

**Politechnika Białostocka**

**Rozprawy Naukowe Nr 80**

**Marian Roch Dubowski**

**Stabilność układów napędowych  
sterowanych zgodnie z zasadą  
pośredniej orientacji polowej**

**Wydawnictwo Politechniki Białostockiej**

**Białystok 2001**

## Recenzenci

*dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz, prof. nadzw. PB*  
*prof. zw. dr hab. inż. Marian P. Kaźmierkowski*



Opracowanie redakcyjne  
*Jadwiga Żukowska*

Skład komputerowy  
*Teresa Dawidowicz*

Rysunki  
*Marek Brański*  
*Joanna Ziółkowska*

ISSN 0867-096X

Wydawnictwo  
Politechniki Białostockiej  
Białystok 2001



Opracowanie i druk – Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej

## Spis treści

|                                                                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Streszczenie .....                                                                                                                                                  | 7         |
| Wykaz ważniejszych oznaczeń .....                                                                                                                                   | 9         |
| Wstęp .....                                                                                                                                                         | 15        |
| <b>1. Zastosowanie bezpośredniej metody Lapunowa do analizy stabilności układów regulacji automatycznej .....</b>                                                   | <b>21</b> |
| 1.1. Pojęcia podstawowe .....                                                                                                                                       | 21        |
| 1.2. Idealne funkcje Lapunowa .....                                                                                                                                 | 29        |
| 1.3. Zastosowanie form kwadratowych do analizy stabilności układów liniowych o zmiennych parametrach .....                                                          | 30        |
| 1.4. Zastosowanie form kwadratowych do analizy stabilności wybranej klasy układów nieliniowych .....                                                                | 33        |
| 1.5. Opis zasady działania modułów optymalizacyjnych pracujących w środowisku MATLAB .....                                                                          | 44        |
| <b>2. Analiza stabilności układów sterowania pośredniego z regulatorami prędkości kątowej pracującymi w zakresie liniowym .....</b>                                 | <b>47</b> |
| 2.1. Układ napędowy z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                        | 49        |
| 2.2. Układ napędowy z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                              | 56        |
| 2.3. Układ napędowy z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                           | 62        |
| 2.4. Układ napędowy z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana ....                                  | 66        |
| 2.5. Uwagi końcowe .....                                                                                                                                            | 71        |
| <b>3. Analiza stabilności układów sterowania pośredniego z uwzględnieniem zjawiska nasycenia regulatorów prędkości kątowej .....</b>                                | <b>74</b> |
| 3.1. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana ..... | 75        |

|                                                                                                                                                                                                                      |            |                                                                                                                                                                                                                   |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                     | 81         | 4.3. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                   | 195        |
| 3.3. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                            | 89         | 4.3.1. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym .....                                                                       | 196        |
| 3.4. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                               | 105        | 4.3.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej .....                                                                                                                         | 209        |
| 3.5. Uwagi końcowe .....                                                                                                                                                                                             | 120        | 4.4. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalno-całkującym i proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana ..... | 214        |
| <b>4. Analiza stabilności układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika maszyny .....</b>                              | <b>122</b> | 4.4.1. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym .....                                                                                       | 215        |
| 4.1. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                   | 124        | 4.4.1.1 Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI. pracującym w zakresie liniowym .....                                                                             | 215        |
| 4.1.1. Analiza stabilności globalnej układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym .....                                                                                     | 134        | 4.4.1.2 Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR pracującym w zakresie liniowym .....                                                                             | 226        |
| 4.1.1.1. Analiza stabilności globalnej pojedynczych punktów pracy ustalonej układu .....                                                                                                                             | 134        | 4.4.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalno-inercyjno-różniczkowego regulatora prędkości kątowej .....                                                                                                   | 229        |
| 4.1.1.2. Analiza stabilności globalnej zbioru punktów pracy ustalonej układu .....                                                                                                                                   | 141        | 4.5. Uwagi końcowe .....                                                                                                                                                                                          | 234        |
| 4.1.2. Analiza stabilności lokalnej układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym .....                                                                                      | 155        | <b>5. Podsumowanie .....</b>                                                                                                                                                                                      | <b>236</b> |
| 4.1.3. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej .....                                                                                                                            | 163        | <b>Dodatek .....</b>                                                                                                                                                                                              | <b>239</b> |
| 4.2. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalno-całkującym i proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana ..... | 169        | D.1. Modele matematyczne układów napędowych sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej .....                                                                                                      | 239        |
| 4.2.1. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym .....                                                                                          | 170        | D1.1. Model maszyny asynchronicznej, sterowanej zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej .....                                                                                                              | 239        |
| 4.2.1.1. Analiza stabilności globalnej układu z regulatorem prędkości kątowej typu PI .....                                                                                                                          | 170        | D1.2. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                               | 243        |
| 4.2.1.2. Analiza stabilności globalnej układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR .....                                                                                                                         | 182        | D1.3. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                     | 246        |
| 4.2.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalno-inercyjno-różniczkowego regulatora prędkości kątowej .....                                                                                                      | 190        | D1.4. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                                  | 249        |
|                                                                                                                                                                                                                      |            | D1.5. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                        | 252        |

|                                                                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| D1.6. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                               | 254 |
| D1.7. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                  | 257 |
| D2. Warunki dostateczne stabilności asymptotycznej układów dynamicznych testowanych przy pomocy wybranych klas form kwadratowych ...                                                                                    | 260 |
| D3. Modele matematyczne układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem wpływu cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika maszyny .....                                | 264 |
| D3.1. Model matematyczny maszyny asynchronicznej, sterowanej zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem wpływu zmian rezystancji uzwojeń wirnika .....                                             | 264 |
| D3.2. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                                     | 265 |
| D3.3. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                           | 267 |
| D3.4. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                                        | 269 |
| D3.5. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                              | 270 |
| D4. Przykłady analizy stabilności układów napędowych o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej .....                                                                                                  | 272 |
| D4.1. Przykład analizy stabilności układu napędowego z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana .....                                                     | 273 |
| D4.2. Przykład analizy stabilności układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana z uwzględnieniem wpływu cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika ..... | 278 |
| <b>Literatura</b> .....                                                                                                                                                                                                 | 285 |
| <b>Summary</b> .....                                                                                                                                                                                                    | 295 |

## Streszczenie

Za podstawową wadę układów napędowych, sterowanych według metody pośredniej orientacji polowej (POP), uważa się powszechnie wrażliwość na zmiany rezystancji uzwojeń wirnika maszyny. Zjawisko to przynosi negatywne skutki w pracy napędu w stanach ustalonych i przejściowych.

W pracy zaprezentowano wszechstronną analizę stabilności układów napędowych o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej. W ramach tej klasy rozpatrywano właściwości dynamiczne układów pracujących ze stałą normą wektora strumienia skojarzonego wirnika.

Analizę stabilności prowadzono z wykorzystaniem bezpośredniej metody Lapunowa. Jako miarę oceny jakości doboru testującej formy kwadratowej przyjęto skalę eksponencjalnej zbieżności normy wektora stanu.

Stosowane w procesie analizy modele matematyczne uwzględniały takie zjawiska, jak dynamikę obwodu regulacji prądu stojana, efekt nasycenia regulatorów prędkości kątowej typu P lub PI oraz efekt termicznych zmian wartości rezystancji uzwojeń wirnika.

Wykazano, że jeżeli parametry układu napędowego pozostają stałe, regulatory prędkości kątowej pracują w zakresie liniowym a wartość rezystancji wirnika jest znana, to układ napędowy sterowany według zasady POP jest globalnie asymptotycznie stabilny dla dowolnych parametrów maszyny napędowej i zastosowanych regulatorów. W tym przypadku procedura dowodowa ma charakter czysto analityczny.

Uwzględnienie w tych warunkach efektu nasycenia regulatorów prędkości kątowej (typu P lub PI) prowadzi do gwarancji asymptotycznej stabilności globalnej w pewnym zbiorze wartości parametrów regulatorów prędkości kątowej. Zbiór ten stanowi dostatecznie duże, z praktycznego punktu widzenia, otoczenie wartości parametrów regulatorów wymiarowanych według standardowych kryteriów optymalizacji (kryterium modułu i symetrii). W ogólnym przypadku procedura dowodowa ma tu charakter numeryczny.

W pracy wykazano również, że uwzględnienie termicznych zmian rezystancji uzwojeń wirnika prowadzi do uzyskania gwarancji stabilności globalnej układu napędowego tylko w określonym zbiorze wartości parametrów regulatorów prędkości kątowej. Przedstawiono metodę określania granic tego zbioru na drodze nu-

merycznej optymalizacji testującej formy kwadratowej. Proces obliczeń przebiega efektywnie, ponieważ wykazano, że macierz optymalnej formy kwadratowej musi należeć do pewnej klasy o określonej liczbie elementów zerowych. Z zaprezentowanych rezultatów wynika również, że istnieje w przestrzeni parametrów układu taki zbiór, w którym odporność układu na zmiany rezystancji wirnika maszyny jest największa. W ogólnym przypadku zbiór ten nie stanowi bezpośredniego otoczenia tych wartości parametrów regulatorów, które wynikają ze standardowych kryteriów optymalizacji nastaw regulatorów. Wykazano również, że przy uwzględnieniu efektu nasycenia regulatorów prędkości kątowej wartość dopuszczalnych względnych zmian rezystancji wirnika maleje wraz ze wzrostem współczynnika wzmocnienia.

## Wykaz ważniejszych oznaczeń<sup>1)</sup>

### Wielkości i parametry

|                          |                                                                                            |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                      | – stała układu napędowego;                                                                 |
| $\mathbf{A}$             | – macierz stanu układu dynamicznego;                                                       |
| $\mathbf{A}(\mathbf{d})$ | – macierz stanu o elementach zależnych od wektora parametrów $\mathbf{d}$ ;                |
| $\mathbf{A}_L$           | – macierz stanu przybliżenia liniowego układu dynamicznego;                                |
| $b$                      | – zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu stojana, jednostki względne;              |
| $c$                      | – parametr regulatora typu PIR, jednostki względne;                                        |
| $c_F$                    | – parametr regulatora typu PIR, jednostki fizyczne;                                        |
| $d$                      | – współczynnik wzmocnienia części całkowitej regulatora PI lub PIR, jednostki względne;    |
| $d_F$                    | – współczynnik wzmocnienia części całkowitej regulatora PI lub PIR, jednostki fizyczne;    |
| $\mathbf{d}$             | – wektor parametrów układu dynamicznego;                                                   |
| $D(\mathbf{d})$          | – hiperprostokątścian utworzony w przestrzeni elementów wektora parametrów $\mathbf{d}$ ;  |
| $f_{SN}$                 | – częstotliwość synchroniczna znamionowa, wielkości fizyczne;                              |
| $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ | – funkcja wektorowa wektora stanu $\mathbf{x}$ ;                                           |
| $i_s^x$                  | – składowa $x$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki względne; |
| $i_s^y$                  | – składowa $y$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki względne; |
| $i_{sF}^x$               | – składowa $x$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki fizyczne; |
| $i_{sF}^y$               | – składowa $y$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki fizyczne; |

<sup>1)</sup> Wykaz obejmuje oznaczenia podstawowe, często stosowane w pracy; objaśnienia oznaczeń występujących sporadycznie zamieszczono w tekście.

|                   |                                                                                                                                        |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I_{Os}^x$        | – składowa $x$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość ustalona, jednostki względne;                                             |
| $I_{Os}^y$        | – składowa $y$ wektora przestrzennego prądu stojana, wartość ustalona, jednostki względne;                                             |
| $I_{\mu F}$       | – składowa magnesująca prądu stojana, jednostki fizyczne;                                                                              |
| $\mathbf{i}_s$    | – wektor przestrzenny prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki względne;                                                             |
| $\mathbf{i}_{sF}$ | – wektor przestrzenny prądu stojana, wartość chwilowa, jednostki fizyczne;                                                             |
| $\mathbf{I}_{Os}$ | – wektor przestrzenny prądu stojana, wartość ustalona, jednostki względne;                                                             |
| $J$               | – zastępczy moment bezwładności układu sprowadzony do wału wirnika maszyny, jednostki fizyczne;                                        |
| $k_{\omega}$      | – względny współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości kątowej;                                                                      |
| $k_{\omega F}$    | – współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości kątowej, jednostki fizyczne;                                                           |
| $L_r$             | – indukcyjność całkowita obwodu wirnika, jednostki fizyczne;                                                                           |
| $M$               | – indukcyjność wzajemna pomiędzy stojanem i wirnikiem maszyny asynchronicznej, jednostki fizyczne;                                     |
| $m_O$             | – moment zewnętrzny, wartość chwilowa, jednostki względne;                                                                             |
| $m_{OF}$          | – moment zewnętrzny, wartość chwilowa, jednostki fizyczne;                                                                             |
| $M_O$             | – moment zewnętrzny, wartość ustalona, jednostki względne;                                                                             |
| $p$               | – liczba par biegunów maszyny asynchronicznej;                                                                                         |
| $\mathbf{P}$      | – symetryczna macierz dodatnio określonej formy kwadratowej $V(\mathbf{x})$ ;                                                          |
| $\mathbf{P}_i$    | – symetryczna macierz dodatnio określonej „idealnej funkcji Lapunowa” (IFL) danego układu dynamicznego;                                |
| $\mathbf{Q}$      | – symetryczna macierz pochodnej formy kwadratowej $V(\mathbf{x})$ obliczanej wzdłuż dowolnej trajektorii badanego układu dynamicznego; |
| $R_r$             | – rezystancja obwodu wirnika (wartość aktualna), jednostki fizyczne;                                                                   |
| $R_{rN}$          | – rezystancja obwodu wirnika (wartość znamionowa), jednostki fizyczne;                                                                 |
| $\mathbf{R}$      | – diagonalna macierz wagowa;                                                                                                           |
| $t$               | – czas, jednostki względne;                                                                                                            |
| $t_F$             | – czas, jednostki fizyczne;                                                                                                            |
| $T_{rN}$          | – stała czasowa obwodu wirnika (wartość znamionowa), jednostki fizyczne;                                                               |

|                       |                                                                                                       |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_{sF}$              | – zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu stojana, jednostki fizyczne;                         |
| $\mathbf{T}$          | – macierz modalna do macierzy stanu $\mathbf{A}$ danego układu dynamicznego;                          |
| $V(\mathbf{x})$       | – dodatnio określona forma kwadratowa;                                                                |
| $\mathbf{x}$          | – wektor stanu układu dynamicznego;                                                                   |
| $\mathbf{X}_O$        | – wektor stanu ustalonego układu dynamicznego;                                                        |
| $z$                   | – zmienna stanu regulatora prędkości kątowej typu PI lub PIR, wartość chwilowa, jednostki względne;   |
| $z_F$                 | – zmienna stanu regulatora prędkości kątowej typu PI lub PIR, jednostki fizyczne;                     |
| $Z_O$                 | – zmienna stanu regulatora prędkości kątowej typu PI lub PIR, wartość ustalona, jednostki względne;   |
| $\Delta i_s^x$        | – składowa $x$ przyrostowego wektora przestrzennego prądu stojana;                                    |
| $\Delta i_s^y$        | – składowa $y$ przyrostowego wektora przestrzennego prądu stojana;                                    |
| $\Delta \mathbf{i}_s$ | – przyrostowy wektor przestrzenny prądu stojana;                                                      |
| $\Delta \mathbf{x}$   | – wektor stanu przyrostowego układu dynamicznego;                                                     |
| $\Delta \psi_r^x$     | – składowa $x$ przyrostowego wektora przestrzennego strumienia wirnika;                               |
| $\Delta \psi_r^y$     | – składowa $y$ przyrostowego wektora przestrzennego strumienia wirnika;                               |
| $\Delta \psi_r$       | – przyrostowy wektor przestrzenny strumienia wirnika;                                                 |
| $\Delta \omega$       | – przyrostowa prędkość kątowa układu napędowego;                                                      |
| $\eta$                | – wskaźnik jakości doboru formy kwadratowej do badania układu dynamicznego;                           |
| $\lambda_{min}()$     | – minimalna wartość własna argumentu macierzowego;                                                    |
| $\lambda_{max}()$     | – maksymalna wartość własna argumentu macierzowego;                                                   |
| $\lambda_M()$         | – dominującą (posiadającą największą część rzeczywistą) wartość własna argumentu macierzowego;        |
| $\rho$                | – stosunek znamionowej wartości rezystancji obwodu wirnika $R_{rN}$ do jej aktualnej wartości $R_r$ ; |
| $\nu$                 | – względny wskaźnik jakości doboru formy kwadratowej do badania układu dynamicznego;                  |
| $\omega$              | – prędkość kątowa wału maszyny asynchronicznej, wartość chwilowa, jednostki względne;                 |
| $\omega_F$            | – prędkość kątowa wału maszyny asynchronicznej, wartość chwilowa, jednostki fizyczne;                 |
| $\omega_r$            | – pulsacja prądu wirnika maszyny asynchronicznej, wartość chwilowa, jednostki względne;               |

|               |                                                                                                 |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\omega_{rF}$ | – pulsacja prądu wirnika maszyny asynchronicznej, wartość chwilowa, jednostki fizyczne;         |
| $\omega_z$    | – wartość zadana prędkości kątowej, wartość chwilowa, jednostki względne;                       |
| $\Omega_O$    | – prędkość kątowa wału maszyny, wartość ustalona, jednostki względne;                           |
| $\Omega_{SN}$ | – pulsacja synchroniczna znamionowa silnika, jednostki fizyczne;                                |
| $\Omega_z$    | – stała wartość zadana prędkości kątowej, jednostki względne;                                   |
| $\Psi_r^x$    | – składowa $x$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki względne; |
| $\Psi_r^y$    | – składowa $y$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki względne; |
| $\Psi_r$      | – wektor przestrzenny strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki względne;                 |
| $\Psi_{rF}^x$ | – składowa $x$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki fizyczne; |
| $\Psi_{rF}^y$ | – składowa $y$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki fizyczne; |
| $\Psi_{rF}$   | – wektor przestrzenny strumienia wirnika, wartość chwilowa, jednostki fizyczne;                 |
| $\Psi_{Or}^x$ | – składowa $x$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość ustalona, jednostki względne; |
| $\Psi_{Or}^y$ | – składowa $y$ wektora przestrzennego strumienia wirnika, wartość ustalona, jednostki względne; |
| $\Psi_{Or}$   | – wektor przestrzenny strumienia wirnika, wartość ustalona, jednostki względne.                 |

### Symbole matematyczne

|                 |                                                             |
|-----------------|-------------------------------------------------------------|
| min             | – wartość minimalna;                                        |
| max             | – wartość maksymalna;                                       |
| real( )         | – część rzeczywista argumentu zespolonego;                  |
| $\ (\cdot)\ $   | – norma euklidesowa argumentu wektorowego lub macierzowego; |
| $\Delta(\cdot)$ | – przyrostowy charakter argumentu;                          |
| $(\cdot)^T$     | – transpozycja argumentu macierzowego lub wektorowego;      |

|                |                                                                                                              |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(\cdot)^*$    | – operacja sprzężenia argumentu zespolonego (lub operacja sprzężenia i transpozycji argumentu macierzowego); |
| $(\cdot)^{-1}$ | – odwrotność argumentu macierzowego.                                                                         |

### Indeksy górne

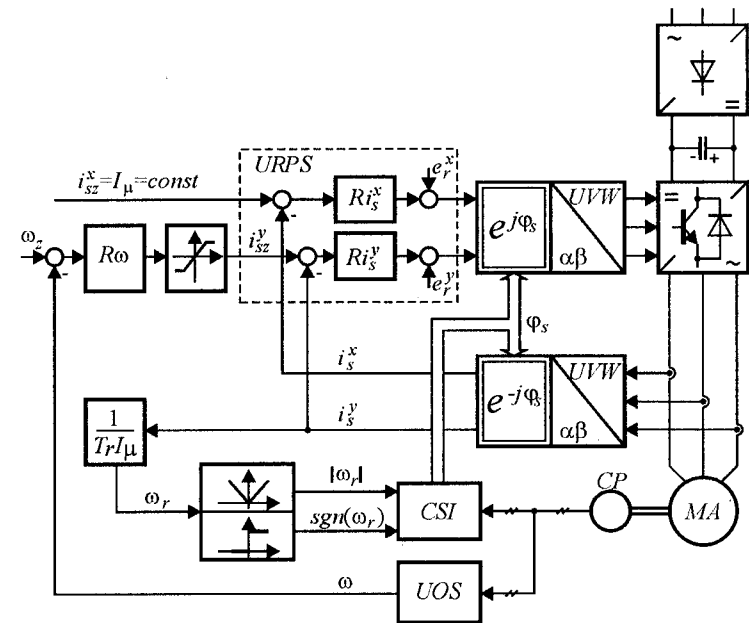
|     |                                     |
|-----|-------------------------------------|
| $x$ | – składowa $x$ zmiennej wektorowej; |
| $y$ | – składowa $y$ zmiennej wektorowej. |

### Indeksy dolne

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| $F$ | – system jednostek fizycznych;           |
| $N$ | – wartość znamionowa;                    |
| $O$ | – wartość ustalona;                      |
| $r$ | – wielkość związana z wirnikiem maszyny; |
| $s$ | – wielkość związana ze stojanem maszyny; |
| $w$ | – system jednostek względnych.           |

## Wstęp

Układy napędowe, sterowane zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej (POP), nazywane też układami IFOC (*indirect field-oriented control*) [4, 7, 13, 15, 20, 23, 48, 62, 109, 115, 119] to ważna klasa wektorowych układów sterowania częstotliwościowego silnikami asynchronicznymi. Choć minęło już wiele lat od stworzenia tej koncepcji sterowania przez K. Hasse [48], metoda ta jest nadal chętnie stosowana równolegle z innymi technikami sterowania wektorowego. Przedmiotem prowadzonej w pracy analizy stabilności jest grupa układów sterowania pośredniego, w której maszyna asynchroniczna zasilana jest *prądowo* z przekształtnika energoelektronicznego. Ten sposób sterowania wykazuje, w porównaniu ze sterowaniem napięciowym, istotne zalety i stanowi pewnego rodzaju standard dla większości rozwiązań sterowania wektorowego [60, 62, 115]. Schemat blokowy układu regulacji prędkości kątowej silnika asynchronicznego, zgodnie z zasadą POP, dla przypadku sterowania w pierwszej strefie regulacji przedstawia rys. 0.1.



**Rys. 0.1.** Schemat blokowy układu sterowania prędkością kątową silnika asynchronicznego zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej

Mimo że metoda ta jest dobrze znana, poniżej omówiono krótko zasadę działania układu, zwracając szczególną uwagę na elementy specyficzne, które korespondują z przyjętymi w dalszej części pracy założeniami upraszczającymi.

Podstawowym fragmentem schematu jest blok regulacji prądu stojana *URPS*, którego zadaniem jest zamiana właściwości zasilającego układ źródła energii z napięciowych na prądowe. Jest to bardzo ważny podsystem, którego dokładność w stanach ustalonych i przejściowych decyduje o podstawowych cechach układu. Należy podkreślić, że wektorowy charakter sterowania narzuca określone wymagania co do dokładności odtwarzania normy i fazy zadanego wektora prądu stojana. Wszelkie błędy (nawet o charakterze przejściowym) naruszają zasadę POP i są interpretowane przez układ jako błędne położenie wektora strumienia skojarzonego wirnika, który nie podlega bezpośredniemu pomiarowi. Analizę wpływu tego zjawiska na właściwości układu można znaleźć w pracach [26, 75, 77]. Z tych powodów układ regulacji prądu stojana zrealizowany jest najczęściej w ten sposób, że wielkości sterujące i mierzone przeliczane są do wirującego z prędkością synchroniczną układu odniesienia (w prezentowanym układzie jest to układ współrzędnych polowych). Operacja ta odbywa się w rotatorach  $e^{j\varphi_s}$  oraz  $e^{-j\varphi_s}$ , zrealizowanych w technice hybrydowej [74] lub programowo przy użyciu układów mikroprocesorowych. W ten sposób zlikwidować można ustalony uchyb regulacji współrzędnych wektora prądu stojana [7, 63]. Do osiągnięcia pełnego odsprężenia obwodów regulacji prądu w osiach *x* oraz *y* w stanach przejściowych stosuje się często dodatkowe sieci odsprężające, których działanie sprowadza się do wprowadzenia dodatniego kompensującego sprzężenia zwrotnego względem napięcia wewnętrznego maszyny [7, 8, 62, 77]. Prezentowana w pracy analiza stabilności prowadzona będzie przy założeniu, że w wyniku tych zabiegów zlikwidowano uchyb ustalony oraz uzyskano pełne odsprężenie układu regulacji prądu stojana. Sygnał wyjściowy rotatora  $e^{j\varphi_s}$  po przekształceniu do postaci trójfazowej steruje wyposażonym w mechanizm modulacji szerokości impulsów (MSI) falownikiem tranzystorowym.

Drugim, bardzo ważnym fragmentem układu jest podsystem estymacji kąta położenia wektora strumienia wirnika. Użycie pojęcia estymaty jest tu jak najbardziej uzasadnione, ponieważ z istoty sterowania pośredniego wynika, że kąt ten nie jest bezpośrednio mierzony, a wytwarza się go w wyniku sumowania kąta położenia wału maszyny (źródłem sygnału jest tu czujnik *CP*) i całki oznaczonej z sygnału pulsacji prądu wirnika  $\omega_r$ . Dokładne działanie tego podsystemu jest bardzo ważne w dwóch aspektach. Załóżmy wstępnie, że występujące w bloku  $\frac{1}{T_r I_\mu}$  wielkości są replikami wielkości faktycznie występujących w maszynie. Nawet przy takim założeniu proces formowania kąta  $\varphi_s$  musi się odbywać z bardzo wy-

soką dokładnością, ponieważ każdy błąd będzie interpretowany przez układ tak, jak uchyb wielkości estymowanej. W praktyce powstawać może wówczas pojęcie „fałszywego poślizgu”, co prowadzi w efekcie do mylnej oceny stanu pracy układu. Z tego powodu rozwiązania techniczne tego podsystemu realizowane są najczęściej w technice cyfrowej. Oba sygnały tworzące kąt estymowany  $\varphi_s$  (w postaci odpowiednich sygnałów cyfrowych) podawane są do bloku *CSI*, w którym zachodzi proces ich cyfrowego sumowania i całkowania, tworząc w efekcie cyfrową reprezentację tego kąta. Drugim czynnikiem związanym z dokładnością procesu estymacji jest źródło sygnału wchodzącego do bloku  $\frac{1}{T_r I_\mu}$ . Standardowo propo-

nuje się, by źródłem tego sygnału była składowa zadana  $i_{sc}^y$  wektora prądu stojana. [60, 62]. W pracach [17, 26, 75] wykazano, że lepsze efekty można uzyskać wykorzystując do tego celu sygnał rzeczywistej składowej  $i_s^y$ . Pozwala to zredukować wpływ dynamicznego uchybu regulacji wektora prądu stojana na chwilową wartość pulsacji prądu wirnika. Przedstawiona w pracy analiza stabilności przeprowadzona jest przy założeniu, że wpływ ten został wyeliminowany.

Sygnały cyfrowe z czujnika *CP*, po odpowiedniej obróbce [74], stanowią mogą źródło informacji o aktualnej prędkości katowej wału maszyny, która potrzebna jest do funkcjonowania regulatora prędkości.

Wprowadzenie tych zabiegów nie pozwala jednak na wyeliminowanie podstawowej wady układów sterowanych według zasady POP, jaką jest wrażliwość na zmiany wartości rezystancji wirnika. Ze schematu blokowego wynika bowiem jasno, że sygnał pulsacji prądu wirnika wytwarzany jest w bloku, w którym występuje określona wartość stałej czasowej  $T_r$  obwodu wirnika. Wartość tej stałej może podlegać zmianom w trakcie pracy napędu, głównie wskutek znacznych zmian wartości rezystancji wywołanych zmianami temperatury. Wynika to między innymi z tego, że stosowane współcześnie materiały izolacyjne dopuszczają, bez wpływu na czas życia izolacji, coraz wyższe przyrosty temperatury uzwojeń maszyn elektrycznych. Jeśli wziąć pod uwagę, że współczynnik termicznych zmian rezystancji dla typowych materiałów używanych do wytwarzania uzwojeń maszyn elektrycznych wynosi około 0,004 [1/°K] to można przyjąć, że podczas pracy układu napędowego zmiany rezystancji sięgają kilkudziesięciu procent w stosunku do wartości określonej w warunkach znamionowych [15, 71].

Pojawia się więc istotne, ze względu na ocenę jakości układu napędowego, pytanie o negatywne skutki, jakie może wywoływać efekt tak znacznych zmian wartości rezystancji uzwojeń wirnika podczas pracy maszyny.

Efekt zmian rezystancji może powodować zmiany w statycznych i dynamicznych właściwościach układu napędowego.

Ponieważ rozpatrywany jest układ zamknięty, wydaje się, że skutki tych zmian w stanach ustalonych mogą być niezauważalne przez użytkownika obserwującego jedynie prędkość kątową układu. Zmiany rezystancji wirnika powodują bowiem przede wszystkim zmianę punktu pracy maszyny napędowej. Szczególnie silnym zmianom podlega wtedy wartość normy wektora strumienia skojarzonego wirnika (a w konsekwencji również pozostałych strumieni). Zmiany te powodują, że praca maszyny nie odbywa się w warunkach przyjętych za optymalne. Decydujący o wymiarach maszyny strumień główny staje się albo zbyt mały, co powoduje niedostateczne wykorzystanie maszyny, albo zbyt duży, co prowadzić może do nasycenia obwodu magnetycznego [62, 71,]. Warto tu podkreślić, że zaprezentowana na rys. 0.1 struktura z regulacją prądową jest stosunkowo odporna na ograniczony poziom nasycenia. Zapewnione jest to przez ciągłe działanie obwodu regulacji prądu zapewniające dokładne śledzenie wartości zadanej.

Znacznie trudniejsze do przewidzenia są skutki zmian właściwości dynamicznych, wywołane zmianami wartości rezystancji wirnika. Mogą one powodować pogorszenie dynamicznych wskaźników jakości napędu, a w skrajnych przypadkach doprowadzić do niestabilności układu. Zagadnieniu analizy wrażliwości i stabilności układów napędowych, sterowanych według zasady POP, poświęcono stosunkowo niewiele prac. Prawdopodobnie podstawową przyczyną takiego stanu rzeczy jest to, że modele matematyczne tej klasy układów są nieliniowe, co stwarza określone trudności w przeprowadzeniu takiej analizy. Z zagadnieniem tym związane są, chociaż w różnym stopniu, prace [25, 28, 29, 30, 31, 41, 46, 95, 112]. W starszych pracach [25, 112] autorzy dokonali próby oceny właściwości dynamicznych układu na drodze analizy przybliżenia liniowego modelu matematycznego układu napędowego. Z oczywistych powodów wnioski z tej analizy mają ograniczone znaczenie praktyczne. Prace późniejsze [41, 46, 95] związane z procesem analizy stabilności układów o sterowaniu według zasady POP uwzględniały już nieliniowy charakter modelu matematycznego układu, lecz prezentowana w nich analiza zawiera szereg daleko idących założeń upraszczających, takich jak: pełna znajomość wszystkich parametrów układu, bezinercyjny charakter modelu matematycznego obwodu regulacji prądu stojana, liniowy zakres pracy zastosowanych regulatorów prędkości kątowej. Sprowadza to wykorzystanie rezultatów jedynie do pewnego idealizowanego wzorca układu, który może znacznie się różnić od rozwiązań praktycznych. W pracach [28, 29, 30, 31] zaprezentowane zostały rezultaty badań autora niniejszej monografii, w których założenia te były sukcesywnie eliminowane.

W literaturze związanej z problematyką sterowania częstotliwościowego według zasady POP można znaleźć propozycje wielu rozwiązań technicznych, wprowadzanych do podstawowej struktury przedstawionej na rys. 0.1, których celem jest zwiększenie odporności układu na zmiany rezystancji wirnika maszyny. Zgodnie z [62] podzielić je można na cztery podstawowe grupy:

- metody oparte na estymacji mocy biernej [38],
- metody korelacyjne [37, 75],
- metoda uchybu iloczynu wektorowego [62],
- metody adaptacyjne z modelami wzorcowymi typu MRAS (*model-reference adaptive system*) [3, 100, 111, 119, 124].

Trzy pierwsze z wymienionych metod zakwalifikować można do rozwiązań typu MIAS (*model-identification adaptive system*).

W ostatnich kilkunastu latach zanotować można dalszy wzrost zainteresowania badaczy różnymi technikami zwiększania odporności układów sterowania pośredniego. Wydaje się, że dominujące znaczenie będą tu miały techniki MIAS, w których podstawowa struktura sterowania według metody POP będzie podlegać sukcesywnemu „dostrajaniu” na podstawie estymowanych w trybie on-line parametrów maszyny. Studium literatury z tego zakresu pozwala wyodrębnić kilka zasadniczych nurtów.

Podstawowy nurt to zastosowanie „klasycznych” [3, 118] metod obserwacji stanu i estymacji parametrów, reprezentowane w pracach [15, 19, 22, 23, 40, 44, 45, 47, 50, 53, 68, 80, 81, 82, 86, 87, 89, 91, 98, 102, 113, 114, 117, 120, 121, 122].

Pewnym nowocześniejszym podejściem alternatywnym jest zastosowanie w procesie estymacji techniki sterowania rozmytego (fuzzy control), sieci neuronowych (neural network), filtrów Kalmana oraz algorytmów genetycznych reprezentowane w pracach [13, 14, 34, 43, 69, 78, 88, 90, 92, 101, 107, 110, 122, 124].

Osobną grupę stanowią badania zmierzające do wykorzystania magnetycznych efektów pasożytniczych w maszynie, wspomagane procesem wstrzykiwania dodatkowych sygnałów harmonicznym podwyższonej częstotliwości, których wyniki zaprezentowane zostały w pracach [2, 18, 78, 110].

Tendencje rozwojowe i nowoczesne techniki stosowane w celu zwiększenia odporności układów o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej nie uwalniają, zdaniem autora, badaczy od podstawowego problemu, jakim jest wnikliwa analiza właściwości tych układów w wersji podstawowej w myśl zasady, że warunkiem koniecznym efektywnego ulepszania dowolnego procesu jest przede wszystkim dokładna znajomość jego istoty.

***W tym kontekście głównym celem pracy było przeprowadzenie wszechstronnej analizy stabilności układów napędowych o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej, pracujących w pierwszej strefie regulacji przy uwzględnieniu inercyjnego charakteru obwodu regulacji prądu stojana, efektu nasycenia regulatorów prędkości kątowej oraz zmian wartości rezystancji wirnika maszyny napędowej.***

Na zakończenie części przeglądowej należy zwrócić uwagę, że w ostatnim dziesięcioleciu można zanotować również istotne zainteresowanie ośrodków badawczych innymi, niż polowo zorientowane, metodami sterowania silników asyn-

chronicznych. Są to przede wszystkim metody bazujące na zasadzie nieliniowego i adaptacyjnego odsprzęgania układu regulacji [105]. Ważną reprezentację tego nurtu badań stanowią rezultaty, prezentowane w pracach [1, 9, 12, 24, 54, 55, 56, 57, 72, 73, 79, 93, 94, 106, 123]. Autor wyraża nadzieję, że zaprezentowane w tej pracy rezultaty okażą się przydatne również dla tego kierunku badań.

Poza **wstępem** praca składa się z pięciu rozdziałów oraz **dodatku**.

**Rozdział pierwszy** zawiera, niezbędnym zdaniem autora, wprowadzenie w problematykę zastosowania bezpośredniej metody Lapunowa do analizy stabilności układów dynamicznych. W rozdziale tym podano szereg pojęć podstawowych oraz przedstawiono czytelnikowi stosowaną w dalszej części pracy metodę analizy stabilności pewnej klasy nieliniowych układów dynamicznych, stanowiących modele matematyczne układów napędowych.

W **rozdziale drugim** przeprowadzona została analiza stabilności globalnej układów napędowych sterowanych według zasady pośredniej orientacji połowej, przy założeniu, że regulatory prędkości kątowej pracują w zakresie liniowym, a rezystancja wirnika maszyny jest stała i równa swej wartości znamionowej.

W **rozdziale trzecim** przeprowadzono analizę stabilności układów napędowych o sterowaniu pośrednim przy założeniach upraszczających, jak w rozdziale drugim, z tym że uwzględniony został efekt nasycenia standardowych regulatorów prędkości kątowej.

**Rozdział czwarty** zawiera analizę stabilności układów napędowych, przeprowadzoną przy uwzględnieniu efektu termicznych zmian wartości rezystancji uzwojeń wirnika, ograniczonej dynamiki układu regulacji prądu stojana oraz efektu nasycenia standardowych regulatorów prędkości kątowej.

W **podsumowaniu** przedstawiono podstawowe wnioski końcowe z przeprowadzonej analizy oraz sprecyzowano główne osiągnięcia uzyskane w trakcie realizacji pracy.

W **dodatk**u sformułowano modele matematyczne badanych układów napędowych oraz podano warunki dostateczne stabilności wybranych klas układów dynamicznych, przydatne do prowadzonej analizy stabilności. Zamieszczono w nim również przykłady liczbowe zastosowania, opracowanych w rozdziałach 3 oraz 4, metod analizy stabilności układów sterowania pośredniego.

Prezentowane w pracy rezultaty zostały uzyskane w ramach prac W/WE/1/97 oraz S/WE/1/98, finansowanych przez Komitet Badań Naukowych w latach 1997-2000.

## 1. Zastosowanie bezpośredniej metody Lapunowa do analizy stabilności układów regulacji automatycznej

W rozdziale tym zaprezentowane zostaną podstawowe pojęcia oraz metody analizy układów dynamicznych przy pomocy bezpośredniej metody Lapunowa. Problematyka ta stanowi treść wielu publikacji w literaturze krajowej i zagranicznej [np. prace 10, 11, 21, 35, 36, 49, 51, 58, 64, 66, 67, 76, 84, 85, 96, 97, 99, 103, 108]. Jest to jednak materiał niezmiernie rozproszony. Dla jasności rozwiązywanych w pracy zagadnień przedstawiono poniżej podstawowe pojęcia z tego zakresu. Główny wątek prezentowanych w tym rozdziale rozważań skoncentrowany jest na analizie układów liniowych o parametrach zmiennych. Co prawda modele matematyczne analizowanych w głównej części pracy układów elektromechanicznych są nieliniowe, należą jednak do tzw. klasy układów *pseudoliniowych* [35, 76]. Pozwala to na pewną unifikację rozwiązywanych w pracy problemów oraz wykorzystanie większości doświadczeń zdobytych przy rozwiązywaniu zagadnienia analizy stabilności układów liniowych.

### 1.1. Pojęcia podstawowe

Rozpatrzmy układ dynamiczny o liniowym modelu matematycznym w postaci:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.1)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  jest  $n$ -wymiarowym wektorem stanu, a  $\mathbf{A}$  jest macierzą o stałych, niezależnych od czasu elementach. Niech  $\mathbf{P}$  będzie symetryczną macierzą dodatnio określoną formy kwadratowej [58, 59]:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (1.2)$$

Zgodnie z twierdzeniem Sylwestera forma kwadratowa (1.2) jest *dodatnio określona* wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie podwyznaczniki główne oraz wyznacznik macierzy  $\mathbf{P}$  są dodatnie [58, 59].

**Twierdzenie 1.1** [58]. *Układ liniowy opisany równaniem stanu (1.1) jest stabilny asymptotycznie w obszarze  $D$ , zawierającym początek układu współrzędnych (z punktem równowagi  $\mathbf{X}_O = \mathbf{0}$ ), jeżeli można dobrać funkcję Lapunowa  $V(\mathbf{x})$ , dodatnio określoną w obszarze  $D$ , której pochodna względem czasu  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x})$  wzdłuż trajektorii stanu jest funkcją ujemnie określoną w tym obszarze  $D$ . Jeżeli pochodna  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x})$  jest funkcją ujemnie półokreśloną w obszarze  $D$ , to układ jest stabilny w tym obszarze  $D$ , ale niekoniecznie asymptotycznie.*

Dowód tego twierdzenia (również w odniesieniu do układów nieliniowych) znaleźć można w wielu pozycjach literatury krajowej i zagranicznej [np. 21, 35, 58, 105]. W większości tych pozycji literatury znajdują się również, bogato ilustrowane przykładami, interpretacje fizyczne funkcji Lapunowa jako pewnej miary ilości energii zgromadzonej w układzie.

Z powyższego twierdzenia wynika, że bezpośrednia metoda Lapunowa formuluje jedynie warunki dostateczne stabilności układu (1.1). Używając różnych form kwadratowych (1.2) można więc uzyskać różny wynik testu stabilności układu (1.1). Kluczowym zagadnieniem staje się więc sformułowanie miary jakości doboru konkretnej, testującej formy kwadratowej do określonego układu dynamicznego.

Autor ma świadomość, że do rozstrzygnięcia problemu stabilności pojedynczego liniowego układu dynamicznego (1.1) można używać innych, bardziej efektywnych, metod oceny stabilności, np. opartych na analizie wartości własnych macierzy stanu  $\mathbf{A}$ . W ogólnym przypadku metoda ta jednak zawodzi w sytuacji, gdy macierz stanu zawiera elementy zmienne w czasie lub też, gdy model matematyczny układu jest nieliniowy. Ponieważ analizowane w pracy układy dynamiczne należą do tych właśnie klas, odniesienie prowadzonych tu rozważań do układu (1.1) ma jedynie charakter przejściowy i wstępny.

Za *wskaźnik jakości* doboru formy kwadratowej (1.2) do określonego układu dynamicznego przyjmuje się zwykle minimalną wartość ilorazu form kwadratowych w postaci [11, 76, 84, 85, 105]:

$$\eta = \min \left\{ -\frac{\frac{d}{dt}V(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})} \right\}, \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0, \quad (1.3)$$

gdzie:  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x})$  jest pochodną względem czasu formy kwadratowej  $V(\mathbf{x})$ , liczoną wzdłuż trajektorii badanego układu dynamicznego, a  $\|\mathbf{x}\|$  jest normą kwadratową wektora stanu.

W wielu pracach (np. [11, 105]) można znaleźć, oparte na teorii nierówności różniczkowych, dowód na to, że przy spełnieniu zależności (1.3) forma kwadratowa  $V(\mathbf{x})$  obliczona na dowolnej trajektorii badanego układu dynamicznego w chwili  $t$  spełnia nierówność:

$$V(\mathbf{x}) \leq V_O(\mathbf{x}) \exp(-\eta t), \quad (1.4)$$

przy czym  $V_O(\mathbf{x})$  jest wartością formy kwadratowej w chwili  $t = 0$ .

Jak wynika z powyższej zależności, dodatni dla układów asymptotycznie stabilnych wskaźnik jakości (1.3) stanowi miarę szybkości *eksponencjalnego* zanikania testującej formy kwadratowej, liczonej wzdłuż dowolnej trajektorii stanu badanego układu. Dla układów stabilnych asymptotycznie wskaźnik ten można interpretować jako odwrotność największej stałej czasowej, z jaką gwarantowane jest zanikanie funkcji Lapunowa, obliczanej wzdłuż dowolnej trajektorii badanego układu. Ujemne wartości wskaźnika jakości oznaczają brak gwarancji stabilności badanego układu. Z opisanych wyżej właściwości wskaźnika jakości wynika również, że większe jego wartości świadczą o lepszym (w opisanym wyżej sensie) doborze testującej formy kwadratowej do badania danego układu dynamicznego.

Dodatnia wartość wskaźnika jakości (1.3) świadczy również o tym, że stabilność układu ma nie tylko charakter asymptotyczny, lecz również *eksponencjalny* [105]. Z podstawowych właściwości formy kwadratowej (1.2) [11, 59, 65, 105] wynika bowiem, że:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{x}\|^2, \quad (1.5)$$

gdzie symbole  $\lambda_{\min}(\ )$  oraz  $\lambda_{\max}(\ )$  oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną wartość własną argumentu macierzowego. Dla dodatnio określonej formy kwadratowej (1.2) wartości własne macierzy  $\mathbf{P}$  są rzeczywiste i większe od zera [58, 59, 65, 116]. Z zależności (1.4) oraz (1.5) wynika, że norma wektora stanu spełnia nierówność [11, 105]:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \|\mathbf{x}_O\| \exp\left(-\frac{\eta}{2}t\right), \quad (1.6)$$

gdzie  $\|\mathbf{x}_0\|$  jest wartością normy wektora stanu w chwili  $t = 0$ . Powyższa zależność potwierdza, że proces zanikania normy wektora stanu da się oszacować (od góry) przez pewną funkcję wykładniczą. Skala eksponencjalnej zbieżności normy wektora stanu jest, jak widać, dwukrotnie mniejsza od skali zbieżności formy kwadratowej. Definicja stabilności eksponencjalnej [11, 105] nie wyklucza poza tym występowania w procesie przejściowym takich przedziałów czasowych, w których norma wektora stanu (w sposób ograniczony) wzrasta.

Z zależności (1.6) wynika również, że górną granicą wartości wskaźnika jakości (1.3) dla danego pojedynczego stabilnego układu dynamicznego (1.1) jest podwojona wartość jego stopnia stabilności [58]. Stopień stabilności określony jest przez wartość bezwzględną części rzeczywistej dominującej wartości własnej (ewentualnie pary dominujących wartości własnych) macierzy stanu  $\mathbf{A}$  [58].

Dla układów liniowych o modelach matematycznych (1.1) wskaźnik jakości (1.3) może być łatwo obliczany przy pomocy standardowych procedur numerycznych w większości środowisk programowych pracujących z argumentami macierzowymi. Dla takich układów wskaźnik jakości (1.3) przybiera bowiem postać:

$$\eta = \min \left\{ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} \right\}, \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0, \quad (1.7)$$

gdzie:

$$\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}). \quad (1.8)$$

W pracach [59, 116] wykazano, że minimalna wartość ilorazu form kwadratowych  $\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}$  (przy dodatnio określonej formie kwadratowej w mianowniku) spełnia zależność:

$$\eta = \min \left\{ \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}} \right\} = \lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}), \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0. \quad (1.9)$$

Możliwe jest również wyznaczenie takiego wektora  $\xi$  w przestrzeni stanu, na którym osiągana jest minimalna wartość ilorazu tych form kwadratowych. Wektor taki stanowi rozwiązanie równania [59, 85, 116]:

$$\xi^T (\mathbf{Q} - \lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P}) \xi = 0. \quad (1.10)$$

Rozwiązanie tego równania jest również możliwe przy pomocy standardowych procedur numerycznych, dla których możliwe jest rozwiązanie uogólnionego zadania własnego macierzy kwadratowych [59, 70, 85].

W pewnych sytuacjach, zamiast wskaźnika jakości (1.3), wygodniej jest używać *względnego wskaźnika jakości*, zgodnie z definicją:

$$v = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1})}{2|\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]|} = \frac{\eta}{2|\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]|}, \quad (1.11)$$

gdzie  $\lambda_M(\cdot)$  oznacza dominującą (posiadającą największą część rzeczywistą) wartość własną argumentu macierzowego. Ten względny wskaźnik jakości jest *unormowany* [76] w tym sensie, że dla każdego układu dynamicznego:

$$v \leq 1. \quad (1.12)$$

Dodatknie wartości względnego wskaźnika jakości (1.11) stanowią gwarancję stabilności asymptotycznej (i eksponencjalnej) badanego układu dynamicznego. Górna granica wartości tego wskaźnika ( $v = 1$ ) może być osiągnięta jedynie dla układów stabilnych.

Zauważmy, że definicje wskaźników jakości (1.7) oraz (1.11) pozwalają na oszacowanie wartości pochodnych (względem czasu) testujących form kwadratowych. Dla obu tych wskaźników zachodzi bowiem:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq \eta \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (1.13)$$

oraz

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 2v |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]| \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}. \quad (1.14)$$

Nierówności te wynikają bezpośrednio z definicji (1.7) oraz (1.11).

Rozpatrzmy podstawowe właściwości wskaźników jakości. Zbadajmy, jak można oszacować wartość wskaźnika jakości (1.7) formy kwadratowej, która jest liniową kombinacją dwóch dodatnio określonych form kwadratowych w postaci:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T [\alpha \mathbf{P}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{P}_2] \mathbf{x}, \quad \text{gdzie: } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.15)$$

Niech dla danego układu dynamicznego (1.1) wskaźnik jakości (1.7), obliczony dla formy kwadratowej o macierzy  $\mathbf{P}_1$  wynosi  $\eta_1$ , a obliczony dla formy o macierzy  $\mathbf{P}_2$  wynosi  $\eta_2$ . Z zależności (1.8) oraz (1.13) wynika, że:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} &= -\alpha \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}) \mathbf{x} - (1-\alpha) \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}) \mathbf{x} = \\
&= \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x} + (1-\alpha) \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x} \geq \\
&\geq \alpha \eta_1 \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x} + (1-\alpha) \eta_2 \mathbf{x}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x} \geq \min\{\eta_1, \eta_2\} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Z zależności (1.2), (1.3), (1.7) oraz (1.8) wynika, że  $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ . Przy wykorzystaniu zależności (1.2) powyższą nierówność można więc zapisać w postaci nierówności różniczkowej:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) + \min\{\eta_1, \eta_2\} V(\mathbf{x}) \leq 0. \tag{1.17}$$

Umożliwia to oszacowanie wartości formy kwadratowej (1.2), obliczanej na dowolnej trajektorii układu (1.1) przy pomocy następującej nierówności [105]:

$$V(\mathbf{x}) \leq V_O(\mathbf{x}) \exp[-\min\{\eta_1, \eta_2\} t]. \tag{1.18}$$

Z zależności tej wynika, że skala eksponencjalnej zbieżności testującej formy kwadratowej jest nie mniejsza niż minimalna wartość dwuelementowego zbioru wskaźników jakości. Innymi słowy, wskaźnik jakości obliczany wzdłuż dowolnego odcinka w przestrzeni elementów macierzy formy kwadratowej jest *quasi-wklęsły* [42, 58]. Dla dowolnej testującej formy kwadratowej, której macierz leży (w przestrzeni elementów) wewnątrz *wypukłego* wielościanu [33, 42] wartość wskaźnika jakości może być oszacowana (od dołu) na podstawie skończonej liczby testów przeprowadzonych dla punktów wierzchołkowych tego wielościanu. Właściwość ta ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ wynikają z niej duże szanse na znalezienie macierzy  $\mathbf{P}$  takiej formy kwadratowej (1.2), dla której wartość wskaźnika (1.7) jest największa. Proces poszukiwania macierzy  $\mathbf{P}$  prowadzony może być przy pomocy standardowych algorytmów optymalizacyjnych.

Do analogicznych rezultatów prowadzi zaprezentowany sposób postępowania odniesiony do względnego wskaźnika jakości (1.11), a nierówność (1.18) przybiera wtedy postać:

$$V(\mathbf{x}) \leq V_O(\mathbf{x}) \exp(-2 \min\{v_1, v_2\} |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]| t). \tag{1.19}$$

Do interesujących rezultatów prowadzi również analiza takiego przypadku, gdy macierz stanu badanego układu dynamicznego stanowi kombinację liniową dwóch innych macierzy stanu, a testowanie odbywa się przy wykorzystaniu jednej

formy kwadratowej (1.2). Niech macierz stanu badanego układu dana będzie zależnością:

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}_1 + (1-\alpha) \mathbf{A}_2, \quad \text{gdzie: } 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{1.20}$$

Niech wskaźniki jakości (1.7) testującej formy kwadratowej (1.2) dla układów o macierzach  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\mathbf{A}_2$  wynoszą odpowiednio  $\eta_1$  oraz  $\eta_2$ . Analogicznie do (1.16) możemy wówczas napisać:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} &= -\alpha \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_1) \mathbf{x} - (1-\alpha) \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_2) \mathbf{x} = \\
&= \alpha \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x} + (1-\alpha) \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x} \geq \\
&\geq \alpha \eta_1 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + (1-\alpha) \eta_2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \eta \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},
\end{aligned} \tag{1.21}$$

gdzie:

$$\eta = \alpha \eta_1 + (1-\alpha) \eta_2. \tag{1.22}$$

Biorąc pod uwagę, że  $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  oraz wykorzystując zależność (1.2) nierówność (1.21) można zapisać jako:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) + \eta V(\mathbf{x}) \leq 0, \tag{1.23}$$

co prowadzi do oszacowania:

$$V(\mathbf{x}) \leq V_O(\mathbf{x}) \exp[-\eta t]. \tag{1.24}$$

Z powyższej zależności wynika, że dla dowolnej macierzy danej zależnością (1.20) skala eksponencjalnej zbieżności testującej formy kwadratowej jest nie mniejsza niż wartość wynikająca z zależności (1.22). Innymi słowy dla danej testującej formy kwadratowej (1.2) wskaźnik jakości obliczany dla dowolnej macierzy z zależności (1.20) jest *wklęsły* [66, 67, 76]. Ta właściwość ma również duże znaczenie praktyczne. Dla dowolnej macierzy stanu leżącej (w przestrzeni elementów macierzy) wewnątrz wypukłego wielościanu, wartość wskaźnika jakości może być oceniana na podstawie skończonej liczby testów przeprowadzonych dla punktów wierzchołkowych tego wielościanu.

Pewną trudnością w zastosowaniu tego sposobu rozumowania do względnego wskaźnika jakości (1.11) jest to, że dominujące wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\mathbf{A}_2$  są na ogół różne. Jeżeli zależy nam na utrzymaniu unormowania (1.12), to w miejsce dominującej wartości własnej  $\lambda_M(\cdot)$  jednej macierzy należy podstawić dominującą wartość własną zbioru  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$  macierzy stanu. Po takiej modyfikacji formalnej analogiczny sposób rozumowania prowadzi do oszacowania formy kwadratowej przy pomocy nierówności:

$$V(\mathbf{x}) \leq V_O(\mathbf{x}) \exp(-2\nu |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]| t), \quad (1.25)$$

gdzie:

$$\nu = \alpha \nu_1 + (1 - \alpha) \nu_2. \quad (1.26)$$

Warto również zauważyć, że jeśli dla danego systemu dynamicznego (1.1) forma kwadratowa (1.2) ma wskaźnik jakości (1.7) o wartości  $\eta$ , to dla formy kwadratowej:

$$V_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T k \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (1.27)$$

gdzie  $k$  jest dowolną dodatnią stałą rzeczywistą, zachodzi

$$\eta(\mathbf{A}, k \mathbf{P}) = \eta(\mathbf{A}, \mathbf{P}). \quad (1.28)$$

Właściwość ta wynika bezpośrednio z zależności (1.7), (1.8) oraz z podstawowych właściwości wartości własnych macierzy [65, 70, 116]. Dla względnego wskaźnika jakości mamy również:

$$\nu(\mathbf{A}, k \mathbf{P}) = \nu(\mathbf{A}, \mathbf{P}). \quad (1.29)$$

Właściwość ta wraz z atrybutem quasi-wklęsłości pozwala również na wprowadzenie pewnej interpretacji geometrycznej. Z właściwości tych wynika mianowicie, że przestrzenne warstwy stałych wartości wskaźników jakości (1.7) oraz (1.11) tworzą w przestrzeni elementów macierzy form kwadratowych powłokę wypukłego stożka [33, 42, 76].

W sytuacji, gdy multiplikacja przez dowolną dodatnią stałą rzeczywistą dotyczy macierzy stanu, prawdziwe są również zależności:

$$\eta(k \mathbf{A}, \mathbf{P}) = k \eta(\mathbf{A}, \mathbf{P}), \quad (1.30)$$

$$\nu(k \mathbf{A}, \mathbf{P}) = \nu(\mathbf{A}, \mathbf{P}). \quad (1.31)$$

Wynika z nich niezmiennosc względnego wskaźnika jakości przy mnożeniu macierzy stanu badanego układu przez dowolną dodatnią stałą rzeczywistą.

## 1.2. Idealne funkcje Lapunowa

W poprzednim punkcie zdefiniowane zostały pojęcia wskaźników jakości jako miar jakości doboru testującej formy kwadratowej do badanego układu dynamicznego. Umożliwia to sformułowanie pojęcia *optymalnej formy kwadratowej dla danego układu dynamicznego*. W ramach pracy pojęcie to dotyczy takiej formy kwadratowej (1.2), dla której wskaźniki jakości (1.7) oraz (1.11) osiągają wartości maksymalne. Jednoczesność osiągania wartości maksymalnych przez wskaźniki  $\eta$  oraz  $\nu$  dla określonej testującej formy kwadratowej wynika bezpośrednio z zależności (1.7) oraz (1.11).

Okazuje się, że w przypadku pojedynczego układu dynamicznego o modelu matematycznym (1.1) wyznaczenie optymalnej formy kwadratowej nie wymaga stosowania algorytmów numerycznej optymalizacji.

W pracy [51] zaprezentowany został dowód na to, że optymalną formę kwadratową (1.2) dla układu dynamicznego (1.1) wyznaczyć można z zależności:

$$\mathbf{P}_i = (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1}. \quad (1.32)$$

Macierz  $\mathbf{T}$  jest macierzą *modalną* do macierzy  $\mathbf{A}$  [51]. Symbol  $(\cdot)^*$  oznacza operację sprzężenia i transpozycji argumentu macierzowego. Macierz  $\mathbf{R}$  jest tzw. macierzą wagową (o wymiarach  $n \times n$ ), której elementy wyrażane są zależnościami [27, 35]:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= 0 & \text{dla wszystkich } i \neq j, \\ r_{ii} &> 0 & \text{dla wszystkich } i = 1, 2, 3, \dots, n, \\ r_{ii} &= r_{jj} & \text{dla wszystkich } \lambda_i = \lambda_j^*, \end{aligned} \quad (1.33)$$

gdzie symbol  $\lambda_i$  oznacza  $i$ -tą wartość własną macierzy stanu  $\mathbf{A}$ .

Formy kwadratowe tworzone zgodnie z zależnością (1.32) nazywa się „*idealnymi funkcjami Lapunowa*” (w skrócie IFL) [51].

Precyzyjnie rzecz biorąc, zależność (1.32) implikuje istnienie pewnego nieskończonego zbioru form kwadratowych, optymalnych dla danego układu dynamicznego, zależnie od wartości elementów macierzy wagowej. Wskaźniki jakości dla wszystkich elementów tego zbioru są jednakowe, a dla układu stabilnego (1.1)

$\nu=1$ . Rezultat ten nie może być ulepszony, co potwierdza „idealizm” form kwadratowych o macierzy (1.32). Dla każdego stabilnego układu (1.1) wskaźnik jakości  $\eta=2|\text{real}[\lambda_M(\mathbf{A})]|$ , co stanowi potwierdzenie, że przy konstrukcji formy kwadratowej zgodnie z zależnością (1.32) o skali jej eksponencjalnej zbieżności decyduje podwojona część rzeczywista dominującej wartości własnej badanego układu.

W niektórych pracach późniejszych [76, 99] w miejsce terminu „idealne funkcje Lapunowa” spotyka się również określenie „własne formy kwadratowe”.

### 1.3. Zastosowanie form kwadratowych do analizy stabilności układów liniowych o zmiennych parametrach

Rozpatrzmy układ dynamiczny, którego model matematyczny posiada postać:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{d})\mathbf{x}, \quad (1.34)$$

gdzie

$$\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_k]^T \quad (1.35)$$

jest wektorem parametrów, którego współrzędne dane są nierównościami:

$$D_{i\min} \leq d_i \leq D_{i\max} \quad 1 \leq i \leq k. \quad (1.36)$$

Łatwo można zauważyć, że w przestrzeni elementów wektora  $\mathbf{d}$ , przy spełnieniu nierówności (1.36), koniec tego wektora przemieszczać się może w ramach hiperprostopadłościanu o  $2^k$  wierzchołkach. Oznaczmy wnętrze tego hiperprostopadłościanu (wraz ze ścianami, krawędziami i wierzchołkami) przez  $D(\mathbf{d})$ .

Niech zależność elementów macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  od współrzędnych wektora parametrów ma charakter liniowy. Można więc zapisać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}_N + d_1\mathbf{A}_1 + \dots + d_k\mathbf{A}_k. \quad (1.37)$$

Macierz  $\mathbf{A}_N$  nosi nazwę *macierzy znamionowej* (lub *nominalnej*) [5, 66, 85].

W dalszych rozważaniach interesować nas będą warunki stabilności zbioru układów dynamicznych o macierzach stanu spełniających zależności (1.34)-(1.37).

Na wstępie warto zwrócić uwagę na to, że wartości współrzędnych wektora parametrów  $\mathbf{d}$  ograniczone są jedynie przez nierówność (1.36). Nie zostały natomiast nałożone żadne ograniczenia na dynamikę zmian ich wartości. Stwarzać to może poważne zagrożenia dla stabilności całego zbioru układów nawet wtedy, gdy dla *każdej* wartości wektora parametrów  $\mathbf{d}$ , w ramach hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$ , *każda* macierz  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  ma stabilne wartości własne [76, 97, 99]. Stabilność *wszystkich* macierzy  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  dla  $\mathbf{d} \in D(\mathbf{d})$ , przy szybkich zmianach wektora parametrów  $\mathbf{d}$ , stanowi jedynie *warunek konieczny* stabilności zbioru układów (1.34)-(1.36) [76, 99]. Stwarza to konieczność stosowania innych metod analizy stabilności, niż te, które są właściwe dla powolnych zmian parametrów.

Z uwagi na opisaną w p. 1.1 wklęsłość wskaźników jakości  $\eta$  i  $\nu$  (oraz formy kwadratowej  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$  [66, 67]) względem elementów macierzy stanu zastosowanie bezpośredniej metody Lapunowa wydaje się tu bardzo uzasadnione.

Jak wykazano w pracach [76, 99], zagadnienie analizy stabilności zbioru układów dynamicznych danego zależnościami (1.34)-(1.37) sprowadzić można do problemu istnienia *wspólnej* dla tego zbioru funkcji Lapunowa. W ramach pracy, za wspólną dla zbioru układów dynamicznych (1.34)-(1.37) funkcję Lapunowa uważa się taką formę kwadratową (1.2), której pochodna względem czasu  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x})$  pozostaje ujemnie określona na dowolnych trajektoriach *wszystkich* elementów tego zbioru.

Z uwagi na opisaną wyżej wklęsłość formy kwadratowej  $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$  względem elementów macierzy (1.37) proces sprawdzenia, czy dana forma kwadratowa jest wspólną dla zbioru układów (1.34)-(1.37) funkcją Lapunowa, wystarczy przeprowadzić dla skończonej ( $2^k$ ) liczby wierzchołków hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$ . Jeżeli rezultat tak przeprowadzonego testu jest pozytywny, to stabilność układu (1.34) zagwarantowana jest przy dowolnych (nawet skokowych) zmianach wartości wektora parametrów  $\mathbf{d} \in D(\mathbf{d})$ .

Wprowadzone pojęcia wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  odniesione do zbioru układów dynamicznych umożliwiają również podejście bardziej aktywne. Quasi-wklęsłość wskaźników  $\eta$  oraz  $\nu$  względem elementów macierzy  $\mathbf{P}$  formy kwadratowej (1.2) stwarza możliwość efektywnego modyfikowania tej macierzy, tak aby wartość tych wskaźników ramach całego zbioru układów (1.34)-(1.37) była możliwie duża. Forma kwadratowa, która zapewnia maksymalną wartość wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  dla *wszystkich* elementów zbioru układów dynamicznych

danego zależnościami (1.34)-(1.37), nazywana będzie dalej *optymalną formą kwadratową zbioru układów dynamicznych*.

Z uwagi na wklęsłość wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  względem elementów macierzy stanu (1.37) proces optymalizacji formy kwadratowej może być prowadzony jedynie dla  $2^k$  tych macierzy, obliczonych dla punktów wierzchołkowych hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$  [67, 76, 97, 99]. Tak określone macierze nazywane będą dalej *macierzami wierzchołkowymi* zbioru układów dynamicznych (1.34)-(1.37).

Co prawda opisane wyżej sprowadzenie analizy zbioru układów dynamicznych do oceny (ew. optymalizacji) wartości wskaźników jakości względem macierzy wierzchołkowych stanowi znaczne uproszczenie problemu, jednak jego rozwiązanie w przypadku ogólnym możliwe jest jedynie na drodze numerycznej optymalizacji formy kwadratowej-kandydata na funkcję Lapunowa. Użycie do analizy IFL właściwych macierzom wierzchołkowym hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$  nie gwarantuje optymalności formy kwadratowej dla całego zbioru, ponieważ „idealizm” tych form dotyczy jedynie pojedynczych macierzy, a nie musi przenosić się na zbiór układów dynamicznych. IFL mogą być jednak pomocne na etapie doboru wartości startowych do procedury optymalizacyjnej. Jak wykazują doświadczenia autora pracy, korzystne efekty można uzyskać obierając jako wartości startowe IFL właściwe wierzchołkom hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$ , posiadającym dominujące (w zbiorze macierzy wierzchołkowych) wartości własne.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły takiego przypadku, gdy ograniczenia nierównościowe (1.36) nałożone na współrzędne wektora parametrów  $\mathbf{d}$  plasowały koniec tego wektora w ramach hiperprostopadłościanu  $D(\mathbf{d})$ . Przy liniowej zależności elementów macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{d})$  od współrzędnych wektora parametrów  $\mathbf{d}$  możliwe jest wprowadzenie pewnych uogólnień. Z uwagi na wklęsłość wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  względem elementów macierzy stanu przedstawione w tym punkcie pojęcia pozostają prawdziwe a sposoby postępowania właściwe również wtedy, gdy koniec wektora  $\mathbf{d}$  przemieszcza się w ramach *dowolnego wypukłego hiperwielościenu*  $D'(\mathbf{d})$  [66, 67, 97]. Hiperwielościenu ten może być zdefiniowany np. przez podanie współrzędnych wektora  $\mathbf{d}$  opisujących położenie jego wierzchołków.

W pracach [67, 97] przedstawiono również możliwość analizy takich układów dynamicznych, w których występuje nieliniowa zależność elementów wektora parametrów  $\mathbf{d}$  od elementów innego wektora:

$$\mathbf{N} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_m]^T, \quad (1.38)$$

przy czym:

$$N_{imin} \leq n_i \leq N_{imax}. \quad (1.39)$$

Warunkiem dodatkowym jest jednak to, że koniec wektora  $\mathbf{d}(\mathbf{N})$ , przy spełnieniu nierówności (1.39) przez wszystkie współrzędne wektora  $\mathbf{N}$ , pozostawać musi we wnętrzu wypukłego hiperwielościenu  $D'(\mathbf{d})$ . Jest to tzw. „technika wpisywania” [67].

W pracy [66, 67] można znaleźć również interesujące interpretacje i sposoby przełożenia rezultatów analizy przy pomocy bezpośredniej metody Lapunowa w dziedzinę gwarantowanego uplasowania wartości własnych zbioru układów dynamicznych danego zależnościami (1.34)-(1.37). Wykorzystując zaprezentowane tam metody zakres zastosowania form kwadratowych do analizy układów dynamicznych można skutecznie rozszerzyć również na obszar oceny gwarantowanej jakości procesów przejściowych.

#### 1.4. Zastosowanie form kwadratowych do analizy stabilności wybranej klasy układów nieliniowych

Z uwagi na obszerny zakres zagadnienia, w ramach punktu 1.4 autor pracy koncentrował się jedynie na wybranej klasie nieliniowych układów dynamicznych ściśle związanej z modelami matematycznymi analizowanych dalej układów napędowych.

Rozpatrzmy, w związku z tym, układ dynamiczny o modelu matematycznym w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}) & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (1.40)$$

Niech  $n_a$  oraz  $n_b$  oznaczają odpowiednio wymiary wektorów  $\mathbf{x}_a$  oraz  $\mathbf{x}_b$ . Założmy, że elementy macierzy  $\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x})$  oraz  $\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x})$  zależą liniowo od elementów wektora stanu  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_a^T \ \mathbf{x}_b^T]^T$  i możliwe jest zapisanie tych macierzy w formie:

$$\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{A}_{abx1} + x_2 \mathbf{A}_{abx2} + \dots + x_n \mathbf{A}_{abxn}, \quad (1.41a)$$

$$\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{A}_{bax1} + x_2 \mathbf{A}_{bax2} + \dots + x_n \mathbf{A}_{baxn}. \quad (1.41b)$$

Układy dynamiczne o takich modelach matematycznych należą do klasy nazywanej w literaturze *układami pseudoliniowymi* [35, 76]. Model matematyczny układu (1.40) może być równoważnie zapisany jako:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}_L \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.42)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{0}_{ba} \\ \mathbf{0}_{ab} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \quad (1.43a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_a & \mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}) & \mathbf{0}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (1.43b)$$

Występujące w zależnościach (1.43) macierze zerowe mają wymiary zgodne z macierzami w zależności (1.40) o tych samych indeksach dolnych.

Z formalnego punktu widzenia układ opisany równaniem stanu (1.40) jest układem nieliniowym, a zależność (1.42) potwierdza możliwość jego dekompozycji na część *liniową* (o macierzy stanu  $\mathbf{A}_L$ ) i *nieliniową*, zawierającą wektorową funkcję argumentu wektorowego  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Z uwagi na założoną zależność liniową elementów macierzy  $\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x})$  od współrzędnych wektora stanu funkcja  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  spełnia zależność:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \rightarrow 0 \quad \text{dla} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0. \quad (1.44)$$

Literatura z tego zakresu [11, 49, 105] zaleca analizę stabilności takiego układu przy pomocy formy kwadratowej, której macierz jest rozwiązaniem równania Lapunowa:

$$\mathbf{A}_L^T \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_L \mathbf{A}_L = -\mathbf{Q}_L = -2\mathbf{I}. \quad (1.45)$$

Założmy, że wszystkie wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_L$  leżą w lewej półpłaszczyźnie. Macierz  $\mathbf{P}_L$  testującej formy kwadratowej uzyskana na drodze rozwiązania równania (1.45), jest wtedy dodatnio określona. Warunkiem dostatecznym ujemnej określoności pochodnej testującej formy kwadratowej:

$$V_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_L \mathbf{x} \quad (1.46)$$

obliczanej wzdłuż dowolnej trajektorii układu (1.42) jest spełnienie nierówności [11, 49, 105]:

$$\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L)}{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_L)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_L)} > \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0. \quad (1.47)$$

*Strefa przyciągania punktu stacjonarnego układu* jest wówczas nie mniejsza niż wnętrze hiperelipsoidy [11, 35, 76, 104]:

$$V_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_L \mathbf{x} < K, \quad (1.48)$$

gdzie stała  $K$  wynika z warunku wpisania tej hiperelipsoidy we wnętrze zbioru takich wartości współrzędnych wektora stanu, dla których spełniona jest zależność (1.47). Taki sposób rozwiązania zagadnienia analizy stabilności, dla uproszczenia wyrażen, nazywany będzie dalej *klasycznym*.

W pracach [76, 104] zaprezentowana została inna, dająca często znacznie lepsze rezultaty, metoda analizy układów (1.40). Metoda ta nazywana będzie dalej metodą *parametryzacji współrzędnych wektora stanu*. Najogólniej rzecz biorąc jej istota polega na wykorzystaniu zapisu równania stanu w postaci zależności (1.40) i potraktowaniu występujących liniowo w elementach macierzy stanu współrzędnych wektora stanu jako zmiennych parametrów. Tworzy się w ten sposób pewien zbiór układów dynamicznych analogiczny do opisanego zależnościami (1.34)-(1.37). Prowadzi to w efekcie do rozwiązania zagadnienia w sposób właściwy *zaburzeniom strukturalnym* macierzy stanu [5, 6] w odróżnieniu od podejścia *nie-strukturalnego* z jakim związane jest rozwiązanie klasyczne.

Parametryzacja współrzędnych wektora stanu pozwala na pewną unifikację zadania.

W pierwszym, wstępnym etapie rozwiązania możliwe jest wykorzystanie zaprezentowanych w p. 1.3 technik właściwych analizie stabilności układów liniowych o zmiennych parametrach. W ramach tego etapu formowany jest hiperprostokąt, którego wnętrze zawiera ten fragment przestrzeni stanu, w którym badana jest stabilność układu. Z uwagi na hiperelipsoidalną formę strefy przyciągania hiperprostokąt ten wyznaczony jest w przestrzeni stanu układu (1.40) przez zespół symetrycznych nierówności:

$$-X_i \leq x_i \leq X_i, \quad \text{gdzie} \quad X_i \geq 0. \quad (1.49)$$

Warto dodać, że przez odpowiednie przeskalowanie współrzędnych wektora stanu hiperprostokąt ten może być także sprowadzony do postaci hipersześcianu, co prowadzi do pewnej standaryzacji problemu. W ramach etapu pierwszego prze-

prowadza się również proces optymalizacji wspólnej, dla tak utworzonego zbioru układów dynamicznych, formy kwadratowej. Wykorzystanie opisanych w punkcie 1.3 technik umożliwia prowadzenie procesu optymalizacji jedynie dla macierzy wierzchołkowych hiperprostokąta opisanego przez nierówności (1.49).

W etapie drugim rozwiązania, podobnie jak w metodzie klasycznej, przeprowadzić należy proces wpisania hiperelipsoidalnej powłoki stałych wartości zoptymalizowanej formy kwadratowej we wnętrze hiperprostokąta opisanego nierównościami (1.49). Dla wnętrza tak określonej strefy przyciągania gwarantowane wartości wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  są nie mniejsze od minimalnych wartości obliczonych dla wszystkich punktów wierzchołkowych hiperprostokąta.

Skale różnic, do których prowadzić może analiza stabilności opisanymi metodami, ocenić można na podstawie prostego przykładu.

### Przykład 1.1.

Zbadajmy stabilność układu, którego model matematyczny ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_a \\ -5x_a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Analizowany układ ma model matematyczny zgodny z zależnością (1.40). Z zależności (1.43) i (1.50) wynika, że:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.51a)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_a x_b \\ -5(x_a)^2 \end{bmatrix}. \quad (1.51b)$$

Rozwiązując równanie (1.45), otrzymamy testującą formę kwadratową w postaci:

$$V_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_L \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Łatwo można wykazać, że warunek (1.47) może być równoważnie zapisany w postaci:

$$(x_a)^2 [1 - 25(x_a)^2] + (x_b)^2 [1 - (x_a)^2] > 0, \quad \|\mathbf{x}\| \neq 0. \quad (1.53)$$

Powyższa nierówność spełniona jest, jeżeli:

$$|x_a| < 0,2. \quad (1.54)$$

Z warunku wpisania powłoki stałej wartości formy kwadratowej (1.52) w obszar określony powyższą nierównością wynika, że strefa przyciągania punktu stacjonarnego stanowi wnętrze elipsoidy (w tym konkretnym przypadku okręgu):

$$V_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_L \mathbf{x} < K = 0,04. \quad (1.55)$$

Według powyższego zastosowanie metody klasycznej prowadzi do wniosku, że stabilność układu (1.50) zagwarantowana jest dla każdej trajektorii startującej, na płaszczyźnie stanu, z wnętrza okręgu o promieniu  $R = 0,2$ .

Przeprowadźmy dla porównania analizę stabilności tego samego układu metodą parametryzacji współrzędnych wektora stanu. Potraktujmy współrzędną  $x_a$  w macierzy stanu (1.50) jako parametr zmienny. Niech przewidywany na wstępie symetryczny zakres zmienności tego parametru będzie zgodny z zależnością (1.49) i równy zakresowi określonemu przez nierówność (1.54). Załóżmy również wstępnie, że proces analizy prowadzony będzie przy wykorzystaniu tej samej formy kwadratowej danej zależnością (1.52). Zgodnie z opisaną w p.1.3 metodą, analizę stabilności wystarczy przeprowadzić dla dwuelementowego zbioru macierzy wierzchołkowych, uzyskanego przez wstawienie w macierzy stanu w zależności (1.50)  $x_a = -0,2$  oraz  $x_a = 0,2$ . Zbiór macierzy wierzchołkowych ma postać:

$$\{\mathbf{A}_W\} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -0,2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0,2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.56)$$

Wykorzystując elementarne komendy środowiska MATLAB można łatwo sprawdzić, że wskaźnik jakości (1.7), obliczany zgodnie z zależnością (1.9), dla formy kwadratowej (1.52) spełnia zależność:

$$\eta(\mathbf{A}_1) = \eta(\mathbf{A}_2) = 1,2. \quad (1.57)$$

Wbrew результатам rozwiązania klasycznego świadczy to o tym, że dla macierzy wierzchołkowych zachowana jest gwarancja stabilności i to z dość dużym stopniem stabilności ( $\eta/2 = 0,6$ ). Rozwiązanie równania (1.10) pozwala dodatkowo

stwierdzić, że wskaźnik jakości (1.57) osiągany jest na płaszczyźnie stanu na wektorach  $\xi(\mathbf{A}_1) = [0,7071 \quad 0,7071]^T$  oraz  $\xi(\mathbf{A}_2) = [0,7071 \quad -0,7071]^T$ . Wykorzystując tę informację sprawdzimy czy rezultat (1.57) nie może być jeszcze ulepszony. Założmy w związku z tym, że forma kwadratowa (1.52) stanowi jedynie punkt startowy do poszukiwań optymalnej formy kwadratowej w klasie:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Istnienie potencjalnych rezerw w ulepszaniu rezultatu (1.57) może być stwierdzone przez wyznaczenie gradientu  $\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$ , obliczonego przy  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L$  dla obu macierzy wierzchołkowych  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\mathbf{A}_2$  odpowiednio na wektorach  $\xi(\mathbf{A}_1) = [0,7071 \quad 0,7071]^T$  oraz  $\xi(\mathbf{A}_2) = [0,7071 \quad -0,7071]^T$  [32, 85]. Łatwo można wykazać, że współrzędne wektora gradientu spełniają zależność [32]:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_L, \xi(\mathbf{A}_1)} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \right|_{\mathbf{P}=\mathbf{P}_L, \xi(\mathbf{A}_2)} = -0,6. \quad (1.59)$$

Jednakowe znaki gradientu  $\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}$ , obliczanego na obu wektorach własnych, świadczą o tym, że forma kwadratowa o macierzy  $\mathbf{P}_L$  nie spełnia warunku koniecznego optymalności. Powyższa zależność wskazuje również kierunek ewentualnych dalszych poszukiwań optymalnej (w klasie (1.58)) formy kwadratowej. Wynika z niej również, że dla optymalnej formy kwadratowej zachodzić musi:  $\alpha < 1$ . Wykorzystując dowolny, skutecznie działający algorytm optymalizacji łatwo wyznaczyć można formę kwadratową:

$$V_{op}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{op} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad (1.60)$$

która nawet dla:

$$|x_a| \leq 10^6 \quad (1.61)$$

gwarantuje pozytywny wynik testu stabilności z wartością wskaźnika jakości  $\eta = 2$ . Bardzo duże dopuszczalne wartości współrzędnej  $x_a$  w nierówności (1.61) stanowią podstawę do supozycji, że nieliniowy układ (1.50) jest globalnie asymptotycznie stabilny. Łatwo można sprawdzić, że pochodna testującej formy kwadratowej  $V_{op}(\mathbf{x})$ , obliczana wzdłuż dowolnej trajektorii układu (1.50), wyraża się zależnością:

$$\frac{d}{dt} V_{op}(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

i pozostaje ujemnie określona, niezależnie od wartości współrzędnych wektora stanu, co stanowi potwierdzenie stabilności globalnej układu (1.50). Zależności (1.60) oraz (1.62) potwierdzają ponadto, że wskaźnik jakości  $\eta = 2$  na całej płaszczyźnie stanu układu (1.50).

Powyższy przykład wskazuje na kilka ważnych problemów występujących w procesie analizy stabilności metodą klasyczną i metodą parametryzacji współrzędnych wektora stanu.

- Ta sama forma kwadratowa przy zastosowaniu obu metod prowadzi do uzyskania różnych rezultatów. Aby wyjaśnić istotę powstających na tym etapie różnic, rozpatrzmy pochodną formy kwadratowej (1.46), obliczaną wzdłuż trajektorii układu (1.42):

$$\frac{d}{dt} V_L(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_L \mathbf{x} + 2[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{P}_L \mathbf{x}. \quad (1.63)$$

Zależność (1.47) stanowi warunek dostateczny ujemnej określoności prawej strony tego wyrażenia. Przy jego formułowaniu założono jednak, że minimalna wartość formy kwadratowej  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_L \mathbf{x}$  oraz maksymalna wartość wyrażenia  $[\mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{P}_L \mathbf{x}$  osiągane są jednocześnie. Jak wykazano w przykładzie, takie założenie czynić może oszacowanie (1.47) niezmiernie ostrożnym. Wady tej nie posiada metoda parametryzacji współrzędnych wektora stanu. Wynika to stąd, że ocenie podlega wtedy wskaźnik jakości, który jest minimalną wartością z ilorazu form kwadratowych. Takie postawienie problemu pozwala uwzględnić wzajemne usytuowanie w przestrzeni powłok stałych wartości form kwadratowych  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ .

