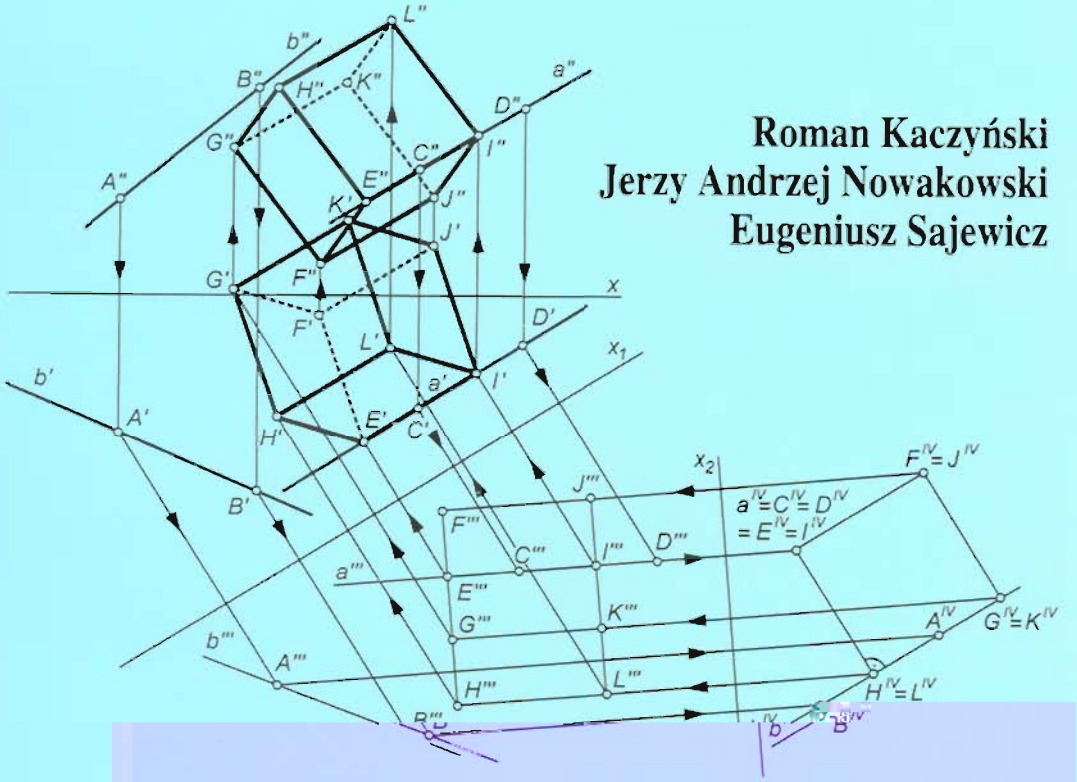
POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

GRAFIKA INŻYNIERSKA

CZĘŚĆ 1

GEOMETRIA WYKREŚLNA ĆWICZENIA PROJEKTOWE

Roman Kaczyński
Jerzy Andrzej Nowakowski
Eugeniusz Sajewicz



BIAŁYSTOK 2001

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

GRAFIKA INŻYNIERSKA

CZĘŚĆ 1

GEOMETRIA WYKREŚLNA ĆWICZENIA PROJEKTOWE

Roman Kaczyński
Jerzy Andrzej Nowakowski
Eugeniusz Sajewicz

BIAŁYSTOK 2001

DZIAŁ WYDAWNICTW I POLIGRAFII

Podręcznik akademicki dotowany przez Ministerstwo Edukacji Narodowej

Recenzenci

prof. dr hab. inż. Marian Dudziak
dr hab. inż. Marek Gawrysiak, prof. PB

Opracowanie redakcyjne

Jadwiga Żukowska

Skład komputerowy

Autorzy

Rysunki

Jerzy A. Nowakowski
Bogusław Hościło

Korekta

Autorzy

ISBN 83-88229-16-8

Drukowano w Dziale Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej.
Nakład 1500 egz. Format B-5.

SPIS TREŚCI

			Strona
Przedmowa			3
1.	Ćwiczenie nr 1	– Odwzorowanie elementów podstawowych	4
2.	Ćwiczenie nr 2	– Elementy przynależne	12
3.	Ćwiczenie nr 3	– Elementy wspólne	24
4.	Ćwiczenie nr 4	– Elementy równoległe i prostopadłe	34
5.	Ćwiczenie nr 5	– Obroty	48
6.	Ćwiczenie nr 6	– Kład i podniesienie z kładu	57
7.	Ćwiczenie nr 7	– Transformacje	68
8.	Ćwiczenie nr 8	– Wielościany i bryły obrotowe	82
9.	Ćwiczenie nr 9	– Przekroje wielościanów	97
10.	Ćwiczenie nr 10	– Przekroje powierzchni obrotowych	106
11.	Ćwiczenie nr 11	– Przenikanie wielościanów	113
12.	Ćwiczenie nr 12	– Przenikanie powierzchni	124
13.	Ćwiczenie nr 13	– Odwzorowania aksonometryczne prostokątne	132
14.	Ćwiczenie nr 14	– Elementy komputerowego wspomagania w geometrii wykreślnej	157
Wykaz symboli			164

PRZEDMOWA

Paradoksem jest, że dobie zawrotnej kariery pojęcia „rzeczywistość wirtualna" wzrasta znaczenie klasycznych metod kształtowania „wyobraźni przestrzennej" związanych z geometrią wykreślną. Kształtowanie to realizowane jest też w sposób klasyczny, tj. poprzez rozwiązywanie zadań.

Zbiór zadań jest wynikiem ponad dwudziestoletniego doświadczenia dydaktycznego, zdobytego podczas pracy autorów ze studentami Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej. Do studentów wydziałów mechanicznych jest też głównie adresowany. Zbiór może również służyć jako pomoc studentom tych kierunków studiów, na których program geometrii opiera się na rzutowaniu metodą Monge'a.

Duża liczba zadań oraz ich zróżnicowanie pod względem trudności dają prowadzącemu zajęcia w grupie studenckiej szerokie możliwości doboru treści zadań do potrzeb dydaktycznych. Przygotowując zadania autorzy uwzględnili także coraz powszechniejszy dostęp do komputerów, dołączając zestaw zadań wymagających zastosowania techniki komputerowej. Szerzej uwzględniono także zagadnienie aksonometrii, traktowane marginalnie w większości pomocy dydaktycznych z zakresu geometrii wykreślnej.

Materiał podzielono na 14 oddzielnych tematów. Każdy temat opracowano według następującego schematu:

- podstawowe wiadomości dotyczące tematu (definicje, twierdzenia, wskazówki);
- zadania;
- przykład rozwiązania zadania z opisem rozwiązania.

Rozwiązania zadań przedstawiono w postaci graficznego zapisu i słownego opisu poszczególnych etapów rozwiązania, co zdaniem autorów powinno pomóc w zrozumieniu prezentowanego materiału.

Autorzy

Ćwiczenie 1

ODWZOROWANIE ELEMENTÓW PODSTAWOWYCH

1. Obraz punktu

Odwzorowanie w metodzie Monge'a polega na wyznaczeniu prostokątnych rzutów na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, zwane rzutniami. Jedną rzutnią jest płaszczyzna pozioma (oznaczana symbolem π_1), drugą – pionowa (oznaczana symbolem π_2). Rzutnie te przecinają się wzdłuż osi x (osi rzutów) i tworzą układ odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$. Wprowadzamy także pozostałe osie układu kartezjańskiego – y i z.

Dowolny punkt A uważamy za jednoznacznie określony w przestrzeni, jeżeli znamy trzy jego współrzędne: x_A, y_A, z_A. Współrzędne te określają położenie poziomego (A') i pionowego (A'') rzutu punktu A.

2. Obraz prostej

Rzuty dwóch różnych punktów, należących do tej samej prostej, wyznaczają rzuty tej prostej. Dwa rzuty prostej, nieprostopadłej do osi x, jednoznacznie określają jej położenie w przestrzeni.

Punkty przebicia rzutni dowolną prostą a nazywamy *śladami prostej a*. *Ślad poziomy* H_a prostej a leży na rzucie poziomym a' tej prostej. *Ślad pionowy* V_a prostej a leży na rzucie pionowym a'' tej prostej.

Rzut poziomy a' prostej a przechodzi przez ślad poziomy H_a tej prostej i rzut poziomy V'_a śladu pionowego V_a. Rzut pionowy a'' prostej a przechodzi przez ślad pionowy V_a tej prostej i rzut pionowy H'' śladu poziomego H_a. Para śladów H_a, V_a niejednoczących się w jednym punkcie leżącym na osi x określa położenie w przestrzeni jednej i tylko jednej prostej.

3. Obraz prostych równoległych, przecinających się i skośnych

W ogólnym przypadku prostych równoległych mamy:

$$a \parallel b \Rightarrow a' \parallel b' \text{ i } a'' \parallel b''$$

Jeżeli dwie proste przecinają się, to rzut pionowy i rzut poziomy punktu przecięcia się tych prostych leżą na prostej *odnoszącej* tego punktu.

Jeżeli prosta przechodząca przez punkt przecięcia się rzutów pionowych i punkt przecięcia się rzutów poziomych dwóch prostych nie leży na prostej prostopadłej do osi x (a więc nie leży na prostej odnoszącej), to proste wyznaczone tymi rzutami nie przecinają się i nazywane są *prostymi skośnymi*.

4. Obraz płaszczyzny

Odwzorowanie płaszczyzny polega na odwzorowaniu elementów określających tę płaszczyznę. Płaszczyznę można określić za pomocą:

a) trzech punktów,
b) prostej i punktu nieleżącego na niej,
c) dwóch prostych przecinających się,
d) dwóch prostych równoległych
e) śladów płaszczyzny (szczególny przypadek dwóch prostych, przecinających się lub równoległych).

Śladem poziomym h_α płaszczyzny α nazywamy prostą, wzdłuż której następuje przecięcie się tej płaszczyzny z rzutnią poziomą π_1 (inaczej – *krawędź* przecięcia się), a *śladem pionowym* v_a – prostą, wzdłuż której następuje przecięcie się płaszczyzny α z rzutnią pionową π_2.

Każda para śladów płaszczyzny, przecinających się na osi x w punkcie X, zwanym węzłem płaszczyzny, a także równoległych do osi rzutów x lub jednoczących się w prostej nieleżącej na x, wyznacza jednoznacznie w przestrzeni jedną i tylko jedną płaszczyznę.

Wszystkie sposoby odwzorowania płaszczyzny są równoważne, tzn. każdą płaszczyznę można odwzorować wykorzystując jeden, wybrany z podanych powyżej sposobów. Należy jednak zaznaczyć, że w przypadkach szczególnego położenia płaszczyzny nie każdy sposób jest możliwy do zastosowania.

ZADANIA. Ćwiczenie 1

a) Odwzorować w układzie przestrzennym prostą *a* przechodzącą przez dowolnie wybrane dwa punkty (wyznaczyć rzuty i ślady prostej).

b) Wyznaczyć rzuty Monge'a punktów *A, B, C* oraz ślady płaszczyzny α *(A, B, C)*.

1.1 A (50 , 0 , 0) B (80 ,-40 , 40) C (0 ,-30 , 20)	1.2 A (60 , 60 , 10) B (30 ,-40 , 50) C (10 , 40 , 40)	1.3 A (40 , 10 ,-20) B (20 , 30 ,-10) C (20 ,-20 ,-40)	1.4 A (0 ,-40 , 10) B (20 , 20 , 20) C (40 ,-10 , 25)	1.5 A (60 , 0 , 0) B (50 , 40 ,-40) C (10 , 40 , 40)
1.6 A (0 ,-20 , 60) B (30 ,-20 , 30) C (60 , 50 ,-10)	1.7 A (30 , 0 , 20) B (80 ,-30 ,-30) C (40 , 50 , 10)	1.8 A (40 ,-30 ,-40) B (50 , 20 ,-30) C (20 , 60 , 0)	1.9 A (0 , 50 , 0) B (0 ,-40 , 30) C (60 ,-20 ,-50)	1.10 A (80 , 45 ,-60) B (20 ,-30 ,-60) C (45 ,-60 , 75)
1.11 A (0 ,-30 , 30) B (40 ,-60 , 60) C (30 ,-30 ,-40)	1.12 A (50 , 40 , 10) B (20 ,-20 ,-40) C (50 ,-40 , 10)	1.13 A (0 ,-60 , 0) B (90 ,-30 ,-20) C (50 ,-40 , 0)	1.14 A (50 , 0 ,-40) B (30 ,-30 ,-20) C (0 , 20 ,-50)	1.15 A (40 ,-30 , 0) B (10 ,-20 ,-10) C (80 ,-60 , 45)
1.16 A (60 , 45 , 30) B (20 , 0 , 60) C (80 ,-60 , 45)	1.17 A (0 , 40 , 50) B (0 , 20 ,-10) C (80 , 60 , 60)	1.18 A (90 , 0 ,-20) B (0 , 0 , 50) C (50 , 50 ,-30)	1.19 A (60 , 0 ,-30) B (0 , 0 , 60) C (30 ,-50 ,-20)	1.20 A (10 , 20 , 0) B (0 , 0 , 0) C (50 ,-30 ,-40)
1.21 A (-30 , 60 , 40) B (0 ,-20 ,-40) C (40 ,-40 , 40)	1.22 A (40 ,-30 ,-40) B (-40 , 30 , 40) C (0 , 10 , 20)	1.23 A (-60 , 40 , 30) B (-20 , 20 , 20) C (20 , 20 ,-40)	1.24 A (-60 , 60 ,-60) B (-30 , 20 , 50) C (10 , 40 , 80)	1.25 A (80 , 80 , 80) B (10 , 20 , 40) C (30 , 40 , 30)
1.26 A (-20 ,-40 ,-60) B (-80 ,-20 ,-20) C (-100, 60 , 30)	1.27 A (-100, 50 , 20) B (-50 , 20 , 50) C (0 , 10 , 40)	1.28 A (30 , 80 , 70) B (-20 , 30 , 20) C (-90 , 20 , 80)	1.29 A (20 , 0 , 80) B (-30 , 60 , 0) C (-80 , 40 , 20)	1.30 A (-40 , 0 , 60) B (0 , 40 ,-80) C (50 , 20 , 20)

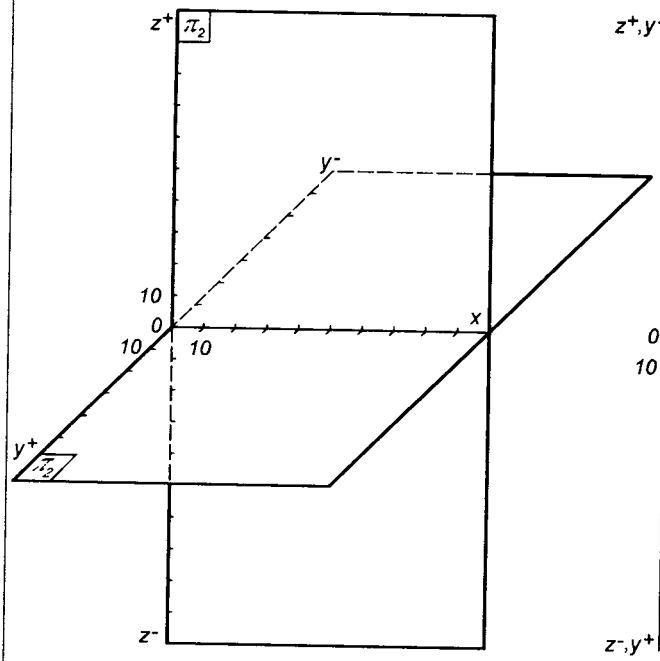
Ćwiczenie 1

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

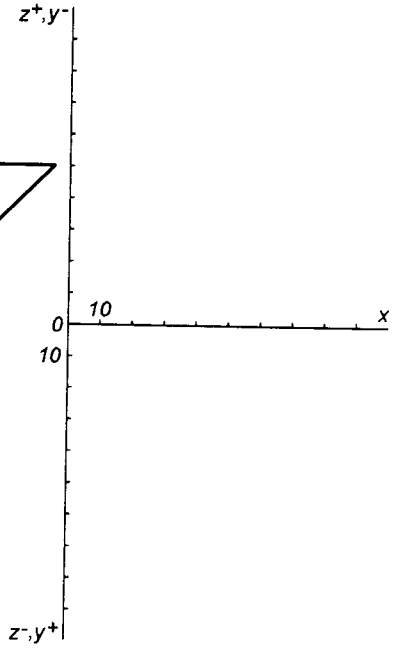
a) odwzorować prostą *a(A , B)* w układzie przestrzennym (wyznaczyć rzuty i ślady prostej),
b) wyznaczyć rzuty Monge'a punktów *A* , *B* , *C* oraz ślady płaszczyzny *α(A , B , C)*.

