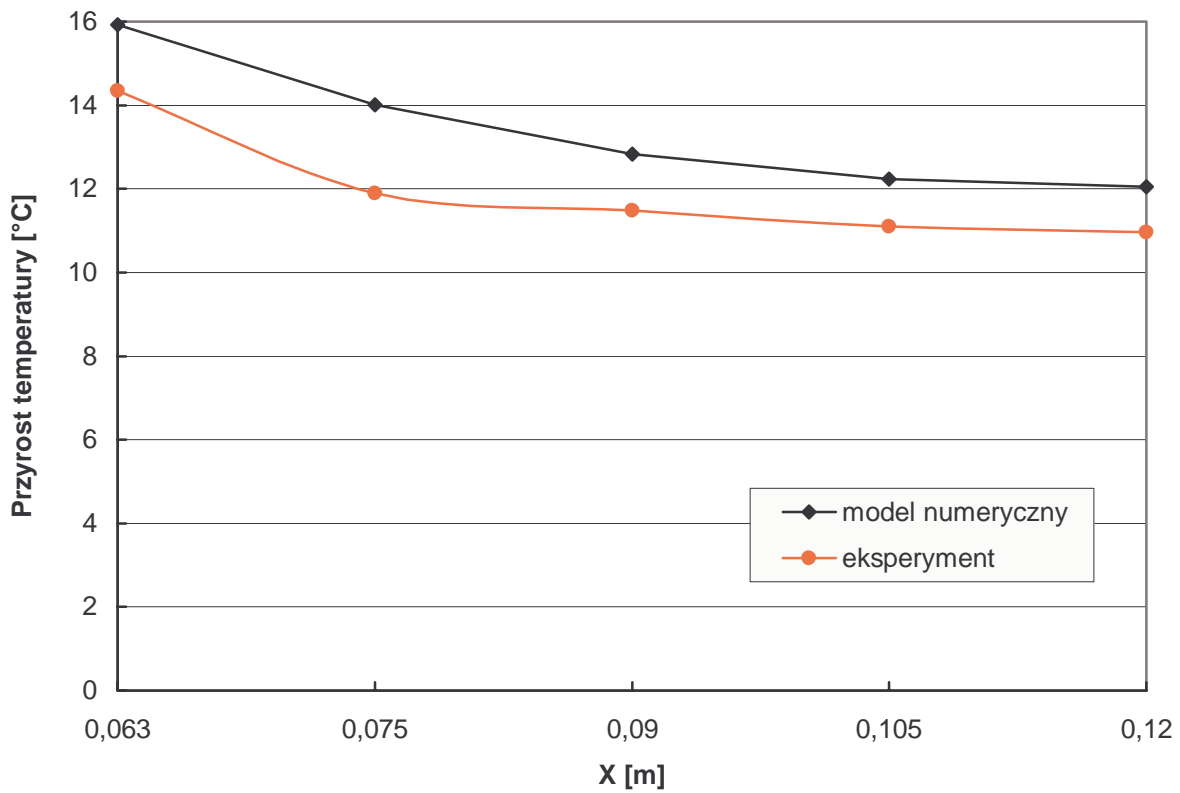
Na rys. 3.23 i 3.24 obserwuje się jednakowy kierunek zmian czarnych i czerwonych linii. W środkowym fragmencie podłogi ( $z \in \langle 0.75, 1.75 \text{ m} \rangle$ ) zwiększa się przyrost temperatury przy zbliżaniu się do osi kabła wzdłuż osi  $X$ . Jest to również widoczne przy przemieszczaniu się wzdłuż osi  $Z$  w kierunku środka układu.

W płaszczyźnie zagięcia przewodu ( $z=0.25 \text{ m}$ , rys. 3.24a) temperatura narasta przy zbliżaniu się do krawędzi segmentu. W ten sposób objawia się wpływ lokalnej składowej pola, generowanej zagięciem kabła (rozdział 3.1). Z kolei rys. 3.23a nie odzwierciedla wyraźnie wyżej opisanego zjawiska. Na wysokości kabła ma bowiem miejsce silna dominacja pola wytworzonego długim odcinkiem kabła nad rozkładem pochodzącym od zagięcia. Porównując parami rys. (3.23b, 3.24b), (3.23c, 3.24c), (3.23d, 3.24d) stwierdzono spadek temperatury i większą



a

$y=y_k=0.015\text{ m}, z=0.25\text{ m}$

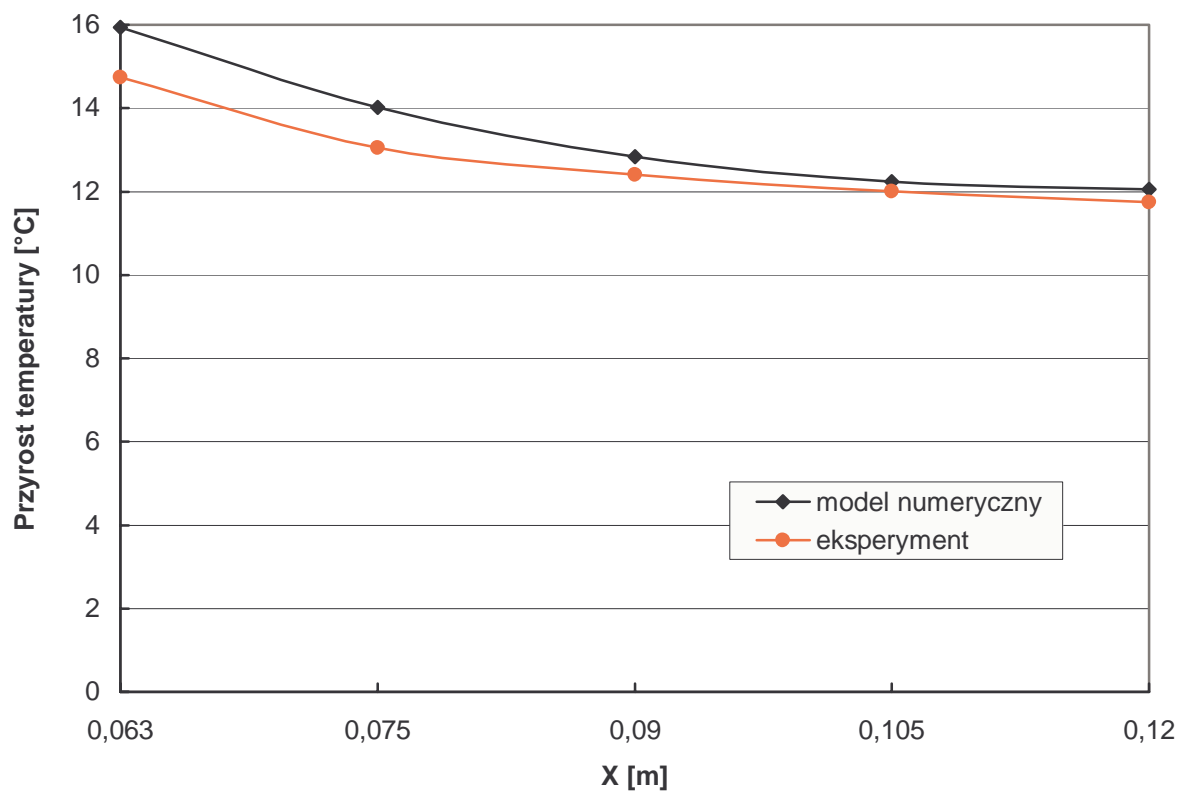


b

$y=y_k=0.015\text{ m}, z=0.75\text{ m}$

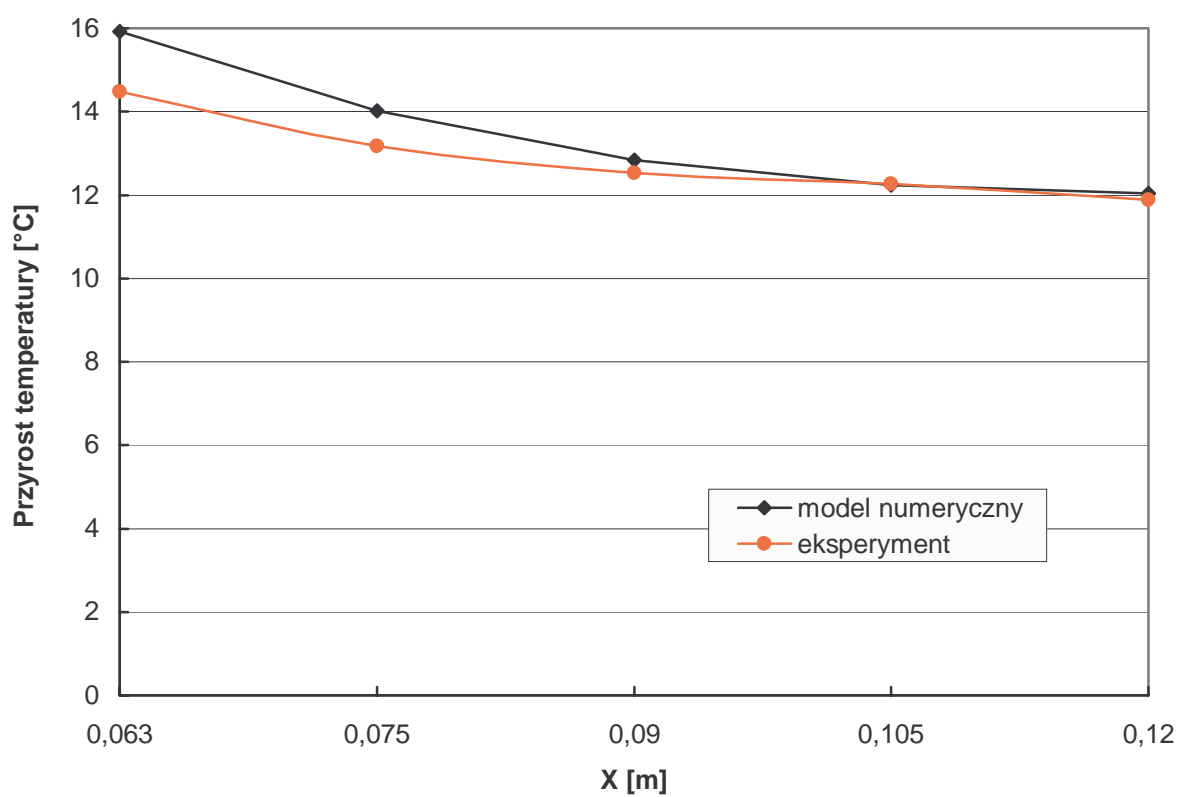
Rys. 3.23. Przyrosty temperatury na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015\text{ m}$ ) w wybranych przekrojach: a)  $z=0.25\text{ m}$ , b)  $z=0.75\text{ m}$ .





c

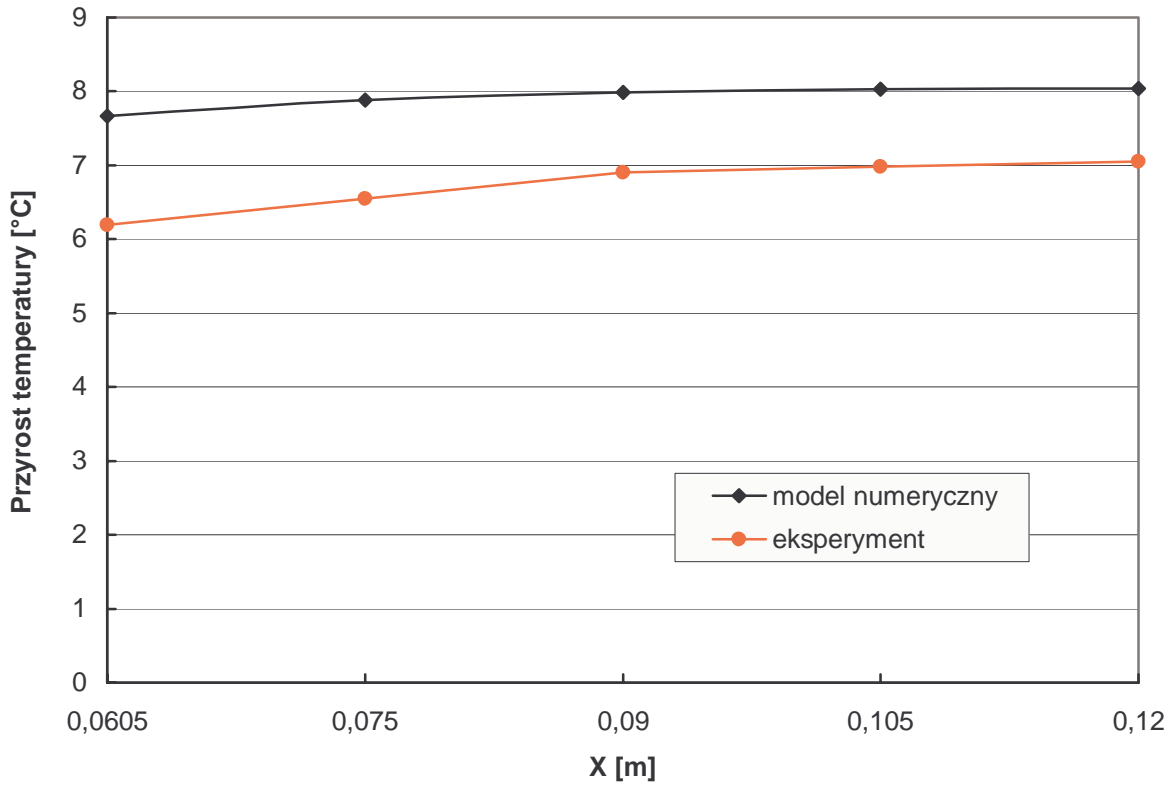
$y=y_k=0.015$  m,  $z=1.25$  m



d

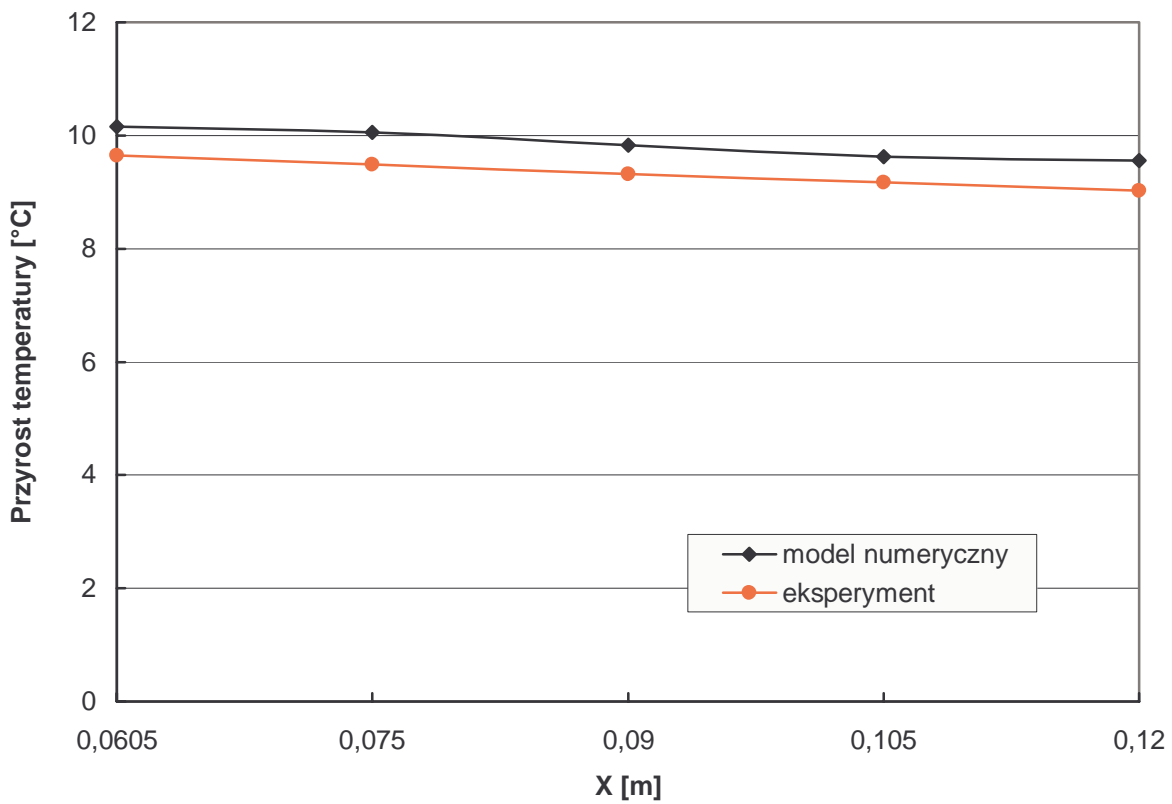
$y=y_k=0.015$  m,  $z=1.75$  m

Rys. 3.23. Przyrosty temperatury na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m) w wybranych przekrojach: c)  $z=1.25$  m, d)  $z=1.75$  m.



a

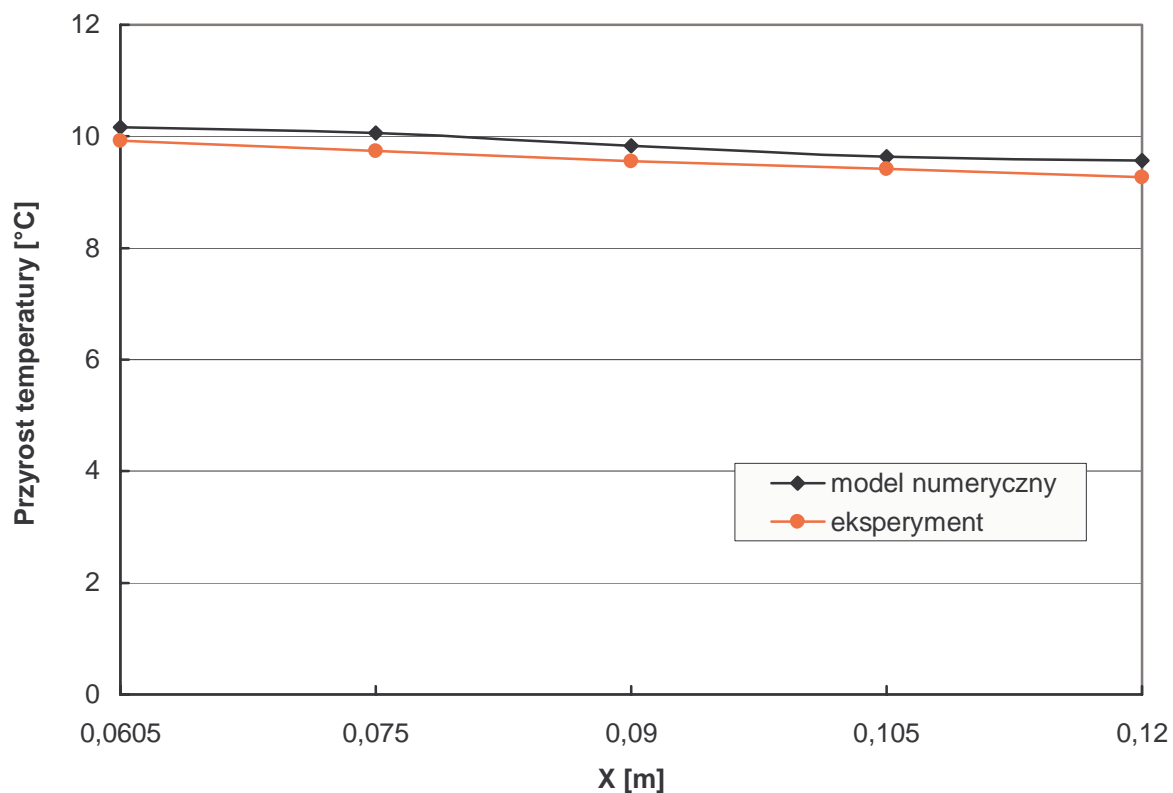
$y=2b=0.06$  m,  $z=0.25$  m



b

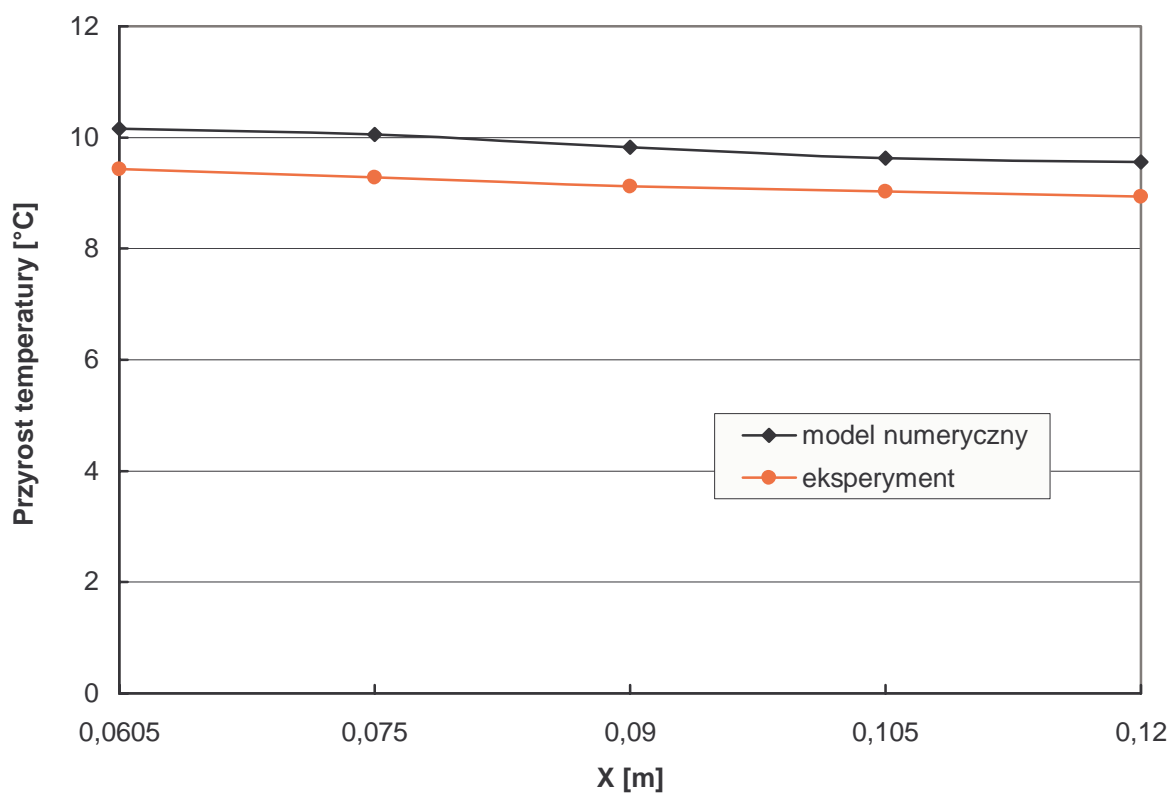
$y=2b=0.06$  m,  $z=0.75$  m

Rys. 3.24. Przyrosty temperatury na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w wybranych przekrojach: a)  $z=0.25$  m, b)  $z=0.75$  m.



c

$y=2b=0.06$  m,  $z=1.25$  m



d

$y=2b=0.06$  m,  $z=1.75$  m

Rys. 3.24. Przyrosty temperatury na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m) w wybranych przekrojach: c)  $z=1.25$  m, d)  $z=1.75$  m.

równomierność pola na powierzchni podłogi. Jest to rezultatem emisji ciepła przez płaszczyznę roboczą oraz jego akumulacji w płycie układu. Wyniki symulacji i pomiarów mają więc wspólną interpretację fizyczną.

Z rys. 3.23 i 3.24 wynika również, że w obu przypadkach otrzymane wartości przyrostów temperatury są tego samego rzędu. Można zatem uznać, że eksperyment potwierdził rezultaty komputerowych obliczeń. **U d o w a d n i a t o** częściowo tezę nr 5 (str. 12). Koszty i pracochłonność doświadczenia przemawiają jednak wyraźnie za numeryczną symulacją.

*Autor składa podziękowanie firmie Elektra S.A. w Warszawie za nieodpłatne przekazanie kabla grzewczego wykorzystanego w układzie doświadczalnym.*

---

## 4. ANALITYCZNE I NUMERYCZNE MODELOWANIE NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W DWU- I TRÓJWYMIAROWYM UKŁADZIE ELEKTRYCZNEGO OGRZEWANIA PODŁOGOWEGO

### 4.1. Wstęp

W rozdziale 2 wyznaczono stacjonarną składową pola temperatury w grzejniku podłogowym typu bezpośredniego. Umożliwia to rozwiązanie zagadnień wymienionych w paragrafie 2.1. Wśród nich szczególnie ważne miejsce zajmuje modelowanie maksymalnych obciążeń termicznych. W normalnych stanach roboczych układu, zasilanie jest jednak na przemian włączone i wyłączone. Wydajność przestrzennych źródeł ciepła zmienia się zatem w czasie. Z tego powodu celem niniejszego rozdziału jest modelowanie dynamicznych właściwości grzejnika oraz nieustalonych (tzn. przestrzenno-czasowych) rozkładów pola termicznego.

Z uwagi na przyczyny przedstawione w rozdziale 1.4, zdecydowano się na równoległą analizę dwu- i trójwymiarowej dynamiki pola. Fragmenty dotyczące wyłącznie układów dwuwymiarowych (rys. 1.5) będą poprzedzone literą „**A**”, zaś trójwymiarowych (rys. 1.4) literą „**B**”. Części nie oznaczone powyższymi literami są wspólne dla obydwu przypadków.

W dalszych rozważaniach przyjęto te same założenia upraszczające co w rozdziale 2. Zdaniem autora nie zachodzi potrzeba kontroli ich poprawności. Temperatury w stanie nieustalonym są bowiem mniejsze od temperatury w stanie stacjonarnym (str. 47, bezpośrednio przed rozdziałem 3.1). Z pewnymi wyjątkami wyniki rozdziału 3 pozostają więc aktualne.

## 4.2. Odpowiedź układu na wymuszenie skokowe

### 4.2.1. Wprowadzenie

Z następujących przyczyn skokowa odpowiedź zajmuje szczególne miejsce [21], [58] w analizie dynamiki układów:

- stanowi dogodne połączenie pomiędzy badaniami stanów ustalonych i przejściowych (np. pomiędzy rozdziałem 2 a niniejszym paragrafem),
- umożliwia bezpośrednie (np. rozdział 4.3.5) lub pośrednie (np. za pomocą twierdzenia Duhamela [3]) wyznaczenie odpowiedzi na dowolne wymuszenie,
- jest podstawą określenia uśrednionej stałej czasowej [46], [47] obiektów o parametrach rozłożonych i ich transmitancji.

W analizowanym przypadku charakterystyką skokową jest termiczna odpowiedź

**A.**  $H(x, y, t)$

**B.**  $H(x, y, z, t)$

układu na włączenie zasilania w zerowej chwili czasu ( $t=0$ ). Dla  $t>0$  nastąpi proces dyfuzji ciepła. Po uwzględnieniu założeń upraszczających (rozdział 2) i zależności

**A.** (1.3), (1.4),

**B.** (1.1), (1.2),

zagadnienie graniczne można sformułować następująco

**A.**

$$\frac{\partial^2 H(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda} g(x, y), \quad (4.1a)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (4.1b, c)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.1d)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} [H(x, y = 2b, t) - T_0], \quad (4.1e)$$

$$H(x, y, t = 0) = T_0, \quad (4.1f)$$

dla  $0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2b,$

**B.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial t} = \\ = -\frac{1}{\lambda} g(x, y, z), \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (4.2b, c)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.2d)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (4.2e, f)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} [H(x, y = 2b, z, t) - T_0], \quad (4.2g)$$

$$H(x, y, z, t = 0) = T_0, \quad (4.2h)$$

dla  $0 \leq x \leq 2a, 0 \leq y \leq 2b, 0 \leq z \leq l.$

W tym rozdziale wyznaczono charakterystykę skokową za pomocą trzech metod: a) superpozycji stanów, b) uśrednionej stałej czasowej, c) elementów skończonych. Po przedstawieniu kolejnych rozwiązań, w rozdziale 4.2.5 zostaną podane przykłady obliczeniowe.

#### 4.2.2. Rozwiązanie analityczne – metoda superpozycji stanów

W metodzie superpozycji stanów [29], [33] rozwiązanie zagadnienia granicznego

**A.** (4.1)

**B.** (4.2)

przewiduje się w postaci

**A.**  $H(x, y, t) = H_u(x, y) + H_p(x, y, t).$  (4.3)

**B.**  $H(x, y, z, t) = H_u(x, y, z) + H_p(x, y, z, t),$  (4.4)

Występujące w powyższych wzorach składowe ustalone, zostały określone na podstawie rozdziału 2.

**A.** Z uwagi płasko-równoległą konfigurację pola, w (2.10) należy usunąć szereg związany z trzecim wymiarem (tzn. ze współrzędną „z” i z indeksem „i”).

W połączeniu z (2.13) prowadzi to do poszukiwanego wyrażenia

$$H_u(x, y) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y), \quad (4.5)$$

gdzie:

$$v_{mn}^{(k)}(x, y) = \frac{q_k}{ab\lambda} \frac{\cos\left(m\pi \frac{x_k}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y_k}{2b}\right) \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right)}{(1 + \delta_{m0}) \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right] \left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2\right]}, \quad (4.6)$$

gdzie  $\gamma_n$  określono wzorami (2.8a, b).

**B.** W przypadku trójwymiarowym składowa ustalona wynika bezpośrednio z (2.13) i (2.10)



$$H_u(x, y, z) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \quad (4.7a)$$

gdzie:

$$v_{mni}^{(k)}(x, y, z) = \frac{2q_k}{ab\pi\lambda} \frac{(-1)^i \cos\left(m\pi \frac{x_k}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y_k}{2b}\right) \sin[i\pi(1-2u)]}{i(1+\delta_{m0})(1+\delta_{(2i)0}) \left[1 + \frac{\sin(2\gamma_n)}{2\gamma_n}\right]} \cdot \frac{\cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) \cos\left(2i\pi \frac{z}{l}\right)}{\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{2i\pi}{l}\right)^2\right]} \quad (4.7b)$$

Z wzorów (4.5) i (4.7) wynika, że w niniejszym rozdziale wystarczy wyznaczyć tylko składowe przejściowe.

A. Korzystając z (4.1), (4.3), (4.5), sformułowano zagadnienie graniczne względem  $H_p(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 H_p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_p(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H_p(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.8a)$$

dla  $0 \leq x \leq 2a$ ,  $0 \leq y \leq 2b$ ,  $t > 0$ ,

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_p(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (4.8b, c)$$

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.8d)$$

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} H_p(x, y = 2b, t), \quad (4.8e)$$

$$H_p(x, y, t = 0) = -\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y). \quad (4.8f)$$

**B.** Korzystając z (4.2), (4.4), (4.7), sformułowano zagadnienie graniczne względem  $H_p(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 H_p(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_p(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_p(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.9a)$$

dla  $0 \leq x \leq 2a$ ,  $0 \leq y \leq 2b$ ,  $0 \leq z \leq l$ ,  $t > 0$ ,

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (4.9b, c)$$

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.9d)$$

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (4.9e, f)$$

$$\left. \frac{\partial H_p(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=2b} = -\frac{\alpha}{\lambda} H_p(x, y = 2b, z, t), \quad (4.9g)$$

$$H_p(x, y, z, t = 0) = -\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z). \quad (4.9h)$$

**A.** Zagadnienie graniczne (4.8) rozwiązano metodą rozdzielania zmiennych [33], [60]. Poszukiwana funkcja ma zatem następującą postać

$$H_p(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn}(x, y, t), \quad (4.10a)$$

gdzie

$$H_{mn}(x, y, t) = X_m(x)Y_n(y)T_{mn}(t). \quad (4.10b)$$

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych cząstkowych z (4.10b), podstawieniu ich do (4.8a) i rozdzieleniu zmiennych, otrzymano układ równań różniczkowych względem funkcji własnych

$$\begin{cases} X_m''(x) + M_m^2 X_m(x) = 0 \\ Y_n''(y) + N_n^2 Y_n(y) = 0 \\ T_{mn}'(t) + \chi(M_m^2 + N_n^2) T_{mn}(t) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Całkami ogólnymi powyższych równań są funkcje

$$\begin{aligned} X_m(x) &= A_m \cos M_m x + B_m \sin M_m x \\ Y_n(y) &= C_n \cos N_n y + D_n \sin N_n y \\ T_{mn}(t) &= E_{mn} \exp[-\chi(M_m^2 + N_n^2)t]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sinusy nie spełniają warunków (4.8b, d), co powoduje  $B_m = D_n = 0$ . Wartości własne zagadnienia wyznaczono z (4.8c, e). Ostatecznie po podstawieniu tak dobranych funkcji własnych do (4.10a) otrzymano

$$\begin{aligned} H_p(x, y, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{-\chi\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie  $\gamma_n$  określono wzorami (2.8a, b).

Z kolei z warunku początkowego (4.8f) wynika nieznaną współczynnik  $F_{mn}$  szeregu (4.13). Następnie podstawiając (4.5) i (4.13) do (4.3) określono poszukiwaną charakterystykę skokową układu dla modelu dwuwymiarowego

$$H(x, y, t) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{mn}}\right) \right], \quad (4.14a)$$

gdzie

$$\tau_{mn} = \left\{ \left[ \left( \frac{m\pi}{2a} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_n}{2b} \right)^2 \right] \chi \right\}^{-1}, \quad (4.14b)$$

$v_{mn}^{(k)}(x, y)$  patrz (4.6).

**B.** Zgodnie z metodą rozdzielania zmiennych rozwiązania zagadnienia granicznego (4.9) poszukiwano w następującej postaci

$$H_p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} H_{mni}(x, y, z, t), \quad (4.15a)$$

gdzie

$$H_{mni}(x, y, z, t) = X_m(x)Y_n(y)Z_i(z)T_{mni}(t). \quad (4.15b)$$

Postępując analogicznie jak na dwóch stronach poprzednich otrzymano układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} X_m''(x) + M_m^2 X_m(x) = 0 \\ Y_n''(y) + N_n^2 Y_n(y) = 0 \\ Z_i''(z) + I_i^2 Z_i(z) = 0 \\ T_{mni}'(t) + \chi(M_m^2 + N_n^2 + I_i^2) T_{mni}(t) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Z którego wynikają funkcje własne

$$\begin{aligned} X_m(x) &= A_m \cos M_m x + B_m \sin M_m x \\ Y_n(y) &= C_n \cos N_n y + D_n \sin N_n y \\ Z_i(y) &= E_i \cos I_i z + F_i \sin I_i z \\ T_{mni}(t) &= G_{mni} \exp\left[-\chi(M_m^2 + N_n^2 + I_i^2)t\right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Na podstawie warunków brzegowych (4.9b, d, e) odrzucono sinusy, zaś z (4.9c, f, g) wyznaczono wartości własne zagadnienia. Po podstawieniu tak wybranych funkcji własnych do (4.15a) otrzymano

$$H_p(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} K_{mni} \cos\left(m\pi \frac{x}{2a}\right) \cos\left(\gamma_n \frac{y}{2b}\right) \cos\left(i\pi \frac{z}{l}\right) \cdot \exp\left\{-\chi \left[ \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \right] t\right\}. \quad (4.18)$$

gdzie  $\gamma_n$  określono wzorami (2.8a, b).

Z kolei z warunku początkowego (4.9h) wynika nieznaną współczynnik  $K_{mni}$  szeregu (4.18). Następnie podstawiając (4.7) i (4.18) do (4.4) określono poszukiwaną charakterystykę skokową układu dla modelu trójwymiarowego

$$H(x, y, z, t) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{mni}}\right) \right], \quad (4.19a)$$

gdzie

$$\tau_{mni} = \left\{ \left[ \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \right] \chi \right\}^{-1}, \quad (4.19b)$$

$v_{mni}^{(k)}(x, y, z)$  patrz (4.7b).

Zgodnie z końcowymi fragmentami paragrafu 4.1, w powyższych modelach analitycznych założono liniowe źródła ciepła (W/m) (rozdział 2.2.1). Z tej przyczyny źródłowe punkty pola są osobliwe we współrzędnych dla

**A.**  $x_k, y_k=y_l$

**B.**  $x_k, y_k=y_l, z \in \langle ul, (1-u)l \rangle$ , gdzie  $x_k$  określa wzór (2.15).

Przy numerycznym opracowaniu zależności (4.14a) i (4.19a) skorzystano z uwag zamieszczone w rozdziale 2.3.1 (za wzorem (2.12d)).

### 4.2.3. Przybliżone rozwiązanie analityczne – kryterium uśrednionej stałej czasowej

Charakterystyka (4.14a) jest potrójną sumą (nieskończoną względem indeksów  $m, n$ , oraz skończoną względem  $k$ ), zaś charakterystyka (4.19a) jest poczwórną sumą (nieskończoną względem indeksów  $m, n, i$  oraz skończoną względem  $k$ ). Ocena czasu trwania stanu niestabilnego za pomocą (4.14a) w układzie dwuwymiarowym i (4.19a) w układzie trójwymiarowym jest więc bardzo trudna. Taką ocenę umożliwia jednak znane kryterium uśrednionej stałej czasowej [46], [47], [48]

Przybliżone rozwiązanie analityczne – kryterium uśrednionej stałej czasowej

$$\text{A. } \tau(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{H(x, y, t) - H_u(x, y)}{H(x, y, t = 0) - H_u(x, y)} dt. \quad (4.20)$$

$$\text{B. } \tau(x, y, z) = \int_0^{\infty} \frac{H(x, y, z, t) - H_u(x, y, z)}{H(x, y, z, t = 0) - H_u(x, y, z)} dt. \quad (4.21)$$

A. Podstawiając (4.1f), (4.5), (4.14a) do (4.20) otrzymano uśrednioną stałą czasową w punkcie  $(x, y)$

$$\tau(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \tau_{mn}}{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y)}. \quad (4.22)$$

B. Podstawiając (4.2h), (4.7a), (4.19a) do (4.21) otrzymano uśrednioną stałą czasową w punkcie  $(x, y, z)$

$$\tau(x, y, z) = \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \tau_{mni}}{\sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z)}. \quad (4.23)$$

Zależność (4.22) i (4.23) są łatwe do komputerowego stabilizowania (po wykorzystaniu odpowiednio wzorów (4.6) i (4.7b) oraz (4.14b) i (4.19b)). Zastępczą stałą czasową całego układu (tzn. globalną) wyznaczono uśredniając stałą lokalną w  $N$  punktach

$$\text{A. } \tau_{2g} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \tau(x_r, y_r), \quad (4.24)$$

$$\text{B. } \tau_{3g} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \tau(x_r, y_r, z_r). \quad (4.25)$$

Czas trwania termicznego zaburzenia można więc z pewnym błędem oszacować jako równy  $4\tau_g$ .

A. Wprowadzenie  $\tau(x,y)$  upraszcza też wzór (4.14a) (wyrażenie w nawiasach kwadratowych można wtedy przesunąć przed symbol sumy)

$$H(x, y, t) = T_0 + \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau(x, y)}\right] \right\} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y). \quad (4.26a)$$

Podstawiając w powyższej zależności  $\tau_{2g}$  w miejsce  $\tau(x,y)$

$$\tau(x, y) \rightarrow \tau_{2g}, \quad (4.26b)$$

otrzymuje się mniej dokładne przybliżenie charakterystyki (4.14a).