- Drugim istotnym czynnikiem wpływającym na rezultaty analizy stabilności jest różny, w obu przypadkach, sposób określania testującej formy kwadratowej. Zauważmy, że przy podejściu klasycznym macierz tej formy dobiera się na

podstawie rozwiązania równania Lapunowa (1.45) dla macierzy przybliżenia liniowego  $\mathbf{A}_L$ . Postać nieliniowej funkcji wektorowej  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  nie ma wtedy żadnego wpływu na strukturę testującej formy kwadratowej. Przy metodzie parametryzacji współrzędnych wektora stanu w procesie optymalizacji testująca forma kwadratowa podlega zaś takiemu przekształcaniu, aby było można używać możliwie mały wpływ określonych (zawierających współrzędne stanu) elementów macierzy stanu na wartość wskaźnika jakości.

Jak wykazano w rozwiązany przykładzie, rezultaty uzyskane przy stosowaniu obu metod mogą być bardzo różne. Korzystniejsze rezultaty uzyskać można, oczywiście, stosując bardziej pracochłonną metodę parametryzacji współrzędnych wektora stanu. Konieczność zastosowania procedur optymalizacyjnych nie powinna jednak stanowić większej przeszkody.

W tym kontekście warto zwrócić uwagę na rezultaty badań prezentowane w pracy autora [32].

Praca dotyczy analizy stabilności układów dynamicznych o modelu matematycznym:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \\ \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) & \mathbf{A}_b(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

gdzie wektory  $\mathbf{x}_a$  oraz  $\mathbf{x}_b$  mają wymiary, odpowiednio,  $n_a$  oraz  $n_b$ . Niech poszczególne podmacierze zdefiniowane będą następująco:

$$\mathbf{A}_a(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 \mathbf{A}_{a\alpha 1} + \dots + \alpha_m \mathbf{A}_{a\alpha m}, \quad (1.65a)$$

$$\mathbf{A}_b(\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 \mathbf{A}_{b\beta 1} + \dots + \beta_j \mathbf{A}_{b\beta j}, \quad (1.65b)$$

$$\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = x_1 \mathbf{A}_{abx1} + \dots + x_n \mathbf{A}_{abxn} + d_1 \mathbf{A}_{abd1} + \dots + d_k \mathbf{A}_{abdk}, \quad (1.65c)$$

$$\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = x_1 \mathbf{A}_{bax1} + \dots + x_n \mathbf{A}_{baxn} + d_1 \mathbf{A}_{bad1} + \dots + d_k \mathbf{A}_{badk}, \quad (1.65d)$$

przy czym poszczególne współrzędne wektorów parametrów  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{d}$  spełniają nierówności:

$$A_{i \min} \leq \alpha_i \leq A_{i \max}, \quad (1.66a)$$

$$B_{i \min} \leq \beta_i \leq B_{i \max}, \quad (1.66b)$$

$$-D_i \leq d_i \leq D_i, \quad \text{gdzie } D_i \geq 0, \quad (1.66c)$$

a współrzędne wektora stanu spełniają nierówności (1.49). Do tak określonej klasy układów dynamicznych należy większość analizowanych w ramach pracy układów

elektromechanicznych. Zgodnie z pierwszym etapem metody parametryzacji współrzędnych wektora stanu układ opisany równaniami (1.64), (1.65), (1.66) oraz (1.49) traktowany jest jako pewien zbiór liniowych układów dynamicznych. W pracy [32] wykazano, że warunkiem koniecznym optymalności wspólnej, dla tak określonego zbioru, dodatnio określonej testującej formy kwadratowej jest przynależność do klasy:

$$V_{op}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^T & \mathbf{x}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{opa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_{opb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

przy czym macierz  $\mathbf{0}$  ma wymiary  $n_a \times n_b$ . Ma to duże znaczenie praktyczne, gdyż proces optymalizacji numerycznej może być prowadzony dla mniejszej (często znacznie) liczby elementów macierzy formy kwadratowej-kandydata na funkcję Lapunowa. W pracy [32] wykazano również, że proces optymalizacji formy kwadratowej (1.67) wystarczy prowadzić jedynie dla połowy wierzchołków wygenerowanych przez zależności (1.65a)-(1.65d). Powoduje to znaczne przyspieszenie działania algorytmów optymalizacyjnych. Przy rozwiązywaniu różnych zadań z teorii i praktyki ważny może być również aspekt poznawczy oparty na przesłankach silniejszych niż intuicja czy doświadczenie.

Na zakończenie warto jeszcze powrócić do problemu wpisania hiperelipsoidalnej powłoki stałych wartości optymalnej formy kwadratowej w hiperprostopadłościan. Problem nie jest banalny, zwłaszcza dla przypadków wielowymiarowych, w sytuacji, gdy nie wszystkie współrzędne wektora stanu występują w macierzach  $\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  oraz  $\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ .

Jak już wspomniano, przez odpowiednie przeskalowanie współrzędnych wektora stanu hiperprostopadłościan dany zestawem nierówności (1.49) może być przekształcony do hipersześcianu. W dalszych rozważaniach przyjęto, że ten proces unifikacji został przeprowadzony.

Założmy na wstępie, że w macierzach  $\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  oraz  $\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  występują wszystkie współrzędne wektora stanu. Niech krawędzie hipersześcianu, w który nastąpić ma proces wpisania posiadają długość:

$$A = 2X_i \quad \text{dla} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.68)$$

Jeżeli zoptymalizowana względem wszystkich wierzchołków hipersześcianu forma kwadratowa  $V_{op}(\mathbf{x})$  ma postać:

$$V_{op}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{op} \mathbf{x}, \quad (1.69)$$

to hiperelipsoidalna powłoka stałej wartości  $K$  tej formy wpisana może być w hiperkulę [11, 35] o promieniu:

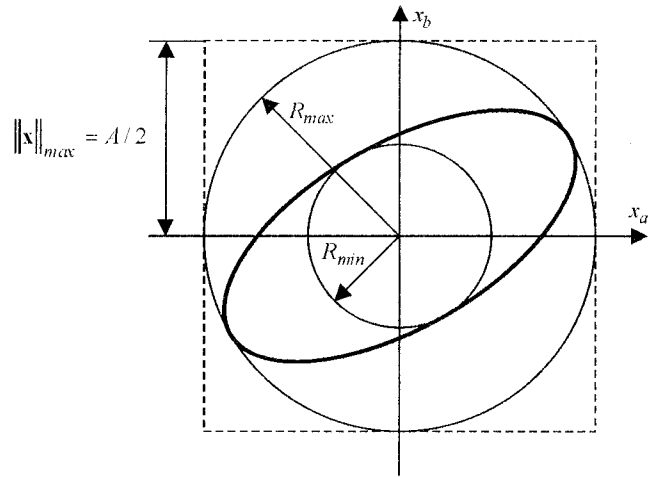
$$R_{max} = A/2 = \sqrt{\frac{K}{\lambda_{min}(\mathbf{P}_{op})}}, \quad (1.70)$$

a opisana na hiperkuli o promieniu:

$$R_{min} = \sqrt{\frac{K}{\lambda_{max}(\mathbf{P}_{op})}}. \quad (1.71)$$

Geometryczne zależności dla przypadku dwuwymiarowego przedstawia rys. 1.1. Z rysunku tego oraz zależności (1.68) i (1.70) wynika, że zaprezentowany proces wpisywania równoważny jest wpisaniu hiperelipsoidalnej powłoki stałych wartości formy kwadratowej w obszar ograniczenia normowego:

$$\|\mathbf{x}\|_{max} = A/2 = R_{max} = \sqrt{\frac{K}{\lambda_{min}(\mathbf{P}_{op})}}. \quad (1.72)$$



**Rys. 1.1.** Wzajemne usytuowanie strefy przyciągania oraz minimalnej sfery przyciągania przy spełnieniu ograniczeń (1.49) i (1.68)

Hiperkulę o promieniu  $R_{min}$  nazywa się *minimalną sferą przyciągania punktu stacjonarnego* [76]. Jeżeli przyjąć, że wygodniejsze w praktyce jest operowanie obszarem hiperkulistym niż hiperelipsoidalnym, to stabilność układu zagwaranto-

wana jest jedynie dla trajektorii startujących z obszaru zamkniętego minimalną sferą przyciągania. Z geometrii strefy przyciągania oraz minimalnej sfery przyciągania wynika, że korzystnie jest, jeżeli różnica  $\lambda_{max}(\mathbf{P}_{op}) - \lambda_{min}(\mathbf{P}_{op})$  jest możliwie mała. Z braku innych określeń można wówczas mówić o dobrym *współczynniku wypełnienia* hipersześcianu minimalną sferą przyciągania punktu stacjonarnego.

Modyfikując relacje pomiędzy poszczególnymi współrzędnymi wektora stanu (proces skalowania) można określać optymalne formy kwadratowe dla hiperprostokątów o różnych proporcjach krawędzi. Całkowita strefa przyciągania stanowi wówczas sumę poszczególnych stref przyciągania [np. 35, 76].

Warto również dodać, że możliwe jest wpisywanie hiperelipsoidalnej powłoki stałej wartości optymalnej formy kwadratowej w inne, lepiej dopasowane, wypukłe twory geometryczne. Związane jest to jednak ze wzrostem liczby optymalizowanych wierzchołków i stosowane jest stosunkowo rzadko.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy w macierzach  $\mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  oraz  $\mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  występuje tylko  $r$  ( $r \leq n_b$ ) wybranych współrzędnych wektora stanu. Załóżmy ponadto, że przez odpowiednie uporządkowanie współrzędnych wektora stanu model matematyczny układu można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(\alpha) & \mathbf{A}_{ba}(\mathbf{x}_2, \mathbf{d}) \\ \mathbf{A}_{ab}(\mathbf{x}_2, \mathbf{d}) & \mathbf{A}_b(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad (1.73)$$

gdzie  $\mathbf{x}_2$  jest wektorem zawierającym  $r$  ostatnich (w kolejności) współrzędnych wektora stanu  $\mathbf{x}_b$ . Niech optymalna forma kwadratowa, zapewniająca maksymalną wartość wskaźnika jakości (1.7) bądź (1.11), ma postać:

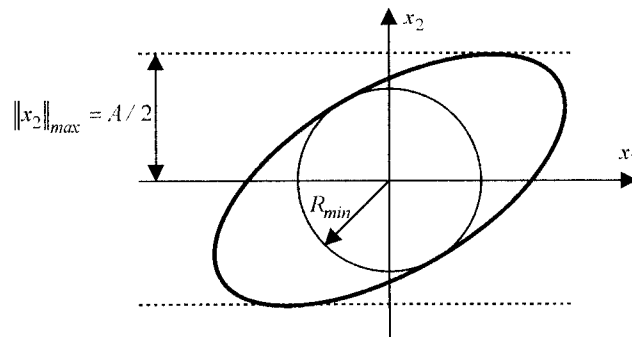
$$V_{op}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_{op} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T & \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{op1} & \mathbf{P}_{op12} \\ \mathbf{P}_{op12}^T & \mathbf{P}_{op2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad (1.74)$$

gdzie wektor  $\mathbf{x}_1^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^T & \mathbf{x}_{1b}^T \end{bmatrix}$ , przy czym wektor  $\mathbf{x}_{1b}$  jest wektorem zbudowanym z pierwszych  $n_b - r$  współrzędnych wektora  $\mathbf{x}_b$ . Należy podkreślić, że postać dodatnio określonej symetrycznej macierzy  $\mathbf{P}_{op}$  w tej zależności nie wyklucza przynależności do macierzy formy kwadratowej według zależności (1.67), ponieważ podziały tych form na subformy kwadratowe  $a-b$  oraz  $1-2$  nie muszą się pokrywać. W tych warunkach możliwe jest określenie promienia minimalnej sfery przyciągania przy wykorzystaniu zależności (1.68), (1.69) oraz (1.71). Więk-

sze wartości promienia minimalnej sfery przyciągania można jednak często uzyskać obliczając ten promień z zależności [104]:

$$R_{min} = \|x_2\|_{max} \sqrt{\frac{\lambda_{min}(\mathbf{P}_{op2} - \mathbf{P}_{op12}^T \mathbf{P}_{op1}^{-1} \mathbf{P}_{op12})}{\lambda_{max}(\mathbf{P}_{op})}}, \quad (1.75)$$

gdzie  $\|x_2\|_{max}$  jest połową krawędzi hipersześcianu wynikającego z zastosowania ograniczeń (1.49) do współrzędnych wektora  $x_2$ . Podstawowe zależności geometryczne dla przypadku dwuwymiarowego przedstawia rys. 1.2.



**Rys. 1.2.** Wzajemne usytuowanie strefy przyciągania oraz minimalnej sfery przyciągania przy ograniczeniach nałożonych na współrzędną  $x_2$  wektora stanu

Możliwe jest rozwijanie technik analizy i syntezy układów dynamicznych przy wykorzystaniu bezpośredniej metody Lapunowa. Literatura z tego zakresu jest bardzo bogata. Z oczywistych powodów rozdział ten zawiera w formie syntetycznej jedynie te wątki problematyki analizy stabilności, które mają bezpośredni związek z zagadnieniami rozwiązywanymi w pracy.

## 1.5. Opis zasady działania modułów optymalizacyjnych pracujących w środowisku MATLAB

W pracy, w rozdziałach 3 i 4, zaprezentowano analizę stabilności określonej klasy układów nieliniowych przy wykorzystaniu metody parametryzacji współrzędnych wektora stanu. Zgodnie z pierwszym etapem rozwiązania wymagało to opracowania odpowiednich modułów programowych do optymalizacji, wspólnej dla zbioru układów dynamicznych, formy kwadratowej. W rezultacie obliczana

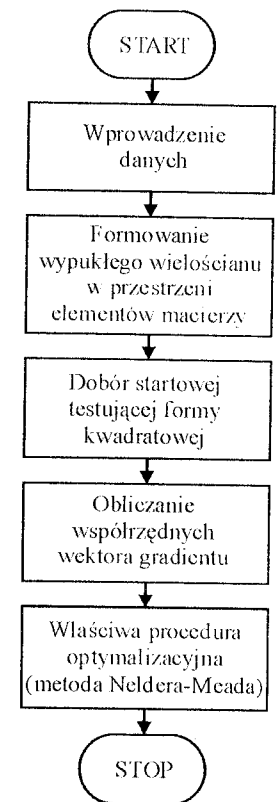
była symetryczna, dodatnio określona macierz optymalnej formy kwadratowej maksymalizującej wartość wskaźnika jakości (1.7) (ew. (1.11)) dla określonego zbioru układów dynamicznych. Moduły te opracowane zostały w środowisku programowym MATLAB.

Podstawowy rdzeń tych modułów zawiera algorytm optymalizacyjny Nelder-Meada [33]. Próby zastosowania do rozwiązania zadania optymalizacji prostych algorytmów gradientowych [33, 85] nie przyniosły oczekiwanych rezultatów. Pracujące na tej zasadzie algorytmy pracowały bardzo „kapryśnie”, wykazując znaczną zależność końcowych rezultatów od postaci startowej formy kwadratowej. Prawdopodobnie jest to wynik częstego występowania tzw. siodeł i wąwozów we wskaźnikach jakości (1.7) oraz (1.11), rozumianych jako funkcje elementów macierzy.

Zasadę działania modułów optymalizacyjnych przedstawia, w formie odpowiedniej sieci działań, rys. 1.3. Po wczytaniu danych wejściowych i uformowaniu wypukłego wielościanu w przestrzeni parametrów obierana była startowa macierz poszukiwanej, optymalnej formy kwadratowej. Rozwiązywane w ramach pracy problemy podzielić można na dwie zasadnicze grupy.

Do grupy pierwszej zakwalifikować można takie przypadki, gdy model matematyczny rozpatrywanego układu dynamicznego należał do klasy danej zależnością (1.64). Jak wykazano w [32] macierz optymalnej formy kwadratowej należy wówczas do klasy (1.67). Warunek stabilności globalnej układu narzucał ponadto dodatkowe zależności również na elementy macierzy  $\mathbf{P}_{opa}$  oraz  $\mathbf{P}_{opb}$  w zależności (1.67). W tej grupie zadań do wstępnego określenia pozostawało w efekcie najczęściej jedynie kilka swobodnych elementów. Określane były one z warunku dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{P}_{op}$ , a zastosowany algorytm Nelder-Meada nie wykazywał (przy wymiarach macierzy stanu  $n \leq 5$ ) zauważalnej zależności uzyskanych rezultatów od wartości elementów macierzy startowej.

Do drugiej grupy zadań zaliczyć należy te przypadki, gdy model matematyczny rozpatrywanego układu nie dał się przedstawić w postaci zgodnej z zależnością (1.64). Rozmiary macierzy stanu w tej klasie modeli w ramach pracy nie przekraczały  $n = 3$ . W tych przypadkach zadowalające rezultaty uzyskiwano obierając jako macierz startową „idealną funkcję Lapunowa” (z jednostkową



**Rys. 1.3.** Sieć działań podstawowego modułu optymalizacyjnego do określania elementów macierzy optymalnych form kwadratowych

macierzą wagową  $\mathbf{R}$  w zależności (1.32)) dla takiego wierzchołka (ew. wierzchołków) wypukłego wielościanu utworzonego w przestrzeni w przestrzeni parametrów, dla którego wartość wskaźnika jakości była najmniejsza. Z doświadczeń autora wynika, że w przypadku modeli matematycznych o większych wymiarach macierzy stanu takie działanie może okazać się nieskuteczne. Można wówczas, zgodnie z sugestią z p. 1.3, zastosować wstępną optymalizację elementów macierzy wagowej  $\mathbf{R}$  dla macierzy IFL.

Dalsza część modułów była wspólna dla obu typów zadań. W następnym kroku wyznaczano wektory, na których (w przestrzeni stanu) osiągane były najmniejsze wartości wskaźnika jakości oraz obliczano współrzędne wektora (ew. wektorów) gradientu wskaźnika jakości [85] względem swobodnych elementów macierzy formy kwadratowej. Obliczone w ten sposób współrzędne wypadkowego, unormowanego wektora gradientu zawierają informację, na ile obliczona forma kwadratowa daleka jest od optymalnej. Obliczone współrzędne wektora gradientu wykorzystywane były również do tworzenia bazowego sympleksu w przestrzeni swobodnych elementów macierzy optymalizowanej formy kwadratowej, który stanowi punkt startowy do algorytmu Nelder-Meada. Pozwala to połączyć, na wstępnym etapie obliczeń, zalety metody gradientowej i metody Nelder-Meada. Obliczenia optymalizacyjne wykonywane były w pętli, aż do uzyskania żądanej dokładności obliczeń. Dla zdecydowanej większości przeprowadzonych obliczeń udało się przy tym uzyskać dokładne zerowanie się współrzędnych wypadkowego, unormowanego wektora gradientu, co podnosi wiarygodność otrzymanych rezultatów.

## 2. Analiza stabilności układów sterowania pośredniego z regulatorami prędkości kątowej pracującymi w zakresie liniowym

W rozdziale tym przeprowadzono analizę stabilności układów sterowania pośredniego, w przypadku gdy regulatory prędkości kątowej typu P oraz PI pracują w zakresie liniowym. W ramach tego rozdziału założono, że rezystancja uzwojeń wirnika maszyny jest stała i równa swej wartości znamionowej. Autor ma świadomość, że jest to założenie bardzo idealistyczne. Głównym celem rozważań zaprezentowanych w tym rozdziale jest jednak próba odpowiedzi na pytanie czy nawet w tak idealizowanych warunkach układy napędowe o sterowaniu pośrednim zachowują stabilność globalną. Poza aspektem poznawczym zagadnienie to ma również wymiar praktyczny. Pozwala bowiem rozstrzygnąć czy stabilny pozostaje pewien idealizowany wzorzec dynamiczny, do którego, przy założeniu precyzyjnego dostrojenia nieznanymi parametrami maszyny, dążyć będą rozwiązania układów pośrednich, wyposażone w mechanizmy identyfikacji adaptacyjnej.

Analizę przeprowadzono dla przypadku sterowania prądowego maszyną asynchroniczną. Rozpatrzono dwie podstawowe wersje układów napędowych, różniące się od siebie modelem matematycznym układu regulacji prądu stojana. Analizie będą podlegały układy napędowe z *bezinercyjnym* oraz *inercyjnym* (pierwszego rzędu) modelem matematycznym obwodu regulacji prądu stojana. Z uwagi na znaczny stopień złożoności oraz nieliniowy charakter zjawisk fizycznych w układach sterowania pośredniego rozróżnienie to może być traktowane jako próba opisu układu przy pomocy modeli matematycznych o różnym stopniu dokładności. Z praktycznego punktu widzenia podział ten związany jest natomiast z szybkością działania obwodu regulacji prądu stojana. Z obu punktów widzenia rozróżnienie to obarczone jest pewną dozą subiektywizmu. Nie istnieją bowiem obiektywne przesłanki podziału na sytuacje, w których powinno się uwzględniać, bądź nie uwzględniać skończonego czasu regulacji prądu stojana. Obserwując tendencje rozwoju techniki przekształtnikowej można jednak zauważyć stałą dążność do podwyższania częstotliwości pracy urządzeń przekształtnikowych. Z uwagi na dynamikę obwodu regulacji prądu stojana pozwala to uzyskiwać coraz krótszy czas re-

gulacji. Jeśli przyjąć, że wiarygodny może tu być model dynamiczny w postaci członu inercyjnego pierwszego rzędu, oznacza to, że jego zastępcza stała czasowa staje się coraz mniejsza. Wydaje się więc, że dla przyszłościowych rozwiązań dobrym modelem matematycznym będzie wersja układu z bezinercyjnym modelem obwodu regulacji prądu stojana. Nie rozstrzygając tego zagadnienia w sposób jednoznaczny autor pracy przeprowadza analizę obu wersji układu, wychodząc z założenia, że będzie to kompleksowe potraktowanie zagadnienia.

We wszystkich prezentowanych w tym rozdziale przypadkach założono ponadto że:

- z2.1** parametry maszyny są stałe, a ich wartości znamionowe,
- z2.2** zastępczy moment bezwładności układu sprowadzony do wału maszyny ma wartość stałą,
- z2.3** model matematyczny obwodu regulacji prądu stojana jest odsprężony, to znaczy, że nie występują sprzężenia skrośne pomiędzy podsystemami regulacji prądu stojana dla osi  $x$  oraz  $y$ ,
- z2.4** sterowanie maszyną odbywa się w pierwszej strefie regulacji, co dla pośrednio sterowanej maszyny asynchronicznej oznacza, że składowa  $i_s^x$  wektora prądu stojana jest stała i równa jest swej wartości znamionowej,
- z2.5** regulatory prędkości kątowej, niezależnie od typu pracują w zakresie liniowym.

Analizę stabilności układu prowadzono ponadto przy założeniu, że prędkość kątowa zadana oraz moment zewnętrzny na wale maszyny mają dowolne, stałe w czasie wartości.

Aby nadać prowadzonym w pracy rozważaniom bardziej ogólny charakter, wprowadzono system jednostek względnych. Pozwala to znacznie zmniejszyć liczbę parametrów maszyny asynchronicznej występujących w zależnościach. Czyni to prowadzoną analizę bardziej czytelną, a wnioskom nadaje charakter uniwersalny.

Definicje jednostek względnych oraz proces formułowania modeli matematycznych analizowanych wersji układów napędowych przedstawiony jest w dodatku D1.

W literaturze fachowej zaprezentowana w tym rozdziale problematyka poruszana jest stosunkowo rzadko [28, 31, 41, 46, 95, 112]. W [112] autorzy odnieśli się jedynie do problemu analizy stabilności lokalnej wybranej klasy układów sterowania wektorowego. W [41, 95] przedstawiony jest dowód stabilności globalnej układów sterowania pośredniego jedynie dla wersji z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana. Zaprezentowana w tych pracach procedura dowodowa oparta jest na analizie zbieżności norm wektorów stanu podsystemów elektromagnetycznego i elektromechanicznego. Autor wyraża nadzieję, że zaprezentowany tu materiał będzie stanowić istotne uzupełnienie tej problematyki.

## 2.1. Układ napędowy z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zdefiniowany w dodatku D1 system jednostek względnych utworzyć można model matematyczny układu napędowego w rozpatrywanej wersji jako:

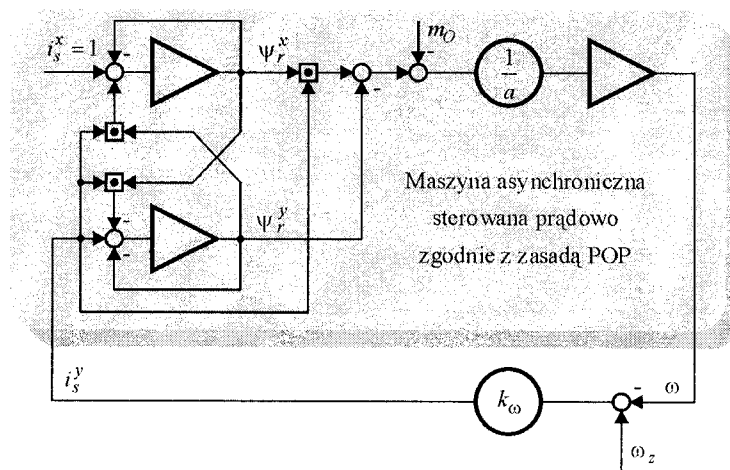
$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (2.1a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (2.1b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (2.1c)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega). \quad (2.1d)$$

Występujące w powyższych zależnościach zmienne oraz parametry układu zostały zdefiniowane w dodatku D1. Dla jasności prowadzonych rozważań ograniczyć się można w tym miejscu jedynie do wyjaśnienia, że stała  $a$  stanowi miarę momentu bezwładności układu, a  $k_\omega$  jest (w jednostkach względnych) współczynnikiem wzmocnienia regulatora prędkości kątowej. Z uwagi na występujące w zależnościach (2.1a), (2.1b) oraz (2.1c) iloczyny zmiennych stanu, zależności (2.1a)-(2.1d) tworzą nieliniowy model matematyczny układu napędowego o sterowaniu pośrednim. Schemat blokowy układu napędowego przedstawiony jest na rys. 2.1.



**Rys. 2.1.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Z układu równań (2.1) wyznaczyć można współrzędne wektora stanu ustalonego jako:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \ \Psi_{Or}^y \ \Omega_O]^T = [1 \ 0 \ \Omega_O]^T, \quad (2.2)$$

przy czym:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{M_O}{k_\omega}. \quad (2.3)$$

Z zależności tych wynika, że w stanie ustalonym koniec wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika przyjmuje położenie zgodne z zasadą POP. Składowa  $\Psi_{Or}^y$  wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika zeruje się, a składowa  $\Psi_{Or}^x$  (w jednostkach względnych) ma wartość jednostkową. Zadana prędkość kątowna  $\Omega_z$  jest odtwarzana przez układ z uchybem zależnym od wielkości momentu zewnętrznego  $M_O$ . Zależność (2.3) stanowi równanie prostych reprezentujących (dla różnych wartości zadanych  $\Omega_z$ ) rodzinę charakterystyk mechanicznych układu napędowego.

Pomimo nieliniowego charakteru zjawisk zachodzących w układzie napędowym jego właściwości dynamiczne mogą być opisane przy pomocy zapisu macierzowego w tzw. formie pseudoliniowej [35, 76]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega & 0 \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) & -1 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

przy czym:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_O = [\Delta \Psi_r^x \ \Delta \Psi_r^y \ \Delta \omega]^T \quad (2.5)$$

jest wektorem stanu przyrostowego, obrazującym odchylenia od położenia wyznaczonego przez wektor stanu ustalonego. Nieliniowy charakter modelu matematycznego układu napędowego przejawia się w zapisie macierzowym zależnością elementów macierzy stanu układu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  od współrzędnych wektora stanu usta-

lonego i przyrostowego. Warto zwrócić uwagę, że jedynie elementy  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  zależą od współrzędnych wektora stanu ustalonego i przyrostowego.

Dla jasności dalszych rozważań warto przeprowadzić dekompozycję macierzy stanu w zależności (2.4) na podmacierze, zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) & \mathbf{A}_{me} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

przy czym poszczególne podmacierze zdefiniowane są następująco:

$$\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{k_\omega}{a} \end{bmatrix}, \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{0}^T = [0 \ 0]. \quad (2.7d)$$

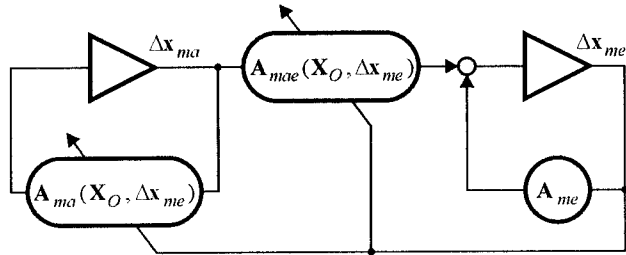
Podział macierzy stanu na podmacierze wprowadzony został nie tylko dla wygody zapisu dalszych przekształceń macierzowych. Związany jest on również z pewną interpretacją fizyczną. Macierz  $\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  jest macierzą stanu podsystemu elektromagnetycznego, w którym zmiennymi stanu są składowe wektora strumienia skojarzonego wirnika maszyny. Macierz  $\mathbf{A}_{me}$  (w tym szczególnym przypadku jednoelementowa) jest macierzą stanu liniowego podsystemu elektromechanicznego, w którym zmienną stanu jest prędkość kątowna napędu. Norma macierzy  $\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  jest natomiast pewną miarą oddziaływania podsystemu elektromagnetycznego na podsystem elektromechaniczny. Zerowa wartość wszystkich elementów macierzy  $\mathbf{0}$  świadczy zaś o tym, że podsystem elektromechaniczny nie oddziałuje zwrotnie na podsystem elektromagnetyczny w sposób liniowy. Oddziaływanie to ma charakter nieliniowy i przejawia się w zależności elementów macierzy  $\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  od współrzędnych wektora stanu podsystemu elektromechanicznego.

Schemat połączeń pomiędzy poszczególnymi podsystemami przedstawiony jest na rys. 2.2. Ze struktury tego schematu wynika również, że jeżeli podsystem

elektromagnetyczny znajduje się w stanie ustalonym, to właściwości dynamiczne całego układu napędowego określone są przez wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$  podsystemu elektromechanicznego. Inaczej mówiąc, dynamika układu napędowego określona jest jedynie przez wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$  podsystemu elektromechanicznego w sytuacji, gdy składowe wektora strumienia skojarzonego wirnika, zgodnie z zależnością (2.2), spełniają warunek:

$$\boldsymbol{\psi}_r = [\psi_r^x \quad \psi_r^y]^T = [1 \quad 0]^T, \quad (2.8)$$

który jest zgodny z zasadą POP.



Rys. 2.2. Schemat wzajemnych połączeń podsystemów: elektromechanicznego i elektromagnetycznego

Z uwagi na nieliniowy charakter zjawisk w układzie napędowym analiza stabilności przeprowadzona zostanie przy wykorzystaniu bezpośredniej metody Lapunowa.

Założmy, że liniowy podsystem elektromechaniczny jest stabilny. Jeśli wziąć pod uwagę zależność (2.7b), założenie to wyda się trywialne, ponieważ fizyczny sens takich pojęć jak współczynnik wzmocnienia i stała czasowa wskazuje na ich dodatnie wartości. Założenie to nie jest jednak tak oczywiste w rozpatrywanych dalej, bardziej skomplikowanych przypadkach.

Jak wykazano w pracach [35, 51] dla stabilnego, liniowego układu dynamicznego istnieje zawsze dodatnio określona forma kwadratowa, zwana idealną funkcją Lapunowa (IFL):

$$V_i(\Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \Delta \mathbf{x} \quad (2.9)$$

o symetrycznej macierzy  $\mathbf{P}_i$ , posiadającej skończoną normę euklidesową, która zapewnia pozytywny wynik testu Lapunowa. Sposób określania macierzy  $\mathbf{P}_i$  przedstawiony został w punkcie 1.2. Dla podsystemu elektromechanicznego podstawową właściwością formy kwadratowej (2.9) jest to, że jej wartości liczone wzdłuż dowolnej trajektorii tego podsystemu dążą eksponencjalnie do zera ze stałą czasową:

$$\tau = 1/2|\text{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_{me})]| \quad (2.10)$$

lub szybciej [35, 51]. W rozpatrywanym tu jednowymiarowym przypadku macierzą IFL może być dowolna macierz typu:

$$\mathbf{P}_i = [p_{i11}] \quad (2.11)$$

o dodatnim, skończonym elemencie  $p_{i11}$ .

Niech forma kwadratowa:

$$V(\Delta \mathbf{x}) = \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{P} \Delta \mathbf{x} \quad (2.12)$$

o symetrycznej macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - \frac{p_{i11}}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & \frac{p_{i11}}{a} \\ 0 & \frac{p_{i11}}{a} & p_{i11} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

będzie funkcją-kandydatem na funkcję Lapunowa, służącą do badania stabilności układu napędowego [32]. Występująca w elementach macierzy  $\mathbf{P}$  stała  $a$  jest miarą momentu bezwładności układu, a jej definicja podana jest w dodatku D1 (zależność (D1.11)).

Zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa [58] forma kwadratowa o macierzy (2.13) musi być dodatnio określona. Łatwo można wykazać, że w tym przypadku dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{P}$  zapewnia spełnienie warunku:

$$p_{22} > \frac{p_{i11}}{a^2}. \quad (2.14)$$

Założmy wstępnie, że nierówność (2.14) jest spełniona oraz zdefiniujmy podmacierz

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i11}}{a} \\ \frac{p_{i11}}{a} & p_{i11} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

macierzy  $\mathbf{P}$ . Pochodna formy kwadratowej o macierzy (2.13), liczona wzdłuż trajektorii systemu (2.4), ma następującą postać:

$$\frac{d}{dt}V(\Delta\mathbf{x}) = -2(p_{22} - \frac{p_{i11}}{a^2})(\Delta\psi_r^x)^2 + [\Delta\psi_r^y \quad \Delta\omega](\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Macierz:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

jest zgodnie z zależnością (2.4) podmacierzą macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x})$  układu napędowego.

Warto w tym miejscu podkreślić, że wybór macierzy  $\mathbf{P}$  zgodnie z zależnością (2.13) nie jest przypadkowy. Ze struktury macierzy stanu w zależności (2.4) oraz zależności (2.17) wynika, że analizowany układ należy do opisanej w punkcie 1.4 klasy układów dynamicznych danych zależnością (1.64). Występujące w elementach  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x})$  współrzędne wektora stanu ustalonego i przyrostowego, zgodnie z metodą parametryzacji współrzędnych wektora stanu mogą być wstępnie potraktowane jako parametry. Porównanie zależności (1.67) oraz (2.13) potwierdza natomiast przynależność formy kwadratowej (2.12) do klasy form kwadratowych spełniających warunek konieczny optymalności [32]. W ramach struktury macierzy (2.13) możliwy jest ponadto taki wybór jej elementów, że współczynniki formy kwadratowej pochodnej (2.16) nie zależą od współrzędnych wektora stanu, ustalonego i przyrostowego. Wykorzystując opisany w dodatku D2 (przypadek 4), elementy macierzy (2.13) wybrano tak, aby uzyskać efekt zerowania się drugiego składnika lewej strony nierówności (D2.20). Zabiegi te czynią formę kwadratową o macierzy (2.13) szczególnie przydatną do analizy stabilności globalnej rozpatrywanej wersji układu napędowego.

Pozostaje do rozstrzygnięcia czy i w jakich warunkach pochodna (2.16) pozostaje ujemnie określona. Łatwo wykazać, że podsystem dynamiczny o macierzy stanu  $\mathbf{A}_b$  jest stabilny dla dowolnych dodatnich i skończonych wartości parametrów  $a$  oraz  $k_\omega$ , a więc takich, które mają sens fizyczny. Tym samym spełnione są warunki konieczne stabilności asymptotycznej całego układu napędowego.

Z zależności (2.16) wynika, że przy spełnieniu nierówności (2.14) warunkiem dostatecznym stabilności asymptotycznej analizowanego układu napędowego jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony tej zależności. Zachodzi to wówczas, gdy macierz:

$$\mathbf{Q}_b = -(\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \quad (2.18)$$

jest macierzą dodatnio określoną. Łatwo wykazać, że w rozpatrywanym przypadku macierz  $\mathbf{Q}_b$  pozostaje dodatnio określona, o ile spełniony jest warunek:

$$p_{22} > \frac{p_{i11}}{a^2} \left( \frac{a}{k_\omega} + \frac{k_\omega}{4a} \right). \quad (2.19)$$

Zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa pomyślny wynik testu stabilności gwarantują takie wartości elementu  $p_{22}$ , dla których spełnione są jednocześnie warunki (2.14) oraz (2.19). Biorąc pod uwagę, że praktyczne znaczenie ma analiza takich układów, których wartości parametrów mają sens fizyczny oraz uwzględniając, że norma euklidesowa macierzy  $\mathbf{P}_i = [p_{i11}]$  ma, z założenia, wartości skończone dochodzimy do wniosku, że prawe strony nierówności (2.14) i (2.19) mają również wartości skończone. Znalezienie wartości elementu  $p_{22}$  spełniającego jednocześnie obie te nierówności jest więc zawsze możliwe. Stwierdzenie to kończy procedurę dowodową globalnej stabilności asymptotycznej rozpatrywanego wersji układu napędowego.

Jak wynika z zależności (2.16), dobór funkcji Lapunowa o strukturze zgodnej z zależnością (2.13) zapewnia to, że w macierzach form kwadratowych prawej strony zależności (2.16) nie występują elementy zależne od współrzędnych wektora stanu ustalonego i przyrostowego. Innymi słowy, pochodna formy kwadratowej o macierzy (2.13), liczona wzdłuż trajektorii układu napędowego, jest taka sama jak pochodna tej samej formy kwadratowej, liczona wzdłuż trajektorii liniowego układu dynamicznego o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Macierz  $\mathbf{0}^T$  określona jest zależnością (2.7d). Oznacza to praktycznie, że mimo nieliniowego charakteru zjawisk fizycznych zachodzących w układzie napędowym, z punktu widzenia testu Lapunowa, układ ten jest równoważny układowi liniowemu o macierzy stanu danej zależnością (2.20). Warto tu jednak podkreślić, że równoważność ta nie dotyczy wszystkich właściwości dynamicznych obu układów. Jak wyjaśniono w rozdziale pierwszym, standardowy test Lapunowa pozwala jedynie oszacować (poprzez ocenę wartości wskaźników jakości) minimalną szyb-

kość zanikania testującej formy kwadratowej. Przy tych samych wartościach wskaźników jakości (1.7) lub (1.11) dla porównywanych układów dynamicznych nie można wykluczyć, że będą one miały inne wartości przeregulowania lub inną oscylacyjność.

Warto również podkreślić, że w rozpatrywanym tu najprostszym wariancie układu warunek (2.19) stanowi warunek konieczny i dostateczny dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{Q}_b$  danej zależnością (2.18). W dalszej części tego rozdziału, dla bardziej złożonych przypadków stosowane będą oszacowania oparte jedynie na warunkach dostatecznych dodatniej określoności tej macierzy.

## 2.2. Układ napędowy z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zdefiniowany w dodatku D1 system jednostek względnych model matematyczny rozpatrywanej wersji układu zapisać można w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (2.21a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (2.21b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_O}{a}, \quad (2.21c)$$

$$\frac{d}{dt}z = d(\omega_z - \omega), \quad (2.21d)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z, \quad (2.21e)$$

gdzie symbol  $z$  oznacza (w jednostkach względnych) zmienną stanu regulatora PI, a stała  $d$  jest jego stałą całkowania. Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu regulacji prędkości kątowej przedstawia rys. 2.3.

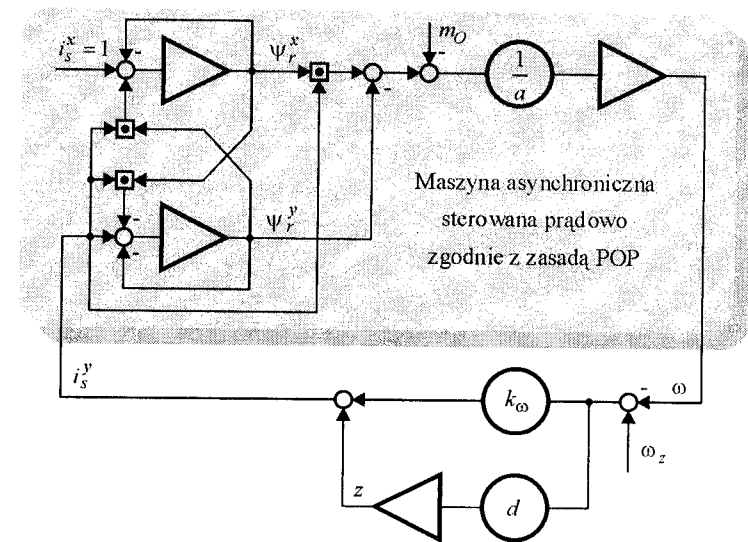
Z układu równań (2.21) wyznaczyć można wektor stanu ustalonego jako:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_z \quad Z_O]^T. \quad (2.22)$$

Z powyższej zależności wynika, że składowe wektora strumienia skojarzonego wirnika są zgodne z zasadą POP. Zastosowanie regulatora prędkości kątowej typu PI gwarantuje ponadto odtwarzanie zadanej prędkości kątowej bez uchybu ustalonego niezależnie od wielkości momentu zewnętrznego. Stanowi to niewątpliwą zaletę tego rozwiązania. Współrzędna  $Z_O$  wektora stanu ustalonego spełnia ponadto następującą zależność:

$$Z_O = M_O = I_{Os}^y, \quad (2.23)$$

co oznacza, że zmienna stanu regulatora PI (w jednostkach względnych) równa jest liczbowo momentowi obciążenia oraz składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana.



Rys. 2.3. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wprowadzenie wektora stanu przyrostowego:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_O = [\Delta \psi_r^x \quad \Delta \psi_r^y \quad \Delta \omega \quad \Delta z]^T \quad (2.24)$$

pozwala zapisać model matematyczny układu w formie pseudoliniowej jako:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} &= \mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z) & -1 & 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Podobnie jak w przypadku regulatora prędkości kątowej typu P, nieliniowy charakter modelu matematycznego układu przejawia się w tym, że elementy macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x})$  zależą od współrzędnych wektora stanu przyrostowego oraz ustalonego. Przy zastosowanym zapisie macierzowym zależność ta dotyczy tych samych elementów macierzy stanu. Dekompozycja macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x})$ , zgodnie z zależnością (2.6), prowadzi do następujących definicji podmacierzy poszczególnych podsystemów:

$$\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z) & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ -d & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26c)$$

$$\mathbf{0}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26d)$$

Podstawowe właściwości podsystemów związanych z poszczególnymi podmacierzami są analogiczne jak w przypadku opisanym w poprzednim punkcie tego rozdziału. Topologia układu jest również zgodna ze schematem blokowym przedstawionym na rys. 2.2.

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na właściwości dynamiczne podsystemu elektromechanicznego o macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$ . Łatwo można wykazać, że podsystem ten pozostaje stabilny dla wszystkich wartości parametrów posiadających sens fizyczny. Niech IFL tego podsystemu posiada symetryczną, dodatnio określoną macierz o strukturze:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

i o skończonej wartości normy euklidesowej. Niech funkcją-kandydatem na funkcję Lapunowa służącą do testowania stabilności całego układu napędowego będzie forma kwadratowa dana zależnością (2.12) o symetrycznej macierzy [32]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - \frac{p_{i11}}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & \frac{p_{i11}}{a} & \frac{p_{i12}}{a} \\ 0 & \frac{p_{i11}}{a} & p_{i11} & p_{i12} \\ 0 & \frac{p_{i12}}{a} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Strukturę i wartości poszczególnych elementów tej macierzy określono na analogicznych zasadach jak w punkcie 2.1.

Łatwo wykazać, macierz ta pozostaje dodatnio określona, jeżeli spełniony jest warunek (2.14). Pochodna formy kwadratowej o macierzy (2.28) liczona wzdłuż trajektorii systemu o modelu matematycznym (2.25) ma natomiast postać:

$$\frac{d}{dt} V(\Delta\mathbf{x}) = -2(p_{22} - \frac{p_{i11}}{a^2})(\Delta\psi_r^x)^2 + \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y & \Delta\omega & \Delta z \end{bmatrix} (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & -d & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i11}}{a} & \frac{p_{i12}}{a} \\ \frac{p_{i11}}{a} & p_{i11} & p_{i12} \\ \frac{p_{i12}}{a} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Przy założeniu, że spełniony jest warunek (2.14), zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa, warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności rozpatrywanej wersji układu napędowego jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony zależności (2.29).

Warunkiem koniecznym do tego jest stabilność podsystemu dynamicznego o macierzy stanu  $\mathbf{A}_b$ . Podsystem ten pozostaje stabilny dla dowolnych wartości parametrów  $a, d, k_\omega$  posiadających fizyczny sens, ponieważ równanie charakterystyczne macierzy  $\mathbf{A}_b$  przedstawić można w postaci [58, 70, 116]:

$$F(\lambda) = (\lambda + 1) \det(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{A}_{me}) = 0, \quad (2.32)$$

gdzie:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Z zależności (2.32) wynika, że przy stabilnym podsystemie elektromechanicznym wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste. Fizycznie jest to związane z tym, że macierz stanu  $\mathbf{A}_b$  reprezentuje układ składający się z dwóch szeregowo połączonych liniowych, stabilnych podsystemów dynamicznych.

Do sformułowania warunku dostatecznego ujemnej określoności zależności (2.29) posłużyć się można techniką szacowania maksymalnych wartości norm euklidesowych macierzy i norm kwadratowych wektorów. Wprowadźmy podział macierzy  $\mathbf{A}_b$  zgodnie ze schematem:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_c & \mathbf{A}_{me} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_c^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Do rozwiązania problemu wykorzystać można przedstawiony w dodatku D2 przypadek 2. Po prostych modyfikacjach sformułowany w dodatku D2 warunek (D2.15) przybiera postać:

$$p_{22} > \frac{\|\mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_{12}^T + \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_c\|}{2} + \frac{\|-\mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{12} \mathbf{A}_{me} + \mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_i\|^2}{4v_{me} |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_{me})]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_i)}, \quad (2.37)$$

gdzie macierz:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{p_{i11}}{a} & \frac{p_{i12}}{a} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

$v_{me}$  jest względnym wskaźnikiem jakości doboru formy kwadratowej o macierzy (2.27) dla podsystemu elektromechanicznego. W przypadku zastosowania do badania tego podsystemu IFL wskaźnik  $v_{me}$  osiąga wartość jednostkową.

Z analizy zależności (2.37) wynika, że jej prawa strona ma dla praktycznych układów napędowych dodatnie wartości skończone. Znalezienie elementu  $p_{22}$  macierzy (2.28), którego wartość spełnia jednocześnie warunki (2.14) i (2.37) jest więc dla takich układów napędowych zawsze możliwe.

Podobnie jak w rozpatrywanym poprzednio przypadku, dobór funkcji Lapunowa zgodnie ze strukturą (2.28) gwarantuje to, że jej pochodna, liczona wzdłuż trajektorii systemu (2.25), jest taka, jak pochodna tej samej funkcji, liczona wzdłuż trajektorii liniowego układu dynamicznego o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

gdzie:

$$\mathbf{0}^T = [0 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.40)$$

Tak jak poprzednio, skala równoważności obu układów jest jednak ograniczona do tych samych minimalnych szybkości zanikania testujących form kwadratowych.

### 2.3. Układ napędowy z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zdefiniowany w dodatku D1 system jednostek względnych, można model matematyczny rozpatrywanej wersji układu zapisać można w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (2.41a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (2.41b)$$

$$\frac{d}{dt} i_s^y = -\frac{1}{b} i_s^y + \frac{1}{b} i_{sz}^y, \quad (2.41c)$$

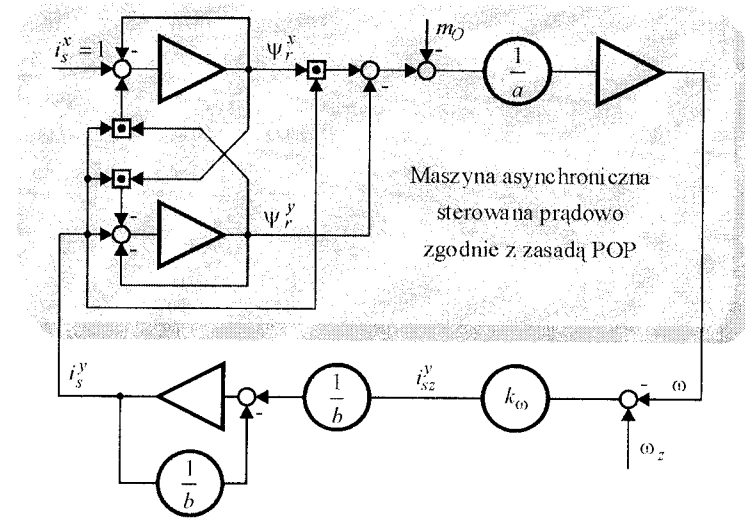
$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (2.41d)$$

$$i_{sz}^y = k_\omega (\omega_z - \omega). \quad (2.41e)$$

Definicje poszczególnych wielkości i parametrów układu znajdują się w dodatku D1, a proces formułowania modelu matematycznego układu przedstawiono w p. D1.4. W tym miejscu można się więc ograniczyć do stwierdzenia, że stała  $b$  jest w jednostkach względnych zastępczą stałą czasową obwodu regulacji prądu stojana, przy czym wartością odniesienia jest znamionowa wartość stałej czasowej obwodu wirnika maszyny. Załóżmy dalej, że zastępcza stała czasowa  $b$  ma wartość stałą. Schemat blokowy układu regulacji w rozpatrywanej wersji przedstawia rys. 2.4.

Z układu równań (2.41) wyznaczyć można wektor stanu ustalonego jako:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O]^T. \quad (2.42)$$



Rys. 2.4. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Składowe wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika są zgodne z zasadą POP. Podobnie jak w przypadku analizowanym w punkcie 2.1, występuje tu również ustalony uchyb regulacji prędkości, a charakterystyka mechaniczna układu opisana jest zależnością (2.3).

Wprowadzenie wektora stanu przyrostowego:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_O = [\Delta \psi_r^x \quad \Delta \psi_r^y \quad \Delta i_s^y \quad \Delta \omega]^T \quad (2.43)$$

pozwala zapisać model matematyczny układu regulacji w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Nieliniowy charakter modelu matematycznego przejawia się w zależności elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{41}$  macierzy stanu od współrzędnych wektora stanu ustalonego i przyrostowego. Dekompozycja macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$ , zgodnie z zależnością (2.6), prowadzi teraz do następujących definicji macierzy stanu poszczególnych podsystemów:

$$\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.45a)$$

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.45b)$$

$$\mathbf{A}_{mac}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad (2.45c)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.45d)$$

Podstawowe właściwości dynamiczne poszczególnych podsystemów są analogiczne do opisanych w poprzednich punktach tego rozdziału. Topologia układu jest natomiast zgodna ze schematem blokowym przedstawionym na rys. 2.2.

Analogicznie jak poprzednio analiza stabilności układu ma sens przy założeniu, że podsystem elektromechaniczny jest stabilny. Analiza wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_{me}$  również w tym wypadku prowadzi do wniosku, że podsystem ten pozostaje stabilny dla wszystkich fizycznie sensownych wartości parametrów układu. Niech IFL tego podsystemu posiada dodatnio określoną macierz o skończonej normie euklidesowej i strukturze zgodnej z zależnością (2.27). Niech funkcją-kandydatem na funkcję Lapunowa służącą do testowania stabilności układu napędowego będzie forma kwadratowa o macierzy [32]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - \frac{p_{i22}}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} \\ 0 & \frac{p_{i12}}{a} & p_{i11} & p_{i12} \\ 0 & \frac{p_{i22}}{a} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Macierz ta pozostaje dodatnio określona, jeżeli:

$$p_{22} > \frac{p_{i22}}{a^2}. \quad (2.47)$$

Pochodna formy kwadratowej o macierzy (2.46), liczona wzdłuż trajektorii układu o modelu matematycznym (2.44), ma postać:

$$\frac{d}{dt}V(\Delta \mathbf{x}) = -2(p_{22} - \frac{p_{i22}}{a^2})(\Delta \psi_r^x)^2 + [\Delta \psi_r^y \quad \Delta i_s^y \quad \Delta \omega](\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} \\ \frac{p_{i12}}{a} & p_{i11} & p_{i12} \\ \frac{p_{i22}}{a} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Przy założeniu, że spełniony jest warunek (2.47), zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa, warunkiem dostatecznym stabilności asymptotycznej rozpatrywanej wersji układu napędowego jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony zależności (2.48). Analiza wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_b$  może być przeprowadzona analogicznie jak w poprzednim punkcie tego rozdziału. Wartości własne tej macierzy spełniają również zależność (2.32), co świadczy o tym, że podsystem o macierzy stanu  $\mathbf{A}_b$  pozostaje stabilny dla wszystkich wartości parametrów posiadających sens fizyczny. Tym samym spełniony jest warunek konieczny pozytywnego rezultatu testu Lapunowa. Do określenia warunku dostatecznego ujemnej określoności drugiego składnika zależności (2.48) posłużyć się można również zależnością (2.37). Występujące tam macierze zdefiniowane są teraz w sposób następujący:

$$\mathbf{A}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{P}_{12}^T = \begin{bmatrix} \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Macierze  $\mathbf{A}_{me}$  oraz  $\mathbf{P}_i$  dane są natomiast zależnościami (2.45b) oraz (2.27). Podobnie jak w poprzednich przypadkach prawe strony nierówności (2.47) oraz (2.37) pozostają ograniczone. Znalazienie takiej wartości elementu  $p_{22}$  macierzy (2.46), która pozwala spełnić jednocześnie obie te nierówności jest więc zawsze możliwe.

Z punktu widzenia testu Lapunowa, rozpatrywana wersja układu napędowego testowana formą kwadratową o strukturze (2.46) równoważna jest układowi liniowemu o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

przy czym macierz  $\mathbf{0}^T$  dana jest zależnością (2.40).

## 2.4. Układ napędowy z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zdefiniowany w dodatku D1 system jednostek względnych model matematyczny rozpatrywanej wersji układu sterowania przedstawić można w postaci:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (2.54a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (2.54b)$$

$$\frac{d}{dt} i_s^y = -\frac{1}{b} i_s^y + \frac{1}{b} i_{sz}^y, \quad (2.54c)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (2.54d)$$

$$\frac{d}{dt} z = d(\omega_z - \omega), \quad (2.54e)$$

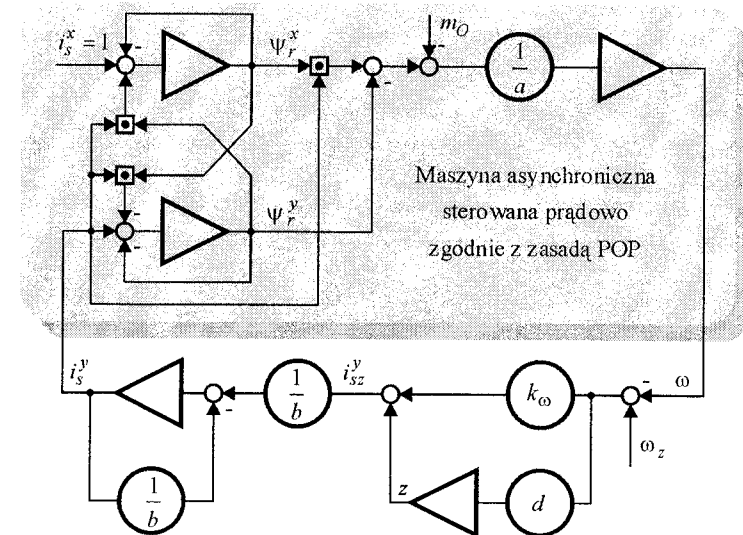
$$i_{sz}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (2.54f)$$

Proces formułowania modelu matematycznego tej wersji układu przedstawiony został w dodatku D1.5.

Wyznaczony z powyższego układu równań wektor stanu ustalonego wyrażony jest zależnością:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_z \quad Z_O]^T, \quad (2.55)$$

z której wynika, że składowe wektora przestrzennego strumienia wirnika maszyny są zgodne z zasadą POP. Z zależności tej wynika ponadto, że ta wersja układu napędowego charakteryzuje się zerowym uchybem ustalonym regulacji prędkości kątowej. Prawdziwa jest również zależność (2.23), z której wynika, że w stanie ustalonym w przyjętym systemie jednostek względnych zmienna stanu regulatora równa jest liczbowo momentowi zewnętrznemu oraz składowej  $I_{Os}^y$  wektora przestrzennego prądu stojana. Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu napędowego przedstawia rys. 2.5.



Rys. 2.5. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wprowadzenie wektora stanu przyrostowego:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_O = [\Delta \psi_r^x \quad \Delta \psi_r^y \quad \Delta i_s^y \quad \Delta \omega \quad \Delta z]^T \quad (2.56)$$

pozwala zapisać model matematyczny układu w formie pseudoliniowej:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} &= \mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nieliniowy charakter modelu matematycznego przejawia się w zależności elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{41}$  macierzy stanu  $\mathbf{A}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x})$  od współrzędnych przyrostowego wektora stanu oraz wektora stanu ustalonego. Dekompozycja macierzy stanu zgodnie z zależnością (2.6) prowadzi do definicji poszczególnych podsystemów w postaci:

$$\mathbf{A}_{ma}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.58a)$$

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58b)$$

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58c)$$

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58d)$$

Podstawowe właściwości poszczególnych podsystemów są analogiczne jak w przypadkach rozpatrywanych w poprzednich punktach tego rozdziału. Wzajemne połączenie poszczególnych podsystemów przedstawia rys. 2.2.

Założmy, jak w poprzednich przypadkach, że praktyczne znaczenie ma analiza jedynie takich układów, dla których podsystem elektromechaniczny o macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$  pozostaje stabilny. Warto podkreślić, że w tym wypadku z uwagi na wymiary macierzy  $\mathbf{A}_{me}$ , założenie to nie musi być spełnione dla dowolnych parametrów układu napędowego.

Z założenia stabilności podsystemu elektromechanicznego wynika, że istnieje IFL o macierzy:

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} & p_{i13} \\ p_{i12} & p_{i22} & p_{i23} \\ p_{i13} & p_{i23} & p_{i33} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

gwarantująca pomyślny wynik testu Lapunowa dla tego podsystemu. Niech dodatkowo określona macierz (2.59) ma skończoną wartość normy euklidesowej. Niech funkcją-kandydatem na funkcję Lapunowa służącą do testowania stabilności rozpatrywanej wersji układu będzie forma kwadratowa (2.12) o macierzy [32]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - \frac{p_{i22}}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} & \frac{p_{i23}}{a} \\ 0 & \frac{p_{i12}}{a} & p_{i11} & p_{i12} & p_{i13} \\ 0 & \frac{p_{i22}}{a} & p_{i12} & p_{i22} & p_{i23} \\ 0 & \frac{p_{i23}}{a} & p_{i13} & p_{i23} & p_{i33} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Łatwo wykazać, że macierz ta pozostaje również dodatnio określona jeżeli spełniony jest warunek (2.47). Pochodna formy kwadratowej o macierzy (2.60) liczona wzdłuż trajektorii systemu o modelu matematycznym (2.57) ma postać:

$$\frac{d}{dt}V(\Delta\mathbf{x}) = -2(p_{22} - \frac{p_{i22}}{a^2})(\Delta\psi_r^x)^2 + \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}^T (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} & \frac{p_{i23}}{a} \\ \frac{p_{i12}}{a} & p_{i11} & p_{i12} & p_{i13} \\ \frac{p_{i22}}{a} & p_{i12} & p_{i22} & p_{i23} \\ \frac{p_{i23}}{a} & p_{i13} & p_{i23} & p_{i33} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Przy założeniu, że spełniony jest warunek (2.47), zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa, warunkiem dostatecznym stabilności asymptotycznej rozpatrywanej wersji układu napędowego jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony zależności (2.61). Z założenia stabilności podsystemu elektromechanicznego o macierzy  $\mathbf{A}_{me}$  wynika automatyczne spełnienie warunku koniecznego pomysłnego rezultatu testu Lapunowa w odniesieniu do podsystemu o macierzy stanu  $\mathbf{A}_b$ . Prawdziwa pozostaje bowiem nadal zależność (2.32), z tym że macierz  $\mathbf{A}_{me}$  dana jest teraz zależnością (2.58b). Wynika stąd, że dla stabilnego podsystemu elektromechanicznego macierz  $\mathbf{A}_b$  również ma stabilne wartości własne.

Warunek dostateczny stabilności asymptotycznej rozpatrywanej wersji układu napędowego sformułowany jest teraz także przez zależność (2.37), z tym że macierze  $\mathbf{A}_c$  oraz  $\mathbf{P}_{12}$  zdefiniowane są teraz następująco:

$$\mathbf{A}_c^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{P}_{12}^T = \begin{bmatrix} \frac{p_{i12}}{a} & \frac{p_{i22}}{a} & \frac{p_{i23}}{a} \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

a macierze  $\mathbf{A}_{me}$  oraz  $\mathbf{P}_i$  dane są zależnościami (2.58b) i (2.59). Tak jak we wszystkich analizowanych dotychczas przypadkach tak i teraz, prawe strony nierówności (2.37) i (2.47) posiadają dla realnych układów wartości skończone. Znalazienie takiej wartości elementu  $p_{22}$  macierzy (2.60), która spełnia jednocześnie nierówności (2.37) i (2.47) jest więc zawsze możliwe.

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, biorąc pod uwagę test Lapunowa, rozpatrywana wersja układu napędowego testowana formą kwadratową o macierzy (2.60) równoważna jest układowi liniowemu o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{lin} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

gdzie:

$$\mathbf{0}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.67)$$

Podobnie jak poprzednio, równoważność ta dotyczy jedynie minimalnej szybkości zanikania testującej formy kwadratowej, obliczanej wzdłuż dowolnej trajektorii obu układów.

## 2.5. Uwagi końcowe

W kolejnych punktach tego rozdziału przeprowadzono analizę stabilności różnych wariantów układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą POP. Wykazano, że warunki dostateczne globalnej stabilności asymptotycznej wszystkich rozpatrywanych wersji układów mogą być spełnione dla takich wartości parametrów układów, przy których podsystem elektromechaniczny pozostaje stabilny. Precyzyj-

nie rzecz biorąc wykazano, że istnieje w tym przypadku funkcja Lapunowa gwarantująca pomyślny wynik testu stabilności dla każdej rozpatrywanej wersji. Jeżeli zależy nam na znalezieniu konkretnej funkcji Lapunowa dla określonej wersji, to możemy postępować według przedstawionego niżej algorytmu.

#### Algorytm 1:

- 1 wyznaczyć IFL dla podsystemu elektromechanicznego (w zależności od rozpatrywanej wersji układu strukturę macierzy tej funkcji określają odpowiednio zależności: (2.11), (2.27), (2.27), lub (2.59)),
- 2 wyznaczyć taką wartość elementu  $p_{22}$  macierzy funkcji Lapunowa, która w zależności od wersji spełnia odpowiednio pary nierówności: (2.14) i (2.19) lub (2.14) i (2.37) lub (2.37) i (2.47) lub (2.37) i (2.47),
- 3 utworzyć poszukiwaną macierz  $\mathbf{P}$ , w zależności od rozpatrywanej wersji układu posłużyć się tu należy zależnościami (2.13), (2.28), (2.46) lub (2.60).

Z zaprezentowanej w tym rozdziale analizy stabilności różnych wersji układów sterowanych zgodnie z zasadą POP wynika, że kluczem do rozstrzygnięcia problemu stabilności globalnej jest znalezienie takiej funkcji Lapunowa, która gwarantuje pomyślny wynik testu stabilności dla podsystemu elektromechanicznego. W przeprowadzonej analizie wykorzystywano IFL tego podsystemu. Taki wybór funkcji Lapunowa gwarantuje pozytywny rezultat prowadzonej analizy. Nie jest to jednak warunek konieczny. Na etapie doboru funkcji Lapunowa dla tego podsystemu można posłużyć się inną, dowolną formą kwadratową, dla której względny wskaźnik jakości spełnia warunek:

$$v_{me} > 0. \quad (2.68)$$

Jak wynika z zależności (2.37), wartość elementu  $p_{22}$ , pozwalającego spełnić warunki dostateczne stabilności danej wersji układu napędowego, może być wówczas większa niż przy wykorzystaniu IFL podsystemu elektromechanicznego. Nie zmienia to jednak faktu, że funkcje Lapunowa gwarantujące stabilność poszczególnych wersji układów sterowanych zgodnie z zasadą POP istnieją również w tych warunkach. Sugestia, by jako podstawę do analizy stabilności tych układów wykorzystywać IFL podsystemu elektromechanicznego ma na celu wyeliminowanie dyskusji nad problemem istnienia funkcji Lapunowa dla tego podsystemu.

Warto również zwrócić uwagę na to, że przy wyznaczaniu wartości elementu  $p_{22}$  macierzy testującej formy kwadratowej w miejsce występujących w zależności (2.37) norm euklidesowych można użyć dających się łatwiej obliczać norm Frobeniusa poszczególnych macierzy. Podobnie jak w opisanych wyżej okolicznościach może to prowadzić do wzrostu wartości elementu  $p_{22}$  macierzy testującej

formy kwadratowej, gwarantującej spełnienie warunków dostatecznych stabilności asymptotycznej. Nie zmienia to jednak faktu, że formy kwadratowe gwarantujące pomyślny wynik testu Lapunowa istnieją zawsze, również w tych warunkach.

Z przeprowadzonej w tym rozdziale analizy wynika, że w każdym przypadku macierz funkcji Lapunowa była tak dobrana, że współczynniki form kwadratowych pochodnych tej funkcji (dane odpowiednio zależnościami (2.16), (2.29), (2.48) i (2.61)) nie zależą od współrzędnych wektora stanu przyrostowego i wektora stanu ustalonego. Stabilność asymptotyczna badanych wersji układu zachowana jest więc przy dowolnych wartościach tych wektorów. Z uwagi na założoną w trakcie formułowania modeli matematycznych stałość prędkości zadanej i momentu zewnętrznego klasę sterowań, dla których wyznaczone formy kwadratowe są również funkcjami Lapunowa, można nieco rozszerzyć. Globalna stabilność asymptotyczna układu zachowana jest również przy pobudzaniu go takimi sygnałami (prędkości zadanej i momentu zewnętrznego), które pozostają stałe jedynie w pewnych przedziałach czasowych, na tyle długich, że trajektoria układu osiąga każdorazowo bezpośrednie otoczenie ustalonego punktu pracy.

### 3. Analiza stabilności układów sterowania pośredniego z uwzględnieniem zjawiska nasycenia regulatorów prędkości kątowej

W rozdziale tym przeprowadzono analizę stabilności układów regulacji prędkości kątowej o sterowaniu zgodnym z zasadą POP z uwzględnieniem zjawiska nasycenia regulatorów prędkości kątowej. Ograniczenie sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątowej w typowych kaskadowych strukturach sterowania [7, 8] ma na celu ograniczenie sygnału zadanego prądu stojana. W konsekwencji, o ile obwód regulacji prądu stojana działa prawidłowo, uzyskuje się efekt ograniczenia rzeczywistego prądu stojana. Chroni to przekształtnik zasilający oraz silnik przed nadmiernym wzrostem prądu w stanach statycznych i dynamicznych.

Prezentowana w tym rozdziale analiza stabilności przeprowadzona zostanie przy założeniu, że prawdziwe są sformułowane we wstępie do rozdziału 2 założenia upraszczające **z2.1-z2.4**. Założono również, że prędkość zadana oraz moment zewnętrzny na wale maszyny mają dowolne, stałe w czasie wartości.

W tym rozdziale postawiono za cel sformułowanie odpowiedzi na pytanie, czy przy uwzględnieniu zjawiska nasycenia regulatorów prędkości kątowej poszczególne wersje układów sterowania pośredniego zachowują asymptotyczną stabilność globalną. Rozwiązanie tego problemu stanowi istotny krok na drodze odchodzenia w prezentowanej analizie od idealizujących założeń upraszczających. Nadaje to uzyskanym результатам cechy większej przydatności praktycznej.

Zgodnie z wiedzą autora rozwiązanie tego problemu nie było dotychczas podejmowane ani w literaturze krajowej, ani zagranicznej.

Przy rozwiązywaniu problemu stabilności wykorzystane zostaną wnioski wynikające z rozdziału 2.

#### 3.1. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Sposób i miejsce włączenia *nieliniowego ogranicznika* sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątowej w rozpatrywanej wersji układu napędowego przedstawiony jest na rys. 3.1. Modelem matematycznym układu jest następujący układ równań różniczkowych:

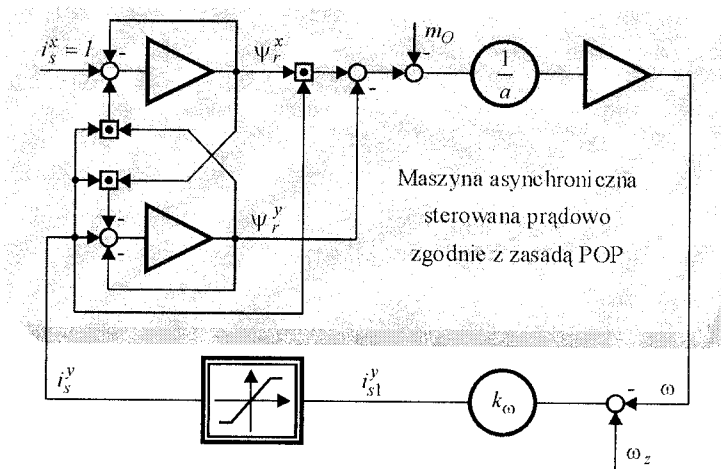
$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (3.1a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (3.1b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (3.1c)$$

$$i_{s1}^y = k_\omega(\omega_z - \omega), \quad (3.1d)$$

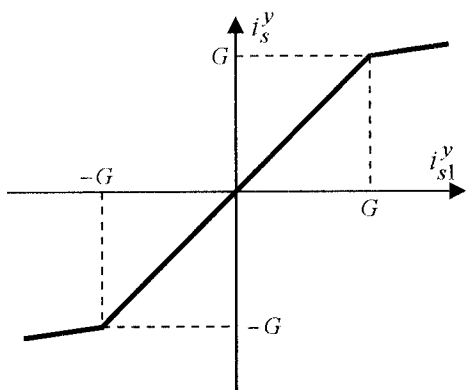
$$i_s^y = f(i_{s1}^y). \quad (3.1e)$$



**Rys. 3.1.** Schemat blokowy układu napędowego z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu P oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Blizszego omówienia wymaga nieliniowa zależność (3.1e). Graficznie, w postaci charakterystyki, zależność ta przedstawiona jest na rys. 3.2. Jak widać, dla odpowiednio dużych wartości uchybu prędkości kątowej w nieliniowym ograniczniku następuje znaczne obniżenie wartości współczynnika wzmocnienia, co prowadzi do efektu ograniczenia wartości składowej  $i_s^y$  wektora przestrzennego prądu stojana. Działanie nieliniowego ogranicznika może być opisane w sposób następujący:

$$i_s^y = f(i_{s1}^y) = \begin{cases} i_{s1}^y & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ G + N(i_{s1}^y - G) & \text{dla } i_{s1}^y \geq G \\ -G + N(i_{s1}^y + G) & \text{dla } i_{s1}^y \leq -G \end{cases}, \quad (3.2)$$



**Rys. 3.2.** Charakterystyka nieliniowego ogranicznika sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątowej

przy czym stała  $N$  jest współczynnikiem kierunkowym charakterystyki ogranicznika dla  $|i_{s1}^y| \geq G$ , zgodnie z definicją:

$$N = \frac{di_s^y}{di_{s1}^y}. \quad (3.3)$$

Stała  $G$  stanowi taką bezwzględną wartość składowej  $i_{s1}^y$ , powyżej której ogranicznik wchodzi w stan nasycenia.

Wyznamy wartości składowej  $i_s^y$  wektora prądu stojana w stanie ustalonym przy stałej wartości zadanej prędkości kątowej  $\Omega_z$ . Składowa ta spełnia wówczas następujące zależności:

$$I_{Os}^y = f(I_{Os1}^y) = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega_O)k_\omega & \text{dla } |I_{Os1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega_O)k_\omega - G] & \text{dla } I_{Os1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega_O)k_\omega + G] & \text{dla } I_{Os1}^y \leq -G \end{cases}. \quad (3.4)$$

Analizując tę zależność łatwo dochodzimy do wniosku, że dla skończonych wartości współczynnika wzmocnienia  $k_\omega$  oraz bezwzględnej wartości różnicy  $\Omega_z - \Omega_O$  zawsze możemy znaleźć wystarczająco małą wartość stałej  $N$ :

$$0 < N \ll 1, \quad (3.5)$$

że z dostateczną dokładnością spełniona będzie następująca nierówność:

$$|I_{Os}^y| \leq G. \quad (3.6)$$

Przeanalizujmy zachowanie się ogranicznika w dziedzinie zmiennych przyrostowych danych zależnością (2.5). Model matematyczny ogranicznika stanowi wówczas zestaw zależności:

$$i_s^y = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega = I_{Os}^y - k_\omega\Delta\omega & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega - G] \equiv G - Nk_\omega\Delta\omega & \text{dla } i_{s1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + G] \equiv -G - Nk_\omega\Delta\omega & \text{dla } i_{s1}^y \leq -G \end{cases}. \quad (3.7)$$

Warto podkreślić, że występujący w tych zależnościach znak przybliżenia związany jest jedynie z opisanym wyżej mało precyzyjnym określeniem wartości składowej  $i_s^y$  w stanie ustalonym. Model matematyczny nieliniowego ogranicznika może być więc zapisany w zwartej formie jako:

$$i_s^y = I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega, \quad (3.8)$$

przy czym składowa  $I_{Os}^y$  spełnia nierówność (3.6). Parametr  $N_1$  przyjmuje wartości zgodne z zależnościami:

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ N & \text{dla } |i_{s1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.9)$$

Podstawienie zależności (3.8) do (3.1a)-(3.1e) pozwala zapisać model matematyczny układu w dziedzinie zmiennych przyrostowych w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega & 0 \\ -(I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega) & -1 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{N_1 k_\omega}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

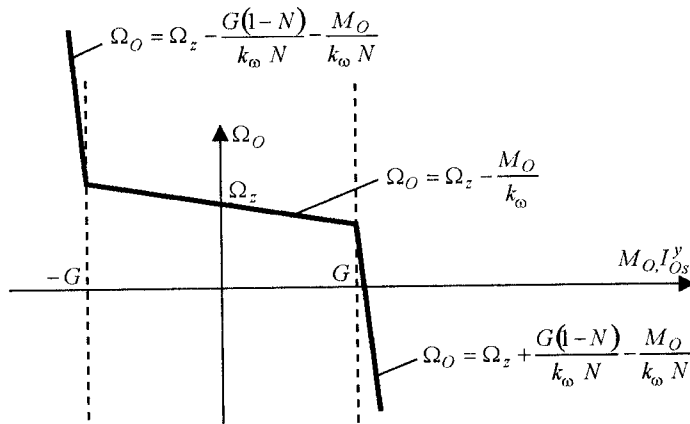
Łatwo wykazać, że wektor stanu ustalonego spełnia następujące zależności:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_O]^T. \quad (3.11)$$

Składowe wektora strumienia wirnika są, jak widać, zgodne z zasadą POP. W związku z tym prawdziwa jest również zależność:

$$I_{Os}^y = M_O, \quad (3.12)$$

co pozwala stwierdzić, że zależność (3.4) stanowi jednocześnie równanie charakterystyk mechanicznych układu napędowego. Dzięki wprowadzeniu nieliniowego ogranicznika sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątovej mają one charakter „koparkowy”. Przykładową charakterystykę mechaniczną tego typu prezentuje rys. 3.3.



**Rys. 3.3.** Charakterystyka mechaniczna układu napędowego, uzyskana przy zastosowaniu nieliniowego ogranicznika sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątovej

Dokonajmy porównania macierzy stanu z zależności (3.10) z macierzą stanu w zależności (2.4), opisującej zachowanie się układu z liniowym regulatorem prędkości kątovej. Z porównania tego wynika, że zmianie uległy jedynie elementy  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu oraz (w tym przypadku jednoelementowa) macierz  $\mathbf{A}_{me}$  podsystemu elektromechanicznego. Łatwo wykazać, że jeżeli użyje się do testowania stabilności układu opisanego równaniem stanu (3.10) formy kwadratowej o macierzy danej zależnością (2.13), to pochodna tej formy spełnia zależność (2.16), z tym że macierz  $\mathbf{A}_b$  ma teraz postać:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{N_1 k_\omega}{a} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Oznacza to, że dobór macierzy zgodnie z zależnością (2.13) również w tym wypadku zapewnia niezależność współczynników formy kwadratowej pochodnej (2.16) od współrzędnych wektora stanu ustalonego i przyrostowego.

Porównanie zależności (3.13) z zależnością (2.17) prowadzi do wniosku, że struktury obu macierzy  $\mathbf{A}_b$  są identyczne. Różnice występują jedynie w ramach podsystemu elektromechanicznego, którego jednoelementowa macierz zależy teraz od parametru  $N_1$ . Łatwo wykazać, że zmodyfikowana wersja zależności (2.19) ma teraz postać:

$$p_{22} > \frac{p_{i11}}{a^2} \left( \frac{a}{N_1 k_\omega} + \frac{N_1 k_\omega}{4a} \right). \quad (3.14)$$

Nierówność ta wraz z nierównością (2.14) tworzy komplet warunków dostatecznych stabilności asymptotycznej układu napędowego w wersji z nieliniowym ogranicznikiem sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątovej. Spełnienie tych warunków dla skończonych, dodatnich wartości parametrów  $a, k_\omega, N_1$  jest możliwe zawsze, o ile element  $p_{i11}$  ma dodatnie skończone wartości.

W analizowanym tu najprostszym przypadku wartość elementu  $p_{i11}$  może być wybierana z dużą swobodą. Łatwo wykazać, że dla podsystemu elektromechanicznego o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{me}(N_1) = \begin{bmatrix} -\frac{N_1 k_\omega}{a} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

funkcję Lapunowa stanowi dowolna forma kwadratowa o macierzy:

$$\mathbf{P}_{me} = [p_{i11}] \quad (3.16)$$

zawierającej dodatni, skończony element  $p_{i11}$ .

Z przedstawionych rozważań wynika, że spełnienie dostatecznych warunków stabilności asymptotycznej (2.14) oraz (3.14) jest dla praktycznych układów zawsze możliwe.

Chociaż w tym prostym przypadku nie jest to wyraźnie widoczne, zachodzi tu rodzaj unifikacji metody rozwiązania problemu z nieliniowym ogranicznikiem i analizowanego w punkcie 2.1 analogicznego przypadku z regulatorem pracującym w obszarze aktywnym. Zasadniczym krokiem na drodze rozwiązania zagadnienia jest znalezienie takiej formy kwadratowej, która jest funkcją Lapunowa dla podsystemu elektromechanicznego. Dalsze postępowanie prowadzące do znalezienia funkcji Lapunowa dla przypadku nieliniowego może być analogiczne do proponowanego w algorytmie 1 w punkcie 2.5. Zasadnicza różnica polega jednak na tym, że macierz stanu podsystemu elektromechanicznego (zależność (3.15)) zawiera teraz zmienny parametr  $N_1$ . Testująca forma kwadratowa powinna gwarantować pomyślny wynik testu Lapunowa dla wszystkich dopuszczalnych wartości tego parametru. Innymi słowy powinna to być wspólna funkcja Lapunowa dla wygenerowanego w ten sposób zbioru macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego. W ogólnym przypadku nie musi to być IFL macierzy wierzchołkowych tego zbioru. Uzasadnia to użycie w zależności (3.16) oznaczenia  $\mathbf{P}_{me}$  dla macierzy tej formy w miejsce oznaczenia  $\mathbf{P}_i$  (zależność (2.11)) stosowanego w rozdziale 2.

Nietrudno wykazać, że dla parametru  $N_1$  określonego nierównościami (3.5) oraz (3.9) zachodzi:

$$\frac{d}{dt} [p_{i11}(\Delta\omega)^2] = -2 \frac{N_1 k_\omega}{a} p_{i11}(\Delta\omega)^2 \leq -2 \frac{N k_\omega}{a} p_{i11}(\Delta\omega)^2. \quad (3.17)$$

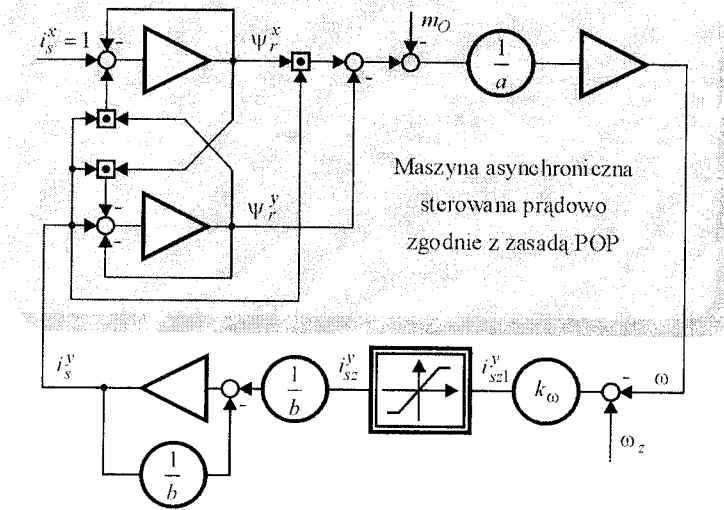
Oznacza to, że dla wartości parametru  $N_1$  według zależności (3.5) i (3.9) szybkość zanikania procesów przejściowych w podsystemie elektromechanicznym jest nie mniejsza niż ta, która występuje w stanie nasycenia regulatora prędkości kątowej. Nie dyskwalifikuje to jednak układu, gdyż stan nasycenia regulatora traktować należy jako rodzaj stanu awaryjnego, w którym utrzymanie wskaźników jakości regulacji nie jest już istotne.