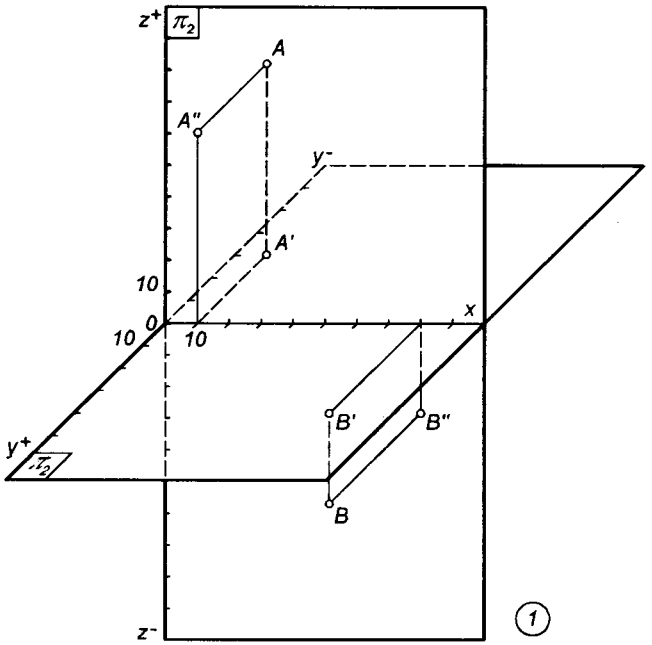
	x	y	z
A	10	-30	60
B	80	40	-30
C	50	40	20

a)

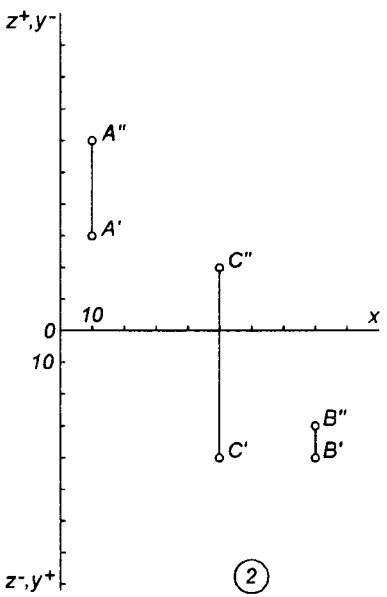


b)

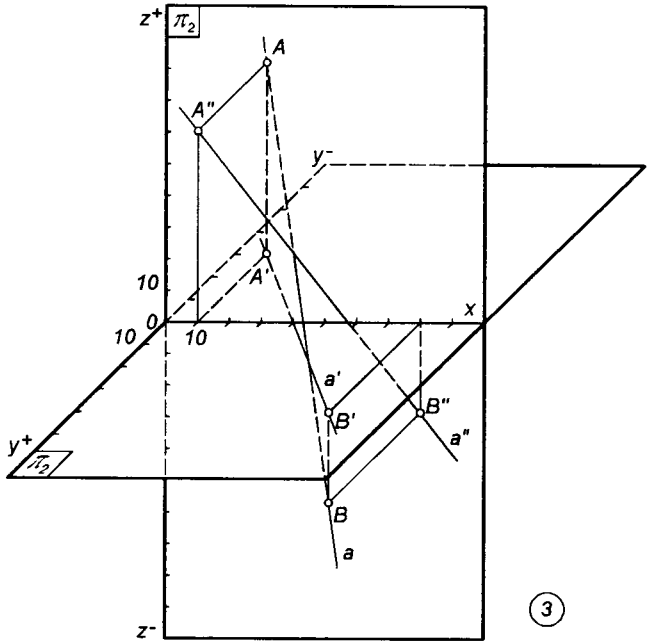




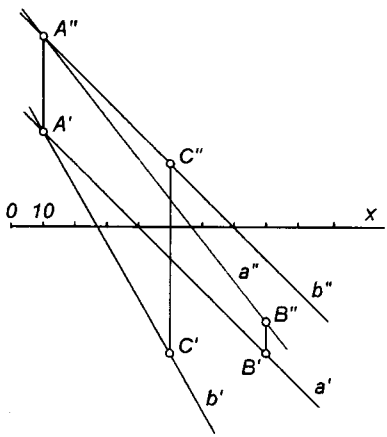
1



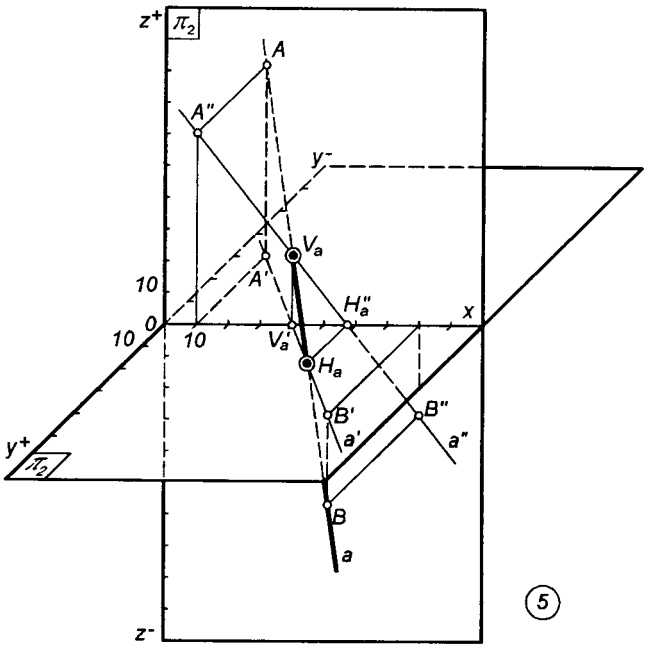
2



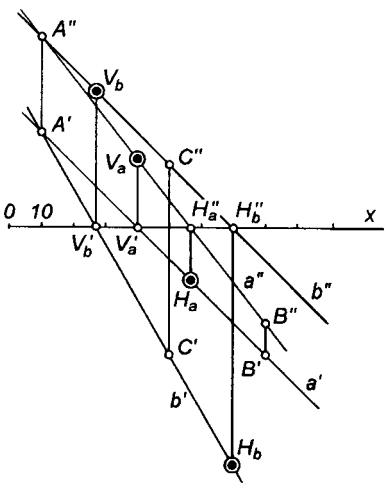
3



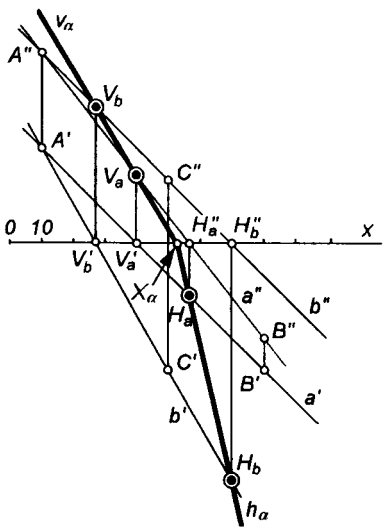
4


z+
π2
A
A''
y-
Va
A'
10
0
10
10
Ha''
x
Va'
Ha
B'
B''
a'
a''
y+
π2
B
a
z-

5


A''
Vb
A'
Va
C''
0 10
Ha''
Hb''
x
Vb'
Va'
a''
b''
Ha
B''
C'
B'
a'
b'
Hb

6


vα
A''
Vb
A'
Va
C''
0 10
Ha''
Hb''
x
Vb'
Va'
Xα
a''
b''
Ha
B''
C'
B'
a'
b'
Hb
hα

7

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 1

1. Wykorzystując podane współrzędne wyznaczamy rzuty poziome A', B' oraz rzuty pionowe A'', B'' punktów A i B. Wyznaczone rzuty wykorzystujemy do odwzorowania przestrzennego położenia A i B.

2. Na podstawie podanych współrzędnych wyznaczamy rzuty Monge'a punktów A, B, C.

3. Odwzorowane uprzednio punkty A i B wyznaczają położenie prostej a. Przez rzuty A', B' prowadzimy rzut poziomy a' prostej a, zaś przez rzuty A'', B'' rzut pionowy a'' prostej a.

4. Przez pary rzutów punktów A', B' oraz A', C' prowadzimy rzuty poziome a' i b' prostych a i b, a przez pary rzutów A'', B'' i A'', C'' rzuty pionowe a'', b'' tych prostych.

5. Na przecięciu się rzutu a' z osią x znajdujemy rzut poziomy V_a' śladu pionowego V_a, a na przecięciu się rzutu a'' z osią x odnajdujemy rzut pionowy H_a'' śladu poziomego H_a. Na odnoszącej poprowadzonej z V_a' do przecięcia się z a'' znajdujemy V_a – pionowy ślad prostej a. Natomiast na odnoszącej poprowadzonej z H_a'' do przecięcia się z a' znajdujemy H_a – poziomy ślad prostej. Postępowanie to powtarzamy dla prostej b i znajdujemy w taki sam sposób jej ślady H_b oraz V_b.

6. Przez poziome ślady H_a, H_b prostych a, b prowadzimy ślad poziomy h_α, a przez ślady pionowe V_a, V_b tych prostych ślad pionowy υ_α płaszczyzny α, wyznaczonej przez te proste.

Uwaga: Warunkiem poprawności rozwiązania jest przecięcie się wyznaczonych śladów płaszczyzny w jednym punkcie X_α, leżącym na osi x lub uzyskanie obu śladów równoległych do osi x.

Ćwiczenie 2

ELEMENTY PRZYNALEŻNE

1. Punkt i prosta przynależne do siebie

Jeżeli punkt i prosta przynależą do siebie, to odpowiednie ich rzuty również do siebie przynależą. Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: z przynależności rzutów punktu i prostej wynika ich przynależność w przestrzeni. Wyjątkiem jest przypadek, gdy prosta jest prostopadła do osi x (istnieje wówczas konieczność wykonania dodatkowej konstrukcji, np. w postaci wprowadzenia jeszcze jednej (trzeciej) rzutni.

Jeżeli choć jeden z rzutów punktu nie leży na rzucie prostej, to taki punkt i prosta nie są do siebie przynależne.

2. Prosta i płaszczyzna przynależne do siebie

Istnieją dwie zasadnicze konstrukcje, związane z przynależnością prostej i płaszczyzny:

a) konstrukcja prostej leżącej na danej płaszczyźnie,
b) konstrukcja płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą.

Obie konstrukcje wykonujemy wykorzystując jedno z podanych niżej twierdzeń.

1. Prosta leży na płaszczyźnie, jeżeli dwa dowolne jej punkty leżą na tej płaszczyźnie.
2. Prosta leży na płaszczyźnie, jeżeli przechodzi przez punkt należący do tej płaszczyzny i jednocześnie jest równoległa do prostej należącej do tej płaszczyzny.

Jeżeli prosta i płaszczyzna przynależą do siebie, to ich jednoimienne ślady również przynależą do siebie.

Z zasady wzajemnej przynależności prostej i płaszczyzny korzystamy m.in. przy wyznaczaniu rzutów figur płaskich.

3. Punkt i płaszczyzna przynależne do siebie

Przynależność punktu i płaszczyzny wiąże się z następującymi dwiema konstrukcjami:

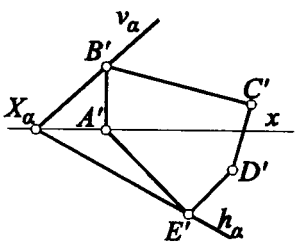
a) konstrukcją punktu leżącego na danej płaszczyźnie,
b) konstrukcją płaszczyzny przechodzącej przez dany punkt.

Punkt jest przynależny do płaszczyzny, gdy jest przynależny do dowolnej prostej leżącej na tej płaszczyźnie. Wówczas rzuty punktu leżą na odpowiednich rzutach tej prostej. Brakujący rzut punktu leżącego na płaszczyźnie możemy więc wyznaczyć wykorzystując do tego dowolną prostą przechodzącą przez ten punkt i przynależną do danej płaszczyzny. W praktyce posługujemy się najczęściej tzw. *prostymi szczególnymi (osobliwymi)*. Szczególnym przypadkiem jest prosta prostopadła do osi rzutów x, ponieważ położenie rzutów punktów na rzutach takiej prostej nie jest dostatecznym warunkiem przynależności prostej i punktu, a tym samym przynależności płaszczyzny i punktu.

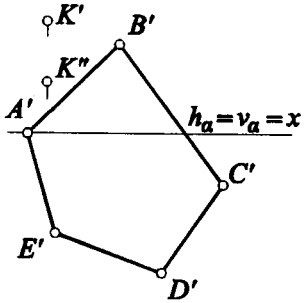
ZADANIA. Ćwiczenie 2

Wyznaczyć drugi rzut wielokąta leżącego na płaszczyźnie α.