B. Wprowadzenie  $\tau(x,y,z)$  upraszcza też wzór (4.19a) (wyrażenie w nawiasach kwadratowych można wtedy przesunąć przed symbol sumy)

$$H(x, y, z, t) = T_0 + \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{t}{\tau(x, y, z)}\right] \right\} \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z). \quad (4.27a)$$

Podstawiając w powyższej zależności  $\tau_{3g}$  w miejsce  $\tau(x,y,z)$

$$\tau(x, y, z) \rightarrow \tau_{3g}, \quad (4.27b)$$

otrzymuje się mniej dokładne przybliżenie charakterystyki (4.19a).

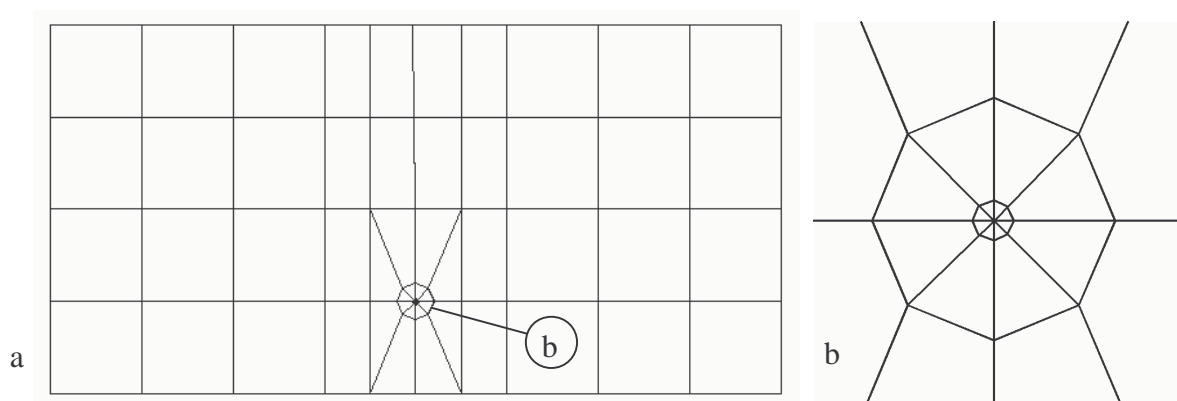
Z wzorów (4.26) i (4.27) wynika, że w danym punkcie obszaru aproksymowano dynamikę układu elementem pierwszego rzędu. Metody dokładniejszej aproksymacji podano np. w [52].

#### 4.2.4. Rozwiązanie numeryczne – metoda elementów skończonych

Zagadnienia graniczne (4.1) i (4.2) rozwiązano także metodą elementów skończonych [57], [64], wykorzystując profesjonalny program NISA II/Heat Transfer amerykańskiej firmy EMRC [61].

A. Źródła ciepła aproksymowano ośmiokątami foremnymi (rys. 4.1b), wpisanymi w poprzeczny przekrój żyły kabla o promieniu  $r$  (rys. 2.1b). Wspomniane ośmiokąty utworzono z równoramiennych elementów trójkątnych, których wierzchołki są ułożone na osi kabla. W tych warunkach funkcja występująca po prawej stronie (4.1a), przybierze następującą postać

$$g(x, y) = \begin{cases} g_0 = const & \text{w wewnętrznych ośmiokątach (rys. 4.1b),} \\ 0 & \text{w pozostałym obszarze.} \end{cases} \quad (4.28)$$



Rys. 4.1. Fragment siatki elementów skończonych: a) dyskretyzacja segmentu powtarzalnego, b) dyskretyzacja otoczenia kabla.



Moc takiego wirtualnego źródła musi być taka sama, jak moc rzeczywistego kabla i jego modelu analitycznego (rozdział 4.2.2). Na tej podstawie wyznacza się objętościową wydajność ciepła  $g_0$  we wzorze (4.28). Pozostały obszar bezźródłowy podzielono na elementy czworokątne. Powstaje w ten sposób siatka, pokazana na rys. 4.1a. Jak widać zagęszczono ją w otoczeniu źródeł pola, ze względu na duży gradient temperatury w sąsiedztwie kabla.

**B.** W przypadku trójwymiarowym:

- aproksymację układu elementami skończonymi,
- siatkę elementów skończonych (rys. 2.3),
- moc źródeł

opisano dokładnie w paragrafach 2.2.2 i 2.3.2. Zatem prawą stronę równania (4.2a) można zapisać następująco

$$g(x, y, z) = \begin{cases} g_0 = const & \text{w wewnętrznych graniastosłupach} \\ & \text{ośmiokątach (rys. 2.3b),} \\ 0 & \text{w pozostałym obszarze.} \end{cases} \quad (4.29)$$

W programie NISA II zastosowano procedurę Galerkiną [7], [57], [61]. Dyskretyzuje ona zagadnienie graniczne (4.1) lub (4.2) względem zmiennych przestrzennych. W wyniku tego (4.1) lub (4.2) zostało sprowadzone do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu względem czasu

$$[C] \left\{ \dot{H} \right\} + [\lambda] \{H\} = \{G\}. \quad (4.30)$$

Należy podkreślić, że  $[\lambda]$  zawiera składowe pochodzące od konwekcyjnego warunku brzegowego (4.1e) lub (4.2g).

W programie NISA II są dostępne cztery metody [61] różnicowej dyskretyzacji układu (4.30) względem czasu. Z uwagi na stabilność rozwiązania i słabe ograniczenie kroku czasu, wybrano metodę wstecznego ilorazu różnicowego [57], [64]. W jej wyniku (w każdym kroku czasu) otrzymuje się układ równań algebraicznych

względem temperatury we wszystkich węzłach. Do rozwiązania wspomnianego układu, program wykorzystuje metodę Newtona-Raphsona [60], [61]. W ten sposób wyznaczono poszukiwany wektor  $\{H\}$ , co zakończyło procedurę.

#### 4.2.5. Przykłady obliczeniowe

Zależności

A. (4.14), (4.26) oraz wektor  $\{H\}$  (rozdział 4.2.4)

B. (4.19), (4.27) oraz wektor  $\{H\}$  (rozdział 4.2.4)

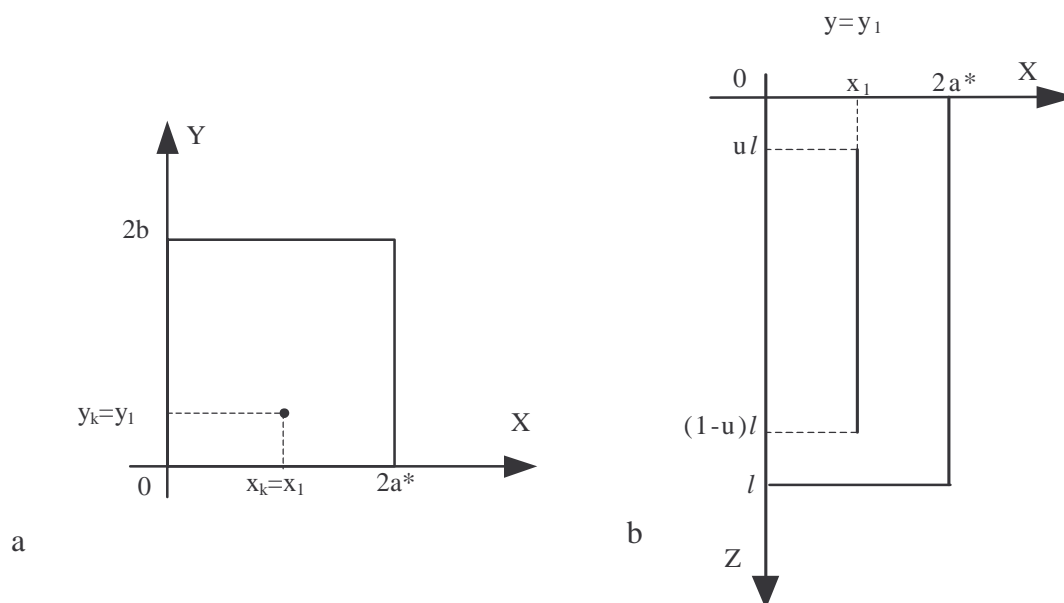
są poszukiwanymi odpowiedziami skokowymi badanego układu. Ponieważ kabel jest położony symetrycznie, przebiegi można przedstawić w tzw. segmencie powtarzalnym (rozdział 2.4.1). Jest nim zawężony obszar obliczeniowy, pokazany

A. na rys. 4.2a,

B. na rys. 4.2b.

W zależnościach (4.14), (4.19), (4.26), (4.27), (4.30) należy więc podstawić  $K=1$  oraz  $a=a^*$ . Zestaw danych (2.17) zmodyfikowano i uzupełniono następująco:

$$\begin{aligned} c &= 840 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}, & \delta &= 2000 \text{ kg/m}^3, & g_0 &= 2.1213 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3, \\ 2a^* &= 0.12 \text{ m}, & x_k &= x_l = 0.06 \text{ m}, & y_k &= y_l = 0.015 \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.31)$$



Rys. 4.2. Przekrój powtarzalnego segmentu grzejnika: a) model dwuwymiarowy, b) model trójwymiarowy.

Zbieżność szeregów

**A.** (4.14), (4.26)

**B.** (4.19), (4.27)

kontrolowano w podany wcześniej sposób (rozdział 2.3.1, za wzorem (2.12d)).

Największej liczby wyrazów wymagało sumowanie szeregu

**A.** (4.14)

**B.** (4.19)

w punkcie o najmniejszym odchyleniu od płaszczyzny osobliwej

**A.**  $x=0.06\pm 5\cdot 10^{-4}$  m,  $y=0.06$  m,

**B.**  $x=0.06\pm 5\cdot 10^{-4}$  m,  $y=0.06$  m,  $z=0.25$  m.

Dalsze informacje odnoszą się do tego ekstremalnego położenia. W związku z faktem, iż składową ustaloną rozkładu

**A.** (4.14) obliczono wcześniej w rozdziale 2.5,

**B.** (4.19) obliczono wcześniej w rozdziale 2.4.1,

obecnie wyznaczono tylko składową przejściową.

Ponieważ w zależnościach (4.14a) i (4.19a) występuje funkcja wykładnicza, nie znalazł zastosowania wzór (2.11). Dla małych czasów składowe przejściowe charakterystyk (4.14a) i (4.19a) są wolno zbieżne. Wraz z czasem ich zbieżność szybko wzrasta (patrz tabela 4.1). Stosunkowo dobrą zbieżność wykazują natomiast liczniki zależności

**A.** (4.22), co wynika ze wzoru (4.14b),

**B.** (4.23), co wynika ze wzoru (4.19b).

Globalną stałą czasową

**A.** (4.24) wyznaczono uśredniając 90 stałych lokalnych,

**B.** (4.25) wyznaczono uśredniając 198 stałych lokalnych.

Wyniki obliczeń przedstawiono na

**A.** rys. 4.3–4.5,

**B.** rys. 4.6–4.8.

Rozkład uśrednionej stałej czasowej ilustruje

**A.** rys. 4.3,

**B.** rys. 4.6.

Tabela 4.1. Wybrane informacje o rozwiązaniu analitycznym i numerycznym.

Informacja	A. model dwuwymiarowy	B. model trójwymiarowy
Maksymalna liczba wyrazów dla składowej przejściowej ( $t=0$ s)	(4.14) 274x317264	(4.19) 309x1564x4756
Liczba wyrazów dla składowej przejściowej ( $t=10800$ s)	(4.14) 11x11	(4.19) 11x11x11
Maksymalna liczba wyrazów licznika zależności	(4.22) 33x604	(4.23) 33x604x4486
Ilość elementów skończonych w segmencie powtarzalnym	60	6000
Ilość węzłów w segmencie powtarzalnym	71	7171

Jak widać, dla  $z=\text{const}$   $4\tau(y=0.015 \text{ m}) < 4\tau(y=0.06 \text{ m})$ . Czas trwania stanu nieustalonego jest więc krótszy w poziomej płaszczyźnie kabla niż na powierzchni podłogi. Z rys. 4.6 wynika, że temperatura narasta również znacznie szybciej w centralnej strefie z kablem niż w obszarze krawędziowym (dla  $y=\text{const}$   $4\tau(z=1.25 \text{ m}) < 4\tau(z=0 \text{ m})$ ). Dyfuzja ciepła jest bowiem szybsza w sąsiedztwie źródeł energii niż w bardziej odległych punktach. Ilustrują to także linie czarne i czerwone

**A.** na rys. 4.4 i 4.5,

**B.** na rys. 4.7 i 4.8,

otrzymane za pomocą modeli o parametrach rozłożonych (wersja analityczna i numeryczna).

**A.** Na rys. 4.5a

**B.** Na rys. 4.8a

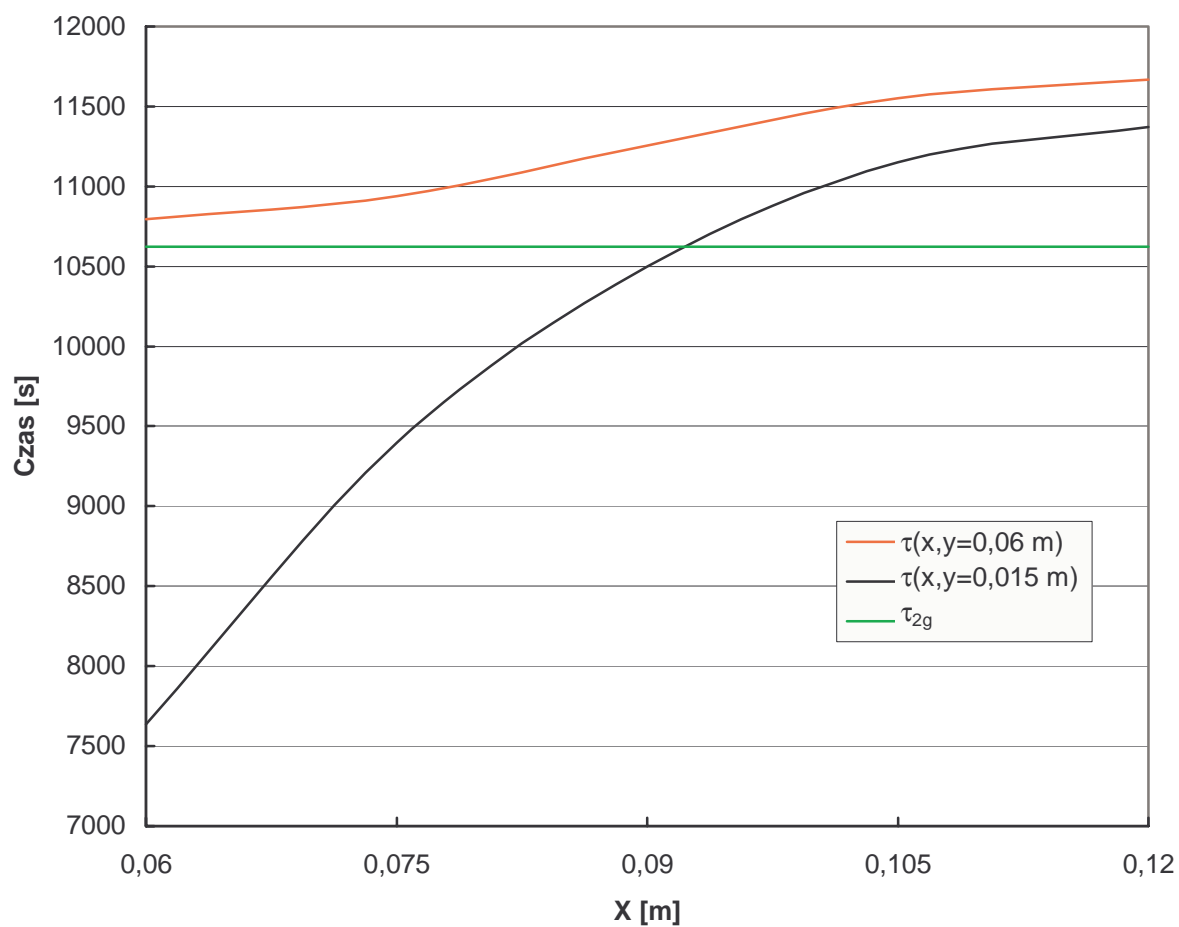
obserwuje się szybkie narastanie temperatury na powierzchni kabla, zaś

**A.** na rys. 4.4 i 4.5b

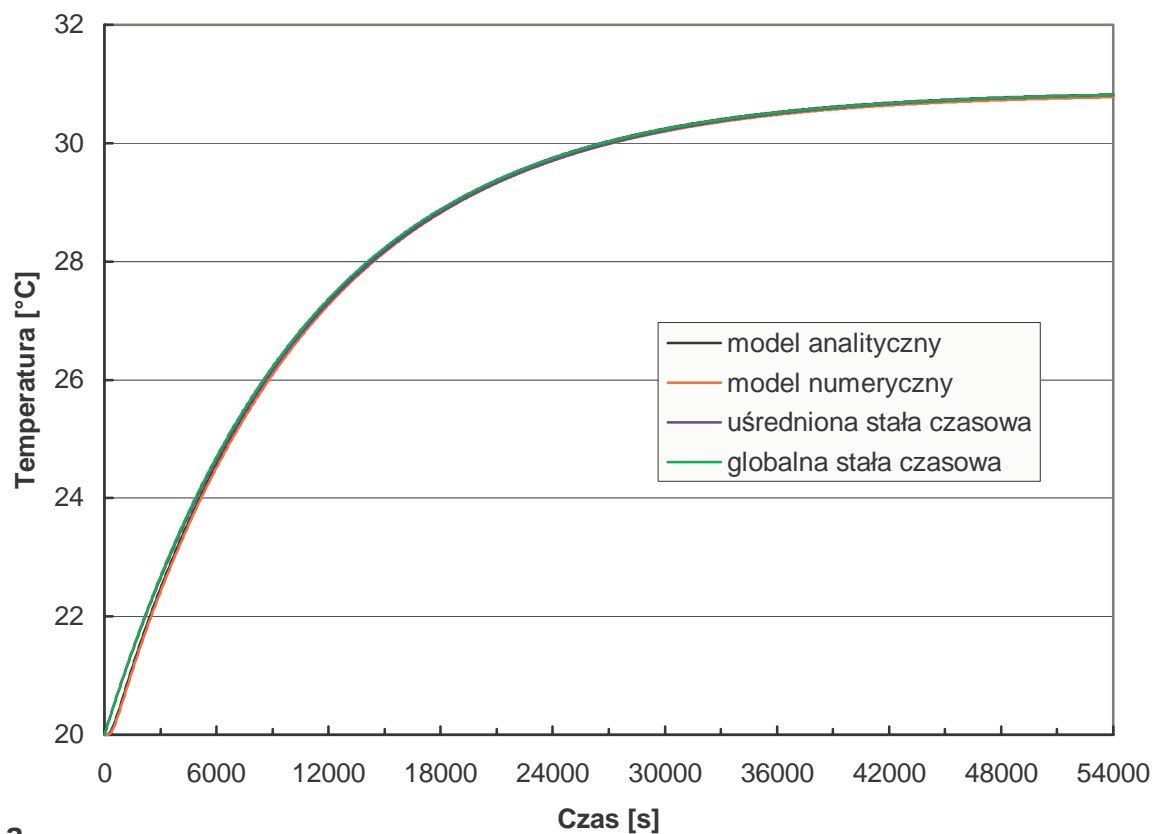
**B.** na rys. 4.7 i 4.8b

jest wyraźnie widoczne opóźnienie przebiegu (dotyczy początku stanu nieustalonego).

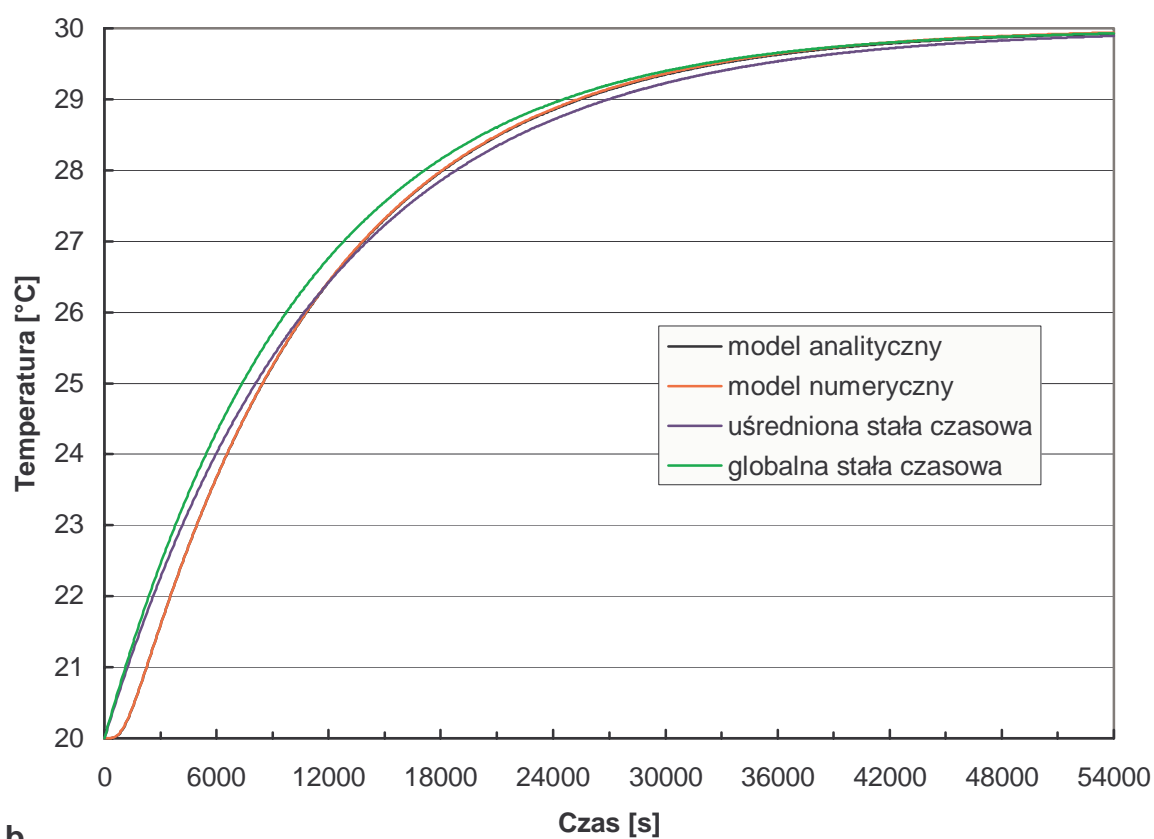
Przedstawione wyniki mają więc dobrą interpretację fizyczną.



Rys. 4.3. Rozkład uśrednionej stałej czasowej na powierzchni podłogi  $\tau(x, y=0,06 \text{ m})$  i na wysokości kabla  $\tau(x, y=0,015 \text{ m})$  oraz stała globalna ( $\tau_{2g}=10623,88 \text{ s}$ ) w układzie dwuwymiarowym.

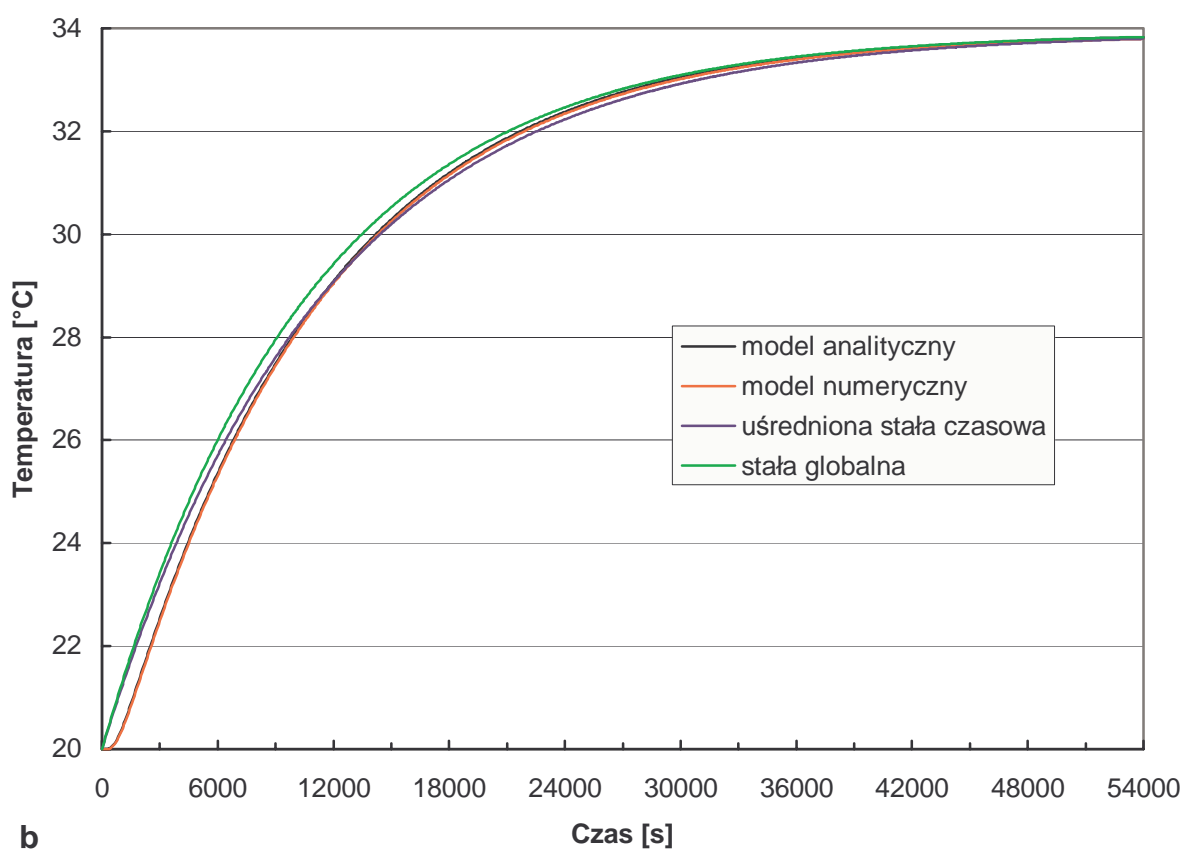
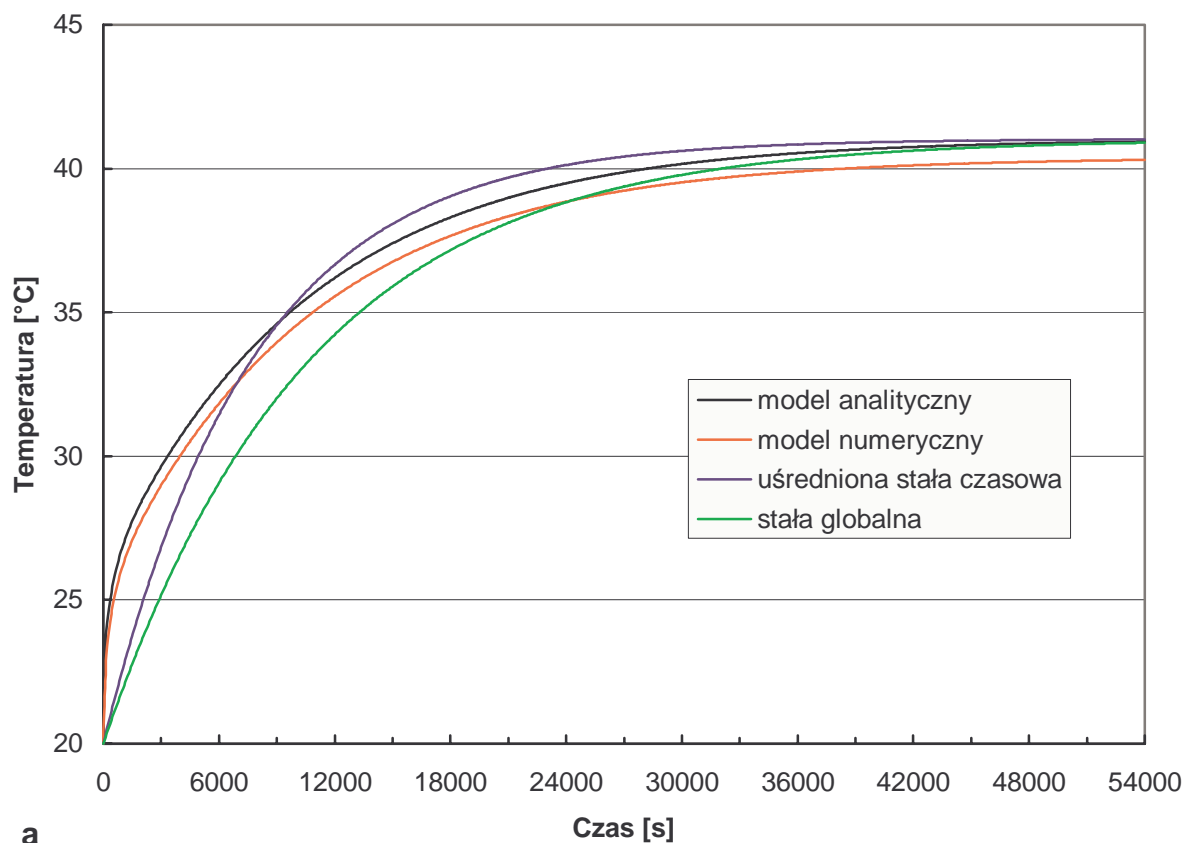


a

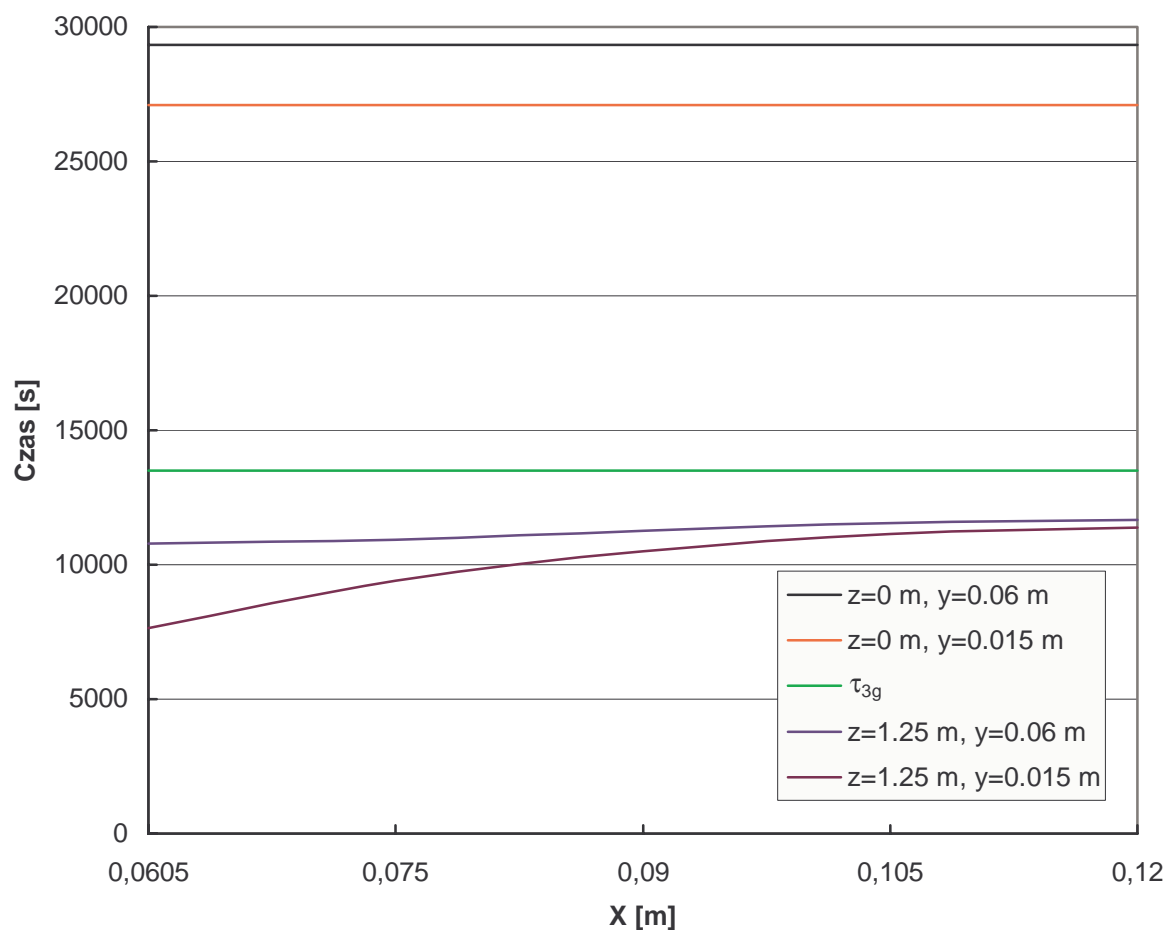


b

Rys. 4.4. Skokowa odpowiedź układu na powierzchni podłogi  $y=2b=0.06$  m w układzie dwuwymiarowym: a) dla  $x=x_1=0.06$  m, b) dla  $x=2a^*=0.12$  m.

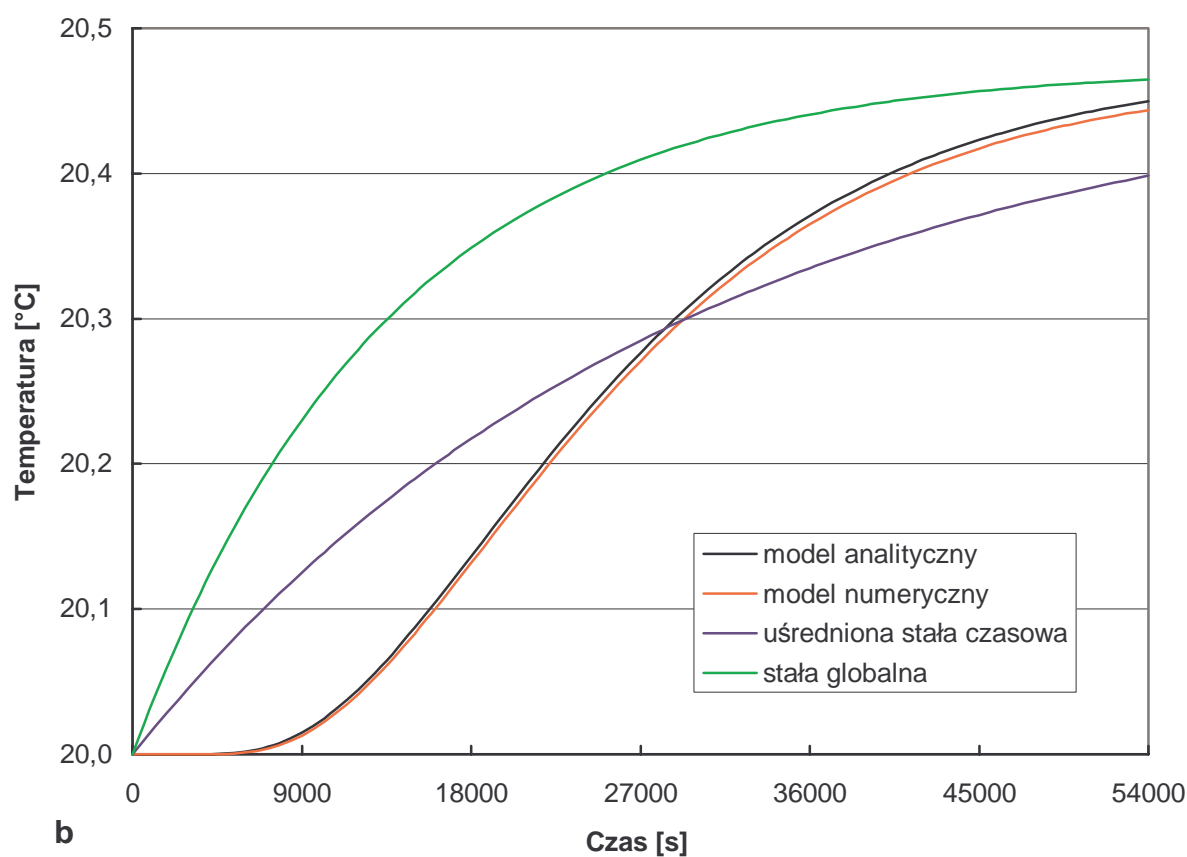
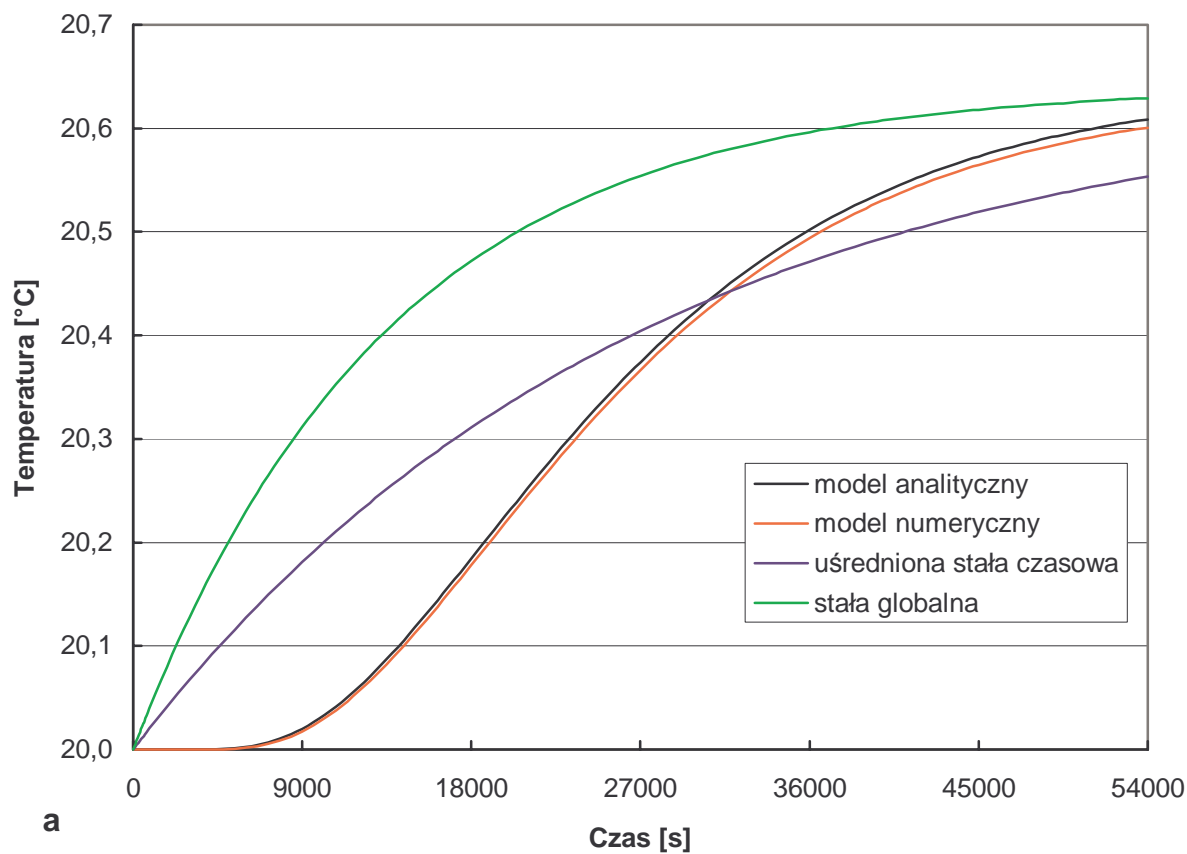


Rys. 4.5. Skokowa odpowiedź układu na wysokości kabla  $y=y_1=0.015$  m w układzie dwuwymiarowym: a) dla  $x=x_1=0.06$  m, b) dla  $x=2a^*=0.12$  m.