W następnych punktach tego rozdziału analizie poddane będą kolejne, bardziej złożone wersje układów sterowania (zgodnie z zasadą POP). Znalezienie funkcji Lapunowa dla podsystemu elektromechanicznego jest tam zagadnieniem trudniejszym, które w ogólnym przypadku może być rozwiązane przy pomocy technik numerycznych.

### 3.2. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności układu napędowego o sterowaniu zgodnym z zasadą POP w wersji z inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana i nasycającym się regulatorem prędkości kątowej. Analogiczna wersja układu z regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym była analizowana w punkcie 2.3.

Schemat blokowy układu napędowego przedstawiono na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Schemat blokowy układu napędowego z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu P oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Porównując ten schemat ze schematem z rys. 3.1 można zauważyć daleko idące podobieństwo. Zasadnicza różnica polega na tym, że sygnał wyjściowy nieliniowego ogranicznika jest teraz sygnałem zadanym dla obwodu regulacji składowej  $i_s^y$  wektora prądu stojana. Model matematyczny układu jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (3.18a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (3.18b)$$

$$\frac{d}{dt}i_s^y = -\frac{1}{b}i_s^y + \frac{1}{b}i_{sz}^y, \quad (3.18c)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (3.18d)$$

$$i_{sz1}^y = k_\omega(\omega_z - \omega), \quad (3.18e)$$

$$i_{sz}^y = f(i_{sz1}^y). \quad (3.18f)$$

Charakterystyka nieliniowego ogranicznika ma kształt identyczny jak charakterystyka przedstawiona na rys. 3.2. Zmianie uległy jedynie nazwy sygnałów: wejściowego i wyjściowego, którymi teraz są odpowiednio  $i_{sz1}^y$  oraz  $i_{sz}^y$ . Działanie ogranicznika może być opisane następującą zależnością:

$$i_{sz}^y = f(i_{sz1}^y) = \begin{cases} i_{sz1}^y & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ G + N(i_{sz1}^y - G) & \text{dla } i_{sz1}^y \geq G \\ -G + N(i_{sz1}^y + G) & \text{dla } i_{sz1}^y \leq -G \end{cases}, \quad (3.19)$$

gdzie stała  $N$  jest współczynnikiem kierunkowym charakterystyki ogranicznika dla  $|i_{sz1}^y| \geq G$  zgodnie z definicją:

$$N = \frac{di_{sz}^y}{di_{sz1}^y}. \quad (3.20)$$

Podobnie jak w poprzednim punkcie tego rozdziału działanie ogranicznika może być opisane z wykorzystaniem zmiennych przyrostowych i współrzędnych punktu pracy ustalonej w sposób następujący:

$$i_{sz}^y = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega - \Delta\omega)k_\omega = I_{Osz}^y - k_\omega\Delta\omega & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega - \Delta\omega)k_\omega - G] \equiv G - Nk_\omega\Delta\omega & \text{dla } i_{sz1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega - \Delta\omega)k_\omega + G] \equiv -G - Nk_\omega\Delta\omega & \text{dla } i_{sz1}^y \leq -G \end{cases}. \quad (3.21)$$

Przyjmując jak poprzednio, że stała  $N$ , spełniająca zależność (3.5) ma dostatecznie małe wartości, zależność powyższą zapisać można w zwartej postaci jako:

$$i_{sz}^y = I_{Osz}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega, \quad (3.22)$$

przy czym składowa  $I_{Osz}^y$  spełnia nierówność:

$$|I_{Osz}^y| \leq G. \quad (3.23)$$

Parametr  $N_1$  przyjmuje wartości zgodne z zależnościami:

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ N & \text{dla } |i_{sz1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.24)$$

Podstawienie zależności (3.22) do (3.18) pozwala uzyskać model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego w formie pseudoliniowej w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_\omega}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Wektor stanu ustalonego ma natomiast postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O]^T, \quad (3.26)$$

co prowadzi do wniosku, że składowe wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika są zgodne z zasadą POP. Prawdziwa jest również zależność (3.12), z czego wynika, że charakterystyka mechaniczna układu jest taka sama jak przedstawiona na rys. 3.3.

Porównując równanie stanu (3.25) z równaniem (2.44) (właściwym dla pracy regulatora prędkości w zakresie liniowym) oraz z zależnością (2.45b) dochodzimy do wniosku, że oba układy różnią się jedynie podsystemem elektromechanicznym. Wartość elementu  $a_{34}$  macierzy stanu w zależności (3.25) zależy teraz od stanu pracy nieliniowego ogranicznika.

Rozwiązanie problemu poprzedzone zostanie procesem standaryzacji parametrów i współrzędnych wektora stanu w zależności (3.25). W miejsce współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej  $k_{\omega}$  wygodniej jest w dalszych rozważaniach wprowadzić nowy względny współczynnik wzmocnienia, zdefiniowany w sposób następujący:

$$k_{\omega w} = \frac{k_{\omega}}{k_{\omega M}}, \quad (3.27)$$

przy czym wartość odniesienia:

$$k_{\omega M} = \frac{a}{2b}. \quad (3.28)$$

Łatwo wykazać, że zastosowanie w układzie współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega}$  o wartości  $k_{\omega M}$  prowadzi do tego, że wartości własne macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego danej zależnością (2.45b) spełniają zależność:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2b} \pm j \frac{1}{2b} \quad (3.29)$$

i są zgodne z powszechnie stosowanym w technice napędu elektrycznego kryterium modułu [62]. Z porównania zależności (2.44), (2.45b) oraz (3.25) wynika, że takie same wartości własne ma macierz stanu podsystemu elektromechanicznego dla regulatora prędkości pracującego w stanie aktywnym (parametr  $N_1 = 1$ ). Jeżeli ponadto w miejsce współrzędnej  $\Delta\omega$  wektora stanu wprowadzi się nową współrzędną zdefiniowaną jako:

$$\Delta\omega_1 = \frac{a}{2b} \Delta\omega, \quad (3.30)$$

to równanie stanu rozpatrywanej wersji układu napędowego można przedstawić następująco:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega_1 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

W ten sposób zbiór niezależnych parametrów układu został zredukowany do względnej stałej czasowej  $b$  oraz względnego współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ . Ułatwia to znacznie proces analizy, a uzyskane rezultaty czyni bardziej uniwersalnymi.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, do analizy stabilności zastosowana zostanie forma kwadratowa o strukturze macierzy zgodnej z zależnością (2.46), przy czym w miejsce występującej tam stałej  $a$  podstawiona zostanie podwojona wartość względnej stałej czasowej  $b$ . Macierz ta przybiera wówczas postać:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - \frac{p_{i22}}{(2b)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & \frac{p_{i12}}{2b} & \frac{p_{i22}}{2b} \\ 0 & \frac{p_{i12}}{2b} & p_{i11} & p_{i12} \\ 0 & \frac{p_{i22}}{2b} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

i pozostaje dodatnio określona, o ile:

$$p_{22} > \frac{p_{i22}}{(2b)^2}. \quad (3.33)$$

Pochodną funkcji-kandydata na funkcję Lapunowa wyrazić można wówczas zależnością:

$$\frac{d}{dt} V(\Delta\mathbf{x}) = -2(p_{22} - \frac{p_{i22}}{(2b)^2})(\Delta\psi_r^x)^2 + \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y & \Delta i_s^y & \Delta\omega_1 \end{bmatrix} (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega_1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} \\ -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i12}}{2b} & \frac{p_{i22}}{2b} \\ \frac{p_{i12}}{2b} & p_{i11} & p_{i12} \\ \frac{p_{i22}}{2b} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Dobór macierzy testującej formy kwadratowej zgodnie z zależnością (3.32) zapewnia to, że pochodna tej formy (dana zależnością (3.34)) nie zależy od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{41}$  macierzy stanu, które zawierają współrzędne punktu pracy ustalonej i współrzędne przyrostowego wektora stanu.

Zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa warunkiem dostatecznym globalnej, asymptotycznej stabilności układu napędowego przy spełnieniu warunku (3.33) jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony zależności (3.34). Analiza struktur macierzy  $\mathbf{A}_b$  oraz  $\mathbf{P}_b$  prowadzi do wniosku, że do rozwiązania zagadnienia można wykorzystać warunek dostateczny (D2.15) sformułowany w dodatku D2. Pewną trudność w bezpośrednim wykorzystaniu tego warunku stanowi fakt, że macierz podsystemu elektromechanicznego zawiera zależny od punktu pracy parametr  $N_1$ . Można tu jednak wykorzystać opisaną w rozdziale 1 wklęsłość względnego wskaźnika jakości (1.11) i rozpatrzyć jedynie dwuelementowy zbiór macierzy wierzchołkowych utworzony dla skrajnych wartości parametru  $N_1$ :

$$\{\mathbf{A}_{me}(N_1)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{Nk_{\omega w}}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.37)$$

Po dostosowaniu oznaczeń warunek (D2.15) może być zapisany w nieco innej, słabszej formie, jako:

$$p_{22} > \|\mathbf{A}_c\| \|\mathbf{P}_{12}\| + \frac{(\|\mathbf{P}_{12}\| + \|\mathbf{A}_c\| \|\mathbf{P}_{me}\| + \|\mathbf{P}_{12}\| \max\{\|\mathbf{A}_{me}(N_1)\|\})^2}{4v_{me} |\operatorname{real}[\lambda_M \{\mathbf{A}_{me}(N_1)\}]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_{me})}, \quad (3.38)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2b} \end{bmatrix}^T, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{p_{i12}}{2b} & \frac{p_{i22}}{2b} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Symbol  $\lambda_M \{ \}$  oznacza dominującą (posiadającą największą część rzeczywistą) wartość własną w zbiorze macierzy wierzchołkowych  $\{\mathbf{A}_{me}(N_1)\}$ . Występujący w zależności (3.38) wskaźnik jakości  $v_{me}$  jest natomiast wskaźnikiem doboru formy kwadratowej o macierzy  $\mathbf{P}_{me}$  do zbioru macierzy  $\{\mathbf{A}_{me}(N_1)\}$  danego zależnością (3.37). Wspomniane osłabienie warunku związane jest z tym, że w miejsce normy euklidesowej sumy macierzy użyto sumy norm, co prowadzi w efekcie do większych wymaganych wartości elementu  $p_{22}$ .

Zauważmy dalej, że o ile względny wskaźnik jakości spełnia dla zbioru macierzy podsystemu elektromechanicznego (3.37) nierówność:

$$v_{me} > 0, \quad (3.42)$$

to dla praktycznych układów napędowych i skończonej wartości normy macierzy  $\mathbf{P}_{me}$  prawa strona nierówności (3.38) przybiera wartości skończone. Przy spełnieniu wyżej opisanych warunków znalezienie takiego elementu  $p_{22}$ , którego wartości spełniają równocześnie nierówności (3.33) i (3.38) jest więc zawsze możliwe. Tym samym istnieje w tych warunkach dodatnio określona forma kwadratowa o macierzy (3.32), gwarantująca pomyślny wynik testu Lapunowa.

Reasumując powyższe rozważania można stwierdzić, że zagadnieniem podstawowym przy rozstrzygnięciu problemu stabilności układu jest znalezienie takiej dodatnio określonej formy kwadratowej o macierzy  $\mathbf{P}_{me}$ , która gwarantuje pomyślny wynik testu Lapunowa dla całego zbioru macierzy  $\{\mathbf{A}_{me}(N_1)\}$ . Innymi słowy, należy znaleźć taką formę kwadratową, której wskaźnik jakości spełnia nierówność (3.42) dla zbioru macierzy danego zależnością (3.37). Przy określaniu takiej formy kwadratowej, bez utraty ogólności prezentowanych rozważań, w miejsce zbioru macierzy  $\{\mathbf{A}_{me}(N_1)\}$  określonego zależnością (3.37) wygodniej jest rozpatrywać zbiór:

$$\{\mathbf{A}_{me1}(N_1)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -Nk_{\omega w} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -k_{\omega w} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.43)$$

Równoważność obu zbiorów względem wskaźnika jakości  $v_{me}$  wynika z zależności (1.31), a jej zasadność została opisana w rozdziale 1. Dzięki takiej modyfikacji znika natomiast konieczność analizy układu dla różnych wartości stałej czasowej  $b$ . Występujące w rozpatrywanym zbiorze macierze różnią się jedynie wartościami elementu  $a_{12}$ , co znacznie upraszcza proces określenia funkcji Lapunowa dla zbioru macierzy (3.43).

Przy wyznaczaniu funkcji Lapunowa posłużono się opracowanym przez autora modulem programowym pracującym w środowisku MATLAB, opisanym w rozdziale 1. W efekcie uzyskano wspólną funkcję Lapunowa w postaci:

$$P_{me} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 \\ 1,0000 & 2,0001 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

która zapewnia dodatnią wartość wskaźnika jakości  $v_{me}$  dla zbioru macierzy:

$$\{A_{me1}(N_1)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -0,0001 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2,0 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.45)$$

Uzyskana dla tego zbioru wartość wskaźnika jakości z bardzo dobrym przybliżeniem osiąga wartość jednostkową. Wynika stąd, że funkcja Lapunowa o macierzy (3.44) należeć musi do zbioru IFL jednej z macierzy zbioru (3.45). Ponieważ wartości własne tych macierzy spełniają zależność:

$$\begin{aligned} \text{eig}\{A_{me1}(N_1)\} &= \\ &= \{\lambda_{11} = -0,0001 \quad \lambda_{12} = -0,9999, \lambda_{21} = -0,5 + 0,866j \quad \lambda_{22} = -0,5 - 0,866j\}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

to możliwe jest to tylko wówczas, gdy jest to IFL macierzy układu z nasyconym regulatorem prędkości kątowej. Wynika stąd, że szybkość zanikania procesów przejściowych dla zbioru (3.43) jest nie mniejsza niż ta, która występuje w stanie nasycenia regulatora prędkości kątowej.

Należy podkreślić, że z wklęsłości wskaźnika jakości  $v_{me}$  względem zbioru macierzy wynika, że forma kwadratowa o macierzy (3.44) jest jednocześnie funkcją Lapunowa dla dowolnej macierzy leżącej w przestrzeni jej elementów, na odcinku prostej łączącym punkty wyznaczone przez elementy macierzy zbioru (3.45). Warto też przypomnieć, że istnienie wspólnej dla tak rozumianego zbioru funkcji Lapunowa gwarantuje stabilność układu przy dowolnie szybkich zmianach wartości parametru  $N_1$  w granicach określonych przez zależność (3.24). Praktycznie

oznacza to, że zastosowany ogranicznik nie musi charakteryzować się „ostrym przejściem” ze stanu aktywnego do stanu nasycenia. Uwaga ta może mieć praktyczne znaczenie przy projektowaniu ograniczników sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątowej.

Uzyskany dopuszczalny zakres zmienności wartości elementu  $a_{12}$  macierzy w zbiorze (3.43) (który może być interpretowany jako nowy, względny współczynnik wzmocnienia regulatora) wynosi:

$$0,0001 \leq a_{12} \leq 2 \quad (3.47)$$

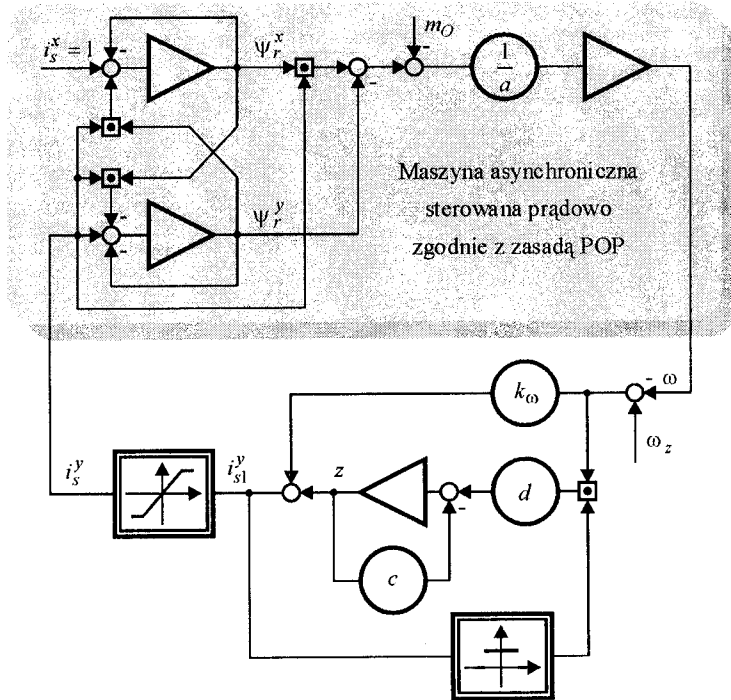
i wydaje się w pełni zaspokajać nawet najwyższe wymagania. Z zależności (3.27), (3.28) oraz (3.43) i (3.45) wynika bowiem, że  $0,0001 \leq k_{\omega w} \leq 2$ , przy czym przypadek  $k_{\omega w} = 1$  odpowiada wymiarowaniu regulatora prędkości kątowej zgodnie z kryterium modułu. Zwiększanie wartości współczynnika wzmocnienia powyżej wartości 2 wydaje się niecelowe z uwagi na wzrost przeregulowania w podsystemie elektromechanicznym, co potwierdzają wartości własne dane zależnością (3.46).

Reasumując, zaprezentowane rezultaty pozwalają sformułować następujący wniosek: układ regulacji z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej i inercyjnym modelem obwodu regulacji prądu stojana zachowuje globalną stabilność asymptotyczną również przy uwzględnieniu efektu nasycenia regulatora prędkości kątowej, o ile współczynnik wzmocnienia regulatora w stanie aktywnym pozostaje w wystarczająco dużym (z praktycznego punktu widzenia) otoczeniu wartości zgodnych z kryterium modułu.

### 3.3. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności układu napędowego sterowanego według zasady POP, wyposażonego w *proporcjonalno-inercyjno-różniczkowy* (PIR) regulator prędkości kątowej. W powszechnie znanej literaturze z zakresu automatyki [58] określenie takie nie jest, co prawda stosowane, jednak, zdaniem autora, oddaje ono trafnie istotę działania takiego regulatora. W regulatorze takim zachodzą bowiem wszystkie wymienione w nazwie operacje matematyczne. Działanie regulatora typu PIR podobne jest do działania *członu korekcyjnego opóźniającego fazę* [58]. Stosowanie, w ramach pracy, określenia *regulator PIR* przyjęto z uwagi na spójność i prostotę wyrażań.

Model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego z regulatorem PIR sformułowany został w dodatku D1.6. Tam też wykazano, że przy odpowiednim doborze parametrów regulatora typu PIR układ napędowy może mieć właściwości statyczne i dynamiczne bardzo zbliżone do wersji z regulatorem typu PI. Analiza układu z nasycającym się regulatorem typu PI jest trudna. Wynika to stąd, że zastosowanie w praktyce systemu antynasyceniowego (ARW) (ang. anti-reset-windup) [11, 39, 83] w przypadku klasycznego regulatora typu PI powoduje nie tylko zmianę wartości poszczególnych parametrów regulatora, ale prowadzi również do zmiany rzędu macierzy stanu układu. Stosowanie systemu antynasyceniowego jest zaś niezbędne, ponieważ zabezpiecza on układ przed kumulowaniem się uchybu regulacji w części całkującej regulatora w stanie nasycenia. W konsekwencji, proces nasycenia regulatora prędkości kątovej ma charakter ściśle kontrolowany. Brak systemu ARW prowadziłby do znacznych przeregulowań w układzie, zwłaszcza w procesie wychodzenia regulatora prędkości kątovej ze stanu nasycenia [11].



**Rys. 3.5.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątovej typu PIR wyposażonym w system ARW oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Analiza stabilności układu wyposażonego w regulator prędkości kątovej typu PIR nie stwarza problemów związanych ze zmianą rzędu macierzy stanu układu. Struktura modelu matematycznego układu pozostaje niezmienna. Przy przejściu ze stanu aktywnego w stan nasycenia (lub odwrotnie) regulatora zmieniają się jedynie wartości parametrów układu.

Schemat blokowy układu przedstawiony jest na rys. 3.5.

Model matematyczny układu napędowego z regulatorem prędkości kątovej typu PIR oraz systemem ARW utworzyć można wykorzystując sformułowany w dodatku D1.6 model matematyczny analogicznej wersji układu z aktywnym regulatorem prędkości kątovej. Przy wykorzystaniu zależności (D1.50a)-(D1.50e), w jednostkach względnych, model ten przybiera następującą postać:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (3.47a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (3.47b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (3.47c)$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz + d(\omega_z - \omega) f_1(i_{s1}^y), \quad (3.47d)$$

$$i_{s1}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z, \quad (3.47e)$$

$$i_s^y = f(i_{s1}^y). \quad (3.47f)$$

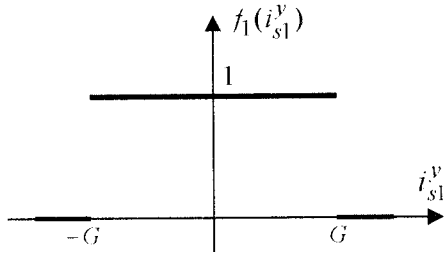
Nieliniowa zależność (3.47f) ma opis zgodny z zależnością (3.2). Charakterystykę ogranicznika przedstawiono na rys. 3.2.

Występująca w zależności (3.47d) nieliniowa funkcja  $f_1(i_{s1}^y)$  opisana jest zależnością:

$$f_1(i_{s1}^y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ 0 & \text{dla } |i_{s1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.48)$$

Nieliniowy blok realizujący tę funkcję pełni rolę układu ARW, zapobiegającego kumulacji uchybu regulacji prędkości kątovej w części inercyjnej regulatora PIR.

Jest to szczególnie ważne w sytuacji, gdy zarówno współczynnik wzmocnienia regulatora jak i jego inercyjna stała czasowa mają duże wartości. Jak opisano wcześniej, ma to miejsce wówczas, gdy właściwości regulatora PIR zbliżone są do właściwości regulatora PI. Charakterystyka elementu nieliniowego realizującego zależność (3.48) przedstawiona jest na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Charakterystyka elementu realizującego nieliniową funkcję  $f_1(i_{sl}^y)$

Warto zauważyć, że zależności (3.47a)-(3.47c) mają identyczną postać jak zależności (D1.50a)-(D1.50c), opisujące zachowanie się układu z regulatorem PIR pracującym w zakresie liniowym. Łatwo w związku z tym wykazać, że wektor stanu ustalonego ma postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_O \quad Z_O]^T, \quad (3.49)$$

z czego wynika, że składowe wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika są zgodne z zasadą POP w stanie aktywnym i w stanie nasycenia regulatora. Z zależności (3.47c) wynika także, że dla obu tych stanów prawdziwa jest zależność:

$$M_O = I_{Os}^y. \quad (3.50)$$

Rozpatrzmy bliżej zachowanie się regulatora PIR w stanie aktywnym i w stanie nasycenia. Z zależności (3.47d) wynika, że w stanie ustalonym zmienna stanu regulatora spełnia zależność:

$$Z_O = \begin{cases} \frac{d}{c}(\Omega_z - \Omega_O) & \text{dla } |I_{Os1}^y| < G \\ 0 & \text{dla } |I_{Os1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.51)$$

Składową  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana opisać można, w stanie ustalonym, następującą zależnością:

$$I_{Os}^y = f(I_{Os1}^y) = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega_O)k_\omega + Z_O & \text{dla } |I_{Os1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega_O)k_\omega - G] & \text{dla } I_{Os1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega_O)k_\omega + G] & \text{dla } I_{Os1}^y \leq -G \end{cases}. \quad (3.52)$$

Stała  $N$  zdefiniowana została zależnością (3.3), a jej wartości spełniają nierówność (3.5). Z powyższych zależności wynika, że dla wystarczająco małych wartości stałej  $N$  składowa  $I_{Os}^y$  z dobrym przybliżeniem spełnia nierówność (3.6).

Wykorzystując zależność (3.51) oraz (3.52) można wyznaczyć również zależność prędkości kątowej od momentu zewnętrznego na wale maszyny w stanie ustalonym:

$$\Omega_O = \begin{cases} \Omega_z - \frac{M_O}{k_\omega + \frac{d}{c}} & \text{dla } |I_{Os1}^y| < G \\ \Omega_z + \frac{G(1-N)}{k_\omega N} - \frac{M_O}{k_\omega N} & \text{dla } I_{Os1}^y \geq G \\ \Omega_z - \frac{G(1-N)}{k_\omega N} - \frac{M_O}{k_\omega N} & \text{dla } I_{Os1}^y \leq -G \end{cases}. \quad (3.53)$$

Charakterystyki mechaniczne opisane powyższą zależnością różnią się od charakterystyki mechanicznej z rys. 3.3 jedynie współczynnikiem kierunkowym w obszarze aktywnym regulatora PIR. Charakterystyki mechaniczne układu z regulatorem PIR mogą mieć tym mniejszą uścipliwłość, im większe wartości przybiera iloraz parametru  $d$  do parametru  $c$  regulatora. W przypadku granicznym, gdy wartości tego ilorazu dążą do nieskończoności, uścipliwłość charakterystyk spada do zera analogicznie jak przy zastosowaniu regulatora typu PI.

W stanach przejściowych zmienna stanu regulatora może być opisana następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d}{dt}\Delta z = \begin{cases} d(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega) - c(Z_O + \Delta z) = -c\Delta z - d\Delta\omega & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ -c\Delta z & \text{dla } |i_{s1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.54)$$

W zwartej formie zależność ta może być również zapisana w postaci:

$$\frac{d}{dt}\Delta z = -c\Delta z + N_2 d \Delta \omega, \quad (3.55)$$

gdzie parametr  $N_2$ :

$$N_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ 0 & \text{dla } |i_{s1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.56)$$

Składowa  $i_s^y$  wektora prądu stojana w stanach przejściowych opisana jest następującą zależnością:

$$i_s^y = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z = I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z - G] \equiv G - Nk_\omega \Delta\omega + N\Delta z & \text{dla } i_{s1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z + G] \equiv -G - Nk_\omega \Delta\omega + N\Delta z & \text{dla } i_{s1}^y \leq -G \end{cases} \quad (3.57)$$

przy czym występujący tu znak przybliżenia wynika jedynie z przybliżonego określenia składowej  $i_s^y$  w stanie ustalonym. Zależność ta może być równoważnie zapisana w postaci:

$$i_s^y = I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega + N_1 \Delta z, \quad (3.58)$$

przy czym składowa  $I_{Os}^y$  spełnia nierówność (3.6), a parametr  $N_1$  przyjmować może następujące wartości:

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{s1}^y| < G \\ N & \text{dla } |i_{s1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.59)$$

Wykorzystanie powyższych zależności umożliwia utworzenie modelu matematycznego układu regulacji z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu PIR w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega + N_1 \Delta z & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega + N_1 \Delta z) & -1 & 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta\omega + N_1 \Delta z}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{N_1 k_\omega}{a} & \frac{N_1}{a} \\ 0 & 0 & -N_2 d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Porównanie tego równania stanu z równaniem (2.25), przy uwzględnieniu zależności (2.26b), prowadzi do wniosku, że zmianie uległy jedynie elementy  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu oraz macierz  $A_{me}$  podsystemu elektromechanicznego. Sugeruje to, że w procesie analizy stabilności układu używać można tej samej metody jak dla przypadku, gdy regulator prędkości kątowej typu PI pracował w obszarze aktywnym.

Podobnie jak w poprzednim punkcie tego rozdziału rozwiązanie problemu poprzedzone zostanie standaryzacją macierzy stanu w zależności (3.60), której celem jest zredukowanie liczby niezależnych parametrów układu. Nadaje to prowadzonym rozważaniom cechy pewnej uniwersalności. Wprowadzenie w miejsce współrzędnej  $\Delta\omega$  wektora stanu nowej współrzędnej:

$$\Delta\omega_1 = a\Delta\omega, \quad (3.61)$$

oraz nowych, względnych parametrów regulatora PIR zdefiniowanych jako:

$$k_{\omega w} = \frac{k_\omega}{a}, \quad (3.62a)$$

$$d_w = \frac{d}{a} \quad (3.62b)$$

umożliwia przedstawienie równania stanu układu w formie:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1 + N_1 \Delta z & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1 + N_1 \Delta z) & -1 & 0 & 0 \\ I_{Os}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1 + N_1 \Delta z & -1 & -N_1 k_{\omega w} & N_1 \\ 0 & 0 & -N_2 d_w & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Z rozważań przedstawionych w punkcie 2.2 oraz z porównania macierzy stanu w powyższej zależności z macierzą stanu w zależności (2.25) wynika, że do testowania stabilności układu można użyć formy kwadratowej o macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{22} - p_{i11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{i11} & p_{i12} \\ 0 & p_{i11} & p_{i11} & p_{i12} \\ 0 & p_{i12} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Łatwo zauważyć, że jest to macierz o strukturze zgodnej z macierzą (2.28), w której przyjęto, że stała  $a$  posiada wartość jednostkową. Można wykazać, iż jeżeli macierz:

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

jest dodatnio określona, to macierz (3.64) pozostaje również dodatnio określona, jeśli:

$$p_{22} > p_{i11} > 0. \quad (3.66)$$

Obliczana wzdłuż trajektorii systemu (3.63) pochodna funkcji-kandydata na funkcję Lapunowa (o macierzy (3.64)) ma wówczas postać:

$$\frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = -2(p_{22} - p_{i11})(\Delta \psi_r^x)^2 + \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y & \Delta \omega_1 & \Delta z \end{bmatrix} (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -N_1 k_{\omega w} & N_1 \\ 0 & -N_2 d_w & -c \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i11} & p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i12} & p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Podobnie, jak w poprzednio rozpatrywanych przypadkach, pochodna (3.67) nie zależy od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu zawierających współrzędne punktu pracy ustalonej i wektora stanu przyrostowego. Zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa warunkiem dostatecznym stabilności globalnej układu, przy spełnieniu warunku (3.66), jest ujemna określoność drugiego składnika prawej strony zależności (3.67).

Zastosujmy do rozwiązania zadania metodę analogiczną do zastosowanej w poprzednim punkcie tego rozdziału. Z uwagi na zmienność parametrów  $N_1$  oraz  $N_2$  podsystem elektromechaniczny reprezentowany jest teraz dwuelementowym zbiorem macierzy danym zależnością:

$$\{\mathbf{A}_{me}(N_1, N_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -N k_{\omega w} & N \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -k_{\omega w} & 1 \\ -d_w & -c \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.70)$$

Warto podkreślić, że liczba elementów powyższego zbioru ograniczona jest do dwóch, dlatego że wartości obu zmiennych parametrów  $N_1$  i  $N_2$  zależą od tej samej składowej  $i_{s1}^y$  wektora prądu stojana. Zmiana wartości tych parametrów zachodzi więc jednocześnie. Zauważmy ponadto, że obie macierze zbioru (3.70) dla dowolnych wartości dodatnich parametrów  $c$ ,  $d_w$ ,  $k_{\omega w}$  oraz  $N$  regulatora

prędkości kątowej są stabilne. Spełniony jest tym samym warunek konieczny pomysłowego rezultatu testu Lapunowa.

Tak jak w poprzednim punkcie, do określenia wartości elementu  $p_{22}$  macierzy (3.64) można wykorzystać warunek (3.38), przy czym występujące tam macierze zdefiniowane są teraz w sposób następujący:

$$\mathbf{A}_c = [-1 \quad 0]^T, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{P}_{12} = [p_{i12} \quad p_{i22}], \quad (3.72)$$

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} \\ p_{i12} & p_{i22} \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, dla praktycznych układów napędowych można zawsze znaleźć element  $p_{22}$  macierzy (3.64) o dodatniej skończonej wartości, o ile wskaźnik jakości  $v_{me}$  doboru formy kwadratowej o macierzy (3.73) do podsystemu elektromechanicznego (danego zbiorem macierzy (3.70)) spełnia nierówność:

$$v_{me} > 0. \quad (3.74)$$

Jak widać, również w tym przypadku kluczowe znaczenie ma właściwy dobór funkcji Lapunowa do podsystemu elektromechanicznego.

Rozstrzygnięcie problemu istnienia funkcji Lapunowa dla tego podsystemu poprzedzone zostanie analizą właściwości dynamicznych układu w zależności od wartości parametrów regulatora PIR.

Ponieważ regulator prędkości kątowej typu PIR ma trzy niezależne parametry  $c$ ,  $d_w$  oraz  $k_{\omega w}$ , spróbujmy ocenić dla jakich wartości tych parametrów dalsza analiza ma istotne, praktyczne znaczenie. Za punkt wyjścia do tej oceny przyjęto założenie, że decydujące znaczenie ma ocena właściwości układu w sytuacji, gdy regulator prędkości kątowej pracuje w stanie aktywnym. Stan nasycenia regulatora można uważać za rodzaj stanu awaryjnego, w którym jedynym wymaganiem jest zachowanie stabilności układu. W świetle przeprowadzonych wcześniej rozważań przyjmijmy, że rozpatrywane będą dalej tylko przypadki, gdy właściwości regulatora typu PIR zbliżone są do właściwości regulatora typu PI. Druga macierz w zbiorze (3.70), reprezentująca stan aktywny regulatora PIR, staje się dla  $c \rightarrow 0$ , identyczna jak macierz stanu podsystemu elektromechanicznego z aktywnym regulatorem PI i przybiera postać:

$$\mathbf{A}_{mePI} = \begin{bmatrix} -k_{\omega w} & 1 \\ -d_w & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Rozpatrzmy na wstępie, w jaki sposób wartości parametrów  $d_w$  oraz  $k_{\omega w}$  regulatora PI wpływają na właściwości dynamiczne takiego podsystemu elektromechanicznego. Większą uniwersalność dalszej analizy uzyskać można rozpatrując wartości własne macierzy:

$$\mathbf{A}_{mePI1} = \frac{\mathbf{A}_{mePI}}{k_{\omega w}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{k_{\omega w}} \\ -\frac{d_w}{k_{\omega w}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI1}$  spełniają równanie charakterystyczne:

$$\lambda(\lambda + 1) + \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = \lambda^2 + \lambda + \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0, \quad (3.77)$$

którego pierwiastkami są:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}. \quad (3.78)$$

Wyróżnik  $\Delta$  równania charakterystycznego spełnia natomiast zależność:

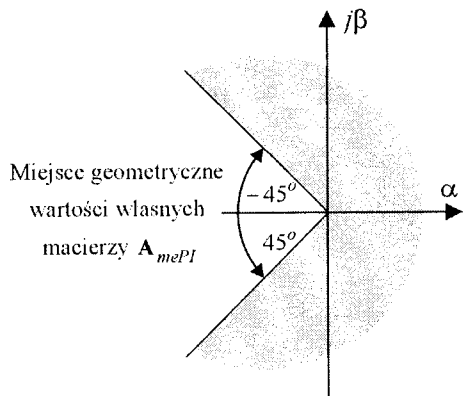
$$\Delta = 1 - 4 \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2}. \quad (3.79)$$

Standardowe kryteria doboru nastaw regulatorów w układach napędowych gwarantują na ogół ograniczoną wartość przeregulowania odpowiedzi na skokowy sygnał zadany. Jeżeli ograniczyć się w dalszych rozważaniach do analizy tylko takich przypadków, dla których przeregulowanie w układzie nie jest większe od tego, które wynika ze zwymiarowania regulatora PI zgodnie z kryterium modułu (tj. ok. 4%) [62], to parametry regulatora muszą spełniać nierówność:

$$\frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.80)$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI1}$  oraz  $\mathbf{A}_{mePI}$  spełniają zależność [70]:

$$\lambda(\mathbf{A}_{mePI}) = k_{\omega w} \lambda(\mathbf{A}_{mePI1}). \quad (3.81)$$



**Rys. 3.7.** Usytuowanie wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_{mePI}$  przy spełnieniu nierówności (3.80)

Wynika stąd, że przy spełnieniu warunku (3.80) wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI}$ , dla dowolnej dodatniej wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora, leżą na płaszczyźnie zespolonej  $(\alpha, j\beta)$  w obszarze przedstawionym na rys. 3.7. Współrzędna  $\alpha$  oznacza część rzeczywistą a współrzędna  $\beta$  część urojoną wartości własnej.

Przeanalizujemy teraz, w jakiej relacji do tak umiejscowionych wartości własnych macierzy stanu układu z regulatorem PI usytuowane będą, przy ograniczonych wartościach parametru  $c$ , wartości własne macierzy stanu układu

z regulatorem typu PIR. Załóżmy, że wartość tego parametru jest określona przez zależność:

$$c = N\gamma k_{\omega w}, \quad (3.82)$$

przy czym stała  $\gamma$  spełnia nierówność:

$$0 < \gamma < 1. \quad (3.82a)$$

Spełnienie warunku (3.82) nie powinno w praktyce sprawiać kłopotów, ponieważ stała  $N$  jest swobodnym parametrem układu, a jej wartość może być arbitralnie ustalana przez konstruktora. Poddaną modyfikacji zgodnej z zależnością (3.76) macierz stanu podsystemu elektromechanicznego z aktywnym regulatorem typu PIR (druga macierz w zbiorze (3.70)) można wówczas przedstawić jako:

$$\mathbf{A}_{mePIR1} = \frac{\mathbf{A}_{mePIR}}{k_{\omega w}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{d_w}{k_{\omega w}} & -N\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Równanie charakterystyczne tej macierzy ma postać:

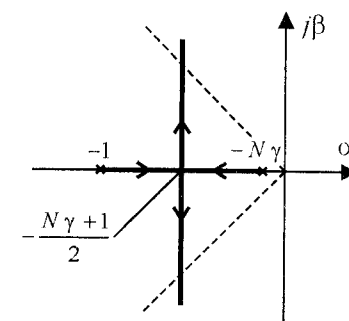
$$(\lambda + N\gamma)(\lambda + 1) + \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = \lambda^2 + \lambda(1 + N\gamma) + N\gamma + \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0. \quad (3.84)$$

Z uwagi na to, że stała  $N$  spełnia zależność (3.3), możemy przypuszczać, że jej wpływ na wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  będzie ograniczony. Tezę tę potwierdza również to, że ślady macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  oraz  $\mathbf{A}_{mePI}$  różnią się jedynie o iloczyn  $N\gamma$ . Z teorii macierzy [8, 16, 116] wiadomo, że o tę samą wartość różnić się będą sumy wartości własnych obu macierzy. Do oceny położenia miejsc zerowych wielomianów charakterystycznych (3.77) oraz (3.84) na płaszczyźnie zespolonej  $(\alpha, j\beta)$  można posłużyć się również ogólnie znaną metodą linii pierwiastkowych Evansa [115]. Łatwo można bowiem wykazać, że wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  są identyczne, jak miejsca zerowe mianownika transmitancji:

$$G_z(s) = \frac{\frac{d_w}{(k_{\omega w})^2(s+1)(s+N\gamma)}}{1 + \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2(s+1)(s+N\gamma)}}. \quad (3.85)$$

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  przemieszczają się więc wzdłuż linii przedstawionych na rys. 3.8 w miarę wzrostu wartości ilorazu  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2}$ , zgodnie

z kierunkiem strzałek. Punktami startowymi dla  $S=0$  są punkty na osi odciętych  $\alpha = -1$  oraz  $\alpha = -N\gamma$ . Z analizy równań (3.77) oraz (3.84) wynika ponadto, że dla zespolonych wartości własnych stopień stabilności układu z regulatorem typu PIR jest o  $\frac{N\gamma}{2}$  większy niż w przypadku regulatora typu PI. Ponieważ jednak stała  $N$  spełnia nierówność (3.5), wzrost ten jest na ogół symboliczny. Należy ponadto podkreślić, że na rys. 3.8 przedstawiono jedynie sposób przemieszczania się wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  bez podania odpowiadających im wartości ilorazu  $S$ . Porównanie układów z regulatorem typu PI oraz PIR



**Rys. 3.8.** Położenie wartości własnych macierzy  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  (zależność (3.83)) w zależności od wartości ilorazu  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2}$

z tego punktu widzenia wskazuje na nieco większe różnice pomiędzy nimi. W tabeli 3.1 podane są wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI1}$  oraz  $\mathbf{A}_{mePIR1}$  obliczone dla obu wersji układów przy różnych wartościach iloczynu  $N\gamma$ . Z oczywistych powodów, w przypadku pary zespolonych wzajemnie sprzężonych wartości własnych, podana jest tylko jedna z nich.

Tabela 3.1

Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI1}$  oraz  $\mathbf{A}_{mePIR1}$

| $S = \frac{d_w}{(k_{ow})^2}$ | $N\gamma = 0$ (PI)     | $N\gamma = 0,1$ (PIR)  | $N\gamma = 0,05$ (PIR) | $N\gamma = 0,01$ (PIR) |
|------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                              | $\lambda_1, \lambda_2$ | $\lambda_1, \lambda_2$ | $\lambda_1, \lambda_2$ | $\lambda_1, \lambda_2$ |
| 0                            | 0,000, -1,000          | -0,100, -1,000         | -0,050, -1,000         | -0,010, -1,000         |
| 0,05                         | -0,053, -0,947         | -0,159, -0,941         | -0,106, -0,944         | -0,063, -0,947         |
| 0,10                         | -0,113, -0,887         | -0,229, -0,871         | -0,171, -0,879         | -0,124, -0,886         |
| 0,15                         | -0,184, -0,816         | -0,321, -0,779         | -0,250, -0,800         | -0,197, -0,813         |
| 0,20                         | -0,276, -0,724         | -0,500, -0,600         | -0,365, -0,685         | -0,293, -0,717         |
| 0,25                         | -0,500, -0,500         | -0,550+0,218j          | -0,525+0,156j          | -0,505+0,071j          |
| 0,30                         | -0,500+0,224j          | -0,550+0,312j          | -0,525+0,273j          | -0,505+0,235j          |
| 0,35                         | -0,500+0,316j          | -0,550+0,384j          | -0,525+0,353j          | -0,505+0,324j          |
| 0,40                         | -0,500+0,387j          | -0,550+0,444j          | -0,525+0,418j          | -0,505+0,394j          |
| 0,45                         | -0,500+0,447j          | -0,550+0,498j          | -0,525+0,474j          | -0,505+0,453j          |
| 0,50                         | -0,500+0,500j          | -0,550+0,545j          | -0,525+0,524j          | -0,505+0,505j          |
| 0,55                         | -0,500+0,548j          | -0,550+0,589j          | -0,525+0,569j          | -0,505+0,552j          |
| 0,60                         | -0,500+0,592j          | -0,550+0,631j          | -0,525+0,612j          | -0,505+0,596j          |
| 0,65                         | -0,500+0,633j          | -0,550+0,669j          | -0,525+0,651j          | -0,505+0,636j          |
| 0,70                         | -0,500+0,671j          | -0,550+0,705j          | -0,525+0,689j          | -0,505+0,675j          |

Porównanie zaprezentowanych w tabeli rezultatów prowadzi do wniosku, że dla tych samych wartości ilorazu  $S$  wartości własne (pomimo że leżą zawsze na łamanej przedstawionej na rys. 3.8) mogą się różnić w zależności od wartości iloczynu  $N\gamma$ . Jeżeli za miarę wrażliwości przyjąć stopień stabilności podsystemu elektromechanicznego, to większa wrażliwość tego podsystemu występuje dla  $S \leq 0,25$ . Dla  $S > 0,25$  wrażliwość ta maleje. Z tabeli 3.1 wynika, że dla  $0,25 < S \leq 0,7$  części rzeczywiste wartości własnych macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego z regulatorem PIR różnią się od części rzeczywistych wartości własnych tego podsystemu z regulatorem PI nie więcej niż o  $\frac{N\gamma}{2}$ . Porówny-

walne wartości części urojonych (decydujących o wielkości przeregulowania) tych wartości własnych (dla  $S > 0,25$ ) mogą być osiągnięte poprzez odpowiednią korektę ilorazu  $S$ , zależnie od wartości iloczynu  $N\gamma$ .

Z zaprezentowanej analizy (przy uwzględnieniu zależności (3.82)) wynika, że dla odpowiednio małych wartości parametru  $c$  możliwe jest uzyskanie takiego stanu układu, w którym właściwości dynamiczne podsystemu elektromechanicznego z regulatorem PIR będą dostatecznie zbliżone do właściwości układu z regulatorem typu PI.

Powróćmy teraz do głównego wątku rozważań. Jak to wyjaśniono wcześniej, warunkiem dostatecznym stabilności globalnej rozpatrywanej wersji układu napędowego jest istnienie wspólnej funkcji Lapunowa dla zbioru macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego danego zależnością (3.70). Uwzględniając, że parametr  $c$  regulatora typu PIR dany jest zależnością (3.82), zbiór ten można równoważnie zapisać jako:

$$\{\mathbf{A}_{me}(N_1, N_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -Nk_{ow} & N \\ 0 & -N\gamma k_{ow} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -k_{ow} & 1 \\ -d_w & -N\gamma k_{ow} \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.86)$$

Znalezienie wspólnej funkcji Lapunowa dla tego zbioru może być, oczywiście, rozwiązywane na drodze numerycznej. Łatwo się jednak przekonać, że w tym prostym przypadku zadowalające rezultaty uzyskać można również dobierając testującą formę kwadratową z macierzą diagonalną o postaci:

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} p_{i11} & 0 \\ 0 & \frac{p_{i11}}{d_w} \end{bmatrix}, \quad p_{i11} > 0. \quad (3.87)$$

Symetryczna macierz pochodnej tej formy kwadratowej obliczanej wzdłuż trajektorii podsystemu elektromechanicznego z aktywnym regulatorem PIR (druga macierz w zbiorze (3.86)) ma postać:

$$\mathbf{Q}_{akt} = - \left( \begin{bmatrix} -k_{ow} & 1 \\ -d_w & -N\gamma k_{ow} \end{bmatrix}^T \mathbf{P}_{me} + \mathbf{P}_{me} \begin{bmatrix} -k_{ow} & 1 \\ -d_w & -N\gamma k_{ow} \end{bmatrix} \right) = \quad (3.88)$$

$$= \begin{bmatrix} 2k_{ow}p_{i11} & 0 \\ 0 & 2\frac{N\gamma k_{ow}p_{i11}}{d_w} \end{bmatrix}$$

i pozostaje dodatnio określona dla dowolnych dodatnich wartości parametrów regulatora PIR. Pozostaje więc do zbadania, czy forma kwadratowa o macierzy (3.87) jest również funkcją Lapunowa dla układu z nasyconym regulatorem przed-

kości kątowej typu PIR. Taki stan układu reprezentowany jest przez pierwszą w zbiorze (3.86) macierz stanu. Macierz formy kwadratowej pochodnej formy testującej obliczanej wzdłuż trajektorii układu ma postać:

$$\mathbf{Q}_{nas} = - \left[ \begin{array}{cc} -Nk_{\omega w} & N \\ 0 & -N\gamma k_{\omega w} \end{array} \right]^T \mathbf{P}_{me} + \mathbf{P}_{me} \left[ \begin{array}{cc} -Nk_{\omega w} & N \\ 0 & -N\gamma k_{\omega w} \end{array} \right] = \quad (3.89)$$

$$= \begin{bmatrix} 2Nk_{\omega w} p_{i11} & -Np_{i11} \\ -Np_{i11} & 2 \frac{N\gamma k_{\omega w} p_{i11}}{d_w} \end{bmatrix}$$

i, jak łatwo sprawdzić, pozostaje dodatnio określona, jeżeli:

$$\frac{d_w}{\gamma(k_{\omega w})^2} = \frac{S}{\gamma} < 4. \quad (3.90)$$

Jeżeli przyjąć, że w praktycznych układach napędowych wartości ilorazu  $S$  spełniają zależność (3.80), to nierówność powyższa spełniona będzie, jeżeli:

$$\gamma > \frac{1}{8}. \quad (3.91)$$

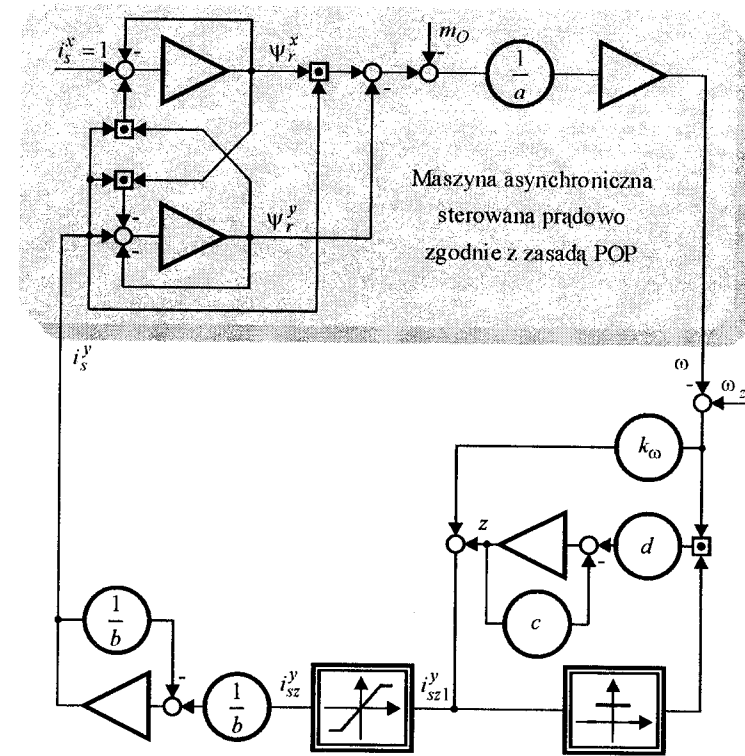
Z powyższych rozważań wynika, że istnieje niepusty zbiór wartości parametrów regulatora prędkości kątowej typu PIR, dla którego forma kwadratowa o macierzy (3.87) jest funkcją Lapunowa podsystemu elektromechanicznego, tak w stanie aktywnym, jak w stanie nasycenia tego regulatora. Granice tego zbioru w przestrzeni parametrów określone są przez możliwość jednoczesnego spełnienia nierówności (3.80) i (3.90) przy uwzględnieniu zależności (3.82).

Analiza wymienionych zależności prowadzi również do wniosku, że dobierając odpowiednią wartość swobodnego parametru  $N$  regulatora w praktyce zawsze można dobrać taką wartość parametru  $\gamma$ , która zapewnia właściwości statyczne i dynamiczne układu bardzo zbliżone do tych, jakie ma podsystem elektromechaniczny z aktywnym regulatorem typu PI o parametrach zgodnych z kryterium modułu. Innymi słowy wykazano, że istnieje forma kwadratowa o macierzy (3.87), której wskaźnik jakości spełnia warunek (3.74) dla aktywnego i nasyczonego regulatora prędkości kątowej typu PIR, o ile parametr  $c$  regulatora spełnia zależność (3.82), a wartości parametrów  $d_w$  oraz  $k_{\omega w}$  pozostają w wystarczająco dużym otoczeniu wartości parametrów zgodnych z kryterium modułu. Tym samym rozstrzygnięty został problem warunku dostatecznego stabilności układu napędowego z regulatorem typu PIR oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana.

### 3.4. Analiza stabilności układu napędowego z nasycającym się proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności układu napędowego sterowanego według zasady POP z proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym (PIR) regulatorem prędkości kątowej, wyposażonym w system ARW. Celowość stosowania regulatora typu PIR oraz systemu ARW wyjaśniona została w poprzednim punkcie, gdzie skomentowano również pewne problemy związane ze stosowaną terminologią. W ramach tego punktu założono, że model matematyczny obwodu regulacji składowej  $y$  wektora prądu stojana ma postać członu inercyjnego pierwszego rzędu. Model matematyczny tej wersji układu z regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym sformułowany został w dodatku D1.7.

Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu przedstawiony jest na rys. 3.9.



Rys. 3.9. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR wyposażonym w system ARW oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zależności (D1.55a)-(D1.55f) model matematyczny układu można przedstawić jako:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (3.92a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (3.92b)$$

$$\frac{d}{dt}i_s^y = -\frac{1}{b}i_s^y + \frac{1}{b}i_{sz}^y, \quad (3.92c)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (3.92d)$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz + d(\omega_z - \omega) f_1(i_{sz1}^y), \quad (3.92e)$$

$$i_{sz1}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z, \quad (3.92f)$$

$$i_{sz}^y = f(i_{sz1}^y). \quad (3.92g)$$

Nieliniowa zależność (3.92g) ma następujący opis:

$$i_{sz}^y = f(i_{sz1}^y) = \begin{cases} i_{sz1}^y & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ G + N(i_{sz1}^y - G) & \text{dla } i_{sz1}^y \geq G \\ -G + N(i_{sz1}^y + G) & \text{dla } i_{sz1}^y \leq -G \end{cases}, \quad (3.93)$$

przy czym stała  $N$  (dla  $|i_{sz1}^y| \geq G$ ) dana jest zależnością:

$$N = \frac{di_{sz}^y}{di_{sz1}^y} \quad (3.94)$$

i spełnia nierówność (3.5). Charakterystyka członu nieliniowego realizującego zależność (3.93) jest, jak widać, analogiczna do charakterystyki z rys. 3.2, z tym że w miejsce odciętej i rzędnej należy teraz podstawić odpowiednio  $i_{sz1}^y$  oraz  $i_{sz}^y$ .

Człon nieliniowy realizujący występującą w zależności (3.92e) funkcję  $f_1(i_{sz1}^y)$  posiada opis:

$$f_1(i_{sz1}^y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ 0 & \text{dla } |i_{sz1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.95)$$

Charakterystyka członu nieliniowego realizującego zależność (3.95) jest analogiczna do przedstawionej na rys. 3.6, z tym że w miejsce odciętej i rzędnej należy teraz podstawić odpowiednio  $i_{sz1}^y$  oraz  $f_1(i_{sz1}^y)$ .

Ponieważ zależności (3.92a)-(3.92d) są identyczne jak dla przypadku, gdy regulator prędkości kątowej pracuje w zakresie liniowym łatwo można wykazać, że wektor stanu ustalonego ma postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T. \quad (3.96)$$

Jak widać, w stanie ustalonym, wektor przestrzenny strumienia skojarzonego wirnika jest zgodny z zasadą sterowania POP. Można również bez trudu wykazać, że prawdziwe są zależności (3.51), (3.52) oraz (3.53), w których w miejsce składowej  $I_{Osl}^y$  należy podstawić  $I_{Osz1}^y$ . Tak więc charakterystyka mechaniczna układu napędowego w rozpatrywanej wersji ma również charakter „koparkowy” i jest analogiczna do przedstawionej na rys. 3.3 z tym, że dla zakresu aktywnej pracy regulatora może ona mieć (dla dużych wartości ilorazu parametru  $d$  do  $c$  regulatora PIR) znacznie mniejszą uступliwość. Dla dostatecznie małych wartości stałej  $N$  w stanach ustalonych spełniona jest z dobrym przybliżeniem nierówność (3.6).

W stanach przejściowych zmienna stanu regulatora prędkości kątowej może być opisana następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d}{dt}\Delta z = \begin{cases} d(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega) - c(Z_O + \Delta z) = -c\Delta z - d\Delta\omega & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ -c\Delta z & \text{dla } |i_{sz1}^y| \geq G \end{cases}. \quad (3.97)$$

W zwartej formie zależność ta może być również zapisana w postaci:

$$\frac{d}{dt}\Delta z = -c\Delta z + N_2 d \Delta\omega, \quad (3.98)$$

gdzie parametr  $N_2$  spełnia zależność:

$$N_2 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ 0 & \text{dla } |i_{sz1}^y| \geq G \end{cases} \quad (3.99)$$

Składowa  $i_{sz}^y$  wektora zadanego prądu stojana opisana jest następującą zależnością:

$$i_{sz}^y = \begin{cases} (\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z = I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega + \Delta z & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z - G] \equiv G - Nk_\omega \Delta\omega + N\Delta z & \text{dla } i_{sz1}^y \geq G \\ -G + N[(\Omega_z - \Omega_O - \Delta\omega)k_\omega + Z_O + \Delta z + G] \equiv -G - Nk_\omega \Delta\omega + N\Delta z & \text{dla } i_{sz1}^y \leq -G \end{cases} \quad (3.100)$$

Podobnie jak w poprzednich przypadkach znak przybliżenia jest konsekwencją ograniczonej dokładności w oszacowaniu ustalonej wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana (nierówność (3.6)). Wykorzystanie zależności (3.92c) umożliwia przedstawienie modelu matematycznego obwodu regulacji składowej  $i_s^y$  wektora prądu stojana w następującej postaci:

$$\frac{d}{dt} \Delta i_s^y = -\frac{1}{b} (\Delta i_s^y + N_1 k_\omega \Delta\omega - N_1 \Delta z), \quad (3.101)$$

przy czym parametr  $N_1$  przyjmuje następujące wartości:

$$N_1 = \begin{cases} 1 & \text{dla } |i_{sz1}^y| < G \\ N & \text{dla } |i_{sz1}^y| \geq G \end{cases} \quad (3.102)$$

Wykorzystanie powyższych zależności umożliwia utworzenie modelu matematycznego rozpatrywanej wersji układu napędowego w formie pseudoliniowej w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_\omega}{b} & \frac{N_1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_2 d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Analiza stabilności układu poprzedzona zostanie procesem standaryzacji powyższego równania stanu. Celem tej standaryzacji jest ograniczenie liczby niezależnych parametrów układu, co podnosi uniwersalność rezultatów przeprowadzonej analizy. Wprowadźmy mianowicie nowe, względne wartości współczynnika wzmocnienia oraz parametrów  $c$  i  $d$  regulatora prędkości, zdefiniowane w sposób następujący:

$$k_{\omega w} = \frac{k_\omega}{k_{\omega s}} = \frac{k_\omega}{\frac{a}{2b}}, \quad (3.104a)$$

$$d_w = \frac{d}{d_s} = \frac{d}{\frac{a}{8b^2}}, \quad (3.104b)$$

$$c_w = b c. \quad (3.104c)$$

Wprowadźmy również nową względną prędkość kątową układu zdefiniowaną jako:

$$\Delta \omega_1 = \frac{a}{2b} \Delta \omega. \quad (3.105)$$

Model matematyczny rozpatrywanej wersji układu może być wówczas przedstawiony w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} & \frac{N_1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N_2 d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Wielkości odniesienia dla parametrów  $k_{\omega w}$  oraz  $d_w$  regulatora zostały tak dobrane, że zdefiniowany niżej podsystem elektromechaniczny dla  $k_{\omega w} = 1$  oraz  $d_w = 1$  jest zoptymalizowany (w zakresie aktywnym) zgodnie z często stosowanym w technice napędu elektrycznego kryterium symetrii [62, 115]. Łatwo można bowiem sprawdzić, że w tych warunkach równanie charakterystyczne macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (3.107)$$

ma postać:

$$8b^3 \lambda^3 + 8b^2 \lambda^2 + 4b\lambda + 1 = 0, \quad (3.108)$$

która jest typowa dla kryterium symetrycznego.

Porównując równanie stanu (3.106) rozpatrywanej wersji układu z równaniem (2.57) właściwym wersji układu z regulatorem typu PI pracującym w zakresie liniowym, można zauważyć daleko idące analogie. Zastosujmy więc do analizy stabilności układu formę kwadratową o macierzy danej zależnością (2.60) z tym, że w miejsce stałej  $a$  podstawiony zostanie iloczyn  $2b$ . Macierz ta zostaje dodatkowo określona, o ile (przy wprowadzonej modyfikacji) spełniony pozostaje warunek (3.33).

Liczona wzdłuż trajektorii systemu (3.106) pochodna tak określonej funkcji-kandydata na funkcję Lapunowa ma wówczas postać:

$$\frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = -2 \left( p_{22} - \frac{p_{i22}}{(2b)^2} \right) (\Delta \psi_r^x)^2 + \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}^T (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (3.109)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} & \frac{N_1}{b} \\ -\frac{1}{2b} & \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{N_2 d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix}, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_{22} & \frac{p_{i12}}{2b} & \frac{p_{i22}}{2b} & \frac{p_{i23}}{2b} \\ \frac{p_{i12}}{2b} & p_{i11} & p_{i12} & p_{i13} \\ \frac{p_{i22}}{2b} & p_{i12} & p_{i22} & p_{i23} \\ \frac{p_{i23}}{2b} & p_{i13} & p_{i23} & p_{i33} \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Z zależności (3.109) wynika, że taki dobór macierzy testującej formy kwadratowej zapewnia niezależność jej pochodnej czasowej od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{41}$  macierzy stanu w zależności (3.106) zawierających współrzędne wektora stanu przyrostowego i ustalonego. Jeżeli założymy, że interesują nas tylko sytuacje, w których macierz  $\mathbf{A}_b$  ma stabilne wartości własne, to tak jak we wszystkich poprzednich przypadkach stabilność globalna układu zagwarantowana jest wtedy, gdy drugi składnik prawej strony zależności (3.109) jest ujemnie określony. Analogicznie jak w poprzednich przypadkach do określenia wartości elementu  $p_{22}$  macierzy  $\mathbf{P}_b$  gwarantującego pomyślny wynik testu Lapunowa posłużyć się można warunkiem (3.38), przy czym występujące tam macierze zdefiniowane są teraz w sposób następujący:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2b} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{p_{i12}}{2b} & \frac{p_{i22}}{2b} & \frac{p_{i23}}{2b} \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} p_{i11} & p_{i12} & p_{i13} \\ p_{i12} & p_{i22} & p_{i23} \\ p_{i13} & p_{i23} & p_{i33} \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Z warunku tego wynika, że dla układów napędowych o stabilnym podsystemie elektromechanicznym (przy skończonych wartościach normy euklidesowej macierzy  $\mathbf{P}_{me}$ ) zawsze można znaleźć skończoną wartość elementu  $p_{22}$  gwarantującą jednocześnie spełnienie nierówności (3.33) oraz (3.38), o ile względny wskaźnik jakości  $v_{me}$  testującej formy kwadratowej o macierzy  $\mathbf{P}_{me}$  do podsystemu elektromechanicznego o macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} & \frac{N_1}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_2 d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

spełnia warunek:  $v_{me} > 0$ .

Dokonajmy wstępnej oceny właściwości dynamicznych układu, a w szczególności wpływu wartości parametru  $c_w$  aktywnego regulatora typu PIR na położenie wartości własnych macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego. Właściwości takiego układu porównane zostaną z właściwościami układu z aktywnym regulatorem typu PI. Porównanie to przeprowadzone zostanie dla wartości parametrów regulatora PI, zgodnych z kryterium symetrii (tzn.  $k_{\omega w} = 1$  oraz  $d_w = 1$ ). Do porównania stanu aktywnego obu regulatorów, bez straty ogólności rozważań, wystarczy poddać analizie macierz:

$$\mathbf{A}_{mePIR} = \begin{bmatrix} -1 & -k_{\omega w} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_w}{4} & -c_w \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

dla regulatora typu PIR oraz macierz:

$$\mathbf{A}_{mePI} = \begin{bmatrix} -1 & -k_{\omega w} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_w}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

dla regulatora typu PI. Z uwagi na aktywny z założenia stan obu regulatorów przyjęto, że wartości parametrów  $N_1$  i  $N_2$  są równe 1. Wyniki obliczeń wartości własnych macierzy (3.116) oraz (3.117) dla różnych wartości parametru  $c_w$  regulatora prędkości kątowej zestawiono w tabeli 3.2. W przypadku par zespolonych, wzajemnie sprzężonych wartości własnych podawana jest tylko jedna z nich.

Tabela 3.2  
Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI}$  oraz  $\mathbf{A}_{mePIR}$

| $c_w$   | $\lambda_1$ | $\lambda_{2,3}$ |
|---------|-------------|-----------------|
| 0       | -0,500      | -0,250+0,433j   |
| 0,00001 | -0,500      | -0,250+0,433j   |
| 0,0001  | -0,500      | -0,250+0,433j   |
| 0,001   | -0,501      | -0,250+0,434j   |
| 0,01    | -0,510      | -0,250+0,439j   |
| 0,05    | -0,546      | -0,252+0,459j   |
| 0,10    | -0,586      | -0,257+0,482j   |

Z przedstawionych w tabeli danych wynika, że jeżeli parametry  $d_w$  oraz  $k_{\omega w}$  regulatora PIR są zgodne z kryterium symetrii, to dla wartości parametru  $c_w \leq 0,01$  jego wpływ na stopień stabilności jest symboliczny.

Powróćmy do wątku analizy stabilności podsystemu elektromechanicznego z nasycającym się regulatorem typu PIR. Jak już wspomniano, bez straty ogólności rozważań do rozstrzygnięcia tego problemu wystarczy poddać analizie macierz:

$$\mathbf{A}_{meI} = \mathbf{A}_{me} b = \begin{bmatrix} -1 & -N_1 k_{\omega w} & N_1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_2 d_w}{4} & -c_w \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Elementy macierzy  $\mathbf{A}_{me1}$  nie zależą od zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu stojana, co zmniejsza liczbę niezależnych parametrów układu. Macierz ta zawiera jednak zmienne parametry  $N_1$  i  $N_2$ , spełniające odpowiednio zależności (3.99) oraz (3.102). Należy podkreślić, że wartości tych parametrów są funkcjami tej samej zmiennej niezależnej  $i_{sz1}^y$ . Zmiany ich wartości zachodzą więc jednocześnie.

Analiza stabilności układu przy wykorzystaniu bezpośredniej metody Lapunowa może być przeprowadzona różnymi sposobami. W wariancie najprostszym wystarczy sprawdzić, czy istnieje wspólna funkcja Lapunowa dla konkretnych wartości parametrów  $c_w, d_w$  oraz  $k_{ow}$  i dla zmieniających się jednocześnie (zgodnie z zależnościami (3.99) i (3.102)) zmiennych parametrów  $N_1$  i  $N_2$ . Przy takim sposobie rozwiązania zadania należy rozpatrzyć następujący dwuelementowy zbiór macierzy stanu:

$$\{\mathbf{A}_{me1}(N_1, N_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -Nk_{ow} & N \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -k_{ow} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_w}{4} & -c_w \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.119)$$

Pierwsza macierz w tym zbiorze odpowiada stanowi nasycenia regulatora PIR, druga właściwa jest stanowi aktywnemu tego regulatora. Warunkiem dostatecznym stabilności układu napędowego jest istnienie wspólnej funkcji Lapunowa dla obu elementów powyższego zbioru macierzy.

Wykorzystanie opracowanego przez autora modułu programowego pracującego w środowisku MATLAB i opisanego w rozdziale 1 umożliwia znalezienie takiej funkcji na drodze optymalizacji numerycznej macierzy  $\mathbf{P}_{me}$  gwarantującej maksymalną wartość wskaźnika  $v_{me}$  dla obu elementów zbioru (3.119). Obliczenia prowadzone były dla  $k_{ow} = 1$  oraz  $d_w = 1$ . W rezultacie obliczeń uzyskano wspólne funkcje Lapunowa dla zbioru (3.119) o macierzach:

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,3445 & -1,6514 \\ 1,3445 & 2,4889 & -3,0699 \\ -1,6514 & -3,0699 & 5,9557 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

dla  $c_w = 0,01$  oraz  $N = 0,1$ ,

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,4542 & -1,8111 \\ 1,4542 & 2,8824 & -3,5985 \\ -1,8111 & -3,5985 & 7,5407 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

dla  $c_w = 0,001$  oraz  $N = 0,01$ ,

$$\mathbf{P}_{me} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,4542 & -1,8174 \\ 1,4542 & 2,9063 & -3,6325 \\ -1,8174 & -3,6325 & 7,6272 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

dla  $c_w = 0,0001$  oraz  $N = 0,001$ . Względny wskaźnik jakości doboru tych funkcji Lapunowa do zbioru (3.119) dla wszystkich zaprezentowanych przypadków spełniał warunek:  $v_{me} = 1$ . Z analizy wartości własnych elementów zbioru macierzy (3.119) wynika, że również w tym wypadku o szybkości zanikania procesów przejściowych w układzie decydują wartości własne macierzy stanu układu z nasyceniem regulatorem typu PIR.

W ten sposób wykazano, że jeżeli parametry ( $k_{ow}$  oraz  $d_w$ ) regulatora PIR są zgodne z kryterium symetrii, to dla przedstawionych wartości parametrów  $c_w$  oraz stałej  $N$  istnieją formy kwadratowe gwarantujące pomyślny wynik testu Lapunowa dla zbioru macierzy (3.119).

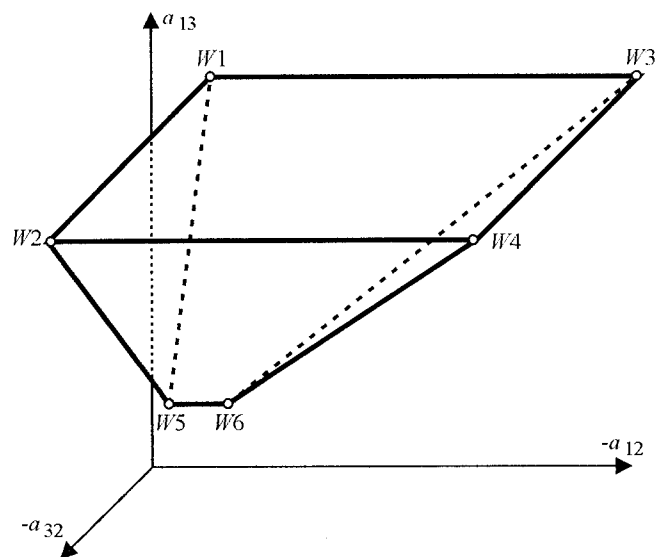
Zaprezentowany sposób rozwiązania zadania opiera się na wykorzystaniu technik numerycznych, co w pewnym stopniu ogranicza uniwersalność przedstawionych wyników. Trzeba też dodatkowo podkreślić, że uzyskana w ten sposób gwarancja stabilności układu (dla aktywnego i nasyczonego regulatora) dotyczy jedynie określonych wartości jego podstawowych parametrów. Dokładność oszacowania wartości parametrów układów napędowych nie jest na ogół wysoka, a ponadto (nawet przy dokładnym oszacowaniu początkowym) wartości tych parametrów mogą podlegać zmianom podczas pracy układu. W związku z tym prawdopodobieństwo „trafienia” dokładnie w wartości odpowiadające kryterium symetrii jest najczęściej małe. Znaczne zwiększenie praktycznej przydatności uzyskanych na drodze numerycznej rezultatów może być uzyskane w ten sposób, że stabilność układu badana będzie w pewnym obszarze zmienności parametrów  $d_{w \min} - d_{w \max}$  oraz  $k_{ow \min} - k_{ow \max}$  aktywnego i nasycającego się regulatora prędkości kątowej typu PIR. Taki sposób rozwiązania zadania prowadzi, oczywiście, do wzrostu liczby elementów zbioru wierzchołkowych macierzy stanu (3.118), dla których poszukiwana musi być wspólna funkcja Lapunowa. Wymiary macierzy nie stwarzają jednak problemów numerycznych, a uzyskane rezultaty

niosą więcej praktycznie użytecznych informacji o zachowaniu się układu napędowego.

Ze struktury macierzy (3.118) wynika, że w tej sytuacji należy poszukiwać wspólnej funkcji Lapunowa dla sześcioelementowego zbioru macierzy stanu. Elementy tego zbioru tworzą w przestrzeni elementów  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{32}$  macierzy stanu wierzchołki wypukłego wielościanu  $\Gamma$ , przedstawionego na rys. 3.10. Wierzchołki W1–W6 tego wielościanu mają współrzędne przedstawione w tabeli 3.3.

Tabela 3.3  
Współrzędne wierzchołków wielościanu  $\Gamma$

| Oznaczenie wierzchołka | $a_{12}$              | $a_{13}$ | $a_{32}$                |
|------------------------|-----------------------|----------|-------------------------|
| W1                     | $-k_{\omega w \min}$  | 1        | $-\frac{d_{w \min}}{4}$ |
| W2                     | $-k_{\omega w \min}$  | 1        | $-\frac{d_{w \max}}{4}$ |
| W3                     | $-k_{\omega w \max}$  | 1        | $-\frac{d_{w \min}}{4}$ |
| W4                     | $-k_{\omega w \max}$  | 1        | $-\frac{d_{w \max}}{4}$ |
| W5                     | $-Nk_{\omega w \min}$ | $N$      | 0                       |
| W6                     | $-Nk_{\omega w \max}$ | $N$      | 0                       |

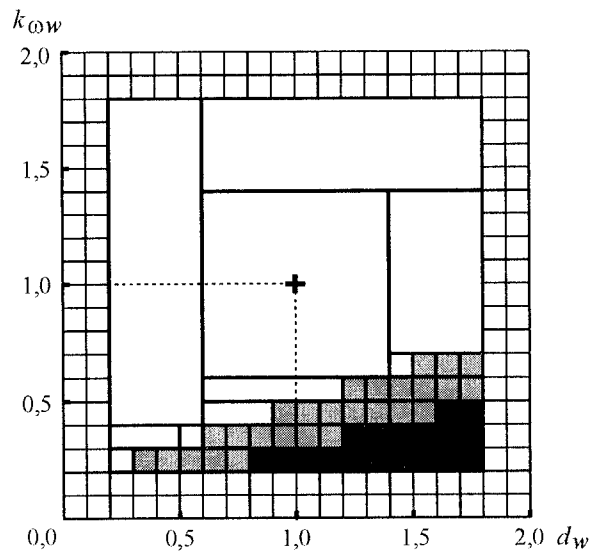


Rys. 3.10. Usytuowanie wierzchołków wypukłego wielościanu  $\Gamma$  testowanych w procesie analizy stabilności układu napędowego

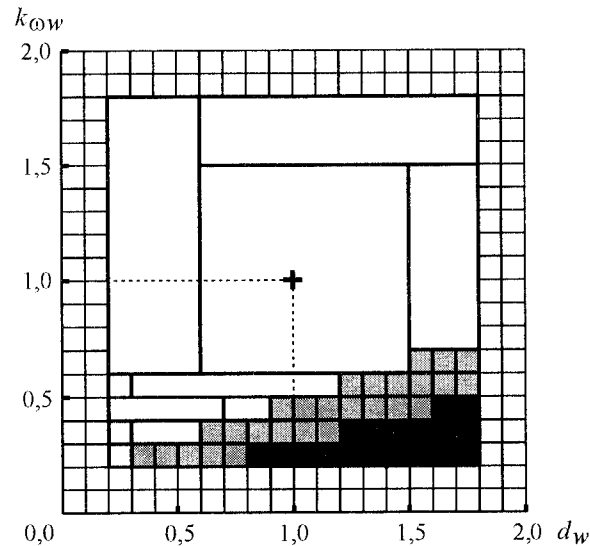
Z rys. 3.10 oraz danych z tabeli 3.3 wynika, że krawędź wielościanu łącząca wierzchołki W5, W6 leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez osie wartości elementów  $a_{12}$ ,  $a_{13}$  macierzy stanu. Płaszczyzna, w której leży ściana zawierająca wierzchołki W1, W2, W3, W4, jest równoległa do płaszczyzny utworzonej przez osie wartości elementów  $a_{12}$ ,  $a_{32}$ .

Badania prowadzono dla  $0,2 \leq d_w \leq 1,8$  oraz  $0,2 \leq k_{\omega w} \leq 1,8$ . Wyniki przeprowadzonej w ten sposób analizy stabilności przedstawiono na rys. 3.11, 3.12 oraz 3.13. Na rysunkach tych, na płaszczyźnie parametrów  $(d_w, k_{\omega w})$  regulatora zaznaczono obszary, dla których stwierdzono stabilność asymptotyczną, nieokreślone zachowanie się układu bądź jego niestabilność. Za obszar stabilnej pracy układu uważa się taki, dla którego znaleziono numerycznie wspólną funkcję Lapunowa, gwarantującą pomyślny wynik testu Lapunowa dla wszystkich wierzchołków wielościanu  $\Gamma$  z rys. 3.10. Obszary te zaznaczono na rysunkach kolorem białym. Ciągłymi liniami zaznaczono ponadto takie obszary na płaszczyźnie parametrów  $(d_w, k_{\omega w})$ , dla których stabilność układu gwarantowana jest przy pomocy tej samej funkcji Lapunowa. Wartości parametrów w ramach tak zdefiniowanych obszarów mogą podlegać dowolnie szybkim zmianom bez obawy o utratę stabilności układu. W tym sensie, wielkość takiego obszaru jest miarą odporności układu na szybkie zmiany parametrów. Dla obszarów zaznaczonych kolorem szarym nie udało się znaleźć wspólnej funkcji Lapunowa dla elementarnego kwadratu o wymiarach  $0,05 \times 0,05$ . Nie wyklucza to możliwości istnienia takiej funkcji dla mniejszego elementarnego kwadratu na płaszczyźnie parametrów regulatora. Z tego powodu oraz dlatego, że test Lapunowa gwarantuje jedynie warunki dostateczne stabilności asymptotycznej, obszary te nazwano obszarami o *nieokreślonym zachowaniu się układu*. Dla obszarów oznaczonych kolorem czarnym stwierdzono istnienie co najmniej jednego wierzchołka wielościanu  $\Gamma$ , dla którego dowolna macierz wierzchołkowa miała niestabilne wartości własne. Oznacza to, że dla takiego wierzchołka nie są spełnione nawet warunki konieczne stabilności asymptotycznej, a w związku z tym poszukiwanie wspólnej funkcji Lapunowa dla wszystkich wierzchołków wielościanu nie jest celowe.

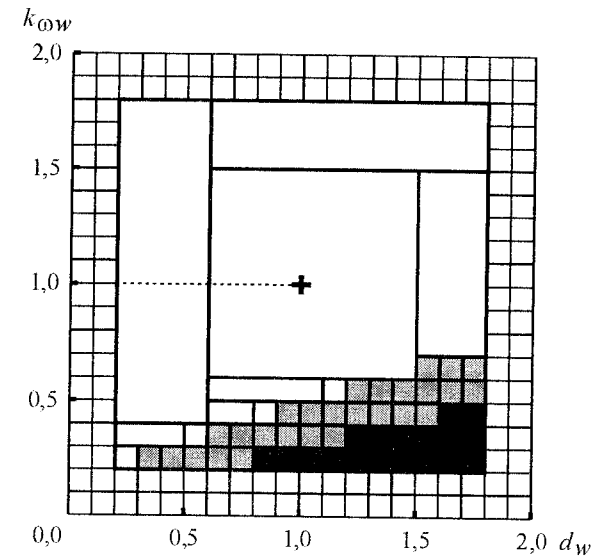
Z przedstawionych na rys. 3.11, 3.12 oraz 3.13 rezultatów wynika, że odporność układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR na zmiany wartości parametrów regulatora jest dostatecznie duża. Odporność ta (również na szybkie zmiany wartości parametrów regulatora), co ciekawe, jest szczególnie wysoka dla otoczenia wartości parametrów  $d_w$  oraz  $k_{\omega w}$  zgodnych z kryterium symetrii ( $d_w = 1$ ,  $k_{\omega w} = 1$ ). Z porównania rezultatów przedstawionych na tych rysunkach wynika również, że są one bardzo zbliżone dla znacznie różniących się wartości parametru  $c_w$  oraz stałej  $N$  regulatora.



**Rys. 3.11.** Podział płaszczyzny parametrów regulatora ( $d_w, k_{ow}$ ) na obszary, dla których stwierdzono gwarantowaną stabilność (kolor biały), nieokreślone zachowanie się układu (kolor szary) oraz niestabilność (kolor czarny), parametry regulatora:  $c_w = 0,01$ ,  $N = 0,1$



**Rys. 3.12.** Podział płaszczyzny parametrów regulatora ( $d_w, k_{ow}$ ) na obszary, dla których stwierdzono gwarantowaną stabilność (kolor biały), nieokreślone zachowanie się układu (kolor szary) oraz niestabilność (kolor czarny), parametry regulatora:  $c_w = 0,001$ ,  $N = 0,01$



**Rys. 3.13.** Podział płaszczyzny parametrów regulatora ( $d_w, k_{ow}$ ) na obszary, dla których stwierdzono gwarantowaną stabilność (kolor biały), nieokreślone zachowanie się układu (kolor szary) oraz niestabilność (kolor czarny), parametry regulatora:  $c_w = 0,0001$ ,  $N = 0,001$

Warto również podkreślić, że w przypadku pomyślnego rezultatu testu przeprowadzonego dla macierzy wierzchołkowych, stabilność układu zagwarantowana jest dla całego wnętrza wielościanu z rys. 3.10. Uwaga ta może mieć istotne znaczenie praktyczne wtedy, gdy nieliniowe charakterystyki bloków systemu ARW zrealizowane są jedynie w sposób zbliżony do tych, które są przedstawione na rys. 3.2 oraz rys. 3.6. Zmiana wartości parametrów nieliniowych ograniczników nie musi być wówczas realizowana w sposób skokowy. Jedynym warunkiem jest taki sposób zmian chwilowych wartości elementów  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{32}$  macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego wewnątrz wielościanu  $\Gamma$  przedstawionego na rys. 3.10.