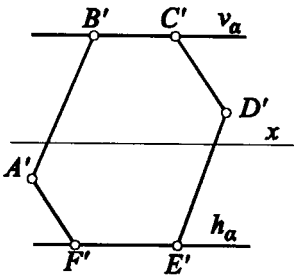
2.1 α(h_α, v_α)



2.2 α(h_α, v_α, K)

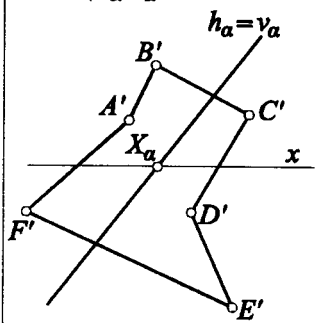


2.3 α(a, b)

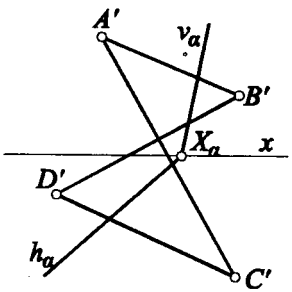


$h_\alpha, v_\alpha \parallel x$

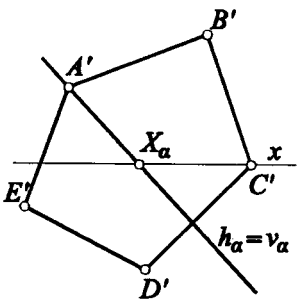
2.4 α(h_α, v_α)



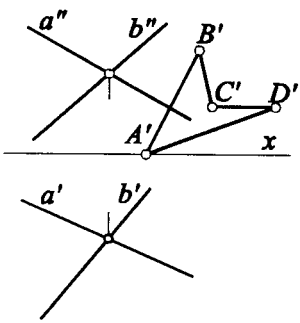
2.5 α(h_α, v_α)



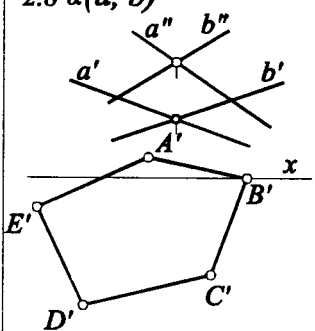
2.6 α(h_α, v_α)



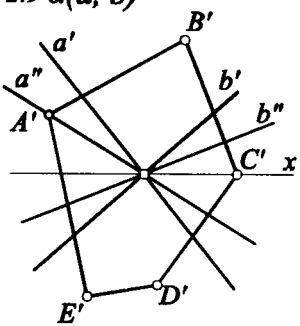
2.7 α(a, b)



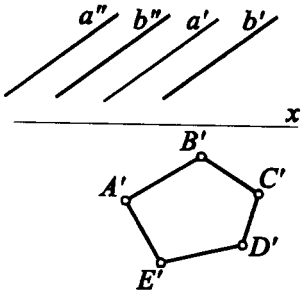
2.8 α(a, b)



2.9 α(a, b)

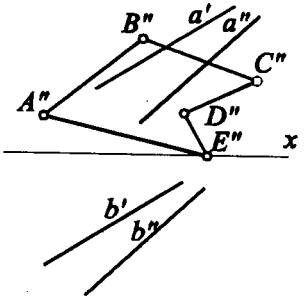


2.10 $\alpha(a, b)$



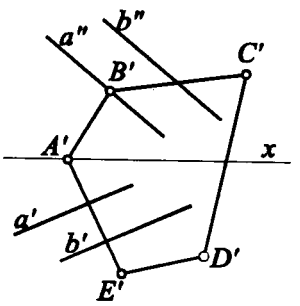
$a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$

2.11 $\alpha(a, b)$



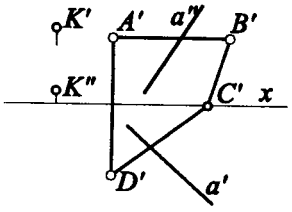
$a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$

2.12 $\alpha(a, b)$



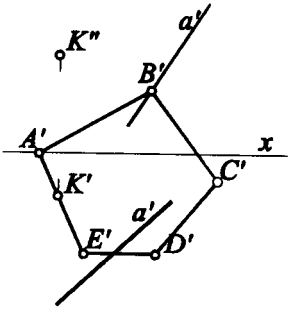
$a' \parallel b'$, $a'' \parallel b''$

2.13 $\alpha(a, K)$



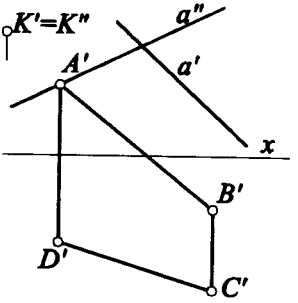
$A'B' \parallel x$, $A'D' \perp x$

2.14 $\alpha(a, K)$



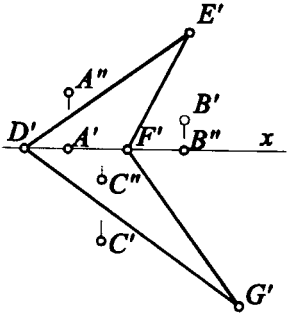
$E'D' \parallel x$

2.15 $\alpha(a, K)$

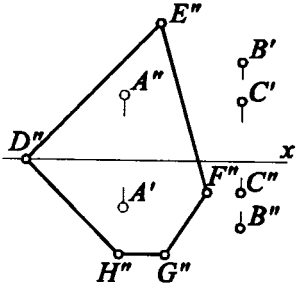


$A'D', B'C' \perp x$

2.16 $\alpha(A,B,C)$

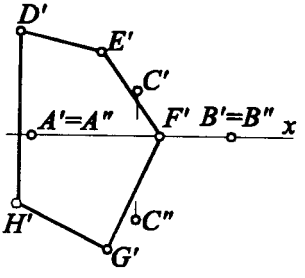


2.17 $\alpha(A,B,C)$



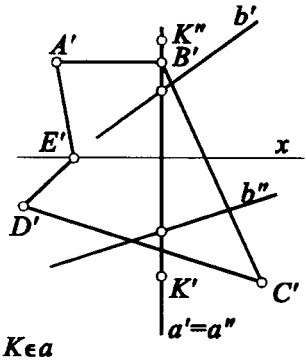
$H''G'' \parallel x$

2.18 $\alpha(A,B,C)$



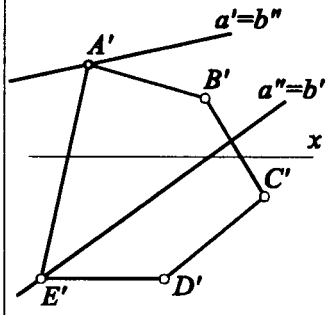
$D'H' \perp x$

2.19 $\alpha(a, b, K)$

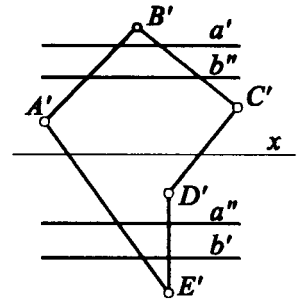


$K \in a$

2.20 $\alpha(a, b)$

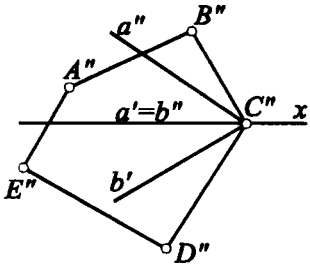


2.21 $\alpha(a, b)$

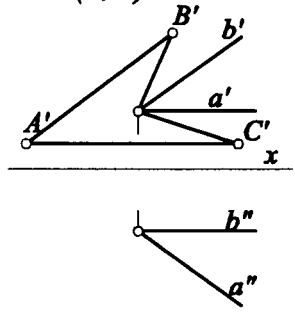


$D'E' \perp x$; $a', b', a'', b'' \parallel x$

2.22 $\alpha(a, b)$

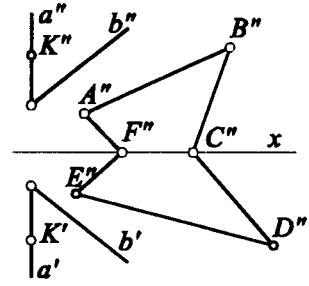


2.23 $\alpha(a, b)$



$a', b' \parallel x$

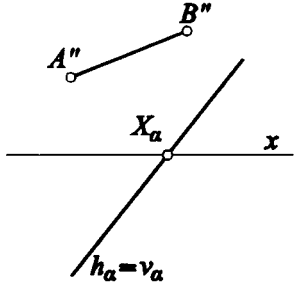
2.24 $\alpha(a, b)$



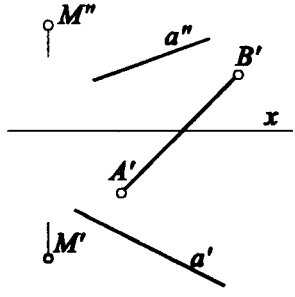
$K \in a$; $a \perp x$

Wyznaczyć rzuty równoległoboku leżącego na płaszczyźnie α, którego jednym bokiem jest odcinek *AB*.

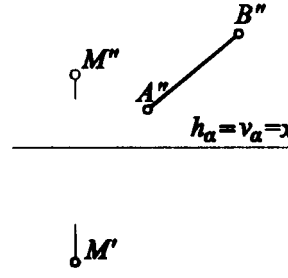
2.25 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



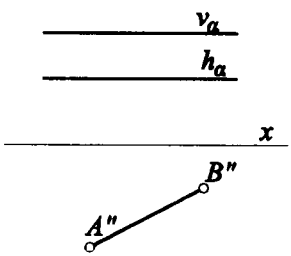
2.26 $\alpha(a, M)$



2.27 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha, M)$

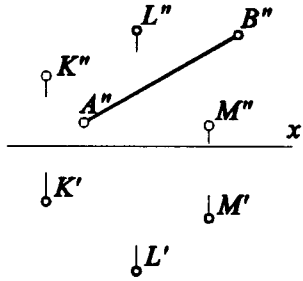


2.28 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

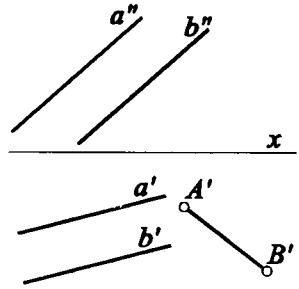


$h_\alpha, v_\alpha \parallel x$

2.29 $\alpha(K, L, M)$



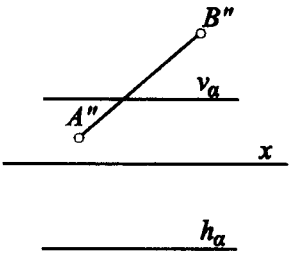
2.30 $\alpha(a, b)$



$a \parallel b$

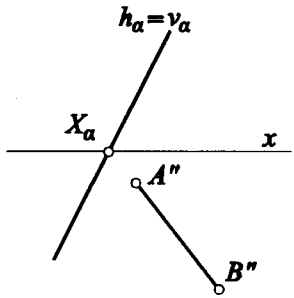
Wyznaczyć rzuty czworokąta $ABCD$ leżącego na płaszczyźnie α, którego bok CD znajduje się na płaszczyźnie π_1.

2.31 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

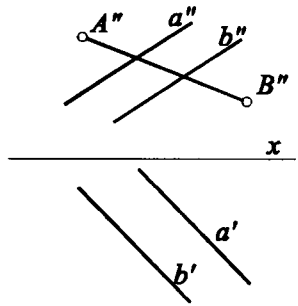


$h_\alpha, v_\alpha \parallel x$

2.32 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

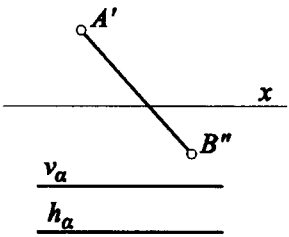


2.33 $\alpha(a, b)$



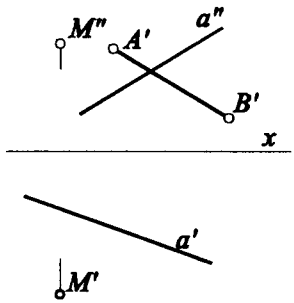
$a \parallel b$

2.34 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

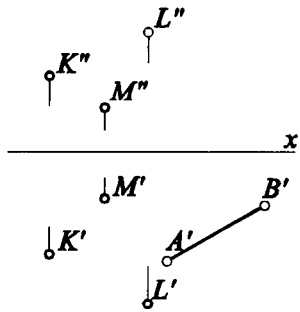


$h_\alpha, v_\alpha \parallel x$

2.35 $\alpha(a, M)$



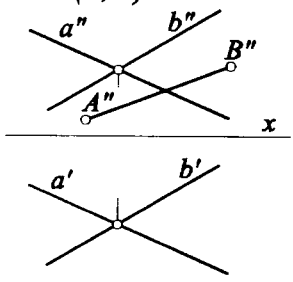
2.36 $\alpha(K, L, M)$



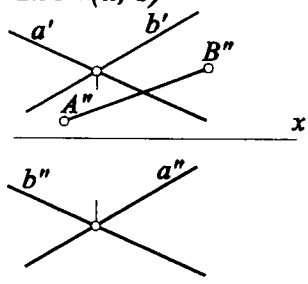
Dana jest płaszczyzna α oraz rzut pionowy (poziomy) boku AB wielokąta ABCDE leżącego na tej płaszczyźnie. Narysować drugi rzut tego wielokąta, wiedząc że wierzchołek C położony jest:

a) na rzutni π_1,

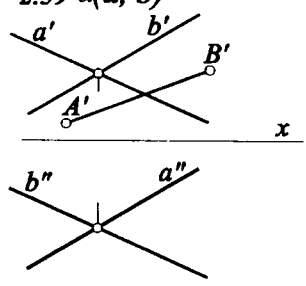
2.37 α(a, b)



2.38 α(a, b)

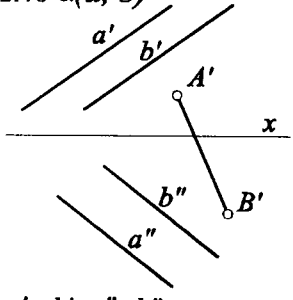


2.39 α(a, b)



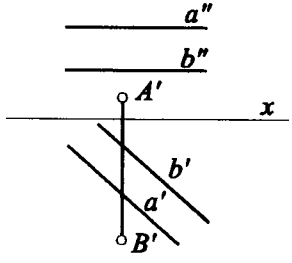
b) na rzutni π_2,

2.40 α(a, b)



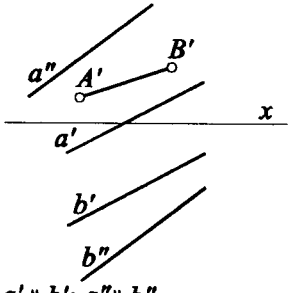
$a' \parallel b'$; $a'' \parallel b''$

2.41 α(a, b)



$a' \parallel b'$; $a'' \parallel b''$; $A'B' \perp x$

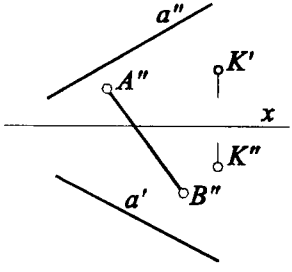
2.42 α(a, b)



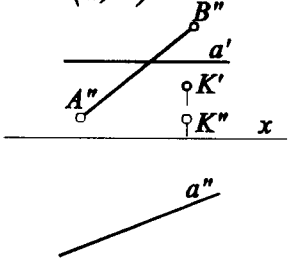
$a' \parallel b'$; $a'' \parallel b''$

c) na osi x.