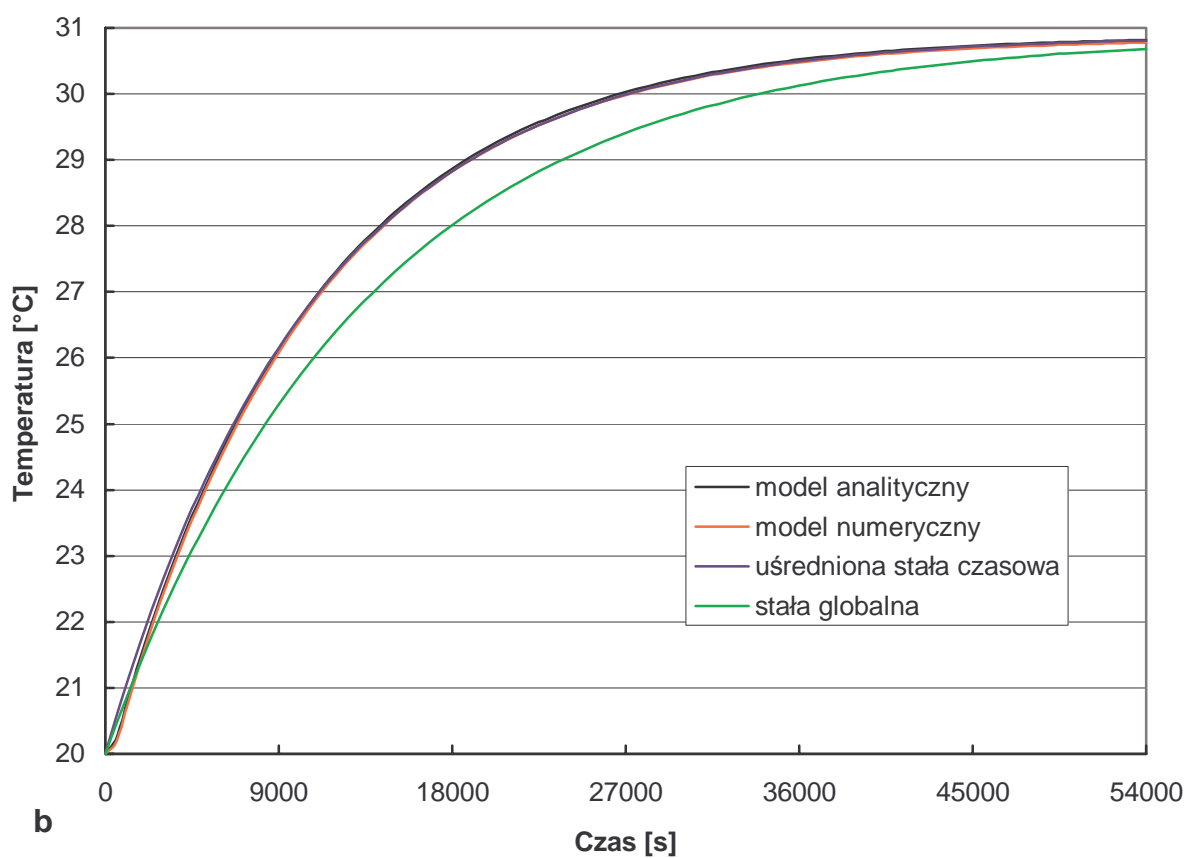
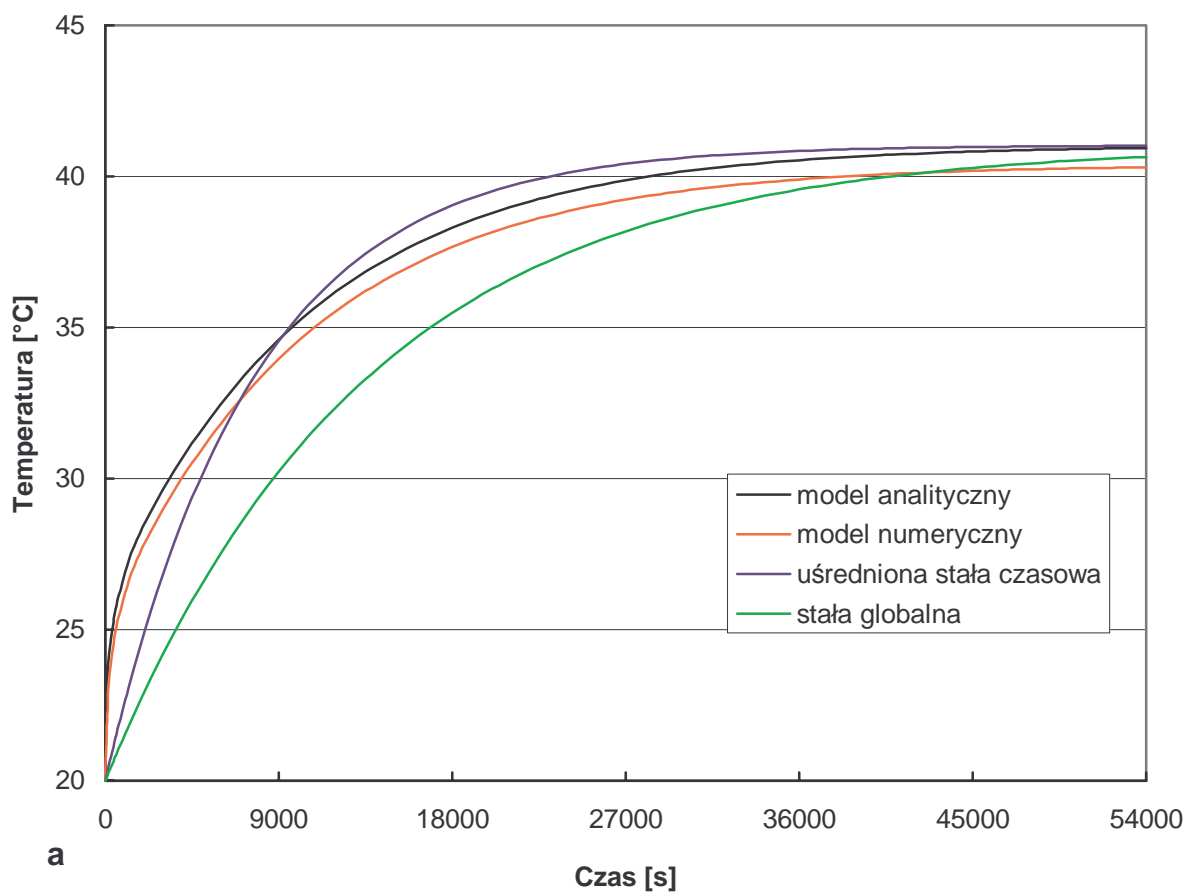


Rys. 4.6. Rozkład uśrednionej stałej czasowej w wybranych przekrojach i globalna stała czasowa ( $\tau_{3g}=13502.86 \text{ s}$ ) w układzie trójwymiarowym.





Rys. 4.7. Skokowa odpowiedź układu trójwymiarowego  $x=0.12$  m,  $z=0$  m: a) na wysokości kabła grzewczego  $y=0.015$  m, b) na powierzchni podłogi  $y=0.06$  m.



Rys. 4.8. Skokowa odpowiedź układu trójwymiarowego  $x=0.06$  m,  $z=1.25$  m: a) na wysokości kabła grzewczego  $y=0.015$  m, b) na powierzchni podłogi  $y=0.06$  m.

#### 4.2.6. Uwagi końcowe

Z porównania metod wyznaczania odpowiedzi skokowej wynikają następujące wnioski:

1) Aproksymacja globalną stałą czasową jest najmniej dokładna. Przekonuje o tym przebieg zielonej linii względem czarnej i czerwonej na

A. rys. 4.4b i 4.5,

B. rys. 4.7 i 4.8.

Jest to np. wyraźnie widoczne w otoczeniu kabla na

A. rys. 4.5a,

B. rys. 4.8a,

gdzie początkowa szybkość wnikania ciepła jest znacznie większa.

2) Aproksymacja uśrednioną stałą czasową jest najmniej dokładna na początku stanu nieustalonego. Wynika to z położenia niebieskiej linii względem czarnej i czerwonej na

A. rys. 4.4b i 4.5,

B. rys. 4.7 i 4.8a.

Element pierwszego rzędu nie może bowiem precyzyjnie modelować typowych zjawisk polowych (pozornego czasu martwego lub intensywnej dyfuzji). W środkowej części powierzchni segmentu występuje najmniejszy błąd aproksymacji uśrednioną stałą czasową, co ilustruje

A. rys. 4.4a,

B. rys. 4.8b.

3) Różnica pomiędzy rozwiązaniem numerycznym i analitycznym jest największa w bezpośrednim otoczeniu kabla. Wskazują na to czerwone i czarne linie na

A. rys. 4.5a,

B. rys. 4.8a.

Wynika to z przyjęcia odmiennych modeli żyły kabla: jako liniowego (rys. 2.1a) i objętościowego (rys. 2.1b) źródła ciepła.

Z rys. 4.4a i rys. 4.8b wynika, że w stanie ustalonym temperatura powierzchni podłogi w obszarze nad źródłem ciepła przekroczy  $30^{\circ}\text{C}$ . Z drugiej strony wiadomo, że

ciepłny komfort jest odczuwalny w temperaturze ok.  $26^{\circ}\text{C}$  (polskie normy PN-85/N-08013). Odpowiedź skokowa nie może być zatem normalnym stanem pracy podłogi. Służy jedynie do określenia jej dynamicznych właściwości. Z tego powodu w dalszej części rozdziału będzie analizowany układ sterowany regulatorem.

Niniejszy rozdział jest przykładem weryfikacji metody elementów skończonych [64] za pomocą metody superpozycji stanów (rozdział 4.2.2). Otrzymanie tego samego wyniku (rys. 4.4, 4.5, 4.7, 4.8) za pomocą całkowicie odmiennych metod, potwierdza poprawność rozwiązania parabolicznego zagadnienia granicznego (4.1), (4.2). Udowadnia to częściowo tezę nr 5 (str. 12).

### 4.3. Symulacja układu sterowanego regulatorem

#### 4.3.1. Wprowadzenie

Z rozdziału 4.2.6 wynika, że cieplny komfort pomieszczenia może zapewnić odpowiednia regulacja grzejnika. W złożonych układach automatycznego sterowania uwzględnia się [1], [51]: a) temperaturę powierzchni podłogi, b) temperaturę powietrza wewnątrz i na zewnątrz pomieszczenia, c) indywidualny program potrzeb użytkownika. W niniejszym rozdziale rozpatrzono regulację pierwszego z wyżej wymienionych czynników. Przyjęto, że czujnik pomiaru temperatury jest zainstalowany w punkcie o współrzędnych

A.  $(x^*, y^*)$ .

B.  $(x^*, y^*, z^*)$ .

Za pomocą regulatora dwupołożeniowego utrzymuje się temperaturę tego punktu w pobliżu wartości zadanej. Gdy zostanie ona przekroczona o połowę histerezy regulatora, nastąpi wyłączenie grzejnika. Jeżeli zaś temperatura we wspomnianym punkcie spadnie o połowę histerezy poniżej wartości zadanej, zasilanie ponownie zostanie włączone. Celem niniejszego rozdziału jest więc wyznaczenie nieustalonego pola temperatury dwu- i trójwymiarowego układu przy naprzemiennym włączaniu i wyłączaniu urządzenia.

W powyższy sposób steruje się pracą grzejnika bezpośredniego [1]. Należy podkreślić, że w tym przypadku nie są z góry znane chwile włączenia i wyłączenia zasilania (za wyjątkiem pierwszego włączenia  $t=0$ ). Jest to istotna różnica w porównaniu z zasilaniem grzejnika akumulacyjnego [27]. W [27] czas pracy układu był bowiem zadany z góry. Wynikało to z niższych cen energii elektrycznej w ściśle określonych porach doby (z tzw. taryfy nocnej). Oprócz tego, w [27] badano układ dwuwymiarowy metodą bilansów elementarnych. W niniejszej pracy stosowano cztery inne metody analizy pola w układzie dwu- i trójwymiarowym.

### 4.3.2. Bezpośrednie rozwiązanie analityczne

Przed pierwszym wyłączeniem zasilania w chwili  $t=t_1$  (tzn. podczas rozruchu ogrzewania) rozkład temperatury jest odpowiednią skokową

$$\text{A. } T(x, y, t) = H(x, y, t) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_1, \quad (4.32)$$

gdzie  $H(x, y, t)$  określa (4.14).

$$\text{B. } T(x, y, z, t) = H(x, y, z, t) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq t_1, \quad (4.33)$$

gdzie  $H(x, y, z, t)$  określa (4.19).

Czas  $t_1$  określa się z warunku

$$\text{A. } T(x = x^*, y = y^*, t = t_1) = H(x^*, y^*, t_1) = T_H, \quad (4.34)$$

$$\text{B. } T(x = x^*, y = y^*, z = z^*, t = t_1) = H(x^*, y^*, z^*, t_1) = T_H, \quad (4.35)$$

gdzie  $T_H$  oznacza temperaturę wyłączenia. Ponieważ charakterystyki skokowe są monotoniczne względem  $t$ , w celu wyznaczenia  $t_1$  należy zmniejszać krok czasowy w otoczeniu  $T_H$  podczas tablicowania (4.32), (4.33).

W chwili  $t=t_1$  wprowadzono nową oś czasu  $t'=0$ . Dla  $0 \leq t' \leq t_2$  źródła ciepła nie pracują i równanie przewodnictwa staje się jednorodnie analogicznie do

$$\text{A. (4.8a).}$$

$$\text{B. (4.9a).}$$

Zamiast rozpatrywać odpowiadający temu przypadkowi rozkład

$$\text{A. } T_1(x, y, t') \text{ z warunkiem początkowym}$$

$$T_1(x, y, t'=0) = H(x, y, t = t_1), \quad (4.36)$$

$$\text{B. } T_1(x, y, z, t') \text{ z warunkiem początkowym}$$

$$T_1(x, y, z, t'=0) = H(x, y, z, t = t_1), \quad (4.37)$$

wygodnie jest wprowadzić przyrosty

$$\text{A. } v_1(x, y, t') = T_1(x, y, t') - T_0, \quad (4.38)$$

$$\text{B. } v_1(x, y, z, t') = T_1(x, y, z, t') - T_0. \quad (4.39)$$

A. W zależnościach (4.8a-e) wystarczy wówczas zamienić

$$H_p(x, y, t) \rightarrow v_1(x, y, t'), \quad t \rightarrow t' \quad (4.40a)$$

gdzie "a→b" oznacza "a zamienić na b". Na podstawie (4.38), (4.36) i (4.14) zagadnienie brzegowe (4.40a) uzupełniono o warunek początkowy

$$v_1(x, y, t'=0) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mn}}\right) \right], \quad (4.40b)$$

gdzie  $v_{mn}^{(k)}(x, y)$  i  $\tau_{mn}$  odpowiednio określają zależności (4.6), (4.14b).

B. W zależnościach (4.9a-g) wystarczy wówczas zamienić

$$H_p(x, y, z, t) \rightarrow v_1(x, y, z, t'), \quad t \rightarrow t'. \quad (4.41a)$$

Na podstawie (4.39), (4.37) i (4.19) zagadnienie brzegowe (4.41a) uzupełniono o warunek początkowy

$$v_1(x, y, z, t'=0) = \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mni}}\right) \right], \quad (4.41b)$$

gdzie  $v_{mni}^{(k)}(x, y, z)$  i  $\tau_{mni}$  odpowiednio określają zależności (4.7b), (4.19b).

Sposób rozwiązania zagadnień granicznych (4.40), (4.41) przedstawiono w rozdziale 4.2.2 bezpośrednio za wzorem (4.9h). Otrzymany stąd przyrost podstawiono do

A. (4.38),

**B.** (4.39).

Następnie powrócono do starej osi czasu  $t'=t-t_1$ . Prowadzi to do poszukiwanego rozkładu temperatury w drugim etapie pracy układu dla  $t_1 \leq t \leq t_1+t_2$

**A.**

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= T_1(x, y, t - t_1) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mn}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_{mn}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

**B.**

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= T_1(x, y, z, t - t_1) = \\ &= T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mni}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t-t_1}{\tau_{mni}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Czas  $t_2$  wyznaczono z warunku

$$\mathbf{A.} \quad T(x = x^*, y = y^*, t = t_1 + t_2) = T_1(x^*, y^*, t_2) = T_L, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{B.} \quad T(x = x^*, y = y^*, z = z^*, t = t_1 + t_2) = T_1(x^*, y^*, z^*, t_2) = T_L, \quad (4.45)$$

gdzie wykorzystano monotoniczność  $T_1$  względem  $t'$  ( $T_L$  oznacza temperaturę włączenia).

W chwili  $t=t_1+t_2$  regulator ponownie włączył zasilanie. Wprowadzono wówczas następną oś czasu  $t''=0$ . Dla  $0 \leq t'' \leq t_3$  ( $t_3$  – czas powtórnego nagrzewania) dokonano następujących podstawień

**A.** w (4.1a-e)

$$H(x, y, t) \rightarrow T_2(x, y, t'') \quad , \quad t \rightarrow t''. \quad (4.46a)$$

W powyższym zagadnieniu należy jeszcze sformułować nierównomierny warunek początkowy



$$T_2(x, y, t'' = 0) = T_1(x, y, t' = t_2), \quad (4.46b)$$

gdzie  $T_1(x, y, t' = t - t_1)$  wynika z (4.42).

**B.** w (4.2a-g)

$$H(x, y, z, t) \rightarrow T_2(x, y, z, t'') \quad , \quad t \rightarrow t'' . \quad (4.47a)$$

W powyższym zagadnieniu należy jeszcze sformułować nierównomierny warunek początkowy

$$T_2(x, y, z, t'' = 0) = T_1(x, y, z, t' = t_2), \quad (4.47b)$$

gdzie  $T_1(x, y, z, t' = t - t_1)$  wynika z (4.43).

Zagadnienie graniczne

**A.** (4.46a, b)

**B.** (4.47a, b)

rozwiązano metodą superpozycji stanów (rozdział 4.2.2). Składową ustaloną określono

**A.** z (4.5)

$$T_u(x, y) = H_u(x, y). \quad (4.48)$$

**B.** z (4.7a)

$$T_u(x, y, z) = H_u(x, y, z). \quad (4.49)$$

Równanie różniczkowe i warunki brzegowe składowej przejściowej otrzymano po dokonaniu następujących zamian

**A.** w (4.8a-e)

$$H_p(x, y, t) \rightarrow T_{2p}(x, y, t'') \quad , \quad t \rightarrow t'' . \quad (4.50a)$$

Początkową wartość składowej przejściowej wyznaczono na podstawie zależności

$$\begin{aligned} T_{2p}(x, y, t''=0) &= T_2(x, y, t''=0) - T_2(x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mn}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_{mn}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.50b)$$

gdzie wykorzystano (4.46b), (4.42) i (4.48).

**B.** w (4.9a-g)

$$H_p(x, y, z, t) \rightarrow T_{2p}(x, y, z, t'') \quad , \quad t \rightarrow t'' \quad (4.51a)$$

Początkową wartość składowej przejściowej wyznaczono na podstawie zależności

$$\begin{aligned} T_{2p}(x, y, z, t''=0) &= T_2(x, y, z, t''=0) - T_2(x, y, z) = \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mni}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_{mni}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.51b)$$

gdzie wykorzystano (4.47b), (4.43) i (4.49)

Zagadnienie (4.50a, b), (4.51a, b) rozwiązując w znany sposób (rozdział 4.2.2, za wzorem (4.9h)). Otrzymane wyniki odpowiednio superponowano z (4.48) lub z (4.49).

Powracając do starej osi czasu  $t''=t-t_1-t_2$ , ostatecznie wyznaczono dla  $t_1+t_2 \leq t \leq t_1+t_2+t_3$

**A.**

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= T_2(x, y, t-t_1-t_2) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}^{(k)}(x, y) \cdot \\ &\cdot \left\{ \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mn}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_{mn}}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t-t_1-t_2}{\tau_{mn}}\right) + 1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

**B.**

$$T(x, y, z, t) = T_2(x, y, z, t - t_1 - t_2) = T_0 + \sum_{k=1}^K \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{mni}^{(k)}(x, y, z) \cdot \left\{ \left[ \left( 1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\tau_{mni}}\right) \right) \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_{mni}}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t - t_1 - t_2}{\tau_{mni}}\right) + 1 \right\}. \quad (4.53)$$

Czas  $t_3$  wyznacza się analogicznie do

**A.** (4.34), (4.44)

$$T(x = x^*, y = y^*, t = t_1 + t_2 + t_3) = T_2(x^*, y^*, t_3) = T_H. \quad (4.54)$$

**B.** (4.35), (4.45)

$$T(x = x^*, y = y^*, z = z^*, t = t_1 + t_2 + t_3) = T_2(x^*, y^*, z^*, t_3) = T_H. \quad (4.55)$$

Z (4.34) i (4.54) oraz z (4.35) i (4.55) wynika, że po upływie czasu  $t_2 + t_3$  temperatura czujnika powróci do wartości  $T_H$ . Wyznaczono zatem przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury w pełnym cyklu zasilania układu. Z uwagi na osobliwość punktów źródłowych, przy numerycznym tablicowaniu zależności (4.32), (4.42), (4.52) (w przypadku dwuwymiarowym) i (4.33), (4.43), (4.53) (w przypadku trójwymiarowym) skorzystano z uwag zamieszczonych w rozdziale 2.3.1 (za wzorem (2.12d)).

### 4.3.3. Rozwiązanie numeryczne

W niniejszym rozdziale nie będzie zmieniana oś czasu. Kolejne włączanie i wyłączenie zasilania należy więc modelować źródłem ciepła o wydajności zależnej od czasu. Z tej przyczyny we wzorach

**A.** (4.1a-f) zmieniono

$$H(x, y, t) \rightarrow T(x, y, t) , \quad g(x, y) \rightarrow g(x, y, t). \quad (4.56), (4.57)$$

**B.** (4.2a-h) zmieniono

$$H(x, y, z, t) \rightarrow T(x, y, z, t) , \quad g(x, y, z) \rightarrow g(x, y, z, t) . \quad (4.58), (4.59)$$

Do rozwiązania (4.56) i (4.57) oraz (4.58) i (4.59) zastosowano program NISA II/Heat Transfer (ten sam, co przy odpowiedzi skokowej). Podział układu na elementy skończone oraz metodę dyskretyzacji i rozwiązania (4.56), (4.57) oraz (4.58), (4.59) podano w rozdziale 4.2.4. Ponadto w programie istnieje standardowa funkcja źródła ciepła [61]. Umożliwia ona wieloodcinkową aproksymację czasowego przebiegu wydajności mocy. W analizowanym przypadku zmianę wydajności przedstawiają sygnały prostokątne (typu on – off). Nie można jednak zadać dwóch różnych wartości mocy w tej samej chwili czasu. Z tej przyczyny założono sygnały trapezowe o stromych zboczach. Czas narastania i opadania tych impulsów jest bardzo mały (3 sekundy) w stosunku do stałej czasowej (**A.**  $\tau_{2g}=10623.88$  s, **B.**  $\tau_{3g}=13502.86$  s). Wnoszony błąd nie ma więc żadnego znaczenia i w dalszych rozważaniach trapezy będą traktowane jak prostokąty.

Wyznaczenie nieustalonego pola temperatury wymaga trzech etapów obliczeń, rozpoczynających się zawsze w chwili  $t=0$ . W kolejnych krokach następująco definiowano źródło

**A.**

$$g(x, y, t) = g(x, y) \cdot \begin{cases} \mathbf{1}(t) & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 \\ [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_1)] & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 + t_2 \\ [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_1) + \mathbf{1}(t - t_1 - t_2)] & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3 , \end{cases} \quad (4.60)$$

gdzie  $g(x,y)$  określono wzorem (4.28),

**B.**

$$g(x, y, z, t) = g(x, y, z) \cdot \begin{cases} \mathbf{1}(t) & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 \\ [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_1)] & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 + t_2 \\ [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_1) + \mathbf{1}(t - t_1 - t_2)] & \text{dla } 0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3, \end{cases} \quad (4.61)$$

gdzie  $g(x, y, z)$  określono wzorem (4.29).

Następnie numerycznie określano termiczną odpowiedź układu w odpowiednim przedziale czasu. Chwile  $t_1, t_2, t_3$  wyznaczano po zakończeniu odpowiedniego etapu obliczeń z warunków

**A.** (4.34), (4.44), (4.54),

**B.** (4.35), (4.45), (4.55).

Zmniejszano przy tym krok czasu odpowiednio w otoczeniu  $T_H$  lub  $T_L$ . Tym sposobem w chwilach zmiany mocy kabla, program automatycznie zamieniał niejednorodne równanie dyfuzji

**A.** (4.56), (4.57)

**B.** (4.58), (4.59)

na jednorodne (i odwrotnie) oraz określał warunki początkowe dla następnego etapu obliczeń.

Wyznaczenie

**A.**  $T(x, y, t)$

**B.**  $T(x, y, z, t)$

dla  $0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3$  kończy procedurę w zakresie pełnego cyklu zasilania.

#### 4.3.4. Przybliżone rozwiązanie analityczne - kryterium uśrednionej stałej czasowej

Zależności

**A.** (4.32), (4.42), (4.52)

**B.** (4.33), (4.43), (4.53)

są dosyć złożone. Zawierają one nieskończenie wiele składowych, z których każda zanika z inną stałą czasową  $\tau_{mn}$ ,  $\tau_{mni}$ . Wspomniane wzory można zastąpić prostszymi wyrażeniami. W tym celu stosuje się kryterium uśrednionej stałej czasowej (rozdział 4.2.3). Zgodnie z nim,

**A.** w (4.32), (4.42), (4.52) należy podstawić

$$\tau_{mn} \rightarrow \tau(x, y) \quad (4.62a)$$

gdzie  $\tau(x, y)$  określa (4.22). W wyniku podstawiania (4.62a), przed znak potrójnej sumy przesunie się wyrażenie w nawiasach sześciennych (dotyczy (4.52)) lub w kwadratowych (dotyczy (4.42) oraz (4.32)). Dalsze uproszczenie uzyskano po podstawieniu

$$\tau(x, y) \rightarrow \tau_{2g}, \quad (4.62b)$$

gdzie  $\tau_{2g}$  określa (4.24).

**B.** w (4.33), (4.43), (4.53) należy podstawić

$$\tau_{mni} \rightarrow \tau(x, y, z), \quad (4.63a)$$

gdzie  $\tau(x, y, z)$  określa (4.23). W wyniku podstawiania (4.63a), przed znak poczwórnej sumy przesunie się wyrażenie w nawiasach sześciennych (dotyczy (4.53)) lub w kwadratowych (dotyczy (4.43) oraz (4.33)). Dalsze uproszczenie uzyskano po podstawieniu

$$\tau(x, y, z) \rightarrow \tau_{3g}, \quad (4.63b)$$

gdzie  $\tau_{3g}$  określa (4.25).

W dyskutowanej metodzie chwile przełączania zasilania wyznacza się również z warunków

A. (4.34), (4.44), (4.54),

B. (4.35), (4.45), (4.55).

Podstawienia

A. (4.62a, b)

B. (4.63a, b)

zamieniają w danym punkcie przestrzeni rozłożone parametry układu na parametry skupione. Jest to przyczyną błędów wnoszonych przez omówioną metodę.

#### 4.3.5. Pośrednie rozwiązanie analityczne – superpozycja odpowiedzi skokowych

Wykorzystując jedną z powyższych metod bezpośrednich (rozdziały 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4), można na podstawie

A. (4.34), (4.44), (4.54),

B. (4.35), (4.45), (4.55)

obliczyć chwile pierwszego ( $t_1$ ) i drugiego ( $t_1+t_2+t_3$ ) wyłączenia oraz powtórnego włączenia ( $t_1+t_2$ ). Z liniowości układu (rozdział 2.2) oraz z dolnego wiersza wzoru

A. (4.60)

B. (4.61)

wynika wówczas poszukiwane rozwiązanie

A.

$$T(x, y, t) = H(x, y, t)\mathbf{1}(t) - H(x, y, t - t_1)\mathbf{1}(t - t_1) + H(x, y, t - t_1 - t_2)\mathbf{1}(t - t_1 - t_2) \quad (4.64)$$

dla  $0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3$ .

B.

$$T(x, y, z, t) = H(x, y, z, t)\mathbf{1}(t) - H(x, y, z, t - t_1)\mathbf{1}(t - t_1) + H(x, y, z, t - t_1 - t_2)\mathbf{1}(t - t_1 - t_2) \quad (4.65)$$

dla  $0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3$ .

Wzory (4.64) oraz (4.65) są superpozycją skokowych odpowiedzi (rozdział 4.2) grzejnika. Po wcześniejszym wyznaczeniu  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , zależność (4.64) oraz (4.65) są bardzo użyteczne w analizie pracy układu.

#### 4.3.6. Przykłady obliczeniowe

Zależności i procedury przedstawione w rozdziałach 4.3.2–4.3.5, pozwalają wyznaczyć przestrzenno–czasowy rozkład temperatury w układzie. Obliczenia przeprowadzono dla powtarzalnego segmentu (**A.** rys. 4.2a, **B.** rys. 4.2b). Do symulacji przyjęto zestaw danych (2.17) i (4.31), który uzupełniono następująco:  $T_L=25.5^{\circ}\text{C}$ ,  $T_H=26.5^{\circ}\text{C}$   $x^*=0.09\text{m}$ ,  $y^*=0.06\text{m}$ ,  $z^*=0.5\text{ m}$ . Położenie czujnika regulatora wybrano

- A.** w punkcie  $(x^*,y^*)$ , ponieważ jego temperatura jest równa średniej temperaturze powierzchni podłogi (płaszczyzna  $x^*=0.09\text{ m}$  znajduje się w równej odległości od najcieplejszego i najchłodniejszego przekroju badanego segmentu, tzn. w środku pomiędzy kablem  $x=x_I=0.06\text{ m}$  i maksymalnym oddaleniem od niego  $x=2a^*=0.12\text{ m}$ ).
- B.** na początku „cieplej strefy” powierzchni grzejnika (rys. 2.6a, gdzie z uwagi na symetrię, współrzędnej  $z^*=0.5\text{ m}$  odpowiada  $z=2.0\text{ m}$ ). W wyniku tego, temperatura najcieplejszych punktów będzie zbliżona do temperatury zadanej. Z kolei  $x^*=0.09\text{ m}$  zapewni jednakową odległość czujnika od najcieplejszego i najchłodniejszego przekroju badanego segmentu. Zatem czujnik będzie położony w środku pomiędzy kablem  $x=x_I=0.06\text{ m}$  i maksymalnym oddaleniem od niego  $x=2a^*=0.12\text{m}$ .

Zbieżność szeregów

**A.** (4.32), (4.42), (4.52)

**B.** (4.33), (4.43), (4.53)

kontrolowano analogicznie jak na końcu rozdziału 4.2.2. Położenie punktu o najgorszej zbieżności oraz liczbę sumowanych wyrazów szeregu **A.** (4.32), **B.** (4.33) podano w paragrafie 4.2.5 (tabela 4.1). W przypadku pozostałych szeregów podstawowe informacje o ich zbieżności przedstawiono w tabeli 4.2



Tabela 4.2. Wybrane informacje o rozwiązaniu analitycznym.

Informacja	A. model dwuwymiarowy	B. model trójwymiarowy
Maksymalna liczba wyrazów ( $t=t_1$ )	(4.42) 325x804364	(4.43) 325x1564x4756
Minimalna liczba wyrazów	11x11	11x11x11
Maksymalna liczba wyrazów ( $t=t_1+t_2$ ) dla składowej przejściowej	(4.52) 242x317164	(4.53) 333x1564x4756
Minimalna liczba wyrazów dla składowej przejściowej	11x11	11x11x11

Wyniki obliczeń bezpośrednich (rozdziały 4.3.2, 4.3.3 i 4.3.4) przedstawiono

**A.** na rys. 4.9.

**B.** na rys. 4.11.

Metoda analityczna i numeryczna umożliwiły precyzyjne wyznaczenie chwil przełączeń układu i czasu trwania cyklu (tabela 4.3).

Tabela 4.3. Czasy przełączeń zasilania i trwania cyklu

	A. model dwuwymiarowy		B. model trójwymiarowy	
	metoda analityczna	metoda numeryczna	metoda analityczna	metoda numeryczna
$t_1$	11074	11076	11120	11120
$t_2$	2956	2979	2911	2935
$t_3$	3967	3990	4081	4105
$t_2+t_3$	6923	6969	6992	7040
$\frac{t_2}{t_2+t_3} \cdot 100\%$	42.70%	42.75%	41.63%	41.69%

Globalna stała czasowa wynosi **A.**  $\tau_{2g}=10623.88$  s (rys. 4.3), **B.**  $\tau_{3g}=13502.86$  s (rys. 4.6). Uwidocznione w tabeli 4.3 różnice między wynikami analitycznymi i numerycznymi nie mają zatem żadnego znaczenia.

Przebieg czarnej i czerwonej krzywej na **A.** rys. 4.9, **B.** rys. 4.11 wskazuje wyraźnie na efekty bezwładności cieplnej. Pomimo przełączenia zasilania, układ zachowuje kierunek zmian temperatury w chwilach  $t_1$  i  $t_1+t_2$ . Inercja układu jest jednak większa przy ponownym załączeniu ( $t=t_1+t_2$ ) niż przy wyłączeniu ( $t=t_1$ ). Trudniej jest bowiem wymusić ponowne nagrzewanie betonu, niż pozwolić na jego swobodne stygnięcie.

Ocenę przydatności uśrednionej stałej czasowej w okresie rozruchu (dla  $0 \leq t \leq t_1$ ) podano w rozdziałach 4.2.5 i 4.2.6. Jak widać na **A.** rys. 4.9, **B.** rys. 4.11, w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_1+t_2+t_3$  dokładność tej metody jest znacznie niższa. Wynika to z sumowania się błędów aproksymacji podczas przełączeń układu. Każdy punkt grzejnika jest bowiem zastąpiony skupionym elementem pierwszego rzędu, który nie modeluje procesów

bezwładnościowych. W związku z powyższym, w dalszych przykładach nie przedstawiono wyników uzyskanych metodą uśrednionej stałej czasowej. Jest ona jednak przydatna w określeniu procentowego udziału czasu wyłączenia zasilania w cyklu

**A.** ok. 42.2%.

**B.** ok. 40.89%.

Są to wyniki bardzo zbliżone do przedstawionych w ostatnim wierszu tabeli 4.3. Zatem metoda ta umożliwia poprawne oszacowanie kosztów zużycia energii elektrycznej (lecz nie chwilowych wartości temperatury roboczego cyklu (dla  $t > t_1$ )).

Z następujących warunków

$$\mathbf{A.} \quad T(x^*, y^*, t_1 + t_2 + t_3 + t_2') = T_L, \quad (4.66a)$$

$$T(x^*, y^*, t_1 + t_2 + t_3 + t_2' + t_3') = T_H. \quad (4.66b)$$

$$\mathbf{B.} \quad T(x^*, y^*, z^*, t_1 + t_2 + t_3 + t_2') = T_L, \quad (4.67a)$$

$$T(x^*, y^*, z^*, t_1 + t_2 + t_3 + t_2' + t_3') = T_H. \quad (4.67b)$$

wynikają przedziały czasu, w których następuje kolejne wyłączenie ( $t_2'$ ) i włączenie ( $t_3'$ ) układu. Na podstawie (4.66), (4.67) metodą numeryczną (rozdział 4.3.3) wyznaczono  $t_2'$  i  $t_3'$ :

**A.**  $t_2' = t_2 - 1s$ ,  $t_3' = t_3$ . Ponieważ  $t_2 = 2979$  s, różnica jednej sekundy nie ma żadnego znaczenia. Przyjęto więc  $t_2' = t_2$ .

**B.**  $t_2' = t_2 - 22s$ ,  $t_3' = t_3 + 11s$ , gdzie  $t_2 = 2935$  s,  $t_3 = 4105$  s. Ponieważ wielkości o dwa rzędy mniejsze zwykle pomija się, przyjęto  $t_2' = t_2$ ,  $t_3' = t_3$ . Za takim uproszczeniem dodatkowo przemawia :

a) częściowa kompensacja różnic przeciwnego znaku (-22s, +11s) w cyklu zasilania  $t_2 + t_3 = 7040$  s,

b) nieznaczną wartość różnic w porównaniu z globalną stałą czasową układu  $\tau_{3g} = 13503$  s (rys. 4.6).