Przykład liczbowy analizy stabilności globalnej układu napędowego o opisanej w tym punkcie strukturze przedstawiono w dodatku D4.1.

Zaprezentowany sposób rozwiązania problemu analizy stabilności może być, po bardzo prostych modyfikacjach, wykorzystany również przy analizie strukturalnie podobnych układów z nasycającymi się regulatorami prędkości kątowej z silnikami prądu stałego. Zaprezentowana metoda może także stanowić „źródło informacji” o właściwościach dynamicznych układów napędowych z nieliniowymi regulatorami realizowanymi w technice sterowania rozmytego (fuzzy control). W przypadku takiego sterowania określenie wielkości zakresu, w którym wartości

parametrów regulatorów mogą się zmieniać bez obawy o utratę stabilności przez układ, jest bardzo ważne, a jak dowodzi lektura publikacji z tego zakresu często przez badaczy niedoceniane.

### 3.5. Uwagi końcowe

W kolejnych punktach rozdziału 3 przeprowadzono analizę stabilności czterech podstawowych wersji układów sterowania, zgodnie z zasadą POP. W procesie analizy wykorzystywano rezultaty uzyskane w rozdziale 2. Wykazano, że podstawowym problemem jest znalezienie wspólnej funkcji Lapunowa dla podsystemu elektromechanicznego, a właściwie dla określonego, wypukłego zbioru macierzy stanu tego podsystemu, generowanego przez nieliniową realizację struktury regulatora prędkości kątowej. Istnienie funkcji Lapunowa dla tego podsystemu gwarantuje istnienie funkcji Lapunowa dla całego układu napędowego, a tym samym stanowi gwarancję jego asymptotycznej stabilności.

Dla wszystkich analizowanych przypadków wykazano istnienie wspólnej funkcji Lapunowa, gwarantującej pomyślny wynik testu Lapunowa przynajmniej dla wystarczająco dużego otoczenia wartości parametrów regulatora prędkości zgodnych ze standardowymi (modułu i symetrii) kryteriami wymiarowania regulatorów [62, 115]. Granice tego otoczenia podane zostały w poszczególnych punktach rozdziału właściwych rozpatrywanym wersjom.

Dla przypadków z bezinercyjnym modelem obwodu regulacji prądu stojana procedura dowodowa miała charakter analityczny. Opisany w punkcie 3.3 przypadek z regulatorem prędkości kątowej typu PIR może być, oczywiście, rozwiązany również na drodze numerycznej, w sposób podobny do przedstawionego w punkcie 3.4. Uzyskane na drodze analitycznej rezultaty są jednak wystarczające dla zdecydowanej większości przypadków praktycznych. Skłoniło to autora pracy do rezygnacji z przedstawienia rezultatów analizy tego przypadku na drodze numerycznej.

Warto również podkreślić, że pomimo nieliniowego charakteru modeli matematycznych poszczególnych układów napędowych, uzyskane gwarancje stabilności (w granicach właściwych danej wersji) pozostają prawdziwe przy dowolnych wartościach współrzędnych wektora stanu. Uzyskano to każdorazowo dzięki właściwemu doborowi struktury macierzy testującej formy kwadratowej. W rezultacie współczynniki form kwadratowych pochodnych funkcji Lapunowa nie zależą w sposób jawny od współrzędnych przyrostowego wektora stanu i współrzędnych wektora stanu ustalonego, a w szczególności od składowej  $I_{O_s}^y$  wektora prądu stojana. Analogicznie jak dla układów z regulatorami pracującymi w obszarze aktywnym pozwala to na rozszerzenie zadeklarowanej w założeniach wstępnych klasy

napędów o stałych w czasie wartościach zadanych (prędkości kątowej i momentu zewnętrznego) również na układy, w których wielkości te są stałe tylko w określonych, następujących po sobie przedziałach czasowych. Każdy z tych przedziałów czasowych powinien trwać tak długo, aż trajektoria osiągnie bezpośrednie otoczenie punktu pracy ustalonej w tym przedziale.

#### 4. Analiza stabilności układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika maszyny

W rozdziale tym przeprowadzona zostanie analiza stabilności układów regulacji prędkości kątowej o sterowaniu zgodnym z zasadą POP, z uwzględnieniem cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika maszyny asynchronicznej. Zjawisko wrażliwości układów o sterowaniu zgodnym z zasadą POP na zmiany rezystancji wirnika maszyny uważane jest powszechnie za główną wadę tej klasy napędów. W wielu, omówionych we wstępie, pracach z dziedziny automatyki napędu elektrycznego przedstawiono różne rozwiązania adaptacyjne, których zadaniem jest zwiększenie odporności podstawowej struktury regulacyjnej na zmiany rezystancji uzwojeń wirnika. Ta różnorodność świadczy, zdaniem autora pracy, z jednej strony o aktualności tematyki, z drugiej zaś jest świadectwem na to, że nie ukształtowała się tu jeszcze żadna tendencja dominująca. Zdecydowana większość tych rozwiązań ma bowiem różne istotne wady. Autorzy prac nie odnoszą się ponadto na ogół do podstawowego problemu, jakim jest globalna lub przynajmniej lokalna stabilność układu.

Autor pracy postawił sobie za cel, by w tym rozdziale przeprowadzić wszechstronną analizę stabilności układów sterowanych według zasady POP w wersji podstawowej bez dodatkowych rozwiązań adaptacyjnych zwiększających odporność układu na efekty zmian rezystancji uzwojeń wirnika. Poza aspektem poznawczym wnioski z przeprowadzonej analizy mogą okazać się przydatne również wtedy, gdy rozwiązania adaptacyjne są stosowane. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim wstępnej fazy procesu dostrajania w układach typu MIAS, kiedy wartości parametrów maszyny mogą być oszacowane jedynie na podstawie danych znamionowych ze znacznym na ogół błędem. Z punktu widzenia odporności układu na zmiany parametrów ta wstępna faza procesu adaptacyjnego dostrajania podobna jest w istocie do pracy układu bez rozwiązań adaptacyjnych.

Prezentowana w tym rozdziale analiza stabilności przeprowadzona zostanie przy następujących założeniach upraszczających:

- z4.1** wszystkie parametry maszyny są stałe i, z wyjątkiem rezystancji uzwojeń wirnika, mają wartości znamionowe,
- z4.2** zastępczy moment bezwładności układu sprowadzony do wału maszyny ma wartość stałą,
- z4.3** model matematyczny obwodu regulacji prądu stojana jest odsprężony, to znaczy, że nie występują sprzężenia skrośne pomiędzy podsystemami regulacji prądu stojana dla osi  $x$  oraz  $y$ ,
- z4.4** sterowanie maszyną odbywa się w pierwszej strefie regulacji, co dla pośrednio sterowanej maszyny asynchronicznej oznacza, że składowa  $i_s^x$  wektora prądu stojana jest stała i równa jest swej wartości znamionowej.

Założono również, że prędkość kątowa zadana oraz moment zewnętrzny mają wartości dowolne, stałe w czasie.

Pewnego komentarza wymaga fragment założenia **z4.1**, traktujący o stałości wartości rezystancji uzwojeń wirnika maszyny. Założenie to wynika z termicznej natury zjawiska zmian rezystancji, które cechuje, na ogół, większa inercja od procesów elektromagnetycznych i elektromechanicznych w maszynie.

We wszystkich punktach tego rozdziału analiza stabilności poszczególnych wersji układu prowadzona będzie przy założeniu, że powolne zmiany wartości rezystancji uzwojeń wirnika zachodzą w określonych, skończonych granicach. Miarą tych zmian jest zdefiniowany zależnością (D3.1) parametr  $\rho$ , który jest ilorazem znamionowej wartości rezystancji uzwojeń wirnika do jej bieżącej wartości. Warto podkreślić, że w tym wypadku termin „wartość znamionowa” ma pewien relatywny charakter, ponieważ nie musi to być wartość rezystancji określona w temperaturze znamionowej. Za wartość znamionową można tu przyjąć wartość rezystancji zmierzoną w dowolnej temperaturze. Wartość ta powinna być jednak zgodna z wartością rezystancji  $R_{rN}$  w zależności (D1.3), która definiuje współczynnik proporcjonalności pomiędzy pulsacją prądu wirnika a składową  $i_{sF}^y$  wektora przestrzennego prądu stojana. Innymi słowy wartość ta stanowi podstawę do strojenia układu napędowego, ale z oczywistych powodów nie musi ona być równa bieżącej wartości rezystancji uzwojeń wirnika silnika napędowego.

Badanie stabilności różnych wersji układu przeprowadzono w ramach tego rozdziału zakładając, że wartość parametru  $\rho$  zawiera się w granicach danych nierównością  $0,7 \leq \rho \leq 1,5$  [62]. Dla typowych materiałów używanych do wytwarzania uzwojeń maszyn elektrycznych taki zakres zmienności parametru  $\rho$  odpowiada przyrostom temperatury o około  $105^\circ\text{C}$  „w górę” i o około  $85^\circ\text{C}$  „w dół” w stosunku do wartości temperatury przyjętej za znamionową.

#### 4.1. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Analiza stabilności tej wersji układu przeprowadzona zostanie w kilku etapach. W pierwszej kolejności rozpatrzony zostanie taki przypadek, gdy regulator prędkości kątowej układu pracuje w zakresie liniowym. Właściwa analiza stabilności musi być jednak poprzedzona pewnym wprowadzeniem związanym ze złożonością poruszanej dalej problematyki.

Sformułowany w dodatku D3.2 model matematyczny analizowanej wersji układu napędowego przy wykorzystaniu systemu jednostek względnych ma postać:

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\Psi_r^x + \Psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\Psi_r^y - \Psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho}i_s^y, \quad (4.1b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\Psi_r^x i_s^y - \Psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (4.1c)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega). \quad (4.1d)$$

Schemat blokowy układu napędowego w rozpatrywanej wersji przedstawiono na rys. 4.1.

Rozpatrzmy właściwości statyczne układu.

Współrzędne wektora stanu ustalonego:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O]^T \quad (4.2)$$

spełniają zależności:

$$\Psi_{Or}^x = 1 + \frac{1-\rho}{\rho} a(I_{Os}^y), \quad (4.3a)$$

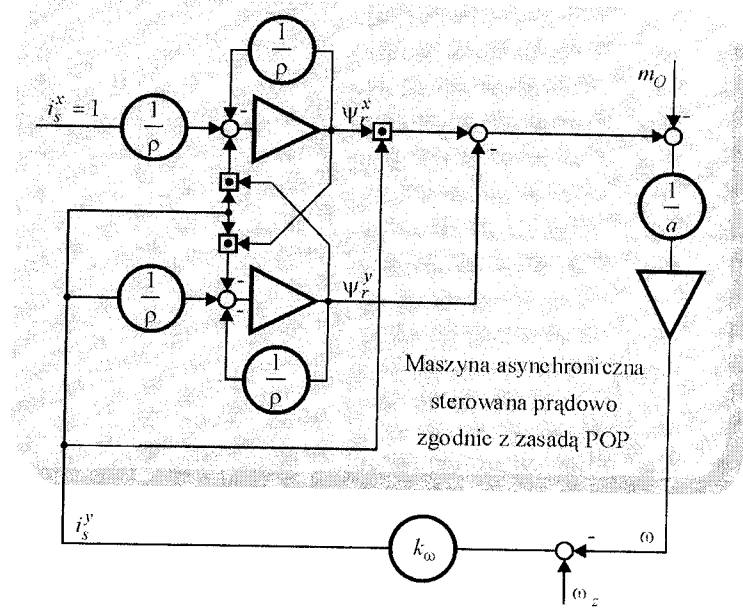
$$\Psi_{Or}^y = \frac{1-\rho}{\rho} b(I_{Os}^y), \quad (4.3b)$$

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{I_{Os}^y}{k_\omega}, \quad (4.3c)$$

gdzie:

$$a(I_{Os}^y) = \frac{(\rho I_{Os}^y)^2}{1 + (\rho I_{Os}^y)^2}, \quad (4.3d)$$

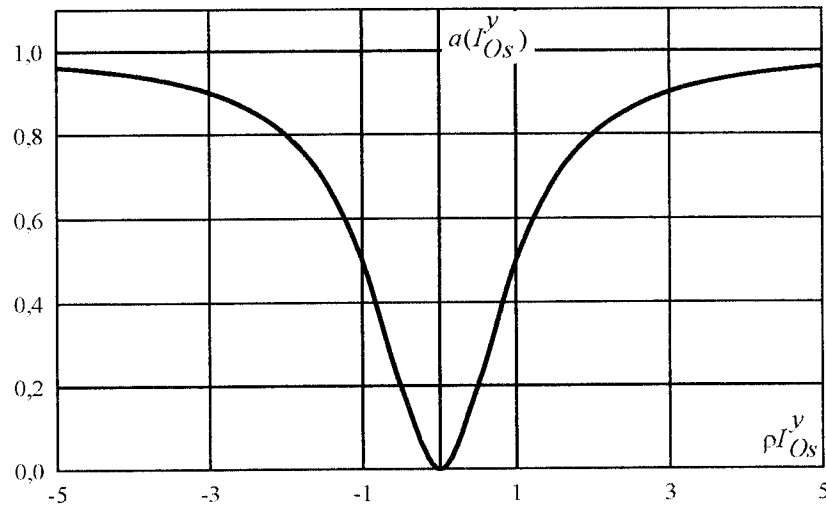
$$b(I_{Os}^y) = \frac{\rho I_{Os}^y}{1 + (\rho I_{Os}^y)^2}. \quad (4.3e)$$



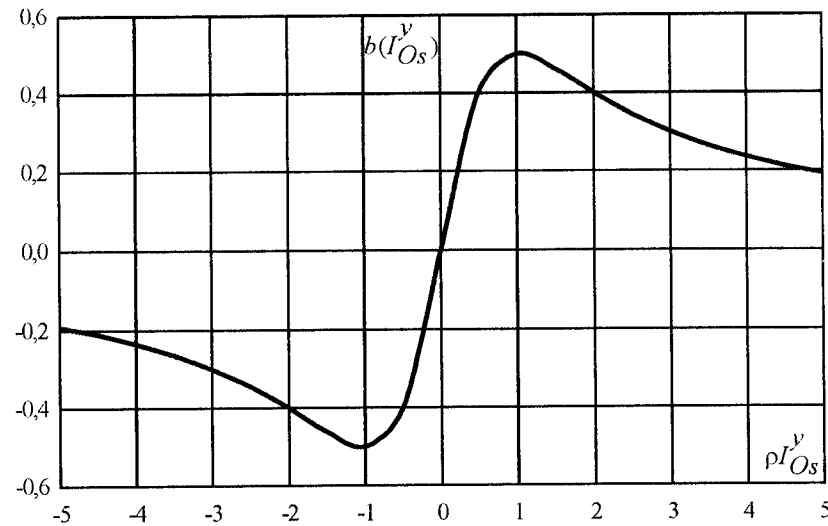
Rys. 4.1. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Łatwo zauważyć, że składowe wektora przestrzennego strumienia wirnika nie są, w ogólnym przypadku, zgodne z zasadą POP. Dla parametru  $\rho \neq 1$  zgodność ta występuje jedynie w sytuacji, gdy składowa  $I_{Os}^y = 0$ . W ogólnym przypadku składowe wektora przestrzennego strumienia wirnika zależą, w sposób nieliniowy, od stopnia obciążenia maszyny, którego miarą jest wartość składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Przy danej stałej wartości parametru  $\rho$  miarą odchylenia końca wektora przestrzennego strumienia wirnika od punktu o współrzędnych (1, 0) na płaszczyźnie  $(\Psi_{Or}^x, \Psi_{Or}^y)$  są wartości współczynników  $a(I_{Os}^y)$  oraz  $b(I_{Os}^y)$ .

dane zależnościami (4.3d) oraz (4.3e). Zależność tych współczynników od wartości iloczynu  $\rho I_{Os}^y$  przedstawiono w formie graficznej na rys. 4.2 oraz rys. 4.3.



**Rys. 4.2.** Zależność współczynnika  $a(I_{Os}^y)$  (zależność (4.3d)) od wartości iloczynu  $\rho I_{Os}^y$



**Rys. 4.3.** Zależność współczynnika  $b(I_{Os}^y)$  (zależność (4.3e)) od wartości iloczynu  $\rho I_{Os}^y$

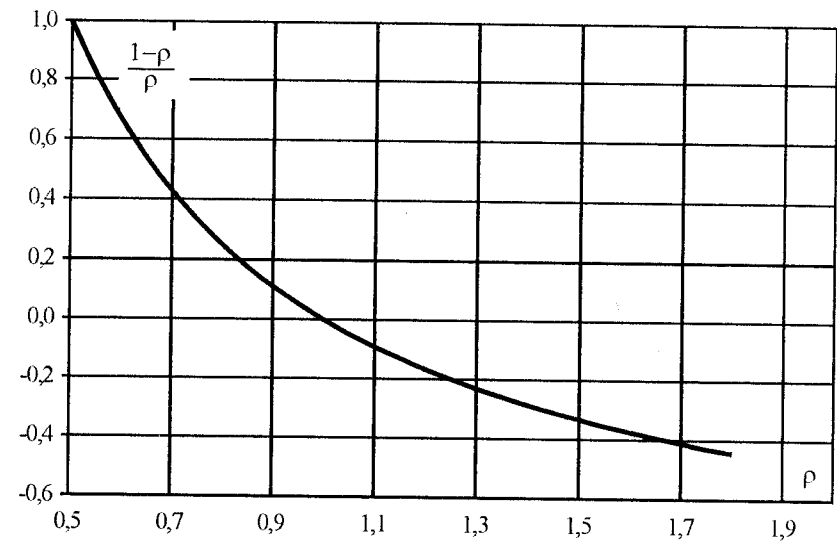
Z rysunków tych oraz z zależności (4.3) wynika, że współczynniki  $a(I_{Os}^y)$  oraz  $b(I_{Os}^y)$  ograniczone są przez nierówności:

$$0 \leq a(I_{Os}^y) < 1, \quad (4.4a)$$

$$|b(I_{Os}^y)| \leq 0.5. \quad (4.4b)$$

Współczynniki  $a(I_{Os}^y)$  oraz  $b(I_{Os}^y)$  są znormalizowane w tym sensie, że ich ekstremalne wartości nie zależą od parametru  $\rho$ . Wraz ze zmianą wartości tego parametru następuje jedynie przeskalowanie osi zmiennej niezależnej na wykresach przedstawionych na rys. 4.2 oraz rys. 4.3.

Iloraz  $\frac{1-\rho}{\rho}$  w zależnościach (4.3a) oraz (4.3b) można natomiast interpretować jako pewną nieliniową funkcję wagi, z jaką współczynniki  $a(I_{Os}^y)$  oraz  $b(I_{Os}^y)$  wchodzi do zależności na składowe wektora strumienia wirnika. Wartości tego ilorazu w funkcji parametru  $\rho$  przedstawione zostały w formie charakterystyki na rys. 4.4. Warto podkreślić, że pomimo nieliniowego charakteru wartości ilorazu  $\frac{1-\rho}{\rho}$  tworzą (dla  $\rho > 0$ ) monotoniczną funkcję parametru  $\rho$ .

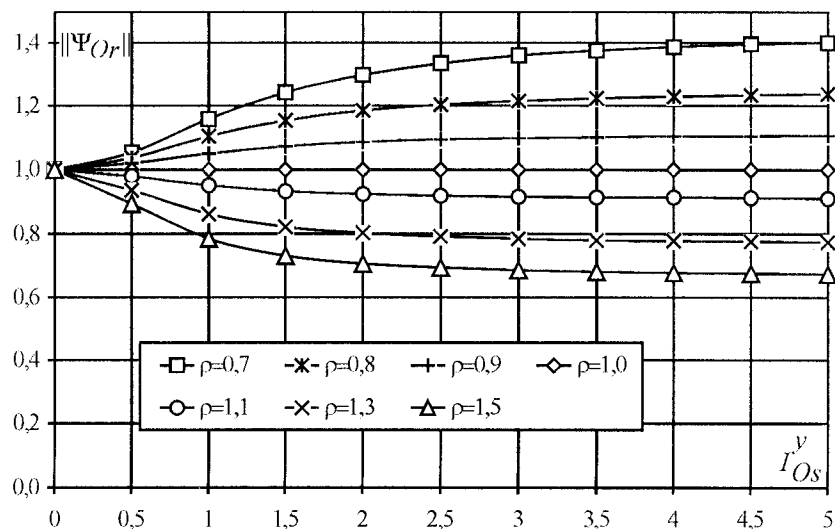


**Rys. 4.4.** Zależność ilorazu  $(1-\rho)/\rho$  od parametru  $\rho$

Z przedstawionych rozważań dotyczących właściwości statycznych wynika również, że wektor przestrzenny strumienia wirnika maszyny nie jest zgodny z zasadą POP nie tylko co do wartości składowych prostokątnych, ale również w odniesieniu do normy kwadratowej. Z zależności (4.3a) oraz (4.3b) można wyznaczyć normę kwadratową wektora strumienia wirnika jako:

$$\|\Psi_{Or}\| = \sqrt{1 + \frac{1-\rho^2}{\rho^2} a(I_{Os}^y)} . \quad (4.5)$$

Z zależności tej wynika, że norma wektora strumienia wirnika maszyny w warunkach zmian rezystancji uzwojeń wirnika nawet w stanie ustalonym podlegać może znacznym zmianom w stosunku do wartości, która występuje przy  $\rho=1$ . Zależność normy wektora przestrzennego strumienia wirnika od wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana przedstawiono na rys. 4.5. Z uwagi na parzystość współczynnika  $a(I_{Os}^y)$  względem składowej  $I_{Os}^y$  krzywe na tym rysunku zaprezentowano jedynie dla  $I_{Os}^y \geq 0$ . Z rys. 4.5 oraz z zależności (4.5) wynika, że wzrost normy wektora strumienia wirnika (ponad wartość  $\|\Psi_{Or}\|=1$ ) występuje w sytuacjach gdy  $\rho < 1$ . Stan ten może być szczególnie niebezpieczny dla silnika napędowego z uwagi na możliwość nasycenia jego obwodu magnetycznego nawet w stanach ustalonych.



Rys. 4.5. Zależność normy strumienia wirnika od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana przy różnych wartościach parametru  $\rho$

Warto też podkreślić, że nieliniowa zależność składowych wektora strumienia wirnika od stopnia obciążenia maszyny implikuje również nieliniową zależność momentu obrotowego rozwijanego przez maszynę od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana oraz od pulsacji prądu wirnika  $\Omega_{Or}$ . Zależność ta może być wyznaczona z równania (4.1c), które w stanie ustalonym przybiera postać:

$$\Psi_{Or}^x I_{Os}^y - \Psi_{Or}^y - M_O = 0 . \quad (4.6)$$

Moment elektromagnetyczny w stanie ustalonym może być, przy wykorzystaniu zależności (4.3a) i (4.3b), przedstawiony jako:

$$M_O = I_{Os}^y \frac{(\rho I_{Os}^y)^2 \frac{1}{\rho} + \rho}{1 + (\rho I_{Os}^y)^2} \quad (4.7a)$$

lub przy wykorzystaniu zależności (D1.8b) równoważnie jako:

$$M_O = \Omega_{Or} \frac{(\rho \Omega_{Or})^2 \frac{1}{\rho} + \rho}{1 + (\rho \Omega_{Or})^2} . \quad (4.7b)$$

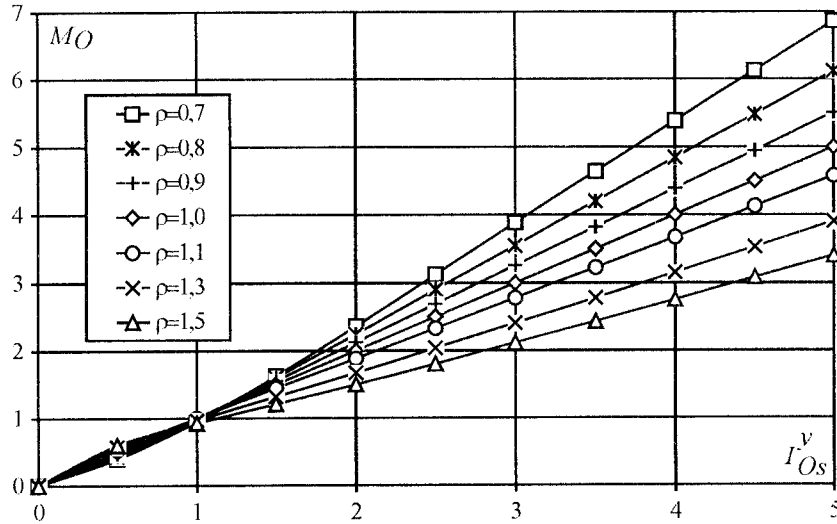
Zależność momentu elektromagnetycznego  $M_O$  od składowej  $I_{Os}^y$  dla różnych wartości parametru  $\rho$  została przedstawiona, w formie charakterystyk, na rys. 4.6. Z uwagi na to, że  $M_O(I_{Os}^y) = -M_O(-I_{Os}^y)$ , na rysunku tym ograniczono się do przedstawienia rodziny odpowiednich krzywych jedynie dla składowej  $I_{Os}^y \geq 0$ . Z rys. 4.6 wynika, że zależność momentu elektromagnetycznego rozwijanego przez maszynę od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana (lub pulsacji prądu wirnika  $\Omega_{Or}$ ) stanowi dla  $\rho \neq 1$  związek nieliniowy. Wielkość i kierunek odchylenia wartości momentu od wartości danych zależnościami:

$$M_O = I_{Os}^y = \Omega_{Or} \quad (4.8)$$

(która jest prawdziwa dla  $\rho = 1$ ) zależy od stanu obciążenia maszyny oraz od wartości parametru  $\rho$ . Z zależności (4.7) oraz rys. 4.6 wynika również, że najmniejsze odchylenia wartości momentu elektromagnetycznego od wartości danych zależno-

ścią (4.8) występują przy takich obciążeniach maszyny asynchronicznej, dla których zachodzi:

$$I_{Os}^y = \Omega_{Or} = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho}}. \quad (4.9)$$



Rys. 4.6. Zależność momentu elektromagnetycznego od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana przy różnych wartościach parametru  $\rho$

Pomimo nieliniowego charakteru zależności momentu elektromagnetycznego rozwijanego przez maszynę od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana (ew. pulsacji prądu wirnika), wartość tej składowej stanowi pewną jednoznaczną miarę stopnia obciążenia napędu. Elementarna analiza zależności (4.7a) dowodzi bowiem, że przy określonej wartości parametru  $\rho$  moment elektromagnetyczny jest ściśle monotoniczną (rosnącą) funkcją składowej  $I_{Os}^y$ . Ściśle monotoniczna i jednoznaczna (choć również nieliniowa) jest także zależność odwrotna. Z uwagi na prostszą postać modeli matematycznych, która występuje przy zastosowaniu składowej  $I_{Os}^y$  zamiast momentu elektromagnetycznego w dalszej części pracy właściwość ta będzie często wykorzystywana.

Z przedstawionej analizy właściwości statycznych maszyny asynchronicznej o sterowaniu zgodnym z zasadą POP wynika, że jej charakterystyki mechaniczne dane w sposób uwikłany przez zależności (4.3c) oraz (4.7a) są również nieliniowe.

Co prawda, efekt ujemnego sprzężenia zwrotnego spowodować może zwiększenie ich liniowości w stosunku do charakterystyk przedstawionych na rys. 4.6, ale skala tej linearyzacji zależy jest (przynajmniej dla regulatora typu P) od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątovej. Wartości tego współczynnika ustala się natomiast biorąc pod uwagę właściwości dynamiczne układu, takie jak stopień stabilności, wielkość przeregulowania itp.

Analiza stabilności układu przeprowadzona zostanie przy wykorzystaniu modelu matematycznego układu w formie pseudoliniowej. Sformułowany w dodatku D3.2 model matematyczny układu w dziedzinie jednostek względnych ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega & -k_\omega \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) & -\frac{1}{\rho} & -k_\omega \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega \Psi_{Or}^x}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Bardziej ogólny charakter dalszych rozważań uzyskać można wprowadzając pewną modyfikację równania stanu (4.10). Liczbę niezależnych parametrów układu można bowiem zmniejszyć, wprowadzając nową względną prędkość kątovej układu oraz nowy względny współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości kątovej zgodnie z zależnościami:

$$\Delta \omega_1 = a \Delta \omega, \quad (4.11)$$

$$k_{\omega w} = \frac{k_\omega}{a}. \quad (4.12)$$

Po tej modyfikacji równanie stanu układu przybiera postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1) & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Warto zauważyć, że dla  $\rho \neq 1$  i dowolnych, skończonych wartości składowej  $I_{O_S}^y$  element  $a_{23} \neq 0$ . Z tego powodu macierz stanu w zależności (4.13) nie da się przedstawić w sposób zgodny z zależnością (2.6), zatem topologia układu nie jest teraz zgodna ze schematem przedstawionym na rys. 2.2. Zgodność ta występuje jedynie w sytuacji, gdy parametr  $\rho = 1$ . Wówczas jednak rozpatrywany przypadek układu napędowego jest całkowicie równoważny przypadkom opisanym w punktach 2.1 oraz 3.1 i ponowne prowadzenie analizy stabilności jest zbędne. Rozpatrywany przypadek układu napędowego można analizować jako układ dynamiczny o schemacie przedstawionym na rys. 4.7. Wprowadzono tu pojęcie *rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego* o wektorze stanu:

$$\Delta \mathbf{x}_{mer} = [\Delta \psi_r^y \quad \Delta \omega_r]^T \quad (4.14)$$

i macierzy stanu:

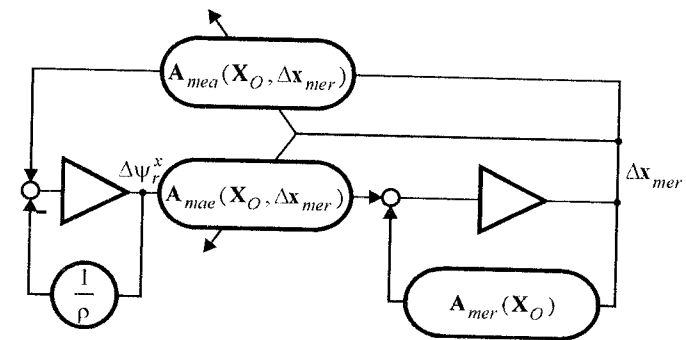
$$\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

oraz pojęcie zredukowanego podsystemu elektromagnetycznego o wektorze stanu:

$$\Delta \mathbf{x}_{mar} = \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

i macierzy stanu:

$$\mathbf{A}_{mar} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$



**Rys. 4.7.** Schemat połączenia rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego ze zredukowanym podsystemem elektromagnetycznym

Oba te podsystemy połączone są w sposób zwrotny, zgodnie z rys. 4.7. Miarą oddziaływania zredukowanego podsystemu elektromagnetycznego na rozszerzony podsystem elektromechaniczny jest norma macierzy:

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = [- (I_{O_S}^y - k_{\omega\omega} \Delta \omega_1) \quad I_{O_S}^y - k_{\omega\omega} \Delta \omega_1]^T. \quad (4.18)$$

Miarą oddziaływania rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego na zredukowany podsystem elektromagnetyczny jest norma macierzy:

$$\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = [I_{Os}^y - k_{\omega\omega} \Delta \omega_1 \quad -k_{\omega\psi} \Psi_{Or}^y]. \quad (4.19)$$

Analiza asymptotycznej stabilności globalnej układu przeprowadzona zostanie dla dwóch podstawowych przypadków. Pierwszy z nich dotyczy sytuacji, gdy rozpatrywane jest zachowanie się układu napędowego dla dowolnych odchyłeń wektora stanu od pojedynczego położenia równowagi danego przez współrzędne wektora stanu ustalonego  $\mathbf{X}_O$  (zależność (4.2)). Drugi przypadek dotyczy takiej sytuacji, gdy rozpatrywane jest zachowanie się układu przy dowolnych odchyleniach wektora stanu od pewnego zbioru położeń równowagi określonych przez odpowiedni zbiór wartości współrzędnych wektora stanu ustalonego  $\mathbf{X}_O$ .

#### 4.1.1. Analiza stabilności globalnej układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym

##### 4.1.1.1. Analiza stabilności globalnej pojedynczych punktów pracy ustalonej układu

W celu oszacowania spodziewanych rezultatów analizy stabilności globalnej w otoczeniu pojedynczego punktu pracy ustalonej poddajmy ocenie wartości elementów poszczególnych podmacierzy macierzy stanu w zależności (4.13). Wykorzystując zależności (4.14)-(4.19) równanie stanu układu można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\mathbf{x}_{mer} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & \mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}_{mer}) \\ \mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}_{mer}) & \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\mathbf{x}_{mer} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Jak wynika z zależności (4.18) i (4.19), wybrane elementy macierzy  $\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}_{mer})$  i  $\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}_{mer})$  zależą (liniowo) od współrzędnej  $\Delta\omega_1$  wektora stanu przyrostowego. Zgodnie z opisaną w punkcie 1.4 metodą parametryzacji współrzędnych wektora stanu do rozstrzygnięcia problemu stabilności globalnej należy zbadać zachowanie układu (4.20) w sytuacji gdy:

$$-\infty < \Delta\omega_1 < +\infty. \quad (4.21)$$

Założmy wstępnie, że do analizy stabilności układu w tych warunkach użyta zostanie forma kwadratowa  $V(\Delta\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{x}^T \mathbf{P} \Delta\mathbf{x}$  mająca symetryczną, dodatnio określoną macierz:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a & \mathbf{P}_{ab} \\ \mathbf{P}_{ab}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Symetryczne, dodatnio określone macierze  $\mathbf{P}_a$  oraz  $\mathbf{P}_b$  mają wymiary zgodne odpowiednio z macierzami  $\mathbf{A}_{mar}$  oraz  $\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O)$ . Do oceny przydatności formy kwadratowej o macierzy (4.22) do badania układu o macierzy stanu (4.20) można wykorzystać rezultaty badań zamieszczone w Dodatku D2 (*Przypadek 1*). Rolę macierzy  $\mathbf{A}_{ba}$  pełni w tym wypadku macierz  $\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta\mathbf{x}_{mer})$ , której elementy zależą liniowo od spełniającej relację (4.21) współrzędnej  $\Delta\omega_1$  wektora sta-

nu przyrostowego. Zgodnie z metodą parametryzacji współrzędnych wektora stanu zachowanie się układu powinno być zbadane dla obu skrajnych wartości współrzędnej  $\Delta\omega_1$ , potraktowanej jako zmienny parametr. Poddajmy w tych warunkach analizie wartość pochodnej (D2.5) w Dodatku D2. Załóżmy również dla uproszczenia, że właściwości układu będą badane w sytuacji, gdy pełniącą rolę wektora stanu  $\mathbf{x}_a$  (zależność (D2.1)) współrzędna  $\Delta\psi_r^x$  (zależność (4.20)) spełnia warunek:  $\Delta\psi_r^x = 0$ . W tych warunkach niezerowe wartości mają jedynie drugi i czwarty składnik prawej strony zależności (D2.5). Łatwo można wykazać, że przy doborze macierzy  $\mathbf{P}$  zgodnie z zależnością (4.22) niemożliwe jest uzyskanie ujemnej określoności sumy drugiego i czwartego składnika prawej zależności (D2.5) w sytuacji, gdy potraktowana jako zmienny parametr współrzędna  $\Delta\omega_1$  spełnia warunek (4.21). Z przedstawionych rozważań wynika, że znalezienie funkcji Lapunowa wspólnej dla zbioru układów dynamicznych (4.20) (ew. 4.13)) przy spełnieniu warunku (4.21) nie jest możliwe przy wykorzystaniu macierzy o strukturze (4.22). Łatwo można wykazać, że warunkiem koniecznym pomyślnego rezultatu testu Lapunowa w opisanych wyżej warunkach jest użycie testującej formy kwadratowej mającej macierz typu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

gdzie liczba wierszy macierzy  $\mathbf{0}$  jest zgodna z wymiarem macierzy  $\mathbf{P}_a$ , a jej liczba kolumn jest równa liczbie kolumn kwadratowej macierzy  $\mathbf{P}_b$ . Przy takiej strukturze macierzy testującej formy kwadratowej niezerowy pozostaje jedynie pierwszy, drugi oraz piąty składnik prawej strony zależności (D2.5). Fakt ten ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ pozwala zawęzić obszar poszukiwań funkcji Lapunowa układu do klasy form kwadratowych o macierzy danej zależnością (4.23), która zawiera więcej elementów zerowych niż macierz (4.22). Można ponadto wykazać, że w tej klasie macierzy istnieje taka symetryczna macierz:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{b11} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{b11} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

dodatnio określonej formy kwadratowej, której pochodna liczona wzdłuż trajektorii systemu (4.13) ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = & -\frac{2}{\rho} (p_{b11} - 1) (\Delta \Psi_r^x)^2 + \\ & + \left[ \Delta \Psi_r^y \quad \Delta \omega_1 \right] \left( \mathbf{A}_{mer}^T(\mathbf{X}_O) \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \right) \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} + \\ & - 2(p_{b11} - 1) k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \Delta \omega_1 \Delta \Psi_r^x. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Współczynniki powyższej formy kwadratowej nie zawierają elementów  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  macierzy stanu (zależność (4.13)) i w konsekwencji nie zależą od współrzędnych wektora stanu przyrostowego. Wynika to stąd, że przy strukturze macierzy testującej formy kwadratowej, zgodnej z zależnością (4.24) wzajemnej kompensacji podlegają te elementy piątego, biliniowego składnika prawej strony zależności (D2.5), którego współczynniki zależą liniowo od współrzędnej  $\Delta \omega_1$ . W konsekwencji ujemna określoność formy (4.25) nie nakłada żadnych ograniczeń na wartości współrzędnych wektora stanu przyrostowego. W szczególności, ujemna określoność formy (4.25) może być zachowana również przy spełnieniu relacji (4.21). Wynika stąd, że optymalna do rozstrzygnięcia stabilności globalnej forma kwadratowa musi należeć do klasy form o macierzy (4.24). Fakt ten ma bardzo duże znaczenie praktyczne, ponieważ jedynym swobodnym elementem tej macierzy, który powinien podlegać optymalizacji jest element  $p_{b11}$ .

Z warunku dodatniej określoności testującej formy kwadratowej wynika, że wartość elementu  $p_{b11}$  macierzy (4.24) ograniczona jest przez nierówność:

$$p_{b11} > 1. \quad (4.26)$$

Analiza asymptotycznej stabilności globalnej przeprowadzona zostanie przy wykorzystaniu bezpośredniej metody Lapunowa na drodze numerycznej optymalizacji funkcji-kandydata na funkcję Lapunowa. Prawdą jest, że w rozpatrywanym tu konkretnym (stosunkowo prostym) przypadku zagadnienie może być rozwiązane również analitycznie. Ten sposób rozwiązania zadania zawodzi jednak w rozpatrywanych dalej, bardziej złożonych przypadkach. Celem zachowania spójności w formie prezentacji uzyskanych rezultatów analizy autor świadomie rezygnuje w tym punkcie rozdziału 4 z rozwiązania analitycznego. Dodatkowym czynnikiem przemawiającym za numeryczną drogą rozwiązania problemu jest to, że wartość uzyskanego w procesie optymalizacji wskaźnika jakości poza rozstrzygnięciem (w rozumieniu warunków dostatecznych) problemu stabilności dostarcza dodatkowych informacji o właściwościach dynamicznych układu.

Optymalizacji numerycznej w procesie poszukiwania optymalnej formy kwadratowej podlegał bezwzględny wskaźnik jakości  $\eta_1$ , zdefiniowany następująco:

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \min_{\Delta \mathbf{x} \in R} \left\{ \frac{-dV(\Delta \mathbf{x})/dt}{V(\Delta \mathbf{x})} \right\}, \quad \|\Delta \mathbf{x}\| \neq 0. \quad (4.27)$$

Jak wyjaśniono w rozdziale 1, dodatnie wartości tego wskaźnika można interpretować jako odwrotność największej stałej czasowej, z którą gwarantowane jest eksponencjalne zanikanie normy wektora stanu badanego układu dynamicznego.

Zastosowanie metody parametryzacji współrzędnych wektora stanu pozwala sprowadzić problem znalezienia optymalnej testującej formy kwadratowej, dla układu (4.20) (ew. (4.13)) przy spełnieniu warunku (4.21), do standardowego zadania optymalizacji tej formy względem zbioru macierzy stanu, danego zależnością:

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}_0 + d_1 \Delta \mathbf{A}_1 + d_2 \Delta \mathbf{A}_2 + \dots + d_n \Delta \mathbf{A}_n, \quad (4.28)$$

gdzie:

$$\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \dots d_n]^T \quad (4.29)$$

jest  $n$ -elementowym wektorem parametrów układu. Wartości tych elementów ograniczone są przez nierówności:

$$D_{i \min} \leq d_i \leq D_{i \max}. \quad (4.30)$$

Rolę zmiennego parametru pełni w tym wypadku współrzędna  $\Delta \omega_1$  wektora stanu przyrostowego. Z uwagi na opisaną wyżej niezależność pochodnej testującej formy kwadratowej (zależność (4.25)) od współrzędnych wektora stanu przyrostowego proces optymalizacji wartości elementu  $p_{b11}$  nie musi być prowadzony dla obu skrajnych wartości współrzędnej  $\Delta \omega_1$ , wyznaczonych przez warunek (4.21). Ze struktury zależności (4.25) oraz (4.27) wynika, że proces optymalizacji wartości elementu  $p_{b11}$  wystarczy przeprowadzić jedynie dla jednej macierzy stanu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ 0 & -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Z uwagi na opisaną wyżej niezależność współczynników formy kwadratowej (4.25) od elementów macierzy stanu zawierających współrzędne wektora stanu przyrostowego powyższa macierz utworzona została z macierzy stanu w równaniu (4.13) przez podstawienie  $a_{12} = a_{21} = a_{31} = 0$ . Pozwala to znacznie usprawnić proces obliczeń optymalizacyjnych elementu  $p_{b11}$ .

Prezentację rezultatów uzyskanych na drodze numerycznej optymalizacji warto poprzedzić ważnym spostrzeżeniem, które pozwala oszacować oczekiwane rezultaty już na tym etapie analizy. Z zależności (4.24) oraz (4.25) wynika mianowicie, że wartości wskaźnika jakości (4.27) ograniczone są nierównością:

$$\eta_1 \leq \frac{1}{\rho}. \quad (4.32)$$

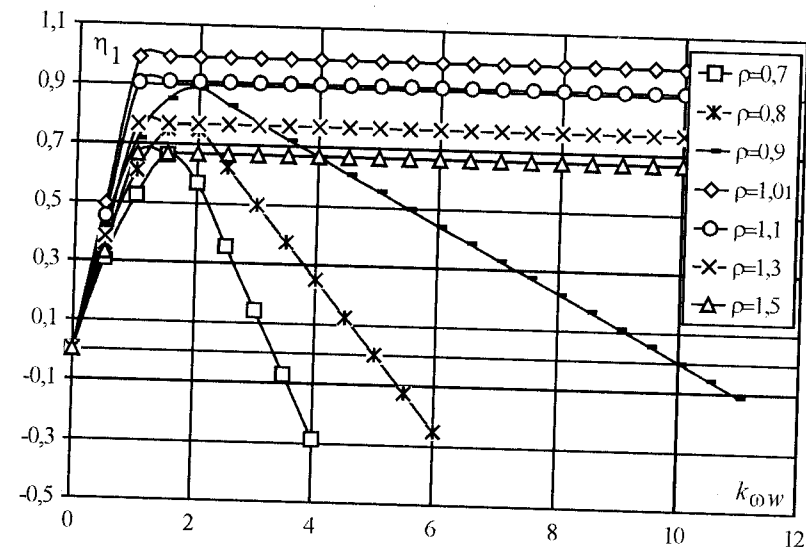
- Praktycznie oznacza to, że efekt zmian rezystancji uzwojeń wirnika będzie generować powstawanie w przebiegach przejściowych współrzędnych wektora stanu takich składowych, które zanikać będą ze stałą czasową o wartości równej parametrowi  $\rho$  (lub jeszcze wolniej). Z zależności (4.25) oraz (4.27) wynika również, że wartość wskaźnika jakości  $\eta_1 = \frac{1}{\rho}$  osiągana będzie w przestrzeni stanu na każdym wektorze spełniającym zależność:

$$\Delta \mathbf{x} = [\Delta \psi_r^x \quad 0 \quad 0]^T. \quad (4.33)$$

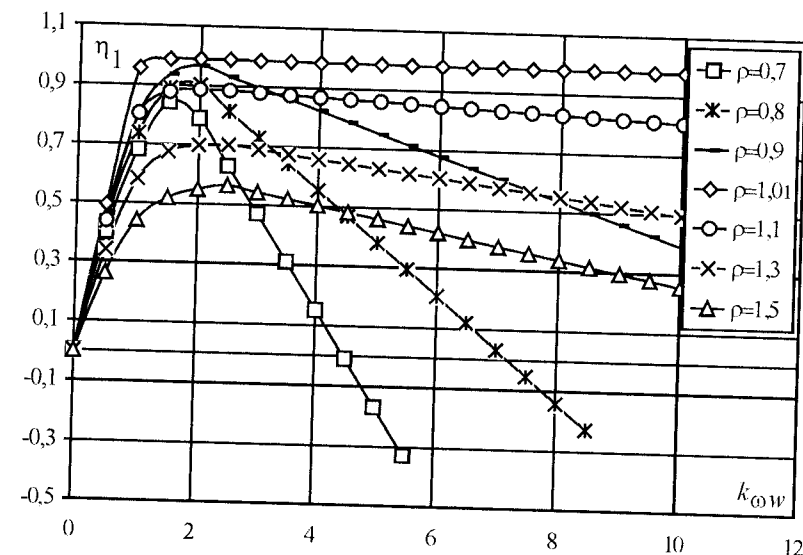
Rezultaty uzyskane na drodze numerycznej optymalizacji wskaźnika jakości (4.27) przedstawione zostały na rys. 4.8-4.11. Na rysunkach tych przedstawione są w postaci graficznej zależności wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  od względnego współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej  $k_{\omega w}$ , przy różnych wartościach parametru  $\rho$ . Wartości składowych wektora przestrzennego strumienia wirnika występujące w macierzy stanu (4.31) obliczane były z zależności (4.3a) oraz (4.3b), po uprzednim przyjęciu określonego stopnia obciążenia układu, którego miarą jest wartość składowej  $I_{O_s}^y$  wektora prądu stojana.

Cechą wspólną prezentowanych wykresów jest ich znaczna regularność oraz występowanie wyraźnego maksimum w otoczeniu wartości współczynnika wzmocnienia w przedziale  $k_{\omega w} \approx 1 \div 3$ . Z przedstawionych rezultatów wynika również, że osiągnięcie przez wskaźnik jakości wartości  $\frac{1}{\rho}$ , niezależnie od wartości

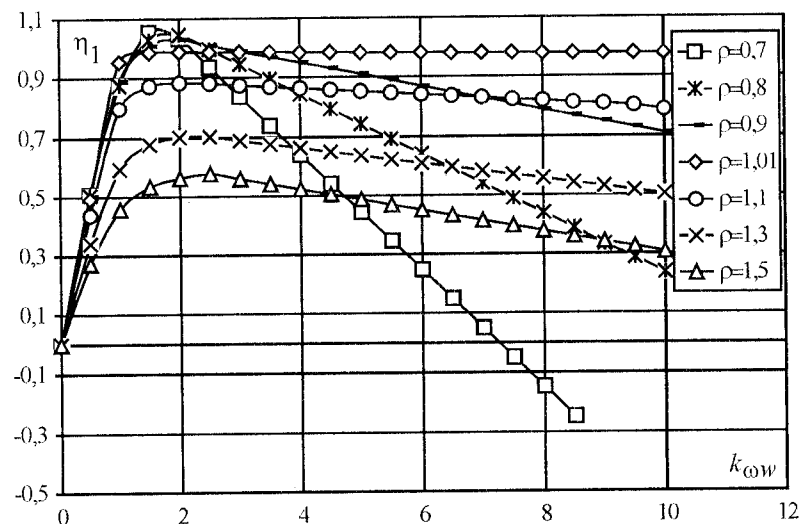
wskaźnika wzmocnienia, jest możliwe jedynie w sytuacji, gdy  $I_{O_s}^y = 0$  i jednocześnie  $\rho \geq 1$ .



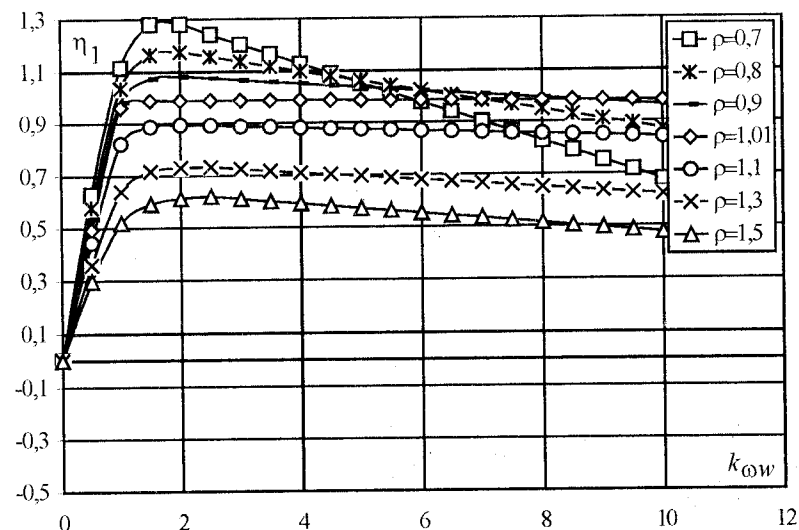
Rys. 4.8. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ , składowa  $I_{O_s}^y = 0$



Rys. 4.9. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ , składowa  $I_{O_s}^y = 1$



**Rys. 4.10.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$ , składowa  $I_{Os}^y = 2$



**Rys. 4.11.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$ , składowa  $I_{Os}^y = 5$

Z przynależności macierzy optymalnej formy kwadratowej do klasy danej zależnością (4.24) wynika również pewna właściwość. Struktura pochodnej formy kwadratowej (4.25) oraz parzystość współczynnika  $a(I_{Os}^y)$  i nieparzystość współczynnika  $b(I_{Os}^y)$  względem składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana pozwalają wykazać, że zachodzi:

$$\eta_1[A(I_{Os}^y, k_{oww}, \rho)] = \eta_1[A(-I_{Os}^y, k_{oww}, \rho)], \quad (4.34)$$

gdzie  $A$  jest macierzą stanu z zależności (4.31). Przedstawione dla określonej wartości składowej  $I_{Os}^y$  wykresy niosą więc dodatkowo informację o właściwościach układu, również dla ujemnych wartości tej składowej. Z uwagi na nieliniowy charakter zależności współczynników  $a(I_{Os}^y)$  oraz  $b(I_{Os}^y)$  od składowej  $I_{Os}^y$  nie można jednak, w ogólnym przypadku, z tej właściwości wnioskować o zachowaniu się układu dla wartości pośrednich tej składowej.

Z zaprezentowanych rezultatów wynika, że istnieje taki zbiór wartości parametrów, w którym zagwarantowana jest globalna stabilność asymptotyczna układu. W tym sensie zaprezentowane tu wyniki mają określone znaczenie poznawcze. Prowadzenie bliższej analizy ilościowej zaprezentowanych rezultatów nie wydaje się jednak celowe z uwagi na ich ograniczoną przydatność praktyczną. Trzeba bowiem wyraźnie podkreślić, że gwarancja eksponencjalnego zanikania procesów przejściowych ze stałą czasową określoną przez wartości wskaźnika jakości (4.27) dotyczy tu pojedynczego punktu pracy ustalonej wyznaczonego wartością składowej  $I_{Os}^y$  (ewentualnie pary punktów danych zależnością (4.34)). Zdecydowana większość układów napędowych pracuje natomiast w warunkach zmiennego obciążenia, a wtedy bardziej przydatna wydaje się analiza właściwości dynamicznych układu w sytuacji, gdy ograniczeniu podlega jedynie wartość bezwzględna składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana.

#### 4.1.1.2. Analiza stabilności globalnej zbioru punktów pracy ustalonej układu

W tym fragmencie pracy analizie stabilności globalnej poddany zostanie zbiór układów napędowych wygenerowany przez potraktowaną jako zmienny parametr składową  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Zgodnie z zależnością (4.7a) wartość tej składowej zależy od stopnia obciążenia napędu. Dla uproszczenia wyrażeń prezen-

towany tu sposób rozwiązania problemu będzie nazywany *podejściem zbiorowym* w odróżnieniu od *podejścia punktowego* prezentowanego w poprzednim punkcie tego rozdziału. Zagadnienie to wymaga jednak pewnego komentarza.

Zgodnie z przyjętym we wstępie do tego rozdziału założeniem upraszczającym, analizowane modele matematyczne układów napędowych opracowane zostały przy założeniu, że wartości sygnałów prędkości zadanej i momentu zewnętrznego (a więc i składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana) są stałe w czasie. Użyta do analizy właściwości układu metoda badawcza pozwala zaś (przy podejściu zbiorowym) znaleźć wspólną dla określonego zbioru dopuszczalnych punktów pracy ustalonej optymalną formę kwadratową. Uzyskana w procesie optymalizacji względem tego zbioru wartość wskaźnika jakości (4.27) jest zagwarantowana niezależnie od sposobu przemieszczania się punktu pracy układu w czasie i pozostaje niezmienna nawet przy jego skokowych zmianach w ramach przyjętego zbioru. W tym sensie gwarancją stabilności objęta jest nie tylko klasa modeli zgodna z założeniami upraszczającymi ale także pewna, nie mająca tu interpretacji fizycznej, klasa modeli o „zmiennym punkcie pracy ustalonej”. Z drugiej jednak strony brak pozytywnego rezultatu testu stabilności przeprowadzonego w odniesieniu do całego zbioru punktów pracy ustalonej nie wyklucza, że stabilne mogą być pojedyncze elementy macierzowe, leżące w granicach tego zbioru lub nawet ich określone otoczenia. Zagadnienie to może być rozwiązane w sposób analogiczny do analizy układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR w punkcie 3.4, z tym że teraz należy również uwzględnić nieliniowy charakter zależności składowych wektora strumienia wirnika  $\Psi_{Or}$  od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Taki sposób rozwiązania zadania jest, oczywiście, możliwy, jest to jednak zadanie bardzo pracochłonne. Jak zwykle w takich wypadkach pojawia się pytanie o stopień różnicy między obszarami określonymi tymi dwoma sposobami. Ocena porównawcza obu rozwiązań przedstawiona zostanie w dalszej części tego punktu.

Na wstępie przeprowadzona zostanie analiza właściwości dynamicznych układu właściwa dla podejścia zbiorowego.

Założmy, że analiza stabilności układu przeprowadzona zostanie dla przypadków, gdy składowa  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana spełnia nierówność:

$$|I_{Os}^y| \leq B, \quad (4.35)$$

gdzie  $B$  jest pewną stałą dodatnią. Z przyjętego systemu jednostek względnych (zależność D1.5) wynika, że w jednostkach fizycznych zachodzi:  $|\dot{i}_{SF}^y| \leq B I_{\mu F}$ .

Dla zdecydowanej większości maszyn asynchronicznych wartość stałej  $B$  bardzo rzadko przekracza liczbę 5.

Jeżeli przyjąć, że współrzędnymi wektora parametrów  $\mathbf{d}$  są:

$$d_1 = a_{12} = a_{31} = -a_{21} = I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1, \quad (4.36)$$

$$d_2 = \Psi_{Or}^x, \quad (4.37)$$

$$d_3 = \Psi_{Or}^y, \quad (4.38)$$

to macierz stanu w zależności (4.13) można przedstawić w postaci zgodnej z zależnością (4.28). Zgodnie z metodą parametryzacji wektora stanu, w etapie wstępnym, należy przeprowadzić optymalizację testującej formy kwadratowej względem ośmiu macierzy wierzchołkowych utworzonych dla granicznych wartości parametrów  $d_1, d_2, d_3$ . Z zależności (4.3) wynika, że model matematyczny układu (4.13), przy spełnieniu warunków (4.21) i (4.35), należy do klasy danej zależnością (1.64). W związku z tym, optymalna forma kwadratowa do badania stabilności układu ma macierz daną zależnością (4.23) [32]. Podobnie jak przy podejściu punktowym, w ramach tej klasy, warunkiem koniecznym uzyskania pozytywnego rezultatu testu Lapunowa dla określonego wyżej zbioru układów dynamicznych jest przynależność macierzy testującej formy kwadratowej do klasy (4.24). Obliczana wzdłuż dowolnej trajektorii układu (4.13) pochodna testującej formy kwadratowej jest wówczas zgodna z zależnością (4.25). Współczynniki formy kwadratowej pochodnej (4.25) nie zależą od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu układu, zawierających współrzędną  $\Delta \omega_1$  wektora stanu. Potwierdza to szczególną przydatność formy kwadratowej o macierzy (4.24) do analizy stabilności globalnej układu również przy podejściu zbiorowym.

Analiza pochodnej (4.25) pozwala ponadto zauważyć, że pochodna ta ma pewne właściwości pozwalające ograniczyć liczbę testowanych wierzchołków, a w konsekwencji skrócić czas obliczeń optymalizacyjnych.

Z uwagi na niezależność współczynników formy kwadratowej (4.25) od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu, podobnie jak poprzednio, testowanie układu dla współrzędnej  $d_1 \neq 0$  jest zbędne. Analogicznie jak przy podejściu punktowym podstawę do analizy układu stanowić więc może macierz stanu (4.31). Przy podejściu zbiorowym należy jednak uwzględnić nieliniową zależność składowych wektora strumienia wirnika  $\Psi_{Or}$  od składowej  $I_{Os}^y$  (zgodnie z zależnościami (4.3)).

Ze struktury macierzy (4.24) oraz zależności (4.25) wynika, że wskaźnik jakości (4.27) posiada następującą właściwość:

$$\eta_1(\Psi_{Or}^y) = \eta_1(-\Psi_{Or}^y). \quad (4.39)$$

Z zależności (4.24) oraz (4.25) wynika również, że jeżeli iloraz form kwadrato-  
wych:

$$\kappa = \frac{-dV(\Delta \mathbf{x})/dt}{V(\Delta \mathbf{x})} \quad (4.40)$$

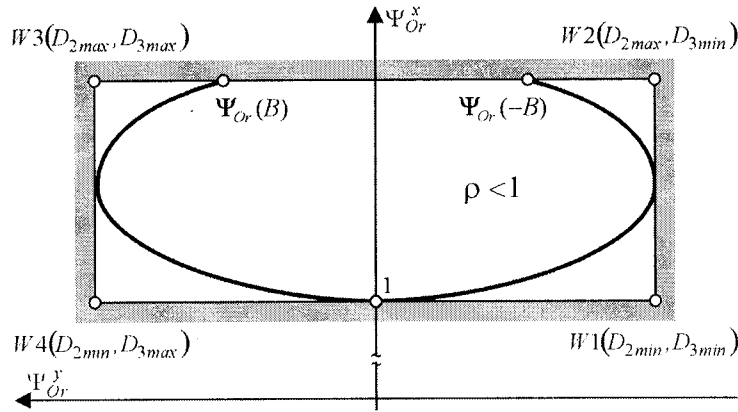
osiąga (dla składowej  $\Psi_{Or}^y$ ) wartość wskaźnika jakości (4.27) na wektorze:

$$\Delta \mathbf{x} = [\Delta \psi_r^x \quad \Delta \psi_r^y \quad \Delta \omega_1]^T, \quad (4.41)$$

to ta sama wartość ilorazu (4.40) osiągana jest (dla składowej  $-\Psi_{Or}^y$ ) na wektorze:

$$\Delta \mathbf{x} = [-\Delta \psi_r^x \quad \Delta \psi_r^y \quad \Delta \omega_1]^T. \quad (4.42)$$

Dodatkowe, formalne uzasadnienie powyższych rozważań można znaleźć w pracy [32].



**Rys. 4.12.** Miejsce geometryczne końca wektora strumienia wirnika w stanie ustalonym dla parametru  $\rho < 1$

Z przedstawionych rozważań wynika, że obliczenia optymalizacyjne formy testującej o macierzy należącej do klasy (4.24) wystarczy przeprowadzać dla wierzchołków  $W1(D_{2min}, D_{3min})$  oraz  $W2(D_{2max}, D_{3min})$  prostokątnego obszaru przedstawionego na rys. 4.12. Powyższe spostrzeżenia pozwoliły więc na czterokrotne zredukowanie liczby testowanych wierzchołków w stosunku do sytuacji wyjściowej. Sposób formowania tego prostokąta opisany zostanie dalej, ale usytu-

owanie jego wierzchołków (w kategoriach jakościowych) wynika bezpośrednio z zależności (4.3) oraz (4.35).

Fakt, że zredukowana została liczba reprezentatywnych wierzchołków prostopadłościanu nie zmienia jednak nieliniowego charakteru zależności składowych wektora strumienia wirnika od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Przy badaniu stabilności układu w zakresie zmienności składowej  $I_{Os}^y$  określonym zależnością (4.35) musi być ona bezwzględnie wzięta pod uwagę. Z uwagi na to, że elementy macierzy stanu w zależności (4.13) zależą liniowo od składowych  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$ , do rozwiązania zadania można posłużyć się tzw. „techniką wpisywania” [67]. Z analizy zależności (4.3) wynika, że krzywa, jaką zakresła koniec wektora strumienia wirnika w stanie ustalonym na płaszczyźnie  $(\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x)$ , może być wpisana w prostokąt. Przykładowy sposób wpisania tej krzywej w prostokąt przedstawia rys. 4.12. Współrzędne wierzchołków tego prostokąta można wyznaczyć wykorzystując zależności (4.3a), (4.3b), (4.3d) i (4.3e). Łatwo można wykazać, że wartości tych współrzędnych ograniczone są następującymi zależnościami:

$$D_{2min} = 1 \leq \Psi_{Or}^x(I_{Os}^y) \leq \Psi_{Or}^x(B) = D_{2max} \quad \text{dla } \rho < 1, \quad (4.43a)$$

$$D_{2max} = 1 \geq \Psi_{Or}^x(I_{Os}^y) \geq \Psi_{Or}^x(B) = D_{2min} \quad \text{dla } \rho > 1 \quad (4.43b)$$

oraz:

$$D_{3min} = \Psi_{Or}^y(-B) \leq \Psi_{Or}^y(I_{Os}^y) \leq \Psi_{Or}^y(B) = D_{3max} \quad \text{dla } \rho < 1 \quad i \quad B \leq \frac{1}{\rho}, \quad (4.44a)$$

$$D_{3min} = \Psi_{Or}^y(B) \leq \Psi_{Or}^y(I_{Os}^y) \leq \Psi_{Or}^y(-B) = D_{3max} \quad \text{dla } \rho > 1 \quad i \quad B \leq \frac{1}{\rho}, \quad (4.44b)$$

$$D_{3min} = -0,5 \frac{1-\rho}{\rho} \leq \Psi_{Or}^y(I_{Os}^y) \leq 0,5 \frac{1-\rho}{\rho} = D_{3max} \quad \text{dla } \rho < 1 \quad i \quad B \geq \frac{1}{\rho}, \quad (4.44c)$$

$$D_{3min} = 0,5 \frac{1-\rho}{\rho} \leq \Psi_{Or}^y(I_{Os}^y) \leq -0,5 \frac{1-\rho}{\rho} = D_{3max} \quad \text{dla } \rho > 1 \quad i \quad B \geq \frac{1}{\rho}. \quad (4.44d)$$

Proces „wpisania” nieliniowej krzywej w prostokąt niesie za sobą pewnego rodzaju „nadmiar” w oszacowaniu możliwych położenia końca wektora strumienia skojarzonego wirnika. Możliwe jest oczywiście wpisanie tej krzywej w inny wypukły, lepiej dopasowany wielobok. Tego rodzaju działanie prowadzi jednak do wzrostu liczby wierzchołków, które muszą być testowane w procesie optymalizacji macierzy formy kwadratowej, a w konsekwencji do wzrostu czasu obliczeń. Pewną miarą jakości oszacowania może być odległość testowanych wierzchołków prostokąta od brzegu obszaru zamkniętego krzywą, jaką zakreśla koniec wektora przestrzennego strumienia wirnika, przy zmianach wartości składowej  $I_{O_s}^y$ , w granicach warunku (4.35).

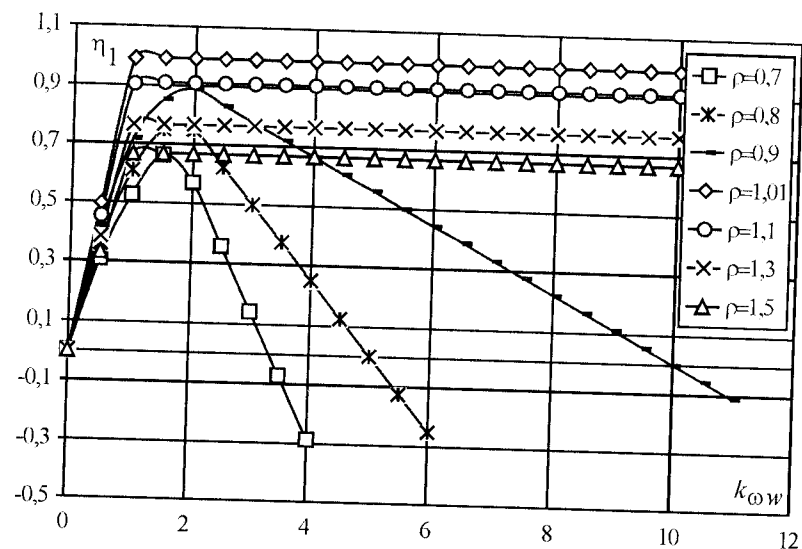
Wyniki przeprowadzonej analizy zaprezentowane są w formie graficznej na rys. 4.13-4.16. Analizę przeprowadzono dla przypadków, gdy stała  $B$  w zależności (4.35) wynosi odpowiednio 0, 1, 2 oraz 5.

Jak wynika z przedstawionych rezultatów istnieje taki zbiór wartości parametrów, dla którego gwarantowana jest stabilność globalna układu. Innymi słowy, istnieje niepusty zbiór wartości parametrów  $k_{\omega w}$  oraz  $\rho$ , dla którego istnieje taka forma kwadratowa, która gwarantuje pozytywny wynik testu Lapunowa dla wartości składowej  $I_{O_s}^y$ , spełniających nierówność (4.35), oraz dla dowolnych wartości współrzędnych wektora stanu przyrostowego.

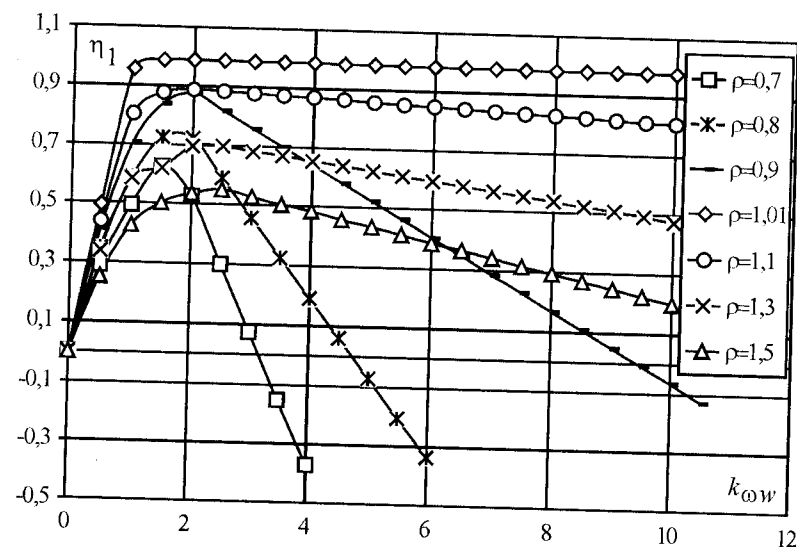
Podobnie, jak na prezentowanych poprzednio rysunkach, uzyskane krzywe cechuje znaczna regularność. Maksimum wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  występuje teraz w przedziale  $1 \leq k_{\omega w} \leq 3$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  lub  $1 \leq k_{\omega w} \leq 2$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . Wykorzystanie zależności (4.12) umożliwia przeliczenie tych zakresów wartości w dziedzinę wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega}$ , zdefiniowanego zależnością (D1.16). Uplasowanie maksimum wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  w dziedzinie współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega}$  ma miejsce w przedziałach  $a \leq k_{\omega} \leq 3a$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  lub  $a \leq k_{\omega} \leq 2a$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ .

Zdefiniowane w ten sposób zakresy wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej określają jego wartości optymalne w sensie największej odporności układu na efekt zmian wartości rezystancji uzwojeń wirnika maszyny. Jak wynika z przedstawionych rezultatów, optymalne w tym sensie wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega}$  zależą jednoznacznie od stałej  $a$  układu napędowego.

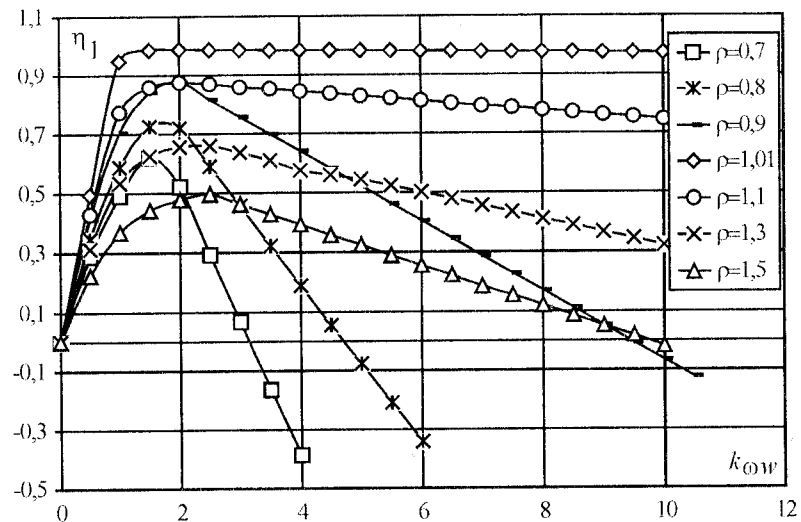
Analogicznie, jak w przypadku analizowanym w poprzednim punkcie, wskaźnik jakości osiąga wartość  $1/\rho$ , prawie niezależnie od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości jedynie w sytuacji, gdy  $I_{O_s}^y = 0$  i jednocześnie  $\rho \geq 1$ .



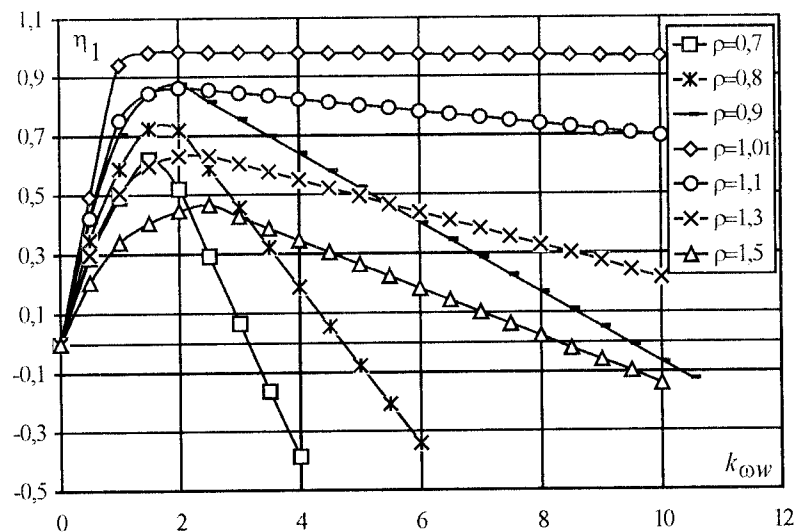
Rys. 4.13. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ , stała  $B = 0$



Rys. 4.14. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ , stała  $B = 1$



Rys. 4.15. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$ , stała  $B = 2$



Rys. 4.16. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$ , stała  $B = 5$

- Z zaprezentowanych rezultatów wynika również, że znacznie mniejszy zakres wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  gwarantujących stabilność globalną układu występuje dla  $\rho < 1$ . Wynika stąd, że również z uwagi na właściwości dynamiczne bezpieczniej jest dokonywać wstępnej oceny wartości rezystancji uzwojeń wirnika dla maszyny nagrzanej niż dla uzwojeń o temperaturze otoczenia.
- Porównanie przedstawionych krzywych prowadzi również do wniosku, że zależność wskaźnika jakości od współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla  $\rho < 1$  jest praktycznie taka sama, niezależnie od wartości stałej  $B$ . Sugeruje to, że o właściwościach dynamicznych układu decydują, w tych warunkach, wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O)$  rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego, obliczane dla stanu biegu jałowego (składowa  $I_{Os}^y \approx 0$ ).
- Z porównania zaprezentowanych rysunków wynika także, że większy zakres wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$ , przy których zagwarantowana jest stabilność globalna, występuje dla  $\rho > 1$  w sytuacjach, gdy stała  $B$  ma mniejsze wartości. W praktyce oznacza to, że napędy z silnikami o większym udziale prądu magnesującego w całkowitym prądzie stojana cechuje, w tych warunkach, mniejsza wrażliwość na zmiany rezystancji uzwojeń wirnika. Potwierdzeniem tego są krzywe z rys. 4.13, uzyskane dla  $\rho > 1$ , a wyznaczone dla stanu biegu jałowego.

Właściwość ta może być wykorzystana w praktyce w napędach z mechanizmami adaptacji, w których na etapie wstępnego dostrajania układu do silnika napędowego zażądać można odłączenia go od maszyny roboczej. W tych warunkach możliwe jest, jak widać, dostrajanie układu bez obawy o utratę stabilności, o ile w układzie sterowania spełniony jest warunek  $\rho > 1$ . Uzyskane rezultaty mogą być również, w ograniczonym zakresie, wykorzystane przy analizie stabilności układów pracujących z mechanizmami adaptacji. Ograniczony zakres wynika stąd, że przy formułowaniu modeli matematycznych poszczególnych wersji układów założono, że wskutek zmian temperatury silnika następuje zmiana wartości rezystancji uzwojeń wirnika, stała zaś pozostaje wartością współczynnika proporcjonalności w torze formowania sygnału pulsacji wirnika (zależność (D1.3)). W procesie analizy układów zaopatrzonych w mechanizmy adaptacji należałoby natomiast uwzględnić dynamiczne zmiany wartości tego współczynnika. Z uwagi na stosunkowo duże ciepłe stałe czasowe wartość rezystancji uzwojeń wirnika może być wówczas uważana za stałą. Uwzględnienie dynamiki procesu adaptacyjnego dostrajania stwarza więc konieczność analizy innych, niż prezentowane w tej pracy, modeli matematycznych. Równoważność tych modeli występuje jedynie przy założeniu, że oba procesy (ciepłych zmian rezystancji i adaptacyjnego dostrajania)

zachodzą w sposób quasi-stacjonarny. Wszelkie uogólnienia rezultatów na układy pracujące z mechanizmami adaptacji będą w ramach tej pracy prowadzone tylko przy takim założeniu.

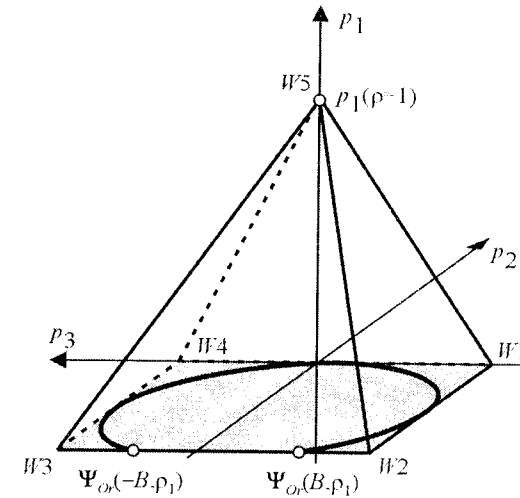
Dodatkowym wnioskiem praktycznym, który może być w tych warunkach sformułowany jest zalecenie takiego sposobu dostrajania rezystancji uzwojeń wirnika, aby proces ten pozbawiony był przeregulowania, a zbliżanie się estymowanej wartości rezystancji wirnika do jej wartości rzeczywistej następowało jedynie przy spełnieniu warunku  $\rho > 1$ .

W tym kontekście warto również zwrócić uwagę na pewną, ograniczoną możliwość analizy właściwości układu również przy szybkich zmianach wartości parametru  $\rho$ . Wykorzystując zależności (4.3a)-(4.3e) równanie stanu (4.13) można przedstawić również w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \frac{1-\rho}{\rho} & I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -k_{\omega w} \frac{1-\rho}{\rho} b(I_{Os}^y) \\ -(I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1) & -1 - \frac{1-\rho}{\rho} & -k_{\omega w} \frac{1-\rho}{\rho} [1 - a(I_{Os}^y)] \\ I_{Os}^y - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -1 & -k_{\omega w} \left[ 1 + \frac{1-\rho}{\rho} a(I_{Os}^y) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Dla uproszczenia prowadzonych rozważań wprowadźmy pojęcie parametrów:  $p_1 = \frac{1-\rho}{\rho}$ ,  $p_2 = \frac{1-\rho}{\rho} a(I_{Os}^y) = \Psi_{Or}^x - 1$ ,  $p_3 = \frac{1-\rho}{\rho} b(I_{Os}^y) = \Psi_{Or}^y$ . Łatwo można zauważyć, że elementy macierzy stanu w równaniu (4.45) zależą liniowo od parametrów  $p_1, p_2, p_3$ . Parametry te zależą natomiast nieliniowo od parametru  $\rho$  oraz składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Do rozwiązywania zadania posłużyć się można również „techniką wpisywania” [67]. Rozpatrzmy dokładniej wartości parametrów  $p_1, p_2, p_3$ , wykorzystując zależności (4.3a)-(4.3e) oraz rys. 4.2-4.4. Jeżeli za podstawę do analizy przyjąć określoną wartość stałej  $B$  oraz określoną wartość parametru  $\rho_1 > 1$ , to z zależności tych wynika, że punkt o współrzędnych  $p_1, p_2, p_3$ , obliczonych dla parametru  $1 \leq \rho \leq \rho_1$  leży we wnętrzu ostrosłupa przedstawionego na rys. 4.17. Podstawę tego ostrosłupa (leżącą w płaszczyźnie  $(p_2, p_3)$ ) stanowi prostokąt zamykający krzywą  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$  (analogiczny do

prostokąta z rys. 4.12). Analiza zależności (4.3a)-(4.3e) prowadzi do wniosku, że podobnego procesu wpisywania nie można, niestety, przeprowadzić dla  $\rho < 1$ .



**Rys. 4.17.** Ostrosłup zawierający zbiór punktów pracy ustalonej układu dla szybkich zmian parametru  $\rho$  (w zakresie  $\rho \geq 1$ )

Z przedstawionych rozważań wynika, że gwarancję stabilności układu przy szybkich zmianach wartości parametru  $\rho$  w granicach  $1 \leq \rho \leq \rho_1$  uzyskać można uzupełniając proces optymalizacji testującej formy kwadratowej o macierz stanu właściwą wierzchołkowi  $W5$  ostrosłupa (obliczoną dla  $\rho = 1$ ). Przy podejściu bardziej pasywnym wystarczy sprawdzić, czy uzyskana w procesie optymalizacji względem wierzchołków  $W1-W4$  wspólna funkcja Lapunowa jest również funkcją Lapunowa dla macierzy odpowiadającej wierzchołkowi  $W5$ . Dla wszystkich punktów wyróżnionych na rys. 4.14-4.16, dla których wskaźnik jakości  $\eta_1 > 0$ , na krzywych obliczonych dla  $\rho = 1,5$  przeprowadzono tego rodzaju test z wynikiem pozytywnym. Stanowi to gwarancję, że dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  (przy danej wartości stałej  $B$ ) układ napędowy zachowuje w tych warunkach stabilność globalną również przy szybkich zmianach parametru  $\rho$ . Z praktycznego punktu widzenia oznacza to gwarancję odporności układu na zmiany rezystancji wirnika, wywołane innymi przyczynami, niż zmieniająca się (powoli) temperatura uzwojeń. Przykładem takiego zaburzenia wartości rezystancji mogą efekty związane ze zjawiskiem wypierania prądu w kłatkach wirnika, występujące podczas dynamicznych zmian obciążenia. Efekty te są szczególnie widoczne w układach napędowych o dużej zdolności przeciążeniowej.