2.43 α(a, K)

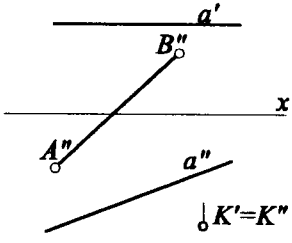


2.44 α(a, K)



$a' \parallel x$

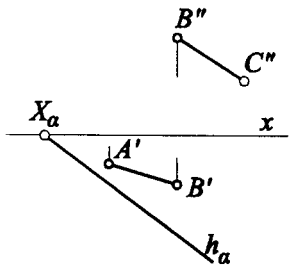
2.45 α(a, K)



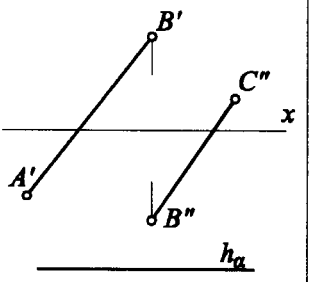
$a' \parallel x$

Dany jest ślad poziomy (pionowy) płaszczyzny α oraz rzuty punktu B należącego do płaszczyzny α. Uzupełnić rzuty figury.

2.46

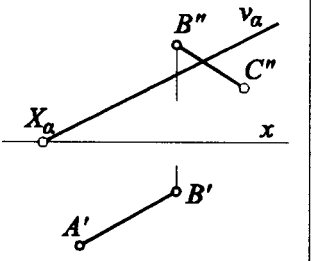


2.47

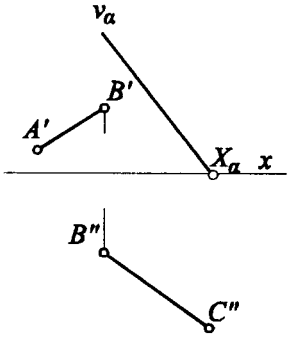


$h_\alpha \parallel x$

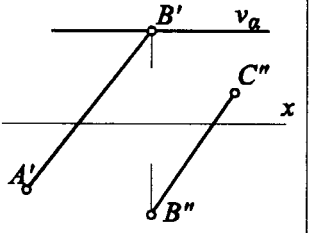
2.48



2.49

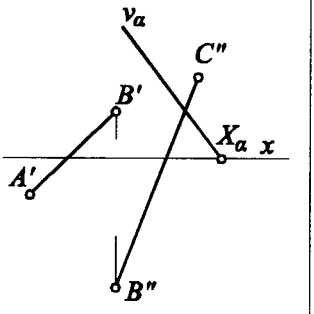


2.50

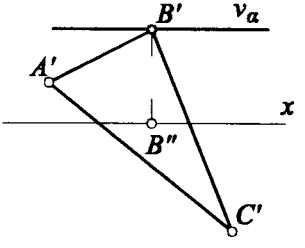


$v_\alpha \parallel x$

2.51

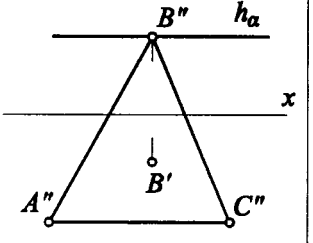


2.52



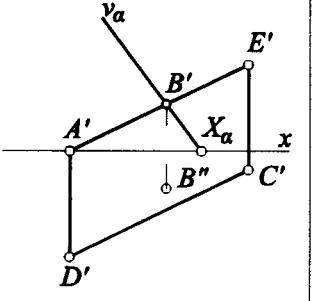
$v_\alpha \parallel x$

2.53



$h_\alpha \parallel x$

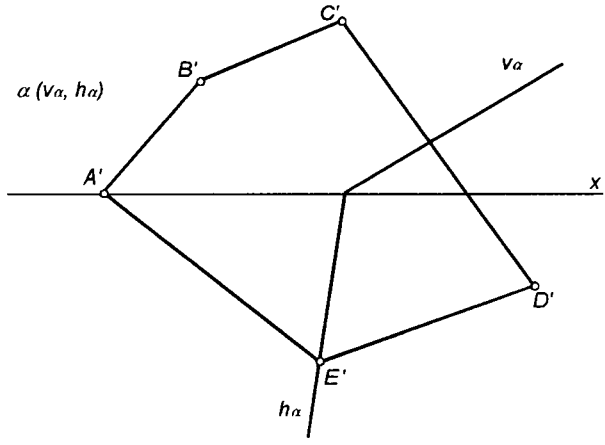
2.54

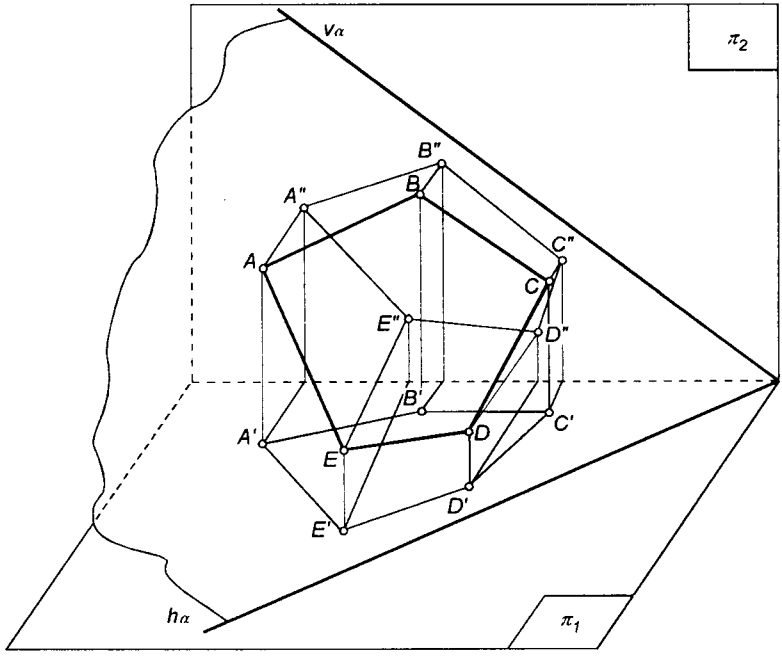


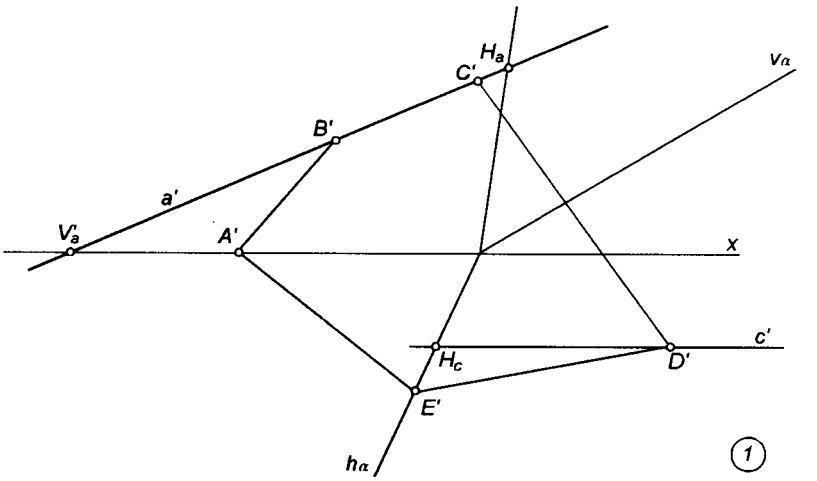
Ćwiczenie 2

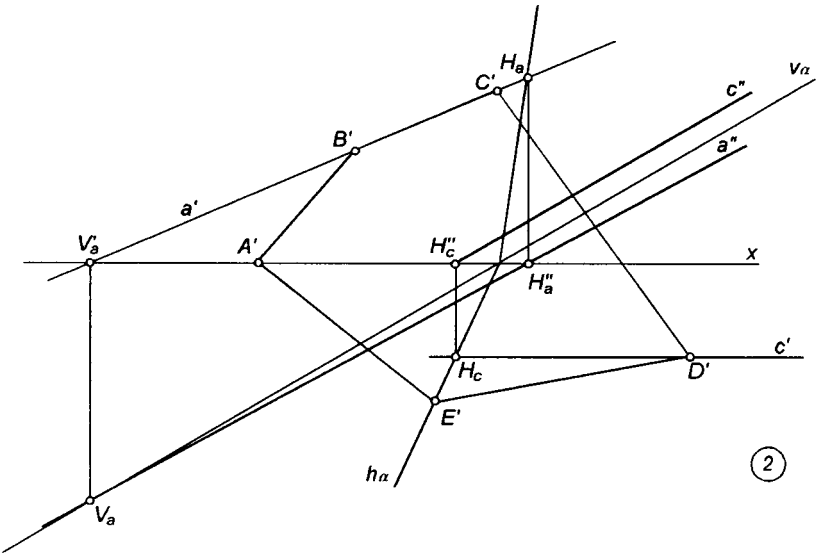
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

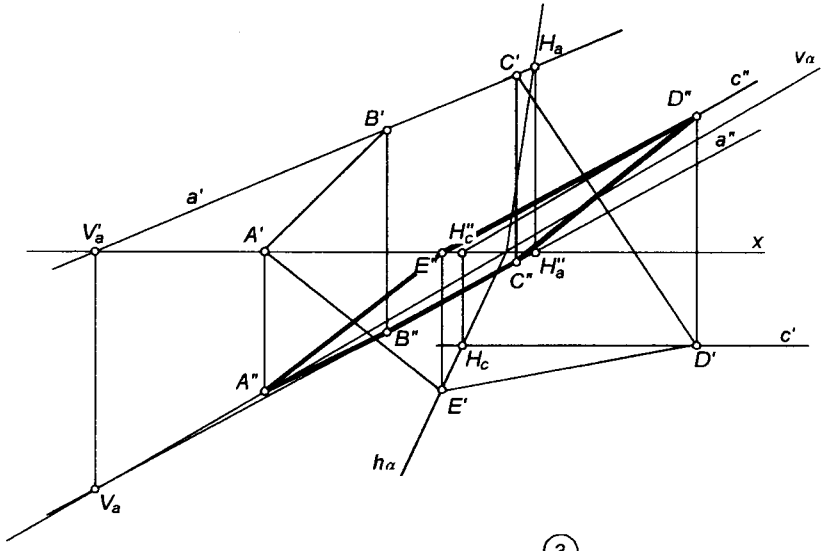
Wyznaczyć drugi rzut wielokąta leżącego na płaszczyźnie α.






H_a
C'
v_α
B'
a'
V'_a
A'
x
c'
H_c
D'
E'
h_α
1


H_a
C'
v_α
c''
B'
a''
a'
V'_a
A'
H''_c
x
H''_a
c'
H_c
D'
E'
h_α
2
V_a



3

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 2

1. Na danym rzucie wielokąta obieramy dwa sąsiadujące ze sobą rzuty wierzchołków B', C' i prowadzimy przez nie rzut poziomy a' prostej a. Na przecięciu się a' z osią x znajdujemy rzut poziomy V_a' śladu pionowego prostej a. Na przecięciu się a' ze śladem poziomym h_α płaszczyzny α znajdujemy natomiast ślad poziomy H_a tej prostej. Przez rzut kolejnego wierzchołka D' prowadzimy rzut poziomy c' prostej c ($c' \parallel x$). Na przecięciu się c' ze śladem h_α otrzymujemy ślad poziomy H_c *prostej czołowej* c (szczególnej prostej równoległej do rzutni pionowej π_2).

2. Na odnoszącej poprowadzonej z V_a' do przecięcia się ze śladem pionowym υ_α płaszczyzny α znajdujemy ślad pionowy V_a prostej a. Natomiast na odnoszącej poprowadzonej ze śladu H_a do przecięcia się z osią x znajdujemy rzut pionowy H_a'' śladu poziomego H_a prostej a. W podobny sposób postępujemy przy wyznaczaniu rzutu H_c''. Punkty V_a i H_a'' wyznaczają rzut poziomy a'' prostej a. Z punktu H_c'' prowadzimy równolegle do śladu υ_α rzut poziomy c'' prostej czołowej c.

3. Na odnoszących poprowadzonych z rzutów B', C' do przecięcia się z a'' znajdujemy rzuty pionowe B'', C'', a na odnoszącej prowadzonej z D' do przecięcia się z c'' znajdujemy rzut D''. Z położenia rzutu A' wynika, że rzut A'' znajduje się na śladzie υ_α. Położenie rzutu E' wskazuje zaś na to, że rzut E'' znajduje się na osi x. Łącząc rzuty A'', B'', C'', D'', E'' otrzymujemy poszukiwany drugi rzut wielokąta.

Uwaga: Powyżej podano jedynie jeden z możliwych sposobów rozwiązania zadania. Jako ogólną zasadę należy przyjąć stosowanie najprostszych metod rozwiązywania, które dają w efekcie zawsze pożądaną przejrzystość wykonywanego rysunku.

Ćwiczenie 3

ELEMENTY WSPÓLNE

Można wyróżnić następujące elementy wspólne:
a) punkt przecięcia się dwóch prostych,
b) punkt przebicia płaszczyzny prostą,
c) krawędź dwóch płaszczyzn.

Znajdowanie elementów wspólnych należy do elementarnych konstrukcji w geometrii wykreślnej, wykorzystywanych podczas rozwiązywania wielu bardziej złożonych zadań.

1. Punkt przebicia prostą płaszczyzny rzutującej

Rzut każdego punktu leżącego na *płaszczyźnie rzutującej*, tzn. prostopadłej do rzutni, należy do leżącego na tej rzutni śladu płaszczyzny rzutującej. Z powyższego wynika, że również rzut punktu przebicia płaszczyzny rzutującej prostą będzie leżał na śladzie tej płaszczyzny (na śladzie poziomym płaszczyzny poziomo-rzutującej lub na śladzie pionowym płaszczyzny pionowo-rzutującej). Mając znaleziony jeden rzut punktu przebicia łatwo odnajdujemy drugi rzut, wykorzystując prostą odnoszącą.