W tych warunkach dodając do prawej strony

A. (4.64) zależność

$$-H(x, y, t - t_1 - t_2 - t_3)\mathbf{1}(t - t_1 - t_2 - t_3) + \\ + H(x, y, t - t_1 - 2t_2 - t_3)\mathbf{1}(t - t_1 - 2t_2 - t_3), \quad (4.68)$$

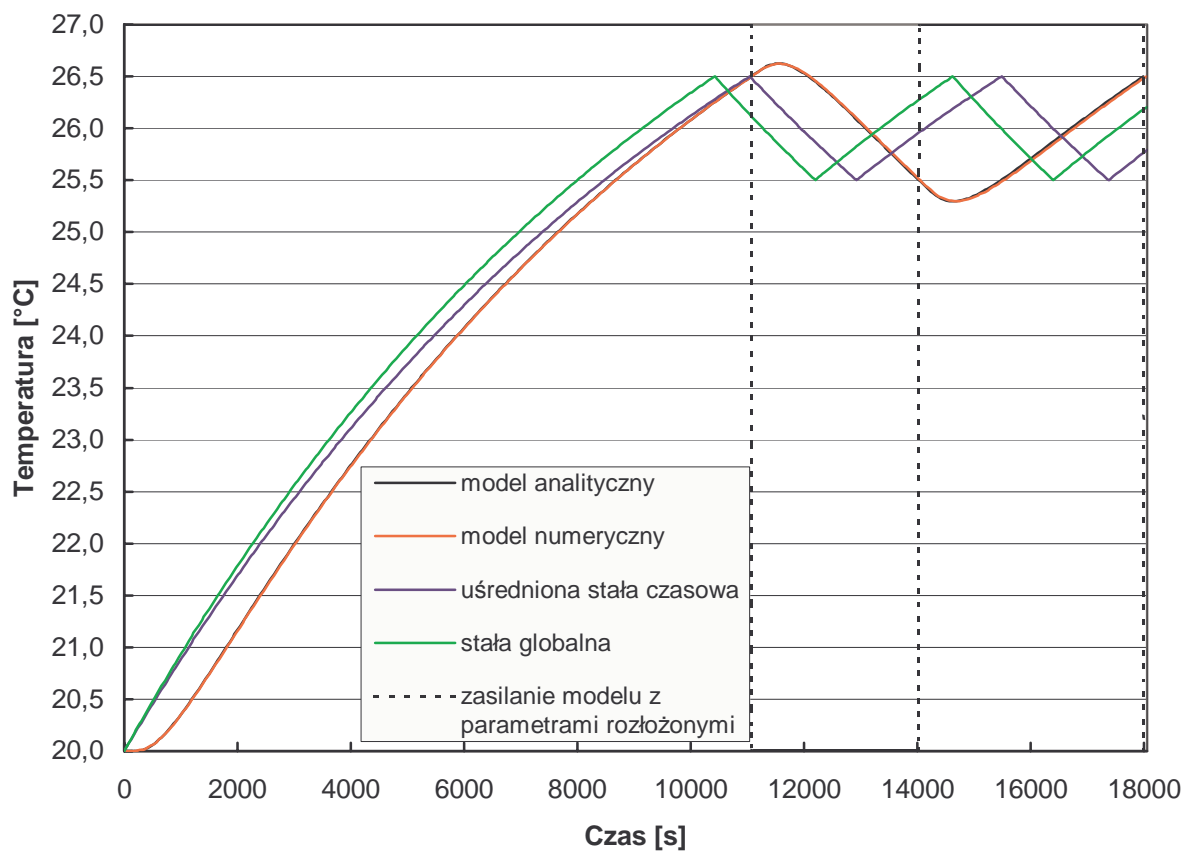
B. (4.65) zależność

$$-H(x, y, z, t - t_1 - t_2 - t_3)\mathbf{1}(t - t_1 - t_2 - t_3) + \\ + H(x, y, z, t - t_1 - 2t_2 - t_3)\mathbf{1}(t - t_1 - 2t_2 - t_3), \quad (4.69)$$

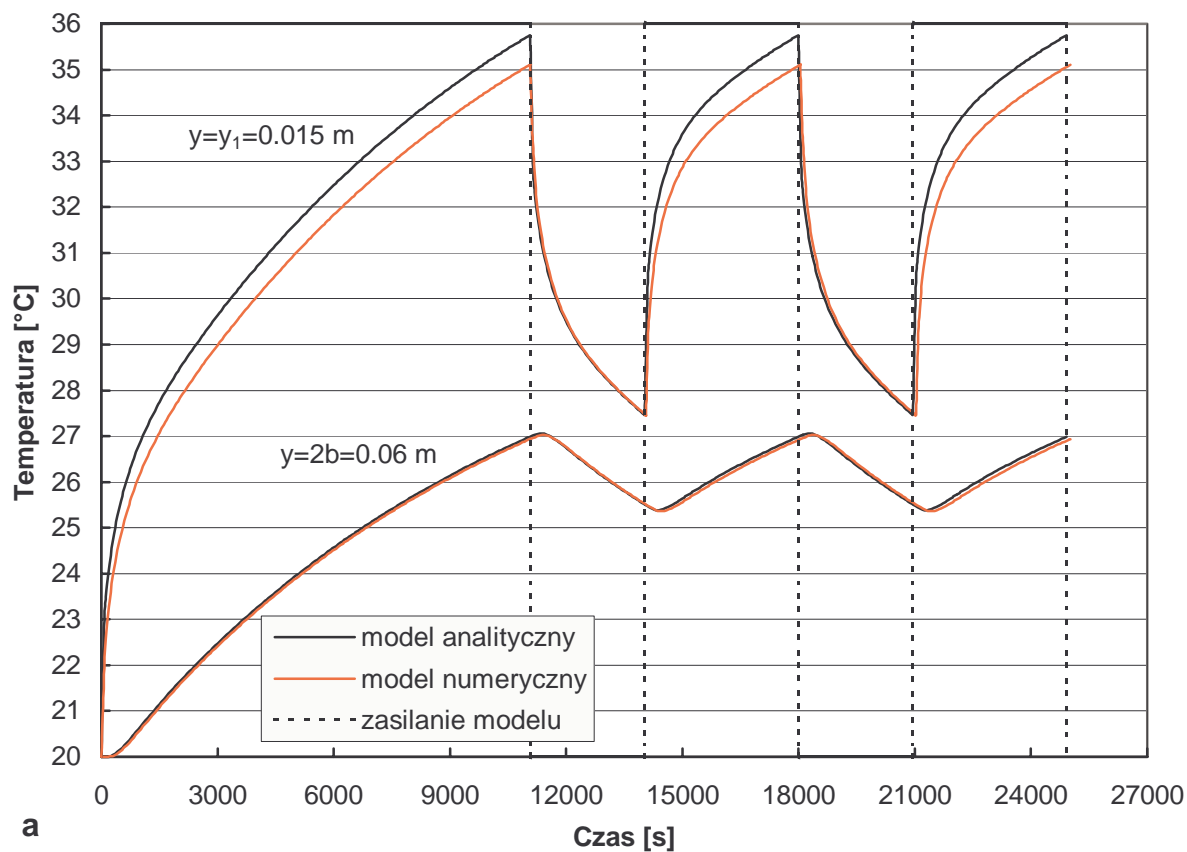
otrzymano rozwiązanie dla  $0 \leq t \leq t_1 + 2t_2 + 2t_3$ . Na tej podstawie sporządzono

A. rys. 4.10.

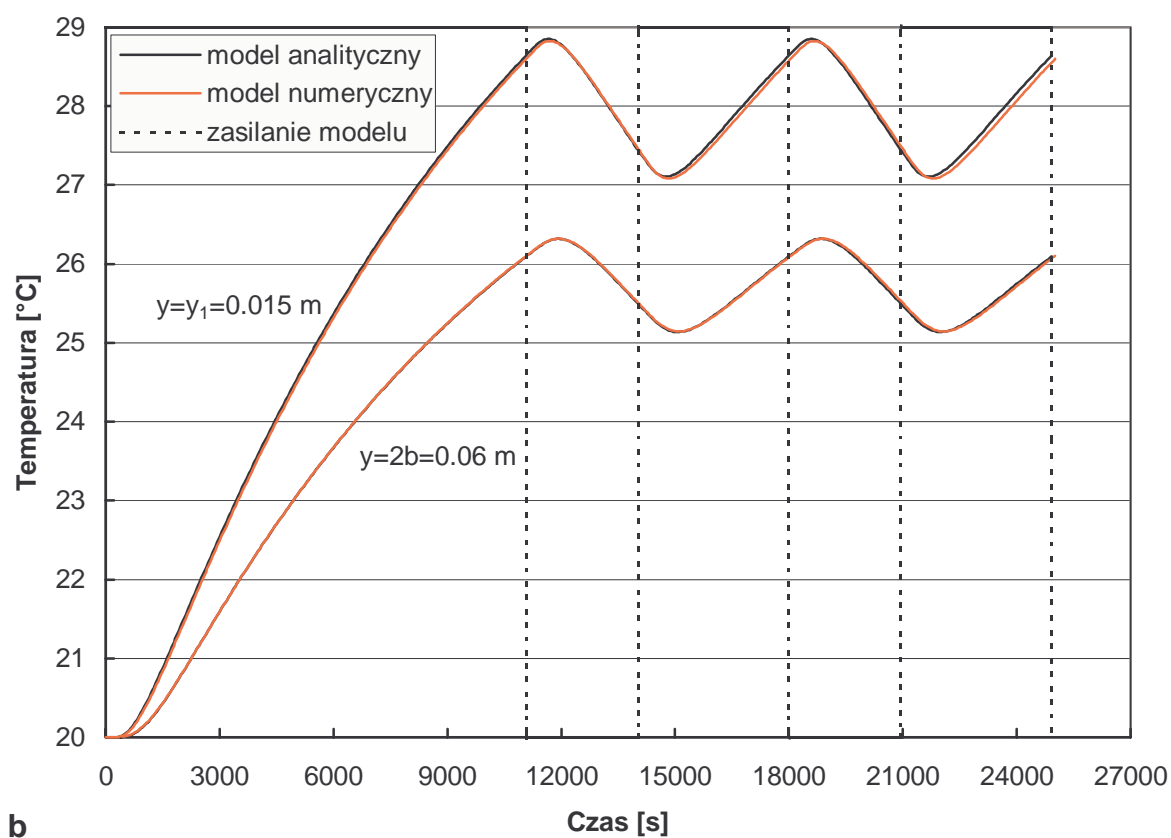
B. rys. 4.12.



Rys. 4.9. Rozruch ogrzewania i cykl roboczy w modelu dwuwymiarowym dla  $x=x^*=0.09$  m,  $y=y^*=2b=0.06$  m.

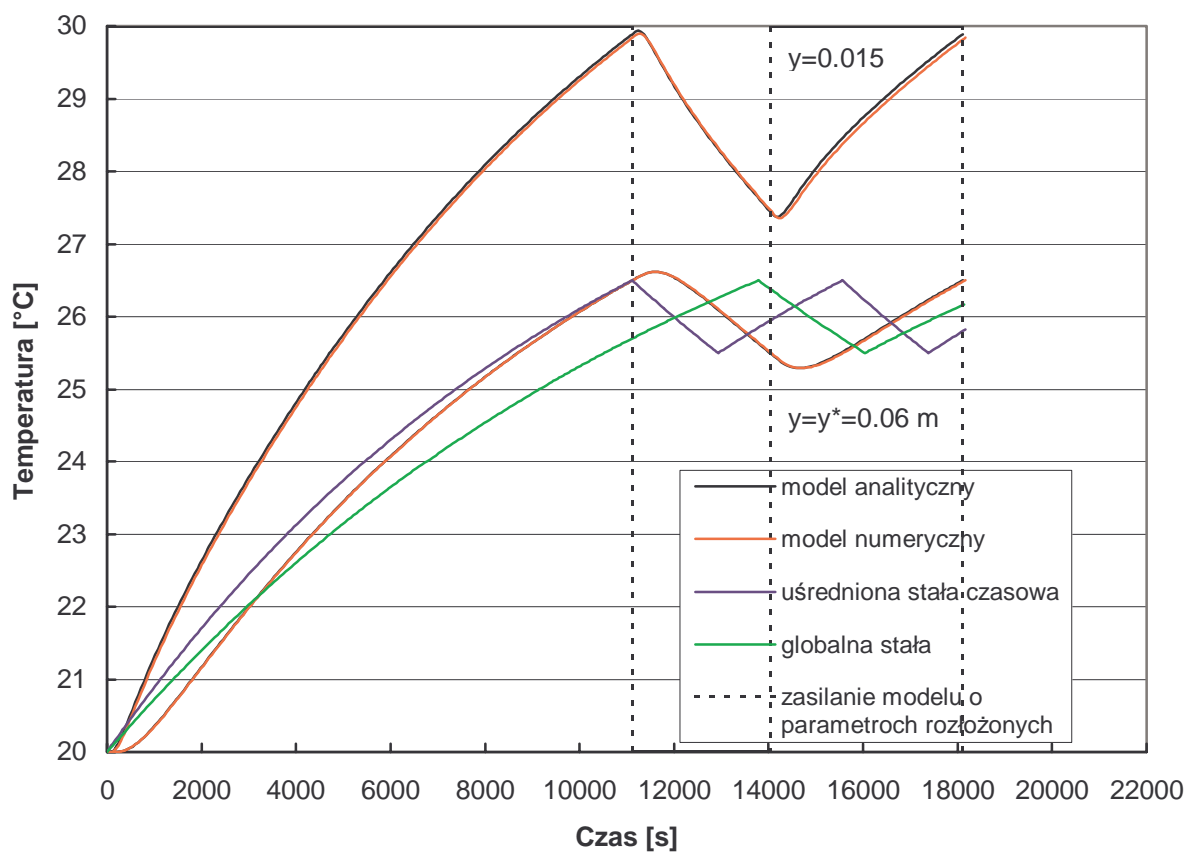


a

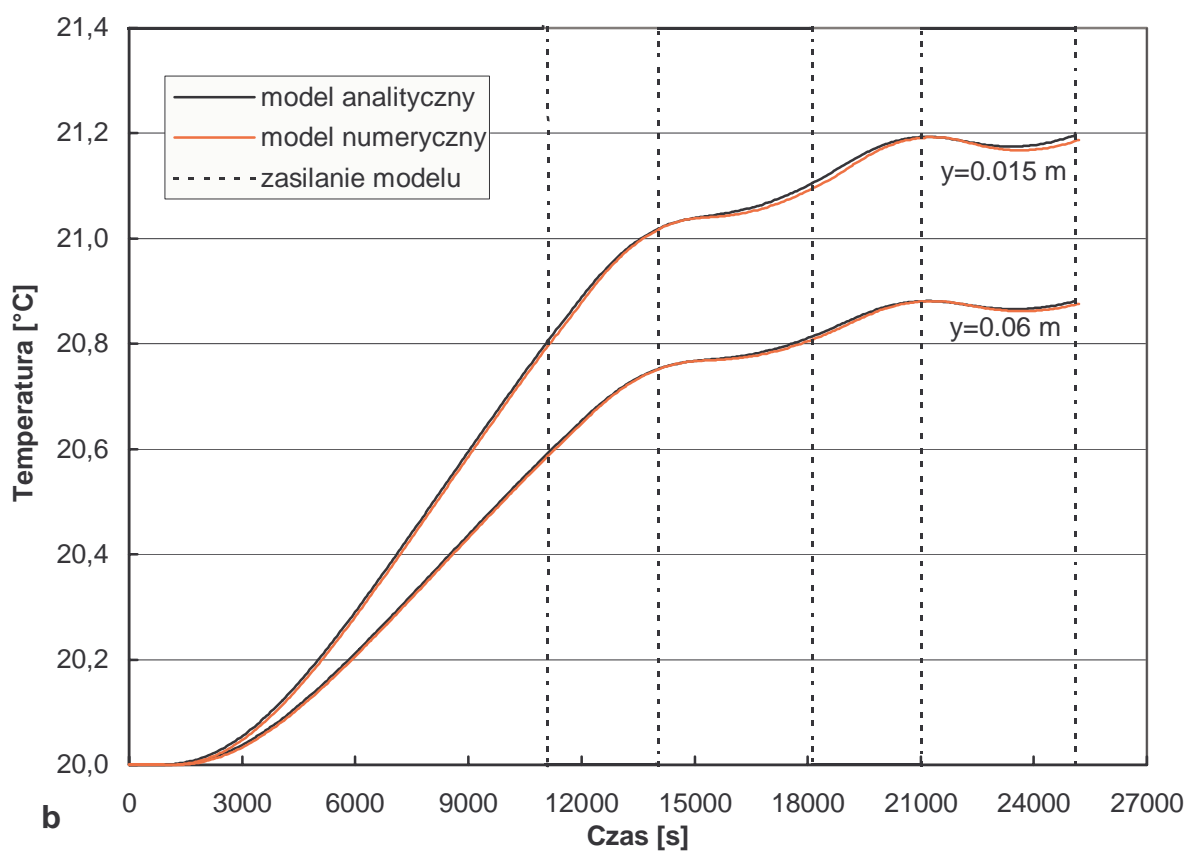
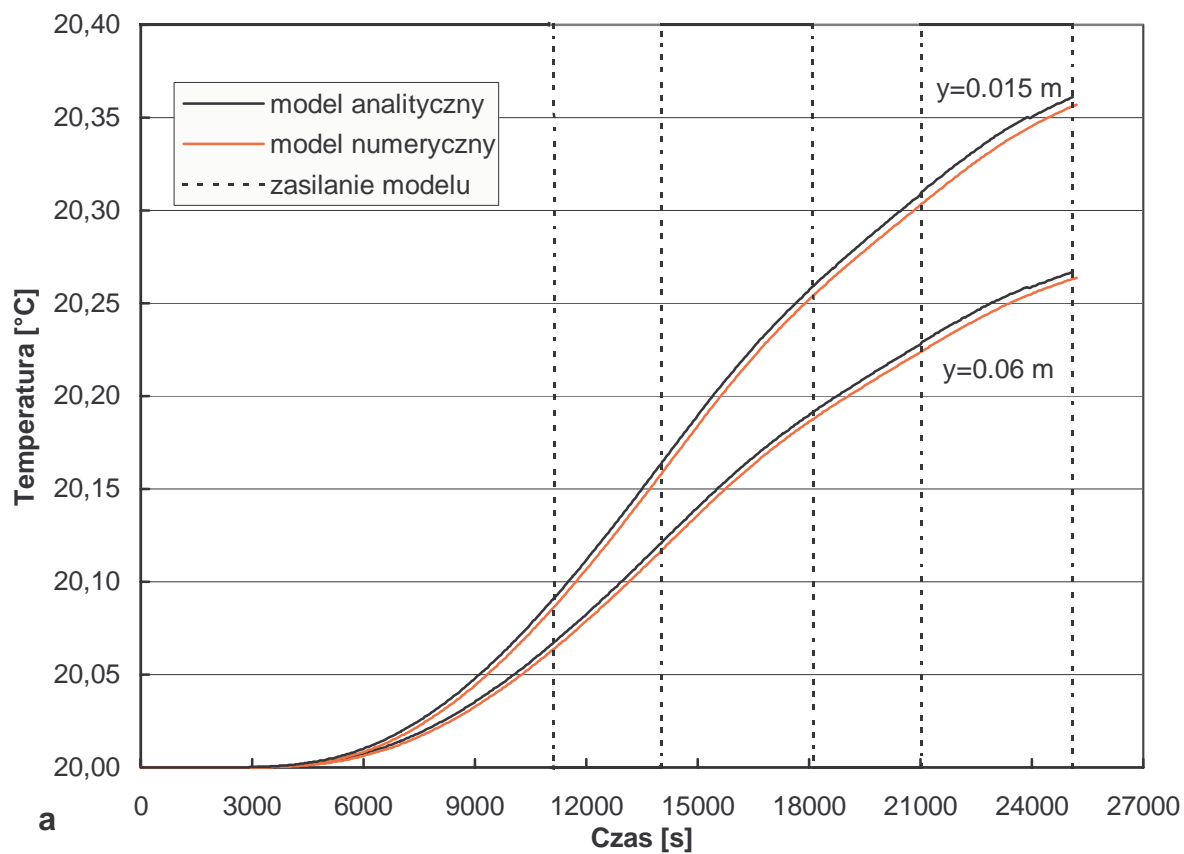


b

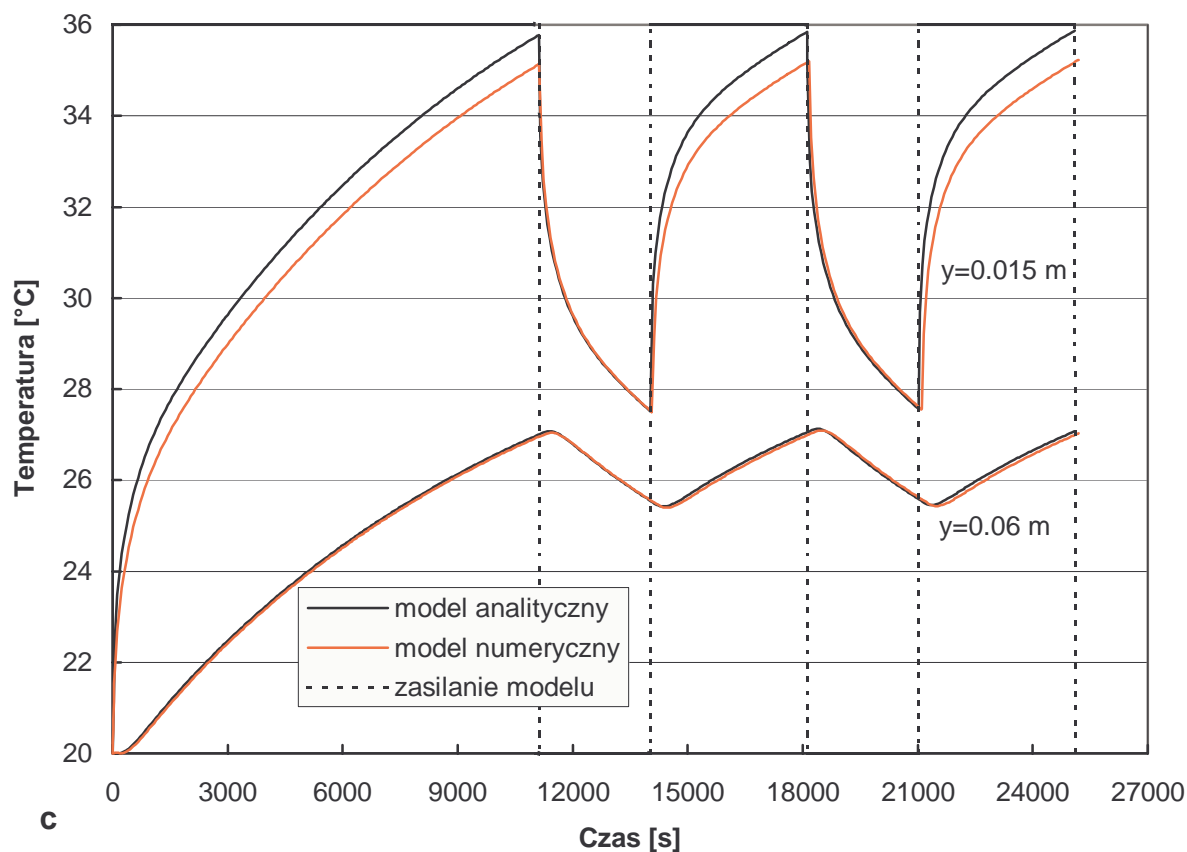
Rys. 4.10. Rozruch ogrzewania i cykl roboczy w modelu dwuwymiarowym: a) dla  $x = x_1 = 0.06$  m, b) dla  $x = 2a^* = 0.12$  m.



Rys. 4.11. Przebieg temperatury w modelu trójwymiarowym dla  $x=x^*=0.09$  m,  $z=z^*=0.5$  m.



Rys. 4.12. Przebieg temperatury w modelu trójwymiarowym dla  $x=0.06$  m: a)  $z=0.05$  m, b)  $z=0.15$  m.



Rys. 4.12. Przebieg temperatury w modelu trójwymiarowym dla  $x=0.06$  m: c)  $z=1.25$  m.

Jak widać, w badanym przedziale czasu (ok. siedmiu godzin)

- A. występuje jeden typ przebiegu temperatury o oscylacyjnym charakterze (rys. 4.9, 4.10, dla  $t \geq t_1$ ). Efekty bezwładnościowe maleją wraz ze zbliżaniem się do źródła ciepła.
- B. występują trzy typy przebiegów temperatury. Różnice między nimi wynikają z zależności prędkości dyfuzji ciepła od odległości od kabla.

W obszarze najbardziej oddalonym od kabla (dla  $z \in \langle 0, 0.2ul \rangle \cup \langle (1 - 0.2u)l, l \rangle$ ) temperatura powoli (lecz stale) narasta (rys. 4.12a). Termiczna bezwładność tej strefy jest tak duża, że dla  $0 \leq t \leq t_1 + 2t_2 + 2t_3$  występuje brak reakcji na wyłączenie zasilania układu (w chwili  $t = t_1$  i  $t = t_1 + t_2 + t_3$ ).

Przyczyny tego stanu rzeczy są następujące:

- a) w obszarze krawędziowym pozorny czas martwy (ok. 4000 s, rys. 4.12a) jest większy niż czas wyłączenia energii ( $t_2 = 2935$  s),
- b) stała czasowa punktów rozpatrywanego obszaru peryferyjnego (ponad 27000 s, rys. 4.6) jest znacznie większa od przerwy w zasilaniu  $t_2$ .

Dla  $z \in \langle 0.3ul, 0.9ul \rangle \cup \langle (1-0.9u)l, (1-0.3u)l \rangle$  przebiegi temperatury są aperiodycznie narastające i opadające (rys. 4.12b). Jak widać, przedziały wzrostu i spadku temperatury nie pokrywają się z okresami zasilania i wyłączania układu (dla  $t_1 \leq t \leq t_1 + 2t_2 + 2t_3$ ). Za opóźnienie reakcji grzejnika odpowiedzialna jest powolna dyfuzja ciepła w tym obszarze.

W strefie kabla oporowego (tzn. dla  $z \in \langle ul, (1-u)l \rangle$ ) przebiegi temperatury są oscylacyjne (rys. 4.11, 4.12c, dla  $t \geq t_1$ ). Bliskość źródła ciepła sprawia, że w tym obszarze układ zmniejsza bezwładność i jest bardziej podatny na zmianę stanu zasilania.

#### 4.3.7. Uwagi końcowe

Z rys. 4.9, 4.10, 4.11, 4.12c wynika zagadnienie okresowości obserwowanych tam oscylacji. W celu zbadania periodyczności tych przebiegów (dla  $t \geq t_1$ ) analizowano różnicę temperatury w tych samych punktach przestrzeni, lecz w chwilach odległych o  $t_2 + t_3$ . Okazało się, że największe odchylenie od wartości okresowej występuje na powierzchni kabla i nie przekracza ono

**A.**  $0.003^\circ\text{C}$  (dotyczy całego układu),

**B.**  $0.07^\circ\text{C}$  (dla  $z \in \langle ul, (1-u)l \rangle$ ).

Ta nieznaczna aberracja pozwala uznać przebiegi temperatury za prawie okresowe

**A.** w całym układzie dwuwymiarowym (dla  $t \geq t_1$ ),

**B.** w podanym zakresie zmiennych  $(z, t)$ .

Miarą termicznych drgań może być różnica między maksimum i minimum cyklu powtarzalnego. Największe wahania zachodzą w płaszczyźnie kabla ( $y = y_1 = 0.015$  m), zaś dużo mniejsze na powierzchni grzejnika ( $y = 2b = 0.06$  m, **A.** rys. 4.10, **B.** rys. 4.11 i 4.12c). Tłumiące działanie płyty podłogowej wynika nie tylko z różnicy prędkości dyfuzji ciepła na wymienionych płaszczyznach panelu. Swój wpływ wnosi również akumulacja ciepła w warstwie betonu o grubości  $2b - y_1 = 0.045$  m.

We wzorach

**A.** (4.64), (4.68)



**B.** (4.65), (4.69)

występują skokowe odpowiedzi układu, wyznaczone analitycznie lub numerycznie (rozdział 4.2.2, 4.2.4). Największą różnicę między rozwiązaniem analitycznym i numerycznym zlokalizowano w najbliższym otoczeniu kabla  $y=y_1=0.015$  m

**A.** na rys. 4.10a,

**B.** na rys. 4.12c.

Wynika ona z odmiennych modeli żyły kabla, przyjętych w odpowiednich modelach (rozdział 4.2.6, punkt 3). Gdy kabel nie jest zasilany i obszar staje się bezźródłowy (tzn. dla  $t \in \langle t_1, t_1+t_2 \rangle \cup \langle t_1+t_2+t_3, t_1+2t_2+t_3 \rangle$ ), omawiana różnica zanika.

Do wzorów (4.64), (4.68) oraz (4.65), (4.69) można dodawać kolejne odpowiedzi skokowe, odpowiednio przesunięte w czasie. W ten sposób wyznacza się przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury dla  $t > t_1+2t_2+2t_3$ . W układzie trójwymiarowym wraz z upływem czasu zachodzą następujące zmiany:

- a) monotoniczne przebiegi rosnące przechodzą w aperiodyczne spadki i wzrosty temperatury,
- b) przebiegi aperiodyczne przekształcają się w oscylacyjne,
- c) po osiągnięciu stanu quasi-ustalonego ( $t \rightarrow \infty$ ) temperatura staje się okresowo zmienna w całej objętości grzejnika.

Uwaga „c” odnosi się również dla układu płasko-równoległego.

Niniejszy rozdział jest przykładem weryfikacji metody elementów skończonych (rozdział 4.3.3) za pomocą metody analitycznej (rozdział 4.3.2). Otrzymanie tego samego wyniku (rys. 4.9–4.12) za pomocą całkowicie odmiennych metod, potwierdza poprawność rozwiązania. U d o w a d n i a t o c z ę ś c i o w o t e z ę n r 5 ( s t r . 1 2 ) .

#### 4.4. Porównanie rozkładów dwu- i trójwymiarowych w stanie nieustalonym

W rozdziałach 4.2.2 i 4.3.2 analizowano nieustalone pole termiczne w przypadku układu bez i z regulatorem temperatury. Zależności

**A.** (4.14)

**B.** (4.19)

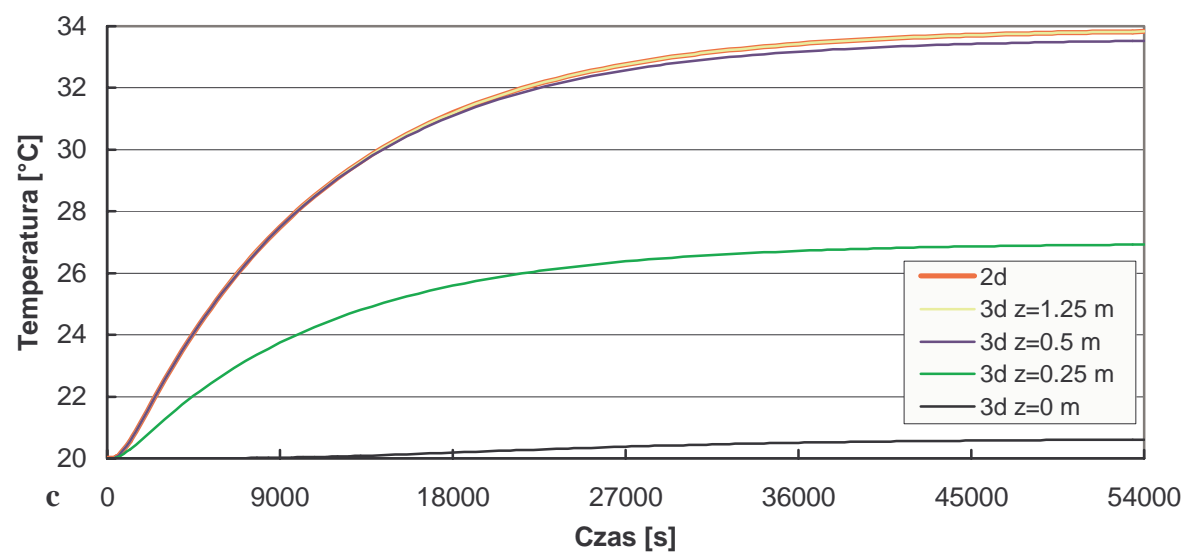
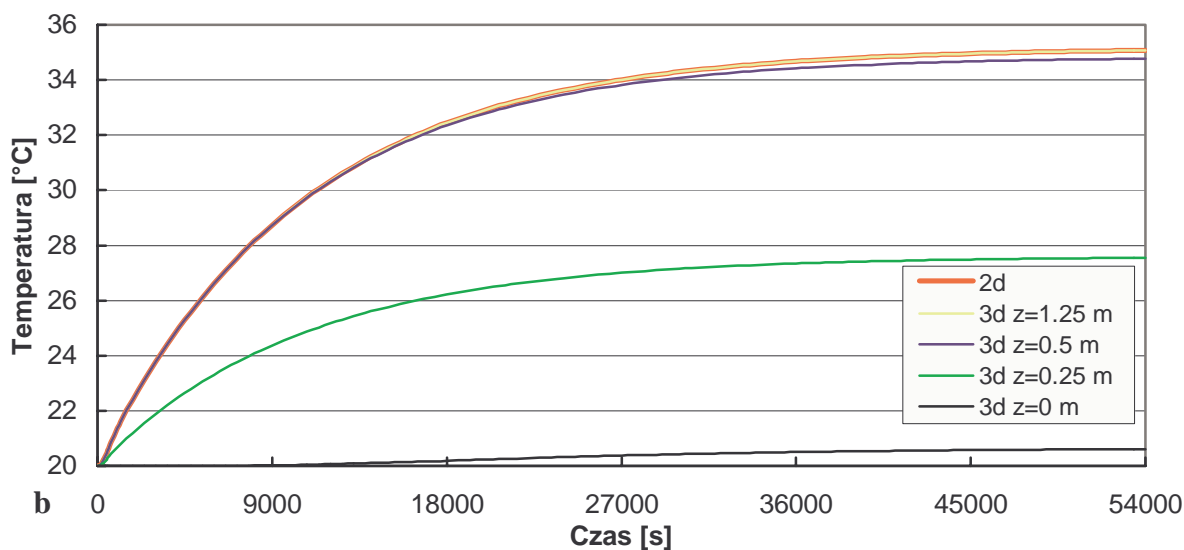
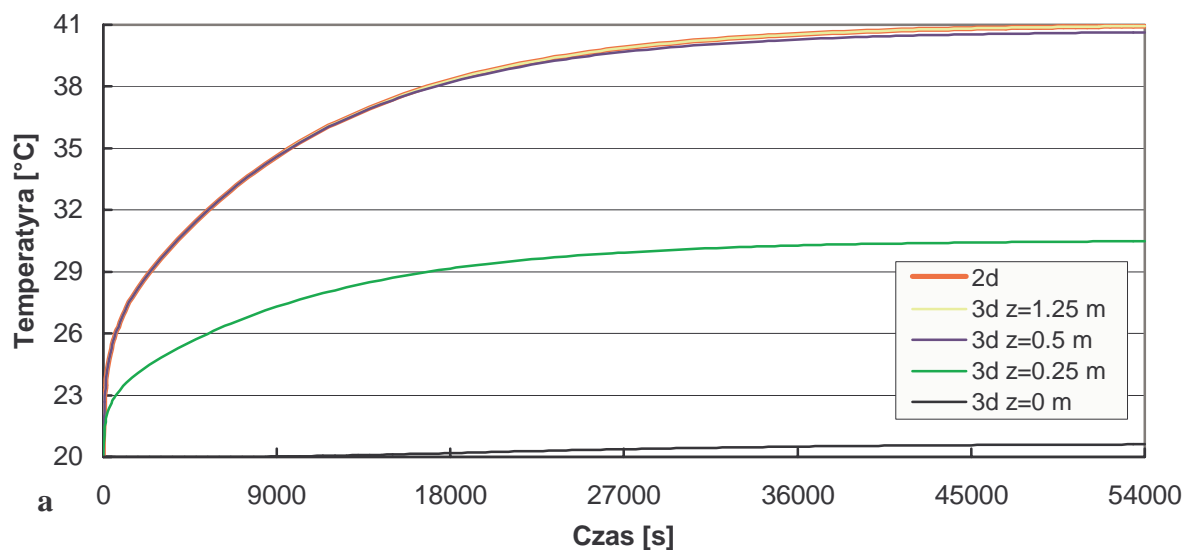
opisują odpowiedź skokową grzejnika. Natomiast zależności

**A.** (4.32), (4.42), (4.52)

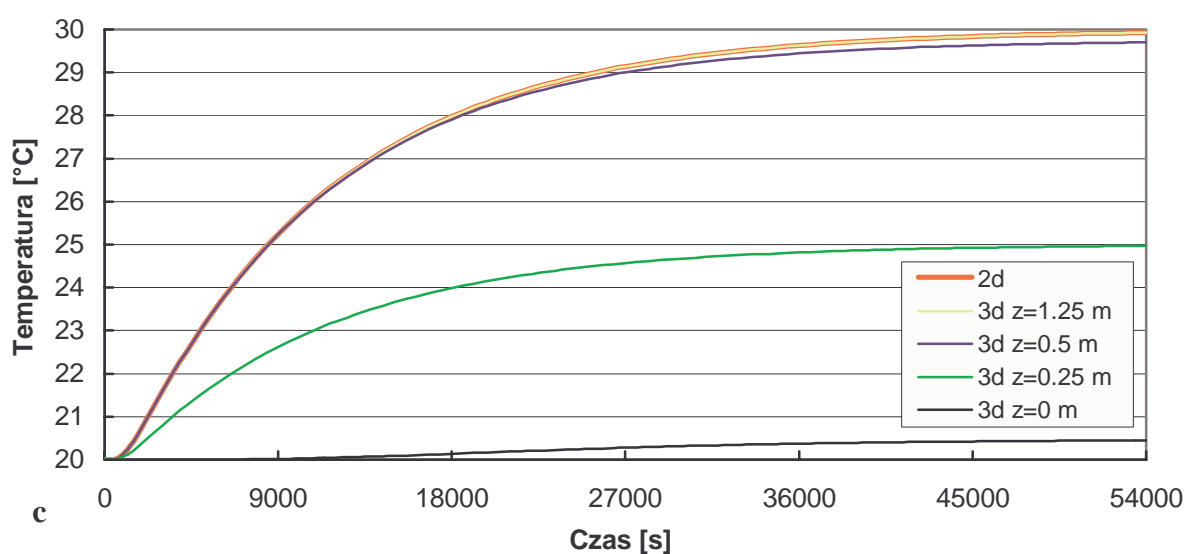
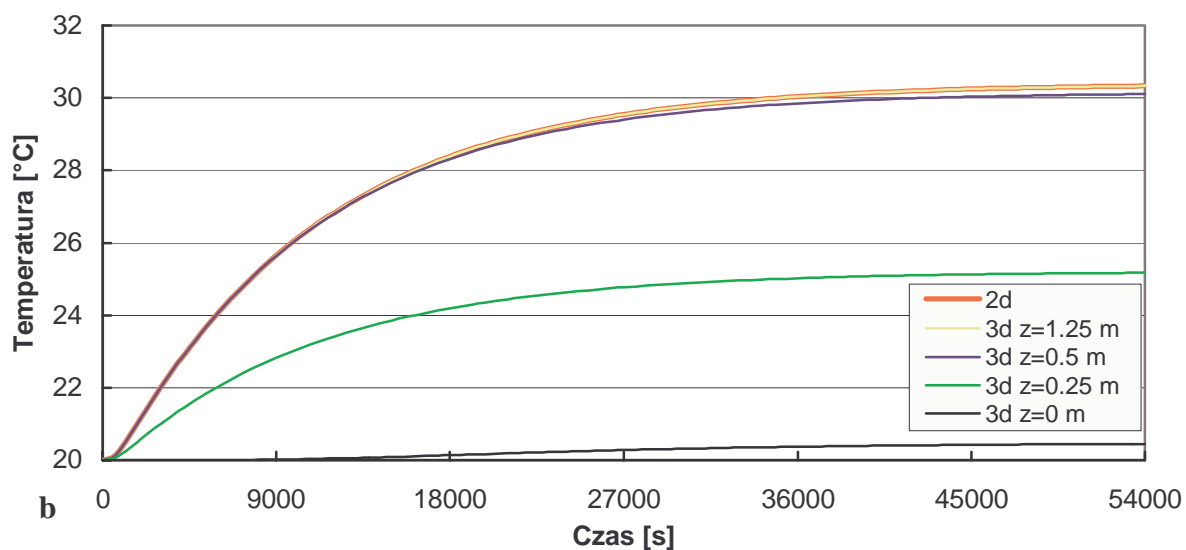
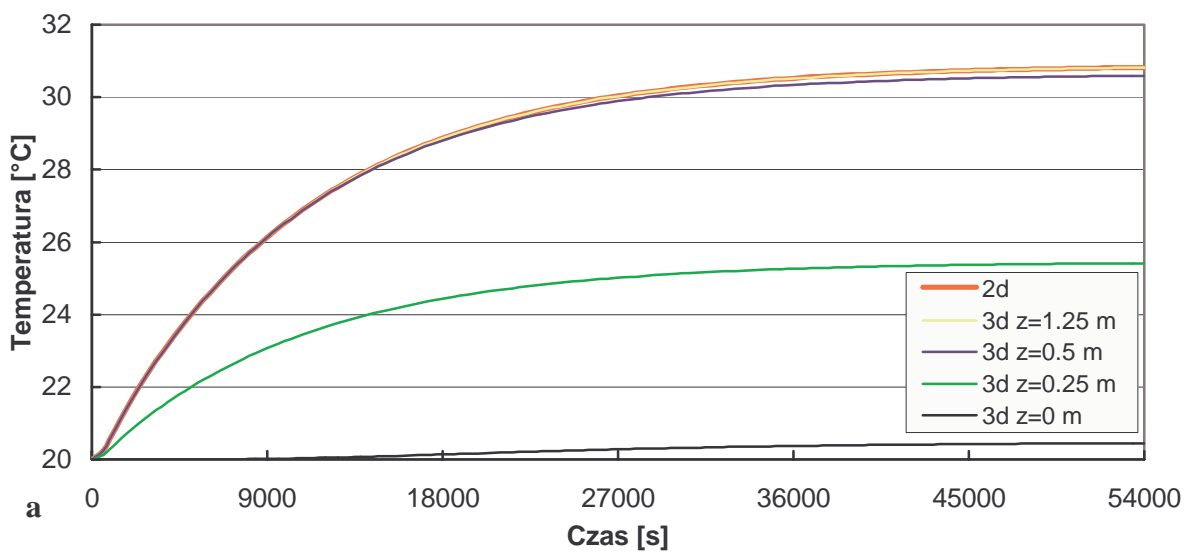
**B.** (4.33), (4.43), (4.53)

charakteryzują przebiegi temperatury w urządzeniu z regulatorem (dla  $0 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3$ ). Na rys. 4.13-4.16 przedstawiono porównanie przebiegów temperatury w modelu dwuwymiarowym (**A**, 2d) i trójwymiarowym (**B**, 3d). Jak zwykle wybrano przekroje na wysokości kabła grzewczego i powierzchni podłogi. W przypadku dwuwymiarowym (płasko-równoległym) rozkład temperatury nie zależy od współrzędnej  $Z$ . Zatem w danej chwili czasu przyjęto stałą jej wartość wzdłuż całej długości układu  $l$  (rys. 4.13-4.16, kolor czerwony).