Warto również zwrócić uwagę, że wskaźnik jakości (4.27) spełnia następującą właściwość:

$$\eta_1[A(B_1, k_{ow}, \rho)] \geq \eta_1[A(B_2, k_{ow}, \rho)] \quad \text{dla} \quad B_1 \leq B_2, \quad (4.46)$$

Właściwość ta wynika bezpośrednio z wklęsłości wskaźnika jakości (4.27) względem elementów wektora (4.29). Każdy prostokąt o wierzchołkach danych zależnościami (4.43) i (4.44) określony dla stałej  $B_1$  spełniającej zależność (4.46) zawarty jest w prostokącie określonym analogicznie dla stałej  $B_2$ . Pozwala to ograniczyć obliczenia optymalizacyjne jedynie dla maksymalnych, przewidywanych wartości stałej  $B$ .

Na zakończenie przeprowadzone zostanie porównanie rezultatów analizy stabilności uzyskanych przy stosowaniu podejścia zbiorowego i punktowego. Choć, jak to opisano wcześniej, dotyczą one innych klas pobudzeń analizowanego układu, to ich porównanie prowadzić może do interesujących wniosków. W szczególności ciekawa wydaje się ocena ewentualnych rezerw w wartości wskaźnika jakości przy rozwiązywaniu zagadnienia dwoma sposobami. Ocenę porównawczą przeprowadzono dla trzech wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej  $k_{ow}$ , a uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 4.18-4.20. Przedsta-

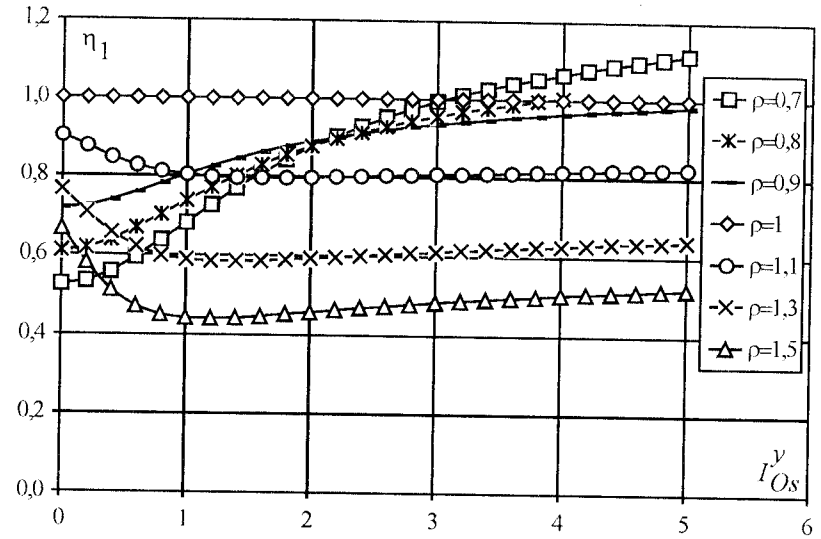
wiono na nich zależność wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana dla różnych wartości parametru  $\rho$ . Należy podkreślić, że przy podejściu punktowym wskaźnik jakości nie musi spełniać nierówności (4.46).

Przedstawione na rys. 4.18 - 4.20 krzywe potwierdzają prawdziwość tezy, że dla parametru  $\rho < 1$  o wartości wskaźnika jakości dla zbioru punktów pracy decyduje wartość tego wskaźnika dla składowej  $I_{Os}^y \approx 0$ . Z praktycznego punktu widzenia oznacza to, że gwarancję stabilności dla  $\rho < 1$  i  $k_{ow} \geq 3$  można uzyskać jedynie dla napędu odpowiednio obciążonego.

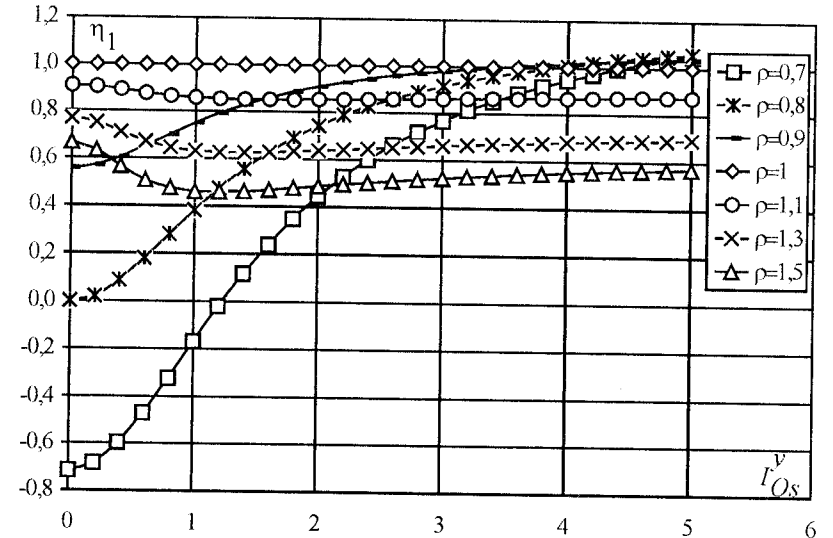
Porównanie prezentowanych krzywych z wykresami przedstawionymi na rys. 4.13-4.16 ma sens jedynie wtedy, gdy odbywa się według pewnej zasady. Wartość wskaźnika jakości  $\eta_1[A(B, k_{ow}, \rho)]$  z rys. 4.13-4.16 powinna być mianowicie porównywana z minimalną wartością wskaźnika jakości  $\eta_1[A(I_{Os}^y, k_{ow}, \rho)]$  z rys.

4.18-4.20 dla składowej  $I_{Os}^y$  spełniającej nierówność:

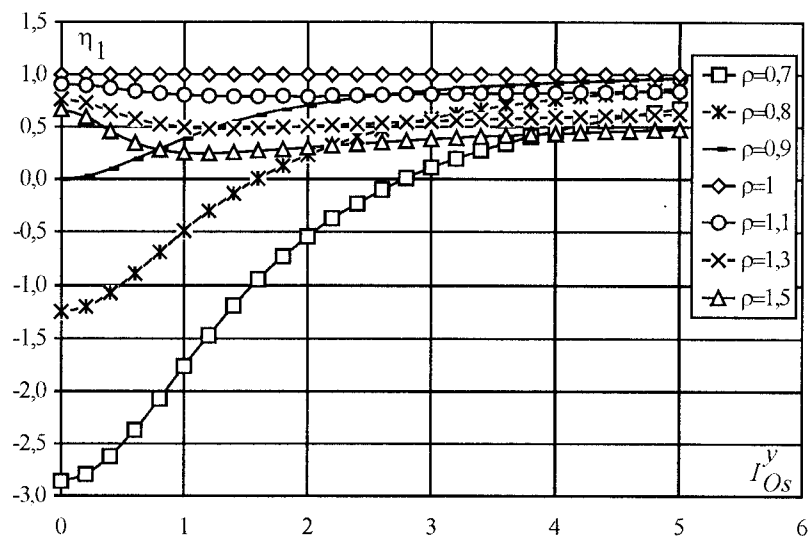
$$0 \leq I_{Os}^y \leq B. \quad (4.47)$$



Rys. 4.18. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana; współczynnik wzmocnienia  $k_{ow} = 1$



Rys. 4.19. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana; współczynnik wzmocnienia  $k_{ow} = 5$



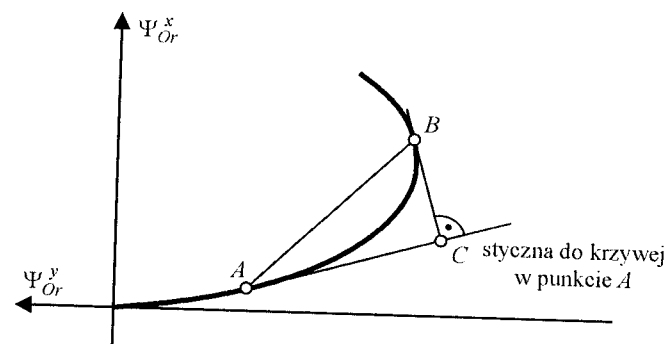
Rys. 4.20. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana; współczynnik wzmocnienia  $k_{ow} = 10$

Przeprowadzona zgodnie z tą zasadą analiza porównawcza zaprezentowanych rezultatów prowadzi do wniosku, że różnice wartości wskaźników jakości uzyskanych w obu przypadkach nie są duże, o ile wartość stałej  $B \leq 2$ . Wzrost różnicy wartości uzyskanych wskaźników jakości dla większych wartości stałej  $B$  można tłumaczyć pogarszającym się współczynnikiem wypełnienia prostokąta z rys. 4.12 obszarem zakreslanym przez koniec wektora przestrzennego strumienia wirnika. Dla stałej  $B = 2$  udział prądu magnesującego w całkowitym prądzie stojana wynosi około 0.44. Wydaje się, że jest to wartość typowa dla większości przypadków praktycznych (w zakresie mniejszych mocy 1-50 kW).

Pewnym rozwiązaniem kompromisowym mogłaby tu być ocena stabilności prowadzona w sposób mieszany, tak jak zrealizowano to dla regulatora PIR w punkcie 3.4. W tych warunkach analiza stabilności powinna być jednak prowadzona nie dla pojedynczych punktów pracy lecz dla pewnych, wzajemnie do siebie przylegających obszarów. Sytuację komplikuje jednak nieliniowa zależność występujących w macierzy stanu układu składowych wektora strumienia wirnika od składowej  $I_{Os}^y$ . Gwarancję stabilności układu należałoby wtedy uzyskać przy pomocy wspólnej, dla wierzchołków trójkąta  $ABC$  przedstawionego na rys. 4.21, funkcji Lapunowa. Dopiero pomyślny wynik testu Lapunowa dla wszystkich wierzchołków tego trójkąta daje gwarancję stabilności układu na odcinku charakterystyki  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$  pomiędzy punktami  $A$  oraz  $B$ . Znaczny nakład oblicze-

niowy właściwy dla tego sposobu rozwiązania zadania przy ograniczonych efektach skłonił ostatecznie autora do rezygnacji z tej drogi postępowania.

Podsumowując zaprezentowane wyniki badania stabilności układu napędowego, w wersji z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym można stwierdzić następujący stan rzeczy. Istnieje określony, zależny od wartości parametru  $\rho$  oraz stopnia obciążenia układu, zbiór dopuszczalnych wartości współczynnika wzmocnienia, w którym zagwarantowana jest stabilność globalna układu. Trzeba jednak obiektywnie stwierdzić, że zakres dopuszczalnych wartości tego współczynnika nie jest duży, zwłaszcza dla przypadków, gdy parametr  $\rho < 1$ .



Rys. 4.21. Sposób wpisania fragmentu krzywej  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$  w trójkąt  $ABC$

Z drugiej strony, wymóg stabilności globalnej układu stanowi niezwykle ostre kryterium oceny właściwości układu. Pojawia się w związku z tym pytanie, czy zakres dopuszczalnych wzmocnień układu ulega radykalnemu zwiększeniu przy założeniu, że odchylenia przyrostowego wektora od położenia równowagi są skończone, ale dostatecznie duże z praktycznego punktu widzenia. Zagadnieniu temu poświęcony będzie następny punkt rozdziału.

#### 4.1.2. Analiza stabilności lokalnej układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym

W poprzednim punkcie tego rozdziału przeprowadzono analizę stabilności globalnej układu napędowego. Celem prezentowanej w tym punkcie analizy jest próba dania odpowiedzi na pytanie czy i na ile zmieniają się właściwości układu przy ograniczonych wartościach odchylen przyrostowego wektora stanu od położenia równowagi.

Na wstępie przeprowadzona zostanie analiza właściwości dynamicznych przybliżenia liniowego modelu układu danego zależnością (4.13). Celem tej analizy jest próba dania odpowiedzi na pytanie, czy w warunkach granicznie małych odchylen przyrostowego wektora stanu od położenia równowagi wartości wskaźnika jakości (4.27) ulegają istotnemu zwiększeniu w stosunku do tych jego wartości, które uzyskano podczas badania stabilności globalnej układu.

Macierz stanu  $\mathbf{A}_L$  przybliżenia liniowego może być utworzona w sposób następujący [58]:

$$\mathbf{A}_L = \left. \frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{x}} (\mathbf{A} \Delta \mathbf{x}) \right|_{\Delta \mathbf{x}=0}, \quad (4.48)$$

gdzie:  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$  jest wektorem występującym po prawej stronie zależności (4.13). Uzyskana w ten sposób macierz stanu przybliżenia liniowego układu napędowego ma postać:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \\ -I_{Os}^y & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ I_{Os}^y & -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Elementy tej macierzy zależą od współrzędnych punktu pracy układu. Z opisanych w poprzednim punkcie powodów właściwości dynamiczne układu będą badane w odniesieniu do całego zbioru punktów pracy ustalonej. W związku z tym, analogicznie jak przy analizie stabilności globalnej, tutaj również należy uwzględnić nieliniowy charakter zależności składowych wektora strumienia wirnika od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Jeżeli przyjąć, że interesuje nas zachowanie się układu przy spełnieniu nierówności (4.35), to w procesie optymalizacji numerycznej testowane powinny być macierze wierzchołkowe wypukłego wielościanu przedstawionego na rys. 4.22. Wielościan ten utworzony jest w ten sposób, że wszystkie dopuszczalne punkty pracy układu (warunek (4.35)) mieszczą się w jego wnętrzu. Rzuty prostokątne krawędzi tego wielościanu na płaszczyznę  $(\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x)$  tworzą prostokąt przedstawiony na rys. 4.12, którego wierzchołki mają współrzędne określone nierównościami (4.43), (4.44). Współrzędne wzdłuż osi  $I_{Os}^y$  wierzchołków W5 oraz W6 określono zgodnie z zależnością:

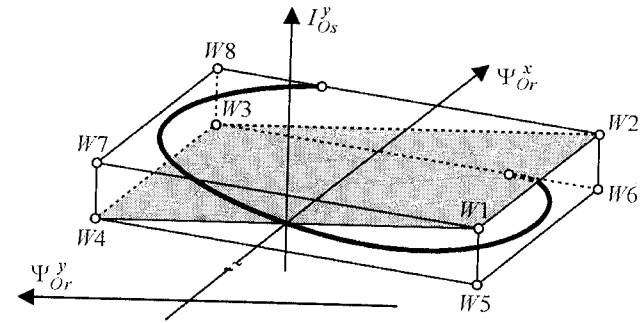
$$D_{1max} = \frac{-2B(1-\rho)}{2\rho\Psi_{Or}^y(B)-\rho+1} \quad (4.50)$$

tak, aby powstały wielościan zawierał w sobie w całości krzywą, jaką zakreśla koniec wektora stanu ustalonego przy zmianach składowej  $I_{Os}^y$  w granicach określonych nierównością (4.35).

Łatwo można zauważyć, że macierze wierzchołkowe wypukłego wielościanu z rys. 4.22 należą do klasy danej zależnością (1.64). Poszukiwanie optymalnej macierzy testującej formy kwadratowej może być więc ograniczone do klasy danej zależnością (4.23). Przy zawężeniu obszaru poszukiwań do tej klasy wskaźnik jakości spełnia zależność (4.39), a ponadto wykazuje również parzystość względem składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana tak, że zachodzi:

$$\eta_1(I_{Os}^y) = \eta_1(-I_{Os}^y). \quad (4.51)$$

W związku z tym istnieje tu również możliwość zmniejszenia liczby testowanych w procesie optymalizacji wierzchołków wielościanu. Jak wykazano w pracy [32], obliczenia optymalizacyjne wystarczy przeprowadzić dla wierzchołków W1, W2, W5 oraz W6 wielościanu przedstawionego na rys. 4.22.



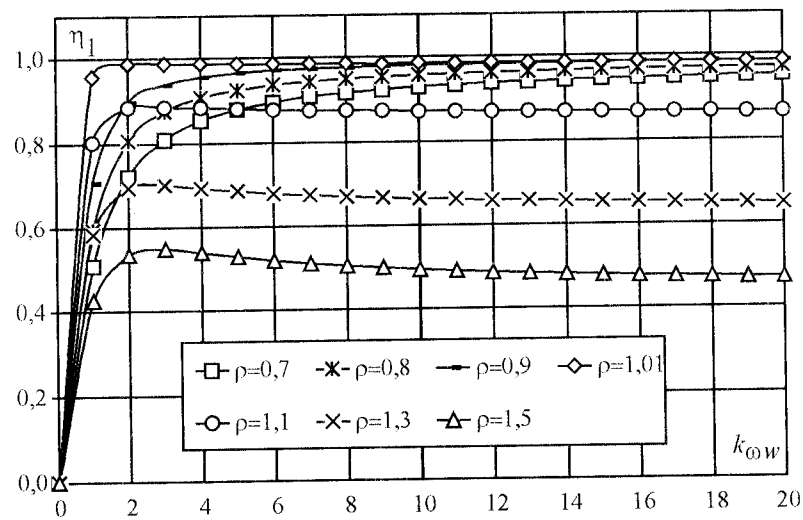
Rys. 4.22. Sposób wpisania miejsca geometrycznego ustalonych punktów pracy układu dla  $|I_{Os}^y| \leq B$  w wypukły wielościan

Wyniki badań przedstawiono w formie wykresów na rys. 4.23-4.25. Porównanie otrzymanych krzywych z analogicznymi przypadkami prezentowanymi na rys. 4.14-4.16 prowadzi do wniosku, że wskaźnik jakości przybliżenia liniowego układu napędowego przybierać może większe wartości. Inaczej mówiąc stabilność układu, przy dążących do zera odchyleniach normy przyrostowego wektora stanu

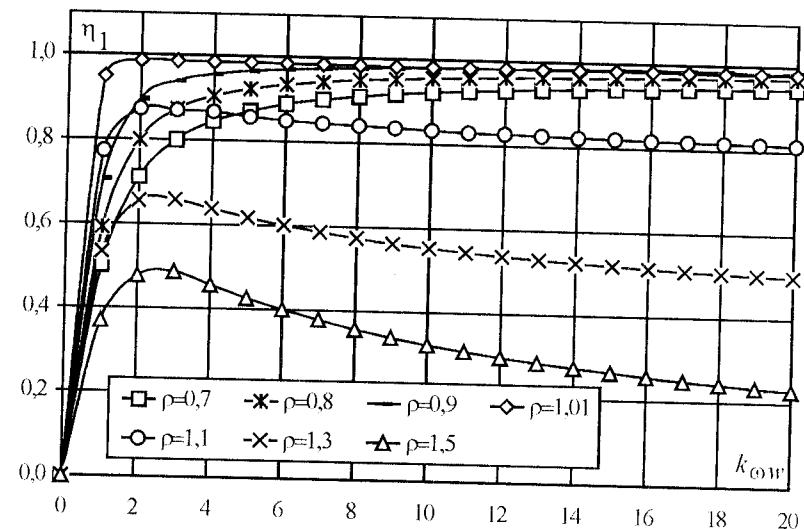
od położenia równowagi, jest zagwarantowana dla znacznie większych wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej w porównaniu z tymi, które uzyskano w trakcie analizy stabilności globalnej. Co ciekawe, wzrost zakresu dopuszczalnego wzmocnienia regulatora prędkości jest szczególnie duży dla  $\rho < 1$ . Z powodu wzrostu normy wektora strumienia wirnika w tych warunkach właściwość ta wydaje się jednak trudna do wykorzystania w praktyce. Trzeba ponadto podkreślić, że uzyskane tu wartości wskaźnika jakości mogą być osiągnięte, w praktycznym układzie napędowym, jedynie przy granicznie małych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi.

Pojawia się więc pytanie, jakie są właściwości dynamiczne układu w sytuacji, gdy norma przyrostowego wektora stanu przybiera wartości pośrednie. W świetle wyników badań zaprezentowanych w pracy nie można bowiem wykluczyć, że układ zachowuje również zadowalające właściwości dynamiczne przy skończonych, ale dostatecznie dużych (z praktycznego punktu widzenia) odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi.

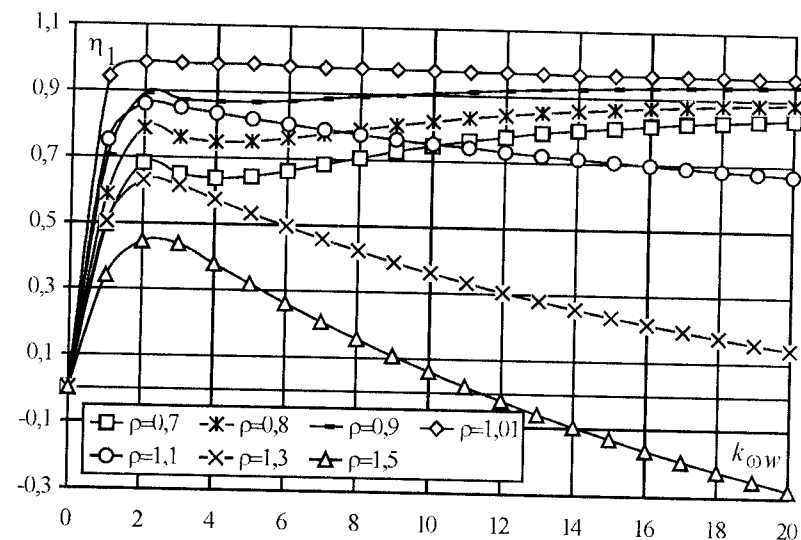
Analiza stabilności lokalnej układu dla różnych wartości odchylen wektora stanu od położenia równowagi jest bardzo pracochłonna, dlatego przyjęto następujący sposób rozwiązania tego problemu.



**Rys. 4.23.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla przybliżenia liniowego układu napędowego; stała  $B = 1$



**Rys. 4.24.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla przybliżenia liniowego układu napędowego; stała  $B = 2$



**Rys. 4.25.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla przybliżenia liniowego układu napędowego; stała  $B = 5$

Na wstępie przyjęto, że regulator prędkości kątovej powinien zachowywać stan aktywny w całym zakresie dopuszczalnych zmian wartości składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana, który wynika z warunku (4.35). Przyjęto również, że analiza stabilności lokalnej dotyczy takiego stanu układu, w którym kolejne zaburzenia występują na tyle rzadko, że przed każdym następnym zaburzeniem układ osiąga stan ustalony. W konsekwencji, wewnątrz minimalnej sfery przyciągania powinny się znaleźć najbardziej odległe (w rozumieniu normy) punkty pracy ustalonej wynikające z zakresu dopuszczalnej zmienności składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana, określonego przez nierówność (4.35). Wydaje się, że taki sposób analizy stabilności lokalnej układu stanowi pewien, ściśle związany z praktyką, kompromis pomiędzy uniwersalnością a pracochłonnością prowadzonych badań. Do określenia wielkości promienia minimalnej sfery przyciągania można posłużyć się rys. 4.22. W miejsce występującej tam składowej  $I_{Os}^y$  należy jednak, zgodnie z zależnościami (4.3c), (4.11) i (4.12), wprowadzić względny, ustalony spadek prędkości

kątovej  $\Delta\Omega_{Ow} = \Omega_{zw} - \Omega_{Ow} = \frac{I_{Os}^y}{k_{Ow}}$ , wywołany przez tę składową. Jeśli przy-

jąć podobny stopień dokładności, jaki stosowany był w „technice wpisywania”, promień minimalnej sfery przyciągania powinien być określony tak, aby przy umocowaniu środka sfery w wierzchołku W5 gwarantowane było „przyciąganie” wierzchołka W8. Promień tej sfery może być wówczas określony w sposób następujący:

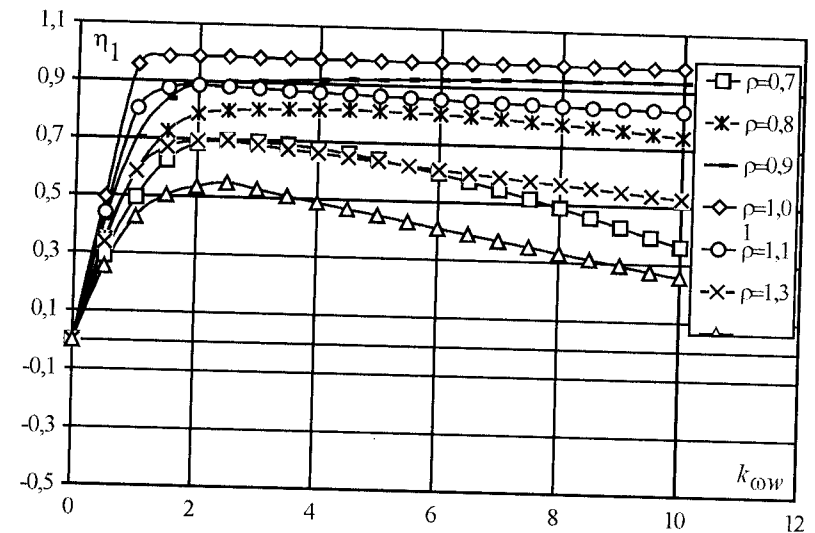
$$r_{min} = 2 \sqrt{\left(\frac{D_{1max}}{k_{Ow}}\right)^2 + \left(\frac{D_2 - 1}{2}\right)^2 + (D_{3max})^2} . \quad (4.52)$$

W powyższej zależności za  $D_2$  należy podstawić  $D_{2max}$  z zależności (4.43a) dla  $\rho < 1$  lub  $D_{2min}$  z zależności (4.43b) dla  $\rho > 1$ . Za  $D_{3max}$  należy podstawić właściwą wartość z zestawu zależności (4.44a-d). Tak obliczoną wartość promienia minimalnej wymaganej sfery przyciągania należy wstawić w miejsce przyrostowej prędkości kątowej  $\Delta\omega_1$  w zależności (4.13). Podobnie jak przy badaniu przybliżenia liniowego układu, zbiór punktów pracy ustalonej zawiera się wewnątrz wielościanu przedstawionego na rys. 4.22. Z istoty warunków dostatecznych wynika, że układ musi być testowany dla „najgorszego przypadku”. Ponieważ przyrostowe zmienne stanu nie są, w ogólnym przypadku, skorelowane ze współzrędnymi ustalonego punktu pracy, obliczenia optymalizacyjne powinny być prowadzone dla przypadku, gdy:

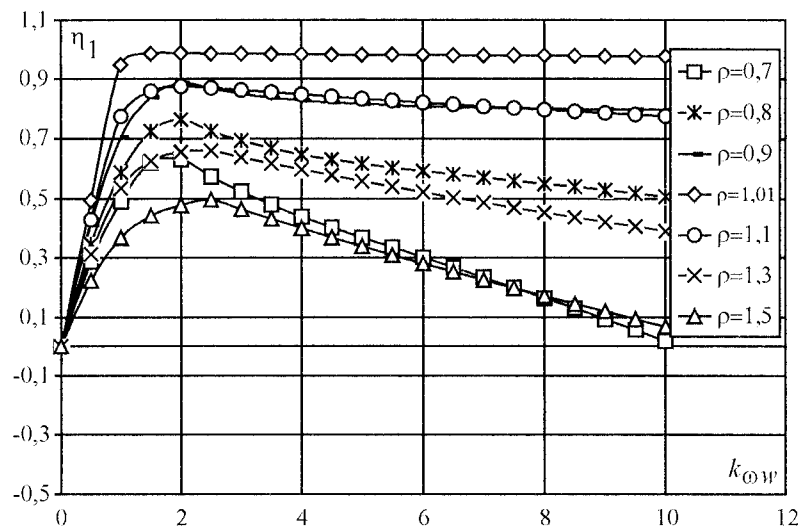
$$-(D_{1max} + k_{Ow}r_{min}) \leq a_{12} = a_{31} = -a_{21} \leq D_{1max} + k_{Ow}r_{min} . \quad (4.53)$$

Wyniki badań w formie graficznej przedstawiono na rys. 4.26-4.28. Porównanie zaprezentowanych rezultatów z uzyskanymi w analogicznych warunkach wynikami badań stabilności globalnej układu, przedstawionymi na rys. 4.14-4.16, prowadzi do interesujących wniosków. Łatwo zauważyć, że istotne różnice wartości wskaźnika jakości występują jedynie dla tych przypadków, gdy parametr  $\rho < 1$ . Uzyskane wówczas wartości wskaźnika jakości obliczane dla przypadku ograniczonych odchylen wektora stanu, są wyraźnie większe. Należy jednak pamiętać, że pracy w tych warunkach należy unikać ze względu na wzrost wartości normy wektora strumienia wirnika nawet w stanach ustalonych. Dla parametru  $\rho > 1$  uzyskane w obu przypadkach rezultaty różnią się symbolicznie.

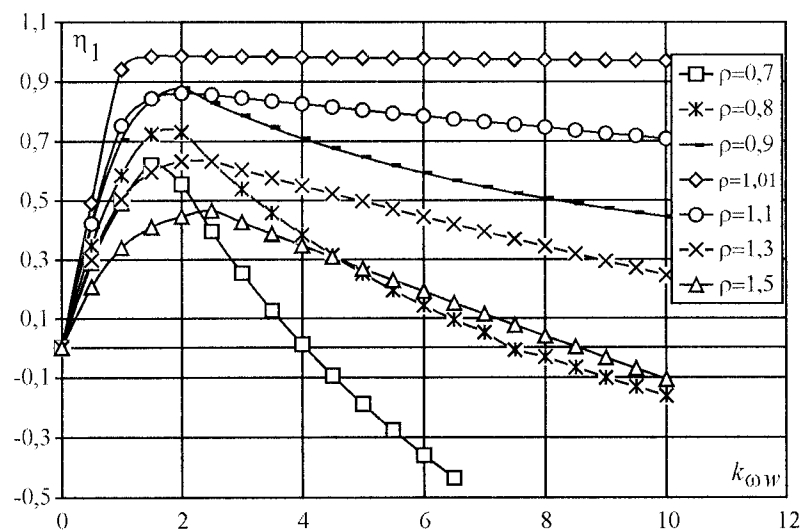
- Z przeprowadzonej analizy wynika ważny z praktycznego punktu widzenia wniosek. Jeżeli interesujące są właściwości dynamiczne układu dla przypadku, gdy parametr  $\rho > 1$ , to do oceny stabilności układu dla opisanych wyżej, ograniczonych odchylen wektora stanu można, z dobrą dokładnością, wykorzystywać rezultaty uzyskane podczas badania stabilności globalnej.



**Rys. 4.26.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{Ow}$  przy ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi; stała  $B = 1$



**Rys. 4.27.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  przy ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi; stała  $B = 2$



**Rys. 4.28.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  przy ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi; stała  $B = 5$

Uwaga o dobrej dokładności jest uzasadniona tym, że obliczany dodatkowo współczynnik wypełnienia dla wszystkich przypadków, gdy  $\rho > 1$ , był znacznie mniejszy od jedności. Oznacza to w praktyce, że faktyczna minimalna sfera przyciągania jest mniejsza od wymaganej. Nie ma więc gwarancji, że układ pozostaje stabilny dla każdej trajektorii startującej z wymaganej minimalnej sfery przyciągania, której promień określony jest zależnością (4.52). Do uzyskania tej gwarancji należałoby prowadzić proces iteracyjnego poszukiwania właściwej formy kwadratowej, co nieuchronnie prowadziłoby do dalszego spadku wskaźnika jakości zbliżając w konsekwencji jego wartości jeszcze bardziej do wartości uzyskanych przy badaniu stabilności globalnej.

#### 4.1.3. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej

W dotychczasowych rozważaniach, zaprezentowanych w punkcie 4.1.1 oraz 4.1.2 zakładano, że regulator prędkości kątowej pracuje w zakresie liniowym. Wyniki badań układu w tych warunkach dają określony pogląd na właściwości dynamiczne rozpatrywanej wersji układu napędowego. Trzeba jednak pamiętać, że praktycznie każdy układ napędowy powinien mieć zabezpieczenie przed nadmiernym wzrostem prądu stojana. W zdecydowanej większości układów napędowych o kaskadowej strukturze obwodów regulacji wykorzystuje się do tego celu zjawisko nasycenia regulatora prędkości kątowej. W dalszej części tego punktu przeprowadzona zostanie analiza podstawowych właściwości dynamicznych układu przy uwzględnieniu tego zjawiska.

W praktycznych układach napędowych efekt ograniczenia prądu stojana uzyskuje się poprzez wprowadzenie nieliniowego ogranicznika napięcia wyjściowego regulatora prędkości kątowej włączanego w sposób przedstawiony na rys. 4.29. Struktura części regulacyjnej układu jest taka sama jak przedstawiona na rys. 3.1. Charakterystyka ogranicznika nieliniowego jest identyczna z charakterystyką przedstawioną na rys. 3.2. W dalszych rozważaniach wykorzystana może być również większość zależności sformułowanych w punkcie 3.1.

Model matematyczny układu napędowego jest układem równań różniczkowych:

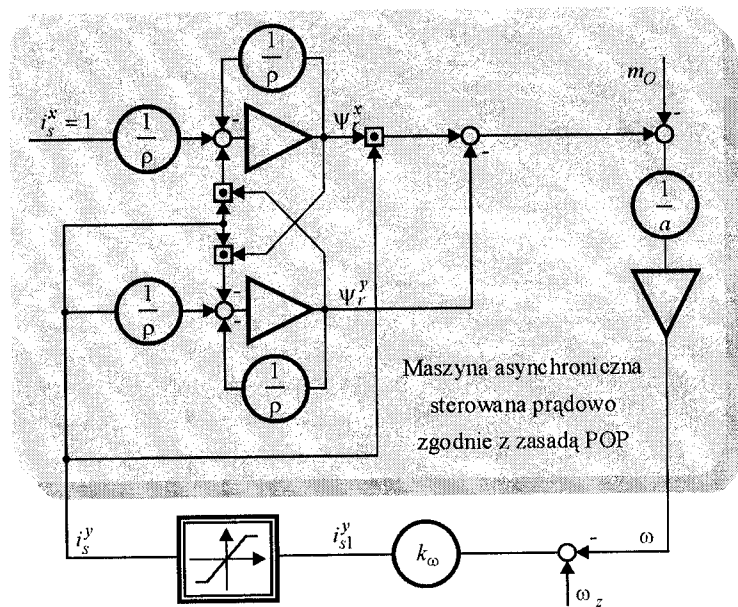
$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (4.54a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\frac{1}{\rho} \psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (4.54b)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (4.54c)$$

$$i_{s1}^y = k_{\omega}(\omega_z - \omega), \quad (4.54d)$$

$$i_s^y = f(i_s^y). \quad (4.54e)$$



**Rys. 4.29.** Schemat blokowy układu napędowego z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu P oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Działanie nieliniowego ogranicznika opisane jest zależnością (3.2). W stanach ustalonych prawdziwość zachowuje zależność (3.4), a w stanach przejściowych prawdziwa jest zależność (3.7). Ostatecznie, wykorzystując zależności (3.8) oraz (3.9), można utworzyć model matematyczny rozpatrywanej wersji układu w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega & -N_1 k_\omega \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega) & -\frac{1}{\rho} & -N_1 k_\omega \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ \frac{I_{Os}^y - N_1 k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{N_1 k_\omega \Psi_{Or}^x}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

przy czym wartości parametru  $N_1$  dane są zależnościami (3.9) oraz (3.5).

Warto jednak w tym miejscu podkreślić, że pomimo wielu podobieństw, analizowany przypadek różni się od analogicznego, przedstawionego w punkcie 3.1. Uwzględnienie wpływu zmian rezystancji uzwojeń wirnika powoduje to, że współrzędne wektora stanu ustalonego nie spełniają zależności (3.11), a zatem nie są zgodne z zasadą POP. Wektor stanu ustalonego układu może być przedstawiony w postaci:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O]^T. \quad (4.56)$$

Poszczególne współrzędne tego wektora dane są zależnościami (4.3a), (4.3b) oraz (4.3c), przy czym składowa  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana spełnia zależność (3.4). Z uwagi na nieliniowy charakter zależności (4.7a) „koparkowa” charakterystyka mechaniczna zachowuje jedynie podobieństwo do przedstawionej na rys. 3.3. Stopień tego podobieństwa wzrasta wraz ze wzrostem wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej. Różne są też właściwości dynamiczne obu układów, co wykazane zostanie poniżej.

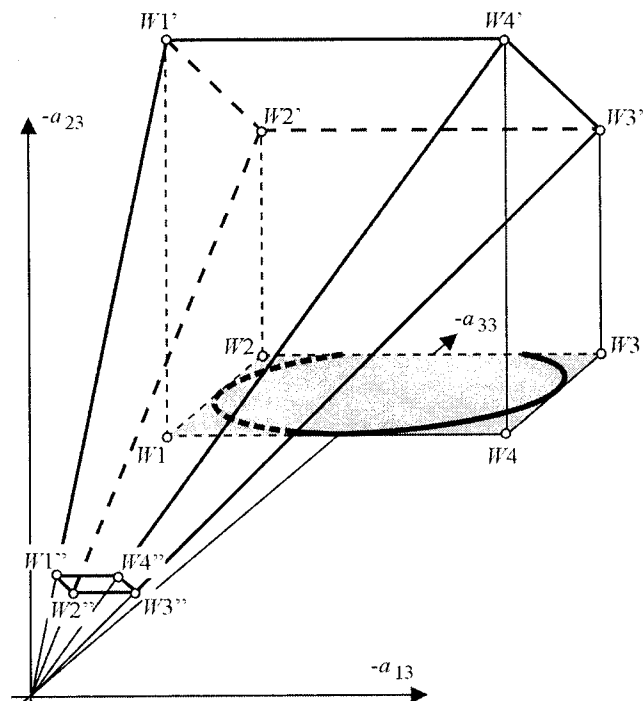
Zastosowanie zabiegów standaryzujących zgodnie z zależnościami (4.11) oraz (4.12) pozwala uzyskać następującą postać modelu matematycznego układu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Ox}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Ox}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1) & -\frac{1}{\rho} & -N_1 k_{\omega w} (\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x) \\ I_{Ox}^y - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -1 & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Struktura macierzy stanu w powyższej zależności jest bardzo podobna do struktury macierzy stanu w zależności (4.13). Jediną różnicą jest to, że w macierzy stanu z zależności (4.57) względny współczynnik wzmocnienia regulatora prędkości kątowej mnożony jest każdorazowo przez parametr  $N_1$  nieliniowego ogranicznika.

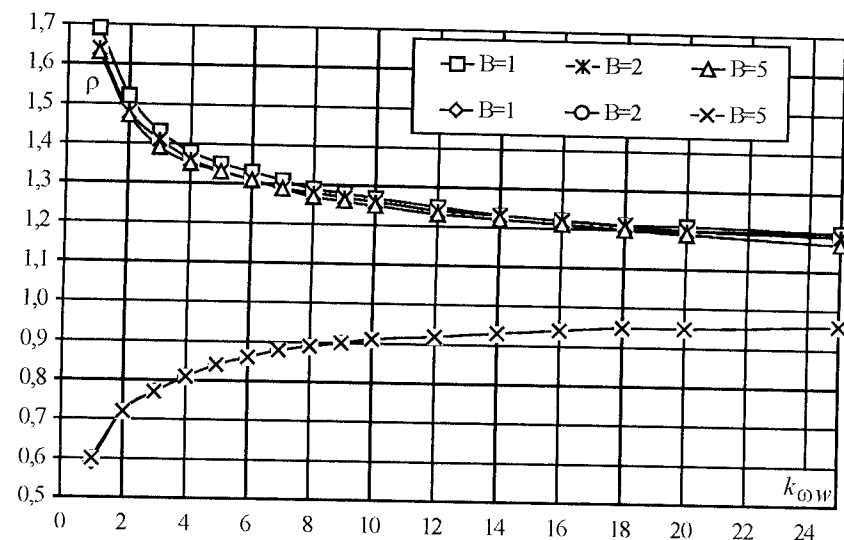
Na wstępie zbadane zostaną warunki stabilności globalnej zbioru modeli matematycznych rozpatrywanej wersji układów spełniających nierówność (4.35). Z uwagi na przynależność macierzy stanu układu do klasy danej zależnością (1.64) optymalizacja macierzy formy kwadratowej-kandydata na funkcję Lapunowa prowadzona może być wyłącznie dla klasy macierzy danych zależnością (4.24). W związku z tym, że pochodna tej klasy form kwadratowych liczona wzdłuż trajektorii układu nie zależy od elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu w zależności (4.57), do rozstrzygnięcia problemu stabilności globalnej układu wystarczy

przeanalizować jego zachowanie przy zmianach wartości elementów  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  macierzy stanu. Zastosowanie nieliniowego ogranicznika sprawia, że wartości tych elementów zależą nieliniowo od składowych  $\Psi_{Or}^x$ ,  $\Psi_{Or}^y$  oraz od parametru  $N_1$  ogranicznika. Wykorzystując „technikę wpisywania” [67] można jednak wyznaczyć w przestrzeni tych elementów wypukły wielościan, wewnątrz którego znajdują się wszystkie dopuszczalne punkty pracy układu przy spełnieniu nierówności (4.43), (4.44) oraz (3.9). Wielościan taki przedstawiono na rys. 4.30.



Rys. 4.30. Wypukły wielościan opisany na zbiorze wartości dopuszczalnych elementów  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  oraz  $a_{33}$  macierzy stanu układu

Rzut prostokąta o wierzchołkach  $W1'$ ,  $W2'$ ,  $W3'$ ,  $W4'$  na płaszczyznę  $(a_{13}, a_{33})$  tworzy prostokąt analogiczny do prostokąta z rys. 4.12. Z uwagi na opisane wcześniej właściwości symetrii wskaźnika jakości względem elementu  $a_{13}$ , testowaniu w procesie optymalizacji wystarczy poddać jedynie wierzchołki  $W3'$ ,  $W4'$ ,  $W3''$ ,  $W4''$  wypukłego wielościanu.



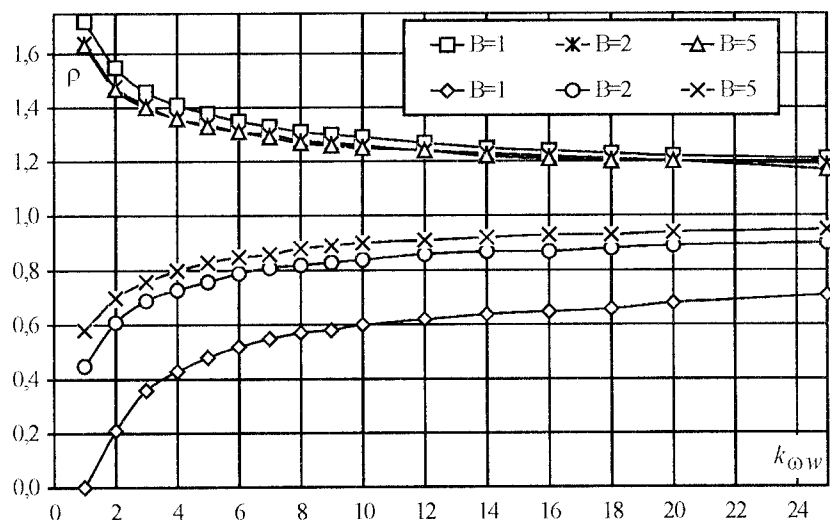
Rys. 4.31. Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej, iloczyn  $Nk_{ow} = 0,1$

Wyniki badań przedstawiono na rys. 4.31 w formie zależności graficznych wartości dopuszczalnych parametru  $\rho$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  regulatora prędkości kątowej. Krzywe te wyznaczono wykorzystując standardowy moduł optymalizacyjny opisany w punkcie 1.5. Za punkt wyjścia do obliczeń przyjęto macierz stanu układu (4.57) (właściwą wierzchołkom  $W3'$ ,  $W4'$ ,  $W3''$ ,  $W4''$ ) dla parametru  $\rho = 1$ . Po przeprowadzeniu obliczeń optymalizacyjnych sprawdzano, czy uzyskana w ten sposób forma kwadratowa jest również wspólną funkcją Lapunowa dla macierzy stanu (właściwych wierzchołkom  $W3'$ ,  $W4'$ ,  $W3''$ ,  $W4''$ ) dla wartości parametru  $\rho$ , powiększonych o  $\Delta\rho = 0,005$ . Pomyślny wynik takiego testu implikował możliwość kolejnego powiększenia parametru  $\rho$  (o wartość  $\Delta\rho = 0,005$ ) i ponownego sprawdzenia czy testująca forma kwadratowa jest również wspólną funkcją Lapunowa dla utworzonych w ten sposób nowych macierzy wierzchołkowych. Negatywny wynik testu powodował przeprowadzenie obliczeń optymalizacyjnych testującej formy kwadratowej dla nowej wartości parametru  $\rho$ . Obliczenia prowadzone były aż do osiągnięcia granicznej wartości  $\rho_1$ , której powiększenie o  $\Delta\rho = 0,005$  uniemożliwiało spełnienie warunku  $\eta_1 > 0$ . Dla wartości parametru  $\rho \leq 1$  obliczenia prowadzone były analogicznie, z tym że wartość parametru  $\rho$  w kolejnych krokach zmniejszana była o  $\Delta\rho = 0,005$ . Taki sposób rozwiązania zadania nie stanowi, co prawda, formalnego dowodu na to, że stabilność układu zagwarantowana jest dla wszystkich warto-

ści pośrednich wyznaczonych przez warunek  $1 \leq \rho \leq \rho_1$  (ew.  $1 \geq \rho \geq \rho_1$ ). Z uwagi na małą wartość kroku  $\Delta\rho = 0,005$  prawdopodobieństwo wystąpienia tzw. „wypadku stabilizacyjnego” [66] przy powolnych, cieplnych zmianach parametru  $\rho$  wydaje się tu być wystarczająco małe.

Badania przeprowadzono dla takich samych jak poprzednio wartości stałej  $B$ . Wartość stałej  $N$  wybrano tak, że w stanie nasycenia iloczyn  $Nk_{\omega w} = 0,1$ .

Z zaprezentowanych rezultatów wynika, że różnice dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$  uzyskane dla różnych wartości stałych  $B$  są symboliczne, zwłaszcza dla  $\rho < 1$ , gdzie uzyskano praktycznie jedną krzywą. Prowadzi to do wniosku, że dominujące znaczenie w rozpatrywanym zbiorze posiadają te układy, które odpowiadają stanowi nasycenia regulatora prędkości kątowej (wierzchołki  $W1''$ ,  $W2''$ ,  $W3''$ ,  $W4''$  wielościanu z rys. 4.30). Potwierdzają to rys. 4.14-4.16, z których wyraźnie wynika, że wskaźnik jakości  $\eta_1$  dla dostatecznie małych wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  różni się dla poszczególnych wartości parametru  $\rho$  symbolicznie.



**Rys. 4.32.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność układu przy ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej, iloczyn  $Nk_{\omega w} = 0,1$

Do interesujących wniosków prowadzi porównanie rezultatów z rys. 4.31 z przedstawionymi na rys 4.32 wynikami analogicznych badań przybliżenia liniowego zbioru układów, dla których składowa  $I_{Os}^y$  spełnia nierówność (4.35). Ma-

cierz stanu przybliżenia liniowego układu przy uwzględnieniu efektu nasycenia regulatora prędkości kątowej ma postać:

$$\mathbf{A}_L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \\ -I_{Os}^y & -\frac{1}{\rho} & -N_1 k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ I_{Os}^y & -1 & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^x \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

Przedstawione na rys. 4.32 krzywe różnią się, dla  $\rho > 1$ , od analogicznych krzywych z rys 4.31 symbolicznie. Wynika stąd, że do oceny dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$  w funkcji współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej wystarczy (dla  $\rho > 1$ ) posłużyć się rezultatami uzyskanymi przy badaniu stabilności globalnej. Upraszcza to znacznie zagadnienie poszukiwania macierzy optymalnej formy kwadratowej, gdyż należeć ona musi do klasy danej zależnością (4.24), a proces optymalizacji dotyczy wtedy jedynie elementu  $p_{b11}$ . Dla parametru  $\rho < 1$  porównanie zaprezentowanych na rys. 4.31 i 4.32 rezultatów prowadzi do wniosku, że istnieje pewna zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$  od wielkości odchylenia wektora stanu od położenia równowagi. Z uwagi na opisany wcześniej (występujący nawet w stanie ustalonym) wzrost normy wektora strumienia wirnika dla  $\rho < 1$ , wykorzystanie tych rezerw, wydaje się jednak mało prawdopodobne.

## 4.2. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalno-całkującym i proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Poniżej przeprowadzona zostanie analiza stabilności układu napędowego, wyposażonego w regulator prędkości kątowej typu PI oraz PIR. Tak jak wyjaśniono w rozdziale 3, konieczność analizy struktury PIR pojawia się wówczas, gdy uwzględnia się stan nasycenia regulatora prędkości kątowej. Zaprezentowana analiza stabilności przeprowadzona zostanie w ten sposób, że za podstawę rozważań przyjęty będzie układ napędowy z regulatorem prędkości kątowej typu PI pracującym w zakresie liniowym. Analiza tego wzorcowego przypadku posłużyła autorowi do wstępnego wyboru wartości parametrów regulatora PI gwarantujących największą wartość wskaźnika jakości  $\eta_1$ . Dalsza analiza układu będzie prowadzona

dla tak określonych wartości parametrów regulatora prędkości kątowej typu PI oraz PIR.

W świetle rezultatów uzyskanych podczas analizy stabilności globalnej układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej za miarodajne przyjęto tu również wyniki analizy stabilności globalnej przeprowadzone dla zbioru punktów pracy ustalonej układu.

#### 4.2.1. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym

##### 4.2.1.1. Analiza stabilności globalnej układu z regulatorem prędkości kątowej typu PI

Sformułowany w dodatku D3.3 model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego uwzględniający efekt zmian cieplnych wartości rezystancji wirnika ma postać:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (4.59a)$$

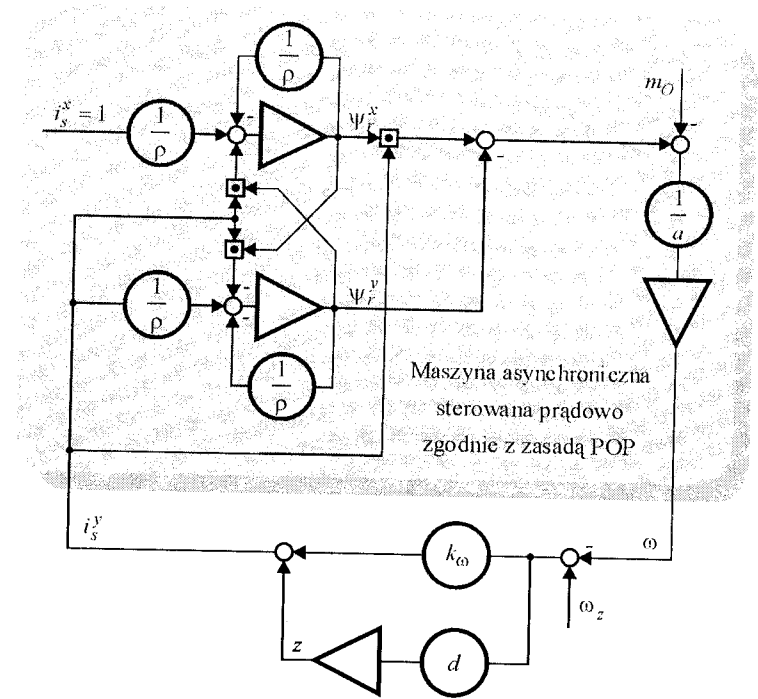
$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho}i_s^y, \quad (4.59b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_O}{a}, \quad (4.59c)$$

$$\frac{d}{dt}z = d(\omega_z - \omega), \quad (4.59d)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (4.59e)$$

Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu napędowego przedstawiono na rys. 4.33.



Rys. 4.33. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Rozpatrzmy na wstępie właściwości układu w stanie ustalonym. Wektor stanu ustalonego układu spełnia następującą zależność:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_z \quad I_{Os}^y]^T. \quad (4.60)$$

Z zależności tej wynika, że w stanie ustalonym układ nie wykazuje uchybu ustalonego prędkości kątowej. Widać również, że w przyjętym systemie jednostek względnych zmienna stanu  $z$  regulatora PI równa jest liczbowo składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Wartości pozostałych współrzędnych ustalonego wektora stanu dane są zależnościami (4.3), (4.6) oraz (4.7).

Analizę właściwości dynamicznych układu z wykorzystaniem bezpośredniej metody Lapunowa wygodnie jest prowadzić wykorzystując sformułowany w dodatku D3 pseudoliniowy model matematyczny rozpatrywanej wersji układu w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega} \Delta \omega & -k_{\omega} \Psi_{Or}^y & \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega} \Delta \omega) & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega} \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_{\omega} \Psi_{Or}^x}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Podobnie jak w punkcie 3.3, korzystnie jest tu również przeprowadzić standaryzację zmiennych i parametrów układu. Wykorzystując podstawienia (3.61) oraz (3.62) model matematyczny układu można równoważnie przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y & \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1) & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \\ I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x & \Psi_{Or}^x \\ 0 & 0 & -d_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Powyższe zabiegi czynią elementy macierzy stanu niezależnymi od stałej  $a$  układu napędowego.

Równanie stanu (4.62) może być również zapisane zgodnie ze schematem (4.20) jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \mathbf{x}_{mer} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & \mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) \\ \mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) & \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \mathbf{x}_{mer} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Wektor:

$$\Delta \mathbf{x}_{mer} = [\Delta \psi_r^y \quad \Delta \omega_1 \quad \Delta z]^T \quad (4.64a)$$

jest wektorem stanu rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego, macierz:

$$\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \\ -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x & \Psi_{Or}^x \\ 0 & -d_w & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64b)$$

jest macierzą stanu tego podsystemu, a macierz:

$$\mathbf{A}_{me}(\mathbf{X}_O) = \begin{bmatrix} -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x & \Psi_{Or}^x \\ -d_w & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64c)$$

jest macierzą stanu podsystemu elektromechanicznego.

Oba podsystemy połączone są w sposób zwrotny, zgodnie z rys. 4.7. Miarą oddziaływania zredukowanego podsystemu elektromagnetycznego na rozszerzony podsystem elektromechaniczny jest norma macierzy:

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = \begin{bmatrix} -(I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1) \\ I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.65a)$$

Miarą oddziaływania rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego na zredukowany podsystem elektromagnetyczny jest natomiast norma macierzy:

$$\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = [(I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1) \quad -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y \quad \Psi_{Or}^y]. \quad (4.65b)$$

Zauważmy ponadto, że dla parametru  $\rho = 1$  model matematyczny układu staje się całkowicie równoważny przypadkowi analizowanemu w punkcie 3.3 w zakresie dotyczącym aktywnego regulatora prędkości kątowej. W szczególności macierz podsystemu elektromechanicznego (zależność (4.64c)) przybiera w tych warunkach postać zgodną z zależnościami (3.75) ewentualnie (3.76). Wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{mePI1}$  dla różnych wartości ilorazu  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2}$  podano w tabeli 3.1.

Można wykazać, że podobnie jak w przypadku proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej również i tu warunkiem koniecznym pomyślnego rezultatu testu Lapunowa dotyczącego stabilności globalnej układu (4.62) jest użycie testującej formy kwadratowej o macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{b11} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{b11} & 1 & p_{b23} \\ 0 & 1 & 1 & p_{b23} \\ 0 & p_{b23} & p_{b23} & p_{b33} \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Warto również podkreślić, że macierz ta ma strukturę zgodną z macierzą (3.64), w której element  $p_{i11} = 1$ .

Macierz (4.66) pozostaje dodatnio określona o ile:

$$p_{b11} > 1 \quad (4.67a)$$

i jednocześnie

$$p_{b33} > (p_{b23})^2. \quad (4.67b)$$

Pochodna czasowa testującej formy kwadratowej liczona wzdłuż trajektorii systemu (4.62) posiada postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = & -\frac{2}{\rho} (p_{b11} - 1) (\Delta \psi_r^x)^2 + \\ & + \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y & \Delta \omega_1 & \Delta z \end{bmatrix} \left( \mathbf{A}_{mer}^T(\mathbf{X}_O) \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \right) \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} + \\ & - 2(p_{b11} - 1) \Psi_{Or}^y \left( k_{\omega w} \Delta \omega_1 \Delta \psi_r^x - \Delta z \Delta \psi_r^x \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Współczynniki powyższej formy kwadratowej nie zawierają elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  i nie zależą tym samym od współrzędnych przyrostowego wektora stanu. Ujemna określoność formy (4.68) nie nakłada więc żadnych ograniczeń na wielkość normy przyrostowego wektora stanu. W szczególności sygnatura formy kwadratowej (4.68) zachowana będzie również przy spełnieniu nierówności (4.21) oraz nierówności:

$$-\infty < \Delta z < +\infty, \quad (4.69)$$

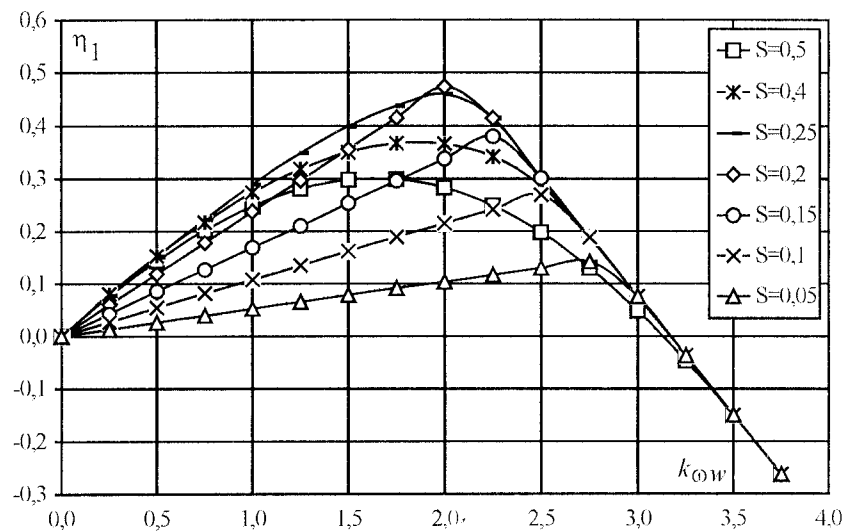
co uzasadnia celowość zastosowania testującej formy kwadratowej o macierzy (4.66). Stwierdzenie to ma bardzo ważne znaczenie praktyczne, ponieważ ze struktury tej macierzy wynika, że zawiera ona jedynie trzy ( $p_{b11}, p_{b23}, p_{b33}$ ) niezależne elementy podlegające optymalizacji numerycznej.

Można również wykazać, że także w tym wypadku wskaźnik jakości dany zależnością (4.27) jest parzysty względem składowej  $\Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika. Prawdziwa jest więc również zależność (4.39). Z uwagi na liniową zależność elementów macierzy stanu w równaniu (4.62) od składowych  $\Psi_{Or}^x, \Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika obliczenia optymalizacyjne wystarczy prowadzić jedynie dla wierzchołków  $W1$  oraz  $W2$  prostokąta przedstawionego na rys. 4.12.

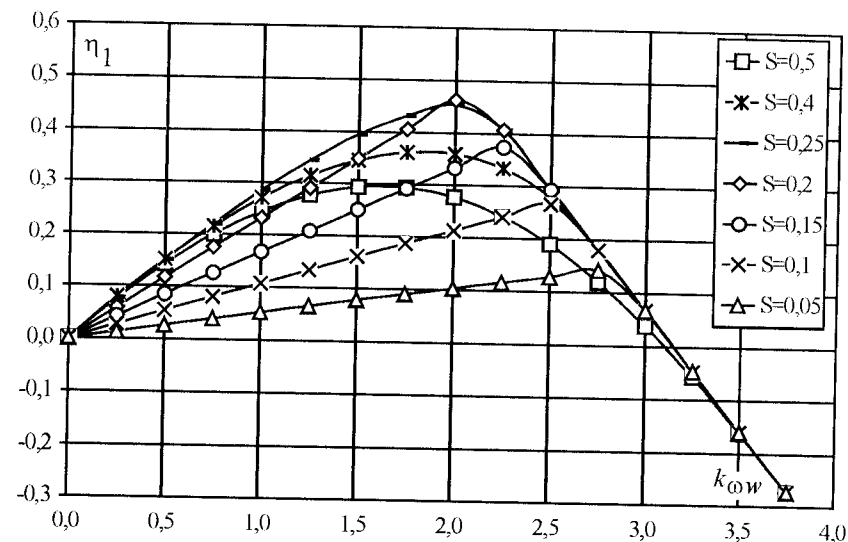
Z uwagi na to, że regulator prędkości kątowej typu PI ma dwa niezależne parametry, pojawia się pytanie, dla jakich relacji pomiędzy nimi układ napędowy zachowuje największą odporność na zmiany rezystancji wirnika. Nie można bowiem z góry przesądzać, że odporność ta będzie największa dla wartości parametrów zgodnych ze standardowo stosowanym w tym wypadku kryterium modułu. Jak wynika z prezentowanych w rozdziale 3 rozważań, wartość ilorazu  $S = 0,5$  gwarantuje to, że dla układu o niezaburzonej rezystancji wirnika ( $\rho = 1$ ) wartości własne macierzy podsystemu elektromechanicznego (4.64c) są zgodne z kryterium modułu.

Zagadnienie rozwiązano w ten sposób, że wskaźnik jakości (w zależności od wartości współczynnika  $k_{\omega w}$ ) obliczany był dla różnych wartości ilorazu  $S$  dla przyjętych za skrajne wartości parametru  $\rho$  ( $\rho = 0,7$  oraz  $\rho = 1,5$ ). Ten sposób rozwiązania zadania pozwala jednoznacznie określić optymalne (w sensie odporności układu na zmiany rezystancji wirnika) wartości parametrów regulatora prędkości kątowej typu PI.

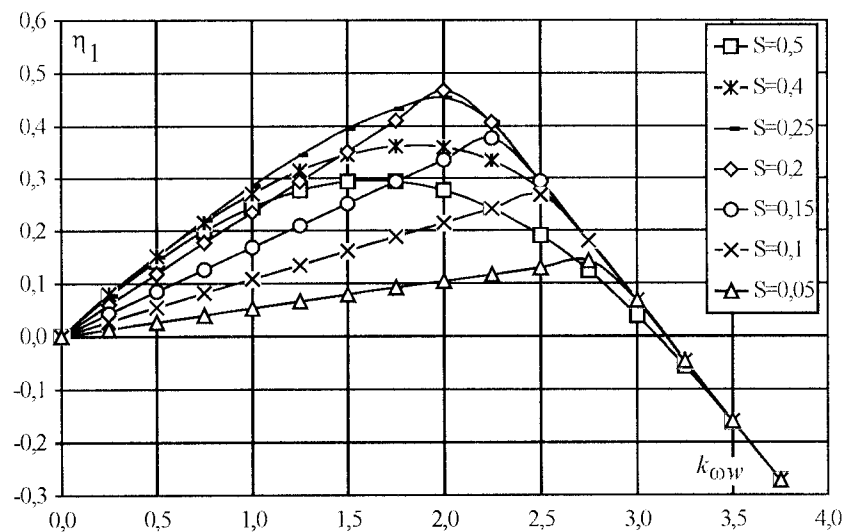
Wyniki badań dla parametru  $\rho = 0,7$  przedstawiono na rys. 4.34-4.36, a dla wartości parametru  $\rho = 1,5$  na rys. 4.37-4.39. Podobnie jak dla przypadku proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej uzyskane krzywe wykazują znaczną regularność. Charakterystyczne jest również występowanie wyraźnego maksimum wartości wskaźnika jakości.



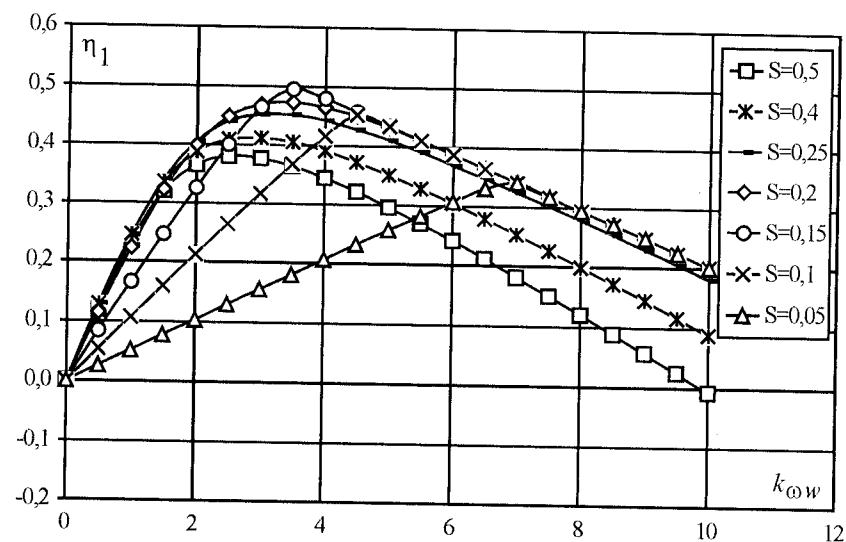
**Rys. 4.34.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 1$ , parametr  $\rho = 0,7$



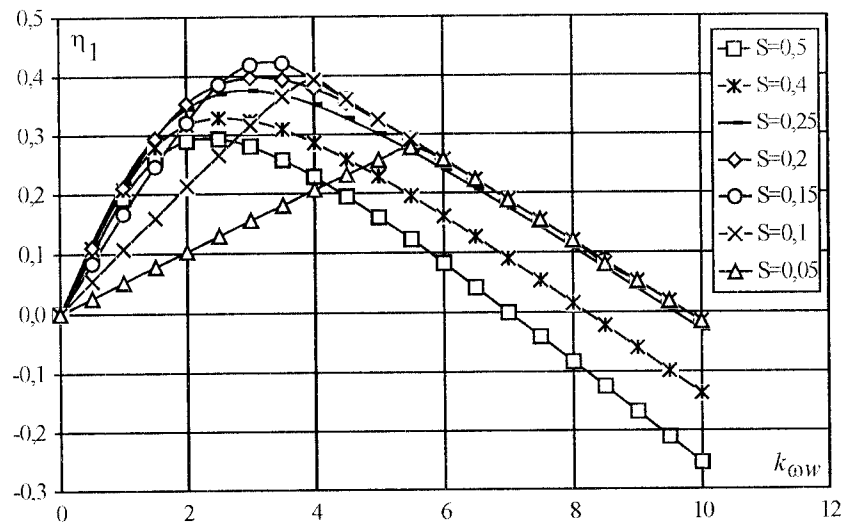
**Rys. 4.36.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 5$ , parametr  $\rho = 0,7$



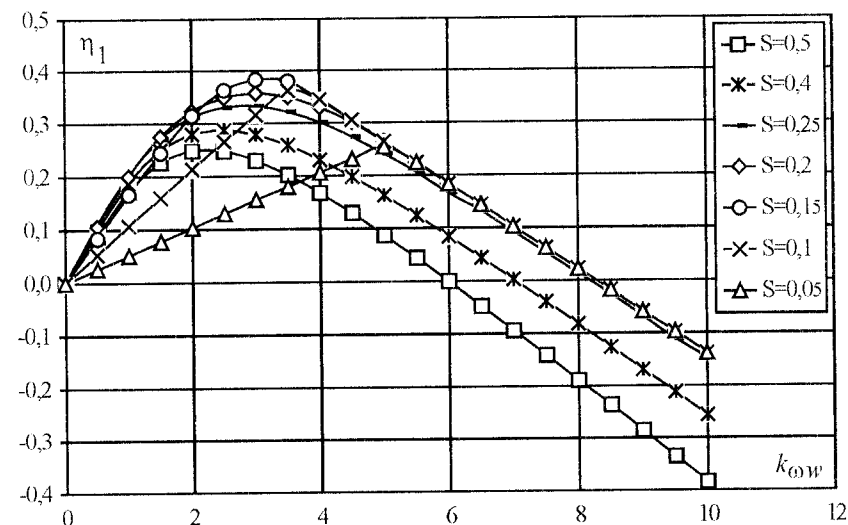
**Rys. 4.35.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 0,7$



**Rys. 4.37.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{oww}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 1$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.38.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.39.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; stała  $B = 5$ , parametr  $\rho = 1,5$

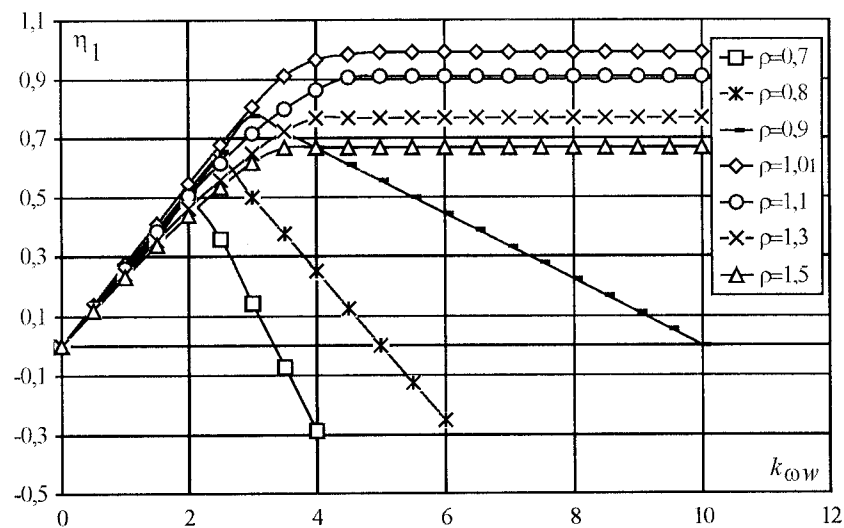
Z przedstawionych rezultatów wyraźnie wynika, że dla skrajnych wartości parametru  $\rho$  ( $\rho = 0,7$  oraz  $\rho = 1,5$ ) najlepiej jest przyjąć wartość ilorazu  $S = 0,2$ . Dalsze badania stabilności układu z regulatorem prędkości kątowej typu PI prowadzone były dla tej wartości ilorazu. Warto podkreślić, że taka wartość ilorazu  $S$  spowoduje dla niezaburzonego podsystemu elektromechanicznego ( $\rho = 1$ ) inne uplasowanie wartości własnych niż wynika to z kryterium modułu. Dla określonych wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  i ilorazu  $S$  wartości własne macierzy  $A_{mePI}$  mogą być określone np. na podstawie danych z pierwszej kolumny tabeli 3.1 lub z zależności (3.77) i (3.81).

Rezultaty badań stabilności rozpatrywanej wersji układu w postaci zależności wskaźnika jakości od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  przy różnych wartościach stałej  $B$  przedstawiono na rys. 4.40-4.43.

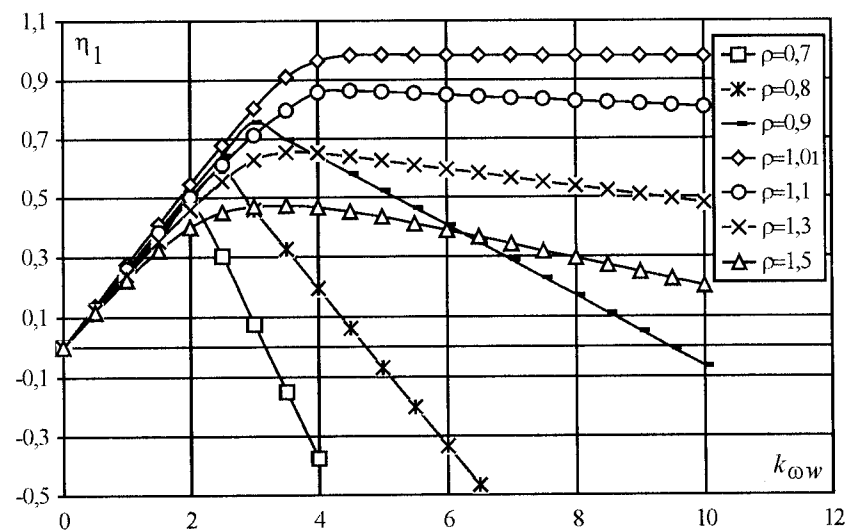
Z zaprezentowanych rezultatów badań wynika, że przy przyjętej za optymalną wartości ilorazu  $S = 0,2$  optymalna wartość współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora prędkości kątowej znajduje się w zakresie:  $1 \leq k_{\omega w} \leq 6$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  oraz  $1 \leq k_{\omega w} \leq 2,5$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . Wybór wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora prędkości na tym poziomie gwarantuje to, że dla  $B \geq 2$  wskaźnik jakości  $\eta_1 \geq 0,2$ . Przeniesienie przy pomocy zależności (3.62), uznanych za optymalne, zakresów wartości parametrów regulatora w dziedzinę wartości parametrów  $k_{\omega}$  oraz  $d$  określonych zależnościami (D1.16) oraz (D1.28) prowadzi do rezultatu:  $a \leq k_{\omega} \leq 6a$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  oraz  $a \leq k_{\omega} \leq 2,5a$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . Z zależności (3.62) wynika również, że przyjęcie ilorazu  $S = 0,2$  implikuje relację  $d = 0,2(k_{\omega})^2 / a$ . W rezultacie, wartości parametrów regulatora prędkości kątowej typu PI określone definicjami (D1.16) oraz (D1.28) mogą być jednoznacznie wyznaczone na podstawie wartości stałej  $a$  układu napędowego.

Do interesujących wniosków prowadzi również porównanie uzyskanych wyników z analogicznymi rezultatami właściwymi dla układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej, prezentowanymi na rys. 4.13-4.16. Dla  $\rho < 1$  uzyskane w obu wypadkach krzywe prawie nie zależą od wartości stałej  $B$ , co świadczy o tym, że w tych warunkach o wartości wskaźnika jakości układu decyduje stan biegu jałowego układu. Warto również podkreślić, że wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$ , przy których odpowiednie krzywe przecinają oś odciętych, są, z dużą dokładnością, równe wartościom obliczonym dla proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej. Dla opadających fragmentów uzyskanych krzywych analogiczne podobieństwo zachodzi również dla przypadku, gdy  $\rho > 1$ . Świadczy to przede wszystkim o tym, że przyjęta jako optymalna dla skrajnych wartości para-

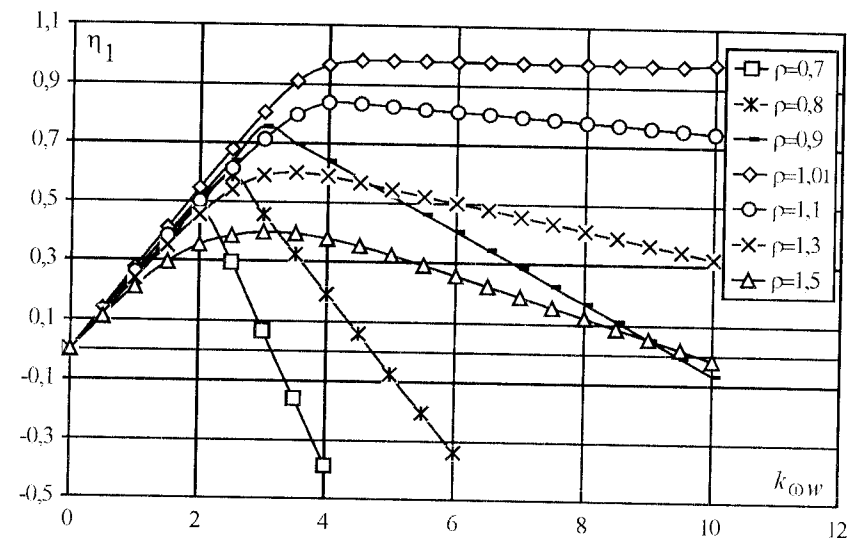
metru  $\rho$  wartość ilorazu  $S$  regulatora prędkości jest bliska wartości optymalnej również dla innych wartości  $\rho$ .



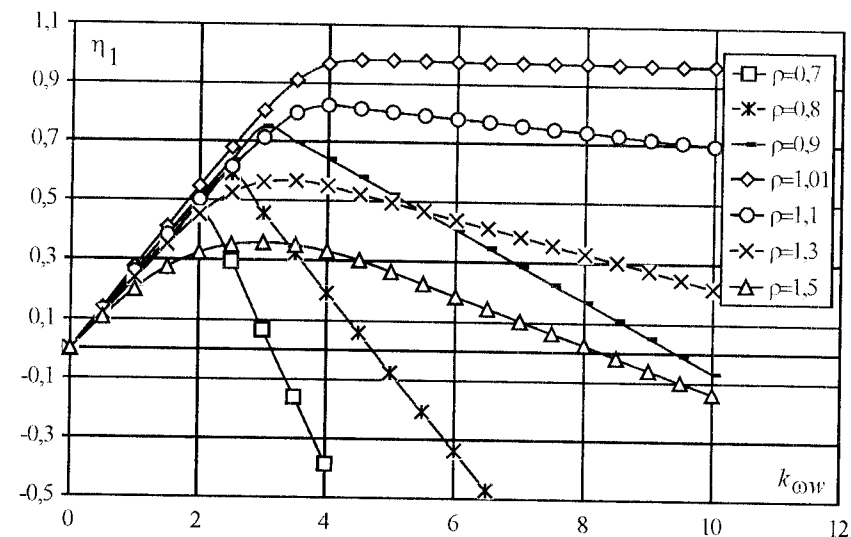
**Rys. 4.40.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 0$



**Rys. 4.41.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 1$



**Rys. 4.42.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 2$



**Rys. 4.43.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 5$

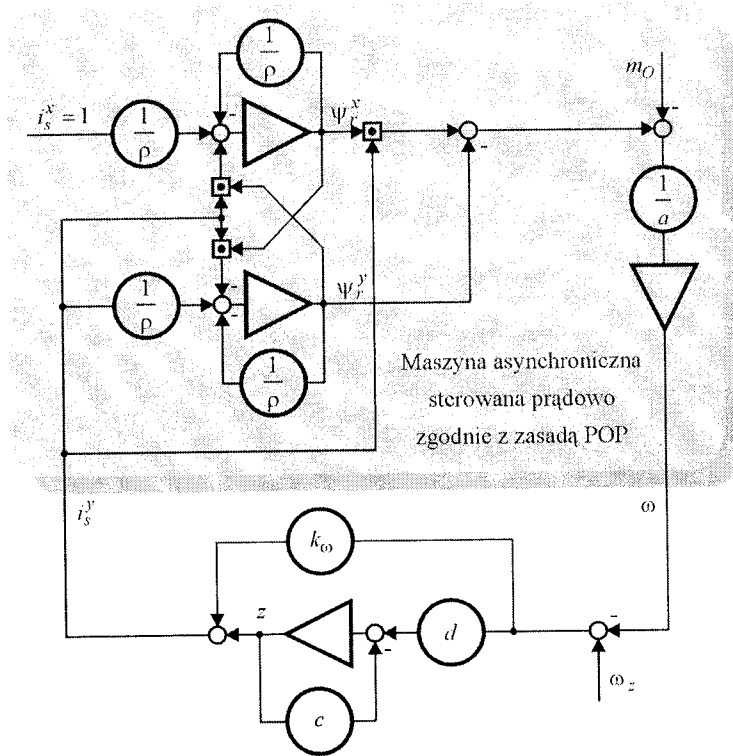
#### 4.2.1.2. Analiza stabilności globalnej układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR

Model matematyczny tej wersji układu napędowego może być sformułowany przy wykorzystaniu układu równań (4.59). Można wykazać, że wprowadzenie regulatora prędkości kątowej typu PIR w miejsce regulatora typu PI prowadzi jedynie do modyfikacji zależności (4.59d), która przybiera teraz postać:

$$\frac{d}{dt}z = d(\omega_z - \omega) - cz, \quad (4.70)$$

przy czym parametr  $c$  regulatora zdefiniowany jest zależnością (D1.46c).

Schemat blokowy tej wersji układu sterowania przedstawiony jest na rys. 4.44.



**Rys. 4.44.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wektor stanu ustalonego można teraz wyrazić zależnością:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T. \quad (4.71)$$

Podobnie jak w przypadku regulatora typu PI składowe wektora strumienia wirnika opisane są zależnościami (4.3). Słuszne pozostają również zależności (4.5), (4.6) oraz (4.7). Łatwo można też wykazać, że prawdziwa jest zależność:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{I_{Os}^y}{\frac{d}{c} + k_{\omega}}. \quad (4.72)$$

Z zależności tej oraz z zależności (4.7a) wynika, że charakterystyka mechaniczna tej wersji układu cechuje się określoną ustępliwością, tym mniejszą, im większe wartości przybiera iloraz  $\frac{d}{c}$  parametrów regulatora. Stosując odpowiednio małe wartości parametru  $c$  regulatora PIR można uzyskać wystarczająco małą ustępliwą charakterystyk mechanicznych napędu, zwłaszcza że wartość tego parametru może być ustalana przez konstruktora z dużą swobodą.