2. Krawędź płaszczyzny rzutującej z płaszczyzną dowolną

Wyznaczenie krawędzi, tj. wspólnej prostej dwóch płaszczyzn, sprowadza się do znalezienia dwóch wspólnych punktów tych płaszczyzn. W tym celu znajdujemy rzuty punktów przebicia płaszczyzny rzutującej dwiema prostymi (przecinającymi się lub równoległymi) należącymi do płaszczyzny dowolnej (patrz p.1). Znalezione dwa rzuty punktów przebicia pozwalają wyznaczyć jednoznacznie rzuty poszuki-

wanej krawędzi (w przypadku płaszczyzny poziomo-rzutującej rzut poziomy krawędzi jednoczy się ze śladem poziomym tej płaszczyzny, a w przypadku płaszczyzny pionowo-rzutującej rzut pionowy krawędzi jednoczy się ze śladem pionowym tej płaszczyzny).

3. Punkt przebicia prostą płaszczyzny dowolnej

Znalezienie punktu przebicia dowolnie leżącej płaszczyzny wymaga na ogół wprowadzenia dodatkowej płaszczyzny przechodzącej przez tę prostą. W celu ułatwienia konstrukcji, jako dodatkową obieramy najczęściej płaszczyznę rzutującą. Kolejnym krokiem jest znalezienie krawędzi między płaszczyzną daną i płaszczyzną rzutującą, a następnie na przecięciu krawędzi z daną prostą znajdujemy punkt przebicia.

4. Krawędź dwóch płaszczyzn dowolnych

Wyznaczenie krawędzi dwóch płaszczyzn wymaga w ogólnym przypadku znalezienia dwóch punktów leżących równocześnie na obu rozpatrywanych płaszczyznach. Każdy z nich jest punktem przebicia jednej płaszczyzny prostą należącą do drugiej płaszczyzny. Jak łatwo zauważyć, stosując dwukrotnie opisany w punkcie 3 sposób, tj. prowadząc płaszczyzny rzutujące przez dwie proste leżące na jednej płaszczyźnie, znajdujemy punkty przebicia tymi prostymi drugiej płaszczyzny, a punkty te z kolei wyznaczą krawędź płaszczyzn.

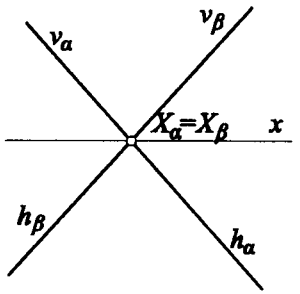
W przypadku płaszczyzn danych śladami punkty przecięcia się śladów leżących na tej samej rzutni pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie punktów krawędzi, ponieważ punkty te są jednocześnie śladami krawędzi. Nie jest wymagane więc wprowadzenie dodatkowych płaszczyzn. Nieco inaczej postępujemy jedynie w przypadku śladów równoległych do osi rzutów x (ślady nie przecinają się). Wprowadzamy dwie dodatkowe proste (leżące na jednej płaszczyźnie, bądź po jednej prostej na każdej z płaszczyzn), przez które prowadzimy płaszczyzny rzutujące, a następnie wyznaczamy punkty przebicia i ostatecznie znajdujemy krawędź płaszczyzn.

Gdy obie płaszczyzny są prostopadle do rzutni, to ich krawędź jest także prostopadła do tej rzutni, a jeden z rzutów krawędzi jest punktem.

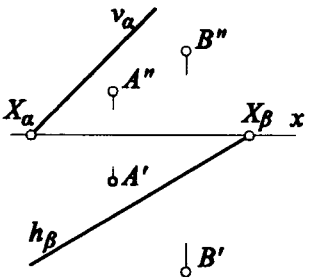
ZADANIA. Ćwiczenie 3

Wyznaczyć krawędź przecięcia się płaszczyzn α i β.

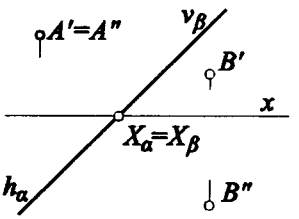
3.1 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$



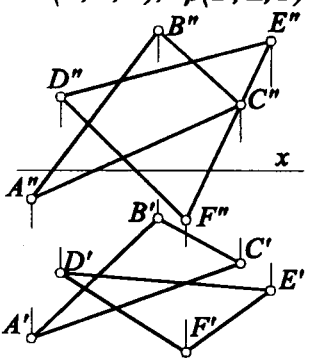
3.2 $\alpha(v_\alpha, A)$; $\beta(h_\beta, B)$



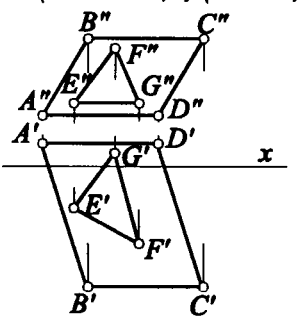
3.3 $\alpha(v_\alpha, A)$; $\beta(h_\beta, B)$



3.4 $\alpha(A, B, C)$; $\beta(D, E, F)$

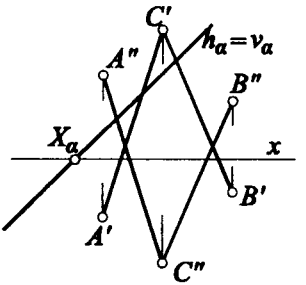


3.5 $\alpha(A, B, C, D)$; $\beta(E, F, G)$

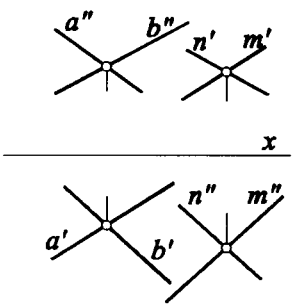


A'D', A''D'', B'C', B''C'' ∥ x

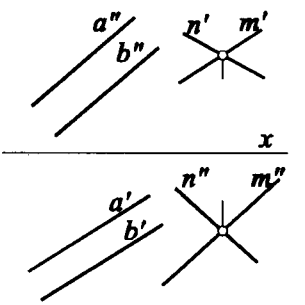
3.6 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $\beta(A, B, C)$



3.7 $\alpha(a, b)$; $\beta(m, n)$

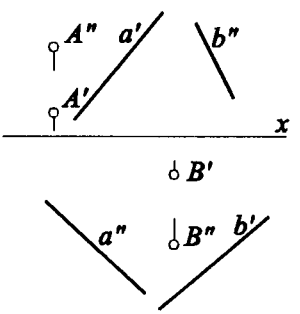


3.8 $\alpha(a, b)$; $\beta(m, n)$

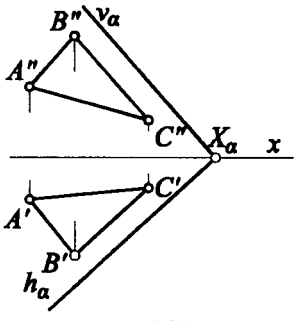


a ∥ b

3.9 $\alpha(a, A)$; $\beta(b, B)$

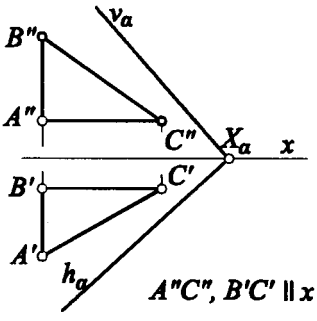


3.10 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(A, B, C)$



$B'C' \parallel h_\alpha$; $B''C'' \parallel v_\alpha$

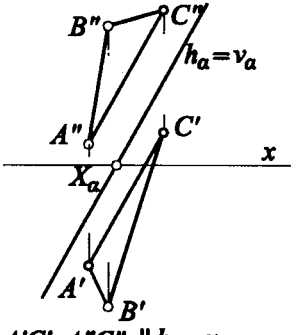
3.11 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(A, B, C)$



$A''C''$, $B'C' \parallel x$

$A'B'$, $A''B'' \perp x$

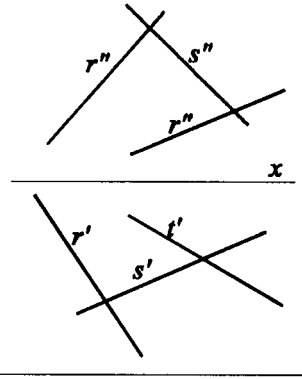
3.12 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(A, B, C)$



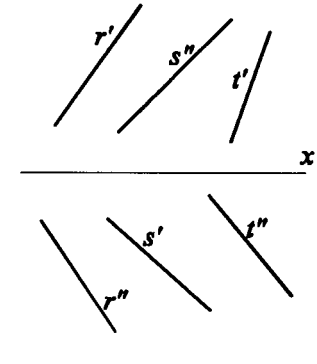
$A'C'$, $A''C'' \parallel h_\alpha = v_\alpha$

Poprowadzić prostą przecinającą trzy proste skośne (rzuty tej prostej nie powinny pokrywać się z danymi).

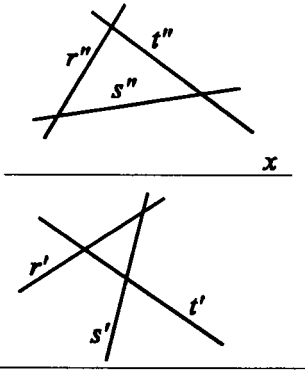
3.13



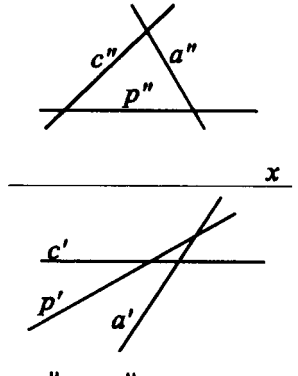
3.14



3.15

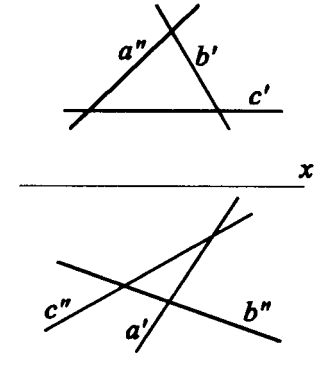


3.16



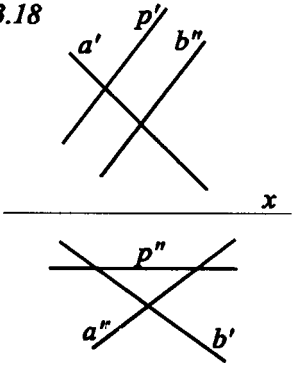
$p \parallel \pi_1$; $c \parallel \pi_2$

3.17



$c \parallel \pi_2$

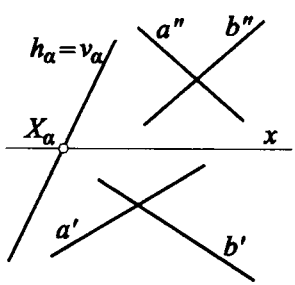
3.18



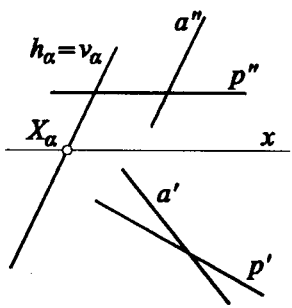
$p \parallel \pi_1$

Dana jest płaszczyzna α i dwie proste skośne. Przez dowolnie obrany punkt A poprowadzić płaszczyznę β tak, aby krawędź $k=\alpha\cap\beta$ przecinała obie proste skośne.

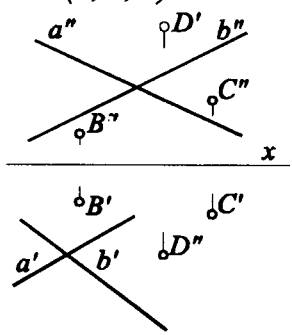
3.19 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



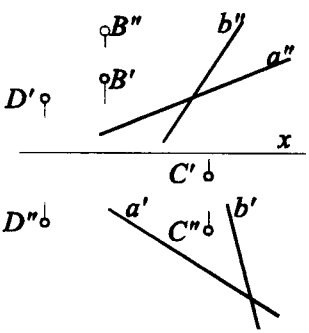
3.20 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



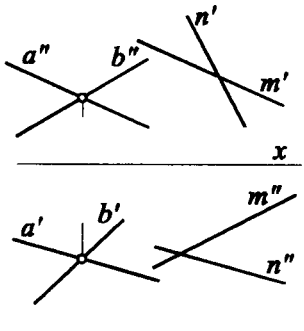
3.21 $\alpha(B, C, D)$



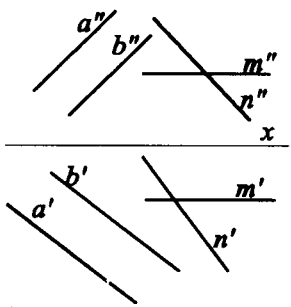
3.22 $\alpha(B, C, D)$



3.23 $\alpha(a, b)$



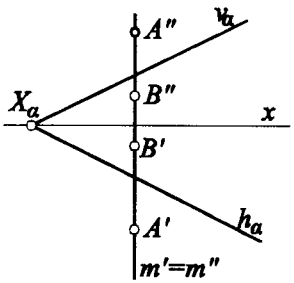
3.24 $\alpha(a, b)$



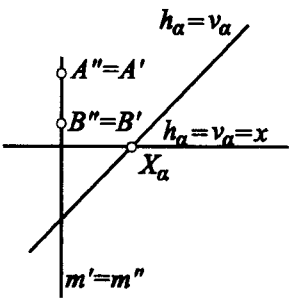
$a' \parallel b'$; $a'' \parallel b''$; $m \parallel x$

Wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny α prostą m. Określić widoczność prostej przy założeniu, że płaszczyzna α jest nieprzezroczysta.

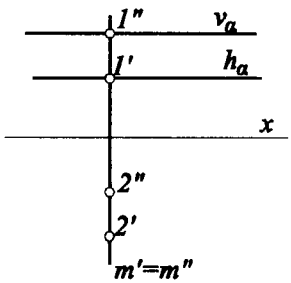
3.25 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $m(A, B)$



3.26 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $m(A, B)$

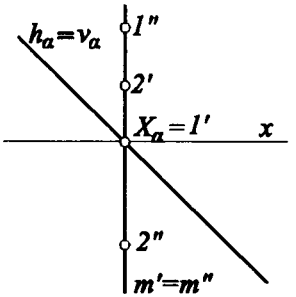


3.27 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $m(1, 2)$

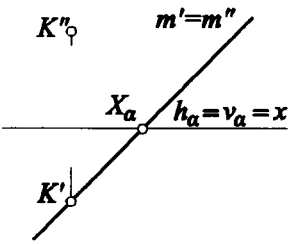


$h_\alpha, v_\alpha \parallel x$

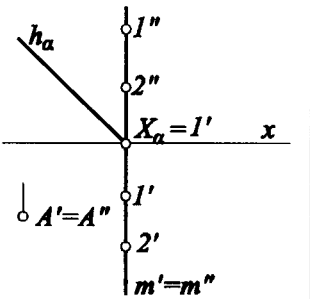
3.28 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $m(1, 2)$



3.29 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha, K)$

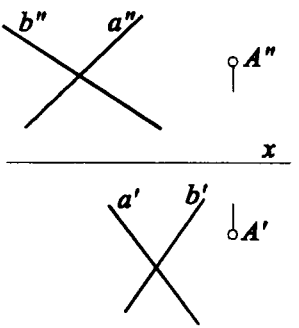


3.30 $\alpha(h_\alpha, A)$; $m(1, 2)$

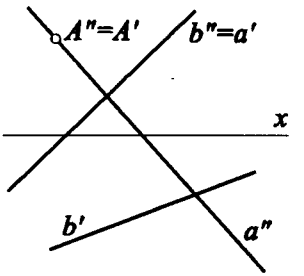


Narysować prostą przechodzącą przez punkt A i przecinającą proste a i b.