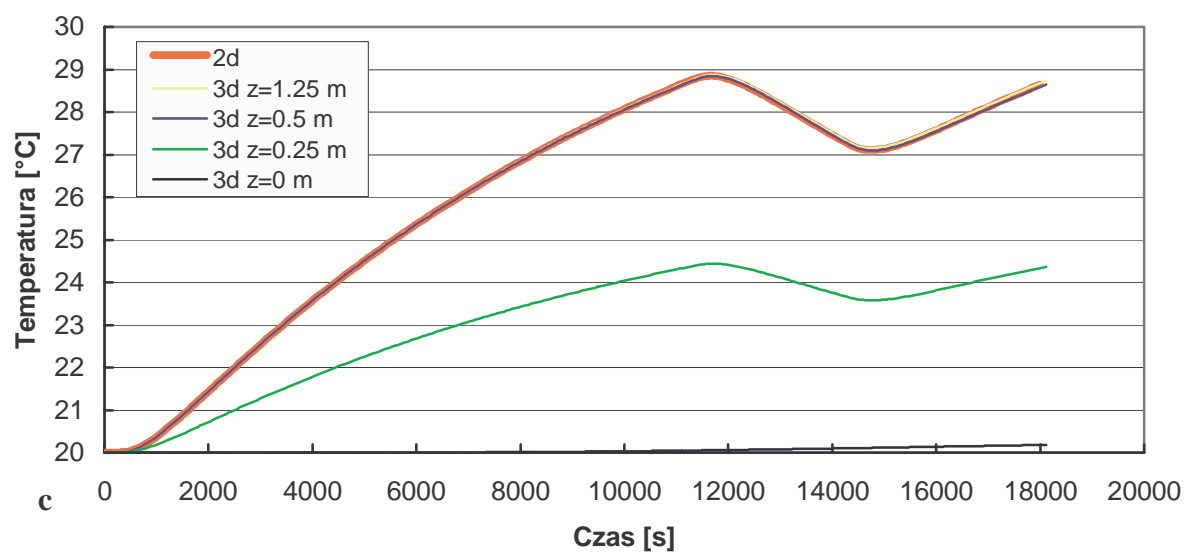
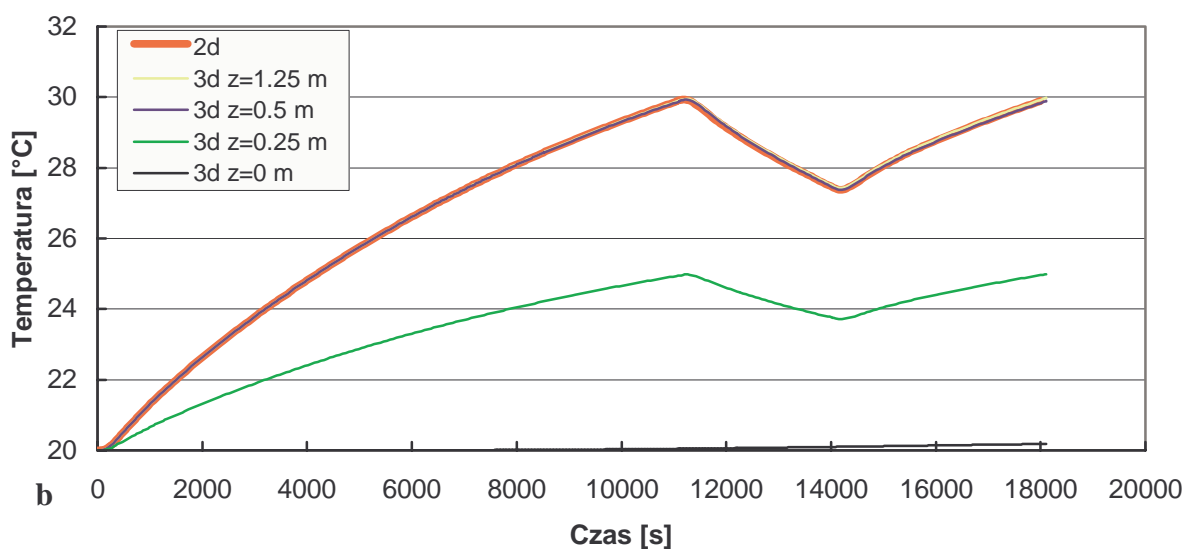
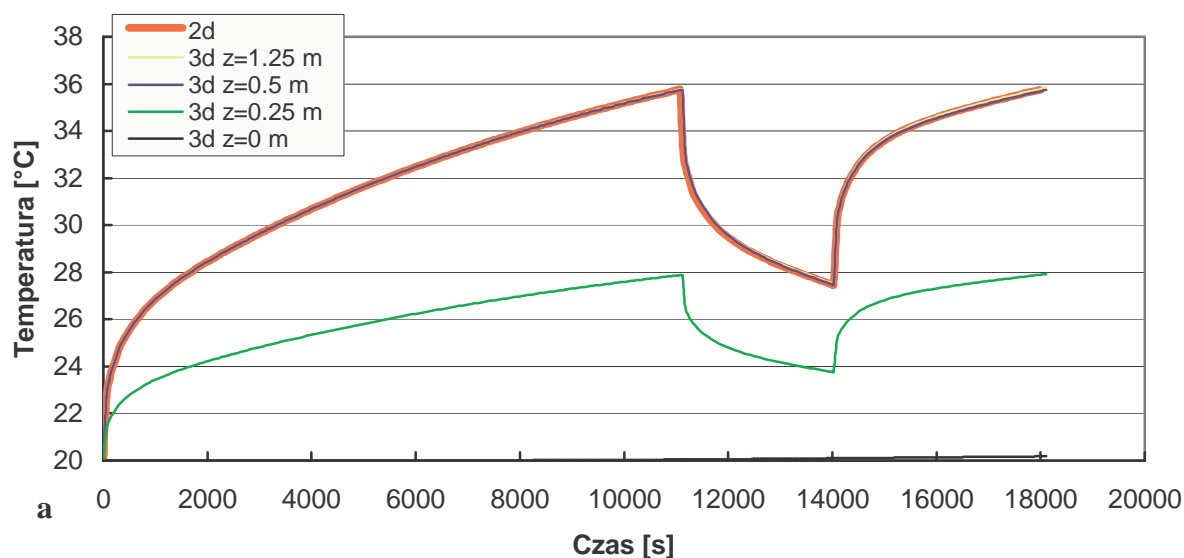
Z porównania przebiegów temperatury w modelu dwuwymiarowym i trójwymiarowym wynika, że analizy dwuwymiarowe są wystarczająco dokładne w centralnej strefie układu dla  $z \in \langle 0.5, 2.0 \text{ m} \rangle$ . W przypadku strefy krawędziowej  $z \in \langle 0.0, 0.5 \text{ m} \rangle \cup \langle 2.0, 2.5 \text{ m} \rangle$  należy bezwzględnie stosować model trójwymiarowy. Udowadnia to odpowiednio tezę nr 2 i nr 1 (str. 12 i 11) w odniesieniu do nieustalonego stanu grzejnika. Powyższe stwierdzenie odnosi się zarówno do skokowych charakterystyk (rys. 4.13, 4.14) jak i do przebiegów regulowanych (rys. 4.15, 4.16).



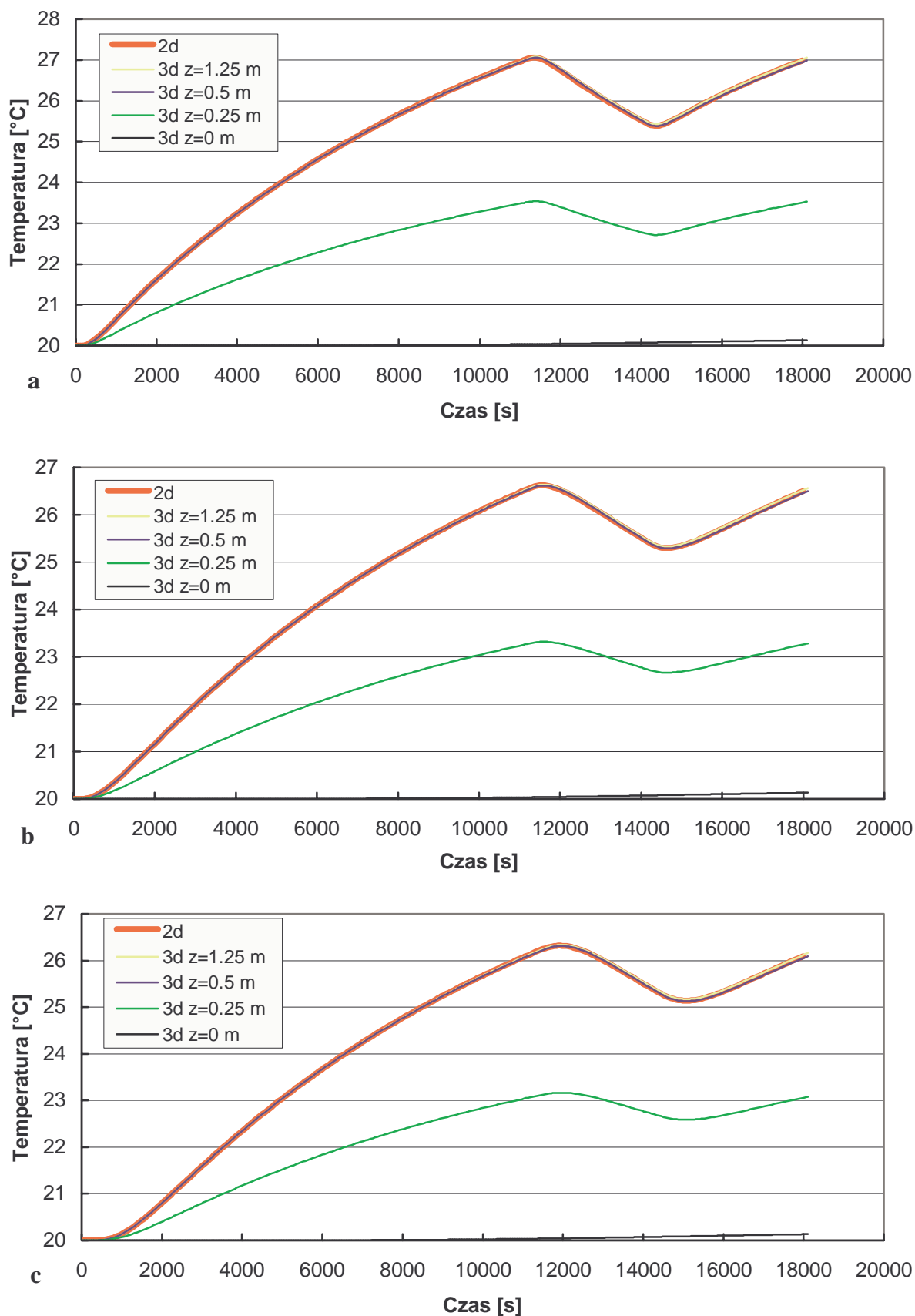
Rys. 4.13. Porównanie odpowiedzi skokowych w modelu dwuwymiarowym (2d) i trójwymiarowym (3d) na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m): a)  $x=0.063$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.



Rys. 4.14 Porównanie odpowiedzi skokowych w modelu dwuwymiarowym (2d) i trójwymiarowym (3d) na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m): a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.



Rys. 4.15. Porównanie przebiegu temperatury w układzie z regulatorem w modelu dwuwymiarowym (2d) i trójwymiarowym (3d) na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m): a)  $x=0.063$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.



Rys. 4.16. Porównanie przebiegu temperatury w układzie z regulatorem w modelu dwuwymiarowym (2d) i trójwymiarowym (3d) na powierzchni podłogi ( $y=2b=0.06$  m): a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.09$  m, c)  $x=0.12$  m.

## 4.5. Symulacja wpływu cieplnych i materiałowych nieliniowości na rozkład nieustalonego pola temperatury w układzie trójwymiarowym

### 4.5.1. Wstęp

W rozdziale 3 przedstawiono weryfikację założeń upraszczających, przyjętych w modelu stacjonarnej składowej pola. Wnioski wynikające z tych rozważań odnoszą się również do nieustalonego pola termicznego. W ustalonym stanie nieregulowanego układu wystąpi bowiem największe możliwe obciążenie termiczne. Zatem w każdej chwili czasu składowe pola generowane zagięciami kabla nigdy nie będą większe w danym punkcie przestrzeni od przedstawionych na rys. 3.3 i 3.4. W połączeniu z wnioskami rozdziału 3.1 (str. 66), potwierdza to ostatecznie tezę nr 3 (str. 12).

Z kolei straty ciepła zależą od różnicy temperatury układu i otoczenia. Z wyżej przedstawionych względów, maksimum tej różnicy wystąpi w stanie ustalonym (przy stałości pozostałych warunków). Zatem oszacowanie przedstawione w rozdziale 3.3 majoryzuje straty stanu nieustalonego.

Wpływ nieliniowości zależy od rozpiętości zmian temperatury w samym układzie [8]. Z wcześniej podanych przyczyn, obie temperatury skrajne (minimalna i maksymalna) są wyższe w przypadku stacjonarnym. Trudno jest jednak na tej podstawie wnioskować o różnicy tych wielkości w stanie nieustalonym. Z tego powodu zdecydowano się powtórzyć badania z rozdziału 3.2, lecz w odniesieniu do nieustalonego pola termicznego. Przedmiotem przedstawionej dalej symulacji jest więc przestrzenno-czasowa charakterystyka skokowa podłogi, zwana inaczej krzywą rozgrzewu [49].

Zależności cieplnej przewodności betonu  $\lambda$  i współczynnika przyjmowania ciepła  $\alpha$  od temperatury opisują wzory (3.11) i (3.12), gdzie w miejsce  $T$  należy podstawić  $H$

$$H \rightarrow T. \quad (4.70)$$

Zgodnie z (1.1) skokową odpowiedź układu opisuje wówczas niejednorodne równanie dyfuzji ciepła [20], [33], [45]

$$\operatorname{div}[\lambda(H) \cdot \operatorname{grad} H(x, y, z, t)] - c\delta \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial t} = -g(x, y, z). \quad (4.71)$$

Po uwzględnieniu (3.14) i (4.70) warunki graniczne przyjmują następującą postać

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (4.72a, b)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.72c)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad (4.72d, e)$$

$$-\lambda(H) \left. \frac{\partial H(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=2b} = \alpha(H)[H(x, y=2b, z, t) - T_0], \quad (4.72f)$$

$$H(x, y, z, t=0) = T_0. \quad (4.72g)$$

Zależności (4.71), (4.72f) powodują, że przedstawione zagadnienie brzegowo-początkowe jest nieliniowe.

#### 4.5.2. Algorytm rozwiązania zagadnienia nieliniowego

Zagadnienie graniczne (4.71), (4.72) rozwiązano metodą elementów skończonych, przy pomocy programu NISA II/Heat Transfer. Wykorzystano przy tym siatkę elementów skończonych dla modelu liniowego, opisaną dokładnie w paragrafie 2.3.2 (rys. 2.3). W programie NISA zastosowano procedurę Galerkina [7], [57], [61] w odniesieniu do (4.71), (4.72). W jej wyniku otrzymano następujący układ nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu



$$[C]\left\{\dot{H}\right\} + [\lambda(H)]\{H\} = \{G\}. \quad (4.73)$$

Do różnicowej dyskretyzacji względem czasu układu (4.73) wybrano metodę wstecznego ilorazu różnicowego [57], [64]. W jej wyniku (w każdym kroku czasu) otrzymuje się układ równań algebraicznych. Do jego rozwiązania program wykorzystuje metodę Newtona-Raphsona [60], [61]. W ten sposób wyznaczono poszukiwany wektor  $\{H\}$ , co kończy procedurę.

W przyjętym modelu nieliniowym założoną zbieżność obliczeń ( $10^{-7}$ ) uzyskiwano w czwartej iteracji (dla każdego kroku czasowego). Czas obliczeń pola w segmencie (rys. 4.2b) wynosił ok. 11 godzin 17 minut. W przypadku modelu liniowego analogicznie obliczenia trwały ok. 4 godzin 54 minut.

Otrzymane charakterystyki skokowe przedstawiono na rys. 4.17-4.18.

#### **4.5.3. Porównanie charakterystyk skokowych układu nieliniowego i liniowego**

W celu zbadania zmian wnoszonych przez nieliniowość, należy porównać otrzymane wyniki z rezultatami obliczeń modelu liniowego (paragraf 4.4, rys. 4.13a, c i 4.14a, c dotyczy tylko modelu trójwymiarowego 3d). Przy bezpośredniej obserwacji rysunków 4.17, 4.18 oraz odpowiednio rys. 4.13a, c, 4.14a, c różnice między nimi są mało widoczne. Z tego powodu na rys. 4.19 i 4.20 przedstawiono przebieg różnicy charakterystyk skokowych układu nieliniowego i liniowego w wybranych punktach przestrzeni. Jak można zauważyć, różnica waha się w małym zakresie od  $-0.55^{\circ}\text{C}$  do  $0.45^{\circ}\text{C}$ . Dolna granica tego przedziału ( $-0.55^{\circ}\text{C}$ ) odnosi się do bezpośredniego otoczenia środkowej części kabla (rys. 4.19a,  $z=1.25$  m). Górna granica ( $0.45^{\circ}\text{C}$ ) jest osiągnięta na powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m) przy końcu strefy krawędziowej (rys. 4.20,  $z=0.25$  m).

Dla użytkownika jednym z najważniejszych parametrów jest średnia wartość temperatury danego przekroju grzejnika. Z tego względu wyznaczono ją dla każdej chwili czasu w modelu nieliniowym i liniowym. Obliczenia wykonano dla wcześniej

rozpatrywanych płaszczyzn: kabła grzewczego ( $y=0.015$  m) i powierzchni podłogi ( $y=0.06$  m). Wyniki przedstawiono na rys. 4.21. Rys. 4.22 ilustrują przebieg różnicy uśrednionych charakterystyk skokowych obydwu modeli, zaś rys. 4.23 ich różnicę względną

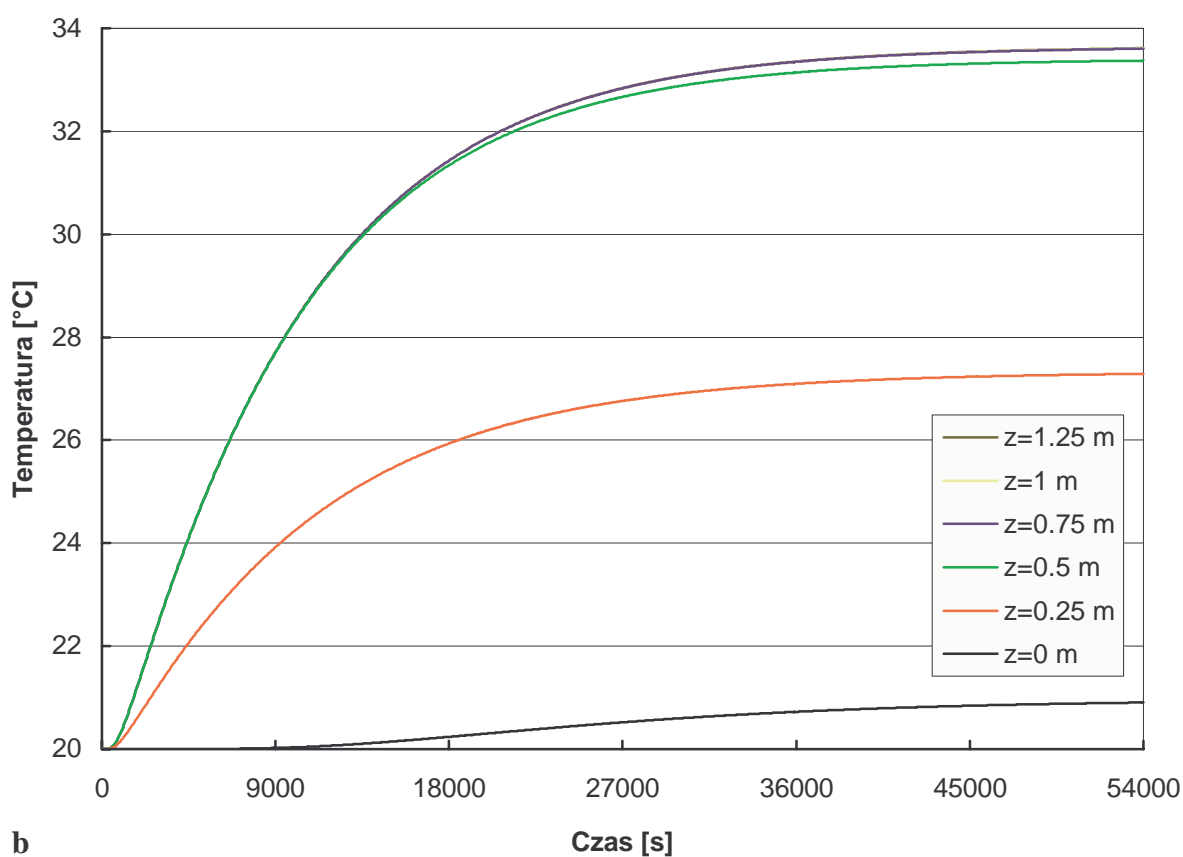
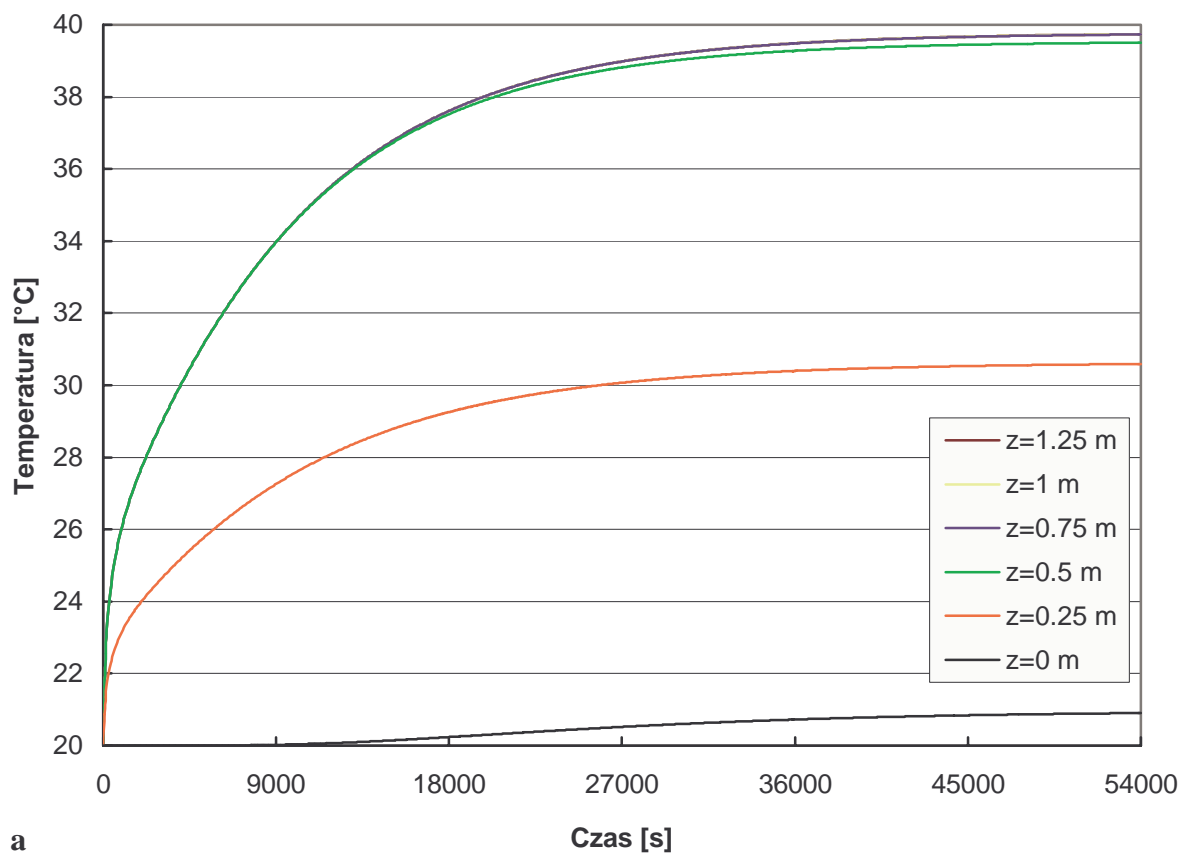
$$\delta\bar{H}(t) = \frac{\bar{H}_N(t) - \bar{H}_L(t)}{\bar{H}_N(t)} \Big|_{y=const} \cdot 100\% . \quad (4.74)$$

Jak widać, różnice względne wahają się od -0.3% do 1.3%.

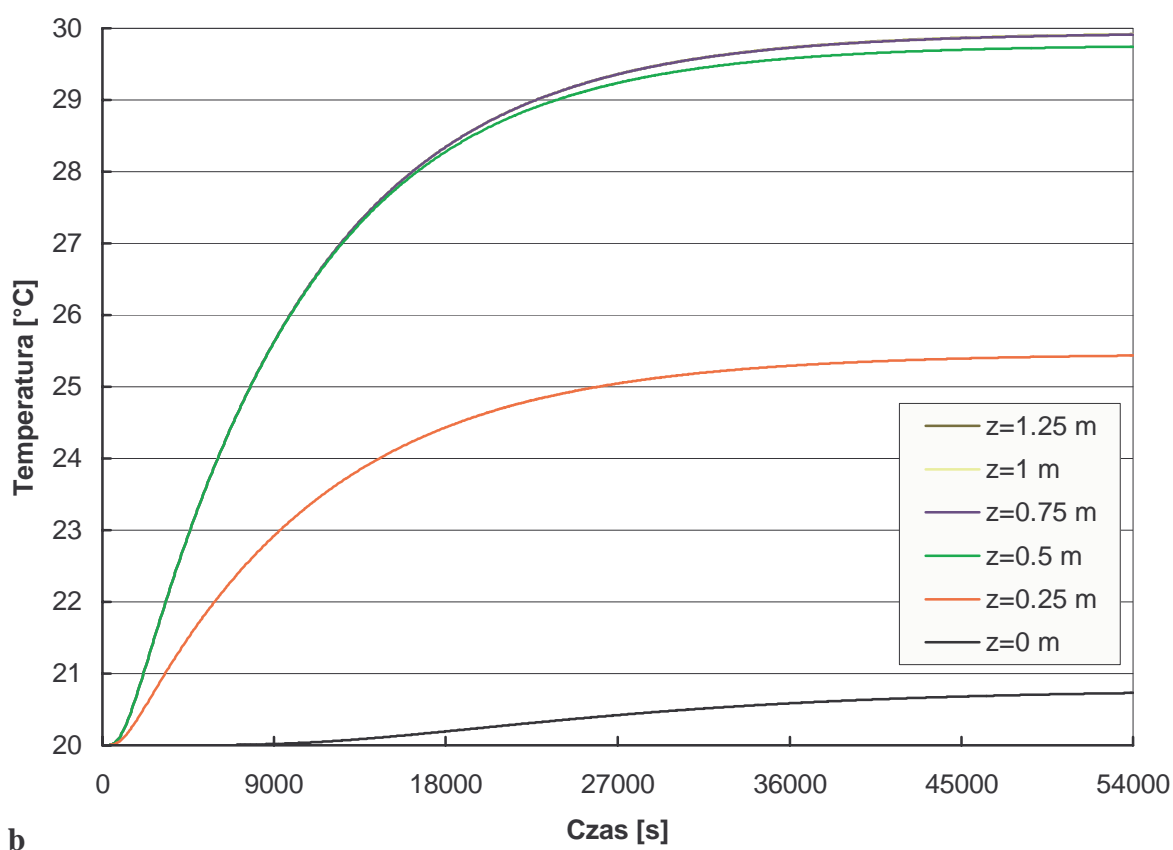
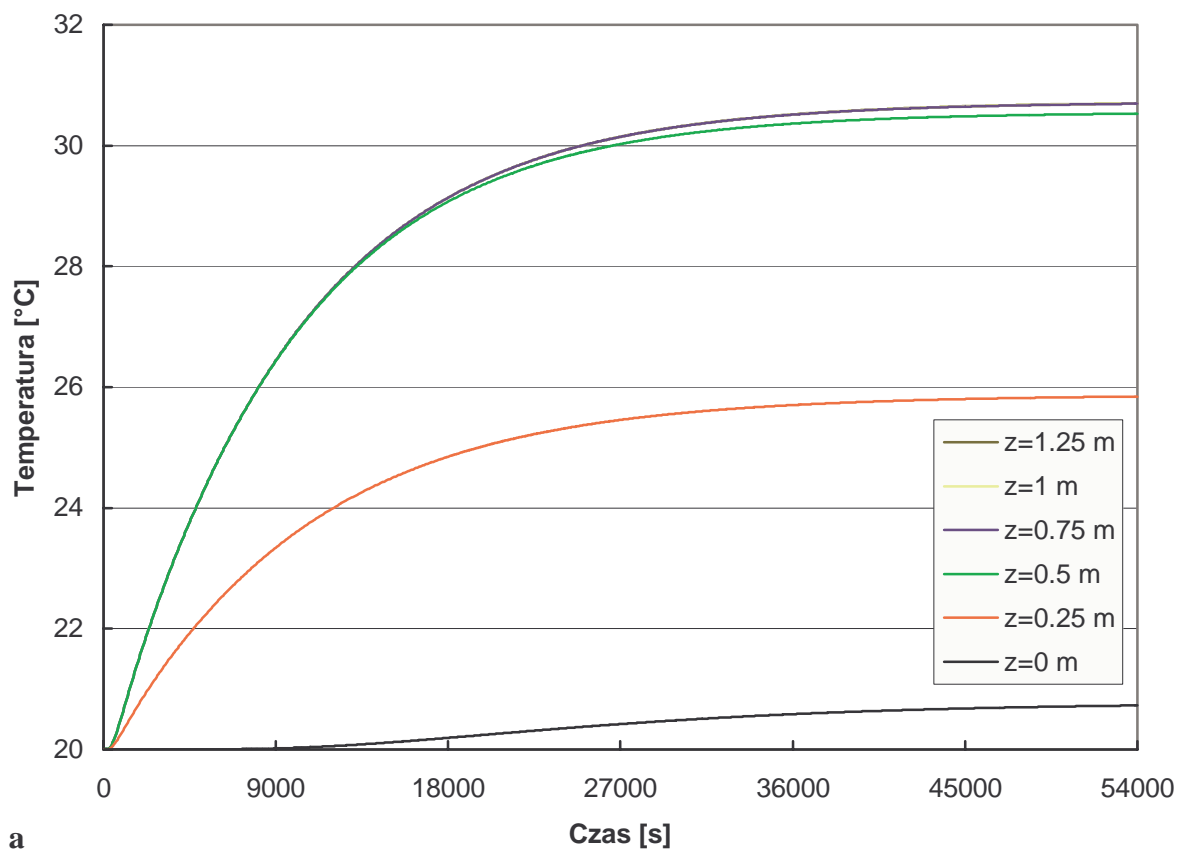
Wyznaczono także (dla  $M=54000$  s) średniokwadratową różnicę skokowych charakterystyk [16]

$$\overline{\Delta H}(x, y, z, M) = \sqrt{\frac{1}{M} \int_0^M [H_N(x, y, z, t) - H_L(x, y, z, t)]^2 dt} , \quad (4.75)$$

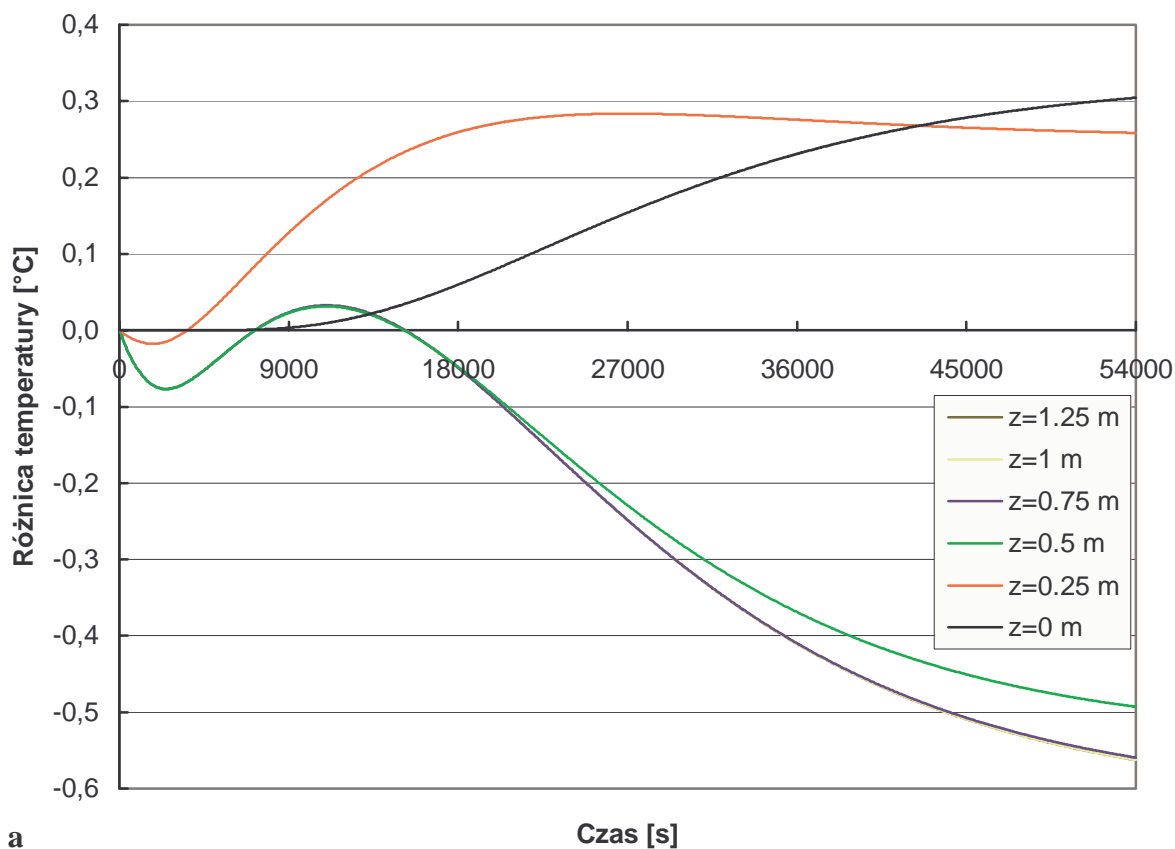
która jest niezależna od bieżącego czasu. Całkę we wzorze (4.75) obliczono metodą trapezów [60]. Wyniki przedstawiono na rys. 4.24. Największe różnice występują w bezpośrednim otoczeniu środkowej części kabła (ok.  $0.325^\circ\text{C}$ , rys. 4.24a,  $x=0.063$  m,  $z=1.25$  m) oraz na powierzchni podłogi przy końcu strefy krawędziowej (ok.  $0.4^\circ\text{C}$ , rys. 4.24b,  $z=0.25$  m). Należy podkreślić, że różnice średniokwadratowe (rys. 4.24) i zwykłe (rys. 4.19, 4.20) prowadzą do tej samej lokalizacji maksymalnych odchyień (między nieliniowymi i liniowymi charakterystykami skokowymi).



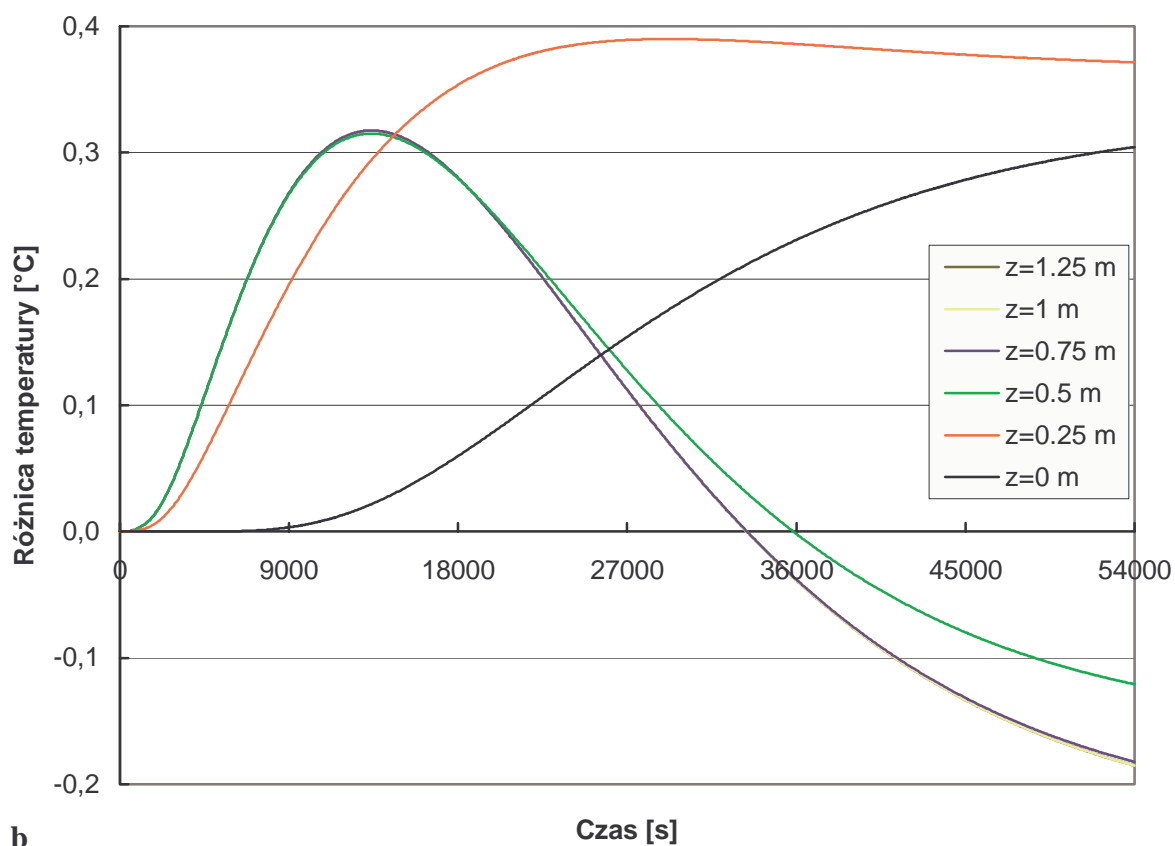
Rys. 4.17. Charakterystyka skokowa układu w modelu nieliniowym na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m): a)  $x=0.063$  m, b)  $x=0.12$  m.