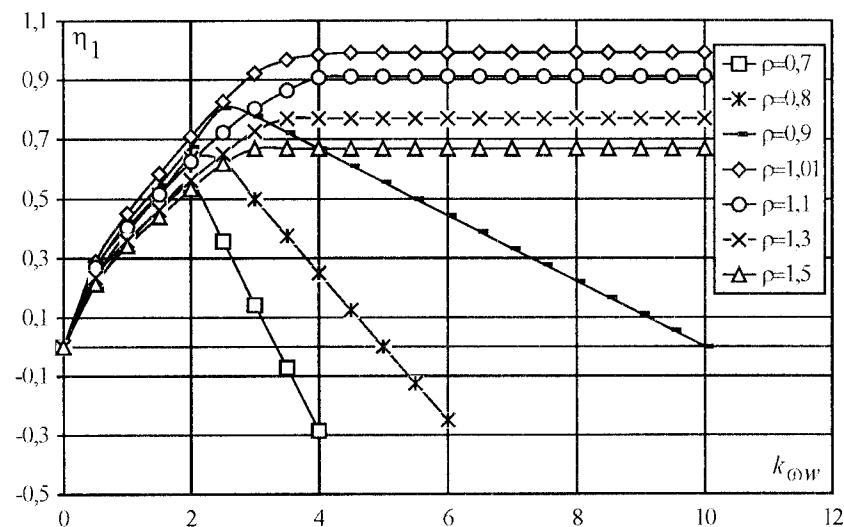
Model matematyczny układu napędowego wyposażonego w regulator prędkości kątowej typu PIR, opisujący zachowanie układu w stanach przejściowych w formie pseudoliniowej ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^y & \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1) & -\frac{1}{\rho} & -k_{\omega w} (\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x) & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \\ I_{Os}^y + \Delta z - k_{\omega w} \Delta \omega_1 & -1 & -k_{\omega w} \Psi_{Or}^x & \Psi_{Or}^x \\ 0 & 0 & -d_w & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

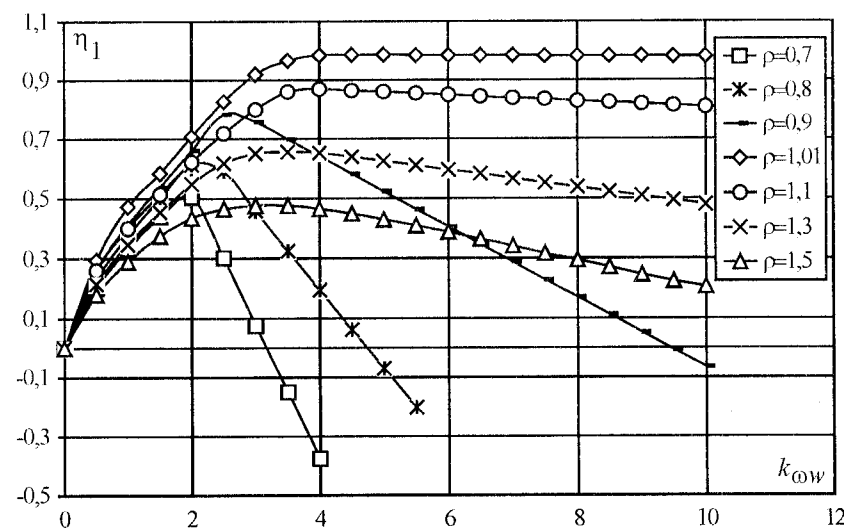
Porównanie macierzy stanu w powyższej zależności z macierzą stanu w równaniu (4.62) prowadzi do wniosku, że różnią się one jedynie elementem  $a_{44}$ , który spełnia teraz zależność  $a_{44} = -c$ . Można wykazać, że macierz formy kwadratowej, która gwarantuje pomyślny wynik testu Lapunowa dla dowolnych wartości

elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{31}$  macierzy stanu musi również należeć do klasy danej zależnością (4.66).

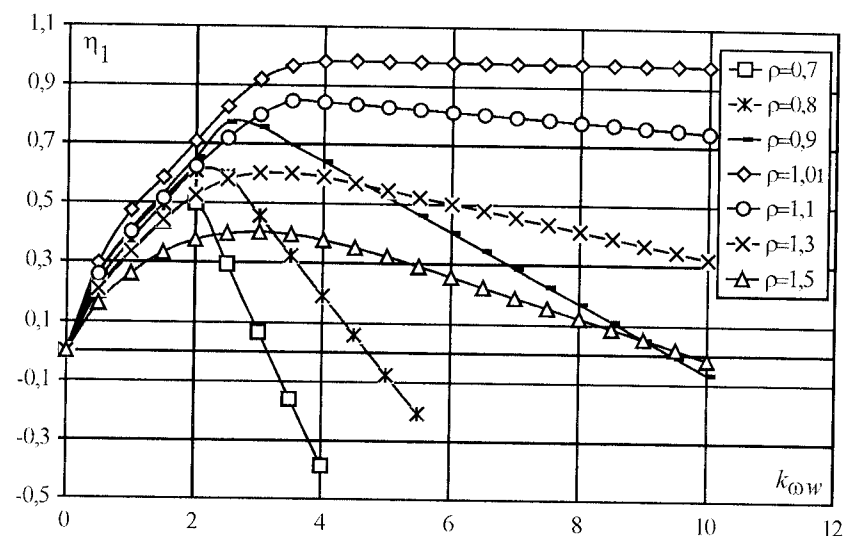
Wyniki badań układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR dla różnych wartości parametru  $c$  regulatora PIR prezentowane są na rys. 4.45-4.56.



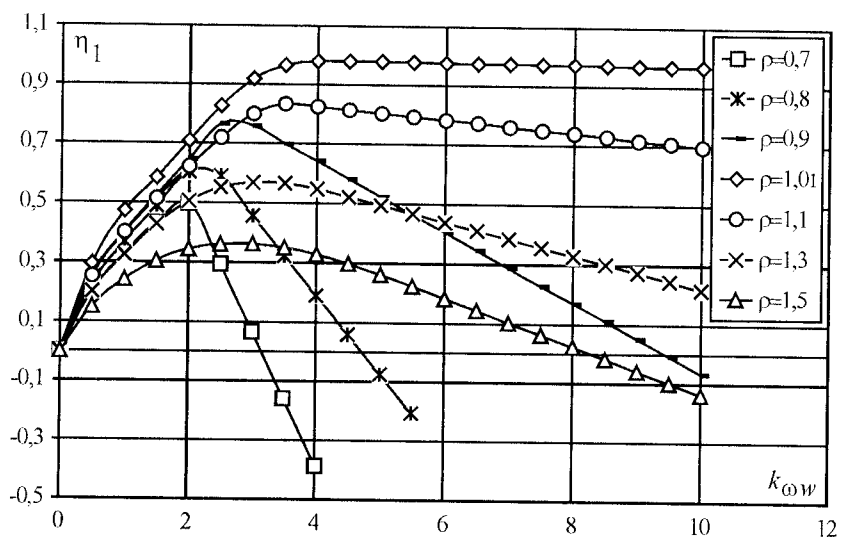
**Rys. 4.45.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\Omega W}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 0$ , parametr  $c = 0,1$



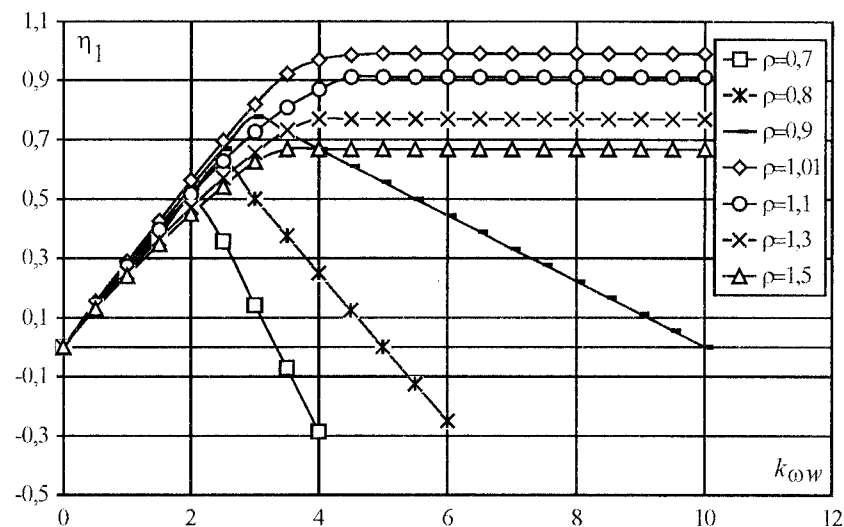
**Rys. 4.46.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\Omega W}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 1$ , parametr  $c = 0,1$



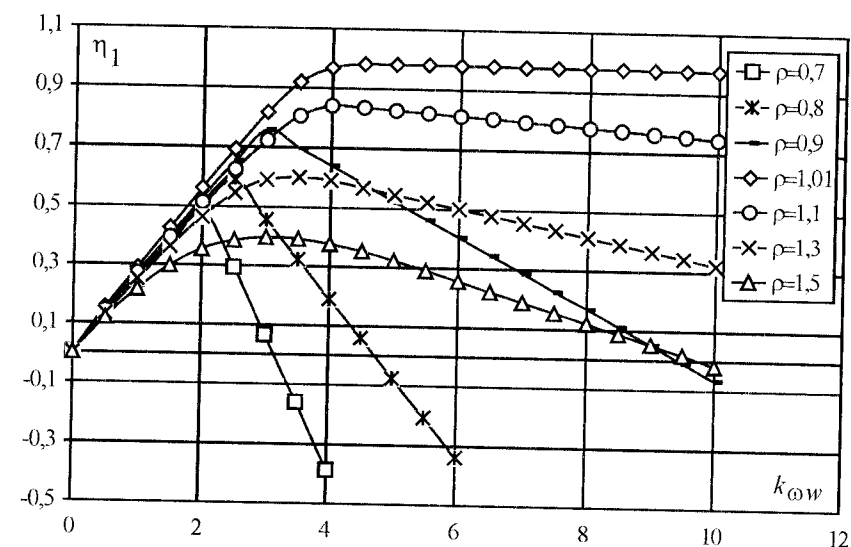
**Rys. 4.47.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\Omega W}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 2$ , parametr  $c = 0,1$



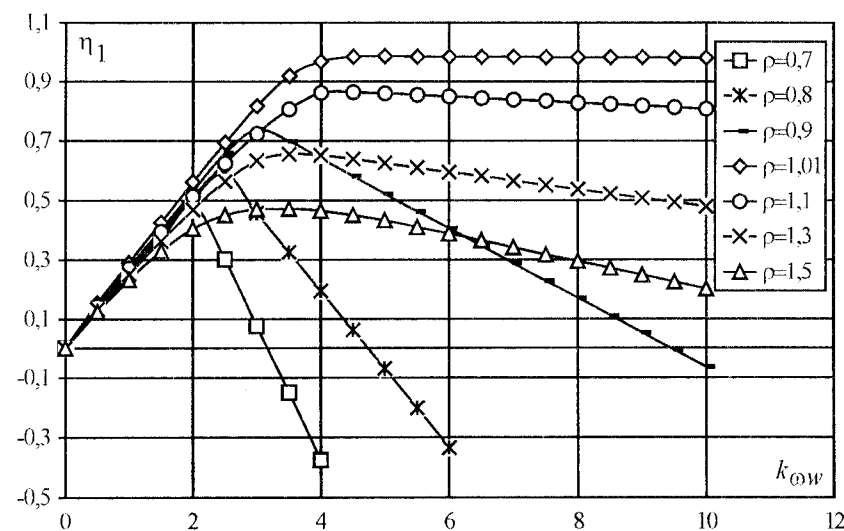
**Rys. 4.48.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_I$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\Omega W}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 5$ , parametr  $c = 0,1$



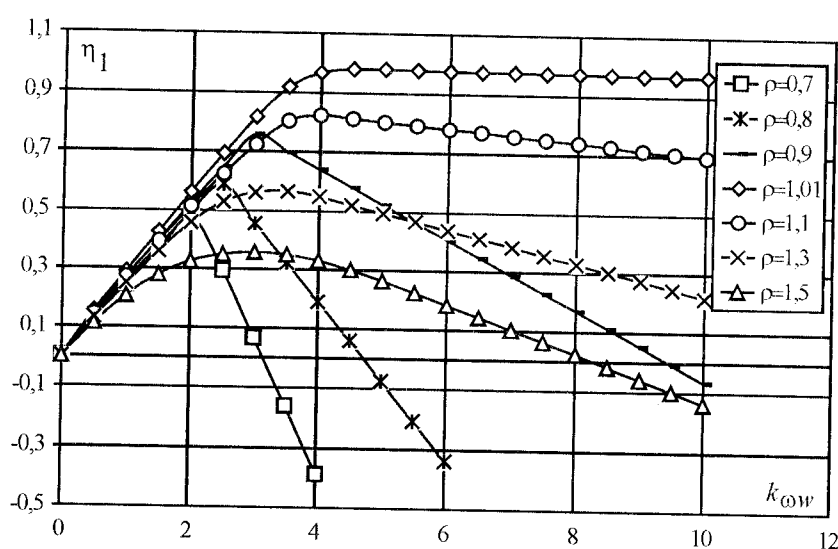
**Rys. 4.49.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 0$ , parametr  $c = 0,01$



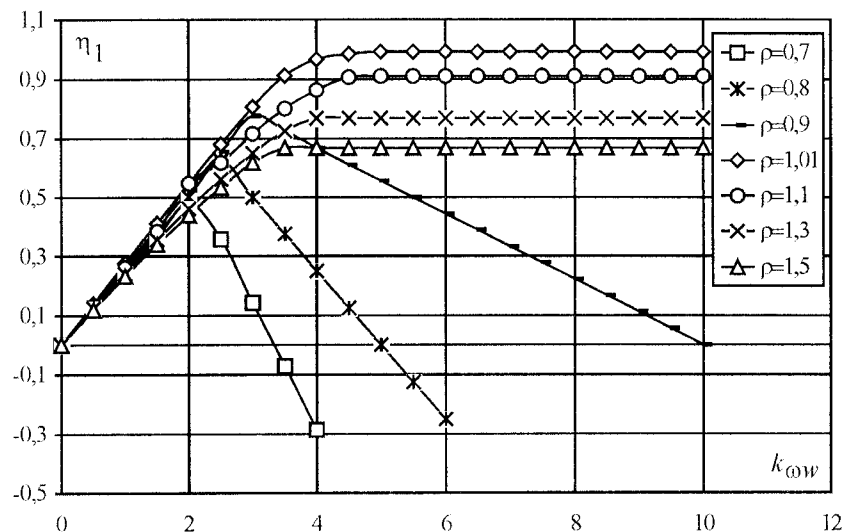
**Rys. 4.51.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 2$ , parametr  $c = 0,01$



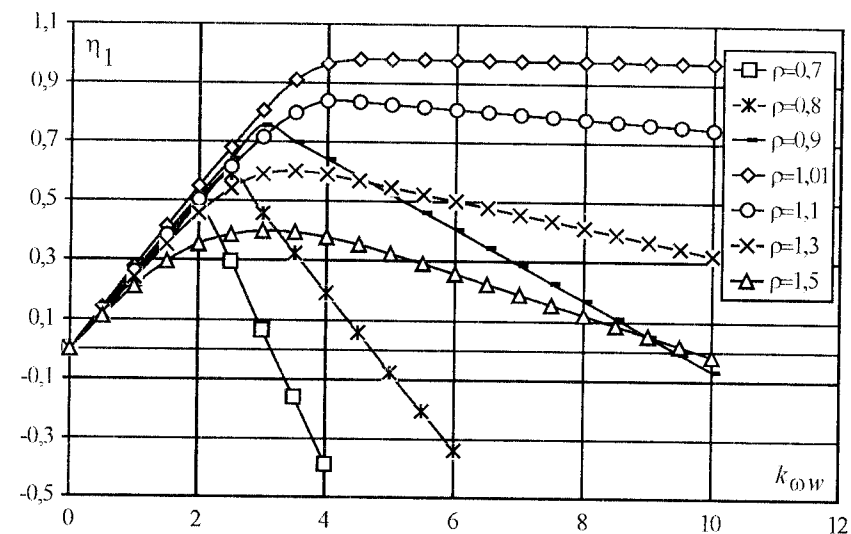
**Rys. 4.50.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 1$ , parametr  $c = 0,01$



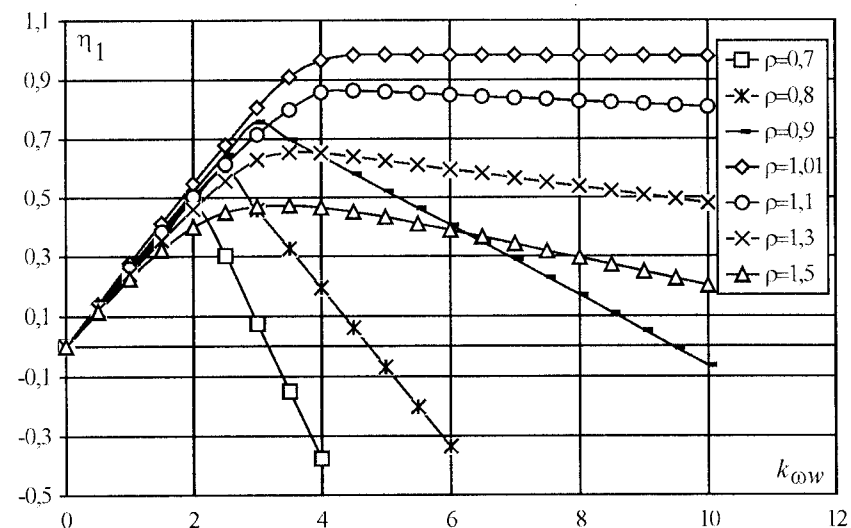
**Rys. 4.52.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 5$ , parametr  $c = 0,01$



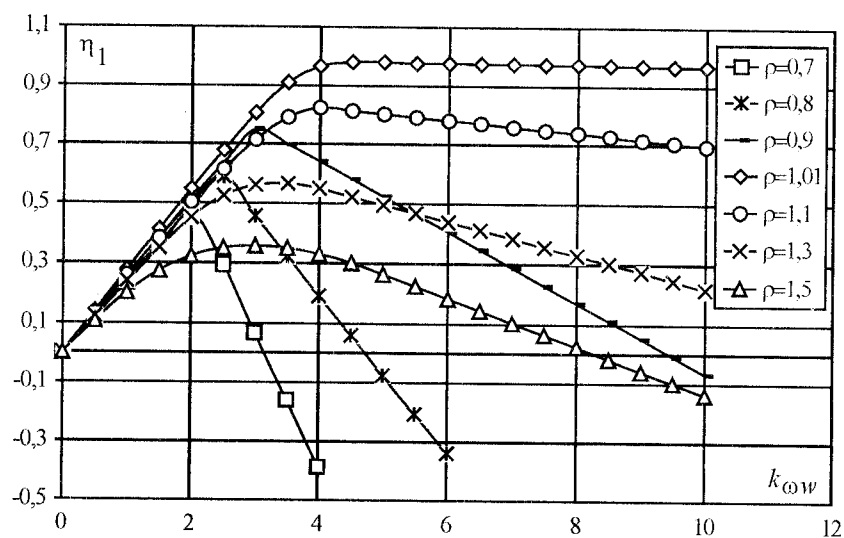
**Rys. 4.53.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 0$ , parametr  $c = 0,001$



**Rys. 4.55.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 2$ , parametr  $c = 0,001$



**Rys. 4.54.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 1$ , parametr  $c = 0,001$



**Rys. 4.56.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; stała  $B = 5$ , parametr  $c = 0,001$

Porównanie uzyskanych rezultatów z analogicznymi, uzyskanymi podczas badania układu z aktywnym regulatorem typu PI (rys. 4.40-4.43) prowadzi do następujących wniosków. Kształt uzyskanych krzywych jest w obu przypadkach bardzo zbliżony. Różnice ilościowe dają się zauważyć jedynie dla parametru  $c \geq 0,01$ . Dla tego zakresu wartości parametru  $c$  odnotować można większe wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  dla przypadku regulatora typu PIR (w stosunku do regulatora typu PI) jedynie w zakresie małych wartości współczynnika wzmocnienia regulatora. Dla większych wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej wskaźnik jakości osiąga wartości praktycznie niezależne od parametru  $c$ . Zastosowanie regulatora prędkości typu PIR zamiast PI prowadzi, jak widać, do podobnych efektów, a czynnikiem decydującym o konkretnej wartości parametru  $c$  może być wymagana dokładność statyczna układu napędowego.

Warto podkreślić, że elementy macierzy stanu w równaniu (4.73) zależą liniowo od, zdefiniowanych w punkcie 4.1.1.2 (komentarz do zależności (4.45)), parametrów  $p_1, p_2, p_3$ . Posługując się opisaną tam metodą można ocenić również odporność rozpatrywanej wersji układu na szybkie zmiany parametru w zakresie  $\rho \geq 1$ . Dla tych krzywych z rys. 4.45-4.56, dla których parametr  $\rho = 1,5$  oraz stała  $B \neq 0$ , sprawdzano, czy otrzymana w procesie optymalizacji forma kwadratowa jest również funkcją Lapunowa dla macierzy obliczonej dla współrzędnych wierzchołka  $W5$  ostrosłupa z rys. 4.17. Dla wszystkich wyróżnionych punktów opisanych wyżej krzywych, dla których wskaźnik jakości  $\eta_1 > 0$ , odnotowano pozytywny wynik takiego testu. Podobnie jak dla przypadku analizowanego punkcie 4.1, dla określonej wartości stałej  $B$  oraz współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  stanowi to gwarancję stabilności układu również w sytuacji, gdy zmiany parametru  $\rho$  (w zakresie  $1 \leq \rho \leq 1,5$ ) wywołane są przyczynami innymi niż zmieniająca się temperatura uzwojeń wirnika.

#### 4.2.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalno-inercyjno-różniczkowego regulatora prędkości kątowej

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR, wyposażonym w system ARW. Celowość analizy układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR, wyposażonym w system ARW, została wyjaśniona w punkcie 3.3.

Model matematyczny układu napędowego w rozpatrywanej wersji jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\Psi_r^x + \Psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (4.74a)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\Psi_r^y - \Psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho}i_s^y, \quad (4.74b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\Psi_r^x i_s^y - \Psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (4.74c)$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz + d(\omega_z - \omega)f_1(i_{s1}^y), \quad (4.74d)$$

$$i_{s1}^y = k_{\omega}(\omega_z - \omega) + z, \quad (4.74e)$$

$$i_s^y = f(i_{s1}^y). \quad (4.74f)$$

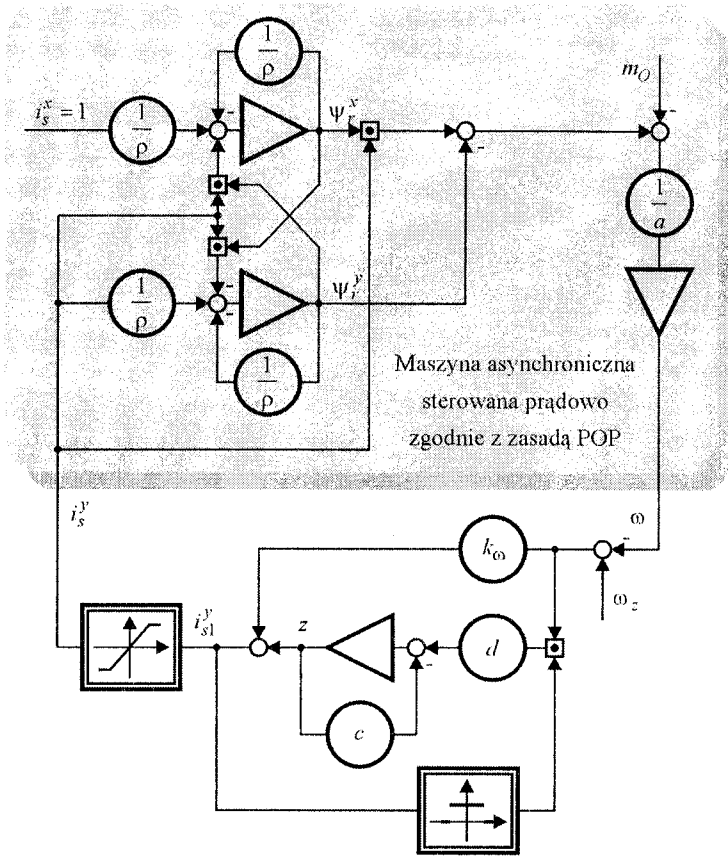
Nieliniowa zależność  $f(i_{s1}^y)$  ma opis zgodny z zależnością (3.2), a charakterystyka nieliniowego ogranicznika realizującego tę zależność przedstawiona jest na rys. 3.2. Opis matematyczny nieliniowego ogranicznika  $f_1(i_{s1}^y)$  jest zgodny z zależnością (3.48), a jego charakterystykę przedstawia rys. 3.6. Oba te elementy nieliniowe tworzą system ARW.

Schemat blokowy układu regulacji przedstawiono na rys. 4.57.

Zastosowanie systemu ARW prowadzi do tego, że wektor stanu ustalonego układu ma postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T, \quad (4.75)$$

przy czym składowe  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika opisane są zależnościami (4.3a) oraz (4.3b). Nieliniowe związki pomiędzy prędkością kątową  $\Omega_O$  a zmienną stanu regulatora  $Z_O$  dane są zależnością (3.51).



**Rys. 4.57.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR, wyposażonym w system ARW oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W stanach przejściowych słuszne są także zależności (3.55) i (3.56) oraz (3.58) i (3.59). Utworzony przy wykorzystaniu zależności (3.61) oraz (3.62) model matematyczny układu ma następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & a_{12} & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^y & N_1 \Psi_{Or}^y \\ -a_{21} & -\frac{1}{\rho} & -N_1 k_{\omega w} \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) & N_1 \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ a_{31} & -1 & -N_1 k_{\omega w} \Psi_{Or}^x & N_1 \Psi_{Or}^x \\ 0 & 0 & -N_2 d_w & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

gdzie:

$$a_{12} = a_{21} = a_{31} = I_{Os}^y + N_1 \Delta z - N_1 k_{\omega w} \Delta \omega_1. \quad (4.77)$$

Należy dodatkowo podkreślić, że zgodnie z zależnościami (3.56) i (3.59) zmiany wartości parametrów  $N_1$  oraz  $N_2$  nieliniowego regulatora prędkości typu PIR zachodzą jednocześnie.

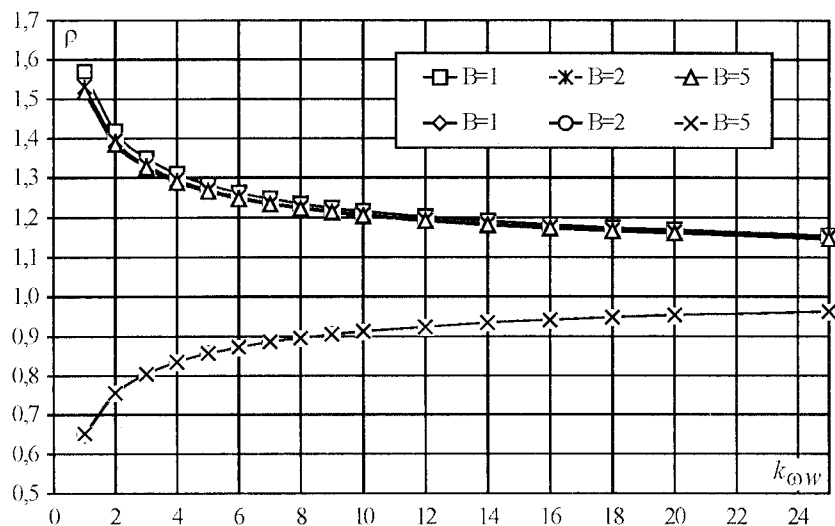
Badanie stabilności globalnej układu przeprowadzone zostanie dla zbioru punktów pracy ustalonej. Z uwagi na to, że również w tym wypadku macierz stanu w zależności (4.76) należy do klasy (1.64) analizę stabilności globalnej prowadzono optymalizując elementy macierzy (4.66) testującej formy kwadratowej.

Analizę stabilności warto poprzedzić porównaniem macierzy stanu w zależności (4.76) z macierzą stanu w zależności (4.57), właściwą dla układu z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu P. Z porównania tego wynika, że elementy macierzy stanu  $a_{13}, a_{23}, a_{33}$  i  $a_{14}, a_{24}, a_{34}$  w równaniu (4.76) zależą liniowo od odpowiadających im elementom  $a_{13}, a_{23}, a_{33}$  macierzy stanu w równaniu (4.57). Analizę stabilności globalnej układu prowadzić więc można również w ramach wielościanu przedstawionego na rys. 4.30 z tym, że dla reprezentatywnych wierzchołków  $W3', W4'$  parametr  $N_2 = 1$  natomiast dla wierzchołków  $W3'', W4''$  wartość parametru  $N_2 = 0$ .

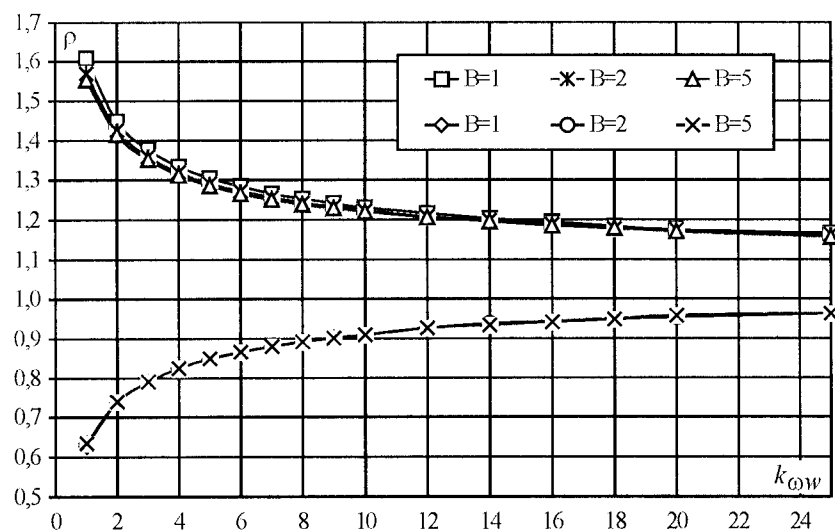
Badanie stabilności globalnej układu przeprowadzono w sposób analogiczny jak opisano to w punkcie 4.1.3.

Wyniki badań układu dla uznanej wcześniej za optymalną wartości ilorazu  $S = 0,2$  przedstawiono na rys. 4.58-4.60. Prezentowane na rysunkach krzywe należy interpretować analogicznie, jak opisane w punkcie 4.1.3 krzywe na rys. 4.31. Badania prowadzono dla różnych wartości parametru  $c$  regulatora PIR.

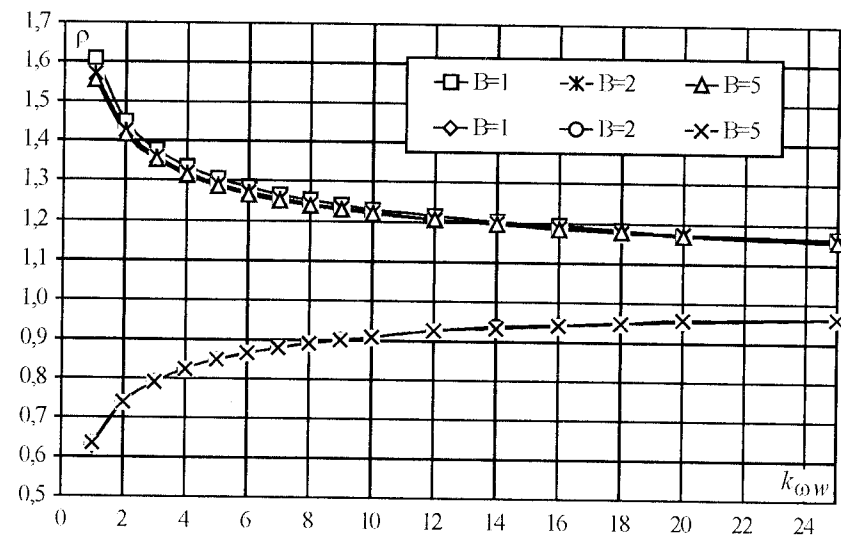
Z przedstawionych rezultatów wynika, że znaczne zmiany wartości parametru  $c$  regulatora prędkości kątowej powodują stosunkowo małe zmiany dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ . Podobnie, jak dla przypadku regulatora prędkości kątowej typu P, dopuszczalne wartości parametru  $\rho$  w niewielkim stopniu zależą od zakresu dopuszczalnych zmian składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana, zwłaszcza dla  $\rho < 1$ , gdzie dla różnych wartości stałej  $B$  otrzymano praktycznie jedną krzywą. Otrzymane rezultaty są ponadto ilościowo zbliżone do tych, które uzyskano dla przypadku regulatora prędkości typu P. Dopuszczalne wartości parametru  $\rho$  są (dla  $\rho \geq 1$ ) o około 0,05–0,08 mniejsze od tych wartości parametru  $\rho$ , które dopuszczalne są dla przypadku z regulatorem prędkości kątowej typu P. Dla  $\rho \leq 1$  różnice te są jeszcze mniejsze.



**Rys. 4.58.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej; iloczyn  $Nk_{\Omega w} = 0,1$ , parametr  $c = 0,1$



**Rys. 4.59.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej; iloczyn  $Nk_{\Omega w} = 0,1$ , parametr  $c = 0,01$



**Rys. 4.60.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej; iloczyn  $Nk_{\Omega w} = 0,1$ , parametr  $c = 0,001$

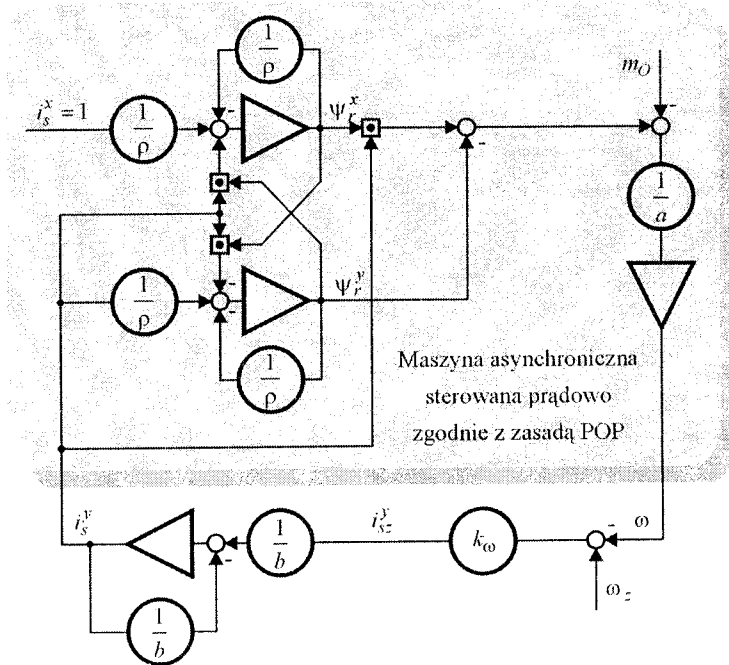
#### 4.3. Wpływ zmian rezystancji wirnika na stabilność układu z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności globalnej układu napędowego o sterowaniu zgodnym z zasadą POP z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz inercyjnym modelem obwodu regulacji prądu stojana. Na wstępie rozpatrzony zostanie taki przypadek, w którym regulator prędkości kątowej pracuje w zakresie liniowym. Następnie przebadana zostanie wersja układu z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej.

W zakresie podstawowym prezentowany tu sposób postępowania jest analogiczny do stosowanego w poprzednich punktach tego rozdziału.

#### ***4.3.1. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej pracującym w zakresie liniowym***

Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu przedstawia rys. 4.61.



**Rys. 4.61.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Do analizy właściwości dynamicznych tej wersji układu napędowego można wykorzystać sformułowany w dodatku D3.4 model matematyczny:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Współrzędne wektora stanu ustalonego:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad l_{Os}^y \quad \Omega_O]^T \quad (4.79)$$

określone są przez zależności (4.3a), (4.3b), (4.3c) oraz (4.6). Zabiegi standaryzujące przeprowadzone zgodnie z zależnościami (3.27), (3.28) i (3.30) pozwalają zapisać zależność (4.78) w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

W ten sposób redukuje się liczbę niezależnych parametrów układu występujących w macierzy stanu, co upraszcza proces analizy. Warto tu jedynie podkreślić, że, zgodnie z zależnościami (3.27)-(3.29), wielkością odniesienia dla względnego współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega\omega}$  regulatora prędkości kątowej jest wielkość  $k_{\omega M}$ , wynikająca z kryterium modułu dla podsystemu elektromechanicznego przy  $\rho = 1$ .

Analogicznie jak w poprzednich punktach tego rozdziału można dokonać dekompozycji macierzy stanu na podmacierze:

$$\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} \\ -\frac{1}{2b} & -\frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.81a)$$

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = \begin{bmatrix} -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & 0 & \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} \end{bmatrix}^T, \quad (4.81b)$$

$$\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = \begin{bmatrix} I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.81c)$$

przy czym wektor stanu rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego jest teraz zdefiniowany jako:

$$\Delta \mathbf{x}_{mer} = [\Delta \Psi_r^y \quad \Delta i_s^y \quad \Delta \omega_1]^T. \quad (4.81d)$$

Topologia układu jest zgodna z rys. 4.7.

Łatwo można zauważyć, że macierz stanu w zależności (4.80) należy do klasy określonej zależnością (1.64). Również w tym wypadku warunkiem koniecznym optymalności macierzy formy kwadratowej-kandydata na funkcję Lapunowa jest przynależność do klasy określonej przez zależność (4.23), z tym że teraz kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona macierz  $\mathbf{P}_b$  musi mieć wymiar zgodny z macierzą  $\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O)$ . Łatwo również wykazać, że jeżeli (w ramach tej klasy) test stabilności przeprowadzony będzie przy wykorzystaniu formy kwadratowej o macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{b11} & \frac{p_{b23}}{2b} & \frac{1}{2b} \\ 0 & \frac{p_{b23}}{2b} & p_{b22} & p_{b23} \\ 0 & \frac{1}{2b} & p_{b23} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

to pochodna czasowa tej formy obliczana wzdłuż dowolnej trajektorii układu (4.80) przybiera postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = & -\frac{2}{\rho} \left( p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} \right) (\Delta \Psi_r^x)^2 + \\ & + \Delta \mathbf{x}_{mer}^T \left( \mathbf{A}_{mer}^T(\mathbf{X}_O) \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \right) \Delta \mathbf{x}_{mer} + \\ & + 2 \left( p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} \right) \Psi_{Or}^y \Delta i_s^y \Delta \Psi_r^x. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Współczynniki formy kwadratowej (4.83) nie zależą od współrzędnych przyrostowego wektora stanu, co potwierdza szczególną przydatność formy kwadratowej o macierzy (4.82) do analizy stabilności globalnej układu.

Dodatnia określoność macierzy (4.82) narzuca jednocześnie spełnienie nierówności:

$$p_{b11} > \frac{1}{(2b)^2}, \quad (4.84a)$$

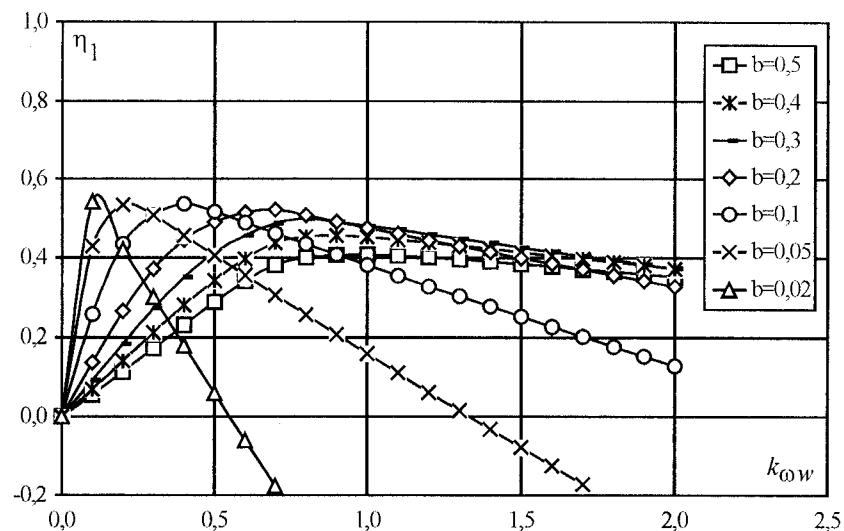
$$p_{b22} > (p_{b23})^2. \quad (4.84b)$$

Można wykazać, że również w tym wypadku wskaźnik jakości (4.27) posiada właściwości określone zależnością (4.39). Analogicznie, jak to opisano w punkcie 4.1, obliczenia optymalizacyjne mogą być więc przeprowadzane jedynie dla dwóch wierzchołków prostokąta z rys. 4.12. Proces optymalizacji przebiega bardzo efektywnie, ponieważ macierz (4.82) testującej formy kwadratowej zawiera jedynie trzy niezależne elementy.

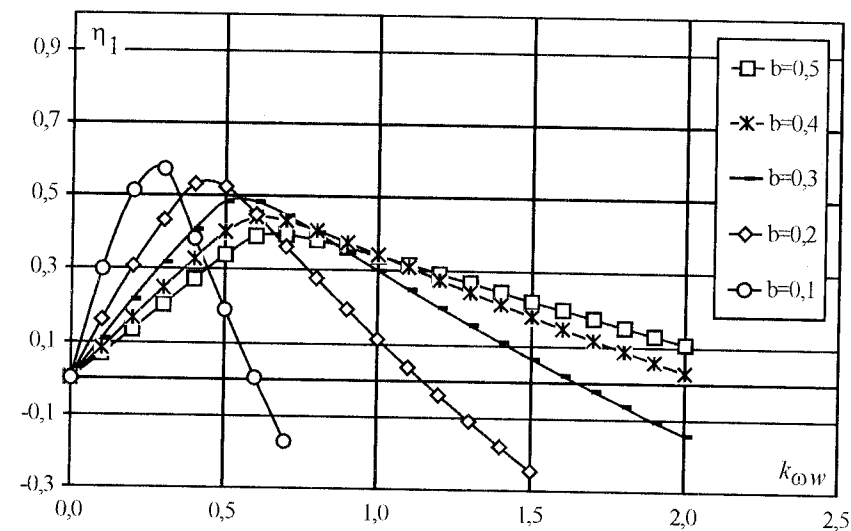
Analiza stabilności rozpatrywanej wersji narzuca jednak konieczność oceny wpływu wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu stojana na właściwości dynamiczne układu. Wynika to stąd, że pomimo przeprowadzonych zabiegów standaryzujących, elementy macierzy stanu w zależności (4.80) zależą nie tylko od względnego współczynnika wzmocnienia, lecz również od wartości tej stałej czasowej. W związku z tym, we wstępnym etapie rozwiązania problemu, przeprowadzono analizę wpływu wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  na właściwości dynamiczne układu. Badania przeprowadzono w ten sposób, że właściwości układu badane były dla różnych wartości stałej czasowej  $b$  dla uznanych za skrajne wartości parametru  $p$ .

Wyniki badań dla parametru  $p=1,5$  przedstawiono na rys. 4.62-4.63. Zaprezentowano na nich zależność wskaźnika jakości od wartości względnego współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej  $k_{\omega w}$  przy różnych wartościach stałej czasowej  $b$ . Jako górną granicę wartości względnego współczynnika wzmocnienia uznano  $k_{\omega w}=2$ . Praca układu, nawet w warunkach braku zaburzeń rezystancji wirnika, przy większych wartościach tego współczynnika wzmocnienia, wydaje się mało prawdopodobna z uwagi na znaczną wartość przeregulowania sygnału prędkości kątowej w podsystemie elektromechanicznym.

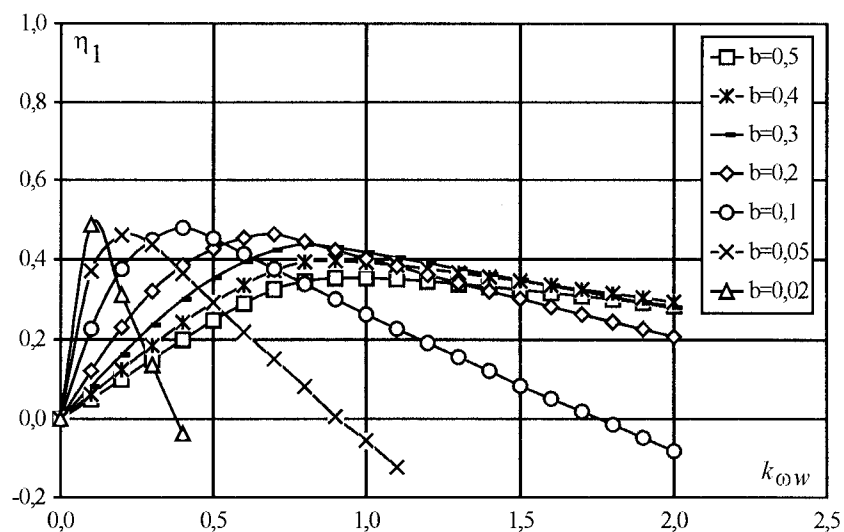
Na rys. 4.64-4.65 przedstawiono rezultaty analogicznych badań właściwości dynamicznych układu, uzyskane dla parametru  $p=0,7$ .



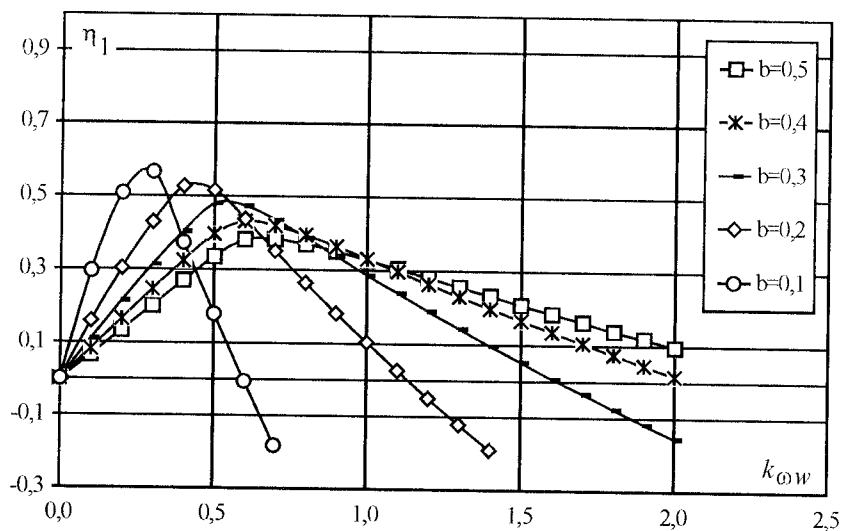
**Rys. 4.62.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu; stała  $B = 1$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.64.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu; stała  $B = 1$ , parametr  $\rho = 0,7$



**Rys. 4.63.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.65.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 0,7$

Z przedstawionych rezultatów wynika, że jeżeli stała czasowa  $b < 0,25$ , to jej wartość ma już stosunkowo mały wpływ na maksymalne wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$ . Można jednak zauważyć wyraźne przemieszczanie się nieostrego maksimum tego wskaźnika wzdłuż osi wartości względnego współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  przy różnych wartościach stałej czasowej  $b$ . W miarę zwiększania się szybkości obrotu regulacji prądu (mniejsze wartości zastępczej stałej czasowej  $b$ ) maksimum to przesuwają się w kierunku coraz mniejszych wartości współczynnika  $k_{\omega w}$ . Zasada ta dotyczy również wartości granicznych wskaźnika jakości, przy których następuje utrata gwarancji stabilności układu.

W świetle przedstawionych wyników badań wyłania się supozycja, że opisana wyżej zależność jakościowa da się również ująć w pewne ramy ilościowe. Potwierdzeniem tego są krzywe przedstawione na rys. 4.66 i 4.67. Przedstawiono na nich zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia uzyskanej dla różnych wartości stałej czasowej  $b$  odpowiednio dla  $\rho = 1,5$  oraz dla  $\rho = 0,7$ . Współczynnik wzmocnienia  $k_{\omega w b}$  dla każdej krzywej odpowiadającej określonej wartości stałej czasowej  $b$  obliczany był z zależności:

$$k_{\omega w b} = \frac{0,25 k_{\omega w}}{b}. \quad (4.85)$$

Innymi słowy, wprowadzono nową, względną miarę współczynnika wzmocnienia, przy czym za podstawę przyjęto te wartości współczynnika  $k_{\omega w}$ , które odpowiadają stałej czasowej  $b = 0,25$ . Przyjęta za bazową wartość stałej czasowej  $b$  wynika z badań doświadczalnych. Jest ona rezultatem pewnego kompromisu pozwalającego uzyskać zadowalające wyniki dla obu skrajnych wartości parametru  $\rho$ .

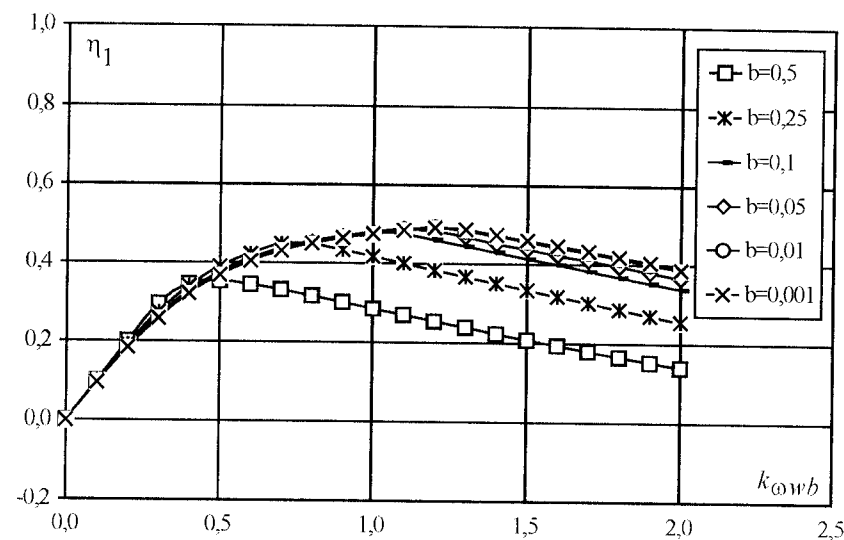
Z przedstawionych rezultatów wynika, że w tych warunkach dla:

$$0,1 \geq b \geq 0,001 \quad (4.86)$$

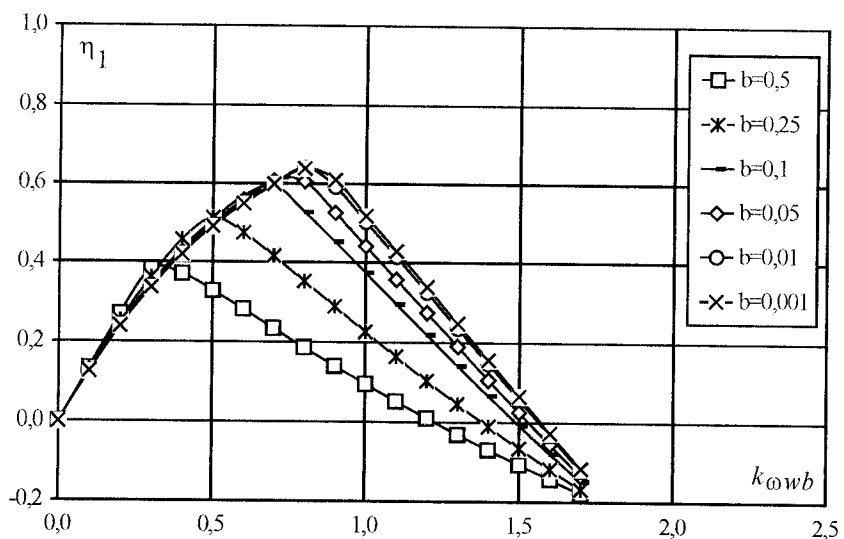
wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  dla  $0,5 \leq k_{\omega w b} \leq 1$  nie różnią się od siebie więcej niż o 0,1 i jednocześnie:

$$\eta_1 \geq 0,37. \quad (4.87)$$

Ten zapas wartości wskaźnika jakości wydaje się być wystarczający, zwłaszcza że uzyskano go dla dostatecznie dużego zakresu zmienności zastępczej stałej czasowej  $b$ . Przy formułowaniu warunku (4.87) decydujące znaczenie miały rezultaty badań przeprowadzone dla  $\rho = 0,7$ . Dla parametru  $\rho = 1,5$  zarówno zakres wartości współczynnika wzmocnienia jak i odpowiadające mu gwarantowane wartości wskaźnika jakości są większe.



**Rys. 4.66.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w b}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej obrotu regulacji prądu; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 1,5$ , współczynnik wzmocnienia dla każdej krzywej obliczać należy według zależności (4.85)



**Rys. 4.67.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w b}$  dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej obrotu regulacji prądu; stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 0,7$ , współczynnik wzmocnienia dla każdej krzywej obliczać należy według zależności (4.85)

Należy podkreślić, że zgodnie z zależnością (D1.36) wartością odniesienia dla względnej zastępczej stałej czasowej  $b$  jest przyjęta za znamionową wartość stałej czasowej  $T_{rN}$  obwodu wirnika. Wartość tej stałej czasowej wynosi na ogół kilkaset milisekund. Zastosowanie nowoczesnej techniki przekształtnikowej pozwala natomiast uzyskać zastępcze stałe czasowe  $T_{sF}$  obwodu regulacji prądu stojana nawet na poziomie kilkuset mikrosekund. Uzyskanie zastępczej względnej stałej czasowej  $b$  na poziomie określonym nierównością (4.86) nie powinno więc narażać na praktycznych trudności.

Podsumowując powyższe rozważania, dla układów o sterowaniu zgodnym zasadą POP pracujących trwale z  $\rho \neq 1$  proces syntezy układu regulacji prędkości kątowej powinien uwzględniać przesłanki wynikające z dwóch podstawowych przypadków.

**Przypadek 1:** zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu stojana  $0,5 \geq b \geq 0,25$

W tych warunkach preferowany zakres wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  można uznać za niezależny od wartości stałej czasowej  $b$ , a wartości tego współczynnika należy przyjmować jako:  $0,5 \leq k_{\omega w} \leq 1,5$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  lub  $0,25 \leq k_{\omega w} \leq 0,75$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . Taki sposób postępowania zapewnia uzyskanie wartości wskaźnika na poziomie odpowiednio  $\eta_1 \geq 0,25$  lub  $\eta_1 \geq 0,18$ . Podstawę do sformułowania powyższych zaleceń stanowią rezultaty badań prezentowane na rys. 4.63 oraz 4.65.

**Przypadek 2:** zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu stojana  $0,25 \geq b \geq 0,001$

W tych warunkach zakres preferowanych wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  powinien być korygowany zależnie od wartości zastępczej stałej czasowej, zgodnie z zależnością (4.85). Na podstawie rezultatów badań przedstawionych na rys. 4.66 oraz 4.67 można sformułować następujące zalecenia projektowe dotyczące wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w b}$ . Wartości tego współczynnika należy przyjmować jako:  $0,5 \leq k_{\omega w b} \leq 1,5$  dla  $1 \leq \rho \leq 1,5$  lub  $0,25 \leq k_{\omega w b} \leq 1$  dla  $0,7 \leq \rho \leq 1$ . Taki sposób postępowania gwarantuje wartość wskaźnika jakości na poziomie odpowiednio  $\eta_1 \geq 0,3$  lub  $\eta_1 \geq 0,2$ . Z rezultatów przedstawionych na rys. 4.66 oraz 4.67 wynika również, że szczególnie korzystnie jest stosować zastępczą stałą czasową  $b \leq 0,05$ . Preferowane zakresy wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dane są wówczas zależnościami:

$$\frac{0,5}{0,25} b \leq k_{\omega w} \leq \frac{1,5}{0,25} b \quad \text{dla} \quad 1 \leq \rho \leq 1,5, \quad (4.88a)$$

$$\frac{0,5}{0,25} b \leq k_{\omega w} \leq \frac{b}{0,25} \quad \text{dla} \quad 0,7 \leq \rho \leq 1, \quad (4.88b)$$

a gwarantowana wartość wskaźnika jakości  $\eta_1 \geq 0,37$ . Dalsze obniżanie wartości zastępczej stałej czasowej nie wywołuje już istotnego wzrostu wskaźnika jakości  $\eta_1$ .

Biorąc pod uwagę szybkość działania współczesnych zasilaczy energoelektronicznych wydaje się, że większe znaczenie praktyczne będą miały sytuacje opisane w przypadku drugim, a zwłaszcza te, dla których współczynnik wzmocnienia obliczony powinien być według zależności (4.88).

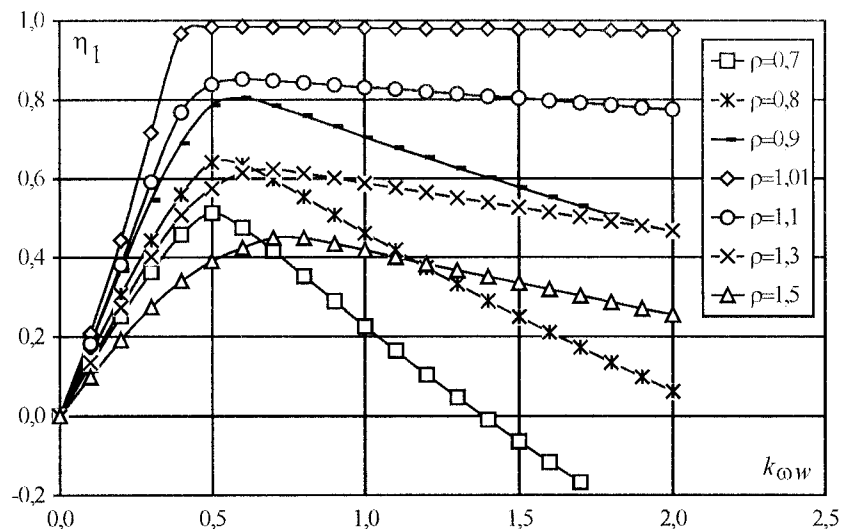
Śluszność zaproponowanego sposobu postępowania w procesie syntezy obwodu regulacji prędkości kątowej potwierdzają wyniki badań przedstawione na rys. 4.68-4.71. Z rysunków tych wynika, że korekta wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  zgodnie z zależnością (4.85) prowadzi do znacznego podobieństwa jakościowego uzyskanych krzywych. Dla  $b \leq 0,05$  (rys. 4.70 oraz 4.71) zachodzi ponadto silne podobieństwo ilościowe. Stanowi to również potwierdzenie tezy, że znaczne zmniejszanie stałej czasowej poniżej wartości  $b = 0,05$  (przy jednoczesnej korekcie współczynnika wzmocnienia) nie powoduje już zauważalnych zmian właściwości dynamicznych układu również dla innych niż przyjęte za skrajne wartości parametru  $\rho$ .

Do interesujących wniosków prowadzi również przeniesienie uzyskanych rezultatów w dziedzinę wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej  $k_{\omega}$  zgodnie z definicją (D1.16). Z zależności (3.27) oraz (3.28) wynika, że w dziedzinie wartości tego współczynnika nierówności (4.88) przybierają postać:

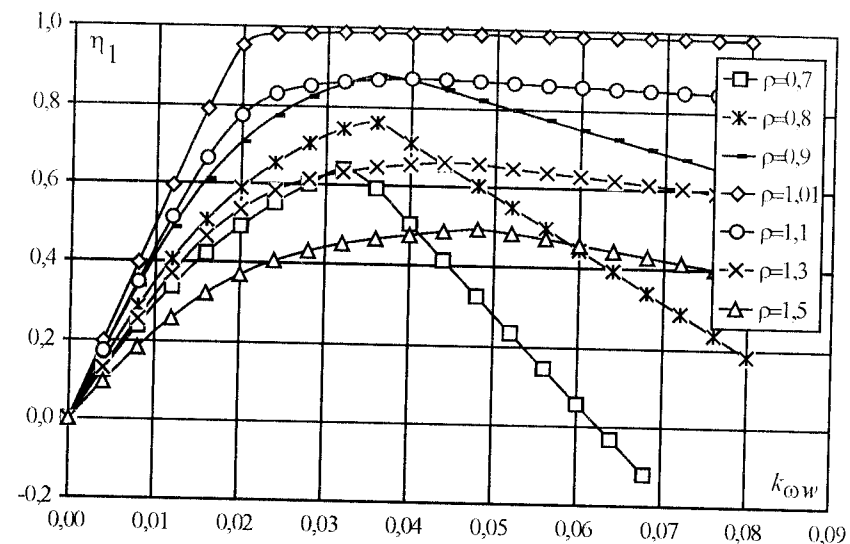
$$a \leq k_{\omega} \leq 3a \quad \text{dla} \quad 1 \leq \rho \leq 1,5, \quad (4.89a)$$

$$a \leq k_{\omega} \leq 2a \quad \text{dla} \quad 0,7 \leq \rho \leq 1. \quad (4.89b)$$

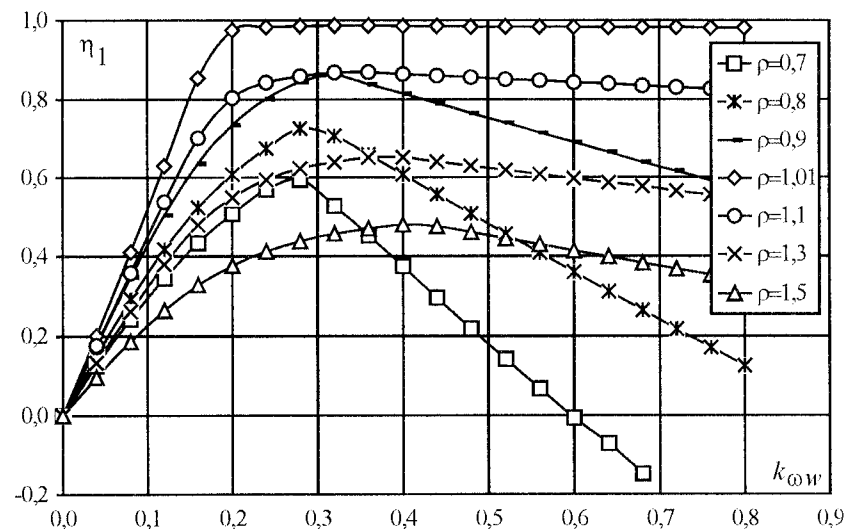
Zalecany (dla  $b \leq 0,05$ ) zakres wartości tego współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej jest, jak widać, niezależny od wartości zastępczej stałej  $b$ . Jego wartość zależy natomiast od danej zależnością (D1.11) stałej  $a$  układu napędowego.



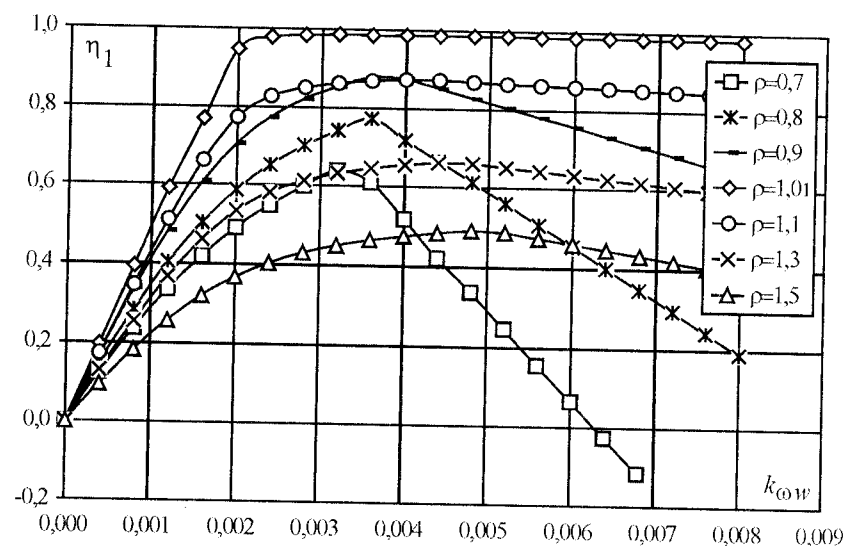
**Rys. 4.68.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,25$ , stała  $B = 2$



**Rys. 4.70.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$



**Rys. 4.69.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,1$ , stała  $B = 2$



**Rys. 4.71.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,001$ , stała  $B = 2$

Warto zwrócić uwagę, że pozwala to również na porównanie wartości współczynnika wzmocnienia zalecanych dla rozpatrywanej wersji układu z tymi wartościami współczynnika wzmocnienia, jakie uzyskano w punkcie 4.1.1.2 dla analogicznej wersji z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana. Rezultaty badań w analogicznych warunkach przedstawione zostały na rys. 4.15. Biorąc pod uwagę, że stosowany tam współczynnik wzmocnienia zdefiniowany został przy pomocy zależności (4.12) łatwo można dojść do wniosku, że zarówno poziom wartości maksymalnych wskaźnika jakości jak i usytuowanie tego maksimum wzdłuż osi współczynnika wzmocnienia są (dla  $b \leq 0,05$ ) w obu przypadkach bardzo zbliżone. Z praktycznego punktu widzenia oznacza to, że dla stałej czasowej  $b \leq 0,05$  o stabilności rozpatrywanej wersji układu wnioskować można, z dobrą dokładnością, na podstawie badań prostszej wersji układu z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana.

Na zakończenie zaprezentowane zostaną wybrane wyniki badań stabilności rozpatrywanej wersji układu o sterowaniu zgodnym z zasadą POP przy ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi. Prezentowane rezultaty dotyczą badania stabilności przy takich odchyleniach przyrostowego wektora stanu, dla których zagwarantowane jest „przyciąganie” wszystkich punktów pracy ustalonej w zakresie zmienności składowej  $I_{Os}^y$  danym zależnością:

$$-2 \leq I_{Os}^y \leq 2. \quad (4.90)$$

Minimalny promień sfery przyciągania określony może być wtedy z zależności:

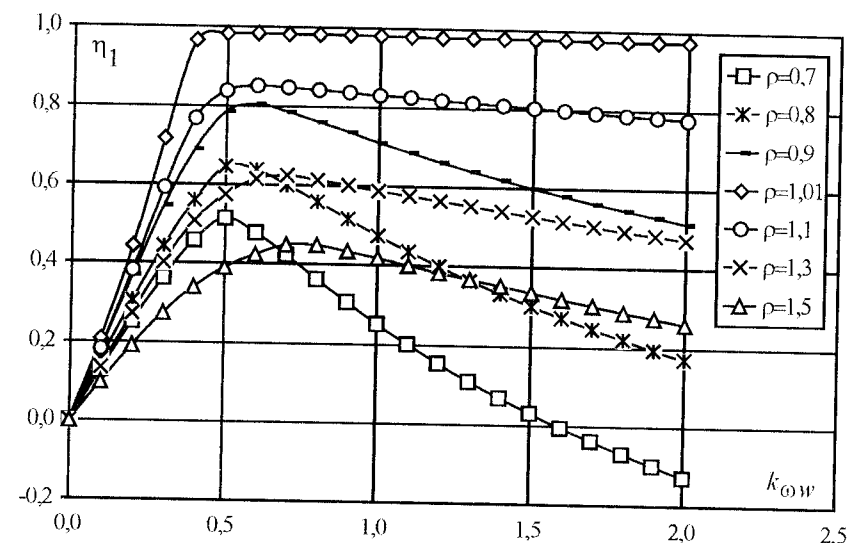
$$r_{min} = 2 \sqrt{D_{1max}^2 + \left( \frac{D_{1max}}{k_{ow}} \right)^2 + \left( \frac{D_2 - 1}{2} \right)^2 + (D_{3max})^2}. \quad (4.91)$$

Sposób rozwiązania tego zagadnienia oraz metodyka określania wartości  $D_{1max}$ ,

$D_2$ ,  $D_{3max}$  zostały opisane w punkcie 4.1.2.

Wyniki badań dla  $b = 0,25$  przedstawiono na rys. 4.72. Porównanie rezultatów badań z tego rysunku z wynikami przedstawionymi na rys. 4.68 prowadzi do wniosku, że zachodzą tu podobne relacje, jak w opisanym w punkcie 4.1.2 przypadku bezinercyjnego obwodu regulacji prądu stojana. Dla  $\rho > 1$  różnice uzyskanych krzywych są symboliczne. Oznacza to, że do oceny stabilności układu przy zdefiniowanych wyżej rozmiarach sfery przyciągania można z powodzeniem wykorzystać rezultaty uzyskane przy ocenie stabilności globalnej układu. Ich wykorzystanie do oceny właściwości dynamicznych układu dla  $\rho < 1$  stwarza pewne rezerwy w ocenie wartości wskaźnika jakości. Jak opisano to w punkcie 4.1.2, dokładne określenie tych rezerw jest jednak dosyć pracochłonne, a praktyczne

wykorzystanie wyników (z uwagi na wzrost normy wektora strumienia dla  $\rho < 1$  nawet w stanie ustalonym) mało przydatne.



Rys. 4.72. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{ow}$  dla ograniczonych odchyleniach wektora stanu od położenia równowagi; za pomocą stała czasowa  $b = 0,25$ , stała  $B = 2$

#### 4.3.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalnego regulatora prędkości kątowej

W dotychczasowych rozważaniach w ramach punktu 4.3 zakładano, że regulator prędkości kątowej pracuje w zakresie liniowym. Powstaje pytanie, w jakim stopniu zmienia się podstawowe właściwości dynamiczne układu, jeżeli uwzględniony zostanie efekt nasycenia regulatora prędkości kątowej.

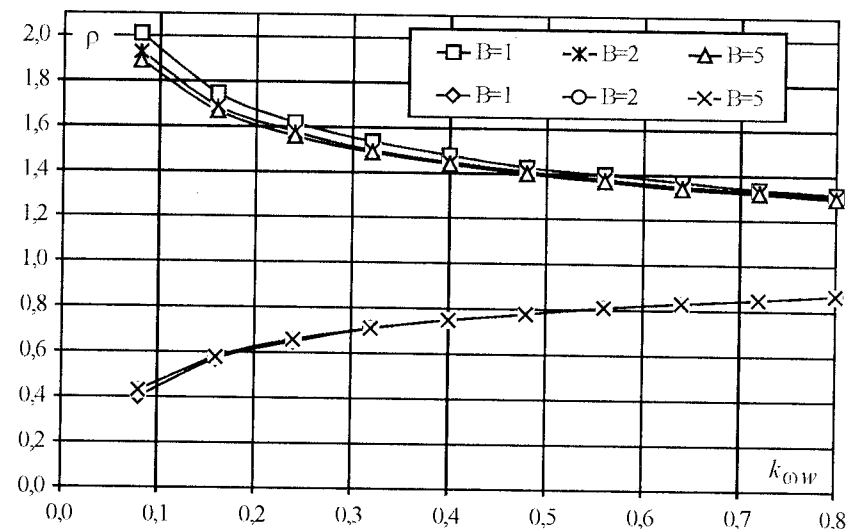
Schemat blokowy układu z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej przedstawia rys. 4.73. Struktura części regulacyjnej układu jest identyczna jak na rys. 3.4, a charakterystyka nieliniowego ogranicznika jest taka sama jak charakterystyka z rys. 3.2.



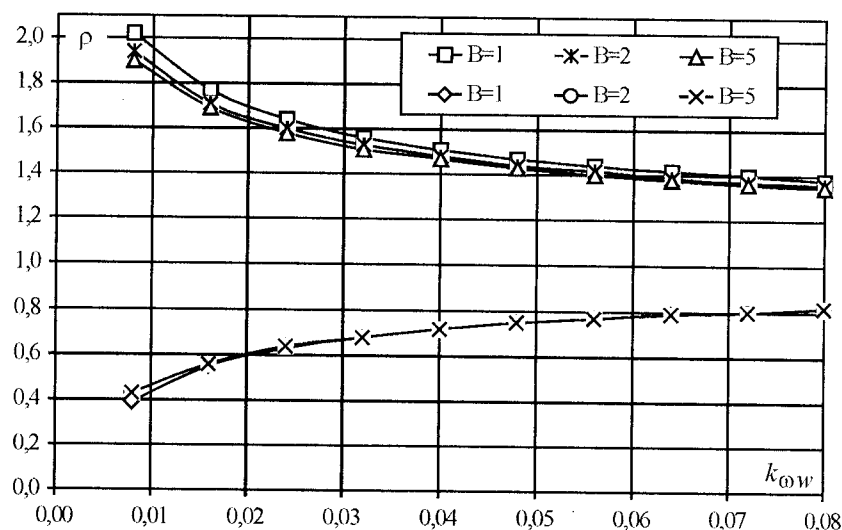
globalnej układu można również wykorzystać formę kwadratową o macierzy (4.82). Pochodna tej formy kwadratowej ma strukturę zgodną z zależnością (4.83) i nie zawiera elementów  $a_{12}, a_{21}, a_{41}$  macierzy stanu z zależności (4.95), zależnych od współrzędnych wektora stanu przyrostowego.

Przy podejściu zbiorowym, uwzględnienie nieliniowej zależności  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$  oraz zmienności parametru  $N_1$  regulatora narzuca przeprowadzenie analizy stabilności globalnej układu w ramach prostopadłościanu we współrzędnych  $\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x, a_{34}$ . Rzut prostokątny tego prostopadłościanu na płaszczyznę  $(\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x)$  tworzy wyróżniony prostokąt na rys. 4.12, zamykający krzywą  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$ . Trzecia współrzędna  $a_{34}$  (odmierzana wzdłuż prostej prostopadłej do płaszczyzny  $(\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x)$ ) odzwierciedla zmiany wartości tego elementu wywołane zmianami parametru  $N_1$  regulatora. Można wykazać, że wskaźnik jakości (4.27) również w tym wypadku posiada właściwość określoną zależnością (4.39). W rezultacie, obliczenia optymalizacyjne mogą być przeprowadzone jedynie dla dwóch par wierzchołków prostopadłościanu, których rzuty prostokątne na płaszczyznę  $(\Psi_{Or}^y, \Psi_{Or}^x)$  pokrywają się z wierzchołkami  $W1, W2$  na rys. 4.12. Współrzędne wzdłuż osi wartości elementu  $a_{34}$  dla tych par wierzchołków powinny być ustalone dla obu skrajnych wartości parametru  $N_1$  regulatora zgodnie z zależnością (3.24).

Rezultaty badań stabilności globalnej dla różnych wartości stałej czasowej  $b$  przedstawiono na rys. 4.74-4.76. Prezentowane na rysunkach krzywe należy interpretować tak, jak opisano to w punkcie 4.1.3. Podobnie, jak dla przypadku z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana, również i w tym przypadku ustalona, dopuszczalna wartość składowej  $I_{Os}^y$  (reprezentowana przez wartość stałej  $B$ ) ma niewielki wpływ na uzyskane rezultaty, zwłaszcza dla  $\rho < 1$ , gdzie dla różnych wartości  $B$  otrzymano praktycznie jedną krzywą. Wartości współczynnika wzmocnienia dla poszczególnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  modyfikowane były zgodnie z zależnością (4.85). Łatwo można zauważyć, że przy zachowaniu tej zasady rezultaty dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  różnią się symbolicznie.



**Rys. 4.74.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej; zastępcza stała czasowa  $b = 0,1$ , iloczyn  $Nk_{ow} = 0,02$



**Rys. 4.75.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , iloczyn  $Nk_{ow} = 0,002$



Analiza stabilności globalnej układu zostanie przeprowadzona dla zbioru dopuszczalnych punktów pracy ustalonej. Do analizy właściwości dynamicznych układu w ujęciu zbiorowym, wykorzystać można sformułowany w dodatku D3.5 pseudoliniowy model matematyczny:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega}}{b} & \frac{1}{b} \\ I_{Os}^y + \Delta i_s^y & -\frac{1}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Wektor stanu ustalonego ma postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_z \quad I_{Os}^y]^T. \quad (4.97)$$

Dwie pierwsze współrzędne tego wektora spełniają zależności (4.3a) oraz (4.3b). Z zależności (4.97) wynika ponadto, że w stanie ustalonym współrzędna  $Z_O$  wektora stanu równa się liczbowo składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Zależność (4.97) potwierdza również brak uchybu ustalonego prędkości kątowej tej wersji układu. Moment elektromagnetyczny maszyny zależy nieliniowo od składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana i może być obliczony przy wykorzystaniu zależności (4.7a).

Zabiegi standaryzujące, przeprowadzone zgodnie z zależnościami (3.104a), (3.104b) oraz (3.105), pozwalają zapisać zależność (4.96) w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_w}{4b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

co pozwala w efekcie zmniejszyć ilość niezależnych parametrów układu. Warto tu jedynie przypomnieć, że wartościami odniesienia dla nowych, względnych parametrów regulatora ( $k_{\omega w}$ ,  $d_w$ ) są, dla  $\rho=1$ , wartości zgodne z kryterium symetrii [115].

Analogicznie, jak w poprzednich punktach tego rozdziału, można dokonać dekompozycji macierzy stanu na podmacierze:

$$\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} & \frac{1}{b} \\ -\frac{1}{2b} & \frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d_w}{4b} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.99a)$$

$$\mathbf{A}_{mae}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = \begin{bmatrix} -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & 0 & \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (4.99b)$$

$$\mathbf{A}_{mea}(\mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{x}_{mer}) = \begin{bmatrix} I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.99c)$$

przy czym wektor stanu rozszerzonego podsystemu elektromechanicznego jest teraz zdefiniowany jako:

$$\Delta \mathbf{x}_{mer} = [\Delta \psi_r^y \quad \Delta i_s^y \quad \Delta \omega_1 \quad \Delta z]^T. \quad (4.99d)$$

Topologia układu jest zgodna z rys. 4.7.

Z uwagi na to, że dany zależnością (4.98) model matematyczny układu należy do klasy określonej zależnością (1.64), warunkiem koniecznym optymalności formy kwadratowej dla zbioru macierzy wygenerowanego przez zmieniające się współrzędne wektora stanu przyrostowego i ustalonego jest przynależność macierzy tej formy kwadratowej do klasy danej zależnością (4.23). Z oczywistych powodów kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona macierz  $\mathbf{P}_b$  musi teraz mieć wymiary zgodne z macierzą  $\mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O)$  (zależność (4.99a)). Można również wykazać, że warunkiem koniecznym pomyślnego rezultatu testu Lapunowa dotyczącego stabilności globalnej jest zastosowanie (w ramach klasy (4.23)) formy kwadratowej o macierzy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{b11} & \frac{p_{b23}}{2b} & \frac{1}{2b} & \frac{p_{b34}}{2b} \\ 0 & \frac{p_{b23}}{2b} & p_{b22} & p_{b23} & p_{b24} \\ 0 & \frac{1}{2b} & p_{b23} & 1 & p_{b34} \\ 0 & \frac{p_{b34}}{2b} & p_{b24} & p_{b34} & p_{b44} \end{bmatrix}. \quad (4.100)$$

Macierz ta pozostaje dodatnio określona, jeżeli spełnione są jednocześnie nierówności:

$$p_{b11} > \frac{1}{(2b)^2}, \quad (4.101a)$$

$$p_{b22} > (p_{b23})^2, \quad (4.101b)$$

$$\begin{vmatrix} p_{b22} & p_{b23} & p_{b24} \\ p_{b23} & 1 & p_{b34} \\ p_{b24} & p_{b34} & p_{b44} \end{vmatrix} > 0. \quad (4.101c)$$

Pochodna formy kwadratowej o macierzy (4.100), liczona wzdłuż trajektorii systemu (4.98), ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\Delta \mathbf{x}) = & -\frac{2}{\rho} \left( p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} \right) (\Delta \psi_r^x)^2 + \\ & + \Delta \mathbf{x}_{mer}^T \left( \mathbf{A}_{mer}^T(\mathbf{X}_O) \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_{mer}(\mathbf{X}_O) \right) \Delta \mathbf{x}_{mer} + \\ & + 2 \left( p_{b11} - \frac{1}{(2b)^2} \right) \Psi_{Or}^y \Delta i_s^y \Delta \psi_r^x. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Współczynniki tej formy kwadratowej nie zależą od współrzędnych przyrostowego wektora stanu, co potwierdza szczególną przydatność formy kwadratowej o macierzy (4.100) do analizy stabilności globalnej układu.

Można wykazać, że również w tym wypadku wskaźnik jakości (4.27) posiada właściwość określoną zależnością (4.39). Elementy macierzy stanu w równaniu

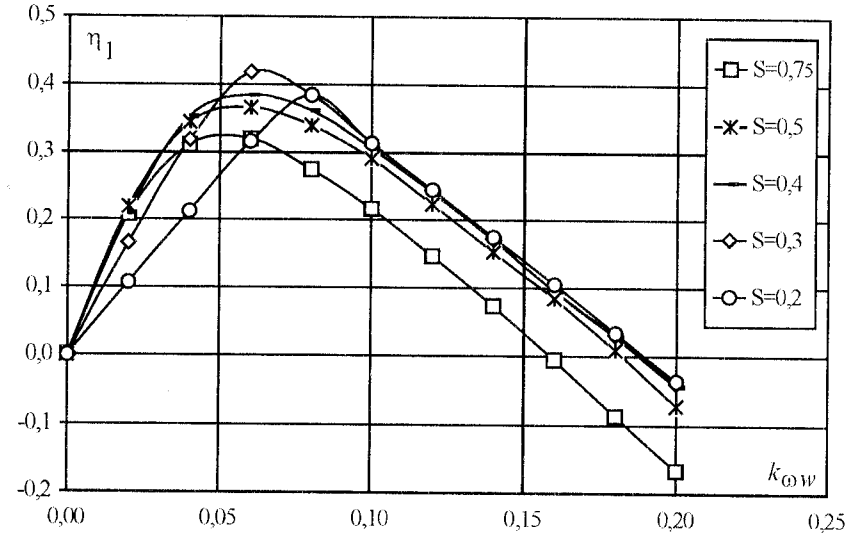
(4.98) zależą liniowo od składowej  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$  wektora przestrzennego strumienia wirnika. Analogicznie, jak opisano to w punkcie 4.1, obliczenia optymalizacyjne mogą być więc prowadzone jedynie dla dwóch wierzchołków (np.  $W1$  oraz  $W2$ ) prostokąta (rys. 4.12), zamykającego krzywą  $\Psi_{Or} = f(I_{Os}^y)$ .