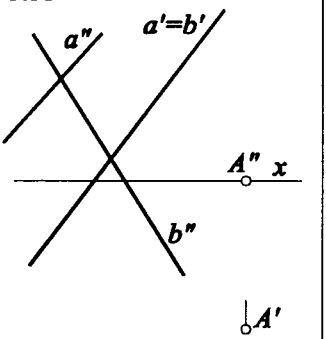
3.31



3.32

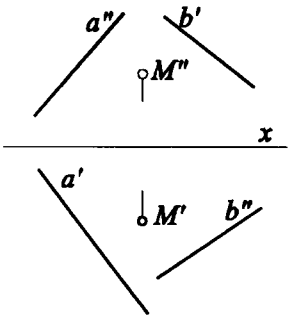


3.33

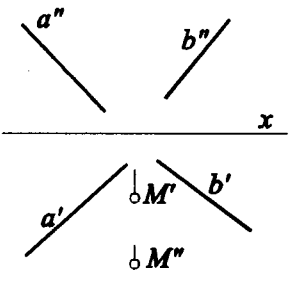


Przez proste a i b poprowadzić dwie płaszczyzny w taki sposób, aby ich krawędź przecięcia zawierała punkt M.

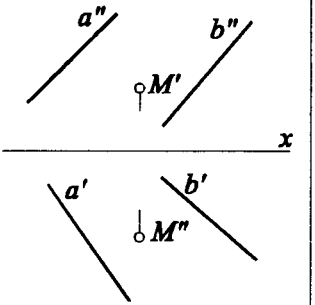
3.34



3.35



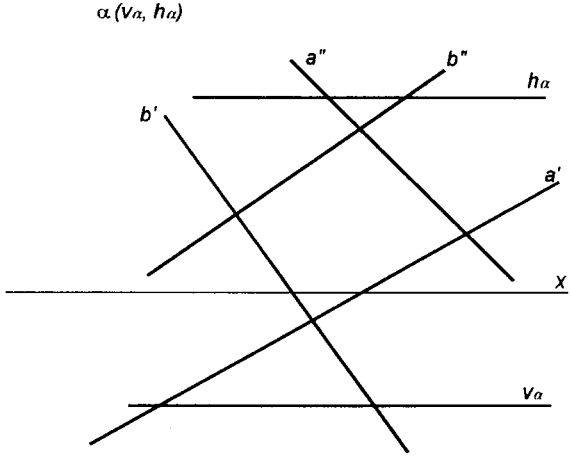
3.36

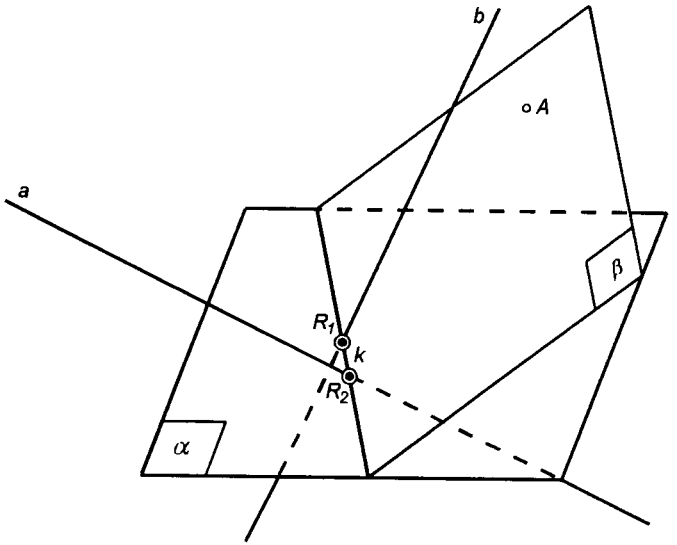


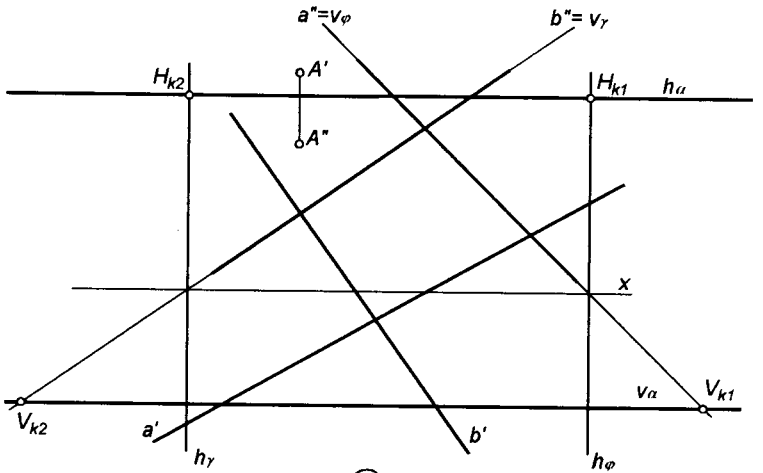
Ćwiczenie 3

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

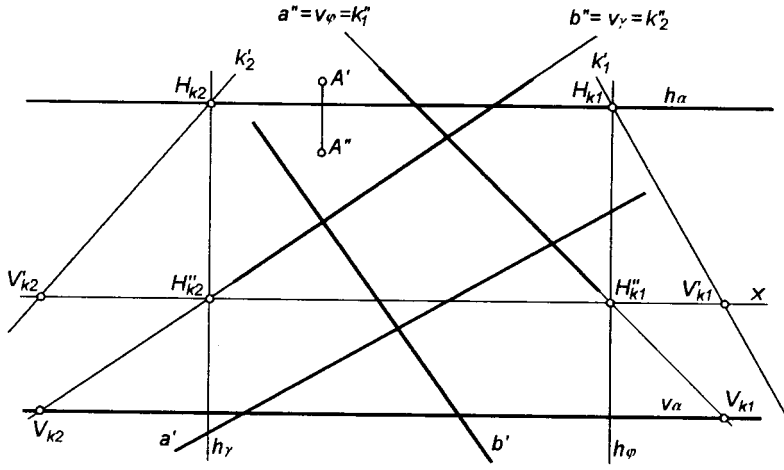
Dana jest płaszczyzna α i dwie proste skośne *a*, *b*. Przez dowolnie obrany punkt *A poprowadzić* płaszczyznę β tak,aby krawędź $k(\alpha \times \beta)$ przecinała obie proste skośne.



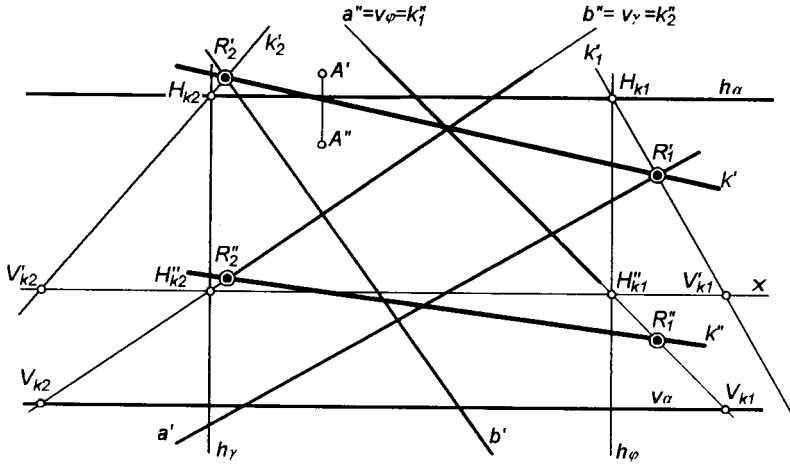




1



2



3

$\beta(A_1, R_1, R_2)$

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 3

1. Obieramy dowolnie rzuty punktu A. Przez prostą a prowadzimy płaszczyznę pionowo-rzutującą φ, a przez prostą b płaszczyznę pionowo-rzutującą γ. Na przecięciu się śladów h_α i h_φ znajdujemy ślad poziomy H_{k1} krawędzi k_1 powstałej z przecięcia się dwóch płaszczyzn: danej płaszczyzny α i pomocniczej φ. Ślad pionowy V_{k1} tej krawędzi znajdujemy na przecięciu śladów υ_α i υ_φ. W ten sam sposób znajdujemy ślad poziomy H_{k2} i ślad pionowy V_{k2} krawędzi k_2 powstałej z przecięcia się płaszczyzn α i γ.

2. Na odnoszących poprowadzonych ze śladów H_{k1} i V_{k1} do przecięcia się z osią x znajdujemy rzuty tych śladów, odpowiednio H_{k1}'' i V_{k1}'. W podobny sposób znajdujemy rzuty H_{k2}'' i V_{k2}' śladów krawędzi k_2. Otrzymane ślady krawędzi oraz rzuty tych śladów wykorzystujemy do wyznaczenia rzutów krawędzi k_1 i k_2. Należy zauważyć, że w tym przypadku rzuty pionowe każdej krawędzi będą pokrywały się z odpowiednimi śladami pionowymi płaszczyzn rzutujących, otrzymujemy więc odpowiednio $k_1'' = \upsilon_\varphi$ oraz $k_2'' = \upsilon_\gamma$.

3. Na przecięciu prostej a z krawędzią k_1 znajduje się punkt R_1 będący miejscem, w którym prosta a przebija płaszczyznę α (znajdujemy $R_1' = a' \cap k_1'$, a następnie na odnoszącej poprowadzonej z R_1' do k_1'' znajdujemy R_1''). Analogicznie $R_2 = b \cap k_2$ jest punktem przebicia płaszczyzny γ prostą b. Punkty A, R_1, R_2 wyznaczają płaszczyznę β. Krawędź $k = \alpha \cap \beta$ spełnia warunki zadania, ponieważ przecina proste a i b. Należy podkreślić, że ostateczne rozwiązanie będzie zależało jedynie od położenia punktu A, ponieważ w każdym przypadku płaszczyzna będąca rozwiązaniem zadania musi przechodzić przez punkty przebicia R_1 i R_2.

Uwaga: Zasadę rozwiązania powyższego zadania pokazano na rysunku poglądowym.

Ćwiczenie 4

ELEMENTY RÓWNOLEGŁE I PROSTOPADŁE

1. Równoległość prostej i płaszczyzny

Jeżeli prosta jest równoległa do prostej leżącej na płaszczyźnie, to jest również równoległa do tej płaszczyzny. Z twierdzenia tego wynika sposób konstruowania prostej równoległej do danej płaszczyzny i płaszczyzny równoległej do danej prostej.

2. Równoległość dwóch płaszczyzn

Jeżeli dwie proste przecinające się i leżące na tej samej płaszczyźnie są równoległe do drugiej płaszczyzny, to obie te płaszczyzny są również do siebie równoległe.

Jeżeli jednoimienne ślady dwóch płaszczyzn są do siebie równoległe, to równoległe do siebie są także te płaszczyzny.

Krawędzie dwóch płaszczyzn równoległych z płaszczyzną do nich nierównoległą są do siebie równoległe.

3. Prostopadłość prostych

Jeżeli przynajmniej jedna z dwóch prostych prostopadłych jest równoległa do rzutni lub leży na tej rzutni, a druga nie jest prostopadła do tej rzutni, to rzuty tych prostych na tę rzutnię są również prostopadłe (konstrukcja dwóch dowolnych pro-

stych prostopadłych wymaga znajomości zagadnienia prostopadłości prostej i płaszczyzny).

W ogólnym przypadku dwóch prostych o położeniu dowolnym (tj. nie prostopadłym i nie równoległym do rzutni) wzajemna prostopadłość rzutów nie oznacza prostopadłości prostych.

4. Prostopadłość prostej i płaszczyzny

Jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych leżących na płaszczyźnie, to ta prosta jest także prostopadła do tej płaszczyzny (tzn., że jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie). Z punktu 3 wynika, że przy konstruowaniu prostej prostopadłej do płaszczyzny najlepiej jest wykorzystać dwie proste szczególne, tj. poziomą i czołową, z których każda leży na tej płaszczyźnie.

W przypadku płaszczyzny danej śladami rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny będą prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny (ślady są szczególnym przypadkiem prostych – czołowej i poziomej.

Dwie dowolnie leżące proste będą do siebie prostopadłe, jeżeli jedna z nich leży na płaszczyźnie prostopadłej do drugiej prostej.

5. Prostopadłość dwóch płaszczyzn

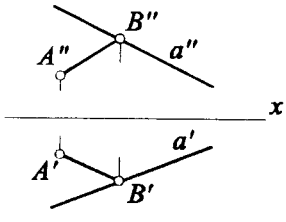
Przy zadanej płaszczyźnie prostopadłą do niej drugą płaszczyznę wyznaczamy dwoma sposobami:

1) na płaszczyźnie danej obrać dowolną prostą i poprowadzić płaszczyznę do niej prostopadłą,
2) poprowadzić prostą prostopadłą do danej płaszczyzny (wówczas każda płaszczyzna poprowadzona przez tę prostą będzie prostopadła do danej płaszczyzny).

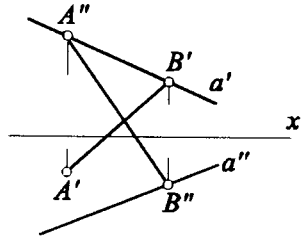
ZADANIA. Ćwiczenie 4

Zbudować trójkąt prostokątny *ABC,* mając daną przyprostokątną *AB* i wiedząc, że przeciwprostokątna *BC* leży na prostej *a*.

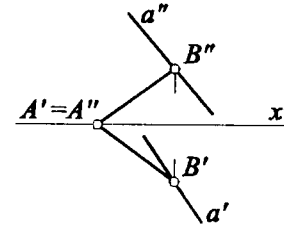
4.1



4.2

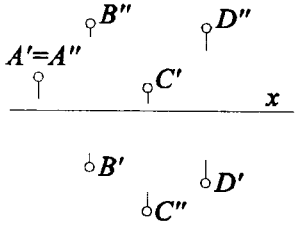


4.3

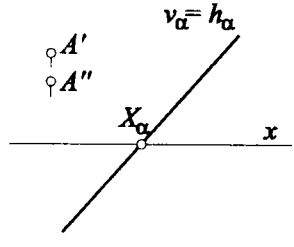


Znaleźć punkt symetryczny do punktu *A* względem płaszczyzny *α*.