Rys. 4.18. Charakterystyka skokowa układu w modelu nieliniowym na powierzchni podłogi: ( $y=2b=0.06$  m) a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.12$  m.

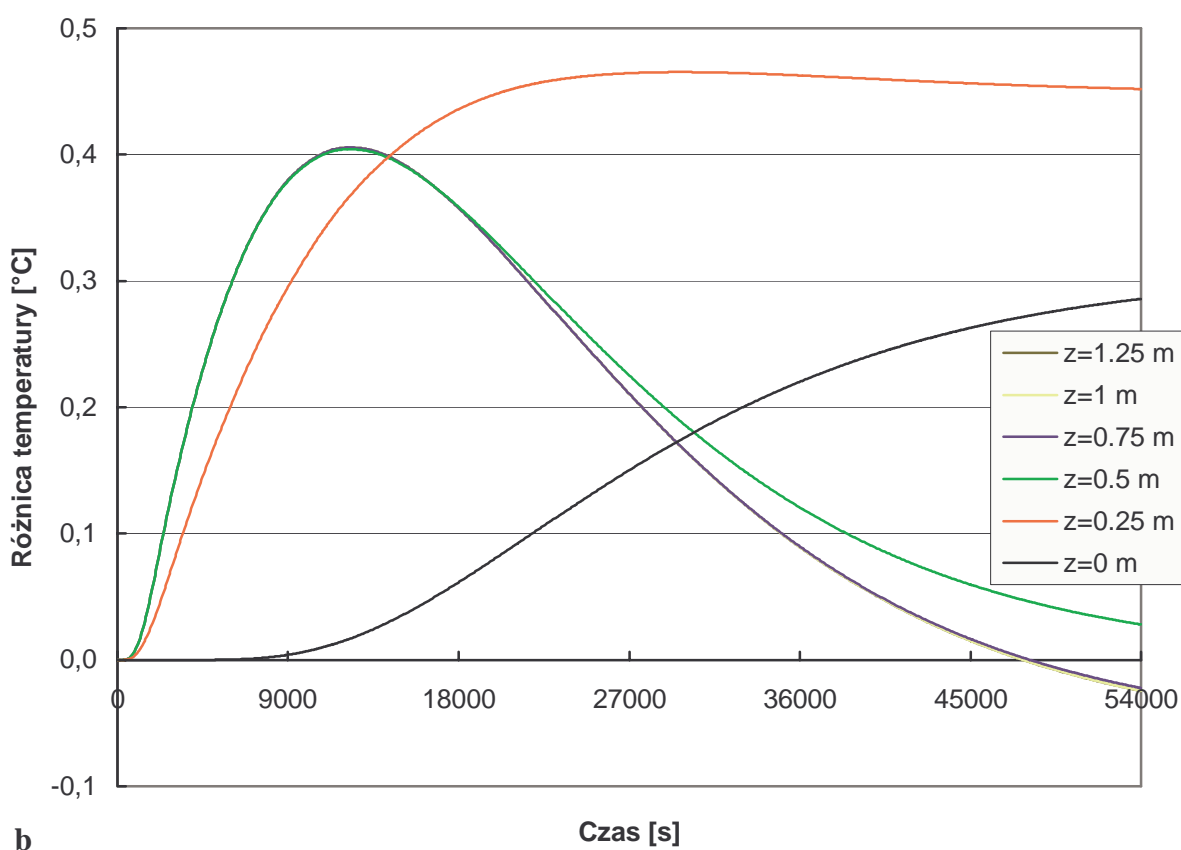
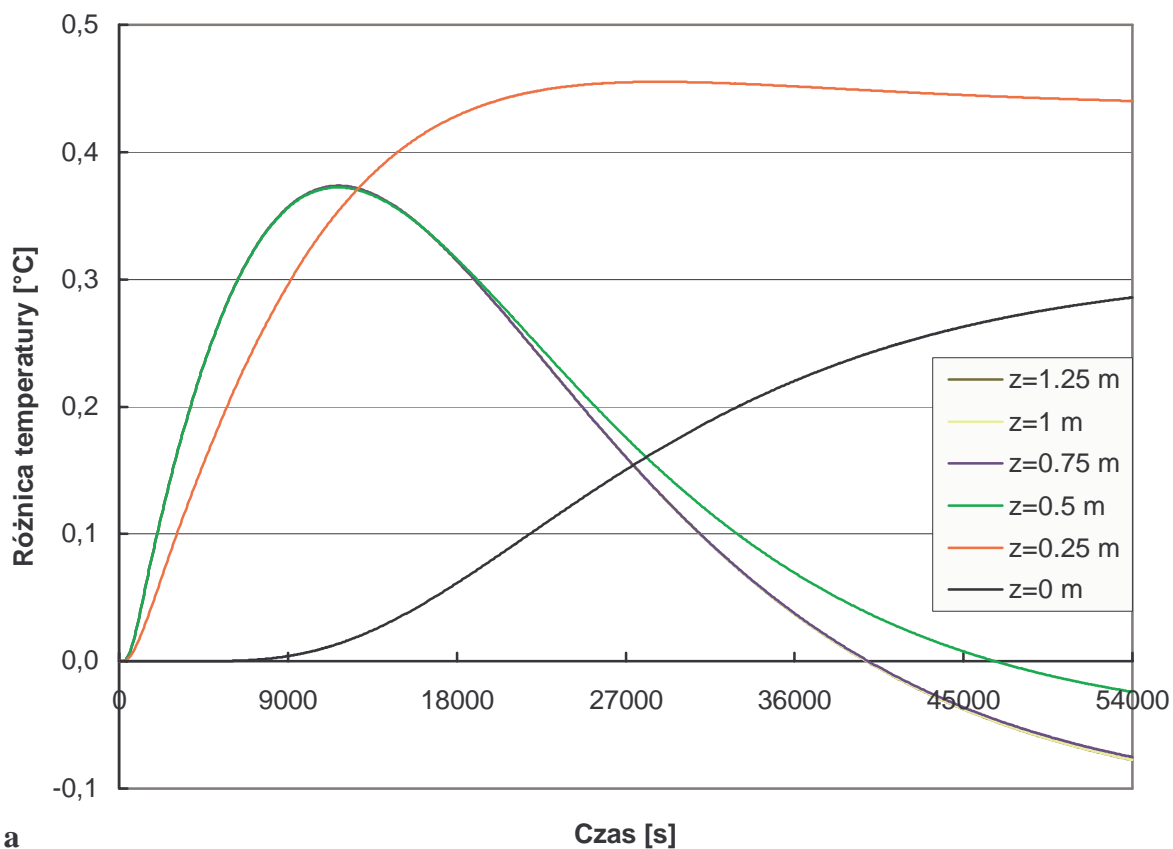


a

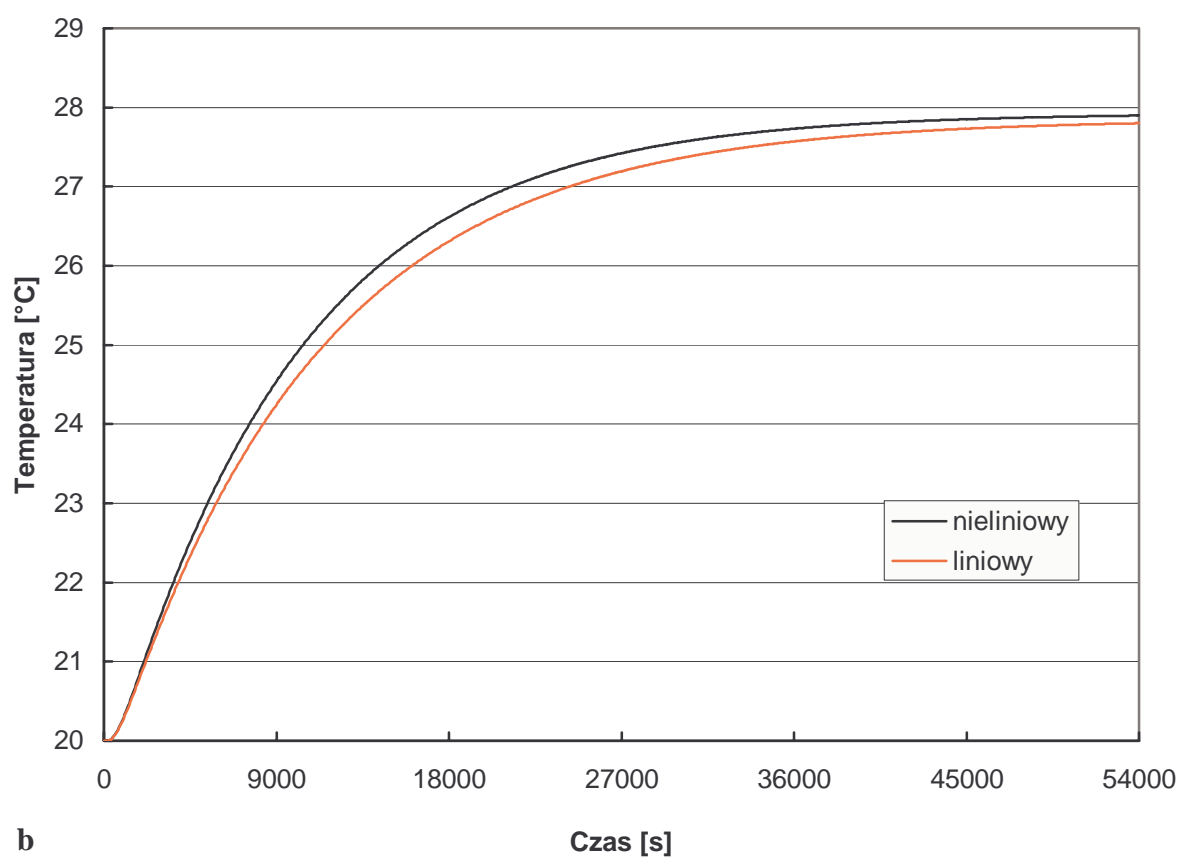
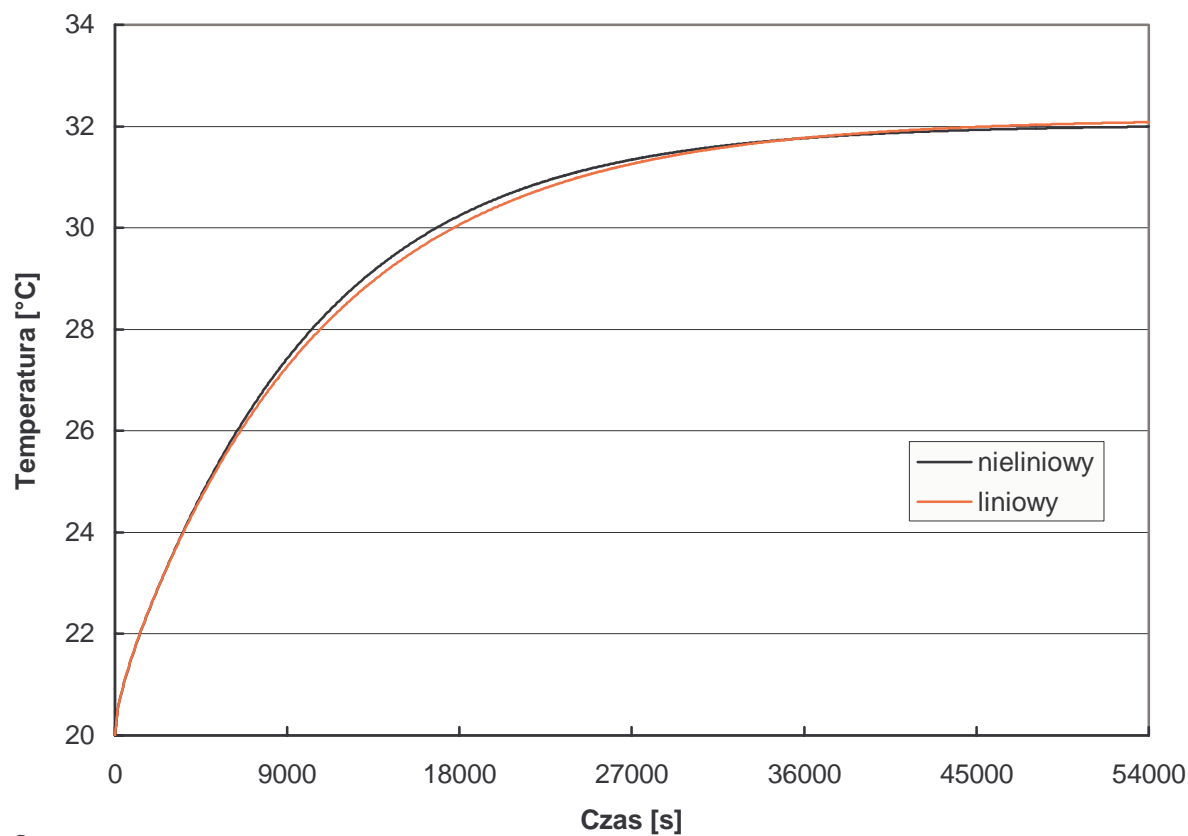


b

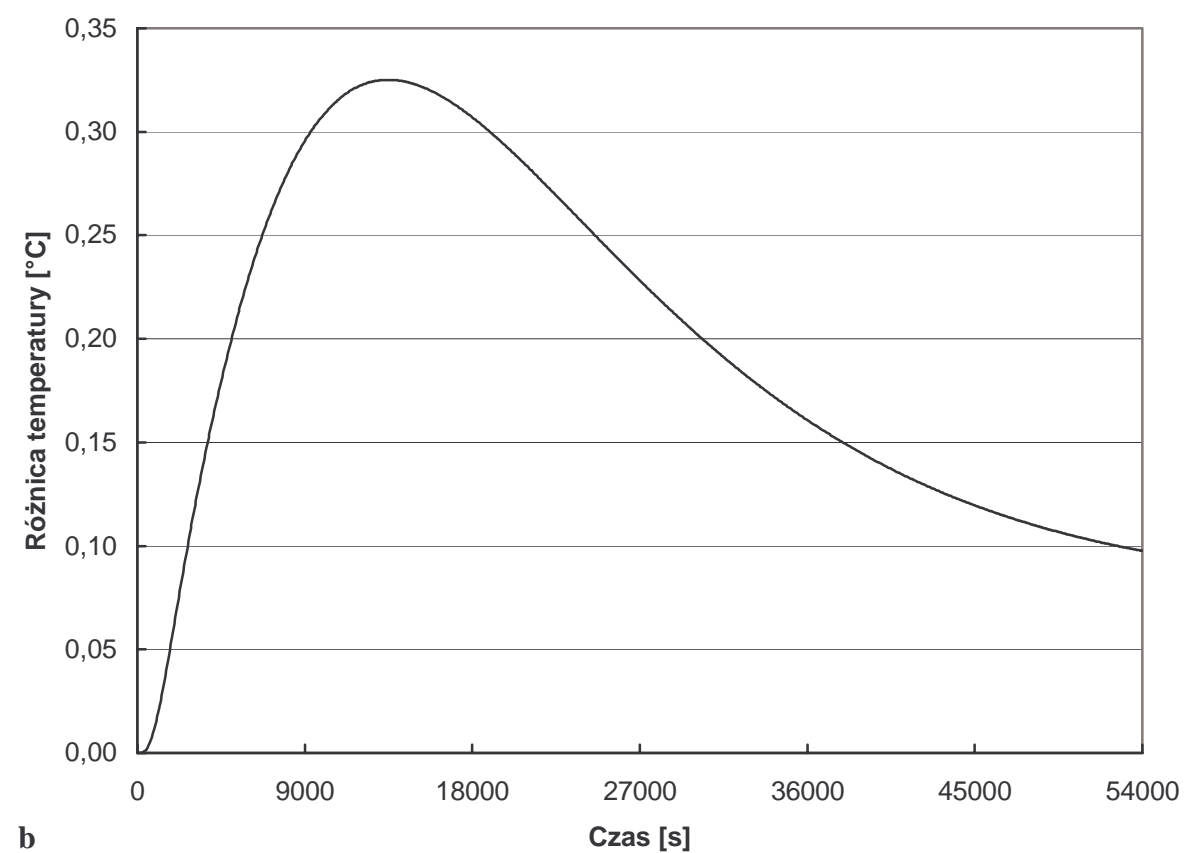
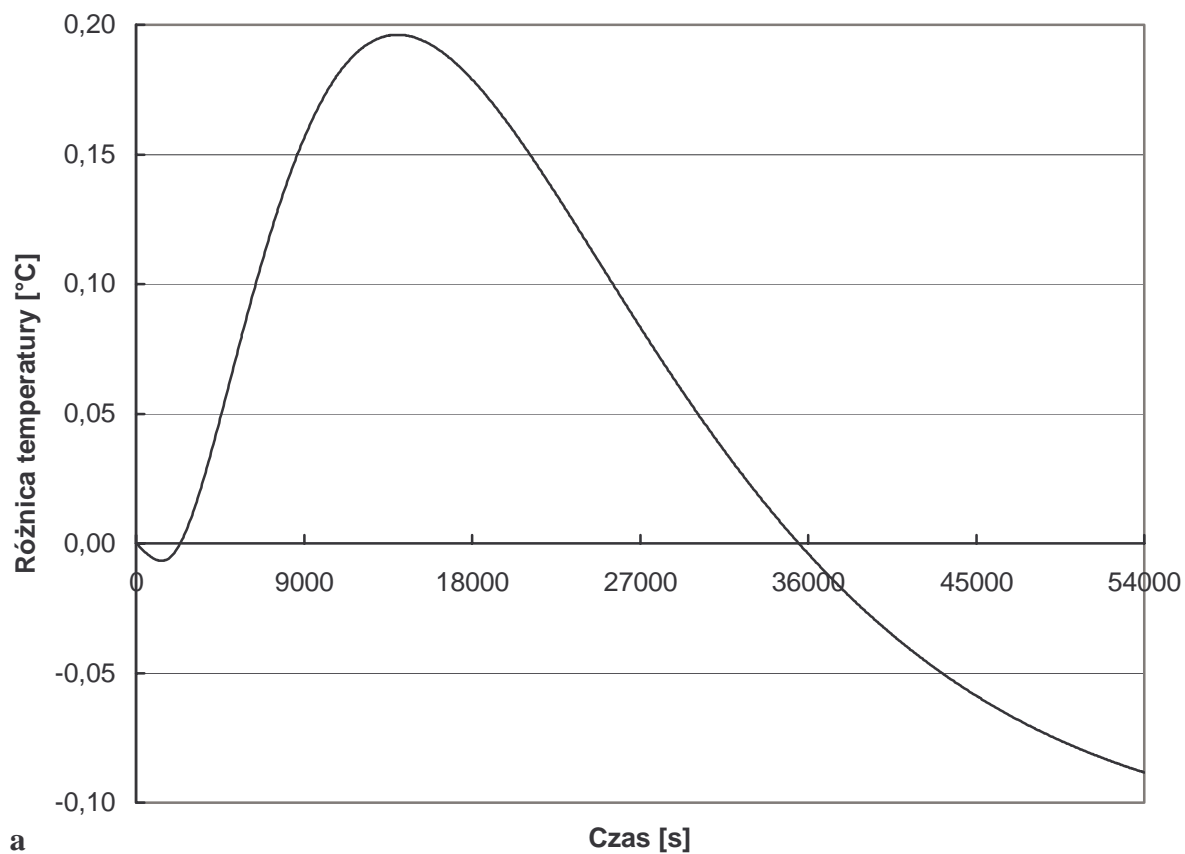
Rys. 4.19. Różnica charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego na wysokości kabla grzewczego ( $y=y_k=0.015$  m): a)  $x=0.063$  m, b)  $x=0.12$  m.



Rys. 4.20. Różnica charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego na powierzchni podłogi: ( $y=2b=0.06$  m) a)  $x=0.0605$  m, b)  $x=0.12$  m.

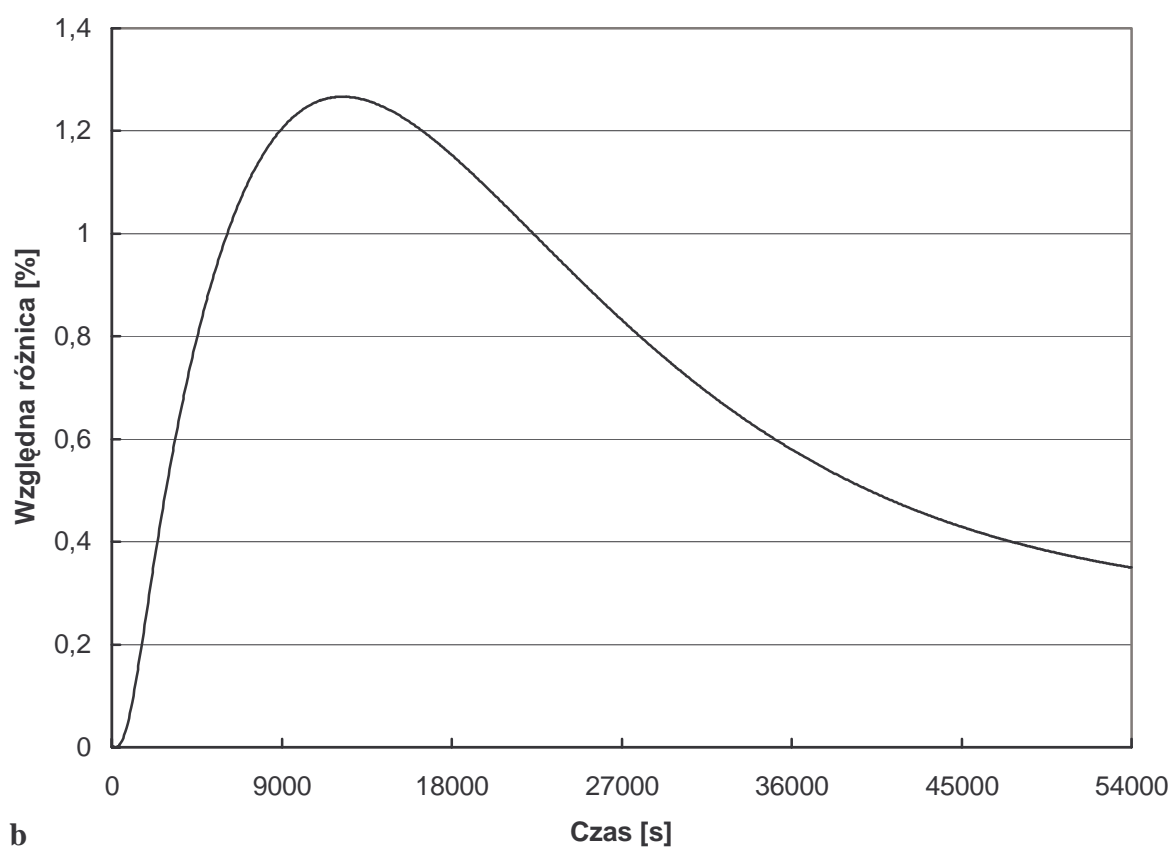
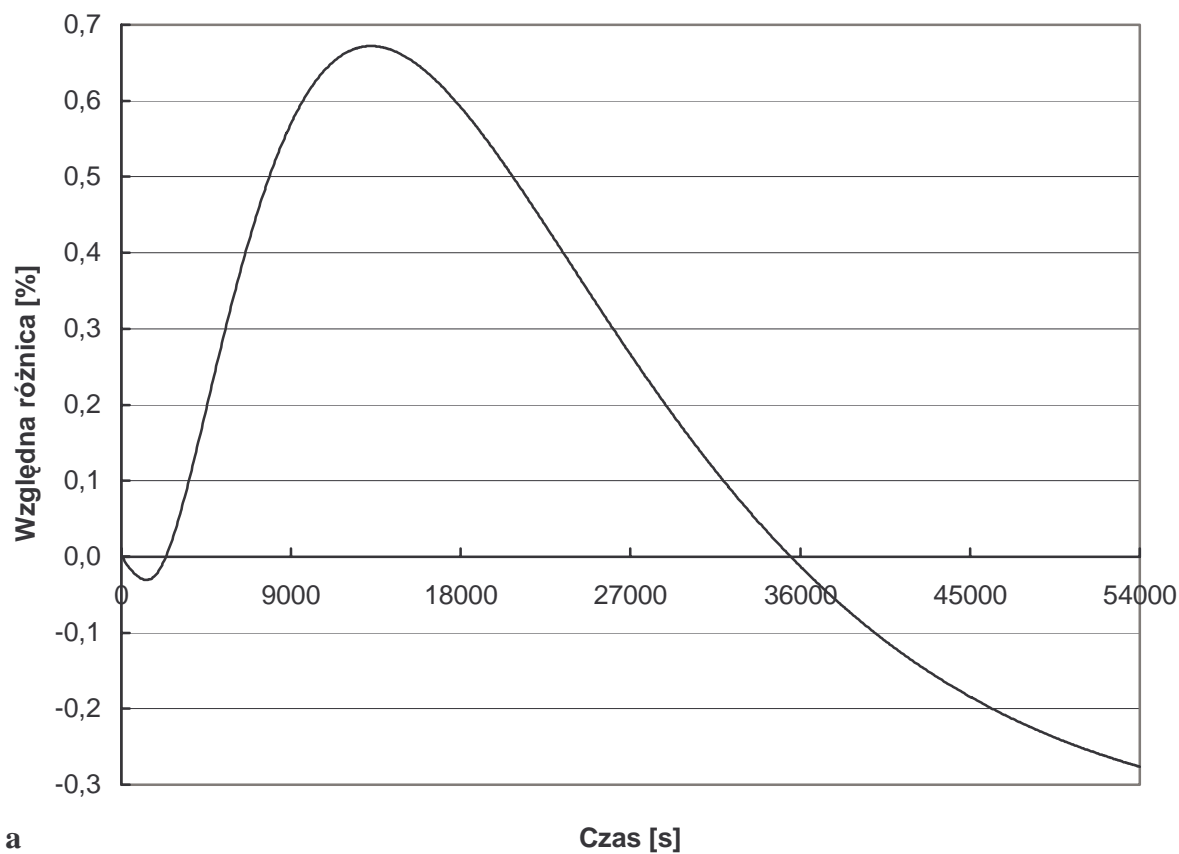


Rys. 4.21. Uśredniona charakterystyka skokowa modelu: a)  $y=y_k=0.015$  m, b)  $y=2b=0.06$  m.

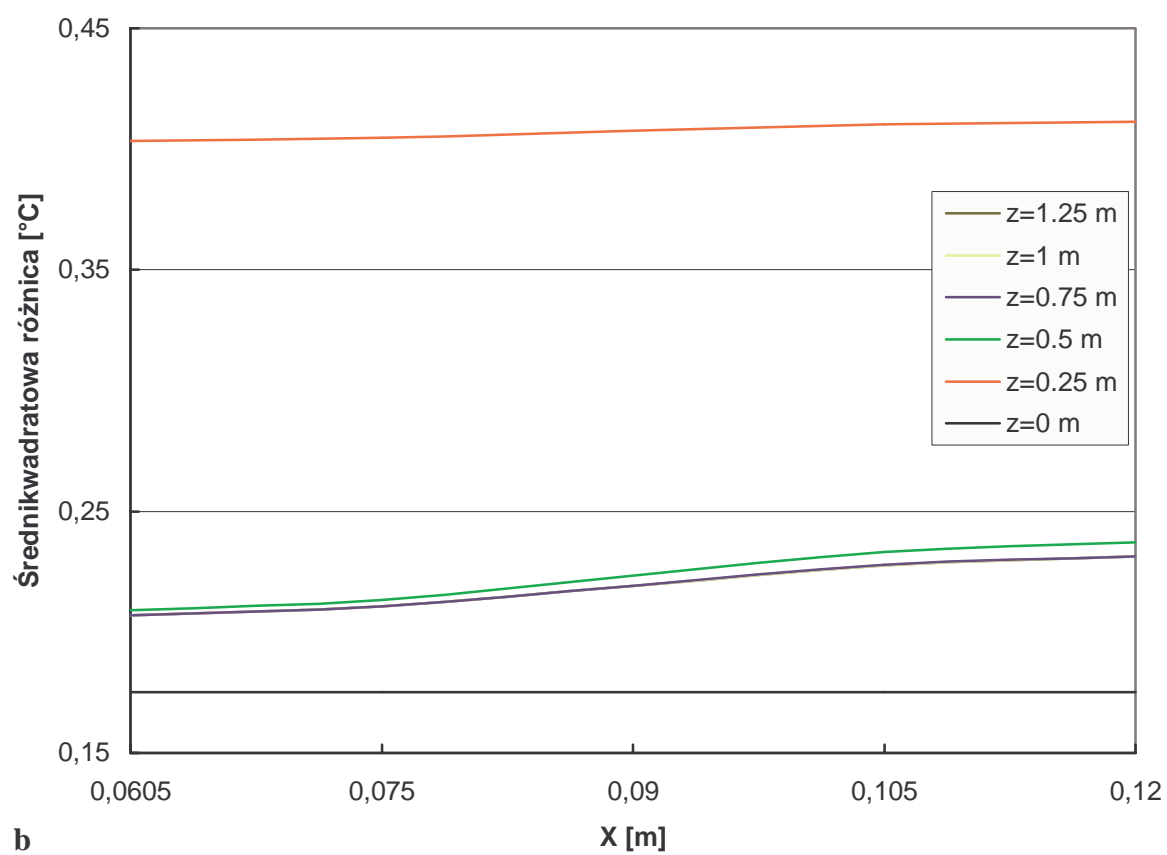
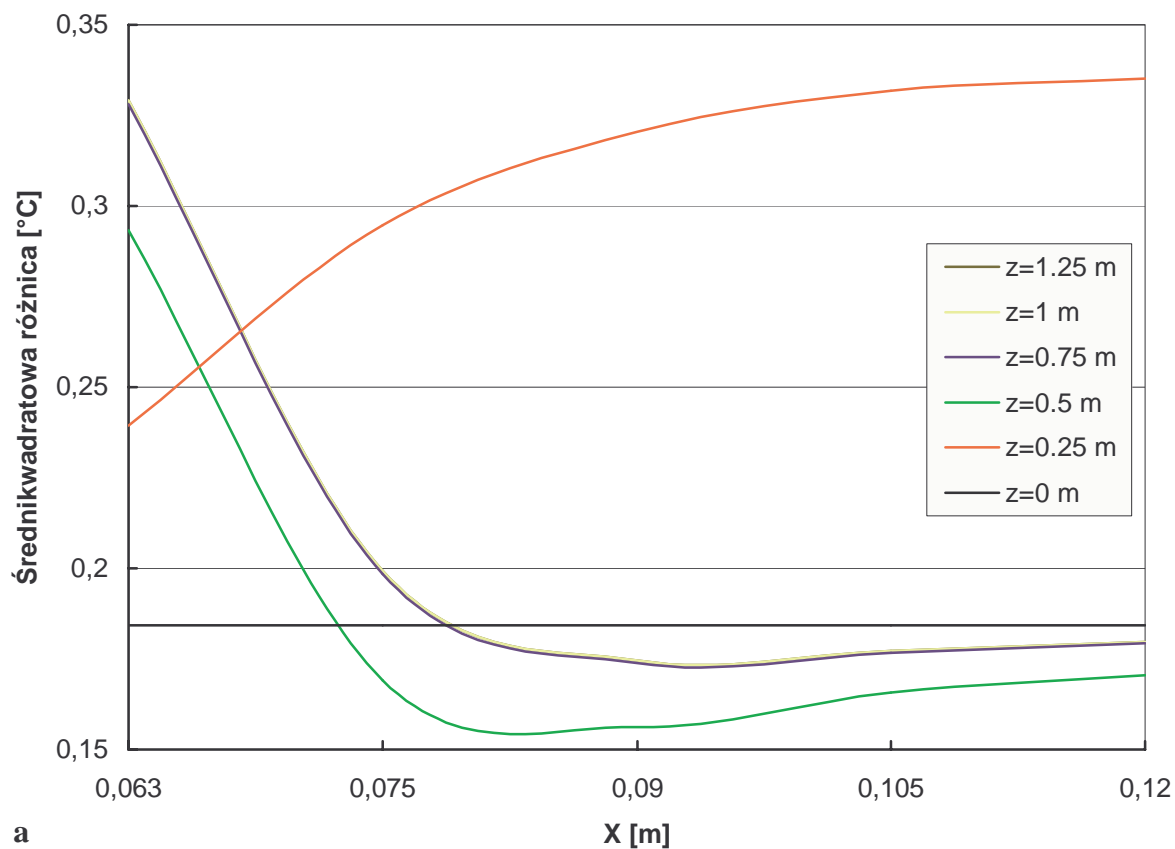


Rys. 4.22. Różnica uśrednionych charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego:  
 a)  $y=y_k=0.015$  m, b)  $y=2b=0.06$  m.





Rys. 4.23. Względna różnica uśrednionych charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego: a)  $y=y_k=0.015$  m, b)  $y=2b=0.06$  m.



Rys. 4.24. Średniokwadratowa różnica charakterystyk skokowych modelu nieliniowego i liniowego: a)  $y=y_k=0.015$  m, b)  $y=2b=0.06$  m.

#### 4.5.4. Wnioski

Analiza rys. 4.19, 4.20 i 4.22-4.24 prowadzi do następującego zestawienia:

Tabela 4.4. Wybrane informacje o różnicy charakterystyk modelu nieliniowego i liniowego.

różnica charakterystyki nieliniowej i liniowej	zakres zmian
zwykła różnica (rys. 4.19, 4.20)	od $-0.55^{\circ}\text{C}$ do $0.45^{\circ}\text{C}$
różnica uśrednionych charakterystyk (rys. 4.22)	od $-0.1^{\circ}\text{C}$ do $0.32^{\circ}\text{C}$
względna różnica uśrednionych charakterystyk (rys. 4.23)	od $-0.3\%$ do $1.3\%$
różnica średniokwadratowa (rys. 4.24)	od $0.15^{\circ}\text{C}$ do $0.4^{\circ}\text{C}$

Z powyższej tabeli wynika, że niezależnie od metody oszacowania różnice temperatury modelu nieliniowego i liniowego są niewielkie. Krzywe rozgrzewu z rys. 4.17, 4.18 są zatem silnie zbliżone do narastających przebiegów wykładniczych. Należy więc przyjąć wniosek, że założenie modelu liniowego nie wpływa w istotny sposób na przestrzenno-czasową charakterystykę skokową badanego układu. Przyczyny tego stanu rzeczy są takie same, jak w przypadku stacjonarnym (rozdział 3.2.4):

- a) występuje mała różnica między ekstremalnymi temperaturami grzejnika (ok.  $20^{\circ}\text{C}$ ),
- b) stałe wartości przewodności cieplnej i współczynnika przejmowania ciepła zostały właściwie dobrane.

W podsumowaniu należy stwierdzić, że wyniki niniejszego rozdziału oraz paragrafu 3.2.4 dowodzą słuszności tezy nr 4 (str. 12). Teza ta ma duże znaczenie praktyczne. Pozwala bowiem uniknąć pracochłonnych badań nad zbędnymi szczegółami (np. wielokrotnych iteracji i wydłużenia czasu obliczeń). Linearyzacja układu umożliwia też zastosowanie bardzo użytecznych zasad i twierdzeń (np. superpozycji, o splocie, Duhamela itd.).

---

## 5. Zakończenie

Niniejszą rozprawę poświęcono modelowaniu pola termicznego w elektrycznym grzejniku podłogowym typu bezpośredniego. Analizowano rozkłady temperatury w dwu- i trójwymiarowych modelach w stanie ustalonym i nieustalonym. Przyjęto pewne założenia upraszczające, które następnie zweryfikowano. Stosowano jednocześnie różne metody analizy w celu wykluczenia błędów w procesie modelowania grzejnika. Zbudowano również stanowisko doświadczalne do badania układu. W związku z tak przyjętym zakresem pracy, rozprawę podzielono na pięć rozdziałów.

W rozdziale pierwszym omówiono rodzaje elektrycznego ogrzewania podłogowego i korzyści płynące z jego zastosowania. Przedstawiono również stan dotychczasowych badań nad układami tego typu. Grzejniki projektowano głównie w oparciu o nomogramy, wykresy i wzory półempiryczne. Pewien wyjątek stanowiły grzejniki akumulacyjne, modelowane połowo w dwóch wymiarach na drodze numerycznej. Dalszy rozwój tej tematyki wymagał więc opracowania trójwymiarowych modeli analitycznych grzejnika bezpośredniego. Należało również pamiętać o numerycznej i doświadczalnej weryfikacji rezultatów. Z przedstawionego poglądu wyniknęły cele, tezy i oryginalne elementy pracy wyszczególnione w pierwszym rozdziale. Tam też opisano budowę układu oraz sformułowano graniczne zagadnienie jego pola termicznego.

W rozdziale drugim analizowano składową ustaloną pola w trójwymiarowym układzie przy pewnych założeniach upraszczających. Punktem wyjścia było cząstkowe równanie Poissona z warunkami brzegowymi Neumanna i Henkela. Na tej podstawie przeprowadzono dwie niezależne symulacje (analityczną i numeryczną). W tej pierwszej żyłę kabla modelowano nieskończenie cienką osią i zastosowano potrójny szereg funkcji własnych operatora Laplace'a. W symulacji numerycznej źródłami ciepła były prawidłowe graniastosłupy ośmiokątne wpisane w żyłę oporową. W tym ostatnim przypadku zastosowano metodę elementów skończonych. Wyniki obu symulacji były zbliżone z dużym stopniem dokładności. Porównano również dwu-

i trójwymiarowe rozkłady pól. Otrzymane rezultaty potwierdziły tezę nr 1, 2 i 5 (str. 11, 12) w odniesieniu do składowej ustalonej.

Rozdział trzeci podzielono na cztery podrozdziały. W pierwszych trzech przeprowadzono weryfikację założeń upraszczających, przyjętych w rozdziale drugim. W związku z tym, w paragrafie 3.1 przeanalizowano wpływ zagięć kabla, które zwiększyły równomierność rozkładu temperatury. Tak jak w rozdziale drugim, zastosowano dwie metody analizy układu. Przeprowadzone badania potwierdziły tezę nr 3 (str. 12). Należy podkreślić, że w analitycznym opisie źródeł ciepła zastosowano dwuwymiarową funkcję Diraca i ciąg bramek prostokątnych.