Przy rozwiązaniu zagadnienia wykorzystano rezultaty badań zaprezentowane w dwóch poprzednich punktach tego rozdziału. Podobnie jak w punkcie 4.2, na wstępie znaleziona została taka relacja wartości parametrów regulatora prędkości kątowej typu PI, która gwarantuje największą odporność układu na zmiany rezystancji wirnika. Dla zachowania spójności prowadzonych rozważań, również w tym punkcie, wstępne obliczenia optymalizacyjne były prowadzone dla różnych

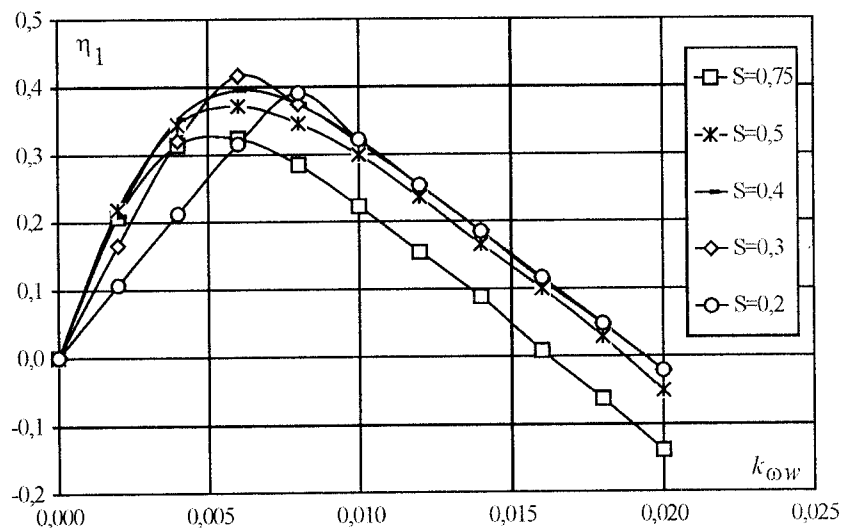
$$\text{wartości ilorazu } S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2}.$$

Badania stabilności globalnej układu przeprowadzono dla przypadków, gdy stała  $B = 2$ . Przyjęcie takiej wartości stałej  $B$  wydaje się wystarczająco reprezentatywne dla zdecydowanej większości typowych maszyn asynchronicznych.

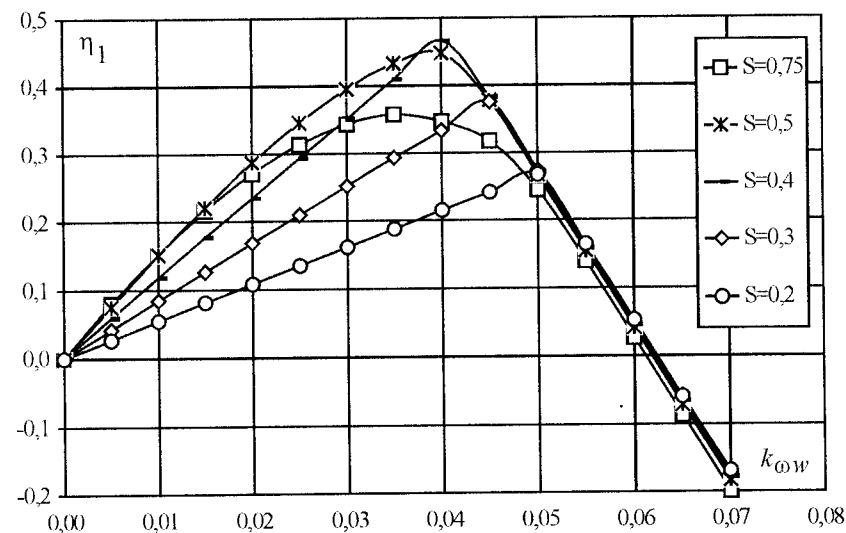
Przykładowe rezultaty badań dla parametru  $\rho = 1,5$  i dwóch wartości zastępczej stałej czasowej  $b = 0,01$  oraz  $b = 0,001$  zaprezentowane są odpowiednio na rys. 4.78 i rys. 4.79. Analogiczne rezultaty dla parametru  $\rho = 0,7$  zaprezentowano na rys. 4.80 i 4.81.



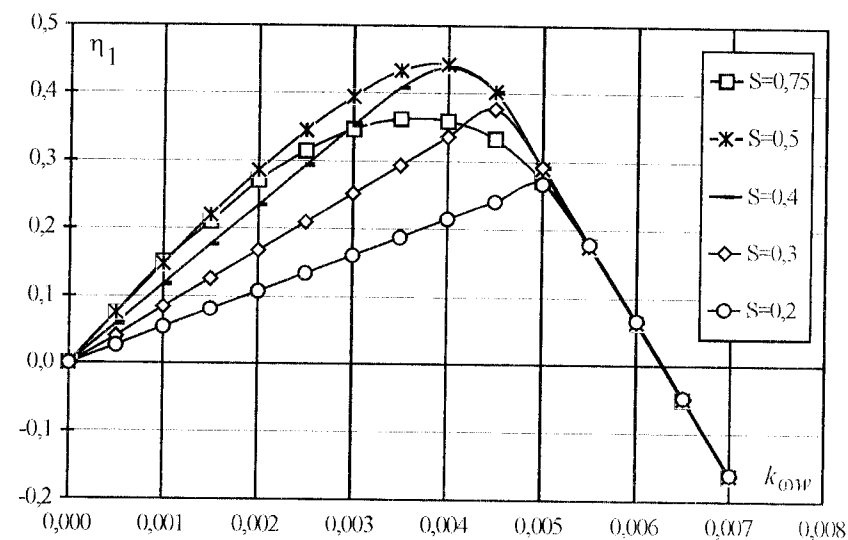
**Rys. 4.78.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.79.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,001$ , stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 1,5$



**Rys. 4.80.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 0,7$



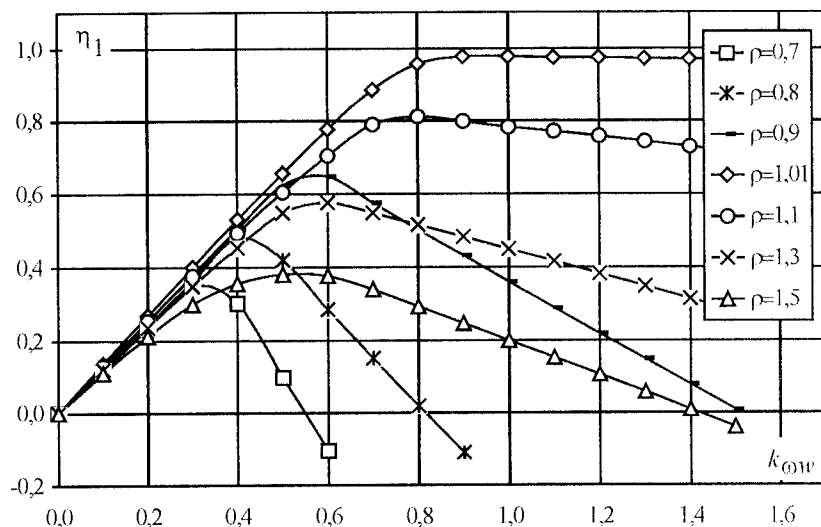
**Rys. 4.81.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości ilorazu  $S$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,001$ , stała  $B = 2$ , parametr  $\rho = 0,7$

Z przedstawionych na tych rysunkach krzywych wynika, że dla rozpatrywanych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu stojana za optymalną można przyjąć taką relację wartości parametrów regulatora prędkości, która odpowiada  $S = 0,4$ . Przy ustalaniu tej wartości wzięto przede wszystkim pod uwagę zachowanie układu w sytuacji, gdy  $\rho > 1$ . Jak opisano to punkcie 4.1, pracy z parametrem  $\rho < 1$  należy unikać z uwagi na możliwość nasycenia obwodu magnetycznego silnika nawet w stanach ustalonych.

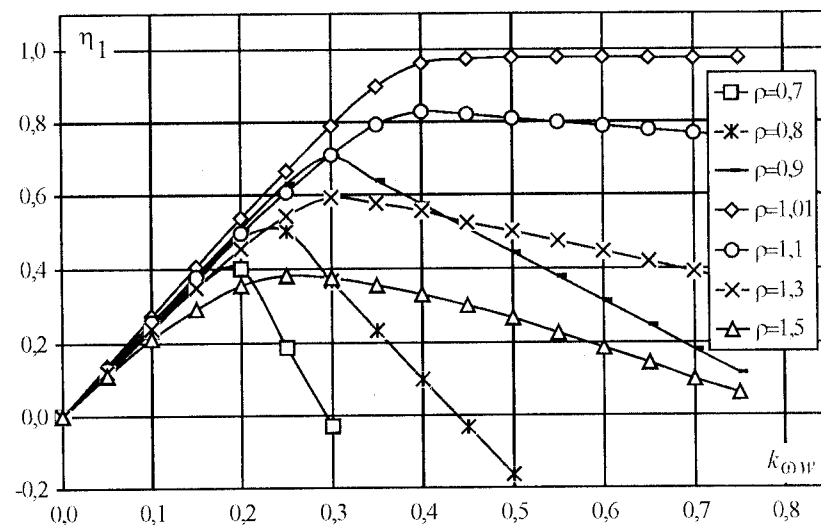
Porównanie parami rys. 4.78 i 4.79 oraz rys. 4.80 i 4.81 prowadzi do wniosku, że w ramach poszczególnych par przedstawione krzywe zachowują daleko idące podobieństwo jakościowe oraz ilościowe. Porównanie wartości na osi odciętych upoważnia do sformułowania hipotezy, że dla dostatecznie małych wartości stałej czasowej  $b$  zależność wskaźnika jakości od współczynnika wzmocnienia pozostaje bardzo zbliżona, o ile przy zmianach wartości stałej czasowej  $b$  względny współczynnik wzmocnienia  $k_{\omega w}$  podlega również takiej korekcji, że wartość ilorazu  $\frac{k_{\omega w}}{b}$  pozostaje stała. Tworzy to analogię do przypadku rozpatrywanego

w poprzednim punkcie tego rozdziału. Potwierdzeniem tej hipotezy są wyniki badań przedstawione na rys. 4.82-4.86. Przedstawiono na nich, w formie krzywych, zależność wskaźnika jakości od wartości względnego współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora prędkości kątowej, przy różnych wartościach parametru  $\rho$

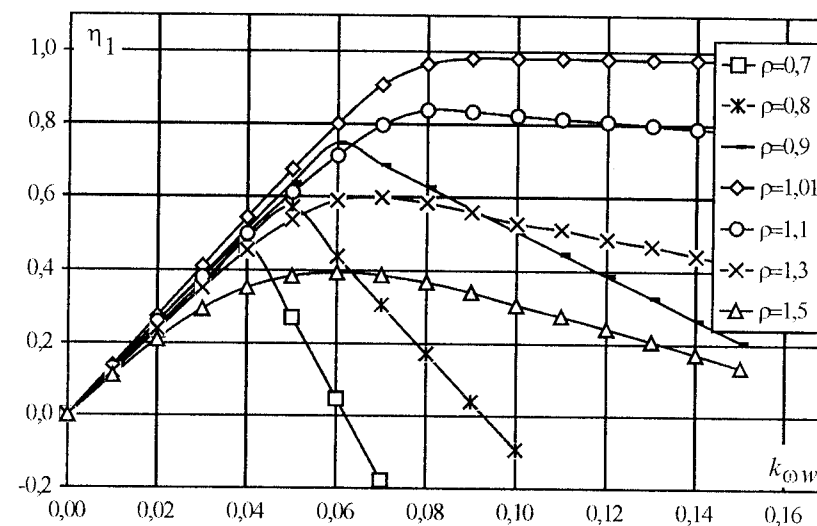
i różnych wartościach zastępczej stałej czasowej  $b$ . We wszystkich prezentowanych przypadkach przyjęto uznana za optymalną wartość ilorazu  $S = 0,4$ .



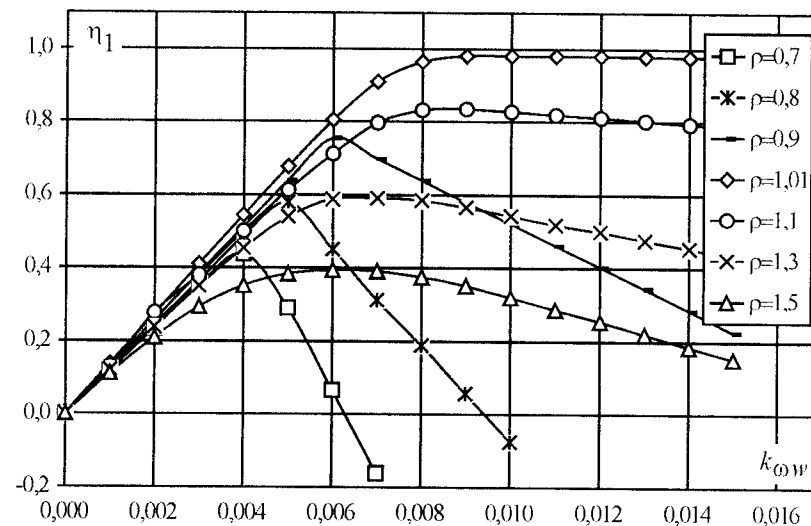
**Rys. 4.82.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,1$ , stała  $B = 2$



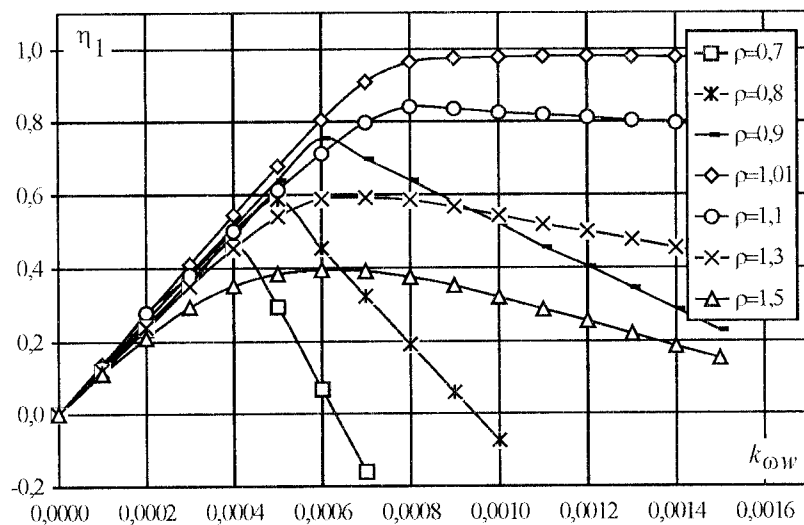
**Rys. 4.83.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,05$ , stała  $B = 2$



**Rys. 4.84.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$



**Rys. 4.85.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,001$ , stała  $B = 2$



Rys. 4.86. Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,0001$ , stała  $B = 2$

Z przedstawionych krzywych wynika, że opisana wyżej zasada spełniona jest z dobrą dokładnością dla tych przypadków, gdy zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu spełnia nierówność  $0,01 \geq b \geq 0,0001$ . Dla większych wartości zastępczych stałych czasowych  $b$  (rys. 4.82, 4.83) można zaobserwować wyraźne zmniejszanie się wartości wskaźnika jakości, zwłaszcza dla  $\rho = 0,7$ . Niezaprezentowane tu wyniki badań właściwości dynamicznych układu dla  $b > 0,1$  oraz  $\rho = 0,7$  dowodzą, że gwarantowana wartość wskaźnika jakości  $\eta_1$  spada wówczas poniżej 0,1. Praca układu z tak niskim gwarantowanym stopniem stabilności jest już bardzo niebezpieczna.

W świetle przedstawionych rezultatów badań układu można stwierdzić, że dla  $0,01 \geq b \geq 0,0001$  (rys. 4.84-4.86) oraz ilorazu  $S = 0,4$  optymalna wartość względnego współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora prędkości kątowej, odpowiadająca określonej wartości stałej czasowej  $b$  znajduje się w zakresie określonym nierównościami:

$$2b \leq k_{\omega w} \leq 12b \quad \text{dla} \quad 1 \leq \rho \leq 1,5, \quad (4.103a)$$

$$2b \leq k_{\omega w} \leq 5b \quad \text{dla} \quad 0,7 \leq \rho \leq 1, \quad (4.103b)$$

Wybór wartości współczynnika wzmocnienia zgodnie z powyższymi nierównościami gwarantuje to, że dla parametru  $0,7 \leq \rho \leq 1,5$  wartość wskaźnika jakości  $\eta_1 \geq 0,2$ .

Podobnie jak poprzednio, do interesujących wniosków prowadzi przeniesienie uznanych za optymalne, względnych wartości parametrów regulatora prędkości  $k_{\omega w}$  oraz  $d_w$  w dziedzinę parametrów  $k_\omega$  oraz  $d$  zdefiniowanych zależnościami (D1.16) oraz (D1.28). Przy wykorzystaniu zależności (3.104a) nierówności (4.103) mogą być równoważnie zapisane jako:

$$a \leq k_\omega \leq 6a \quad \text{dla} \quad 1 \leq \rho \leq 1,5, \quad (4.104a)$$

$$a \leq k_\omega \leq 2,5a \quad \text{dla} \quad 0,7 \leq \rho \leq 1. \quad (4.104b)$$

Z warunku optymalności ilorazu  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0,4$  przy wykorzystaniu zależności

(3.104a) oraz (3.104b) można również wyznaczyć optymalną wartość parametru  $d$  regulatora prędkości kątowej typu PI:

$$d = 0,2(k_\omega)^2 / a. \quad (4.105)$$

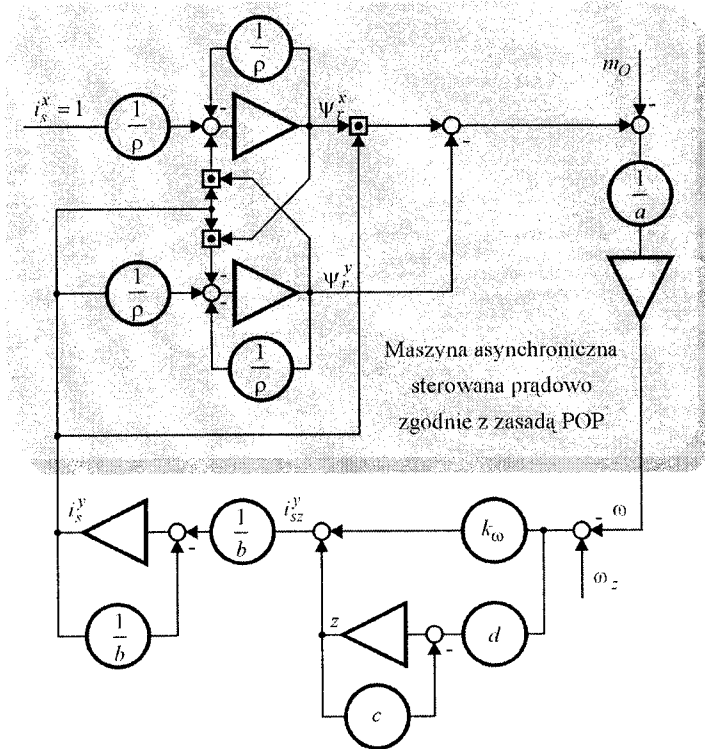
Z powyższych rozważań wynika, że dla odpowiednio małych ( $0,01 \geq b \geq 0,0001$ ) wartości zastępczej stałej czasowej obwodu regulacji prądu stojana optymalne wartości parametrów  $k_\omega$  oraz  $d$  regulatora mogą być jednoznacznie określone, zależnie od wartości stałej  $a$  układu napędowego.

Porównanie optymalnych wartości współczynnika wzmocnienia  $k_\omega$  oraz parametru  $d$  regulatora PI z wartościami optymalnymi dla analogicznej wersji z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana analizowanej w punkcie 4.2.1.1 (komentarz do rys. 4.40-4.43) prowadzi również do interesujących rezultatów. Okazuje się bowiem, że w dziedzinie parametrów  $k_\omega$  oraz  $d$  zarówno optymalny zakres ich wartości jak i gwarantowana wartość wskaźnika jakości są w obu wypadkach takie same. Warto podkreślić, że tożsamość ta zachodzi pomimo różnych, uznanych w obu wypadkach za optymalne, wartości ilorazu  $S$ . Różnica wartości liczbowych tego ilorazu jest jedynie konsekwencją różnych, w obu wypadkach, definicji zastosowanych jednostek względnych.

Wynika stąd, że również w rozpatrywanym wypadku, dla odpowiednio małych ( $0,01 \geq b \geq 0,0001$ ) wartości zastępczej stałej czasowej obwodu regulacji prądu, wnioski o właściwościach dynamicznych rozpatrywanej tu wersji układu mogą być formułowane na podstawie analizy wersji prostszej z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana.

#### 4.4.1.2. Analiza stabilności globalnej układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR pracującym w zakresie liniowym

Schemat blokowy tej wersji układu przedstawiono na rys. 4.87.



**Rys. 4.87.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Model matematyczny układu w formie pseudoliniowej ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega}}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.106)$$

Wektor stanu ustalonego opisany jest natomiast zależnością:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T. \quad (4.107)$$

Dwie pierwsze współrzędne tego wektora spełniają zależności (4.3a) oraz (4.3b). Prawdziwość zachowują również zależności (4.7a) oraz (4.72). Zmienna stanu regulatora PIR może być natomiast obliczona z zależności:

$$Z_O = \frac{I_{Os}^y}{1 + \frac{c}{d} k_{\omega}}. \quad (4.108)$$

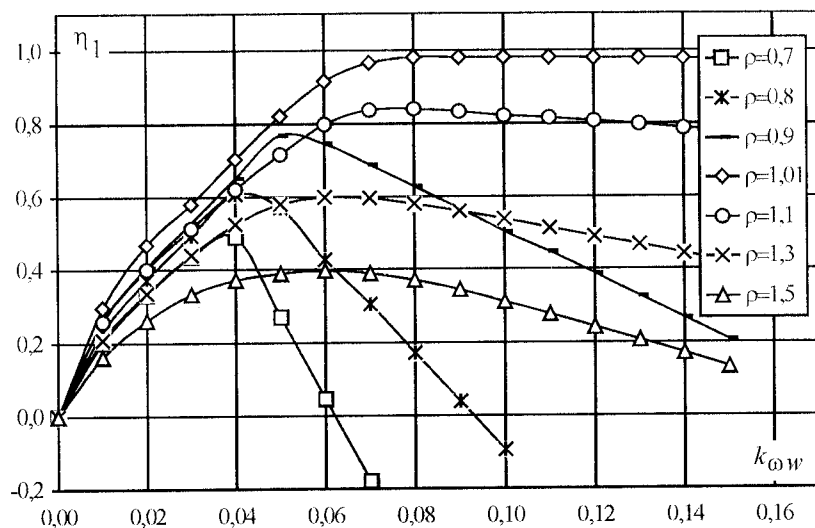
W wyniku zabiegów standaryzujących, zgodnie z zależnościami (3.104a)-(3.104c) oraz (3.105), model matematyczny układu przybiera postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

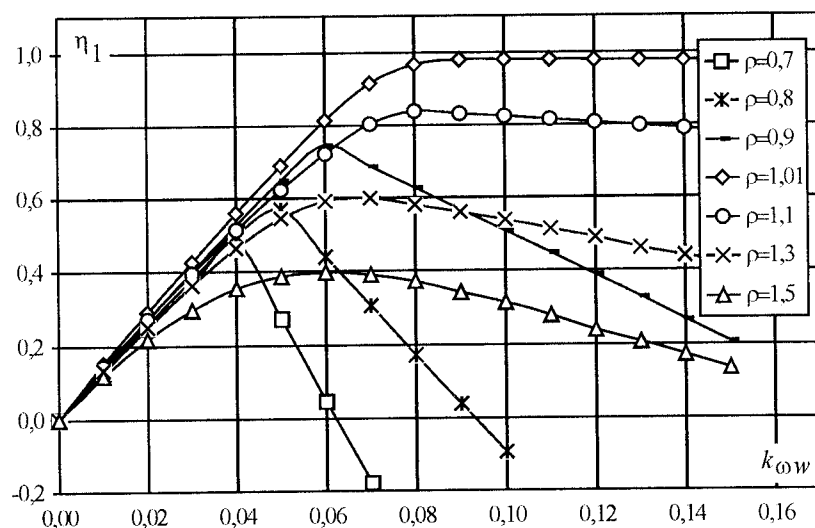
Warto podkreślić, że macierz stanu w tej zależności różni się od macierzy stanu w zależności (4.98) jedynie elementem  $a_{55}$ .

Przykładowe wyniki badań układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR przedstawiono na rys. 4.88-4.90. Badania przeprowadzono dla zastępczej stałej czasowej obwodu regulacji prądu stojana  $b = 0,01$  oraz ilorazu  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0,4$ .

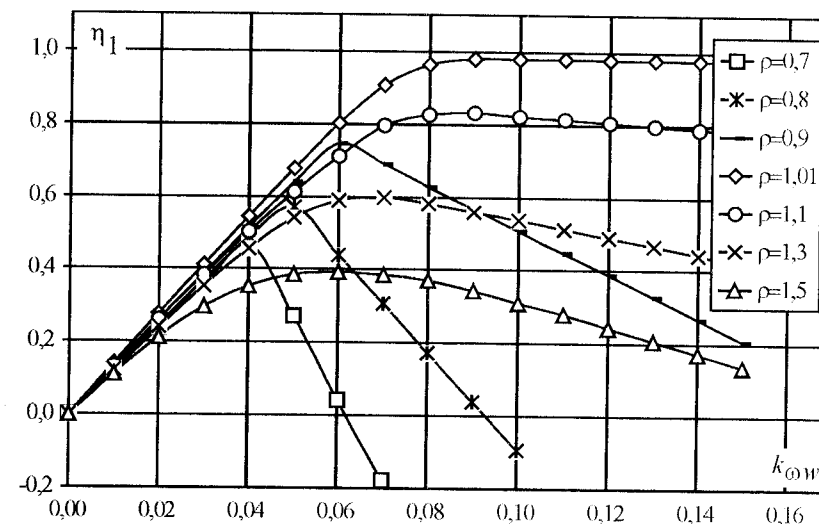
Poziom dopuszczalnych obciążeń układu określono, jak w poprzednich punktach tego rozdziału, wybierając wartości stałej  $B = 2$ .



**Rys. 4.88.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$ , parametr  $c_w = 0,001$



**Rys. 4.89.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$ , parametr  $c_w = 0,0001$



**Rys. 4.90.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , stała  $B = 2$ , parametr  $c_w = 0,00001$

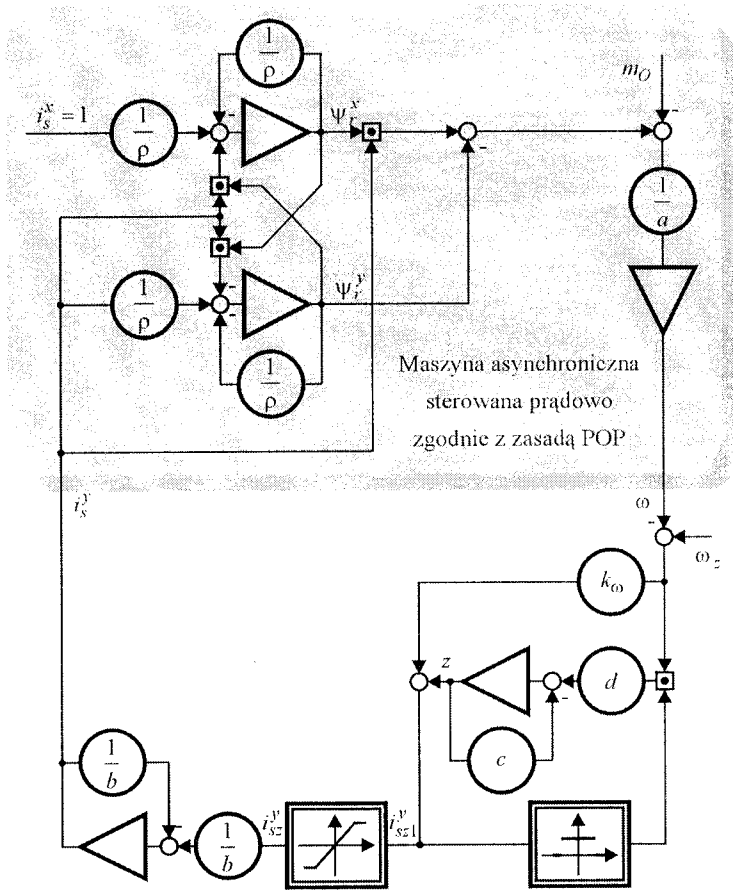
Z porównania przedstawionych krzywych wynika, że parametr  $c_w$  regulatora PIR ma ograniczony wpływ na właściwości dynamiczne układu. Przejawia się on niewielkim wzrostem wskaźnika jakości dla małych wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej. Wykorzystując zależność (3.104c) można stwierdzić, że dla  $c = 0,01$  wzrost ten jest symboliczny, a dla  $c = 0,001$  praktycznie niezauważalny.

Przykład analizy stabilności z wykorzystaniem opisanej metodyki przedstawiono w Dodatku D4.2.

#### 4.4.2. Uwzględnienie efektu nasycenia proporcjonalno-inercyjno-różniczkowego regulatora prędkości kątowej

W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że regulator prędkości kątowej pracuje w zakresie liniowym. Pozostaje do zbadania, w jakim stopniu zmienia się właściwości dynamiczne układu, jeżeli uwzględniony zostanie efekt nasycenia regulatora prędkości kątowej typu PIR, wyposażonego w system ARW. Celowość wprowadzenia nieliniowego ogranicznika sygnału wyjściowego tego regulatora została już wyjaśniona w poprzednich rozdziałach pracy.

Schemat blokowy układu napędowego przedstawia rys. 4.91. Struktura części regulacyjnej układu jest identyczna jak na rys. 3.9.



**Rys. 4.91.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR, wyposażonym w system ARW oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Model matematyczny układu napędowego jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (4.110a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\frac{1}{\rho} \psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (4.110b)$$

$$\frac{d}{dt} i_s^y = -\frac{1}{b} i_s^y + \frac{1}{b} i_{sz1}^y, \quad (4.110c)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_O}{a}, \quad (4.110d)$$

$$\frac{d}{dt} z = -cz + d(\omega_z - \omega) f_1(i_{sz1}^y), \quad (4.110e)$$

$$i_{sz1}^y = k_\omega (\omega_z - \omega), \quad (4.110f)$$

$$i_{sz}^y = f(i_{sz1}^y). \quad (4.110g)$$

Działanie nieliniowych elementów realizujących funkcje  $f(i_{sz1}^y)$  oraz  $f_1(i_{sz1}^y)$  opisane jest zależnościami (3.93) oraz (3.95).

Wektor stanu ustalonego ma postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T. \quad (4.111)$$

Dwie pierwsze współrzędne tego wektora określone są zależnościami (4.3a) oraz (4.3b). Nieliniowe zależności pomiędzy pozostałymi współrzędnymi wektora stanu ustalonego określone są zależnościami (3.51) oraz (3.52).

Wykorzystując metodę zaprezentowaną w punkcie 3.4 łatwo można wykazać, że po wprowadzeniu zabiegów standaryzujących zgodnie z zależnościami (3.104a)-(3.104c) oraz (3.105) właściwości dynamiczne układu opisać można zależnością:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{N_1 k_{\omega w}}{b} & \frac{N_1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{2b} & -\frac{1}{2b} & \frac{\Psi_{Or}^x}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{N_2 d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega_1 \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

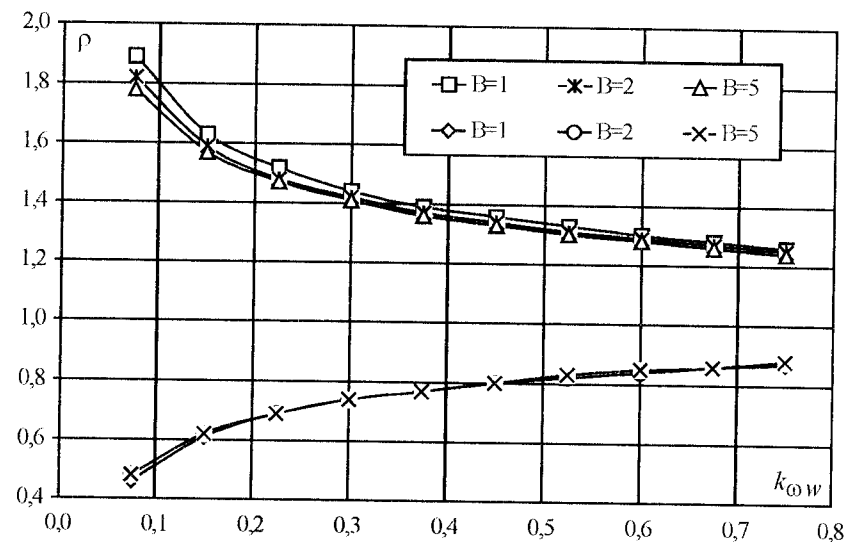
Wartości parametrów  $N_1$  oraz  $N_2$  regulatora prędkości kątowej typu PIR, wyposażonego w system antynasyceniowy, zmieniają się zgodnie z zależnościami (3.99) oraz (3.102). Warto jedynie podkreślić, że zmiany obu tych parametrów zachodzą jednocześnie.

Macierz stanu w zależności (4.112) należy również do klasy danej zależnością (1.64), co pozwala zawęzić obszar poszukiwań macierzy optymalnej formy kwadratowej do klasy określonej zależnością (4.100). Łatwo można sprawdzić, że pochodna testującej formy kwadratowej jest strukturalnie zgodna z zależnością (4.102) i nie zależy od, zawierających współrzędne wektora stanu przyrostowego, elementów  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{41}$  macierzy stanu z równania (4.112). Z uwagi na liniową zależność elementów macierzy stanu w równaniu (4.112) od składowej  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika, analiza stabilności globalnej układu może być prowadzona tylko dla macierzy wierzchołkowych prostokąta z rys. 4.12. Ponieważ dla klasy form kwadratowych o macierzy (4.100) wskaźnik jakości  $\eta_1$  spełnia zależność (4.39), to w procesie optymalizacji macierzy tej formy kwadratowej wystarczy uwzględnić jedynie macierze stanu odpowiadające wierzchołkom W1, W2 prostokąta z rys. 4.12, obliczone dla obu zmieniających się (jednocześnie) par wartości parametrów  $N_1$  i  $N_2$  regulatora PIR.

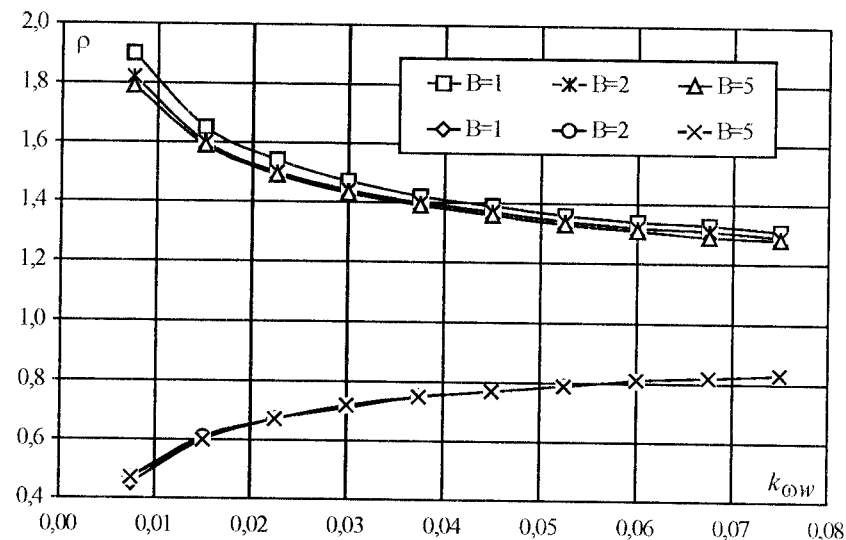
Przykładowe wyniki badania stabilności globalnej układu przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów na rys. 4.92-4.94. Zaprezentowano na nich zależności dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu w funkcji wartości względnego współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej typu PIR. Krzywe na rys. 4.92 uzyskano dla przypadku, gdy zastępcza stała czasowa obwodu regulacji prądu stojana  $b = 0,1$ . Na kolejnych rysunkach wartość tej stałej wynosi odpowiednio  $b = 0,01$  oraz  $b = 0,001$ . Dla wszystkich analizowanych przypadków iloraz  $S = 0,4$ , a wartość parametru  $c_w$  regulatora PIR wynosiła odpowiednio  $c_w = 0,01$ ,  $c_w = 0,001$  oraz  $c_w = 0,0001$ .

Zaprezentowane na rysunkach krzywe potwierdzają to, że granice stabilności globalnej układu (przy uwzględnieniu efektu nasycenia regulatora PIR) w małym stopniu zależą od dopuszczalnego stopnia ustalonego obciążenia układu, którego miarą jest wartość stałej  $B$ . Dotyczy to zwłaszcza sytuacji, gdy parametr  $\rho < 1$ , kiedy otrzymano praktycznie jedną krzywą. Kilkoprocentowe różnice w dopuszczalnych wartościach tego parametru zauważyć można jedynie dla  $\rho > 1$ .

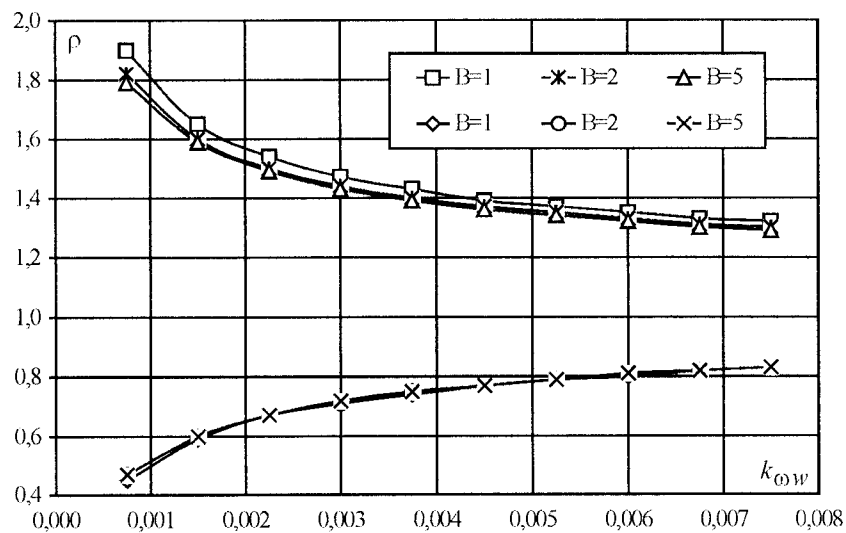
Dla wartości współczynnika wzmocnienia  $2b \leq k_{\omega w} \leq 5b$  (co stanowi część wspólną zbiorów określonych nierównościami (4.103)) dopuszczalna wartość parametru  $\rho$  dla  $b \leq 0,01$  zawiera się w granicach  $0,78 \leq \rho \leq 1,37$ . Stanowi to nieco mniejszy (ok. 15%) zakres dopuszczalnej zmienności tego parametru w stosunku do analogicznej wersji układu z regulatorem proporcjonalnym.



**Rys. 4.92.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej typu PIR; stała czasowa  $b = 0,1$ , iloczyn  $Nk_{\omega w} = 0,02$ , parametr  $c_w = 0,01$



**Rys. 4.93.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej typu PIR; stała czasowa  $b = 0,01$ , iloczyn  $Nk_{\omega w} = 0,002$ , parametr  $c_w = 0,001$



**Rys. 4.94.** Zależność dopuszczalnych wartości parametru  $\rho$ , dla których zagwarantowana jest stabilność globalna układu od wartości współczynnika wzmocnienia regulatora prędkości kątowej typu PIR; stała czasowa  $b = 0,001$ , iloczyn  $Nk_{\omega w} = 0,0002$ , parametr  $c_w = 0,0001$

## 4.5. Uwagi końcowe

W kolejnych punktach tego rozdziału przeprowadzono analizę stabilności różnych wersji układów o sterowaniu zgodnym z zasadą POP. W rezultacie wykazano, że dla każdej z rozpatrywanych wersji układu istnieje określony zbiór wartości parametrów regulatora prędkości typu P, PI (ewentualnie PIR), dla którego zagwarantowana jest stabilność globalna układu napędowego. Granice zbioru największej odporności układu na efekt zmian rezystancji wirnika oraz gwarantowane w tym zbiorze wartości wskaźnika jakości zostały określone dla każdej wersji na drodze numerycznej optymalizacji formy kwadratowej-kandydata na funkcję Lapunowa.

W ramach przeprowadzonej analizy wykazano, że szybkość obwodu regulacji prądu stojana, której miarą jest wartość zastępczej stałej czasowej  $b$ , ma ograniczony wpływ na właściwości dynamiczne układu. Dla odpowiednio małych wartości tej stałej czasowej układy z inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana stają się praktycznie równoważne wersji z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu. W tych warunkach wartości optymalnych (w sensie wskaźnika jakości  $\eta_1$ ) parametrów regulatorów prędkości kątowej ( $k_{\omega}$  oraz  $d$ ) stają się niezależne od szybkości działania obwodu regulacji prądu stojana i mogą być określone jedynie na podstawie wartości stałej  $a$  układu napędowego.

Fakt ten pociąga za sobą różnorakie konsekwencje. Z jednej strony proces analizy układów może być w tych warunkach prowadzony na podstawie wyników badania prostszej wersji, co stanowi niewątpliwą zaletę. Z drugiej strony ograniczona i zależna od stałej  $a$  wartość współczynnika wzmocnienia proporcjonalnego regulatora prędkości może stwarzać trudności z uzyskaniem wymaganej dokładności statycznej układu, szczególnie dla napędów „lekkich” (mała wartość stałej  $a$ ). W odróżnieniu od układów napędowych prądu stałego, przyspieszanie obwodu regulacji prądu (zmniejszanie stałej czasowej  $b$ ) jest tu środkiem zaradczym o ograniczonej skuteczności, ponieważ wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega}$ , przy których układ zachowuje największą odporność na zmiany rezystancji wirnika zależą praktycznie od stałej  $a$  układu napędowego.

W tym kontekście warto również poruszyć pewien wątek porównawczy. Rezultaty przeprowadzonej w tym rozdziale analizy dowodzą bowiem, że do oceny właściwości dynamicznych układów z silnikami asynchronicznymi powinny być stosowane inne testy niż dla układów z silnikami prądu stałego. Ogólnie znany test na tzw. „szerokość pasma przenoszonych częstotliwości” [52] stosowany jest przede wszystkim dla serwonapędów. Istota tego testu polega na ocenie właściwości dynamicznych układu na podstawie jego logarytmicznej charakterystyki amplitudowej. Test przeprowadzany jest standardowo podczas biegu jałowego napędu. Warto w tym miejscu podkreślić, że dla napędów serwomechanizmów graniczna częstotliwość przenoszonego pasma (z dokładnością  $\pm 3$  dB) powinna wynosić minimum 100 Hz. Jakościowe rezultaty takiego testu, przeprowadzonego przykładowo dla najprostszej z rozpatrywanych w tym rozdziale wersji, można ocenić na podstawie wyników badań przedstawionych na rys. 4.13-4.16. Z rysunków tych wynika, że właściwości dynamiczne (zwłaszcza dla parametru  $\rho > 1$ ) zależą w znacznym stopniu od poziomu obciążenia reprezentowanego przez wartość stałej  $B$ . Z porównania tych rysunków wynika, że dla  $\rho > 1$  pozytywny wynik testu podczas biegu jałowego układu nie musi stwarzać gwarancji stabilności układu dla określonego obciążenia. Wynika to oczywiście z faktu, że mamy tu do czynienia z układem nieliniowym, którego właściwości dynamiczne zależą, w ogólnym przypadku, od punktu pracy i chwilowej wartości współrzędnych wektora stanu. W układach napędowych z silnikami prądu stałego problem ten nie występuje z uwagi na to, że są to systemy liniowe. Zagadnienie opracowania metody badania układów napędowych z silnikami asynchronicznymi może być związane z określonymi trudnościami technicznymi, lecz wydaje się niezbędne dla obiektywnej i rzetelnej oceny ich właściwości dynamicznych.

## 5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano wszechstronną analizę stabilności układów napędowych o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej. Analizę przeprowadzono wykorzystując bezpośrednią metodę Lapunowa.

Wnioski szczegółowe związane z poszczególnymi rozwiązaniami oraz fazami realizacji pracy formułowane były na bieżąco lub też stały się treścią uwag końcowych do rozdziałów 2, 3 i 4. Warto jednak w tym miejscu przytoczyć najważniejsze z nich:

1. Przy założeniu, że parametry układu napędowego pozostają stałe, wartość rezystancji wirnika jest znana, a regulator prędkości kątowej (typu P lub PI) pracuje w zakresie liniowym, układ napędowy sterowany zgodnie z zasadą POP posiadający stabilny podsystem elektromechaniczny pozostaje globalnie asymptotycznie stabilny dla wszystkich wartości parametrów układu napędowego mających sens fizyczny. W rozdziale drugim wykazano analitycznie, że w tych warunkach istnieje zawsze funkcja Lapunowa gwarantująca pomyślny wynik testu asymptotycznej stabilności globalnej układu. Konkretną postać macierzy testującej formy kwadratowej można określić wykorzystując podany w punkcie 2.5 algorytm 1.
2. Przy założeniu, że parametry układu napędowego pozostają stałe, wartość rezystancji wirnika jest znana i uwzględniony jest efekt nasycenia regulatora prędkości kątowej (typu P lub PIR) układ napędowy sterowany zgodnie z zasadą POP pozostaje globalnie asymptotycznie stabilny, o ile stabilny jest w tych warunkach podsystem elektromechaniczny. W rozdziale trzecim wykazano, że przy uwzględnieniu efektu nasycenia regulatorów prędkości kątowej stabilność podsystemu elektromechanicznego zachowana jest w wystarczająco dużym, z praktycznego punktu widzenia, otoczeniu wartości parametrów regulatorów obliczanych według standardowych (modułu i symetrii) kryteriów optymalizacji. Otoczenia te wydają się być dostatecznie duże nawet wtedy, gdy dopuści się szybkie zmiany wartości parametrów regulatorów. Szczegółowo zagadnienia te omówione zostały w punktach 3.2 oraz 3.4.
3. Przy założeniu, że parametry układu są stałe, regulatory prędkości kątowej (typu P lub PI) pracują w zakresie liniowym, a uwzględnione są (w granicach określonych w rozdziale czwartym) termiczne zmiany wartości rezystancji uzwojeń wirnika, istnieje niepusty zbiór wartości parametrów regulatorów

prędkości kątowej, w którym zachowana jest asymptotyczna stabilność globalna układu. Wielkość i granice tego zbioru mogą być wyznaczone numerycznie na drodze optymalizacji wskazanej klasy symetrycznych macierzy dodatnio określonych testujących form kwadratowych.

4. Przy założeniach upraszczających, jak w punkcie poprzednim, istnieje taki obszar wartości parametrów regulatorów prędkości kątowej, w którym układ zachowuje największą odporność na zmiany rezystancji uzwojeń wirnika, przy czym za miarę tej odporności uznano wartość wskaźnika jakości (4.27). Optymalny (w tym sensie) zbiór wartości tych parametrów nie pokrywa się, w ogólnym przypadku, z bezpośrednim otoczeniem wartości parametrów regulatorów prędkości kątowej, obliczanych standardowo jedynie na podstawie struktury i parametrów wydzielonego podsystemu elektromechanicznego. Szczegółowo zagadnienia te zostały opisane w punktach 2, 3 i 4 rozdziału 4 oraz zilustrowane w przykładzie zamieszczonym w dodatku D4.2.
5. Przy założeniach upraszczających, jak w punkcie 3, zwiększanie szybkości działania obwodu regulacji prądu stojana ma, w przypadku trwałej pracy z zaburzoną wartością rezystancji wirnika, sens tylko do pewnych (określonych w punktach 4.3 oraz 4.4) granic. Dla szybszych obwodów regulacji prądu wskaźnik jakości pozostaje prawie na stałym poziomie, z dobrą dokładnością, równym wartościom właściwym dla bezinercyjnego obwodu regulacji prądu stojana. Optymalne wartości parametrów regulatora prędkości kątowej zależą w tych warunkach tylko od wartości stałej  $a$  układu napędowego.
6. Przy założeniach upraszczających, jak w punkcie 3, możliwe jest również uwzględnienie efektu nasycenia standardowych regulatorów prędkości kątowej. W punktach 4.1.3, 4.2.2, 4.3.2, 4.4.2 przedstawiono w formie wykresów zależności dopuszczalnych wartości względnych zmian rezystancji wirnika w funkcji współczynnika wzmocnienia nasycających się regulatorów prędkości kątowej, przy których zagwarantowana jest stabilność globalna układu.
7. Z przedstawionych w rozdziale czwartym rezultatów badań wynika również, że do laboratoryjnej weryfikacji projektowanych i konstruowanych układów napędowych o sterowaniu według zasady POP należy opracować inny, uwzględniający nieliniowy charakter obiektu, program badań laboratoryjnych. Jest to postulat, który, zdaniem autora, dotyczyć powinien wszystkich układów napędowych z silnikami asynchronicznymi.

W ten sposób zrealizowany został sformułowany we wstępie główny cel pracy.

Do najważniejszych osiągnięć uzyskanych w trakcie realizacji pracy można, zdaniem autora, zaliczyć:

- przeprowadzenie procedury dowodowej świadczącej o przynależności macierzy optymalnej (dla rozpatrywanych układów elektromechanicznych) do klasy danej zależnością (1.67), co pozwoliło na znaczne uproszczenie i przyspieszenie działania modułów optymalizacyjnych,
- przeprowadzenie analitycznej procedury dowodowej dotyczącej stabilności globalnej układów sterowania pośredniego z regulatorami prędkości kątowej pracującymi w zakresie liniowym,
- przeprowadzenie analizy stabilności globalnej układów sterowania pośredniego z nasycającymi się regulatorami prędkości kątowej; rezultaty analizy uzyskano na drodze analitycznej i numerycznej,
- przeprowadzenie analizy wpływu termicznych zmian wartości rezystancji wirnika maszyny na stabilność układów o sterowaniu pośrednim dla regulatorów prędkości kątowej pracujących w zakresie liniowym i nasycających się; analizę przeprowadzono przy wykorzystaniu technik numerycznych,
- opracowanie pakietu specjalizowanego oprogramowania pracującego w środowisku MATLAB do analizy stabilności poszczególnych wersji układów napędowych.

Zaprezentowane w pracy rezultaty badań mają przede wszystkim znaczenie poznawcze. Niektóre jej elementy, jak choćby przedstawiona metodologia i opracowane oprogramowanie mogą być wykorzystane przy projektowaniu nowoczesnych napędów przekształtnikowych z silnikami asynchronicznymi i w badaniach nad tymi napędami.

## Dodatek

### D.1. Modele matematyczne układów napędowych sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej

W tym fragmencie pracy sformułowane zostaną modele matematyczne układów napędowych sterowanych zgodnie z zasadą POP. Utworzono je przy założeniu, że regulatory prędkości kątowej (niezależnie od typu) pracują w zakresie liniowym. W ramach tego punktu założono także, że rezystancja uzwojeń wirnika ma stałą, znamionową wartość. Pozostałe założenia związane integralnie z kolejno rozpatrywanymi wersjami układów formułowane będą w kolejnych punktach tego rozdziału. Przyjęto układ jednostek względnych, co nadaje prezentowanym modelom bardziej uniwersalny charakter.

#### D1.1. Model maszyny asynchronicznej sterowanej zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej

Model matematyczny maszyny asynchronicznej sterowanej z idealnego źródła o charakterze prądowym w jednostkach fizycznych można opisać następującym układem równań różniczkowych [41, 62, 95, 115]:

$$\frac{d}{dt_F} \psi_{rF}^x = -\frac{1}{T_{rN}} \psi_{rF}^x + \omega_{rF} \psi_{rF}^y + \frac{M}{T_{rN}} i_{sF}^x, \quad (D1.1a)$$

$$\frac{d}{dt_F} \psi_{rF}^y = -\frac{1}{T_{rN}} \psi_{rF}^y - \omega_{rF} \psi_{rF}^x + \frac{M}{T_{rN}} i_{sF}^y, \quad (D1.1b)$$

$$\frac{d}{dt_F} \omega_F = \frac{3pM}{2J L_r} (\psi_{rF}^x i_{sF}^y - \psi_{rF}^y i_{sF}^x) - \frac{m_{OF}}{J}. \quad (D1.1c)$$

Powyższy model zachowuje prawdziwość w dowolnym, wirującym z prędkością synchroniczną układzie odniesienia [41, 62, 95, 115]. Wszystkie zmienne w zależnościach (D1.1a)-(D1.1c) z dolnym indeksem  $F$  oznaczają zmienne fizyczne. Definicje występujących w powyższych równaniach wielkości fizycznych

i parametrów są zgodne z ogólnie przyjętą konwencją opisu maszyn asynchronicznych w dziedzinie wektorów przestrzennych [41, 62, 95, 115]. Poszczególne symbole oznaczają:

- $i_{sF}^x$  – składowa  $x$  wektora przestrzennego prądu stojana,
- $i_{sF}^y$  – składowa  $y$  wektora przestrzennego prądu stojana,
- $\Psi_{rF}^x$  – składowa  $x$  wektora przestrzennego strumienia skojarzonego wirnika,
- $\Psi_{rF}^y$  – składowa  $y$  wektora przestrzennego strumienia wirnika,
- $m_{OF}$  – moment zewnętrzny,
- $t_F$  – czas,
- $\omega_F$  – prędkość kątowna wału maszyny asynchronicznej,
- $\omega_{rF}$  – pulsacja prądu wirnika maszyny asynchronicznej,
- $J$  – zastępczy moment bezwładności układu sprowadzony do wału wirnika maszyny,
- $L_r$  – indukcyjność całkowita obwodu wirnika,
- $M$  – indukcyjność wzajemna pomiędzy stojanem i wirnikiem maszyny asynchronicznej,
- $p$  – liczba par biegunów maszyny asynchronicznej,
- $R_{rN}$  – rezystancja obwodu wirnika (wartość znamionowa),
- $T_{rN} = \frac{L_r}{R_{rN}}$  – stała czasowa obwodu wirnika (wartość znamionowa).

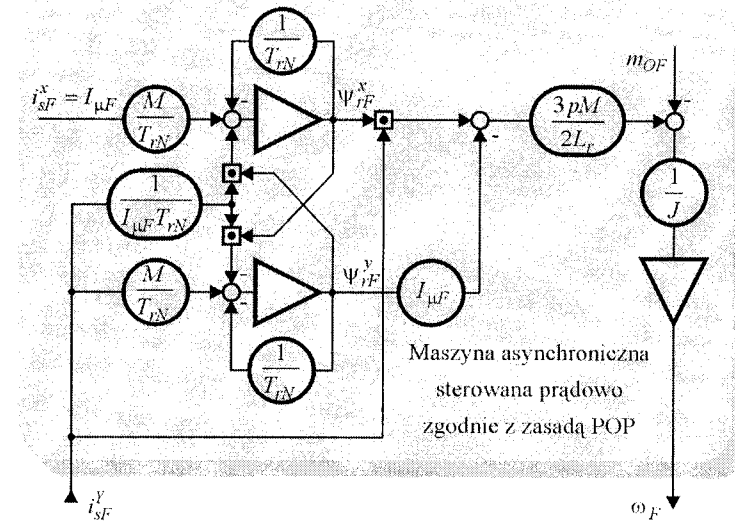
W pracy analizowana jest klasa układów o sterowaniu zgodnym z zasadą POP, pracujących w pierwszej strefie sterowania [41, 62, 95, 115], co oznacza, że składowa  $i_{sF}^x$  wektora prądu stojana ma wartość stałą, zgodnie z zależnością:

$$i_{sF}^x = I_{sF}^x = I_{\mu F} = \text{const.} \quad (\text{D1.2})$$

Przy spełnieniu tego warunku występująca w równaniach (D1.1a)-(D1.1b) pulsacja prądu wirnika powinna być proporcjonalna do składowej  $i_{sF}^y$  wektora prądu stojana, zgodnie z zależnością:

$$\omega_{rF} = \frac{i_{sF}^y}{I_{\mu F} T_{rN}} = \frac{R_{rN}}{I_{\mu F} L_r} i_{sF}^y. \quad (\text{D1.3})$$

Schemat blokowy maszyny asynchronicznej o takim sterowaniu zaprezentowano na rys. D1.1.



Rys. D1.1. Schemat blokowy maszyny asynchronicznej sterowanej prądowo, zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej

Prezentowana w pracy analiza właściwości dynamicznych układów napędowych prowadzona będzie w dziedzinie jednostek względnych, które zdefiniowane są w sposób następujący:

– składowa  $x$  wektora prądu stojana:

$$i_s^x = \frac{i_{sF}^x}{I_{\mu F}}, \quad (\text{D1.4})$$

– składowa  $y$  wektora prądu stojana:

$$i_s^y = \frac{i_{sF}^y}{I_{\mu F}}, \quad (\text{D1.5})$$

– składowa  $x$  wektora strumienia wirnika:

$$\Psi_r^x = \frac{\Psi_{rF}^x}{M I_{\mu F}}, \quad (\text{D1.6})$$

– składowa  $y$  wektora strumienia wirnika:

$$\Psi_r^y = \frac{\Psi_{rF}^y}{MI_{\mu F}}. \quad (D1.7)$$

Jak wynika z powyższych zależności, wartościami bazowymi dla przyjętych jednostek względnych są odpowiednio: składowa magnesująca wektora prądu stojana  $I_{\mu F}$  oraz składowa wektora strumienia skojarzonego wirnika  $\Psi_{rF}^x = MI_{\mu F}$ , wytworzonego przez tę składową. Uwzględnienie zależności (D1.2), (D1.3) oraz (D1.4) implikuje to, że w rozpatrywanej klasie sterowań składowe wektora prądu stojana dane są przez zależności:

$$i_s^x = \text{const.} = 1, \quad (D1.8a)$$

$$i_s^y = \omega_r, \quad (D1.8b)$$

gdzie  $\omega_r = \omega_{rF} T_{rN}$  jest pulsacją prądu wirnika w jednostkach względnych.

Dodatkowo wprowadzono:

– czas względny:

$$t = \frac{t_F}{T_{rN}}, \quad (D1.9)$$

– względny moment zewnętrzny:

$$m_0 = \frac{2m_{OF} L_r}{3p(MI_{\mu F})^2}, \quad (D1.10)$$

– stałą:

$$a = \frac{2JR_{rN}\Omega_{SN}}{3p(MI_{\mu F})^2}, \quad (D1.11)$$

oraz względną prędkość kątową:

$$\omega = \frac{\omega_F}{\Omega_{SN}}. \quad (D1.12)$$

Pulsacja  $\Omega_{SN} = 2\pi f_{SN}$  jest pulsacją synchroniczną znamionową silnika.

W tych warunkach układ równań maszyny (D1.1a)-(D1.1c) może być zapisany w postaci:

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^x = -\Psi_r^x + \Psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.13a)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^y = -\Psi_r^y - \Psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (D1.13b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\Psi_r^x i_s^y - \Psi_r^y) - \frac{m_0}{a}. \quad (D1.13c)$$

W przedstawionym modelu matematycznym maszyny asynchronicznej, sterowanej prądowo zgodnie z zasadą POP, zbiór parametrów układu zredukowany został do jednego parametru, jakim jest stała  $a$ . Stanowi to istotną zaletę tego modelu.

## ***D1.2. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana***

W tej wersji układu składowa  $i_{sF}^y$  wektora prądu stojana formowana jest bezpośrednio z sygnału wyjściowego regulatora prędkości kątowej, zgodnie z zależnością:

$$i_{sF}^y = k_{\omega F}(\omega_{zF} - \omega_F). \quad (D1.14)$$

Schemat blokowy układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej przedstawiony jest na rys. D1.2.

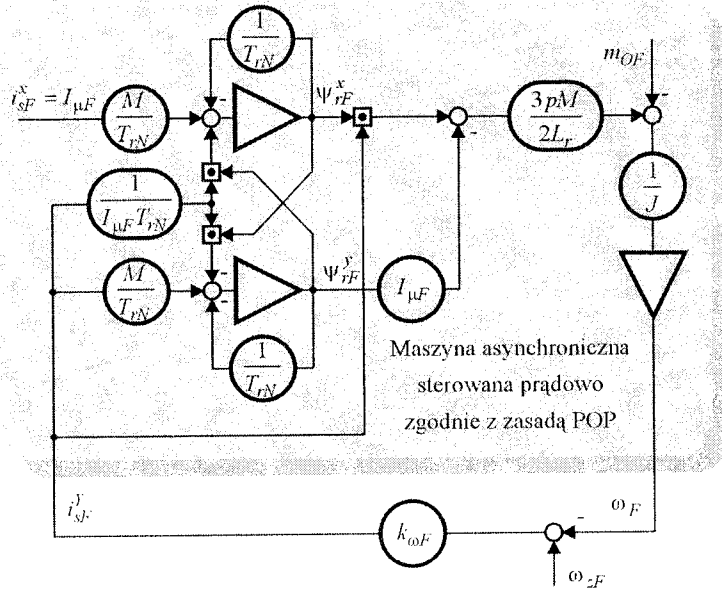
Wprowadzenie jednostek względnych według zależności (D1.5) i (D1.12) prowadzi do równania regulatora w postaci:

$$i_s^y = k_{\omega}(\omega_z - \omega), \quad (D1.15)$$

przy czym:

$$k_{\omega} = \frac{k_{\omega F}\Omega_{SN}}{I_{\mu F}} \quad (D1.16)$$

jest współczynnikiem wzmocnienia regulatora prędkości kątowej w jednostkach względnych. Względna kątowa prędkość zadana  $\omega_z$  zdefiniowana jest analogicznie jak prędkość kątowa wału maszyny (zależność (D1.12)).



**Rys. D1.2.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu P oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Model matematyczny układu jest następującym układem równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^x = -\Psi_r^x + \Psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.17a)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_r^y = -\Psi_r^y - \Psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (D1.17b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\Psi_r^x i_s^y - \Psi_r^y) - \frac{m_O}{a}, \quad (D1.17c)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega). \quad (D1.17d)$$

Model matematyczny układu napędowego jest nieliniowym układem równań stanu, przy czym wektorem stanu jest:

$$\mathbf{x} = [\Psi_r^x \quad \Psi_r^y \quad \omega]^T. \quad (D1.18)$$

Wyznamy współrzędne wektora stanu w stanie ustalonym, przyjmując, że zadana prędkość kątowa oraz moment zewnętrzny spełniają zależności:

$$\omega_z = \Omega_z = \text{const}. \quad (D1.19a)$$

$$m_O = M_O = \text{const}. \quad (D1.19b)$$

Współrzędne wektora stanu ustalonego obliczone przez przyrównanie do zera pochodnych wektora stanu w równaniu (D1.17) spełniają w tych warunkach zależność:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_O]^T. \quad (D1.20)$$

Warto podkreślić, że współrzędne wektora stanu ustalonego są zgodne z zasadą POP. Wektor strumienia wirnika ma jedynie składową  $\Psi_{Or}^x$ , która w rozpatrywanej klasie sterowań ma stałą, jednostkową wartość. Z zależności (D1.17c) i (D1.17d) wynika ponadto, że moment maszyny (w jednostkach względnych) wyraża się zależnością:

$$M_O = I_{Os}^y. \quad (D1.21)$$

Wykorzystując zależności (D1.17d) oraz (D1.21) wyznaczyć można równanie charakterystyki mechanicznej układu w postaci:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{M_O}{k_\omega}. \quad (D1.22)$$

Do analizy właściwości dynamicznych układu wygodniej jest utworzyć model matematyczny układu dla zmiennych przyrostowych reprezentujących odchylenia poszczególnych współrzędnych wektora stanu od wartości, jakie osiągają one w stanie ustalonym. Wektor stanu przyrostowego tworzy się więc zgodnie z zależnością:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_O. \quad (D1.23)$$

W dziedzinie zmiennych przyrostowych model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego przybiera postać:

$$\frac{d}{dt}\Delta \Psi_r^x = -\Delta \Psi_r^x + (I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) \Delta \Psi_r^y, \quad (D1.24a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta \Psi_r^y = -\Delta \Psi_r^y - (I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) \Delta \Psi_r^x, \quad (D1.24b)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta\omega = \frac{1}{a} [(I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega) \Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y - k_\omega \Delta\omega]. \quad (D1.24c)$$

Tworzenia modelu w dziedzinie zmiennych przyrostowych nie należy utożsamiać z procesem linearyzacji układu nieliniowego. Nieliniowy charakter równań różniczkowych zostaje tu bowiem zachowany, ponieważ w otrzymanym modelu matematycznym nadal występują iloczyny współrzędnych wektora stanu przyrostowego. Ten multiplikatywny charakter nieliniowości pozwala jednak zapisać model matematyczny układu w postaci macierzowej z tzw. *pseudoliniową macierzą stanu* [35, 76]:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega & 0 \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega) & -1 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta\omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (D1.25)$$

Powyższy sposób zapisu umożliwia przedstawienie układu równań (D1.24) w bardziej zwartej formie. Nieliniowy charakter modelu matematycznego przejawia się w zależności elementów macierzy stanu od współrzędnych wektora stanu przyrostowego i ustalonego.

### D1.3. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

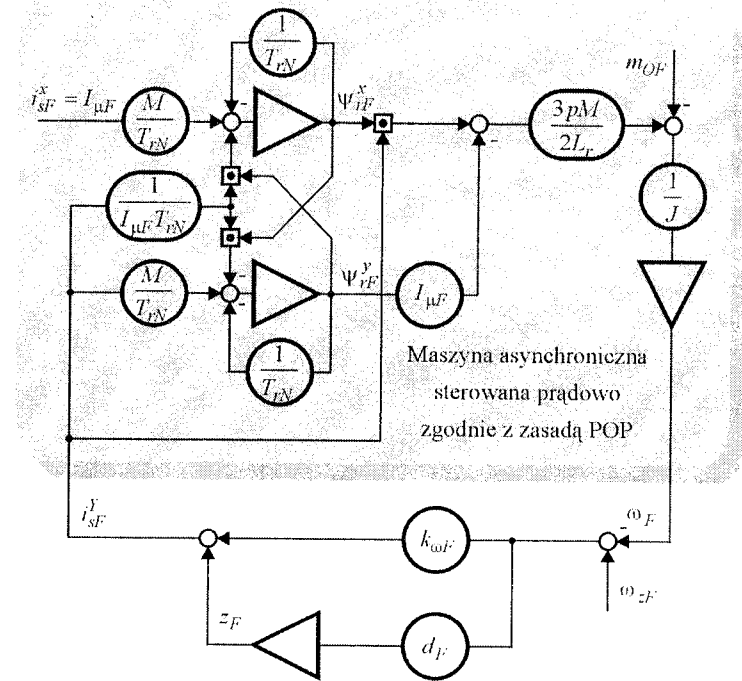
W tej wersji układu składowa  $i_{sF}^y$  wektora prądu stojana stanowi sygnał wyjściowy regulatora prędkości kątowej typu PI. W jednostkach fizycznych regulator taki opisany jest następującym układem równań:

$$i_{sF}^y = k_{\omega F} (\omega_{zF} - \omega_F) + z_F, \quad (D1.26a)$$

$$\frac{d}{dt_F} z_F = d_F (\omega_{zF} - \omega_F), \quad (D1.26b)$$

gdzie  $z_F$  jest zmienną stanu regulatora, a parametr  $d_F$  – współczynnikiem wzmocnienia jego części całkującej.

Schemat blokowy układu regulacji prędkości kątowej w rozpatrywanej wersji przedstawiony jest na rys. D1.3.



Rys. D1.3. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wprowadzając względną zmienną stanu regulatora w postaci:

$$z = \frac{z_F}{I_{\mu F}} \quad (D1.27)$$

i względny współczynnik wzmocnienia  $d$  części całkującej regulatora w postaci:

$$d = \frac{d_F T_{rN} \Omega_{sN}}{I_{\mu F}} \quad (D1.28)$$

oraz wykorzystując zależności (D1.5), (D1.9), (D1.12), (D1.16) utworzyć można, w jednostkach względnych, następujący model matematyczny układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.29a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (D1.29b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (D1.29c)$$

$$\frac{d}{dt}z = d(\omega_z - \omega), \quad (D1.29d)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (D1.29e)$$

Przyjmując, analogicznie jak w poprzednim punkcie, że zadana prędkość kątowna oraz moment zewnętrzny spełniają zależności (D1.19), można wyznaczyć wektor stanu ustalonego jako:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_z \quad Z_O]^T. \quad (D1.30)$$

Łatwo można wykazać, że współrzędna  $Z_O$  wektora stanu ustalonego spełnia zależność:

$$Z_O = M_O = I_{Os}^y, \quad (D1.31)$$

co potwierdza zgodność z zasadą POP. Z zależności (D1.30) wynika ponadto, że układ cechuje się brakiem ustalonego uchybu prędkości kątowej, co stanowi jego ważną zaletę.

Przejście do konwencji przyrostowej, zgodnie z zależnością (D1.23), prowadzi do następującego układu równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^y, \quad (D1.32a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^x, \quad (D1.32b)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega], \quad (D1.32c)$$

$$\frac{d}{dt}z = -d\Delta\omega. \quad (D1.32d)$$

Ten nieliniowy model matematyczny może być również zapisany w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega) & -1 & 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (D1.33)$$

#### ***D1.4. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana***

W tej wersji układu regulacji uwzględniona została ograniczona szybkość obrotu regulacji prądu stojana. Przyjęto, że reprezentatywnym modelem dynamicznym obwodu regulacji prądu stojana jest układ inercyjny pierwszego rzędu. Model matematyczny obwodu regulacji prądu stojana w jednostkach fizycznych można więc przedstawić jako:

$$\frac{d}{dt_F} i_{sF}^y = -\frac{1}{T_{sF}} i_{sF}^y + \frac{1}{T_{sF}} i_{szF}^y, \quad (D1.34)$$

przy czym  $i_{szF}^y$  jest wielkością zadaną składowej  $y$  wektora prądu stojana, a  $T_{sF}$  jest zastępczą stałą czasową obwodu regulacji prądu. Przy założeniu, że regulator prędkości kątowej jest regulatorem typu P, wielkość zadaną składowej  $i_{szF}^y$  wektora prądu stojana wyraża się zależnością:

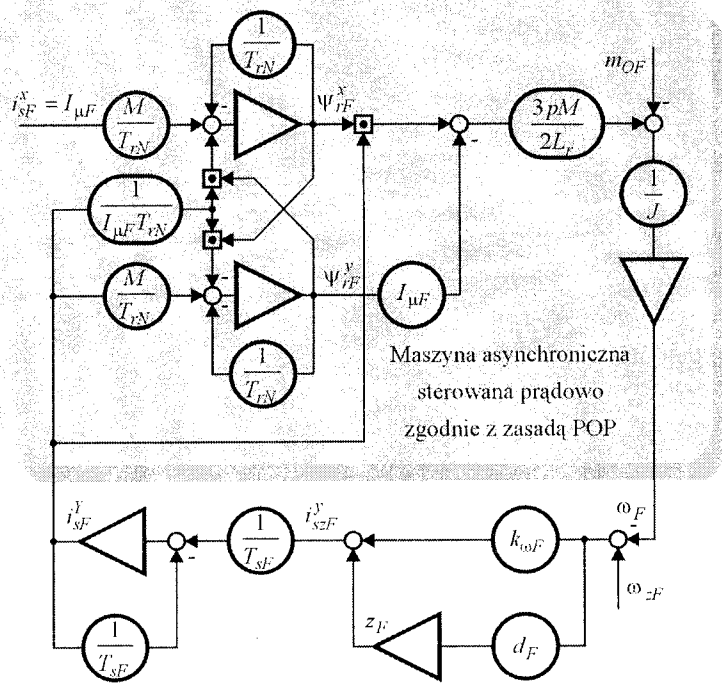
$$i_{szF}^y = k_{\omega F}(\omega_{zF} - \omega_F). \quad (D1.35)$$

Schemat blokowy rozpatrywanej wersji układu przedstawiony jest na rys. D1.4.



### D1.5. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno- -całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Schemat blokowy tej wersji układu napędowego przedstawiono na rys. D1.5.



**Rys. D1.5.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PI oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Do utworzenia modelu matematycznego tej wersji układu regulacji można posłużyć się modelem regulatora PI w jednostkach względnych opisanym zależnościami (D1.29d) i (D1.29e) oraz modelem matematycznym obwodu regulacji prądu stojana, opisanym zależnością (D1.37c). Model matematyczny układu regulacji prędkości kątowej można wówczas przedstawić w postaci następującej:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.41a)$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (D1.41b)$$

$$\frac{d}{dt} i_s^y = -\frac{1}{b} i_s^y + \frac{1}{b} i_{sz}^y, \quad (D1.41c)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (D1.41d)$$

$$\frac{d}{dt} z = d(\omega_z - \omega), \quad (D1.41e)$$

$$i_{sz}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (D1.41f)$$

Przy założeniu, że zadana prędkość kątowa oraz moment zewnętrzny spełniają zależności (D1.19), wektor stanu ustalonego można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_z \quad Z_O]^T. \quad (D1.42)$$

Z zależności (D1.41c)-(D1.41f) wynika ponadto, że prawdziwa jest zależność:

$$Z_O = M_O = I_{Os}^y, \quad (D1.43)$$

co potwierdza zgodność współrzędnych wektora stanu ustalonego z zasadą POP.

Wprowadzenie zmiennych przyrostowych pozwala uzyskać model matematyczny układu w postaci:

$$\frac{d}{dt} \Delta \psi_r^x = -\Delta \psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta i_s^y) \Delta \psi_r^y, \quad (D1.44a)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \psi_r^y = -\Delta \psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta i_s^y) \Delta \psi_r^x, \quad (D1.44b)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta i_s^y = -\frac{1}{b} (\Delta i_s^y + k_\omega \Delta \omega - \Delta z), \quad (D1.44c)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \omega = \frac{1}{a} [(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) \Delta \psi_r^x - \Delta \psi_r^y + \Delta i_s^y], \quad (D1.44d)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta z = -d \Delta \omega. \quad (D1.44e)$$

Ten nieliniowy model matematyczny może być równoważnie zapisany w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi_r^x \\ \Delta \psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta \omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (D1.45)$$

### D1.6. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tej wersji układu składowa  $y$  wektora prądu stojana stanowi sygnał wyjściowy regulatora prędkości kątowej typu proporcjonalno-inercyjno-różniczkowego (PIR). Uzasadnienie zastosowanej terminologii przedstawione zostało w punkcie 3.3.

Schemat układu regulacji prędkości kątowej z regulatorem typu PIR przedstawia rys. D1.6.

W jednostkach fizycznych regulator taki opisany jest następującym układem równań:

$$i_{sF}^y = k_{\omega F} (\omega_{zF} - \omega_F) + z_F, \quad (D1.46a)$$

$$\frac{d}{dt_F} z_F = -c_F z_F + d_F (\omega_{zF} - \omega_F). \quad (D1.46b)$$

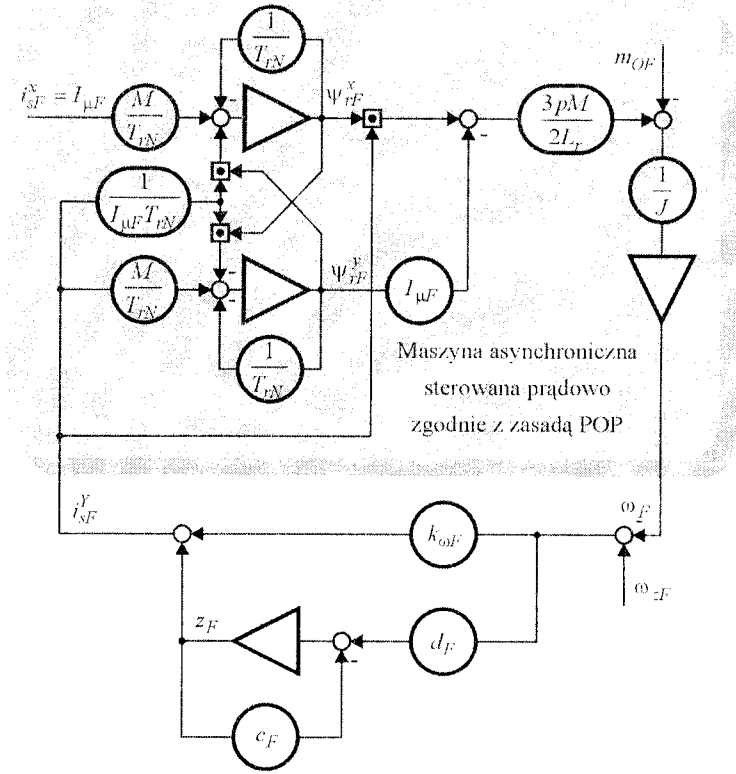
Wykorzystując zależności (D1.16), (D1.27), (D1.28) oraz definiując względny parametr  $c$  regulatora jako:

$$c = c_F T_{rN}, \quad (D1.46c)$$

model matematyczny regulatora PIR w dziedzinie jednostek względnych przedstawić można w postaci następującego układu równań:

$$i_s^y = k_\omega (\omega_z - \omega) + z, \quad (D1.47a)$$

$$\frac{d}{dt} z = -c z + d (\omega_z - \omega). \quad (D1.47b)$$



Rys. D1.6. Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Łatwo wykazać, że transmitancja takiego regulatora ma postać:

$$G_R(s) = \frac{i_s^y(s)}{\omega_z(s) - \omega(s)} = k_R \frac{sT_R + 1}{sT_I + 1}, \quad (D1.48)$$

gdzie:

$$k_R = \frac{ck_\omega + d}{c}, \quad (D1.49a)$$

$$T_R = \frac{k_\omega}{ck_\omega + d}, \quad (D1.49b)$$

$$T_I = \frac{1}{c}. \quad (D1.49c)$$

Struktura transmitancji (D1.48) uzasadnia określenie typu regulatora jako proporcjonalno-inercyjno-różniczkowy. Łatwo przy tym zauważyć, że jeżeli wartość parametru  $c$  regulatora dąży do zera, to właściwości regulatora PIR stają się zbliżone do właściwości regulatora typu PI.

Model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.50a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (D1.50b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (D1.50c)$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz + d(\omega_z - \omega), \quad (D1.50d)$$

$$i_s^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (D1.50e)$$

Przyjmując analogicznie jak w poprzednich punktach, że zadana prędkość kątowna oraz moment zewnętrzny spełniają zależności (D1.19a) oraz (D1.19b), wektor stanu ustalonego przyjmuje postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad \Omega_O \quad Z_O]^T, \quad (D1.51)$$

przy czym:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{M_O}{k_\omega + \frac{d}{c}}, \quad (D1.52a)$$

$$Z_O = \frac{d M_O}{c k_\omega + d}. \quad (D1.52b)$$

W przyjętym systemie jednostek względnych prawdziwa pozostaje także zależność (D1.21).

Z zależności (D1.52a) wynika, że uchyb ustalony regulacji prędkości kątowej dąży do zera w miarę zmniejszania wartości parametru  $c$ . W przypadku granicznym, gdy wartość parametru  $c$  dąży do zera, statyczny uchyb regulacji prędkości kątowej, analogicznie jak w przypadku regulatora typu PI, również dąży do zera.

Przejdźcie do konwencji przyrostowej, zgodnie z zależnością (D1.23), prowadzi do następującego układu równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega)\Delta\psi_r^y, \quad (D1.53a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega)\Delta\psi_r^x, \quad (D1.53b)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega], \quad (D1.53c)$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz - d\Delta\omega. \quad (D1.53d)$$

Ten nieliniowy model matematyczny może być również zapisany w formie pseudoliniowej jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega) & -1 & 0 & 0 \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega \Delta\omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (D1.54)$$

### ***D1.7. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-inercyjno-różniczkowym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana***

W procesie tworzenia modelu matematycznego tej wersji układu napędowego można wykorzystać model regulatora PIR opisany zależnościami (D1.46a), (D1.46b), z tym że sygnał wyjściowy regulatora stanowi teraz sygnał zadany składowej  $y$  wektora przestrzennego prądu stojana.