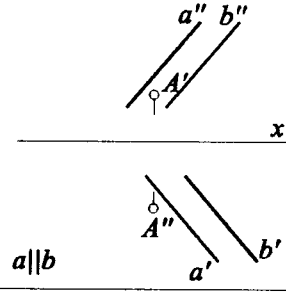
4.4 $\alpha(B,C,D)$



4.5 $\alpha(v_\alpha, h_\alpha)$

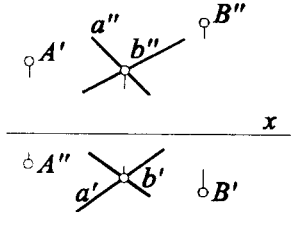


4.6 $\alpha(a,b)$

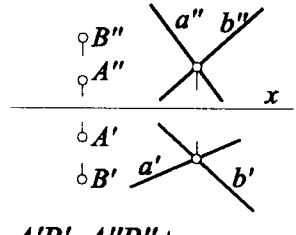


Okreslić przebieg promienia wychodzącego z punktu *A* i przechodzącego przez punkt *B* po odbiciu od płaszczyzny *α*.

4.7 $\alpha(a,b)$

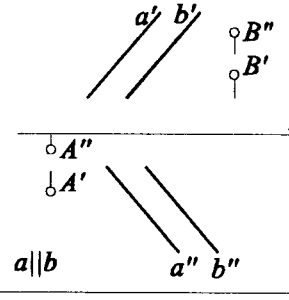


4.8 $\alpha(a,b)$



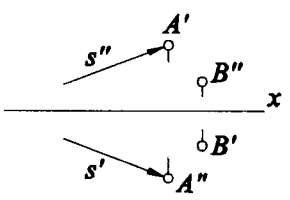
$A'B', A''B'' \perp x$

4.9 $\alpha(a,b)$

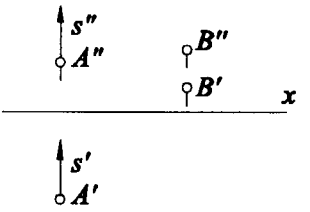


Punkt A przemieszcza się w kierunku s ze stałą prędkością i spotyka się z punktem B, który rozpoczyna ruch w tym samym czasie i z taką samą prędkością co punkt A. Wyznaczyć kierunek ruchu punktu B.

4.10

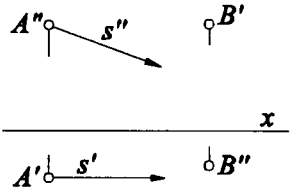


4.11



$s', s'' \perp x$

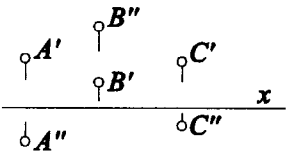
4.12



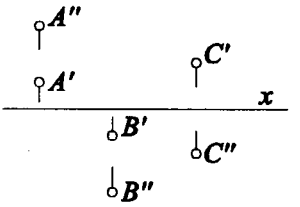
$s' \parallel x$

Wyznaczyć zbiór punktów równo oddalonych od punktów A, B, C.

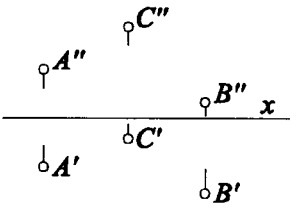
4.13



4.14

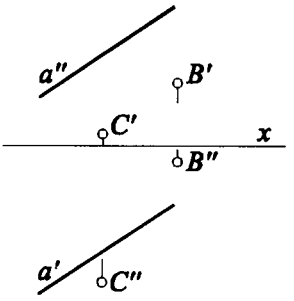


4.15

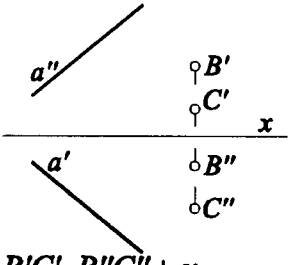


Na prostej a znaleźć punkt równo oddalony od punktów B, C.

4.16

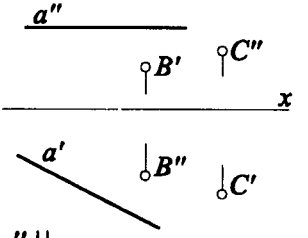


4.17



$B'C', B''C'' \perp x$

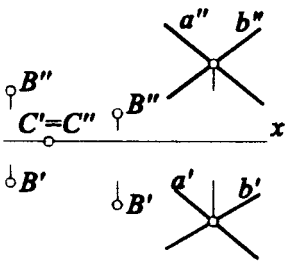
4.18



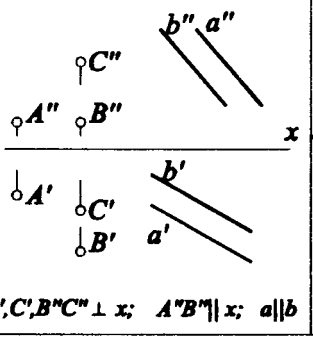
$a'' \parallel x$

Na płaszczyźnie α znaleźć punkt równo oddalony od punktów A, B, C.

4.19 $\alpha(a, b)$

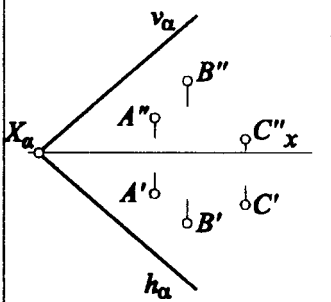


4.20 $\alpha(a, b)$



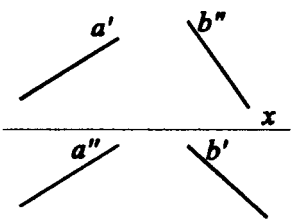
$B', C', B''C'' \perp x$; $A''B'' \parallel x$; $a \parallel b$

4.21 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

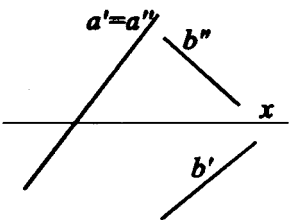


Wyznaczyć prostą prostopadłą do prostych skośnych a i b oraz przecinającą je.

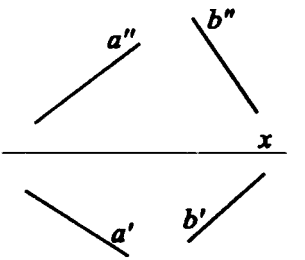
4.22



4.23

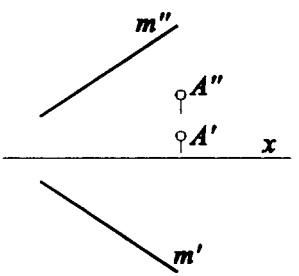


4.24

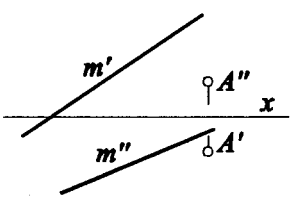


Przez punkt A poprowadzić prostą prostopadłą do danej prostej m i przecinającą ją.

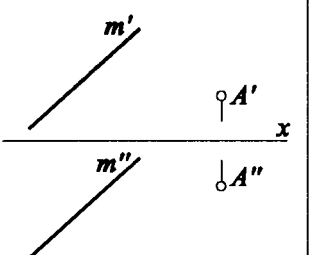
4.25



4.26

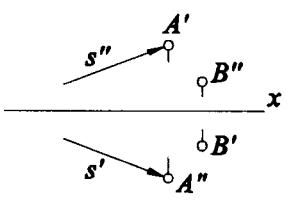


4.27

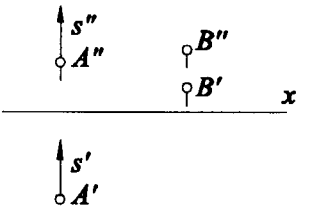


Punkt A przemieszcza się w kierunku s ze stałą prędkością i spotyka się z punktem B, który rozpoczyna ruch w tym samym czasie i z taką samą prędkością co punkt A. Wyznaczyć kierunek ruchu punktu B.

4.10

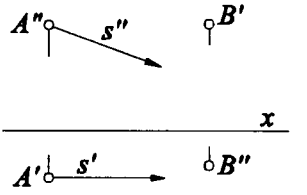


4.11



$s', s'' \perp x$

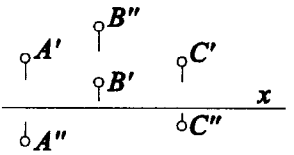
4.12



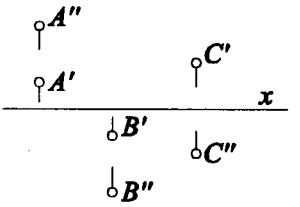
$s' \parallel x$

Wyznaczyć zbiór punktów równo oddalonych od punktów A, B, C.

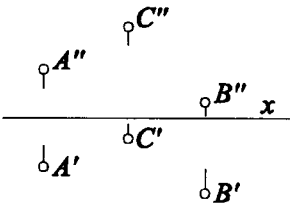
4.13



4.14

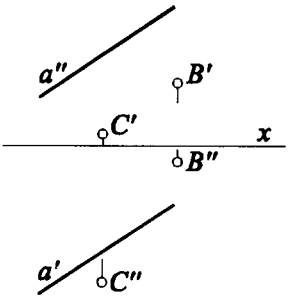


4.15

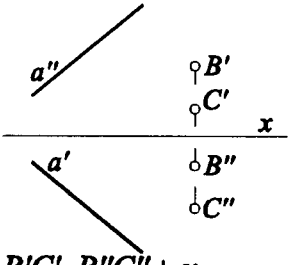


Na prostej a znaleźć punkt równo oddalony od punktów B, C.

4.16

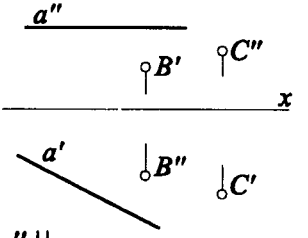


4.17



$B'C', B''C'' \perp x$

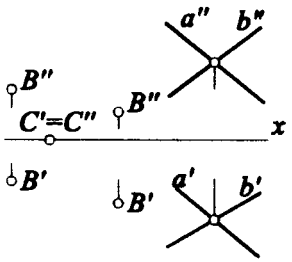
4.18



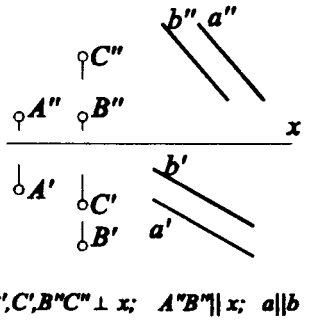
$a'' \parallel x$

Na płaszczyźnie α znaleźć punkt równo oddalony od punktów A, B, C.

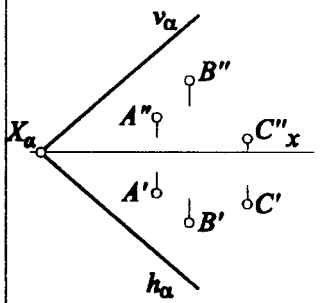
4.19 $\alpha(a, b)$



4.20 $\alpha(a, b)$

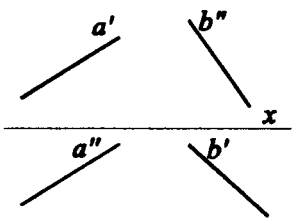


4.21 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

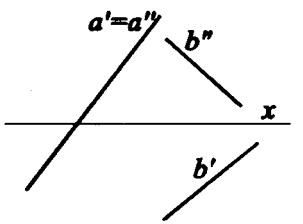


Wyznaczyć prostą prostopadłą do prostych skośnych a i b oraz przecinającą je.

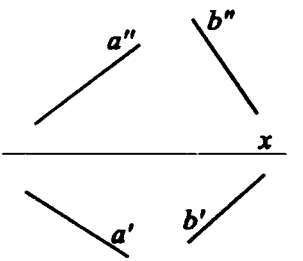
4.22



4.23

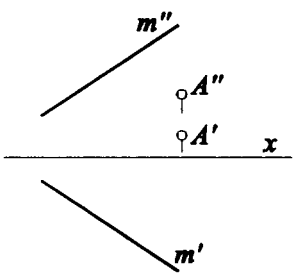


4.24

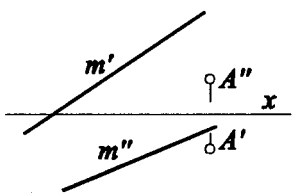


Przez punkt A poprowadzić prostą prostopadłą do danej prostej m i przecinającą ją.

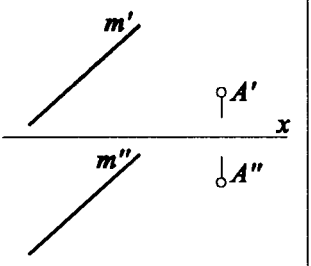
4.25



4.26

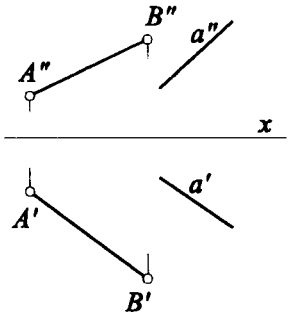


4.27

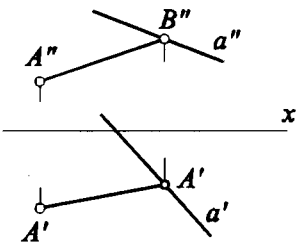


Znaleźć na prostej a punkt równo oddalony od końców odcinka AB.

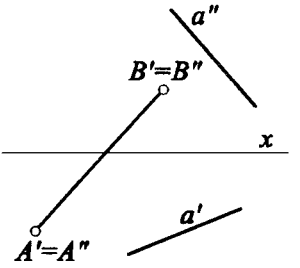
4.28



4.29

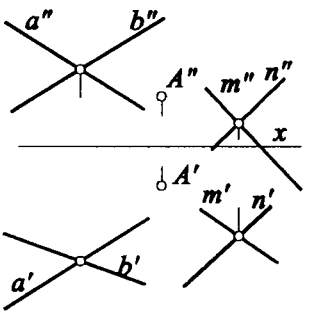


4.30

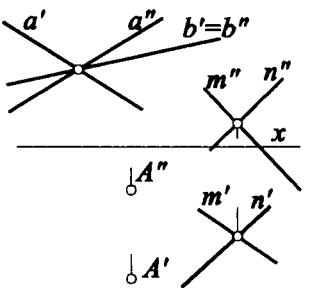


Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do dwóch płaszczyzn α i β .