Następnie w rozdziale 3.2 omówiono wpływ zależności współczynnika wymiany ciepła ( $\alpha$ ) i cieplnej przewodności betonu ( $\lambda$ ) od temperatury. Wspomniana zależność prowadzi do nieliniowego zagadnienia brzegowego, które rozwiązano metodą elementów skończonych. Prezentowana różnica (rozdział 3.2) między modelem liniowym i nieliniowym pozwoliła na udowodnienie tezy nr 4 (str. 12) w odniesieniu do składowej ustalonej pola.

Z kolei w paragrafie 3.3 zbadano wpływ stratności izolacji cieplnej na pole temperatury. W rezultacie oszacowano, że błąd spowodowany idealizacją izolacji nie ma większego znaczenia.

W ostatniej części rozdziału trzeciego przedstawiono wyniki eksperymentu. Za pomocą termoelementów i pirometru dokonano pomiarów na doświadczalnym modelu grzejnika. Otrzymane rezultaty są tego samego rzędu co wyniki obliczeń teoretycznych i potwierdzają kierunki zmian rozkładu pola termicznego. Świadczy to o poprawności przedstawionego modelu matematycznego badanego układu i o słuszności tezy nr 5 (str. 12).

Rozdział czwarty poświęcono analizie nieustalonego pola temperatury w dwu- i trójwymiarowym układzie. Z uwagi na podobny aparat matematyczny zdecydowano się na równoległą analizę obydwu przypadków. Punktem wyjścia były paraboliczne zagadnienia graniczne. Nie licząc „wstępu”, rozdział podzielono na cztery części.

W paragrafie 4.2 badano skokową odpowiedź układu (tzw. krzywą rozgrzewu). Do rozwiązania problemu użyto trzech metod:

1. metodę analityczną, tzn. superpozycji stanów (gdzie wykorzystano wyniki drugiego rozdziału, zaś składową przejściową wyznaczono rozdzielając zmienne w jednorodnym równaniu dyfuzji ciepła).
2. kryterium lokalnej i globalnej stałej czasowej (co oznacza, że w dowolnym punkcie obszaru dynamikę układu o parametrach rozłożonych aproksymowano skupionym elementem pierwszego rzędu).
3. metodę elementów skończonych (gdzie do dyskretyzacji przestrzeni wykorzystano procedurę Galerkiną, zaś do dyskretyzacji czasu metodę wstecznego ilorazu różnicowego).

W paragrafie 4.3 modelowano układ sterowany regulatorem dwupołożeniowym. Zastosowano cztery metody symulacji (trzy znane z rozdziału 4.2 oraz dodatkowo superpozycję charakterystyk skokowych). Z wyjątkiem kryterium uśrednionej stałej czasowej (które nie uwzględnia procesów bezwładnościowych), pozostałe metody dały zgodne wyniki. Potwierdziło to tezę nr 5 (str. 12). Okazało się też, że przestrzenno-czasowy rozkład temperatury silnie zależy od współrzędnej geometrycznej liczonej wzdłuż kabla. W układzie trójwymiarowym wyróżniono zatem przebiegi: rosnące, aperiodycznie rosnące i malejące oraz oscylacyjne. Przy generacji ciepła nieskończenie długim kablem (tzn. w dwóch wymiarach) przebiegi są wyłącznie oscylacyjne.

W paragrafie 4.4 porównano nieustalone przebiegi temperatury w modelu dwu- i trójwymiarowym. Okazało się, że rozbieżności dotyczą tego samego obszaru, co w przypadku składowej ustalonej (paragraf 2.5). Udowodniono zatem tezę nr 1 i 2 (str. 11, 12).

Niestety, brak jest podstaw do zmajoryzowania różnicy skrajnych temperatur w stanie nieustalonym przez analogiczną wielkość w stanie ustalonym. Nie można więc powtórzyć wyводу dotyczącego wpływu zagięć kabla i stratności izolacji cieplnej. Z tej przyczyny w rozdziale 4.5 powtórzono badania z paragrafu 3.2, lecz w odniesieniu do zjawisk dynamicznych. Różnice między modelem liniowym i nieliniowym okazały się niewielkie, co ostatecznie potwierdziło tezę nr 4 (str. 12).

Rozprawę kończy krótki rozdział przedstawiający jej strukturę oraz podsumowujący dokonania autora. Do pracy dołączono „dodatek” z wydrukami programów służących do tablicowania otrzymanych zależności analitycznych. Dokładniejsze wnioski zamieszczono w poszczególnych rozdziałach pracy.

Z przedstawionego przeglądu dokonań wynika, że tezy rozprawy (str. 11, 12) zostały uzasadnione. W tabeli 5.1 zamieszczono numery rozdziałów i stron, które umożliwiają szybką lokalizację obszerniejszych dowodów poszczególnych tez. Wspomniane dowody często wymagały zwizualizowania wyznaczonych rozkładów temperatury. Rozprawa zawiera więc bogaty materiał graficzny, co prawdopodobnie jest jej zaletą.

Tab. 5.1. Lokalizacja uzasadnień poszczególnych tez rozprawy.

Teza	Rozdział i strona pracy					
Teza nr 1	Rozdział 2.6	str. 46,	rozdział 4.4	str. 138		
Teza nr 2	Rozdział 2.6	str. 46,	rozdział 4.4	str. 138		
Teza nr 3	Rozdział 3.1.5	str. 66,	rozdział 4.5.1	str. 143		
Teza nr 4	Rozdział 3.2.4	str. 73,	rozdział 4.5.4	str. 155		
Teza nr 5	Rozdział 2.6	str. 46,	rozdział 3.1.4	str. 65,	rozdział 3.4.3	str. 92,
	rozdział 4.2.6	str. 116,	rozdział 4.3.7	str. 137		

Oryginalne elementy rozprawy (str. 12) oraz uzasadnienie jej tez (tab. 5.1) sprawiło, że został osiągnięty zasadniczy cel pracy: przedstawiono kompleksowy matematyczny model pola termicznego w elektrycznym grzejniku podłogowym typu bezpośredniego.

---

## Literatura

- [ 1] Baade W.: Elektrische Raum-Heiztechnik. Installieren-Warten-Prüfen. Verlag Technik, Berlin 1995.
- [ 2] Bathe K. J.: Finite – Elemente Methoden. Springer – Verlag, Berlin 1990.
- [ 3] Beck J. V., Cole K. D., Haji-Sheikh A., Litkouhi B.: Heat conduction using Green's functions. Hemisphere Publishing Corporation, London-Philadelphia 1992.
- [ 4] Cannon R. H.: Dynamika układów fizycznych. WNT, Warszawa 1973.
- [ 5] Cavendish J. C.; Field D. A.; Frey W. H.: Automatic mesh generation: a finite element computer aided geometric interface. In: Mathematics of Finite Elements and Applications. Mafelap V, Academic Press 1984.
- [ 6] Dzierżganowski M., Rabjasz R., Wereszyński P.: Wytyczne projektowania elektrycznego ogrzewania podłogowego. PPH Elektra, Warszawa 1994.
- [ 7] Feirweather G.: Finite element Galerkin methods for differential equations. Marcel Dekker Inc., New York 1978.
- [ 8] Gołębiowski J., Jabłoński W.: Numeryczna symulacja stacjonarnego pola temperatury w poprzecznym przekroju elektrycznego pieca oporowego. Archiwum Elektrotechniki 1994. Tom XLIII, Zeszyt 3, s. 643-662.
- [ 9] Gołębiowski J., Kwiećkowski S.: Analiza stacjonarnej składowej trójwymiarowego pola temperatury w grzejniku podłogowym. XIX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice-Ustroń 1996, tom II, s. 221-224.
- [10] Gołębiowski J., Kwiećkowski S.: Analytical and numerical modelling of a stationary temperature field in a three dimensional electric heating system. Electrical Engineering – Archiv für Elektrotechnik 1998, vol. 81, no. 2, pp. 69-76.
- [11] Gołębiowski J., Kwiećkowski S.: Numeryczna symulacja ustalonego pola temperatury w elektrycznie ogrzewanej podłodze. II Konferencja Naukowo-Techniczna „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice”, Poznań-Kiekrz 1997, s. 315-318.



- [12] Gołębiowski J., Kwiećkowski S.: Wpływ nieliniowych właściwości betonu na rozkład pola temperatury w elektrycznym grzejniku podłogowym. Prace II Konferencji Naukowo-Technicznej „Metody i Systemy Komputerowe w Automatyce i Elektrotechnice”, Częstochowa - Poraj 1997, s. 241-244.
- [13] Gołębiowski J., Peterson W.: Mathematical modelling of the thermal field by means of Green's function synthesis in the cross-sections with curved boundaries. *Systems Analysis-Modelling-Simulation* 1995, vol. 21, pp. 57-68.
- [14] Gołębiowski J., Peterson W.: Stationary thermal field in a long duct of an electrical heating system. *Electrical Engineering - Archiv für Elektrotechnik* 1996, vol. 79, no. 1, pp. 17-22.
- [15] Guide to the expression of uncertainty in measurement. ISO 1995. (przekład polski: Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii. GUM 1996.)
- [16] Hagel R., Zakrzewski J.: Miernictwo dynamiczne. WNT, Warszawa 1984.
- [17] Heizgeräte – Klimageräte, Relegeräte I, Siemens A. G., 3.1, 1987.
- [18] Hering M.: Podstawy elektrotermii. WNT, Warszawa 1992.
- [19] Hering M.: Projektowanie ogrzewania rurociągów, rynien, rur spustowych, i ciągów komunikacyjnych. PPH Elektra, Warszawa 1994.
- [20] Hering M.: Termokinetyka dla elektryków. WNT, Warszawa 1980.
- [21] Hofmann D.: Dynamische Temperaturmessung. Verlag Technik, Berlin 1976.
- [22] Holman J. P.: Heat Transfer. Mc Graw – Hill, New York 1986.
- [23] Januszkiewicz K. T.: Analiza pracy elektrycznej akumulacyjnej podłogi grzejnej. VII Konferencja „Badania Naukowe w Elektrotermii”, Międzybrodzie Żywieckie 1997, s.119-124.
- [24] Januszkiewicz K. T.: Elektryczne akumulacyjne ogrzewanie podłogowe. PPH Elektra, Warszawa 1994.
- [25] Januszkiewicz K. T.: Elektryczne akumulacyjne ogrzewanie pomieszczeń. Ośrodek Informacji „Technika Instalacyjna w Budownictwie”, Warszawa 1998.
- [26] Januszkiewicz K. T.: Komputerowa analiza pola temperatury w elektrycznej podłodze grzejnej. Konferencja „Wspomaganie Projektowania Urzędzeń w Elektrotermii”, Szczyrk 1994, s. 9-17.

- [27] Januszkiewicz K. T.: Numerical model of the periodical operation of the electric storage floor heating. Archives of Electrical Engineering 1995, vol. XLIV, no 3, pp. 427-437.
- [28] Jaworski J. M.: Niedokładność, błąd, niepewność. XXIX Międzyuczelniana Konferencja Metrologów, Nałęczów 1997, tom I, s. 197-216.
- [29] Jordan A. J., Benmouna M.: Optimal linearization method, applications to some nonlinear physical systems. Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Białystok 1989.
- [30] Jüttemann H.: Elektrisch Heizen und Klimatisieren. VDI – Verlag, Düsseldorf 1979.
- [31] Kämmer G.; Franck H.; Recke H. G.: Einführung in die Methode der finiten Elemente. Carl Hanser, München, Wien 1990.
- [32] Kandzia T., Klik S.: Excel 7.0 dla Windows 95. Wydawnictwo PLJ, Warszawa 1996.
- [33] Kaćki E.: Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki. WNT, Warszawa 1992.
- [34] Kaćki E.: Termokinetyka. WNT, Warszawa 1967.
- [35] Kotarba J.: Energia elektryczna w ogrzewaniu pomieszczeń. WNT, Warszawa 1992.
- [36] Krawczyk A., Tegopoulos J. A.: Numerical modelling of eddy currents. Clarendon Press, Oxford 1993.
- [37] Kwiatkowski M.: Zastosowanie przewodów grzejnych Elektra w ogrodnictwie. PPH Elektra, Warszawa 1994.
- [38] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Doświadczalna weryfikacja komputerowej symulacji elektrycznego grzejnika podłogowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, seria: Elektryka, nr 15, s. 33-40.
- [39] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Oszacowanie wpływu stratności izolacji cieplnej na stacjonarne pole temperatury w grzejniku podłogowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, seria: Elektryka 1999, nr 15, s. 25-32.
- [40] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Simulation of the cable bends influence on the thermal field distribution in a floor heater. Systems Analysis-Modelling-Simulation 1999, vol. 36, no. 3, pp. 253-269.

- [41] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Transient thermal field in a long duct of an electrical floor heating. Part I. Step response of the system. Archives of Electrical Engineering (przyjęto do druku).
- [42] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Transient thermal field in a long duct of an electrical floor heating. Part II. Operation with a regulator. Archives of Electrical Engineering (przyjęto do druku).
- [43] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Wykorzystanie metody elementów skończonych do analizy wpływu zagięć kabla na rozkład pola temperatury w grzejniku podłogowym. III Konferencja Naukowo - Techniczna „Zastosowania Komputerów w Elektrotechnice”. Część 2c „Elektrotermia”, Poznań - Kiekrz 1998, s. 405-408.
- [44] Kwiećkowski S., Gołębiowski J.: Wykorzystanie metody funkcji własnych do analizy wpływu zagięć kabla na rozkład pola temperatury w grzejniku podłogowym. XXI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Część 3 „Pola sprzężone”, Gliwice - Ustroń 1998, s. 251-255.
- [45] Lehner G.: Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker. Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg 1996.
- [46] Lipiński W., Gołębiowski J.: Modelling of electromagnetic shield dynamics. IEEE Transactions on Magnetics 1980, vol. 16, no. 6, pp. 1419-1422.
- [47] Lipiński W., Kornatowski E.: Über die Eindringzeit des elektromagnetisches Feldes in einer zylindersymmetrischen Abschirmung. Archive of Electrical Engineering 1994, vol. XLIII, no. 3, pp. 663-667.
- [48] Lipiński W.: Analiza pól elektromagnetycznych. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1992.
- [49] Michalski L., Eckersdorf K., Kucharski J.: Termometria. Przyrządy i metody. Politechnika Łódzka, Łódź 1998.
- [50] Nowicki J., Chmielowski A.: Ogrzewanie podłogowe. Poradnik. Branżowy Ośrodek Informacji Naukowej, Technicznej i Ekonomicznej „Instal”, Warszawa 1995.
- [51] Palic M.: Elektrische Wärme-und Heiztechnik. Expert Verlag, Ehningen bei Böblingen 1992.

- [52] Purczyński J.: Wyznaczanie transmitancji obiektu na podstawie odpowiedzi skokowej. XVI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice-Ustroń 1993, tom II, s. 77-82.
- [53] Rabjasz R., Dzierzganowski M.: Ogrzewanie podłogowe. Poradnik. Centralny Ośrodek Informacji Budownictwa, Warszawa 1995.
- [54] Rolicz P.: Application of the Stone-Weierstrass theorem to the creation of complete sequences in space of integrable functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 1994, vol. 18, no. 2, pp. 505-523.
- [55] Rolicz P.: Temperature and stresses in a cylindrical conductor with an alternating current. *Journal of Applied Physics* 1978, vol. 49, no. 8.
- [56] Ryżyk I. M., Gradstejn I. S.: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN, Warszawa 1964.
- [57] Szargut J. [i inni]: *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. WNT, Warszawa 1992.
- [58] Takahashi Y., Rabins M. J., Auslander D. M.: *Control and dynamic systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading-Massachusetts 1972.
- [59] Tichonow A. N., Samarski A. A.: *Równania fizyki matematycznej*. PWN, Warszawa 1963.
- [60] Turowski J., Zakrzewski K., Sikora R., Pawluk K.: *Analiza i synteza pól elektromagnetycznych*. Ossolineum, Warszawa 1990.
- [61] *User's Manual for NISA II: Numerically integrated elements for systems analysis*. Engineerrig Mechanics Resarch Corporation (EMRC), Troy, Michigan, USA 1991.
- [62] Wrona W.: *Matematyka cz. I*. PWN, Warszawa 1969.
- [63] Zienkiewicz D. C.: Philips D. V.: An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1971, vol. 3, pp. 519 – 528.
- [64] Zienkiewicz D. C.: *The finite element method*. Mc Graw – Hill, London 1989.

---

# **DODATEK**



Program tablicujący zależności (2.12b) i (2.19)  
(dwuwymiarowa składowa ustalona pola trójwymiarowego lub  
składowa ustalona pola dwuwymiarowego)

```

program stust 2d
  double precision s1(10),s,s10,c1,pi,dx,x,c100
  *,c2,c3,c4,c,c20,c30,c40,c50,c60,c22,c33,c44,c55,c66,c82,c92,s2
  real lam,t1(15,51),t(1,15,51)
  open(9,file='po2d.dan',status='old')
  open(16,file='po2d.wyn',status='new')
  read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,lam,
  *dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
  a=b2*al/lam
  write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,
  *lam,a,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
  *1x,'*****'/
  *1x,'*
  *1x,'*
  *1x,'*
  *1x,'*
  *1x,'*****'//
  *1x,'LICZBA KABLI          K1 = ',i3/
  *1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X      I1 = ',i3/
  *1x,'..... Z          M1 = ',i3/
  *1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i5/
  *1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN      ITMAX = ',i3/
  *1x,'RZEDNA KABLI          YK = ',F6.3/
  *1x,'RZEDNA POWIERZCNI OBLICZ      YJ = ',F6.3/
  *1x,'POLOZENIE ZAGIECIA OS Z      ZK = ',F6.3/
  *1x,'GRUBOSC BETONU          2B = ',F6.3/
  *1x,'SZEROKOSC BETONU         2A = ',F6.3/
  *1x,'DLUGOSC BETONU          D = ',F6.3/
  *1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU        U = ',F6.3/
  *1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N      EPS = ',e10.4/
  *1x,'..... TEMP          EPSS= ',e10.4/
  *1x,'WSPOLCZ KONWEKCCI          AL = ',f6.2/
  *1x,'PRZEWODNOSC BETONU         LAM = ',f6.4/
  *1x,'STALA A                  A = ',e20.12/
  *1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA    QK = ',F6.3/
  *1x,'DEWIACJA                 DXK = ',e10.4/
  *1x,'DEWIACJA                 DYK = ',e10.4/
  *1x,'DEWIACJA                 DZK = ',e10.4//)
  j=1
  dpi=dbl(dpi1)
  pi=dacos(-1.d0)
  c=qk*(1.-2.*u)/lam
  do 51 i=1,i1+1
  t1(i,j)=0d0
  do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j)=0d0
  do 52 k=1,k1
  c1=a2/k1
  xk=.5*c1+(k-1)*c1
  do 52 i=1,i1+1
  xi=(i-1)*(a2/2)/i1
  if(xi.ne.xk)goto 101
  xi=xi+dxk
101  do 30 l=1,10
30  s1(l)=0d0
  s=0d0

```

```
do 74 n=1,nmax
x0=pi*(n-1)+dpi
x=x0
ii=0
10 dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
ii=ii+1
x=x+dx
c1=dx/(x-x0)
c1=dabs(c1)
if(c1.lt.eps)goto 11
if(ii.gt.itmax)stop 2
goto 10
11 gn=x
c1=dcos(gn*yk/b2)
c2=gn*(1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn))
c3=dcos(gn*yj/b2)
c4=gn*a2/b2
if(xi.le.xk)goto 40
c20=2.-xi/a2-xk/a2
c30=2.-xi/a2+xk/a2
c40=xi/a2-xk/a2
c50=xi/a2+xk/a2
c22=(-c4*c20)
if(abs(c22).gt.300.)goto 211
c20=dexp(c22)
goto 212
211 c20=0d0
212 c33=(-c4*c30)
if(abs(c33).gt.300.)goto 214
c30=dexp(c33)
goto 215
214 c30=0d0
215 c44=(-c4*c40)
if(abs(c44).gt.300.)goto 216
c40=dexp(c44)
goto 217
216 c40=0d0
217 c55=(-c4*c50)
if(abs(c55).gt.300.)goto 218
c50=dexp(c55)
goto 219
218 c50=0d0
219 c66=(-2.*c4)
if(abs(c66).gt.300.)goto 220
c60=dexp(c66)
goto 221
220 c60=0d0
221 c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
goto 42
40 c20=2.-xk/a2-xi/a2
c30=2.-xk/a2+xi/a2
c40=xk/a2-xi/a2
c50=xk/a2+xi/a2
c22=(-c4*c20)
if(abs(c22).gt.300.)goto 200
c20=dexp(c22)
goto 201
200 c20=0d0
201 c33=(-c4*c30)
if(dabs(c33).gt.300.)goto 202
c30=dexp(c33)
```



```
      goto 203
202  c30=0d0
203  c44=(-c4*c40)
      if(abs(c44).gt.300.)goto 204
      c40=dexp(c44)
      goto 205
204  c40=0d0
205  c55=(-c4*c50)
      if(abs(c55).gt.300.)goto 206
      c50=dexp(c55)
      goto 207
206  c50=0d0
207  c66=(-2.*c4)
      if(abs(c66).gt.300.)goto 208
      c60=dexp(c66)
      goto 209
208  c60=0d0
209  c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
42   s2=c*c1*c3*c100/c2
      s=s+s2
      do 20 l=1,9
20   s1(l)=s1(l+1)
      s1(10)=s2
      s10=0d0
      if(ks.eq.1)write(*,1001)k,xi,yj,n,ii,s
1001 format(' k='i2,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i5,' ii='i3,
*   s='e20.12)
      if(ks.eq.2)write(*,1002)c2,c3,c4,s
1002 format(' c2='f6.3,' c3='f6.3,' c4='f6.3,
*   s='f6.3,)
      if(ks.eq.3)write(*,1003)c20,c30,c40,c50,c60
1003 format(' c20='f6.3,' c30='f6.3,' c40='f6.3,' c50='f6.3,
*   c60='f6.3,' c19='f11.5,)
      do 26 l=1,10
26   s10=s10+s1(l)
      c82=epss*s
      c82=dabs(c82)
      c92=dabs(s10)
      if(c92.lt.c82)goto 50
74   continue
      stop 2
c   niezbezpiezny
50   t(k,i,j)=s
      if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,t(k,i,j)
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' t='f10.5)
52   continue
      do 60 i=1,i1+1
      do 60 k=1,k1
60   t1(i,j)=t1(i,j)+t(k,i,j)
      write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD   TEMPERATURY'/
*1x,' J          T(I,J)'/)
61   write(16,106)j,(t1(i,j),i=1,i1+1)
106  format(1x,i3,5(1x,e10.4)/4x,5(1x,e10.4)/4x,5(1x,e10.4)
      stop 10
      end
```

Program tablicujący zależność (2.12c)  
(trójwymiarowa składowa ustalona pola trójwymiarowego)

```

$large:t
  program stust 3d
    double precision s1(10),ss(10),
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,
*c20,c30,c40,c50,c60,ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,c
    real lam,t1(15,1,51),t(1,15,1,51)
    open(9,file='po3d.dan',status='old')
    open(16,file='po3d.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,lam,
*dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*a1/lam
    write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,
*lam,a,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*'
*1x,'*          PROGRAM          STAN USTALONY 3D          *'/'
*1x,'*'
*1x,'*'
*1x,'*****'/'//
*1x,'LICZBA KABLI          K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X    I1 = ',i3/
*1x,'.....          Z    M1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i5/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN     ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ   YJ = ',F6.3/
*1x,'POLOZENIE ZAGIECIA OS Z     ZK = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU        U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N    EPS = ',e10.4/
*1x,'.....          TEMP        EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI          AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU          LAM = ',f6.4/
*1x,'STALA A                      A = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA   QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                    DXK = ',e10.4/
*1x,'DEWIACJA                    DYK = ',e10.4/
*1x,'DEWIACJA                    DZK = ',e10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=2*qk*a2/(lam*pi*b2)
    do 51 i=1,i1+1
    do 51 m=1,m1+1
    t1(i,j,m)=0d0
    do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j,m)=0d0
    do 52 k=1,k1
    c1=a2/k1
    xk=.5*c1+(k-1)*c1
    do 52 m=1,m1+1
    zi=d*real(m-1)/(2*real(m))
    if(zi.ne.zk)goto 102
    zi=zi+dzk
102  do 52 i=1,i1+1
    xi=(i-1)*(a2/2)/i1

```

```
        if(xi.ne.xk)goto 101
        xi=xi+dxk
101     do 30 l=1,10
30      s1(l)=0d0
        s=0d0
        do 74 n=1,nmax
        x0=pi*(n-1)+dpi
        x=x0
        ii=0
10      dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
        ii=ii+1
        x=x+dx
        c1=dx/(x-x0)
        c1=dabs(c1)
        if(c1.lt.eps)goto 11
        if(ii.gt.itmax)stop 3
        goto 10
11      gn=x
31      do 31 l=1,10
        ss(l)=0d0
        ss1=0d0
        do 73 m2=1,nmax
        c2=dcos(gn*yk/b2)
        c3=dcos(gn*yj/b2)
        c4=dsin(m2*pi*(1-2.*u))
        c5=dcos(2.*m2*pi*zi/d)
        c6=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
        c7=(a2*gn/b2)**2
        c8=(4.d0*(a2/2)*m2*pi/d)**2
        c9=dsqrt(c8+c7)
        c10=((-1.d0)**m2*c2*c3*c4*c5)/(c6*m2*c9)
        if(xi.le.xk)goto 40
        c20=2.-xi/a2-xk/a2
        c30=2.-xi/a2+xk/a2
        c40=xi/a2-xk/a2
        c50=xi/a2+xk/a2
        c22=(-c9*c20)
        if(abs(c22).gt.300.)goto 211
        c20=dexp(c22)
        goto 212
211     c20=0d0
212     c33=(-c9*c30)
        if(abs(c33).gt.300.)goto 214
        c30=dexp(c33)
        goto 215
214     c30=0d0
215     c44=(-c9*c40)
        if(abs(c44).gt.300.)goto 216
        c40=dexp(c44)
        goto 217
216     c40=0d0
217     c55=(-c9*c50)
        if(abs(c55).gt.300.)goto 218
        c50=dexp(c55)
        goto 219
218     c50=0d0
219     c66=(-2.*c9)
        if(abs(c66).gt.300.)goto 220
        c60=dexp(c66)
        goto 221
220     c60=0d0
```

```
221  c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
      goto 42
40    c20=2.-xk/a2-xi/a2
      c30=2.-xk/a2+xi/a2
      c40=xk/a2-xi/a2
      c50=xk/a2+xi/a2
      c22=(-c9*c20)
      if(abs(c22).gt.300.)goto 200
      c20=dexp(c22)
      goto 201
200   c20=0d0
201   c33=(-c9*c30)
      if(dabs(c33).gt.300.)goto 202
      c30=dexp(c33)
      goto 203
202   c30=0d0
203   c44=(-c9*c40)
      if(abs(c44).gt.300.)goto 204
      c40=dexp(c44)
      goto 205
204   c40=0d0
205   c55=(-c9*c50)
      if(abs(c55).gt.300.)goto 206
      c50=dexp(c55)
      goto 207
206   c50=0d0
207   c66=(-2.*c9)
      if(abs(c66).gt.300.)goto 208
      c60=dexp(c66)
      goto 209
208   c60=0d0
209   c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
42    ss2=c*c10*c100
      ss1=ss1+ss2
      do 20 l=1,9
20    ss(l)=ss(l+1)
      ss(10)=ss2
      ss10=0d0
      do 21 l=1,10
21    ss10=ss10+ss(l)
      c81=epss*ss1
      c81=dabs(c81)
      c91=dabs(ss10)
      if(m2.lt.50)goto 310
      if((ss1.eq.0d0).and.(ss10.eq.0d0))goto 300
310   if(c91.lt.c81)goto 49
73    continue
300   ss1=0d0
      goto 49
      stop 1
c     niezbiezny
49    s=s+ss1
      do 25 l=1,9
25    s1(l)=s1(l+1)
      s1(10)=ss1
      s10=0d0
      if(ks.eq.1)write(*,1001)k,xi,yj,zi,n,m2,ii,s
1001  format(' k='i2' x='f6.3,' y='f6.3,' zi='f6.3,' n='i5,' m2='i5,
* ' ii='i3,' s='e20.12)
      if(ks.eq.2)write(*,1002)c2,c3,c4,c5,c6,c10,s
1002  format(' c2='f6.3,' c3='f6.3,' c4='f6.3,' c5='f6.3,' c6='f6.3,
```

```
      *' c10='f6.3,' s='f6.3,)
      if(ks.eq.3)write(*,1003)c20,c30,c40,c50,c60
1003  format(' c20='f6.3,' c30='f6.3,' c40='f6.3,' c50='f6.3,
      *' c60='f6.3,' c19='f11.5,)
      do 26 l=1,10
26    s10=s10+s1(l)
      c82=epss*s
      c82=dabs(c82)
      c92=dabs(s10)
      if(c92.lt.c82)goto 50
74    continue
      stop 2
c  niezbezpiezny
50    t(k,i,j,m)=s
      if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,m2,gn
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i3,' m2='i5,' gn='f10.5)
52    continue
      do 60 i=1,i1+1
      do 60 m=1,m1+1
      do 60 k=1,k1
60    t1(i,j,m)=t1(i,j,m)+t(k,i,j,m)
      write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD  TEMPERATURY' /
      *1x,' J    M                T(I,J,M) '/')
      do 61 m=1,m1+1
61    write(16,106)j,m,(t1(i,j,m),i=1,i1+1)
106  format(1x,i3,1x,i3,5(1x,e10.4)/8x,5(1x,e10.4)/8x,5(1x,e10.4)
      stop 10
      end
```

-

Program tablicujący zależność (3.8b)  
(dwuwymiarowa składowa ustalona pola trójwymiarowego w układzie z zagięciami)

```

program stust zag 2d1
  double precision s1(10),s,s10,c1,pi,dx,x,c100
  *,c2,c3,c4,c,c20,c30,c40,c50,c60,c22,c33,c44,c55,c66,c82,c92,s2
  real lam,t1(15,101),t(25,15,101)
  open(9,file='zag2d.dan',status='old')
  open(16,file='zag2d.wyn',status='new')
  read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,lam,
  *dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
  a=b2*al/lam
  write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,
  *lam,a,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
  *1x,'*****'/
  *1x,'*                                     *'/
  *1x,'*                               PROGRAM      STAN USTALONY ZAG1 2D          *'/
  *1x,'*                                     *'/
  *1x,'*****'//
  *1x,'LICZBA KABLI                        K1 = ',i3/
  *1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO Y           I1 = ',i3/
  *1x,'..... Z                             M1 = ',i3/
  *1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU             N = ',i5/
  *1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN            ITMAX = ',i3/
  *1x,'RZEDNA KABLI                       YK = ',F6.3/
  *1x,'RZEDNA POWIERZCNI OBLICZ           YJ = ',F6.3/
  *1x,'POLOZENIE ZAGIECIA OS Z            ZK = ',F6.3/
  *1x,'GRUBOSC BETONU                     2B = ',F6.3/
  *1x,'SZEROKOSC BETONU                   2A = ',F6.3/
  *1x,'DLUGOSC BETONU                     D = ',F6.3/
  *1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU                U = ',F6.3/
  *1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N           EPS = ',e10.4/
  *1x,'..... TEMP                         EPSS= ',e10.4/
  *1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI                 AL = ',f6.2/
  *1x,'PRZEWODNOSC BETONU                 LAM = ',f6.4/
  *1x,'STALA A                             A = ',e20.12/
  *1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA         QK = ',F6.3/
  *1x,'DEWIACJA                           DXK = ',e10.4/
  *1x,'DEWIACJA                           DYK = ',e10.4/
  *1x,'DEWIACJA                           DZK = ',e10.4//)
  j=1
  dpi=dbl(dpi1)
  pi=dacos(-1.d0)
  do 51 m=1,m1+1
  t1(m,j)=0d0
  do 51 k=1,k1
51  t(k,m,j)=0d0
  do 52 k=1,k1-1
  c1=a2/k1
  xk=.5*c1+(k-1)*c1
  c=qk*xk/(lam*(a2/2)*2)
  do 52 m=1,m1+1
  zi=d*real(m-1)/real(m1)
  if(zi.ne.zk)goto 101
  zi=zi+dzk
101  do 30 l=1,10
30  s1(l)=0d0
  s=0d0
  do 74 n=1,nmax
  x0=pi*(n-1)+dpi

```

```

x=x0
ii=0
10 dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
ii=ii+1
x=x+dx
c1=dx/(x-x0)
c1=dabs(c1)
if(c1.lt.eps)goto 11
if(ii.gt.itmax)stop 2
goto 10
11 gn=x
c1=dcos(gn*yk/b2)
c2=gn*(1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn))
c3=dcos(gn*yj/b2)
c4=gn*d/b2
if(zi.le.zk)goto 40
c20=2.-zi/d-zk/d
c30=2.-zi/d+zk/d
c40=zi/d-zk/d
c50=zi/d+zk/d
c22=(-c4*c20)
if(abs(c22).gt.300.)goto 211
c20=dexp(c22)
goto 212
211 c20=0d0
212 c33=(-c4*c30)
if(abs(c33).gt.300.)goto 214
c30=dexp(c33)
goto 215
214 c30=0d0
215 c44=(-c4*c40)
if(abs(c44).gt.300.)goto 216
c40=dexp(c44)
goto 217
216 c40=0d0
217 c55=(-c4*c50)
if(abs(c55).gt.300.)goto 218
c50=dexp(c55)
goto 219
218 c50=0d0
219 c66=(-2.*c4)
if(abs(c66).gt.300.)goto 220
c60=dexp(c66)
goto 221
220 c60=0d0
221 c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
goto 42
40 c20=2.-zk/d-zi/d
c30=2.-zk/d+zi/d
c40=zk/d-zi/d
c50=zk/d+zi/d
c22=(-c4*c20)
if(abs(c22).gt.300.)goto 200
c20=dexp(c22)
goto 201
200 c20=0d0
201 c33=(-c4*c30)
if(dabs(c33).gt.300.)goto 202
c30=dexp(c33)
goto 203
202 c30=0d0

```

```
203  c44=(-c4*c40)
      if(abs(c44).gt.300.)goto 204
      c40=dexp(c44)
      goto 205
204  c40=0d0
205  c55=(-c4*c50)
      if(abs(c55).gt.300.)goto 206
      c50=dexp(c55)
      goto 207
206  c50=0d0
207  c66=(-2.*c4)
      if(abs(c66).gt.300.)goto 208
      c60=dexp(c66)
      goto 209
208  c60=0d0
209  c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
42   s2=(-1)**(k)*c*c1*c3*c100/c2
      s=s+s2
      do 20 l=1,9
20   s1(l)=s1(l+1)
      s1(10)=s2
      s10=0d0
      if(ks.eq.1)write(*,1001)k,zi,yj,n,ii,s
1001 format(' k='i2,'z='f6.3,' y='f6.3,' n='i5,' ii='i3,
*' s='e20.12)
      if(ks.eq.2)write(*,1002)c2,c3,c4,s
1002 format(' c2='f6.3,' c3='f6.3,' c4='f6.3,
*' s='f6.3,)
      if(ks.eq.3)write(*,1003)c20,c30,c40,c50,c60
1003 format(' c20='f6.3,' c30='f6.3,' c40='f6.3,' c50='f6.3,
*' c60='f6.3,' c19='f11.5,)
      do 26 l=1,10
26   s10=s10+s1(l)
      c82=epss*s
      c82=dabs(c82)
      c92=dabs(s10)
      if(c92.lt.c82)goto 50
74   continue
      stop 2
c   niezbiezny
50   t(k,m,j)=s
      if(ks.eq.4)write(*,900)k,m,j,t(k,m,j)
900  format(' k='i2,' m='i3,' j='i3,' t='f10.5)
52   continue
      do 60 m=1,m1+1
      do 60 k=1,k1
60   t1(m,j)=t1(m,j)+t(k,m,j)
      write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD    TEMPERATURY' /
*1x,' J          T(J,M) '/')
61   write(16,106)j,(t1(m,j),m=1,m1+1)
106  format(1x,i3,5(1x,e10.4)/4x,5(1x,e10.4)/4x,5(1x,e10.4)
      stop 10
      end
```



**Program tablicujący zależność (3.8c)**  
 (trójwymiarowa składowa ustalona pola trójwymiarowego w układzie z zagięciami)

```

$large:t
  program stust zag1 3d
  double precision s1(10),ss(10),
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,
*c20,c30,c40,c50,c60,ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,c
  real lam,t1(9,1,101),t(25,9,1,101)
  open(9,file='zag3d.dan',status='old')
  open(16,file='zag3d.wyn',status='new')
  read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,lam,
*dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
  a=b2*al/lam
  write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,zk,b2,a2,d,u,eps,epss,al,
*lam,a,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*
*1x,'*          PROGRAM      STAN USTALONY ZAG1 3D          */
*1x,'*
*1x,'*          */
*1x,'*****'//
*1x,'LICZBA KABLI          K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X    I1 = ',i3/
*1x,'.....          Z      M1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i5/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN     ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI          YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ   YJ = ',F6.3/
*1x,'POLOZENIE ZAGIECIA OS Z     ZK = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU          2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU         2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU          D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU       U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N   EPS = ',e10.4/
*1x,'.....          TEMP     EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI        AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU       LAM = ',f6.4/
*1x,'STALA A                  A = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA  QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                 DXK = ',e10.4/
*1x,'DEWIACJA                 DYK = ',e10.4/
*1x,'DEWIACJA                 DZK = ',e10.4//)
  j=1
  dpi=dbl(dpi1)
  pi=dacos(-1.d0)
  c=qk*d/(lam*pi*(b2/2))
  do 51 m=1,m1+1
  do 51 i=1,i1+1
  t1(i,j,m)=0d0
  do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j,m)=0d0
  do 52 k=1,k1-1
  c1=a2/k1
  xk=.5*c1+(k-1)*c1
  do 52 m=1,m1+1
  zi=d*real(m-1)/real(m1)
  if(zi.ne.zk)goto 102
  zi=zi+dzk
102  do 52 i=1,i1+1
  xi=0.84+(i-1)*(a2/k1)/i1