Schemat blokowy tej wersji układu regulacji przedstawiono na rys. D1.7.

Wykorzystanie zależności (D1.5), (D1.16), (D1.27) i (D1.28) umożliwia zapisanie modelu matematycznego układu w postaci:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + 1, \quad (D1.55a)$$

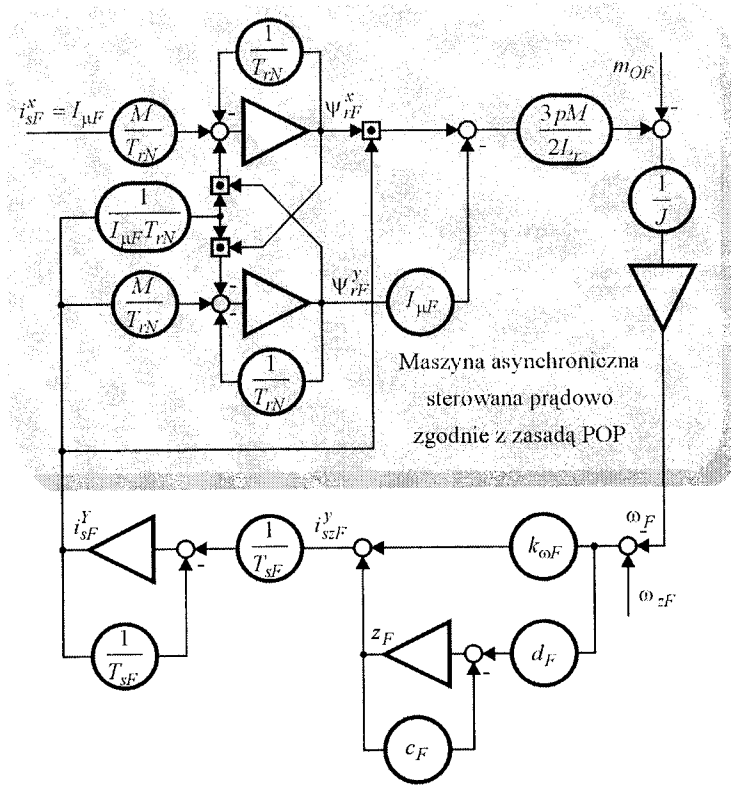
$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + i_s^y, \quad (\text{D1.55b})$$

$$\frac{d}{dt}i_s^y = -\frac{1}{b}i_s^y + \frac{1}{b}i_{sz}^y, \quad (\text{D1.55c})$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (\text{D1.55d})$$

$$\frac{d}{dt}z = -cz + d(\omega_z - \omega), \quad (\text{D1.55e})$$

$$i_{sz}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (\text{D1.55f})$$



**Rys. D1.7.** Schemat blokowy układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wektor stanu ustalonego układu posiada postać:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [1 \quad 0 \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T. \quad (\text{D1.56})$$

Jak wynika z tej zależności, wektor strumienia skojarzonego wirnika jest zgodny z zasadą POP. Prawdziwe pozostają też zależności (D1.21), (D1.52a), (D1.52b) oraz podstawowe właściwości układu z regulatorem typu PIR, opisane w punkcie D1.6.

Przejsicie do konwencji przyrostowej pozwala zapisać model matematyczny układu w postaci:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^y, \quad (\text{D1.57a})$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x, \quad (\text{D1.57b})$$

$$\frac{d}{dt}\Delta i_s^y = -\frac{1}{b}(\Delta i_s^y + k_\omega\Delta\omega - \Delta z), \quad (\text{D1.57c})$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Delta i_s^y], \quad (\text{D1.57d})$$

$$\frac{d}{dt}\Delta z = -c\Delta z - d\Delta\omega. \quad (\text{D1.57e})$$

Ten nieliniowy model matematyczny może być równoważnie zapisany w formie pseudoliniowej, jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & 0 & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (\text{D1.58})$$

## D2. Warunki dostateczne stabilności asymptotycznej układów dynamicznych testowanych przy pomocy wybranych klas form kwadratowych

W tym punkcie przeprowadzona zostanie analiza stabilności układów dynamicznych o typowych, często występujących w praktyce strukturach macierzy stanu. Analiza stabilności przeprowadzona zostanie z wykorzystaniem bezpośredniej metody Lapunowa. W rezultacie podane zostaną warunki dostateczne stabilności asymptotycznej poszczególnych wersji układów dynamicznych testowanych przy pomocy wybranych klas form kwadratowych.

### Przypadek 1.

Rozpatrzmy liniowy układ dynamiczny opisany równaniem stanu w postaci:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_{ba} \\ \mathbf{A}_{ab} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{D2.1})$$

Niech wektory kolumnowe  $\mathbf{x}_a$  oraz  $\mathbf{x}_b$  mają odpowiednio  $n_a$  oraz  $n_b$  wierszy. Załóżmy, że podsystemy o podmacierzach stanu  $\mathbf{A}_a$  oraz  $\mathbf{A}_b$  są stabilne.

Wyznamy warunki dostateczne stabilności asymptotycznej układu (D2.1) przy testowaniu go przy pomocy dodatnio określonej formy kwadratowej o strukturze:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^T & \mathbf{x}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a & \mathbf{P}_{ab} \\ \mathbf{P}_{ab}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{D2.2})$$

Założmy ponadto, że względne wskaźniki jakości (1.11) doboru form kwadratowych o macierzach  $\mathbf{P}_a$  oraz  $\mathbf{P}_b$  do podsystemów o macierzach stanu  $\mathbf{A}_a$  oraz  $\mathbf{A}_b$  są dodatnie, a więc:

$$v_a > 0 \quad (\text{D2.3})$$

$$v_b > 0 \quad (\text{D2.4})$$

Zgodnie z bezpośrednią metodą Lapunowa układ (D2.1) pozostaje asymptotycznie stabilny, o ile pochodna formy kwadratowej (D2.2), liczona wzdłuż dowolnej trajektorii tego układu, pozostaje ujemnie określona. Pochodna ta ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[V(\mathbf{x})] &= \mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_a) \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b^T (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \mathbf{x}_b + \\ &+ \mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{x}_a + \mathbf{x}_b^T (\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}) \mathbf{x}_b + \\ &+ 2\mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}) \mathbf{x}_b. \end{aligned} \quad (\text{D2.5})$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami (zależności (D2.3) i (D2.4)) dwa pierwsze składniki powyższej zależności są ujemnie określone, a ich maksymalne wartości mogą być oszacowane przez nierówności:

$$\mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_a) \mathbf{x}_a \leq -2v_a |\text{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) \|\mathbf{x}_a\|^2, \quad (\text{D2.6})$$

$$\mathbf{x}_b^T (\mathbf{A}_b^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_b \mathbf{A}_b) \mathbf{x}_b \leq -2v_b |\text{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) \|\mathbf{x}_b\|^2, \quad (\text{D2.7})$$

gdzie symbol  $\lambda_M(\cdot)$  oznacza dominującą (posiadającą największą część rzeczywistą) wartość własną argumentu macierzowego, a symbol  $\lambda_{\min}(\cdot)$  oznacza minimalną wartość własną argumentu macierzowego. Pozostałe składniki prawej strony zależności (D2.5) mogą mieć wartości dodatnie, ale ich wartości maksymalne mogą być oszacowane przez normy euklidesowe macierzy i wektorów [65]. Maksymalne wartości poszczególnych składników wyrażone są nierównościami:

$$\mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}) \mathbf{x}_a \leq \|\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}\| \|\mathbf{x}_a\|^2, \quad (\text{D2.8})$$

$$\mathbf{x}_b^T (\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}) \mathbf{x}_b \leq \|\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}\| \|\mathbf{x}_b\|^2, \quad (\text{D2.9})$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{x}_a^T (\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}) \mathbf{x}_b \leq \\ \leq 2\|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}\| \|\mathbf{x}_a\| \|\mathbf{x}_b\|. \end{aligned} \quad (\text{D2.10})$$

Przy wykorzystaniu powyższych oszacowań warunek dostateczny ujemnej określoności prawej strony zależności (D2.5) sprowadza się do warunku dodatniej określoności macierzy:

$$\mathbf{Q}_z = \begin{bmatrix} Q_{z11} & Q_{z12} \\ Q_{z12} & Q_{z22} \end{bmatrix}, \quad (\text{D2.11})$$

gdzie:

$$Q_{z11} = 2v_a |\text{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) - \|\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}\| \quad (\text{D2.11a})$$

$$Q_{z22} = 2v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) - \|\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}\| \quad (\text{D2.11b})$$

$$Q_{z12} = -\|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}\|. \quad (\text{D2.11c})$$

Zgodnie z testem Sylwestera [58] macierz ta pozostaje dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równocześnie następujące nierówności:

$$Q_{z11} > 0, \quad (\text{D2.12a})$$

$$Q_{z11} Q_{z22} - Q_{z12}^2 > 0. \quad (\text{D2.12b})$$

### Przypadek 2.

Niech macierz stanu układu dynamicznego posiada strukturę:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{ab} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{D2.13})$$

Założmy, że podsystemy  $\mathbf{A}_a$  oraz  $\mathbf{A}_b$  są stabilne. Założmy również, że spełnione są nierówności (D2.3) oraz (D2.4), a do testowania stabilności układu użyta zostanie forma kwadratowa dana zależnością (D2.2). Warunki dostateczne ujemnej określoności pochodnej (D2.5) sprowadzają się wówczas do jednej nierówności:

$$2v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) \left( 2v_a |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) - \|\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}\| \right) + \\ - \|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b\|^2 > 0. \quad (\text{D2.14})$$

Warunek ten może być także przedstawiony w postaci:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) > \frac{\|\mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_{ab}\|}{2v_a |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]|} + \frac{\|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b\|^2}{4v_a v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b)} \quad (\text{D2.15})$$

Łatwo zauważyć, że spełnienie powyższej nierówności jest możliwe dla wszystkich przypadków, w których normy euklidesowe macierzy  $\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b, \mathbf{A}_{ab}$  oraz  $\mathbf{P}_{ab}, \mathbf{P}_b$  mają skończone wartości.

### Przypadek 3.

Macierz stanu układu dynamicznego ma strukturę:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{A}_{ba} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{D2.16})$$

Założmy, że podsystemy  $\mathbf{A}_a$  oraz  $\mathbf{A}_b$  są stabilne. Niech do testowania stabilności układu użyta zostanie forma kwadratowa dana zależnością (D2.2). Założmy również, że spełnione są nierówności (D2.3) oraz (D2.4). Warunki dostateczne ujemnej określoności pochodnej (D2.5) sprowadzają się wówczas do nierówności:

$$2v_a |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) \left( 2v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) - \|\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}\| \right) + \\ - \|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}\|^2 > 0 \quad (\text{D2.17})$$

Nierówność ta może być równoważnie przedstawiona w postaci:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) > \frac{\|\mathbf{A}_{ba}^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab}^T \mathbf{A}_{ba}\|}{2v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]|} + \frac{\|\mathbf{A}_a^T \mathbf{P}_{ab} + \mathbf{P}_{ab} \mathbf{A}_b + \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba}\|^2}{4v_a v_b |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)]| |\operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)]| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a)}. \quad (\text{D2.18})$$

Analogicznie jak w przypadku 2, warunki dostateczne stabilności asymptotycznej takiego układu dynamicznego mogą być spełnione zawsze, gdy normy euklidesowe macierzy  $\mathbf{A}_a, \mathbf{A}_b, \mathbf{A}_{ba}$  oraz  $\mathbf{P}_{ab}, \mathbf{P}_a$  mają skończone wartości.

### Przypadek 4.

Macierz stanu układu dynamicznego ma strukturę zgodną z zależnością (D2.1), lecz do testowania stabilności układu użyta jest dodatnio określona forma kwadratowa o postaci:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^T & \mathbf{x}_b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{P}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad (\text{D2.19})$$

gdzie macierz  $\mathbf{0}$  ma wymiar  $n_a \times n_b$ . Przy założeniu, że spełnione są warunki (D2.3) i (D2.4), warunkiem dostatecznym ujemnej określoności pochodnej (D2.5) jest spełnienie nierówności:

$$4v_a v_b \left| \operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_a)] \right| \left| \operatorname{real}[\lambda_M(\mathbf{A}_b)] \right| \lambda_{\min}(\mathbf{P}_a) \lambda_{\min}(\mathbf{P}_b) - \\ - \left\| \mathbf{P}_a \mathbf{A}_{ba} + \mathbf{A}_{ab}^T \mathbf{P}_b \right\|^2 > 0. \quad (\text{D2.20})$$

### D3. Modele matematyczne układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem wpływu cieplnych zmian rezystancji uzwojeń wirnika maszyny

Sformułowane w tym punkcie modele matematyczne układów napędowych, sterowanych zgodnie z zasadą POP, uwzględniają zjawisko zmiany wartości rezystancji uzwojeń wirnika. W układach sterowania częstotliwościowego, gdzie poziom pulsacji prądu wirnika podlega ścisłej kontroli, zmiany te wywołane są przede wszystkim przez zmieniającą się, pod wpływem obciążenia maszyny, temperaturę uzwojeń. Z natury zjawisk termicznych wynika, że dynamika tych zmian jest znacznie mniejsza niż dynamika procesów elektromagnetycznych i elektrodynamicznych w układzie napędowym. Opracowane w tym punkcie modele matematyczne umożliwiają jednak analizę właściwości dynamicznych układów o sterowaniu według zasady POP także wtedy, gdy zmiany rezystancji wirnika wywołane są innymi przyczynami. W punktach 4.1.1.2 oraz 4.2.1.2 przedstawiono możliwość wykorzystania sformułowanych tu modeli matematycznych do analizy wpływu szybkich zmian rezystancji wirnika, wywołanych zjawiskiem wypierania prądu w prętach wirnika.

Przy formułowaniu modeli matematycznych wykorzystano wprowadzony w dodatku D1 system jednostek względnych, co pozwala nadać prowadzonym rozważaniom bardziej ogólny charakter.

#### D3.1. Model matematyczny maszyny asynchronicznej, sterowanej zgodnie z zasadą pośredniej orientacji polowej z uwzględnieniem wpływu zmian rezystancji uzwojeń wirnika

Ilościową miarę zmian aktualnej wartości rezystancji uzwojeń wirnika  $R_r$  w odniesieniu do jej wartości  $R_{rN}$ , która uznana została za znamionową stanowi w ramach tej pracy parametr:

$$\rho = \frac{R_{rN}}{R_r}. \quad (\text{D3.1})$$

Wykorzystując przedstawione w dodatku D1 prawo sterowania (zależności (D1.2), (D1.3)) oraz definicje jednostek względnych (D1.4)-(D1.12) model matematyczny maszyny asynchronicznej zasilanej prądowo i sterowanej zgodnie z zasadą POP można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (\text{D3.2a})$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\frac{1}{\rho} \psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (\text{D3.2b})$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}. \quad (\text{D3.2c})$$

W dalszej części tego rozdziału wyprowadzone zostaną zależności tworzące modele matematyczne poszczególnych wersji układów sterowania w sekwencji zgodnej z dodatkiem D1.

#### D3.2. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Wykorzystując zależności (D1.14)-(D1.16) oraz układ równań maszyny (D3.2) model matematyczny tej wersji układu napędowego przedstawić można w sposób następujący:

$$\frac{d}{dt} \psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (\text{D3.3a})$$

$$\frac{d}{dt} \psi_r^y = -\frac{1}{\rho} \psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (\text{D3.3b})$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (\text{D3.3c})$$

$$i_s^y = k_\omega (\omega_z - \omega). \quad (\text{D3.3d})$$

Współrzędne wektora stanu ustalonego:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O]^T \quad (\text{D3.4})$$

wyrażone są zależnościami:

$$\Psi_{Or}^x = 1 + \frac{\rho(1-\rho)(I_{Os}^y)^2}{1 + (\rho I_{Os}^y)^2}, \quad (D3.5a)$$

$$\Psi_{Or}^y = \frac{(1-\rho)I_{Os}^y}{1 + (\rho I_{Os}^y)^2}, \quad (D3.5b)$$

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{I_{Os}^y}{k_\omega}, \quad (D3.5c)$$

przy czym z zależności (D3.3c) wynika ponadto, że w stanie ustalonym zachodzi:

$$\Psi_{Or}^x I_{Os}^y - \Psi_{Or}^y - M_O = 0. \quad (D3.6)$$

Warto podkreślić, że w tym przypadku składowe wektora strumienia wirnika są, w stanie ustalonym, zgodne z zasadą sterowania POP (zależność D1.20) jedynie w sytuacji, gdy  $\rho = 1$ . Przypadek taki jest oczywiście równoważny przypadkowi z zaniedbanym wpływem temperaturowych zmian rezystancji uzwojeń wirnika. Z zależności (D3.5a), (D3.5b) wynika, że w ogólnym przypadku położenie końca wektora strumienia zależy (w sposób nieliniowy) od stopnia obciążenia maszyny (wartość składowej  $I_{Os}^y$ ) oraz od wielkości zaburzeń wartości rezystancji wirnika w stosunku do jej wartości znamionowej (wartość parametru  $\rho$ ). W konsekwencji rodzina charakterystyk mechanicznych układu nie tworzy teraz zbioru prostych równoległych (zależność (D1.22)). Równania rodziny charakterystyk mechanicznych układu stanowią związki nieliniowe i mogą być wyznaczone na podstawie zależności (D3.5c) z uwzględnieniem zależności (D3.5a), (D3.5b) oraz (D3.6). Bliższe omówienie tego zagadnienia w kategoriach ilościowych przedstawione jest w rozdziale 4.

Postępując podobnie jak w dodatku D1.2, można uzyskać model matematyczny rozpatrywanej wersji układu w dziedzinie zmiennych przyrostowych jako:

$$\frac{d}{dt} \Delta \Psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \Delta \Psi_r^x + (I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) \Delta \Psi_r^y - k_\omega \Psi_{Or}^y \Delta \omega, \quad (D3.7a)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \Psi_r^y = -\Delta \Psi_r^y - (I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) \Delta \Psi_r^x - k_\omega \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \Delta \omega, \quad (D3.7b)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta \omega = \frac{1}{a} [(I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) \Delta \Psi_r^x - \Delta \Psi_r^y - k_\omega \Psi_{Or}^x \Delta \omega]. \quad (D3.7c)$$

Równoważna forma pseudoliniowa modelu matematycznego układu ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega & -k_\omega \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega) & -\frac{1}{\rho} & -k_\omega \left( \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \right) \\ \frac{I_{Os}^y - k_\omega \Delta \omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega \Psi_{Or}^x}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Psi_r^x \\ \Delta \Psi_r^y \\ \Delta \omega \end{bmatrix}. \quad (D3.8)$$

### ***D3.3. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-calkującym regulatorem prędkości kątowej oraz bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana***

Wykorzystując zależności (D3.2a)-(D3.2c) oraz (D1.29d) i (D1.29e) można utworzyć model matematyczny rozpatrywanej wersji układu napędowego:

$$\frac{d}{dt} \Psi_r^x = -\frac{1}{\rho} \Psi_r^x + \Psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (D3.9a)$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_r^y = -\frac{1}{\rho} \Psi_r^y - \Psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (D3.9b)$$

$$\frac{d}{dt} \omega = \frac{1}{a} (\Psi_r^x i_s^y - \Psi_r^y) - \frac{m_o}{a}. \quad (D3.9c)$$

$$\frac{d}{dt} z = d(\omega_z - \omega), \quad (D3.9d)$$

$$i_s^y = k_\omega (\omega_z - \omega) + z. \quad (D3.9e)$$

Wektor stanu ustalonego spełnia następującą zależność:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad \Omega_z \quad I_{Os}^y]^T, \quad (D3.10)$$

co oznacza, że układ nie wykazuje ustalonego uchybu prędkości kątowej. Z powyższej zależności wynika również, że w jednostkach względnych, w stanie ustalonym, zmienna stanu regulatora równa jest liczbowo składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu

du stojana. Składowe  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika spełniają odpowiednio zależności (D3.5a) i (D3.5b).

Model matematyczny układu w dziedzinie zmiennych przyrostowych ma postać:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^y - k_\omega\Psi_{Or}^y\Delta\omega + \Psi_{Or}^y\Delta z, \quad (D3.11a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^x + \left(\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x\right)(\Delta z - k_\omega\Delta\omega), \quad (D3.11b)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Psi_{Or}^x(\Delta z - k_\omega\Delta\omega)], \quad (D3.11c)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta z = -d\Delta\omega. \quad (D3.11d)$$

Równoważną formę pseudoliniową można zaś zapisać jako:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega & -k_\omega\Psi_{Or}^y & \Psi_{Or}^y \\ -(I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega) & -\frac{1}{\rho} & -k_\omega\left(\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x\right) & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta z - k_\omega\Delta\omega}{a} & -\frac{1}{a} & -\frac{k_\omega\Psi_{Or}^x}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} \\ 0 & 0 & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (D3.12)$$

### D3.4. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalnym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

W tej wersji przyjęto, że reprezentatywnym modelem dynamicznym obwodu regulacji prądu stojana jest układ inercyjny pierwszego rzędu. Wykorzystując zależności (D3.2a)-(D3.2c) oraz (D1.37c) i (D1.37e) otrzymujemy wówczas:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (D3.13a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (D3.13b)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_o}{a}, \quad (D3.13c)$$

$$\frac{d}{dt}i_s^y = -\frac{1}{b}i_s^y + \frac{1}{b}i_{sz}^y, \quad (D3.13d)$$

$$i_{sz}^y = k_\omega(\omega_z - \omega). \quad (D3.13e)$$

Współrzędne wektora stanu ustalonego:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O]^T \quad (D3.14)$$

spełniają odpowiednio zależności (D3.5a)-(D3.5c) oraz (D3.6). Z uwagi na założony brak uchybu regulacji prądu stojana w stanie ustalonym, właściwości statyczne układu są identyczne jak w wersji z bezinercyjnym obwodem regulacji prądu stojana.

W dziedzinie zmiennych przyrostowych model matematyczny układu regulacji jest układem równań:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^y + \Psi_{Or}^y\Delta i_s^y, \quad (D3.15a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x + \left(\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x\right)\Delta i_s^y, \quad (D3.15b)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta i_s^y = -\frac{1}{b}\Delta i_s^y - \frac{k_\omega}{b}\Delta\omega, \quad (D3.15c)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Psi_{Or}^x\Delta i_s^y]. \quad (D3.15d)$$

Równoważna forma pseudoliniowa ma postać:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & (\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \end{bmatrix}. \quad (D3.16)$$

### D3.5. Model matematyczny układu napędowego z proporcjonalno-całkującym regulatorem prędkości kątowej oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Do utworzenia modelu matematycznego tej wersji układu regulacji można posłużyć się zależnościami (D3.2a)-(D3.2c) oraz (D1.41c), (D1.41e) i (D1.41f). Otrzymuje się wówczas:

$$\frac{d}{dt}\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\psi_r^x + \psi_r^y i_s^y + \frac{1}{\rho}, \quad (D3.17a)$$

$$\frac{d}{dt}\psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\psi_r^y - \psi_r^x i_s^y + \frac{1}{\rho} i_s^y, \quad (D3.17b)$$

$$\frac{d}{dt}i_s^y = -\frac{1}{b}i_s^y + \frac{1}{b}i_{sz}^y, \quad (D3.17c)$$

$$\frac{d}{dt}\omega = \frac{1}{a}(\psi_r^x i_s^y - \psi_r^y) - \frac{m_\phi}{a}, \quad (D3.17d)$$

$$\frac{d}{dt}z = d(\omega_z - \omega), \quad (D3.17d)$$

$$i_{sz}^y = k_\omega(\omega_z - \omega) + z. \quad (D3.17e)$$

Wektor stanu ustalonego spełnia następującą zależność:

$$\mathbf{X}_O = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_O \quad Z_O]^T = [\Psi_{Or}^x \quad \Psi_{Or}^y \quad I_{Os}^y \quad \Omega_z \quad I_{Os}^y]^T, \quad (D3.18)$$

co oznacza, że układ nie wykazuje ustalonego uchybu prędkości kątowej. Z powyższej zależności wynika również, że w jednostkach względnych, w stanie ustalonym, zmienna stanu regulatora  $Z_O$  równa jest składowej  $I_{Os}^y$  wektora prądu stojana. Składowe  $\Psi_{Or}^x$  oraz  $\Psi_{Or}^y$  wektora strumienia wirnika są wyrażone, odpowiednio, zależnościami (D3.5a) i (D3.5b).

Wprowadzenie zmiennych przyrostowych pozwala uzyskać model matematyczny układu w postaci:

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^x = -\frac{1}{\rho}\Delta\psi_r^x + (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^y + \Psi_{Or}^y\Delta i_s^y, \quad (D3.19a)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi_r^y = -\frac{1}{\rho}\Delta\psi_r^y - (I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x + (\frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x)\Delta i_s^y, \quad (D3.19b)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta i_s^y = -\frac{1}{b}\Delta i_s^y - \frac{k_\omega}{b}\Delta\omega + \frac{1}{b}\Delta z, \quad (D3.19c)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \frac{1}{a}[(I_{Os}^y + \Delta i_s^y)\Delta\psi_r^x - \Delta\psi_r^y + \Psi_{Or}^x\Delta i_s^y], \quad (D3.19d)$$

$$\frac{d}{dt}\Delta z = -d\Delta\omega. \quad (D3.19e)$$

Ten nieliniowy model matematyczny zapisany może być równoważnie w formie pseudoliniowej w postaci:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} & I_{Os}^y + \Delta i_s^y & \Psi_{Or}^y & 0 & 0 \\ -(I_{Os}^y + \Delta i_s^y) & -\frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} - \Psi_{Or}^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} & -\frac{k_\omega}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{I_{Os}^y + \Delta i_s^y}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{\Psi_{Or}^x}{a} & 0 & 0 \\ \frac{a}{0} & \frac{a}{0} & \frac{a}{0} & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\psi_r^x \\ \Delta\psi_r^y \\ \Delta i_s^y \\ \Delta\omega \\ \Delta z \end{bmatrix}. \quad (D3.20)$$

#### D4. Przykłady analizy stabilności układów napędowych o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej

W tym punkcie zaprezentowane zostaną przykłady zastosowania metody analizy stabilności układu napędowego o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polowej. Analizie poddane będą dwie reprezentatywne wersje układu.

W przykładach liczbowych założono, że obie wersje układu wyposażone są w ten sam silnik asynchroniczny typu 1 PH 7101-2NF firmy SIEMENS. Jego podstawowe dane techniczne zaczerpnięto z katalogu „Low-Voltage Motors for Variable-Speed Drives”, Catalog DA 65.3 2000 oraz z posiadanej dokumentacji technicznej. Są one następujące:

|                                 |                                |
|---------------------------------|--------------------------------|
| Moc znamionowa                  | $P_N = 3,7 \text{ kW}$         |
| Prąd znamionowy                 | $I_{sN} = 9,7 \text{ A}$       |
| Napięcie znamionowe             | $U_{sN} = 350 \text{ V}$       |
| Częstotliwość znamionowa        | $f_{sN} = 51,61 \text{ Hz}$    |
| Prąd biegu jałowego             | $I_{\mu F} = 5,86 \text{ A}$   |
| Rezystancja wirnika             | $R_{rN} = 0,5308 \Omega$       |
| Reaktancja główna               | $X_M = 31,92 \Omega$           |
| Reaktancja rozproszenia wirnika | $X_{\sigma r} = 2,3816 \Omega$ |
| Moment bezwładności silnika     | $J_s = 0,017 \text{ kgm}^2$    |
| Prędkość obrotowa znamionowa    | $n_N = 1500 \text{ min}^{-1}$  |

Wykorzystując podstawowe dane techniczne silnika wyznaczono niezbędne parametry maszyny asynchronicznej.

Indukcyjność wzajemna stojana i wirnika:

$$M = \frac{X_M}{2\pi f_{sN}} = \frac{31,92}{2\pi \cdot 51,62} = 0,0985 \text{ H} . \quad (\text{D4.1})$$

Indukcyjność rozproszenia wirnika:

$$L_{\sigma r} = \frac{X_{\sigma r}}{2\pi f_{sN}} = \frac{2,3816}{2\pi \cdot 51,62} = 0,0073 \text{ H} . \quad (\text{D4.2})$$

Stała czasowa obwodu wirnika:

$$T_{rN} = \frac{L_r}{R_{rN}} = \frac{L_{\sigma r} + M}{R_{rN}} = \frac{0,0985 + 0,0073}{0,5308} = 0,1993 \text{ s} . \quad (\text{D4.3})$$

Założono, że całkowity moment bezwładności układu napędowego  $J$  sprowadzony do wału maszyny wynosi:

$$J = 1,5 J_s = 1,5 \cdot 0,017 = 0,0255 \text{ kgm}^2 . \quad (\text{D4.4})$$

Stałą  $a$  układu napędowego wyznaczono zgodnie z zależnością (D1.11):

$$a = \frac{2J R_{rN} \Omega_{sN}}{3p(MI_{\mu F})^2} = \frac{4\pi J f_{sN} R_{rN}}{3p(MI_{\mu F})^2} = \frac{4\pi \cdot 0,0255 \cdot 51,62 \cdot 0,5308}{3 \cdot 2(0,0985 \cdot 5,86)^2} = 4,39 . \quad (\text{D4.5})$$

##### D4.1. Przykład analizy stabilności układu napędowego z nasycającym się regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana

Teoretyczne podstawy do prowadzonej tu analizy stabilności zamieszczone są w punkcie 3.4. Model matematyczny badanej wersji układu w jednostkach względnych reprezentują zależności (3.92a)-(3.92g). Przy opracowaniu tego modelu założono, że rezystancja wirnika  $R_r$  jest stała i równa wartości znamionowej  $R_{rN}$ .

Schemat blokowy układu przedstawiony jest na rys. 3.9.

Jak wykazano w punkcie 3.4, proces analizy stabilności globalnej układu sprowadza się do znalezienia wspólnej funkcji Lapunowa dla zbioru (3.119) macierzy stanu układu. Praktyczne znaczenie ma jedynie analiza układów o dodatnich wartościach zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu stojana. Z zależności (1.30) i (1.31) oraz (3.118) wynika, że przesądzający o stabilności układu znak wskaźników jakości  $\eta$  oraz  $\nu$  nie zależy od konkretnej, dodatniej wartości stałej czasowej  $b$ . Wyniki badań stabilności globalnej zbioru  $\{\mathbf{A}_{me1}(N_1, N_2)\}$ , danego zależnością (3.119), można więc traktować jako reprezentatywne również dla podsystemu elektromechanicznego układu o macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$ , danej zależnością (3.115).

Założmy, że analiza stabilności dotyczy takiego przypadku, w którym parametry regulatora prędkości kątowej zostały określone zgodnie z kryterium symetrii. Zgodnie z zależnościami (3.104a)-(3.104b) parametry regulatora prędkości kątowej (w jednostkach względnych) powinny wówczas mieć wartości:  $k_{\omega w} = 1$ ,  $d_w = 1$ . Zbiór  $\{\mathbf{A}_{me1}(N_1, N_2)\}$  (zależność (3.119)) przybiera wtedy postać:

$$\{\mathbf{A}_{me1}(N_1, N_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -N & N \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -c_w \end{bmatrix} \right\}. \quad (D4.6)$$

Załóżmy, że stała  $N$  oraz parametr  $c_w$  regulatora prędkości kątowej spełniają zależności:

$$N = 0,001, \quad (D4.7a)$$

$$c_w = 0,0001. \quad (D4.7b)$$

Uzyskana w wyniku numerycznej optymalizacji wspólna dla zbioru (D4.6) funkcja Lapunowa ma dodatnio określoną macierz daną zależnością (3.122). Wykorzystując definicję (1.11) łatwo można sprawdzić, że względny wskaźnik jakości dla zbioru (D4.6) osiąga wartość  $v_{me} = 1$ . O wartości tego wskaźnika decyduje pierwsza w zbiorze (D4.6) macierz reprezentująca stan nasycenia regulatora prędkości kątowej.

Z przedstawionych w punkcie 3.4 rozważań oraz zaprezentowanej analizy wynika, że dla  $k_{\omega w} = 1$ ,  $d_w = 1$  oraz pozostałych parametrów regulatora według zależności (D4.7a), (D4.7b) rozpatrywany układ jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Załóżmy, że zastępcza stała czasowa  $b$  obwodu regulacji prądu stojana spełnia zależność:

$$b = 0,01. \quad (D4.8)$$

Z definicji (D1.36) oraz zależności (D4.3) wynika, że w jednostkach fizycznych zastępcza stała czasowa tego obwodu wynosi:

$$T_{sF} = bT_{rN} = 0,01 \cdot 0,1993 = 0,0019 \text{ s}. \quad (D4.9)$$

Uzyskanie zastępczej stałej czasowej  $T_{sF} \approx 2 \text{ ms}$  przy wykorzystaniu nowoczesnej techniki przekształtnikowej nie powinno sprawiać trudności.

Wykorzystując zależności (3.104a)-(3.104c) wyznaczmy wartości parametrów  $k_{\omega}$ ,  $d$  oraz  $c$  regulatora prędkości kątowej:

$$k_{\omega} = \frac{a k_{\omega w}}{2b} = \frac{4,39}{2 \cdot 0,01} = 220, \quad (D4.10a)$$

$$d = \frac{a d_w}{8b^2} = \frac{4,39}{8 \cdot (0,01)^2} = 5488, \quad (D4.10b)$$

$$c = \frac{c_w}{b} = \frac{0,0001}{0,01} = 0,01. \quad (D4.10c)$$

Równanie charakterystyki mechanicznej układu napędowego (dla regulatora prędkości kątowej pracującego w zakresie liniowym) określone jest zależnością (D1.52a). Przy uwzględnieniu zależności (D4.10a)-(D4.10c) równanie charakterystyki mechanicznej w przyjętym systemie jednostek względnych przybiera postać:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{M_O}{k_{\omega} + \frac{d}{c}} = \Omega_z - \frac{M_O}{220 + \frac{5488}{0,01}} \approx \Omega_z - 1,82 \cdot 10^{-6} M_O. \quad (D4.11)$$

Wyznamy udział składowej  $I_{sN}^y$  w całkowitym prądzie stojana  $I_{sN}$  w stanie ustalonym w warunkach znamionowych. Wartość tej składowej (w jednostkach fizycznych) może być obliczona z następującej zależności:

$$I_{sN}^y = \sqrt{(I_{sN})^2 - (I_{\mu F})^2} = \sqrt{(9,76)^2 - (5,86)^2} = 7,93 \text{ A}. \quad (D4.12)$$

W przyjętym systemie jednostek względnych (zależność (D1.5)) ustalona wartość tej składowej wynosi:

$$I_{sO}^y = \frac{I_{sN}^y}{I_{\mu F}} = \frac{7,93}{5,86} = 1,36. \quad (D4.13)$$

Ponieważ w rozpatrywanej wersji układu składowe wektora strumienia są w stanie ustalonym zgodne z prawem sterowania wektorowego pośredniego (zależność (D1.56)), to w przyjętym systemie jednostek względnych (w stanie ustalonym) składowa  $I_{sO}^y$  równa jest liczbowo momentowi zewnętrznemu  $M_O$ . Obliczony przy wykorzystaniu zależności (D4.11) względny, procentowy spadek prędkości kątowej układu w warunkach znamionowych wynosi:

$$\Delta\Omega_{\%} = \frac{\Delta\Omega(I_{sO}^y)}{\Omega_N} 100\% = \frac{1,82 \cdot 10^{-6} * 1,36}{\frac{2\pi n_N}{60} \frac{1}{2\pi f_{SN}}} 100\% = 4,95 \cdot 10^{-4}\% . \quad (D4.14)$$

Występująca w mianowniku pulsacja  $\Omega_N = 0,5$  jest obliczoną zgodnie z definicją (D1.12) względną, znamionową prędkością kątową układu. Określony zależnością (D4.14) względny spadek prędkości kątowej jest wystarczająco mały nawet dla napędów o najwyższych wymaganiach.

Oceniając właściwości statyczne układu w stanie nasycenia regulatora prędkości kątowej można się posłużyć schematem blokowym układu z rys. 3.9. Z rysunku tego wynika, że wskutek działania systemu ARW (nieliniowe bloki o charakterystykach z rys. 3.2 oraz rys. 3.6) dla  $|I_{sO}^y| \geq G$  ustalona wartość zmiennej stanu  $z$  regulatora prędkości kątowej spełnia zależność:

$$Z_O = 0 . \quad (D4.15)$$

W rezultacie, w stanie nasycenia regulatora prędkości, jego efektywny współczynnik wzmocnienia przybiera wartość  $Nk_{\omega}$ . Kształt uzyskanej w ten sposób charakterystyki mechanicznej układu (typu „koparkowego”) jest jakościowo zgodny z charakterystyką z rys. 3.3. Łatwo można wykazać, że dla stanu nasycenia regulatora prędkości usterpliwość charakterystyki mechanicznej wynosi:

$$\frac{\partial\Omega_O}{\partial M_O} = \frac{\partial\Omega_O}{\partial I_{sO}^y} = -\frac{1}{Nk_{\omega}} = -\frac{1}{0,001 \cdot 220} = -4,55 . \quad (D4.16)$$

W zasadzie oznacza to, że w stanie nasycenia regulatora przy (powolnych) zmianach prędkości od prędkości znamionowej ( $\Omega_N = 0,5$ ) do całkowitego zahamowania silnika wartość składowej  $I_{sO}^y$  nie powinna wzrosnąć ponad wartość  $G$  (rys. 3.3) bardziej niż wynika to z zależności:

$$I_{sO}^y - G = \frac{\Omega_N}{\left| \frac{\partial\Omega_O}{\partial M_O} \right|} = \frac{0,5}{4,55} = 0,109 . \quad (D4.17)$$

Ten wzrost wartości składowej  $I_{sO}^y$  nie wydaje się być groźny dla prawidłowej pracy układu w sytuacji, gdy poprawnie działają zabezpieczenia termiczne

układu. Wzrost ten może być ograniczony przez zmniejszenie stałej  $N$  regulatora poniżej wartości wynikającej z zależności (D4.7a). Zaprezentowany sposób analizy układu należałoby wówczas powtórzyć dla nowej wartości tego parametru regulatora.

Warto podkreślić, że dla założonych parametrów regulatora prędkości kątowej typu PIR dodatkową informację o właściwościach układu zawiera rys. 3.13. Zgodnie z rozważaniami z punktu 3.4 z rysunku tego odczytać można w jakich granicach (białe prostokąty) mogą zachodzić dowolnie szybkie zmiany wartości parametrów  $d_w$ ,  $k_{\omega w}$  regulatora bez obawy o utratę stabilności przez układ. Jak wynika z rysunku, odporność układu na szybkie zmiany parametrów regulatora prędkości jest szczególnie wysoka dla otoczenia wartości, zgodnego z kryterium symetrii ( $k_{\omega w} = 1$ ,  $d_w = 1$ ). Tego rodzaju informacja może być przydatna przy konstrukcji wysokiej jakości układów napędowych wyposażonych w mechanizmy adaptacyjnego dostrajania parametrów regulatora prędkości.

Wartości parametrów regulatora prędkości kątowej w jednostkach względnych mogą być przeliczone w dziedzinę wartości fizycznych przy wykorzystaniu zależności (D1.16), (D1.28) oraz (D1.46c). Otrzymuje się wówczas:

$$k_{\omega F} = \frac{k_{\omega} I_{\mu F}}{\Omega_{sN}} = \frac{220 \cdot 5,86}{2\pi \cdot 50} = 4,11 , \quad (D4.18a)$$

$$d_F = \frac{d I_{\mu F}}{T_{rN} \Omega_{sN}} = \frac{5488 \cdot 5,86}{2\pi \cdot 50 \cdot 0,1993} = 513,9 \text{ A/rad} , \quad (D4.18b)$$

$$c_F = \frac{c}{T_{rN}} = \frac{0,0001}{0,1993} = 0,0005 \text{ s}^{-1} . \quad (D4.18c)$$

Należy podkreślić, że powyższe wartości parametrów regulatora prędkości kątowej nie uwzględniają istnienia czujników pomiarowych w torach pomiaru prędkości kątowej i prądu stojana. Obliczenia wartości parametrów w tych warunkach mogą być przeprowadzone przy zastosowaniu podstawowych zasad przekształcania schematów blokowych [58].

#### **D4.2. Przykład analizy stabilności układu napędowego z regulatorem prędkości kątowej typu PIR oraz inercyjnym obwodem regulacji prądu stojana z uwzględnieniem wpływu ciepłych zmian rezystancji uzwojeń wirnika**

Teoretyczne podstawy do prowadzonej analizy stabilności układu napędowego zamieszczone są w punkcie 4.4. Uwzględniają one ciepłe zmiany wartości rezystancji wirnika maszyny.

Rozpatrzmy właściwości układu z regulatorem prędkości kątowej typu PIR, pracującym w zakresie liniowym. Pseudoliniowym modelem matematycznym tej wersji układu w jednostkach względnych jest zależność (4.109), a schemat blokowy układu przedstawiony jest na rys. 4.87.

Z przedstawionej w punkcie 4.4.1 analizy stabilności rozpatrywanej tu wersji układu wynika, że największą odporność na zmiany rezystancji wirnika uzyskuje się wówczas, gdy iloraz  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0,4$ . Z zależności (4.105) wynika również,

że w dziedzinie parametrów  $(k_{\omega}, d)$  zdefiniowanych zależnościami (D1.16) oraz (D1.28) zachowanie tej optymalnej wartości ilorazu  $S$  implikuje spełnienie następującej relacji:

$$d = \frac{0,2(k_{\omega})^2}{a}. \quad (D4.19)$$

Z przeprowadzonej analizy wynika również, że dla  $0,01 \geq b \geq 0,0001$  optymalna wartość współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  regulatora prędkości kątowej typu PIR zawarta jest w przedziałach wartości danych zależnościami (4.103a)-(4.103b). Potwierdzeniem tego są krzywe przedstawione na rys. 4.82-4.86 oraz na rys. 4.88-4.90. W dziedzinie wartości współczynnika  $k_{\omega}$  optymalne (zależne jedynie od stałej  $a$ ) wartości tego współczynnika są równoważnie określone zależnościami (4.104a)-(4.104b).

Załóżmy, że interesujące jest zachowanie układu napędowego, w którym wskutek ciepłych zmian rezystancji parametr  $p$  zmienia się w zakresie:

$$0,7 \leq p \leq 1,5. \quad (D4.20)$$

Załóżmy także, że podstawowe parametry układu napędowego określone są zależnościami (D4.1)-(D4.5) oraz (D4.8) i (D4.9).

Na podstawie krzywych z rys. 4.88-4.90 oraz zależności (4.103) przyjęto, że:

$$k_{\omega w} = 4b = 0,04. \quad (D4.21)$$

Przyjęcie takiej wartości względnego współczynnika wzmocnienia jest wynikiem kompromisu, którego celem jest zapewnienie maksymalnej wartości wskaźnika jakości  $\eta_1$  w całym zakresie zmian parametru  $p$  (zależność (D4.20)).

Wykorzystanie zależności (3.104a) umożliwia przeniesienie wartości współczynnika wzmocnienia  $k_{\omega w}$  w dziedzinę wartości współczynnika  $k_{\omega}$ . Otrzymujemy wówczas:

$$k_{\omega} = \frac{ak_{\omega w}}{2b} = 2a = 2 \cdot 4,39 = 8,78. \quad (D4.22)$$

Wartość parametru  $d$  regulatora można wyznaczyć z zależności (D4.19)

$$d = \frac{0,2(k_{\omega})^2}{a} = \frac{0,2 \cdot (8,78)^2}{4,39} = 3,51. \quad (D4.23)$$

Załóżmy, że parametr  $c_w = 0,0001$ . Wykorzystując wzór (3.104c) wartość parametru  $c$  regulatora prędkości można obliczyć w sposób następujący:

$$c = \frac{c_w}{b} = \frac{0,0001}{0,01} = 0,01. \quad (D4.24)$$

Porównanie uzyskanych tu wartości parametrów regulatora prędkości z parametrami uzyskanymi w poprzednim punkcie (zależności (D4.10a)-(D4.10c)) wskazuje, że są to wielkości bardzo różne. Wynika stąd, że spełnienie warunku maksymalnej odporności układu na zmiany rezystancji wirnika może prowadzić do znacznie różniących się wartości parametrów regulatora prędkości od tych, które uzyskano przy pominięciu wpływu zmian tej rezystancji. Innymi słowy, proces syntezy regulatora prędkości kątowej oparty jedynie na znajomości struktury i wartości parametrów wydzielonego podsystemu elektromechanicznego nie musi prowadzić do takich wartości parametrów, które zapewniają maksymalną odporność układu na zmiany rezystancji wirnika. Uzasadnia to celowość prowadzonej w pracy analizy stabilności układów o sterowaniu zgodnym z zasadą pośredniej orientacji polewej.

Dokonajmy bliższej oceny właściwości układu.

Właściwości statyczne układu można ocenić wykorzystując zależność (4.72). Wynika z niej, że:

$$\Omega_O = \Omega_z - \frac{I_{Os}^y}{k_\omega + \frac{d}{c}} = \Omega_z - \frac{I_{Os}^y}{8,78 + \frac{3,51}{0,01}} \approx \Omega_z - 0,0027 \cdot I_{Os}^y. \quad (D4.25)$$

Warto zwrócić uwagę, że w odróżnieniu od zależności (D4.11) powyższy wzór nie jest równaniem charakterystyki mechanicznej układu. Jak wyjaśniono w punkcie 4.1, dla  $p \neq 1$  moment zewnętrzny  $M_O$  oraz składowa  $I_{Os}^y$  prądu stojana związane są ze sobą w sposób nieliniowy (zależność (4.6)). Zależność (D4.25) daje jednak przybliżoną ocenę dokładności statycznej układu, zwłaszcza że, jak to wynika z rys. 4.6, dla składowej  $I_{Os}^y$  określonej zależnością (D4.13) stopień tej nieliniowości jest stosunkowo mały. Przyjmując ten stopień przybliżenia oceny, procentowy spadek prędkości kątowej przy obciążeniu układu prądem znamionowym można określić z zależności:

$$\Delta\Omega_{\%} = \frac{\Delta\Omega(I_{sO}^y)}{\Omega_N} 100\% = \frac{0,0027 \cdot 1,36}{\frac{2\pi n_N}{60} \frac{1}{2\pi f_{SN}}} 100\% = 0,73\%. \quad (D4.26)$$

Dokładność statyczna układu jest, jak widać, znacznie niższa niż w przypadku rozpatrywanym w poprzednim punkcie (zależność (D4.14)). Zwiększenie dokładności statycznej może być uzyskane poprzez zmniejszenie wartości parametru  $c$  regulatora.

Do oceny właściwości statycznych układu w stanie nasycenia regulatora prędkości kątowej posłużyć się można schematem blokowym układu z rys. 4.91. Porównanie części regulacyjnej z tego rysunku z analogicznym fragmentem, analizowanego w poprzednim punkcie układu, przedstawionym na rys. 3.9 prowadzi do wniosku, że są one identyczne. Właściwości statyczne układu w stanie nasycenia regulatora prędkości (z podobnym, jak wyżej stopniem dokładności) można więc ocenić analogicznie, jak w poprzednim punkcie.

Założmy, że w stanie nasycenia regulatora prędkości kątowej zachodzi:

$$Nk_{\omega w} = 0,002. \quad (D4.27)$$

Wykorzystanie zależności (3.104a) pozwala na obliczenie wartości iloczynu:

$$Nk_\omega = \frac{aNk_{\omega w}}{2b} = \frac{4,39 \cdot 0,002}{2 \cdot 0,01} = 0,44. \quad (D4.28)$$

Wykorzystując zależność (D4.16) otrzymujemy wówczas:

$$\frac{\partial\Omega_O}{\partial I_{sO}^y} = -\frac{1}{Nk_\omega} = -\frac{1}{0,44} = -2,27. \quad (D4.29)$$

Podobnie jak poprzednio wzrost wielkości składowej  $I_{sO}^y$ , przy (powolnych) zmianach prędkości od prędkości znamionowej ( $\Omega_N = 0,5$ ) do całkowitego zahamowania silnika, może być obliczony z zależności:

$$I_{sO}^y - G = \frac{\Omega_N}{\left| \frac{\partial\Omega_O}{\partial M_O} \right|} = \frac{0,5}{2,27} = 0,22. \quad (D4.30)$$

W razie potrzeby, wzrost ten może być zmniejszony przez obniżenie wartości iloczynu  $Nk_{\omega w}$ .

O właściwościach dynamicznych układu można wnioskować na podstawie wartości wskaźnika jakości  $\eta_I$ . Zamieszczone na rys. 4.88-4.90 wykresy zostały opracowane dla dopuszczalnej wartości stałej  $B = 2$ . Obliczona, zgodnie z zależnością (D4.13), właściwa dla użytego silnika wartość tej składowej wynosi natomiast  $B = 1,36$ . W celu precyzyjnego wyznaczenia wartości wskaźnika jakości, obliczenia optymalizacyjne zostały powtórzone dla właściwej wartości stałej  $B$ . Wykorzystując uzyskane wyżej wyniki analizy zmniejszono również dziesięciokrotnie wartość parametru  $c_w$  regulatora. Z zależności (D4.24)-(D4.26) wynika, że dla  $c_w = 0,00001$  ustępliwość charakterystyki  $\Omega_O = f(I_{sO}^y)$  oraz procentowy spadek prędkości kątowej ulegną dziesięciokrotnemu zmniejszeniu.

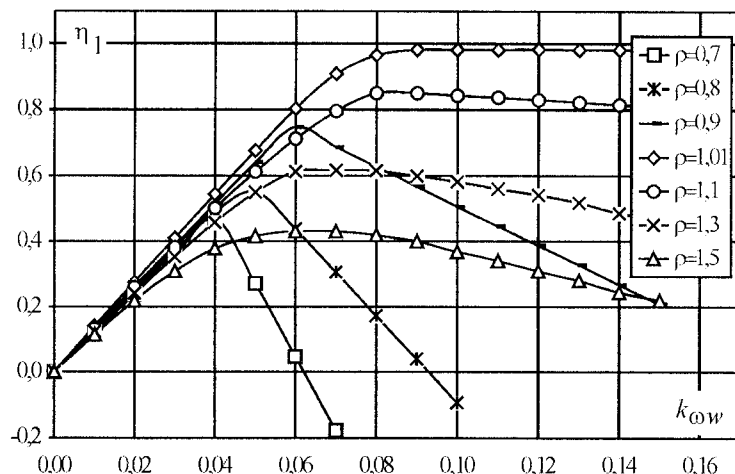
Rezultaty analizy przedstawiono na rys. D4.1. Wyniki obliczeń potwierdzają, że również dla stałej  $B = 1,36$  zakresy optymalnych (w sensie maksymalnej odporności układu na zmiany rezystancji wirnika) wartości współczynnika wzmocnienia zawarte są w zakresie wskazanym przez zależności (4.103a)-(4.103b). Dla przyjętej wartości współczynnika wzmocnienia (zależność (D4.21)) i zakresu zmienności rezystancji wirnika (zależność (D4.20)) wskaźnik jakości wyrażony jest nierównością:

$$\eta_I \geq 0,38, \quad (D4.31)$$

przy czym decydujące znaczenie ma tu stan układu odpowiadający  $p = 0,7$ . Z definicji wskaźnika jakości (zależność (4.27)) oraz przyjętego systemu jednostek

względnych (zależność (D1.9)) wynika, że gwarantuje to eksponencjalne zanikanie normy wektora stanu ze stałą czasową nie większą niż:

$$T_{zF} = \frac{1}{\eta_1} T_{rN} = \frac{1}{0,38} 0,1993 = 0,524 \text{ s} . \quad (\text{D4.32})$$



**Rys. D4.1.** Zależność wskaźnika jakości  $\eta_1$  od wartości współczynnika wzmacnienia  $k_{\omega w}$  dla różnych wartości parametru  $\rho$ ; zastępcza stała czasowa  $b = 0,01$ , parametr  $c_w = 0,00001$ , stała  $B = 1,36$

Należy podkreślić, że przedstawiony sposób określania parametrów regulatora prędkości został opracowany przy założeniu, że maksymalizacji podlega odporność układu na zmiany rezystancji uzwojeń wirnika. Interesująca wydaje się odpowiedź na pytanie jakie będą właściwości dynamiczne układu przy tak wyznaczonych parametrach regulatora prędkości kątowej w sytuacji, gdy parametr  $\rho = 1$ . W praktyce taki stan układu może być osiągnięty w wyniku prawidłowego działania systemu identyfikacji i dostrojenia układu do bieżącej wartości rezystancji uzwojeń wirnika. Oceniając właściwości układu w tych warunkach, wystarczy przeprowadzić analizę wartości własnych macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego dla parametru  $\rho = 1$ . Z zależności (4.109) wynika, że macierz ta ma postać:

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -\frac{k_{\omega w}}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_w}{4b} & -\frac{c_w}{b} \end{bmatrix} . \quad (\text{D4.33})$$

Biorąc pod uwagę, że  $S = \frac{d_w}{(k_{\omega w})^2} = 0,4$ ,  $c_w = 0,00001$ , oraz wykorzystując zależność (D4.21) macierz tę można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{A}_{me} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & -4 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 0 & -1,6b & -10^{-3} \end{bmatrix} . \quad (\text{D4.34})$$

Wartości własne ( $\lambda_1 - \lambda_3$ ) tej macierzy, obliczone dla różnych wartości zastępczej stałej czasowej  $b$  obwodu regulacji prądu zestawiono w tabeli D4.1.

Tabela D4.1  
Wartości własne macierzy stanu podsystemu elektromechanicznego  $\mathbf{A}_{me}$

| $b$    | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|--------|-------------|-------------|-------------|
| 0,05   | -17,80      | -1,651      | -0,545      |
| 0,02   | -47,93      | -1,519      | -0,551      |
| 0,01   | -97,67      | -1,482      | -0,553      |
| 0,001  | -997,3      | -1,450      | -0,554      |
| 0,0001 | -9999       | -1,445      | -0,554      |

Z tabeli D4.1 wynika, że przy obranych w przykładzie parametrach regulatora prędkości kątowej dominująca wartość własna ( $\lambda_3$ ) macierzy podsystemu elektromechanicznego (obliczona dla  $\rho = 1$ ) pozostaje prawie stała dla  $b \leq 0,02$  i wynosi:

$$\lambda_3 = -0,55 . \quad (\text{D4.35})$$

Wynika stąd, że (dla  $b \leq 0,02$ ) dominująca stała czasowa eksponencjalnego zanikania normy wektora stanu podsystemu elektromechanicznego wynosi:

$$T_{zF} = \frac{1}{\lambda_3} T_{rN} = \frac{1}{0,55} 0,1993 = 0,362 \text{ s} . \quad (\text{D4.36})$$

Uzyskana w tych warunkach stała czasowa jest mniejsza niż obliczona z zależności (D4.32).

Do interesujących wniosków prowadzi porównanie właściwości dynamicznych układu z właściwościami podsystemu elektromechanicznego analogicznej wersji układu z zaniedbanym wpływem zmian rezystancji wirnika. Jak opisano to w punkcie 3.4, parametry  $k_{\omega w}$  oraz  $d_w$  regulatora prędkości kątowej typu PIR mogą być wówczas określone na podstawie kryterium symetrii i wynoszą  $k_{\omega w} = 1$  oraz  $d_w = 1$ . Do kreślenia wartości własnych podsystemu elektromechanicznego można wykorzystać zestawienie wartości własnych z tabeli 3.2 (dla  $c_w = 0,00001$ ). Z porównania zależności (3.115)-(3.117) wynika, że wartości własne macierzy stanu  $\mathbf{A}_{me}$  podsystemu elektromechanicznego (dla określonej wartości  $b$ ) mogą być wyznaczone przez podzielenie przez wartość stałej  $b$  wartości własnych zamieszczonych we właściwym wierszu tabeli 3.2. Uzyskane w ten sposób wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_{me}$  wynoszą:  $\lambda_1 = -50$ ,  $\lambda_{2,3} = -25 \pm 43,3j$ . Porównanie dominujących wartości własnych ( $\lambda_{2,3}$ ) z wartością własną  $\lambda_3$  (zależność (D4.35)) oraz z oceną szybkości zanikania normy wektora stanu, wynikającą z zależności (D4.31), prowadzi do wniosku, że są to wartości bardzo różne.

Z przeprowadzonej, przykładowej analizy stabilności układu napędowego wynika, że zaproponowane w rozdziale 4 jako optymalne wartości parametrów regulatorów prędkości kątowej gwarantują stabilność globalną oraz maksymalną odporność układu na zmiany rezystancji wirnika. Właściwości dynamiczne układu (mierzone położeniem dominujących wartości własnych lub wartością wskaźnika jakości  $\eta_1$ ) są jednak znacznie gorsze od tych, które można uzyskać w sytuacji, gdy wartość rezystancji wirnika jest znana i pozostaje stała ( $\rho = 1$ ).

Z przeprowadzonej analizy wynika również, że dla układów pracujących w warunkach zmieniającej się rezystancji (bez mechanizmów identyfikacji) proces syntezy regulatora prędkości kątowej oparty jedynie na znajomości struktury i parametrów podsystemu elektromechanicznego dla  $\rho = 1$  należy stosować bardzo ostrożnie. Nie musi on bowiem gwarantować maksymalnej odporności układu na zmiany rezystancji wirnika. Dla szybkich obwodów regulacji prądu stojana (mała wartość stałej  $b$ ) ten sposób postępowania może prowadzić nawet do takich wartości parametrów regulatora, przy których znikają gwarancje stabilności układu.

## Literatura

- 1 **Abu-Rub H., Krzemiński Z., Guziński J.:** *Nonlinear control of induction motor idea and application*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 6, s. 213-218.
- 2 **Aime M., Degner M., Tice N., Lorenz R. D.:** *The effect of saturation on flux angle estimation for sensorless, direct field oriented control of induction machines*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 3 **Aström K. J., Wittenmark B.:** *Adaptive control*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1995.
- 4 **Bose B. K.:** *Power electronics and AC drives*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, 1986.
- 5 **Busłowicz M.:** *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach*, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Rozprawy naukowe Nr 48, Białystok, 1997.
- 6 **Busłowicz M.:** *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Seria: Monografie Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom 1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok, 2000.
- 7 **Bühler H.:** *Einführung in die Theorie geregelter Drehstromantriebe*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1977.
- 8 **Bühler H.:** *Kaskaden-Zustandregelung*, Automatisierungstechnik, 33 H 2, 1985, s. 52-61.
- 9 **Balara L., Zboray L.:** *Robust control of an asynchronous motor*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.6, s. 24-28.
- 10 **Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L. H.:** *Robust control. The parametric Approach*, Prentice Hall PTR, 1995.
- 11 **Böcker J., Hartman I., Zwanzig Ch.:** *Nichtlineare und adaptive Regelungssysteme*, Springer-Verlag, 1986.
- 12 **Califano C., Barbot J.P., Monaco S., Normand-Cyrot D.:** *Nonlinear torque control of an induction motor with input filter*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 1, s. 104-109.

- 13 **Cataliotti A., Cecconi V., Cirrincione M., Flaccomio A.:** *Neural network estimation of the flux space vector angle for an indirect field oriented control independent from rotor resistance variations*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 14 **Cerruto E., Consoli A., Raciti A., Testa A.:** *Fuzzy adaptive vector control of induction motor drives*, IEEE Transactions on power electronics, Vol. 12, No. 6, November 1997, s. 1028-1040.
- 15 **Chan C. C., Wang H.:** *An effective method for rotor resistance identification for high-performance induction motor vector control*, IEEE transaction on industrial electronics, Vol. 37, No. 6, December 1990, s. 477-482.
- 16 **Chia-Chi Tsui:** *Robust control system design*, Marcel Dekker, Inc., 1996.
- 17 **Citko T., Sikorski A., Dubowski M.:** *AC/DC/AC quasi-resonant transistor's converter for AC drive application*, 6<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 2, Spain, 1995, s. 567-572.
- 18 **Consoli A.:** *AC machine sensorless control techniques based on high frequency signal injection*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.1, s. 98-103.
- 19 **Dakir A., Barlik R., Nowak M., Grochal P.:** *Mikroprocesorowy obserwator stanu maszyny indukcyjnej*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 89-96.
- 20 **De Donker R. W., Novotny D. W.:** *The universal field-oriented controller*, IEEE Transactions on industry applications, Vol. 30, No. 1, January/February 1994, s. 92-100.
- 21 **De Larminat P., Thomas Y.:** *Automatyka-układy liniowe*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1983.
- 22 **Dębowski A.:** *Odtwarzanie prędkości kątowej silnika asynchronicznego sterowanego pośrednio przy użyciu stymulatora stanu elektromagnetycznego i regulatora kąta obciążenia*, IV Krajowa Konferencja Energoelektroniki, Warszawa, 27-28 września 1990, T1, s. 43-52.
- 23 **Dębowski A., Błasiński W., Mroczek H.:** *Układ sterowania pośredniego dla silnika indukcyjnego oparty na stymulatorze stanu elektromagnetycznego*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 111-116.
- 24 **Dodds S., Vittek J.:** *Robust position control with induction motor*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.6, s. 35-40.
- 25 **Dubowski M.:** *Analiza wrażliwości modelu silnika asynchronicznego sterowanego metodą orientacji wektora prądu*, Archiwum Elektrotechniki, tom XXXII, Zeszyt 1/2, 1982, s. 229-240.
- 26 **Dubowski M.:** *Einfluss der dynamischen Fehler des Stromregelkreises auf Verhalten des Antriebs mit Vektorsteuerung bei indirekter Stabilisierung von Rotorfluss*, Archiwum Elektrotechniki, tom XL, Zeszyt 156-2/1991, s. 359-373.
- 27 **Dubowski M.:** *Zur Wahl der Gewichtmatrix von Idealen Ljapunov-Funktionen*, Archiwum Elektrotechniki, tom XLIII, Zeszyt 170-4/1994, s. 891-893.
- 28 **Dubowski M.:** *Globalna stabilność układów napędowych o sterowaniu transwektorowym pośrednim*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 125-130.
- 29 **Dubowski M.:** *Stability of the indirect field-oriented induction motor drives regarding effect of the speed controller saturation*, 34<sup>th</sup> International Symposium on Electrical Machines: Electrical Machines in Power Electronics SME'98, Opublikowano w Zeszytach Naukowych Politechniki Łódzkiej Z 91, s. 63-68.
- 30 **Dubowski M.:** *Wpływ zmian rezystancji uzwojeń wirnika na stabilność globalną układów napędowych o sterowaniu transwektorowym pośrednim*, Podstawowe Problemy Energoelektroniki i Elektromechaniki, VIII Sympozjum PPEE'99, Ustroń, 22-25 marca 1999, s. 155-160.
- 31 **Dubowski M.:** *Study of stability of indirect field-oriented drive systems*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 32 **Dubowski M.:** *Optimal quadratic forms for selected class of dynamical systems with variable parameters*, International Scientific Conference „Energy Saving in Electrical Engineering”, Warsaw University of Technology, 14-15 maja 2001, s. 320-324.
- 33 **Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.:** *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa, 1977.
- 34 **Fodor D., Vaas J., JuhászZs., Biró K.:** *Extended Kalman filter based speed sensorless AC motor control*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.6, s. 140-146.
- 35 **Föllinger O.:** *Nichtlineare Regelungen*, R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1993.
- 36 **Föllinger O.:** *Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*, Hüthig Buch Verlag Heidelberg, 1994.
- 37 **Gabriel R.:** *Mikrorechnergeregelte Asynchronmaschine, ein Antrieb für hohe dynamische Anforderungen*, Regelungstechnik, 32, H1, 1984, s. 18-26.
- 38 **Garces L. J.:** *Parameter adaption for the speed controlled static AC drive with a squirrel-cage induction motor*, IEEE Transaction on industry applications, Vol. 1A-16, No. 2, March/April 1980, s. 173-178.
- 39 **Glatfelder A. H., Schaufelberger W.:** *Zum Führungsverhalten von PID-ARW-Eingrößenkreisen*, Automatisierungstechnik, at. 35, H 11, 1987, s. 464-465.
- 40 **Godbersen J., Thogersen P., Tonnes M.:** *A practical identification scheme for induction motors at standstill using only a VS inverter as actuator*, 7<sup>th</sup>

- European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 3, Norway, 1997, s. 370-374.
- 41 **Gökdere L. U., Simaan M. A., Brice C. W.:** *Global asymptotic stability of indirect field-oriented speed control of current-fed induction motors*, Automatica, Vol. 34, No. 1, 1998, s. 133-135.
  - 42 **Górecki H.:** *Optymalizacja systemów dynamicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993.
  - 43 **Grzesiak L., Beliczyński B.:** *Simple neural cascade architecture for estimating of stator and rotor flux vectors*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
  - 44 **Habetler T. H., Profumo F., Griva G., Pastorelli M., Bettini A.:** *Stator resistance tuning in a stator-flux field-oriented drive using an instantaneous hybrid flux estimator*, IEEE Transactions on power electronics, Vol. 13, No. 1, January 1998, s. 125-132.
  - 45 **Harnefors L., Nee H-P.:** *Full-order observers for flux and parameter estimation of induction motors*, 7<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 3, Norway, 1997, s. 375-381.
  - 46 **Harnefors L.:** *Instability phenomena in sensorless control of induction motors*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
  - 47 **Hashimoto S., Tanaka K., Miki I.:** *An autotuning method for vector controlled induction motor drives considering stator core loss*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
  - 48 **Hasse K.:** *Drehzahlregelverfahren für schnelle Umrichterantriebe mit Stromrichtergespeiste Asynchron-Kurzschlussläufermotoren*, Regelungstechnik, 1972, s. 60-68.
  - 49 **Horng-Giou C., Kuang-Wei H.:** *Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems*, IEEE Transactions on automatic control, Vol. 39, No. 4, April 1994, s. 807-810.
  - 50 **Idžović T., Erceg G., Ferega D.:** *Induction machine DSP Based vector controller with on-line rotor resistance estimation*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 6, s. 6-10.
  - 51 **Itschner B.:** *Einführung idealer Ljapunov-Funktionen*, Regelungstechnik H7, 1977, s. 216-221.
  - 52 **Janaszek M., Kosicki M.:** *Serwonapędy tranzystorowe prądu stałego typu KOM*, Prace Instytutu Elektrotechniki, Z. 176, 1993, s. 7-24.
  - 53 **Jansen P. L., Lorenz R. D.:** *A physically insightful approach to the design and accuracy assessment of flux observers for field oriented induction machine drives*, IEEE Transactions on industry applications, Vol. 30, No. 1, January/February 1994, s. 101-110.
  - 54 **Jąderko A.:** *Identyfikacja krzywej magnesowania obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej w nieliniowym układzie odtwarzania zmiennych stanu*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 288-295.
  - 55 **Kabziński J., Woźniak P.:** *Output-feedback adaptive control of the induction motor*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 296-302.
  - 56 **Kabziński J., Woźniak P.:** *Adaptacyjne prądowe sterowanie silnika indukcyjnego z wykorzystaniem neuronalnej reprezentacji rozmytego modelu nieliniowości*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 259-264.
  - 57 **Kabziński J.:** *Adaptacyjne sterowanie prądowe silnika indukcyjnego bez pomiaru strumienia*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 281-286.
  - 58 **Kaczorek T.:** *Teoria sterowania*, PWN Warszawa, 1977.
  - 59 **Kaczorek T.:** *Macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 1984.
  - 60 **Kaźmierkowski M. P.:** *Zasady syntezy układów sterowania napędów przekształtnikowych*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1980.
  - 61 **Kaźmierkowski M. P.:** *Equivalent circuits of vector controlled induction motor*, Archiwum Elektrotechniki, T. XL, Z. 157/158-3,4/1991, s. 571-569.
  - 62 **Kaźmierkowski M. P., Tunia H.:** *Automatic control of converter-fed drives*, Elsevier, Amsterdam-London-NewYork-Tokio, 1994.
  - 63 **Kaźmierkowski M. P.:** *Control strategies for PWM rectifier/inverter – fed induction motors*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.1, s. 69-78.
  - 64 **Keller H.:** *Entwurf nichtlinearer Mehrgrößensysteme mit Hilfe der Ljapunov-Theorie und der Moore-Penrose Pseudoinversen*, Automatisierungstechnik, at. 37, H 10, 1989, s. 386-391.
  - 65 **Kielbasiński A., Schwetlik H.:** *Numeryczna algebra liniowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1992.
  - 66 **Kiendl H.:** *Totale Stabilität von linearen Regelungssystemen bei ungenau bekannten Parametern der Regelstrecke*, Automatisierungstechnik, at. 33, H 12, 1985, s. 379-386.
  - 67 **Kiendl H.:** *Robustheitsanalyse von Regelungssystemen mit der Methode der konvexen Zerlegung*, Automatisierungstechnik, at. 35, H5, 1987, s. 192-201.
  - 68 **Kim J., Kubota H., Matsue K.:** *Stable identification of rotor time constant for induction motor using fixed trace algorithm*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.

- 69 **Kisck D. O., Bucurenciu S., Bucurenciu M., Sirbu G., Kisck M.:** *Real-time parameter estimation of vector-control induction motor fed by CR-PWM using extended Kalman filter*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 70 **Korn G. A., Korn T. M.:** *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, PWN, Warszawa, 1983.
- 71 **Krishnan R., Doran F. C.:** *Study of parameter sensitivity in high-performance inverter-feed induction motor drive systems*, IEEE Transactions on industry applications, Vol. 1A-23, No. 4, July/August 1987, s. 623-635.
- 72 **Krzemiński Z.:** *Nonlinear control of induction motor*, 10<sup>th</sup> IFAC World Congress, Munich, 1987, s. 349-354.
- 73 **Krzemiński Z., Jąderko A.:** *A speed observer system of induction motor with magnetizing curve identification*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 6, s. 109-113.
- 74 **Kuźma A., Dubowski M.:** *Zastosowanie specjalizowanych układów serii Motion Control w napędzie elektrycznym*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 355-360.
- 75 **Leonhard W.:** *Control of electrical drives*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.
- 76 **Leszczynski J.:** *Zastosowanie analizy kwadratowej do badania stabilności układów dynamicznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nr 96, Elektryka Z. 13, s. 33-49.
- 77 **Lorenz R. D., Lawson D. B.:** *Performance of feedforward current regulators for field-oriented induction machine controllers*, IEEE Transactions on industry applications, Vol. 1A 21, No. 4, July August 1987, s. 597-602.
- 78 **Lorenz R. D.:** *Sensorless drive control methods for stable, high performance, zero speed operation*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.1, s. 1-11.
- 79 **Marino R., Peresada S., Valigi P.:** *Adaptive input-output linearizing control of induction motors*, IEEE Transactions on automatic control, Vol. 38, No. 2, February 1993, s. 208-221.
- 80 **Marwali M. N., Keyhani A., Tjanaka W.:** *An integrated digital signal processor based system for induction motor vector control using off line parameter identification*, 7<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 3, Norway, 1997, s. 782-787.
- 81 **Moldoveanu F., Korondi P., Cernat M., Comnac V., Drăghici I.:** *Real time variable structure control based on state observer for induction machine drives*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 1, s. 163-169.
- 82 **Nilsen R., Kaźmierkowski M. P.:** *Reduced-order observer with parameter adaptation for fast rotor flux estimation in induction machine*, IEE Proceedings, 136, Pt.-D, 1, 1989, s. 35-43.
- 83 **Noisser R.:** *Anti-Reset-Windup-Massnahmen bei Eingrößenregelungen*, Automatisierungstechnik, at. 35, H. 1, 1987, s. 32-39.
- 84 **Nowacki P., Szklarski L., Górecki H.:** *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*, T II. Zagadnienia specjalne układów liniowych. Układy nieliniowe, PWN, 1974.
- 85 **Olas A.:** *Construction of optimal Lyapunov function for systems with structured uncertainties*, IEEE Transaction on automatic control, Vol. 39, No. 1, January 1994, s. 167-171.
- 86 **Orłowska-Kowalska T.:** *Application of extended Luenberger observer for flux and rotor time constant estimation in induction motor drives*, IEE Proceedings, 136, Pt. D, 6 1989, s. 324-330.
- 87 **Orłowska-Kowalska T.:** *Nieliniowe i biliniowe obserwatory stanu silnika asynchronicznego – analiza krytyczna, Rozwój zautomatyzowanych układów napędu elektrycznego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992, s. 91-114.
- 88 **Orłowska-Kowalska T., Kowalski C. T.:** *Zastosowanie sieci neuronowych w napędzie elektrycznym*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 683-697.
- 89 **Orłowska-Kowalska T., Morel R.:** *Wpływ układu odtwarzania strumienia i prędkości kątowej na dynamikę napędu z silnikiem indukcyjnym*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 451-458.
- 90 **Orłowska-Kowalska T., Migas P.:** *Neuronowy estymator strumienia i prędkości silnika indukcyjnego odporny na zmiany parametrów*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 459-466.
- 91 **Orłowska-Kowalska T.:** *Metody odtwarzania zmiennych stanu dla napędów bezczujnikowych z silnikami indukcyjnymi*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 731-745.
- 92 **Orłowska-Kowalska T., Pawlak M.:** *Odtwarzanie prędkości silnika indukcyjnego za pomocą neuronowego estymatora z liniową funkcją aktywacji*, IV Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'99, s. 505-511.
- 93 **Ortega R., Espinosa G.:** *Torque regulation of induction motors*, Automatica, Vol. 29, No. 3, 1993, s. 621-633.

- 94 **Ortega R., Canudas C.:** *Nonlinear control of induction motors: torque tracking with unknown load disturbances*, IEEE Transaction on automatic control, Vol. 38, No 11, November 1993, s. 1675-1680.
- 95 **Ortega R., Taoutaou D.:** *Indirect field-oriented speed regulation for induction motors is globally stable*, IEEE Transaction on industrial electronics, Vol. 43, No 2, April 1996, s. 340-341.
- 96 **Ossadnik H.:** *Anwendung der Methode der konvexen Zerlegung zur Robustheitsanalyse des spurgeführten Busses unter Berücksichtigung von Zeitvarianzen*, Automatisierungstechnik, at. 36, H. 1, 1988, s. 26-31.
- 97 **Ossadnik H., Kiendl H.:** *Robuste quadratische Ljapunov-Funktionen*, Automatisierungstechnik, at. 38, H. 5, 1990, s. 174-182.
- 98 **Peixoto Z. M. A., Seixas P. F.:** *Parameter identification for induction machines at standstill*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 99 **Polański A.:** *Wybrane zagadnienia stabilności układów liniowych o zmiennych w czasie parametrach*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Nr 1464, Gliwice, 2000.
- 100 **Rasmussen H.:** *Field magnitude adaptation in induction motors*, 7<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 3, Norway, 1997, s. 922-926.
- 101 **Razik H., Rezzoung A.:** *An application of genetic algorithm to the identification of electrical parameters of an induction motor*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol.6, s. 1-5.
- 102 **Salo M., Tuusa H.:** *A vector controlled PWM current source inverter fed induction motor drive with a novel rotor time constant estimation method*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 103 **Sieber U.:** *Ljapunov-Synthese nichtlinearer Regelungen über die Approximation einer linearen Regelungen*, Automatisierungstechnik, at. 37, H 12, 1989, s. 455-461.
- 104 **Sieber U.:** *Nichtlinearer Zustandsreglerentwurf durch Gütemaßangleichung*, Automatisierungstechnik 41, 1993, s. 43-50.
- 105 **Slotine J. J. E., Li W.:** *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall International, Inc. 1991.
- 106 **Sobczuk D. L., Kaźmierkowski M. P.:** *High performance nonlinear induction motor control*, II Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'95, s. 551-556.
- 107 **Solbut A., Werdoni J., Citko T.:** *The selected systems of the magnetic flux vector and the speed of the AC motor estimation*, 8<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Lausanne, Switzerland, 7-9 september 1999, Wydane wyłącznie na CD-romie.
- 108 **Sommer S., Korn U.:** *Regelung nichtlinearer Strecken mittels linearer parametervaderlicher Systeme*, Electrical Engineering (Archiv für Elektrotechnik) V. 82, No 2. November 1999, s. 59-70.
- 109 **Späth H.:** *Steuerverfahren für Drehstrommaschinen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.
- 110 **Spiteri C., Cilia J., Asher G.:** *Sensorless position estimation in induction machines*, 9<sup>th</sup> International Conference on Power Electronics and Motion Control – EPE-PEMC 2000, Košice, Vol. 6, s. 101-108.
- 111 **Sugimoto H., Tamai S.:** *Secondary resistance identification of an induction-motor applied model reference adaptive system and its characteristic*, IEEE Transaction on industry applications, vol. 1A 23 No 2, March/April, 1987, s. 296-303.
- 112 **Szklarski L., Dziadecki A., Zarudzki J.:** *Analysis of the operation of induction machine at different method of control*, Archiwum Elektrotechniki, T. XL, Z. 157/158-3,4/1991, s. 558-569.
- 113 **Świerczyński D., Kaźmierkowski M. P., Grabowski P.:** *Nowe algorytmy estymacji strumienia stojana w silnikach indukcyjnych klatkowych zasilanych z falowników PWM*, IV Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'99, s. 649-654.
- 114 **Toliyat H. A., Arefeen M. S., Rahman K. M., Figoli D.:** *Rotor time constant updating scheme for a rotor flux-oriented induction motor drive*, IEEE Transaction on power electronics, Vol. 14, No 5. September 1999, s. 850-857.
- 115 **Tunia H., Kaźmierkowski M. P.:** *Automatyka napędu przekształtnikowego*, PWN, Warszawa, 1987.
- 116 **Turowicz A.:** *Teoria macierzy*, Skrypty uczelniane AGH, Nr 389, Kraków, 1974.
- 117 **Tuttas C.:** *Pseudo torque control (PTC) – a new control concept for induction motors*, 7<sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Vol. 3, Norway, 1997, s. 788-793.
- 118 **Vas P.:** *Parameter estimation, condition monitoring, and diagnosis of electrical machines*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- 119 **Vas P.:** *Vector control of AC machines*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- 120 **Verghese G. C., Sanders S. R.:** *Observers for flux estimation in induction machines*, IEEE Transaction on industrial electronics, Vol. 35, No 1, February 1988, s. 85-94.
- 121 **Werdoni J.:** *Prądowo-napięciowy model strumienia magnetycznego w silniku indukcyjnym bez mechanicznego czujnika położenia*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 679-684.

- 122 **Wojsznis P., Orłowska-Kowalska T.:** *Analiza porównawcza wrażliwości obserwatora i estymatora strumienia silnika indukcyjnego na zmiany parametrów napędu*, III Krajowa Konferencja Naukowa: Sterowanie w Energoelektronice i Napędzie Elektrycznym SENE'97, s. 713-720.
- 123 **Zajączkowski A. M.:** *Nowa metoda sterowania odsprzęgającego dla silnika indukcyjnego pracującego przy wymuszaniu wektora napięcia stojana*, Rozwój zautomatyzowanych układów napędu elektrycznego, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992, s. 115-126.
- 124 **Zhen L., Xu L.:** *On-line fuzzy tuning of indirect field-oriented induction machine drives*, IEEE Transactions on power electronics, Vol. 13, No 1, January 1998, s. 134-141.

## The stability of the indirect field-oriented drive systems

### S u m m a r y

The sensitivity to the rotor resistance changes is commonly considered as the main disadvantage of the indirect field-oriented controlled (IFOC) drive systems. This phenomenon creates negative effects in the steady and transient states of the drive operation.

In this monograph the comprehensive analysis of the stability of the indirect field-oriented controlled drive systems is presented. In this IFOC class the drive systems working with the constant magnitude of the rotor flux vector were considered.

The stability analysis was based on the direct Lapunov's method. As a quality measure of the quadratic form the convergence rate of the state vector norm was used.

The mathematical models of the drive systems included such phenomena as: dynamical effect of the current control subsystem, the saturation effect of the speed controllers (type P and PI) and the effect of the thermal changes of the rotor resistance.

It was proved that if the drive system parameters are constant, the speed controllers work in a linear range and the rotor resistance value is known the IFOC drive system is globally asymptotically stable for any practical parameter's value. In this case the proof procedure is based on analytical approach.

In these conditions the regard to saturation effect of the speed controllers gives the guarantee of global stability only in a certain set of controllers' parameters values. This set, from practical point of view, is the sufficiently large neighborhood for the parameter values of controllers dimensioned according to standard optimization criterion (modulus and symmetry criterion). In this case the proof procedure is based on numerical approach.

In the monograph it was also proved, that regard to the thermal changes of the rotor resistance gives the guarantee of the global stability of the drives system only in certain parameter value set. The method of estimating the limits of this set in a way of numerical optimisation of the quadratic form was presented. The calculation process is effective because it was proved that the matrix of the optimal quadratic form must belong to the certain class which includes large number of ze-

ro elements. From presented results it also arises that there exists, in the parameter space, such a set in which the system robustness (to the thermal changes of the rotor resistance) is the largest. In general case this set is not direct neighborhood of the controllers' parameters values, which result from the standard criterions of optimisation. It was also proved that in these conditions the value of the permissible relative changes of the rotor resistance decreases when the controller's gain increases.