```

```
xz=0.9
if(xi.ne.xz)goto 101
xi=xi+dxk
101 do 30 l=1,10
30  s1(l)=0d0
    s=0d0
    do 74 n=1,nmax
      x0=pi*(n-1)+dpi
      x=x0
      ii=0
10   dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
      ii=ii+1
      x=x+dx
      c1=dx/(x-x0)
      c1=dabs(c1)
      if(c1.lt.eps)goto 11
      if(ii.gt.itmax)stop 3
      goto 10
11   gn=x
      do 31 l=1,10
31   ss(l)=0d0
      ss1=0d0
      do 73 m2=1,nmax
        c2=dcos(gn*yk/b2)
        c3=dcos(gn*yj/b2)
        c4=dsin(m2*pi*xk/a2)
        c5=dcos(m2*pi*xi/a2)
        c6=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
        c7=(d*gn/b2)**2
        c8=(m2*pi*d/a2)**2
        c9=dsqrt(c8+c7)
        c10=((-1.d0)**(k)*c2*c3*c4*c5)/(c6*m2*c9)
        if(zi.le.zk)goto 40
        c20=2.-zi/d-zk/d
        c30=2.-zi/d+z0/d
        c40=zi/d-zk/d
        c50=zi/d+z0/d
        c22=(-c9*c20)
        if(abs(c22).gt.300.)goto 211
        c20=dexp(c22)
        goto 212
211  c20=0d0
212  c33=(-c9*c30)
        if(abs(c33).gt.300.)goto 214
        c30=dexp(c33)
        goto 215
214  c30=0d0
215  c44=(-c9*c40)
        if(abs(c44).gt.300.)goto 216
        c40=dexp(c44)
        goto 217
216  c40=0d0
217  c55=(-c9*c50)
        if(abs(c55).gt.300.)goto 218
        c50=dexp(c55)
        goto 219
218  c50=0d0
219  c66=(-2.*c9)
        if(abs(c66).gt.300.)goto 220
        c60=dexp(c66)
        goto 221
```

```

220  c60=0d0
221  c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
      goto 42
40   c20=2.-zk/d-zi/d
      c30=2.-zk/d+zi/d
      c40=zk/d-zi/d
      c50=zk/d+zi/d
      c22=(-c9*c20)
      if(abs(c22).gt.300.)goto 200
      c20=dexp(c22)
      goto 201
200  c20=0d0
201  c33=(-c9*c30)
      if(dabs(c33).gt.300.)goto 202
      c30=dexp(c33)
      goto 203
202  c30=0d0
203  c44=(-c9*c40)
      if(abs(c44).gt.300.)goto 204
      c40=dexp(c44)
      goto 205
204  c40=0d0
205  c55=(-c9*c50)
      if(abs(c55).gt.300.)goto 206
      c50=dexp(c55)
      goto 207
206  c50=0d0
207  c66=(-2.*c9)
      if(abs(c66).gt.300.)goto 208
      c60=dexp(c66)
      goto 209
208  c60=0d0
209  c100=(c20+c30+c40+c50)/(1.d0-c60)
42   ss2=c*c10*c100
      ss1=ss1+ss2
      do 20 l=1,9
20   ss(l)=ss(l+1)
      ss(10)=ss2
      ss10=0d0
      do 21 l=1,10
21   ss10=ss10+ss(l)
      c81=epss*ss1
      c81=dabs(c81)
      c91=dabs(ss10)
      if(m2.lt.50)goto 310
      if((ss1.eq.0d0).and.(ss10.eq.0d0))goto 300
310  if(c91.lt.c81)goto 49
73   continue
300  ss1=0d0
      goto 49
      stop 1
c   niezbiezny
49   s=s+ss1
      do 25 l=1,9
25   s1(l)=s1(l+1)
      s1(10)=ss1
      s10=0d0
      if(ks.eq.1)write(*,1001)k,xi,yj,zi,n,m2,ii,s
1001 format(' k='i2' x='f6.3,' y='f6.3,' zi='f6.3,' n='i5,' m2='i5,
* ii='i3,' s='e20.12)
      if(ks.eq.2)write(*,1002)c2,c3,c4,c5,c6,c10,s

```

```
1002 format(' c2='f6.3,' c3='f6.3,' c4='f6.3,' c5='f6.3,' c6='f6.3,
*' c10='f6.3,' s='f6.3,')
    if(ks.eq.3)write(*,1003)c20,c30,c40,c50,c60
1003 format(' c20='f6.3,' c30='f6.3,' c40='f6.3,' c50='f6.3,
*' c60='f6.3,' c19='f11.5,')
    do 26 l=1,10
26   s10=s10+s1(l)
    c82=epss*s
    c82=dabs(c82)
    c92=dabs(s10)
    if(c92.lt.c82)goto 50
74   continue
    stop 2
c   niezbiezny
50   t(k,i,j,m)=s
    if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,m2,gn
900 format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i3,' m2='i5,' gn='f10.5)
52   continue
    do 60 m=1,m1+1
    do 60 i=1,i1+1
    do 60 k=1,k1
60   t1(i,j,m)=t1(i,j,m)+t(k,i,j,m)
    write(16,105)
105 format(1x,'          ROZKLAD    TEMPERATURY'/
*1x,' J    M                      T(I,J,M)'/)
    do 61 m=1,m1+1
61   write(16,106)j,m,(t1(i,j,m),i=1,i1+1)
106 format(1x,i3,1x,i3,9(1x,e10.4))
    stop 10
end
```

Program tablicujący składową w zależności (4.14a) i (4.22)  
(składowa przejściowa pola dwuwymiarowego oraz odpowiednia stała czasowa)

```

$large:t
  program stnie 2d
    double precision s1(10),ss(10),
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c6,c7,c10,
*ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,s2,d60,c70,
*d2,d3,d4,d5,d6,d10,d11,kap
    real lam,t1(15,1),t(4650,15,1),cw,del,cz
    open(9,file='po2nie.dan',status='old')
    open(16,file='po2nie.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,i1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,al,lam,
*cw,del,cz,dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*al/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,i1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,al,
*lam,cw,del,cz,a,kap,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*                PROGRAM      STAN NIEUSTALONY 2D                *'/
*1x,'*                *                *                *                *'/
*1x,'*****'//
*1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X    I1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i8/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN     ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ    YJ = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU         U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZNI GAMMA N    EPS = ',e10.4/
*1x,'..... TEMP                  EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI           AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU          LAM = ',f6.4/
*1x,'CIEPLO WLASCIWE             CW = ',f10.4/
*1x,'GESTOSC MATERIALU           DEL = ',f10.4/
*1x,'CZAS STANU NIEUSTALONEGO    T = ',f10.4/
*1x,'STALA A                      A = ',e20.12/
*1x,'STALA KAPPA                  KAP = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA   QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                     DXK = ',f10.4/
*1x,'DEWIACJA                     DYK = ',f10.4/
*1x,'DEWIACJA                     DZK = ',f10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=qk/(lam*(a2/2)*(b2/2))
    do 51 i=1,i1+1
      t1(i,j)=0d0
      do 51 k=1,k1
51      t(k,i,j)=0d0
      do 52 k=1,900
        cz=k*60
        xk=0.06
102      do 52 i=1,i1+1
          xi=(i-1)*(a2/2)/i1
          if(xi.ne.xk)goto 101
          xi=xi+dxk

```

```
101 do 30 l=1,10
30 s1(l)=0d0
s=0d0
do 74 n=1,nmax
x0=pi*(n-1)+dpi
x=x0
ii=0
10 dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
ii=ii+1
x=x+dx
c1=dx/(x-x0)
c1=dabs(c1)
if(c1.lt.eps)goto 11
if(ii.gt.itmax)stop 3
goto 10
11 gn=x
do 31 l=1,10
31 ss(l)=0d0
ss1=0d0
d2=dcos(gn*yk/b2)
d3=dcos(gn*yj/b2)
d4=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
d10=- (c*d2*d3)/d4
d5=(gn/b2)**2
d6=(-d5*kap*cz)
if(abs(d6).gt.300.)goto 211
d60=dexp(d6)
goto 212
211 d60=0d0
212 d11=d60/(d5*2)
do 73 m=1,nmax
c2=dcos(m*pi*xk/a2)
c3=dcos(m*pi*xi/a2)
c4=(m*pi/a2)**2
c6=c4+d5
c7=(-c6*kap*cz)
if(abs(c7).gt.300.)goto 214
c70=dexp(c7)
goto 215
214 c70=0d0
215 c10=c2*c3*c70/c6
if(c10.eq.0d0)goto 49
ss2=c10
ss1=ss1+ss2
do 20 l=1,9
20 ss(l)=ss(l+1)
ss(10)=ss2
ss10=0d0
do 21 l=1,10
21 ss10=ss10+ss(l)
c81=epss*ss1
c81=dabs(c81)
c91=dabs(ss10)
if(c91.lt.c81)goto 49
if(ks.eq.1)write(*,1002)k,xi,yj,n,m,ii,ss1
1002 format(' k='i2,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,
*' ii='i3,' ss1='e20.12)
73 continue
stop 1
c niezbezpiezny
49 s2=d10*(d11+ss1)
```

```
s=s+s2
do 25 l=1,9
25  s1(l)=s1(l+1)
    s1(10)=s2
    s10=0d0
    if(ks.eq.2)write(*,1001)cz,xi,yj,n,m,ii,s
1001 format('cz='f7.1,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,
*' ii='i3,' s='e20.12)
    do 26 l=1,10
26  s10=s10+s1(l)
    c82=epss*s
    c82=dabs(c82)
    c92=dabs(s10)
    if(c92.lt.c82)goto 50
74  continue
    stop 2
c  niezbiezny
50  t(k,i,j)=s
    if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,gn
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i5,' gn='f10.5)
52  continue
    write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD  TEMPERATURY'/
*1x,' t                          T(I,J)'/)
    do 61 k=1,900
61  write(16,106)cz,(t(k,i,j),i=1,i1+1)
106  format(1x,f8.2,5(1x,f10.4))
    stop 10
end
```

-

Program tablicujący składową w zależności (4.19a) i (4.23)  
(składowa nieustalona pola trójwymiarowego oraz odpowiednia stała czasowa)

```

$large:t
  program stnie 3d
    double precision s1(10),ss(10),sss(10),sss1,c85,c95,
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,
*ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,kap,c,del,cz,x0,c11,c12,
*d1,d2,d3,d4,d5,d6,d50,c120,c13,sss2,sss10
    real lam,t1(6,1,6),t(2601,6,1,6)
    open(9,file='po3nie.dan',status='old')
    open(16,file='po3nie.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,lam,
*cw,del,cz,dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*a1/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,
*lam,cw,del,cz,a,kap,qk,dxk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*'
*1x,'*          PROGRAM          STAN NIEUSTALONY 3D          *'/
*1x,'*'
*1x,'*****'//
*1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X   I1 = ',i3/
*1x,'..... Z                     M1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU     N = ',i8/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN    ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI               YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ  YJ = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU             2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU           2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU             D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU       U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N   EPS = ',e10.4/
*1x,'..... TEMP                 EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI         AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU        LAM = ',f6.4/
*1x,'CIEPLO WLASCIWE           CW = ',f10.4/
*1x,'GESTOSC BETONU            DEL = ',f10.4/
*1x,'CZAS STANU NIEUSTALONEGO  T = ',f10.4/
*1x,'STALA A                    A = ',e20.12/
*1x,'STALA KAPPA                KAP = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                   DXK = ',e10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=-2*qk/((a2/2)*lam*pi*(b2/2))
    do 51 i=1,i1+1
    do 51 m=1,m1+1
    t1(i,j,m)=0d0
    do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j,m)=0d0
    do 52 k=0,900
    cz=k*60
    xk=0.06
    do 52 m=1,m1+1
    zi=d*real(m-1)/(2*real(m1))
    do 52 i=1,i1+1

```



```

        xi=(i-1)*(a2/2)/i1
        if(xi.ne.xk)goto 101
        xi=xi+dxk
101     do 30 l=1,10
30      s1(l)=0d0
        s=0d0
        do 74 n=1,nmax
        x0=pi*(n-1)+dpi
        x=x0
        ii=0
10      dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
        ii=ii+1
        x=x+dx
        c1=dx/(x-x0)
        c1=dabs(c1)
        if(c1.lt.eps)goto 11
        if(ii.gt.itmax)stop 3
        goto 10
11      gn=x
        do 35 l=1,10
35      sss(l)=0d0
        sss1=0d0
        do 75 n2=0,nmax
        c2=dcos(gn*yk/b2)
        c3=dcos(gn*yj/b2)
        c4=dcos(n2*pi*xk/a2)
        c5=dcos(n2*pi*xi/a2)
        c6=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
        c10=c2*c3*c4*c5/c6
        c7=pi*(1-2.*u)
        c8=(n2*pi/a2)**2
        c9=(gn/b2)**2
        c11=c8+c9
        c12=c11*kap*cz
        if(abs(c12).gt.300.)goto 221
        c120=dexp(-c12)
        goto 222
221     c120=0d0
222     c13=c7*c120/(c11*2.)
        if(n2.ne.0)goto 200
        c10=c10/2
200     do 31 l=1,10
31      ss(l)=0d0
        ss1=0d0
        do 73 m2=1,nmax
        d1=dsin(m2*c7)
        d2=dcos(2*m2*pi*zi/d)
        d3=(2.*m2*pi/d)**2
        d4=d3+c11
        d5=d4*kap*cz
        if(abs(d5).gt.300.)goto 211
        d50=dexp(-d5)
        goto 212
211     d50=0d0
212     d6=(-1)**m2*d1*d2*d50/(d4*m2)
        if(d6.eq.0d0)goto 49
        ss2=d6
        ss1=ss1+ss2
        do 20 l=1,9
20      ss(l)=ss(l+1)
        ss(10)=ss2

```

```

        ss10=0d0
        do 21 l=1,10
21      ss10=ss10+ss(1)
        c81=epss*ss1
        c81=dabs(c81)
        c91=dabs(ss10)
        if(c91.lt.c81)goto 49
73      continue
        stop 1
c      niebezpiezny
49      sss2=c*c10*(c13+ss1)
        sss1=sss1+sss2
        if(sss2.eq.0d0)goto 55
        do 34 l=1,9
34      sss(l)=sss(l+1)
        sss(10)=sss2
        sss10=0d0
        if(ks.eq.2)write(*,1002)xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,sss1
1002    format(' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i4,' m='i8,
        *' r='i4,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 33 l=1,10
33      sss10=sss10+sss(l)
        c85=epss*sss1
        c85=dabs(c85)
        c95=dabs(sss10)
        if(c95.lt.c85)goto 55
75      continue
        stop 3
c      niebezpiezny
55      s=s+sss1
        if(sss1.eq.0d0)goto 50
        do 25 l=1,9
25      s1(l)=s1(l+1)
        s1(10)=sss1
        s10=0d0
        if(ks.eq.1)write(*,1001)cz,xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,s
1001    format(f8.2,' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i3,' m='i4,
        *' r='i3,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 26 l=1,10
26      s10=s10+s1(l)
        c82=epss*s
        c82=dabs(c82)
        c92=dabs(s10)
        if(c92.lt.c82)goto 50
74      continue
        stop 2
c      niebezpiezny
50      t(k,i,j,m)=s
        if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,m2,gn
900    format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i3,' m2='i5,' gn='f10.5)
52      continue
        write(16,105)
105    format(1x,'          ROZKLAD    TEMPERATURY'/
        *1x,' CZ      J      M          T(I,J,M) '/')
        do 61 m=1,m1+1
        do 61 k=1,900
61      write(16,106)cz,j,m,(t(k,i,j,m),i=1,i1+1)
106    format(1x,f8.2,1x,i3,1x,i3,5(1x,f10.4))
        stop 10
        end
-

```

Program tablicujący zależność (4.42)  
(stan nieustalony podczas pierwszego stygnięcia układu dwuwymiarowego)

```

$large:t
  program stygnięcie 2d
    double precision s1(10),ss(10),cz,
    *ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c6,c7,c10,
    *ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,s2,c70,c8,c80,
    *d2,d3,d4,d5,kap
    real lam,t1(15,1),t(61,15,1),cw,del
    open(9,file='styg2d.dan',status='old')
    open(16,file='styg2d.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,xi,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,al,lam,
    *cw,del,cz1,dpil,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*al/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,xi,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,al,
    *lam,cw,del,cz1,a,kap,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
    *1x,'*****'/
    *1x,'*                PROGRAM      STAN NIEUSTALONY STYGNIECIE 2D *'/
    *1x,'*                *'/
    *1x,'*****'//
    *1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
    *1x,'ODCIĘTA PUNKTU OBLICZ.      XI = ',f10.4/
    *1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU     N = ',i8/
    *1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN    ITMAX = ',i3/
    *1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
    *1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ  YJ = ',F6.3/
    *1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
    *1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
    *1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
    *1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU        U = ',F6.3/
    *1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N    EPS = ',e10.4/
    *1x,'..... TEMP                  EPSS= ',e10.4/
    *1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI          AL = ',f6.2/
    *1x,'PRZEWODNOSC BETONU          LAM = ',f6.4/
    *1x,'CIEPLO WLASCIWE             CW = ',f10.4/
    *1x,'GESTOSC MATERIALU           DEL = ',f10.4/
    *1x,'CZAS ROZPOCZECIA STYGNIECIA T = ',f10.4/
    *1x,'STALA A                      A = ',e20.12/
    *1x,'STALA KAPPA                  KAP = ',e20.12/
    *1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA  QK = ',F6.3/
    *1x,'DEWIACJA                     DXK = ',f10.4/
    *1x,'DEWIACJA                     DYK = ',f10.4/
    *1x,'DEWIACJA                     DZK = ',f10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpil)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=qk/(lam*(a2/2)*(b2/2))
    do 51 i=1,1
      t1(i,j)=0d0
      do 51 k=1,k1
51    t(k,i,j)=0d0
      do 52 k=1,90
        xk=0.06
        cz=k*60
102    do 52 i=1,1
          if(xi.ne.xk)goto 101
          xi=xi+dxk
101    do 30 l=1,10

```

```
30   s1(1)=0d0
      s=0d0
      do 74 n=1,nmax
        x0=pi*(n-1)+dpi
        x=x0
        ii=0
10    dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
        ii=ii+1
        x=x+dx
        c1=dx/(x-x0)
        c1=dabs(c1)
        if(c1.lt.eps)goto 11
        if(ii.gt.itmax)stop 3
        goto 10
11    gn=x
      do 31 l=1,10
31    ss(1)=0d0
        ssl=0d0
        do 73 m=0,nmax
          d2=dcos(gn*yk/b2)
          d3=dcos(gn*yj/b2)
          d4=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
          d5=(gn/b2)**2
          c2=dcos(m*pi*xk/a2)
          c3=dcos(m*pi*xi/a2)
          c4=(m*pi/a2)**2
          c6=c4+d5
          c7=(-c6*kap*c2)
          if(abs(c7).gt.300.)goto 214
          c70=dexp(c7)
          goto 215
214   c70=0d0
215   c8=(-c6*kap*c3)
          if(abs(c8).gt.300.)goto 216
          c80=dexp(c8)
          goto 217
216   c80=0d0
217   c10=c*c2*c3*d2*d3*(1-c80)*c70/(c6*d4)
          if(m.ne.0)goto 218
          c10=c10/2
218   if(c10.eq.0d0)goto 49
          ss2=c10
          ssl=ssl+ss2
          do 20 l=1,9
20    ss(1)=ss(l+1)
          ss(10)=ss2
          ss10=0d0
          do 21 l=1,10
21    ss10=ss10+ss(l)
          c81=epss*ss1
          c81=dabs(c81)
          c91=dabs(ss10)
          if(c91.lt.c81)goto 49
          if(ks.eq.1)write(*,1002)k,xi,yj,n,m,ii,ss1
1002  format(' k='i2,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,
          *' ii='i3,' ss1='e20.12)
73    continue
      stop 1
c   niezbezpiezny
49   s2=ss1
      s=s+s2
```

```
do 25 l=1,9
25  s1(l)=s1(l+1)
    s1(10)=s2
    s10=0d0
    if(ks.eq.2)write(*,1001)cz,xi,yj,n,m,ii,s
1001 format('cz='f7.1,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,
*' ii='i3,' s='e20.12)
    do 26 l=1,10
26  s10=s10+s1(l)
    c82=epss*s
    c82=dabs(c82)
    c92=dabs(s10)
    if(c92.lt.c82)goto 50
74  continue
    stop 2
c  niezbezpiezny
50  t(k,i,j)=s
    if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,gn
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i5,' gn='f10.5)
52  continue
    write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD    TEMPERATURY' /
*'1x,' t                          T(I,J) '/')
    do 61 k=1,200
61  write(16,106)cz,(t(k,i,j),i=1,1)
106  format(1x,f8.2,1(1x,f10.4))
    stop 10
end
```

-

Program tablicujący zależność (4.43)  
(stan nieustalony podczas pierwszego stygnięcia układu trójwymiarowego)

```

$large:t
  program stnie stygniecie 3d
    double precision s1(10),ss(10),sss(10),sss1,c85,c95,
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,
*ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,kap,c,del,cz,x0,c11,c12,c14,c130,
*d1,d2,d3,d4,d5,d6,d50,c120,c13,sss2,sss10,d60,d7
    real lam,t1(6,1,6),t(2601,6,1,6)
    open(9,file='po3nie.dan',status='old')
    open(16,file='po3nie.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,lam,
*cw,del,cz,dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*a1/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,
*lam,cw,del,cz1,a,kap,qk,dxk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*
*1x,'*          PROGRAM          STAN NIEUSTALONY STYGNIECIE 3D  *'/
*1x,'*
*1x,'*          *****'//
*1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X    I1 = ',i3/
*1x,'..... Z                    M1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i8/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN     ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ   YJ = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU        U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N    EPS = ',e10.4/
*1x,'..... TEMP                 EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI          AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU          LAM = ',f6.4/
*1x,'CIEPLO WLASCIWE             CW = ',f10.4/
*1x,'GESTOSC BETONU              DEL = ',f10.4/
*1x,'CZAS ROZPOCZECIA STYGNIECIA T = ',f10.4/
*1x,'STALA A                      A = ',e20.12/
*1x,'STALA KAPPA                 KAP = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA   QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                    DXK = ',e10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=-2*qk/((a2/2)*lam*pi*(b2/2))
    do 51 i=1,i1+1
    do 51 m=1,m1+1
    t1(i,j,m)=0d0
    do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j,m)=0d0
    do 52 k=0,120
    cz=k*60
    xk=0.06
    do 52 m=1,m1+1
    zi=d*real(m-1)/(2*real(m1))
    do 52 i=1,i1+1

```

```

        xi=(i-1)*(a2/2)/i1
        if(xi.ne.xk)goto 101
        xi=xi+dxk
101     do 30 l=1,10
30      s1(l)=0d0
        s=0d0
        do 74 n=1,nmax
        x0=pi*(n-1)+dpi
        x=x0
        ii=0
10      dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
        ii=ii+1
        x=x+dx
        c1=dx/(x-x0)
        c1=dabs(c1)
        if(c1.lt.eps)goto 11
        if(ii.gt.itmax)stop 3
        goto 10
11      gn=x
        do 35 l=1,10
35      sss(l)=0d0
        sss1=0d0
        do 75 n2=0,nmax
        c2=dcos(gn*yk/b2)
        c3=dcos(gn*yj/b2)
        c4=dcos(n2*pi*xk/a2)
        c5=dcos(n2*pi*xi/a2)
        c6=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
        c10=c2*c3*c4*c5/c6
        c7=pi*(1-2.*u)
        c8=(n2*pi/a2)**2
        c9=(gn/b2)**2
        c11=c8+c9
        c12=c11*kap*cz
        if(abs(c12).gt.300.)goto 221
        c120=dexp(-c12)
        goto 222
221     c120=0d0
222     c13=c11*kap*cz1
        if(abs(c13).gt.300.)goto 223
        c130=dexp(-c13)
        goto 224
223     c130=0d0
224     c14=c7*c120*(1-c130)/(c11*2.)
        if(n2.ne.0)goto 200
        c10=c10/2
200     do 31 l=1,10
31      ss(l)=0d0
        ss1=0d0
        do 73 m2=1,nmax
        d1=dsin(m2*c7)
        d2=dcos(2*m2*pi*zi/d)
        d3=(2.*m2*pi/d)**2
        d4=d3+c11
        d5=d4*kap*cz
        if(abs(d5).gt.300.)goto 211
        d50=dexp(-d5)
        goto 212
211     d50=0d0
212     d6=d4*kap*cz1
        if(abs(d6).gt.300.)goto 213

```

```

        d60=dexp(-d6)
        goto 214
213   d60=0d0
216   d7=(-1)**m2*d1*d2*d50*(1-d60)/(d4*m2)
        if(d7.eq.0d0)goto 49
        ss2=d7
        ssl=ssl+ss2
        do 20 l=1,9
20    ss(l)=ss(l+1)
        ss(10)=ss2
        ssl0=0d0
        do 21 l=1,10
21    ssl0=ssl0+ss(l)
        c81=epss*ssl
        c81=dabs(c81)
        c91=dabs(ssl0)
        if(c91.lt.c81)goto 49
73    continue
        stop 1
c     niezbezpiezny
49    sss2=c*c10*(c14+ssl)
        sss1=sss1+sss2
        if(sss2.eq.0d0)goto 55
        do 34 l=1,9
34    sss(l)=sss(l+1)
        sss(10)=sss2
        sss10=0d0
        if(ks.eq.2)write(*,1002)xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,sss1
1002  format(' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i4,' m='i8,
*' r='i4,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 33 l=1,10
33    sss10=sss10+sss(l)
        c85=epss*sss1
        c85=dabs(c85)
        c95=dabs(sss10)
        if(c95.lt.c85)goto 55
75    continue
        stop 3
c     niezbezpiezny
55    s=s+sss1
        if(sss1.eq.0d0)goto 50
        do 25 l=1,9
25    s1(l)=s1(l+1)
        s1(10)=sss1
        s10=0d0
        if(ks.eq.1)write(*,1001)cz,xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,s
1001  format(f8.2,' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i3,' m='i4,
*' r='i3,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 26 l=1,10
26    s10=s10+s1(l)
        c82=epss*s
        c82=dabs(c82)
        c92=dabs(s10)
        if(c92.lt.c82)goto 50
74    continue
        stop 2
c     niezbezpiezny
50    t(k,i,j,m)=s
        if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,m2,gn
900   format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i3,' m2='i5,' gn='f10.5)
52    continue

```



```
write(16,105)
105  format(1x,'      ROZKLAD  TEMPERATURY'/
      *1x,' CZ      J      M      T(I,J,M) '/')
      do 61 m=1,m1+1
      do 61 k=1,120
61   write(16,106) cz,j,m,(t(k,i,j,m),i=1,i1+1)
106  format(1x,f8.2,1x,i3,1x,i3,5(1x,f10.4))
      stop 10
      end
```

—

Program tablicujący fragment zależności (4.52)  
 (składowa przejściowa podczas powtórnego nagrzewania układu dwuwymiarowego)

```

$large:t
  program stnie powgrz 2d
    double precision s1(10),ss(10),cz,
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c6,c7,c10,
*ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,s2,c70,c8,c80,
*d2,d3,d4,d5,kap,cz2,c9,c90
    real lam,t1(15,1),t(400,15,1),cw,del
    open(9,file='powgrz2d.dan',status='old')
    open(16,file='powgrz2d.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,xi,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,lam,
*cw,del,cz1,cz2,dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*a1/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,xi,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,
*lam,cw,del,cz1,cz2,a,kap,qk,dxk,dyk,dzk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*          PROGRAM          STAN NIEUSTALONY POWT GRZANIE 2D          *'/
*1x,'*                                                    *'/
*1x,'*****'//
*1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
*1x,'ODCIĘTA PUNKTU OBLICZ.       XI = ',f10.4/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU      N = ',i8/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN     ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ   YJ = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU         U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZNI GAMMA N   EPS = ',e10.4/
*1x,'..... TEMP                 EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI          AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU         LAM = ',f6.4/
*1x,'CIEPLO WLASCIWE            CW = ',f10.4/
*1x,'GESTOSC MATERIALU          DEL = ',f10.4/
*1x,'CZAS ROZPOCZECIA STYGNIECIA T1 = ',f10.4/
*1x,'CZAS ROZPOCZECIA PON GRZAN T2 = ',f10.4/
*1x,'STALA A                     A = ',e20.12/
*1x,'STALA KAPPA                 KAP = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA  QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                   DXK = ',f10.4/
*1x,'DEWIACJA                   DYK = ',f10.4/
*1x,'DEWIACJA                   DZK = ',f10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=qk/(lam*(a2/2)*(b2/2))
    do 51 i=1,1
      t1(i,j)=0d0
    do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j)=0d0
      do 52 k=1,120
        xk=0.06
        cz=k*60
102  do 52 i=1,1
        if(xi.ne.xk)goto 101
        xi=xi+dxk

```

```

101  do 30 l=1,10
30   s1(l)=0d0
      s=0d0
      do 74 n=1,nmax
      x0=pi*(n-1)+dpi
      x=x0
      ii=0
10   dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
      ii=ii+1
      x=x+dx
      c1=dx/(x-x0)
      c1=dabs(c1)
      if(c1.lt.eps)goto 11
      if(ii.gt.itmax)stop 3
      goto 10
11   gn=x
31   do 31 l=1,10
      ss(l)=0d0
      ss1=0d0
      do 73 m=0,nmax
      d2=dcos(gn*yk/b2)
      d3=dcos(gn*yj/b2)
      d4=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
      d5=(gn/b2)**2
      c2=dcos(m*pi*xk/a2)
      c3=dcos(m*pi*xi/a2)
      c4=(m*pi/a2)**2
      c6=c4+d5
      c7=(-c6*kap*c2)
      if(abs(c7).gt.300.)goto 214
      c70=dexp(c7)
      goto 215
214  c70=0d0
215  c8=(-c6*kap*(c2+c22))
      if(abs(c8).gt.300.)goto 216
      c80=dexp(c8)
      goto 217
216  c80=0d0
217  c9=(-c6*kap*(c2+c21+c22))
      if(abs(c9).gt.300.)goto 218
      c90=dexp(c9)
      goto 219
218  c90=0d0
219  c10=c*c2*c3*d2*d3*(c80-c90-c70)/(c6*d4)
      if(m.ne.0)goto 220
      c10=c10/2
220  if(c10.eq.0d0)goto 49
      ss2=c10
      ss1=ss1+ss2
      do 20 l=1,9
20   ss(l)=ss(l+1)
      ss(10)=ss2
      ss10=0d0
      do 21 l=1,10
21   ss10=ss10+ss(l)
      c81=epss*ss1
      c81=dabs(c81)
      c91=dabs(ss10)
      if(c91.lt.c81)goto 49
      if(ks.eq.1)write(*,1002)k,xi,yj,n,m,ii,ss1
1002 format(' k='i2,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,

```

```
      *' ii='i3,' ss1='e20.12)
73   continue
      stop 1
c   niezbiezny
49   s2=ss1
      s=s+s2
      do 25 l=1,9
25   s1(l)=s1(l+1)
      s1(10)=s2
      s10=0d0
      if(ks.eq.2)write(*,1001)cz,xi,yj,n,m,ii,s
1001 format('cz='f7.1,' x='f6.3,' y='f6.3,' n='i8,' m='i8,
      *' ii='i3,' s='e20.12)
      do 26 l=1,10
26   s10=s10+s1(l)
      c82=epss*s
      c82=dabs(c82)
      c92=dabs(s10)
      if(c92.lt.c82)goto 50
74   continue
      stop 2
c   niezbiezny
50   t(k,i,j)=s
      if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,gn
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i5,' gn='f10.5)
52   continue
      write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD   TEMPERATURY'/
      *1x,' t                T(I,J)'/)
      do 61 k=1,120
61   write(16,106)cz,(t(k,i,j),i=1,1)
106  format(1x,f8.2,1(1x,f10.4))
      stop 10
      end
```

—

Program tablicujący fragment zależności (4.53)  
(składowa przejściowa podczas powtórnego nagrzewania układu trójwymiarowego)

```

$large:t
  program stnie powgrz 3d
    double precision s1(10),ss(10),sss(10),sss1,c85,c95,
*ss10,s,s10,c1,pi,dx,x,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,d7,d70,d8,
*ss1,ss2,c81,c82,c91,c92,kap,c,del,cz,x0,c11,c12,c14,
*d1,d2,d3,d4,d5,d6,d50,c120,c13,sss2,sss10,c140,c130,c15
    real lam,t1(6,1,6),t(2601,6,1,6)
    open(9,file='po3nie.dan',status='old')
    open(16,file='po3nie.wyn',status='new')
    read(9,*)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,lam,
*cw,del,cz,dpi1,ks,qk,dxk,dyk,dzk
    a=b2*a1/lam
    kap=lam/(cw*del)
    write(16,100)k1,i1,m1,nmax,itmax,yk,yj,b2,a2,d,u,eps,epss,a1,
*lam,cw,del,cz1,cz2,a,kap,qk,dxk
100  format(1x,'*****'
*1x,'*****'/
*1x,'*
*1x,'*          PROGRAM          STAN NIEUSTALONY POWT GRZANIE 3D          *'/
*1x,'*
*1x,'*****'//
*1x,'LICZBA KABLI                K1 = ',i3/
*1x,'LICZBA KROKOW SIATKI PO X   I1 = ',i3/
*1x,'..... Z                     M1 = ',i3/
*1x,'MAX LICZBA WYR. SZEREGU     N = ',i8/
*1x,'MAX ILOSC ITER. DLA GAMN    ITMAX = ',i3/
*1x,'RZEDNA KABLI                YK = ',F6.3/
*1x,'RZEDNA POWIERZCHNI OBLICZ  YJ = ',F6.3/
*1x,'GRUBOSC BETONU              2B = ',F6.3/
*1x,'SZEROKOSC BETONU            2A = ',F6.3/
*1x,'DLUGOSC BETONU              D = ',F6.3/
*1x,'ODSTEP BEZ PRZEWODU        U = ',F6.3/
*1x,'KRYTERIUM ZBIEZN GAMMA N    EPS = ',e10.4/
*1x,'..... TEMP                  EPSS= ',e10.4/
*1x,'WSPOLCZ KONWEKCJI          AL = ',f6.2/
*1x,'PRZEWODNOSC BETONU          LAM = ',f6.4/
*1x,'CIEPLO WLASCIWE             CW = ',f10.4/
*1x,'GESTOSC BETONU              DEL = ',f10.4/
*1x,'CZAS ROZPOCZECIA STYGNIECIA T1 = ',f10.4/
*1x,'CZAS ROZPOCZECIA PON GRZAN T2 = ',f10.4/
*1x,'STALA A                      A = ',e20.12/
*1x,'STALA KAPPA                  KAP = ',e20.12/
*1x,'LINIOWA GESTOSC MOCY KABLA  QK = ',F6.3/
*1x,'DEWIACJA                     DXK = ',e10.4//)
    j=1
    dpi=dbl(dpi1)
    pi=dacos(-1.d0)
    c=-2*qk/((a2/2)*lam*pi*(b2/2))
    do 51 i=1,i1+1
    do 51 m=1,m1+1
    t1(i,j,m)=0d0
    do 51 k=1,k1
51  t(k,i,j,m)=0d0
    do 52 k=0,120
    cz=k*60
    xk=0.06
    do 52 m=1,m1+1
    zi=d*real(m-1)/(2*real(m1))

```

```
do 52 i=1,i1+1
xi=(i-1)*(a2/2)/i1
if(xi.ne.xk)goto 101
xi=xi+dxk
101 do 30 l=1,10
30 s1(l)=0d0
s=0d0
do 74 n=1,nmax
x0=pi*(n-1)+dpi
x=x0
ii=0
10 dx=dsin(x)*dsin(x)*(1./dtan(x)-x/a)
ii=ii+1
x=x+dx
c1=dx/(x-x0)
c1=dabs(c1)
if(c1.lt.eps)goto 11
if(ii.gt.itmax)stop 3
goto 10
11 gn=x
do 35 l=1,10
35 sss(l)=0d0
sss1=0d0
do 75 n2=0,nmax
c2=dcos(gn*yk/b2)
c3=dcos(gn*yj/b2)
c4=dcos(n2*pi*xk/a2)
c5=dcos(n2*pi*xi/a2)
c6=1.d0+dsin(2.*gn)/(2.*gn)
c10=c2*c3*c4*c5/c6
c7=pi*(1-2.*u)
c8=(n2*pi/a2)**2
c9=(gn/b2)**2
c11=c8+c9
c12=c11*kap*cz
if(abs(c12).gt.300.)goto 221
c120=dexp(-c12)
goto 222
221 c120=0d0
222 c13=c11*kap*(cz+cz2)
if(abs(c13).gt.300.)goto 223
c130=dexp(-c13)
goto 224
223 c130=0d0
224 c14=c11*kap*(cz+cz1+cz2)
if(abs(c14).gt.300.)goto 225
c140=dexp(-c14)
goto 226
225 c140=0d0
226 c15=c7*(c130-c140-c120)/(c6*c11*2.)
if(n2.ne.0)goto 200
c10=c10/2
200 do 31 l=1,10
31 ss(l)=0d0
ss1=0d0
do 73 m2=1,nmax
d1=dsin(m2*c7)
d2=dcos(2*m2*pi*zi/d)
d3=(2.*m2*pi/d)**2
d4=d3+c11
d5=d4*kap*cz
```

```

        if(abs(d5).gt.300.)goto 211
        d50=dexp(-d5)
        goto 212
211    d50=0d0
212    d6=d4*kap*(cz+cz2)
        if(abs(d6).gt.300.)goto 213
        d60=dexp(-d6)
        goto 214
213    d60=0d0
214    d7=d4*kap*(cz+cz1+cz2)
        if(abs(d7).gt.300.)goto 215
        d70=dexp(-d7)
        goto 216
215    d70=0d0
216    d8=(-1)**m2*d1*d2*(d60-d70-d50)/(c6*d4*m2)
        if(d8.eq.0d0)goto 49
        ss2=d8
        ss1=ss1+ss2
        do 20 l=1,9
20    ss(l)=ss(l+1)
        ss(10)=ss2
        ss10=0d0
        do 21 l=1,10
21    ss10=ss10+ss(l)
        c81=epss*ss1
        c81=dabs(c81)
        c91=dabs(ss10)
        if(c91.lt.c81)goto 49
73    continue
        stop 1
c    niezbiezny
49    sss2=c*c10*(c15+ss1)
        sss1=sss1+sss2
        if(sss2.eq.0d0)goto 55
        do 34 l=1,9
34    sss(l)=sss(l+1)
        sss(10)=sss2
        sss10=0d0
        if(ks.eq.2)write(*,1002)xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,sss1
1002  format(' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i4,' m='i8,
        *' r='i4,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 33 l=1,10
33    sss10=sss10+sss(l)
        c85=epss*sss1
        c85=dabs(c85)
        c95=dabs(sss10)
        if(c95.lt.c85)goto 55
75    continue
        stop 3
c    niezbiezny
55    s=s+sss1
        if(sss1.eq.0d0)goto 50
        do 25 l=1,9
25    s1(l)=s1(l+1)
        s1(10)=sss1
        s10=0d0
        if(ks.eq.1)write(*,1001)cz,xi,yj,zi,n,n2,m2,ii,s
1001  format(f8.2,' x='f5.3,' y='f5.3,' zi='f5.3,' n='i3,' m='i4,
        *' r='i3,' ii='i2,' s='e20.12)
        do 26 l=1,10
26    s10=s10+s1(l)

```

```
      c82=epss*s
      c82=dabs(c82)
      c92=dabs(s10)
      if(c92.lt.c82)goto 50
74    continue
      stop 2
c    niebezpiezny
50    t(k,i,j,m)=s
      if(ks.eq.4)write(*,900)k,i,j,m,m2,gn
900  format(' k='i2,' i='i3,' j='i3,' m='i3,' m2='i5,' gn='f10.5)
52    continue
      write(16,105)
105  format(1x,'          ROZKLAD  TEMPERATURY'/
*1x,' CZ      J      M          T(I,J,M) '/')
      do 61 m=1,m1+1
      do 61 k=1,120
61    write(16,106)cz,j,m,(t(k,i,j,m),i=1,i1+1)
106  format(1x,f8.2,1x,i3,1x,i3,5(1x,f10.4))
      stop 10
      end
```

—