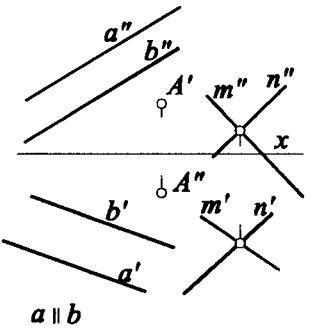
4.31 $\alpha(a, b); \beta(m, n)$



4.32 $\alpha(a, b); \beta(m, n)$

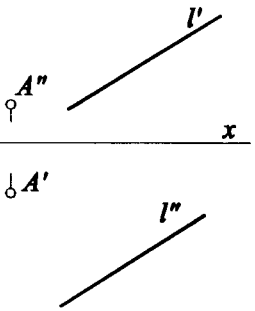


4.33 $\alpha(a, b); \beta(m, n)$

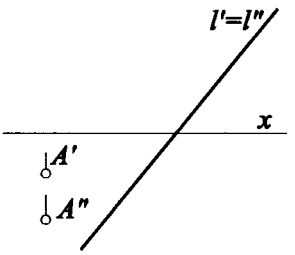


Wyznaczyć kierunek wektora prędkości punktu A krążącego wokół prostej l .

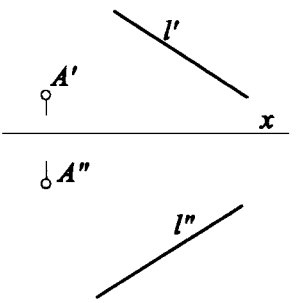
4.34



4.35

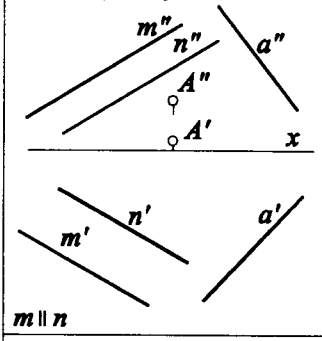


4.36

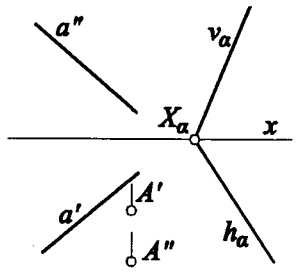


Przez punkt A poprowadzić prostą prostopadłą do prostej a i równoległą do płaszczyzny α.

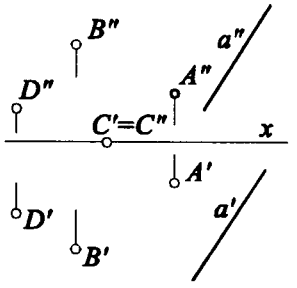
4.37 $\alpha(m, n)$



4.38 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

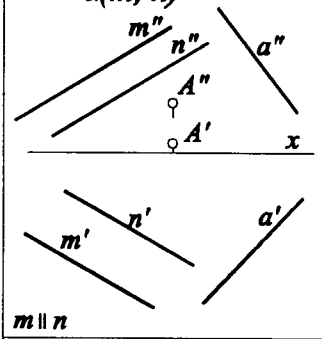


4.39 $\alpha(D, B, C)$

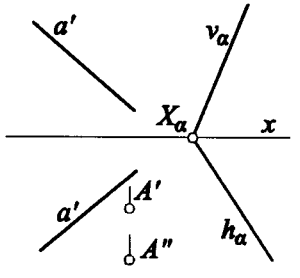


Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę równoległą do prostej a i prostopadłą do płaszczyzny α.

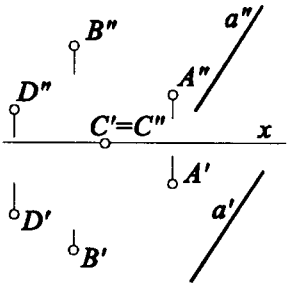
4.40 $\alpha(m, n)$



4.41 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

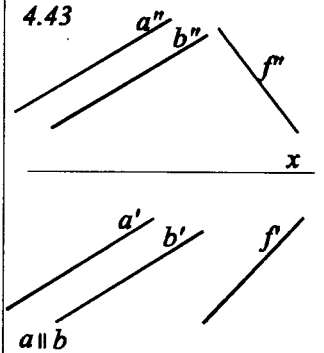


4.42 $\alpha(D, B, C)$

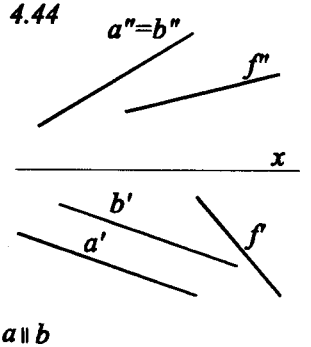


Dane są dwie proste równoległe a i b oraz skośna do nich prosta f. Wyznaczyć na prostej f punkt równo oddalony od prostych a i b.

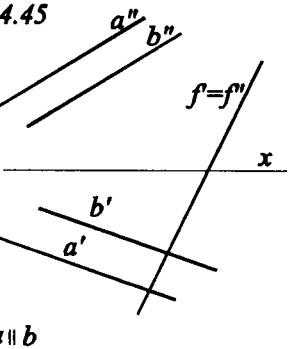
4.43



4.44

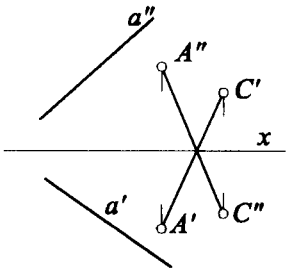


4.45

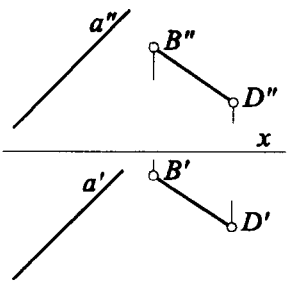


Znaleźć rzuty rombu *ABCD*, mając dany rzut przekątnej i wiedząc, że jeden z wierzchołków leży na prostej *a*.

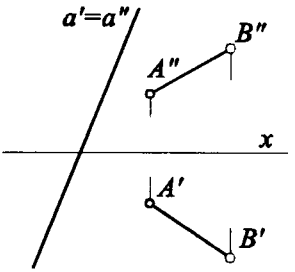
4.46



4.47

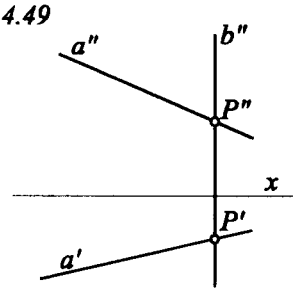


4.48



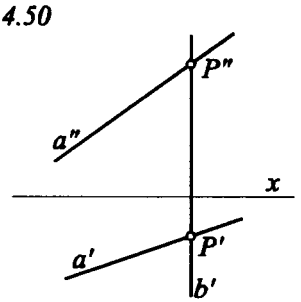
Dana jest prosta *a* oraz jeden rzut przecinającej ją prostej $b \perp a$.
Znaleźć drugi rzut prostej *b* oraz jednoznacznie określić jej przebieg.

4.49



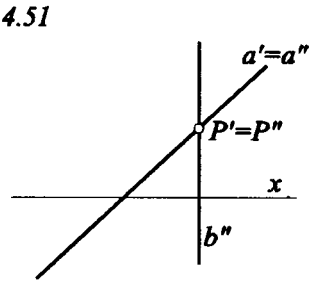
$b'' \perp x$

4.50



$b' \perp x$

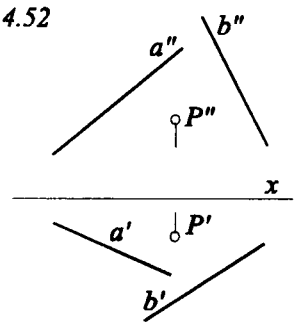
4.51



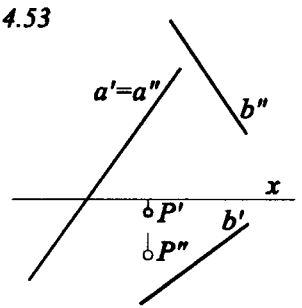
$b'' \perp x$

Dane są dwie proste *a* i *b* oraz punkt *P*. Przez punkt *P* poprowadzić prostą prostopadłą do *a* i przecinającą *b*.

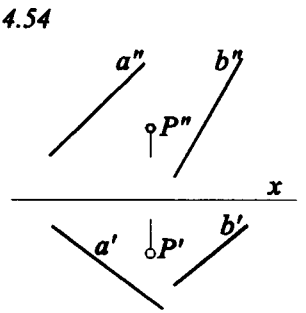
4.52



4.53

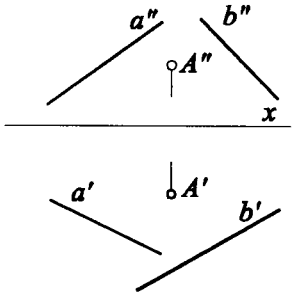


4.54

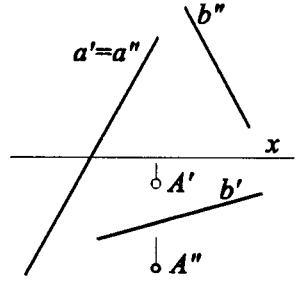


Przez punkt A poprowadzić prostą prostopadłą do dwóch prostych skośnych a i b.

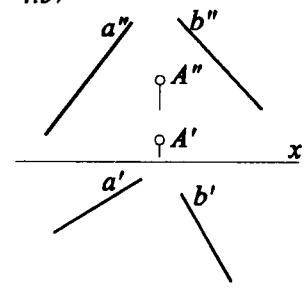
4.55



4.56

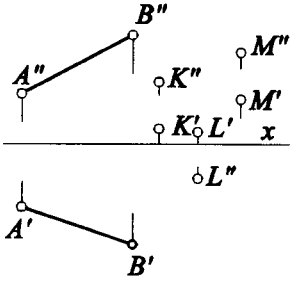


4.57

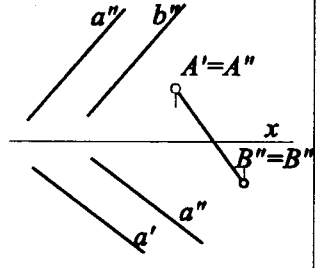


Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka AB na płaszczyznę α.

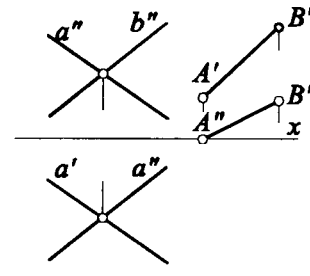
4.58 $\alpha(K, L, M)$



4.59 $\alpha(a, b)$

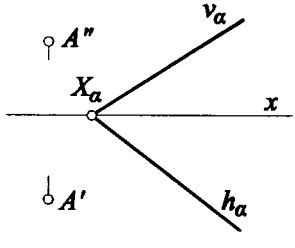


4.60 $\alpha(a, b)$

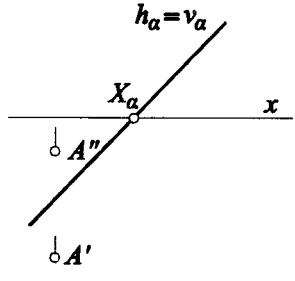


Przez punkt A poprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny α oraz płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α.

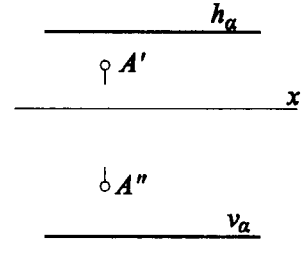
4.61 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



4.62 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

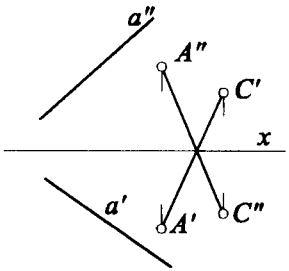


4.63 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

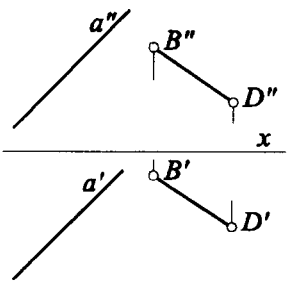


Znaleźć rzuty rombu *ABCD*, mając dany rzut przekątnej i wiedząc, że jeden z wierzchołków leży na prostej *a*.

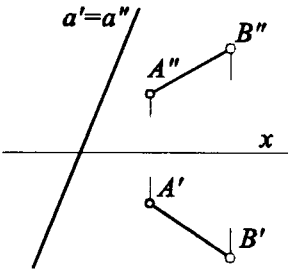
4.46



4.47

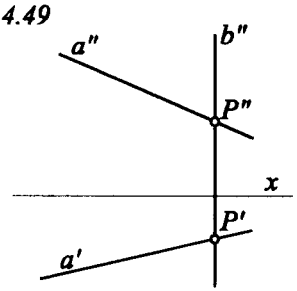


4.48



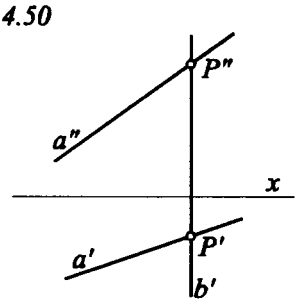
Dana jest prosta *a* oraz jeden rzut przecinającej ją prostej $b \perp a$.
Znaleźć drugi rzut prostej *b* oraz jednoznacznie określić jej przebieg.

4.49



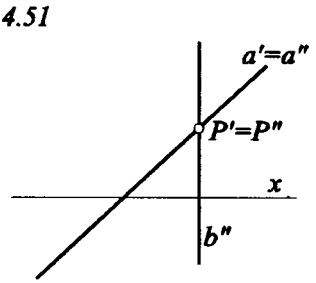
$b'' \perp x$

4.50



$b' \perp x$

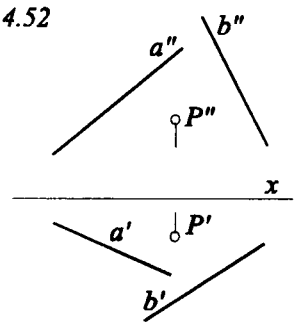
4.51



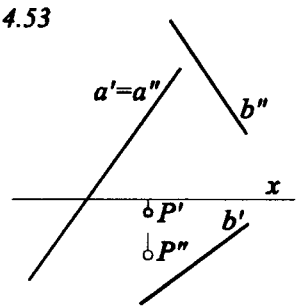
$b'' \perp x$

Dane są dwie proste *a* i *b* oraz punkt *P*. Przez punkt *P* poprowadzić prostą prostopadłą do *a* i przecinającą *b*.

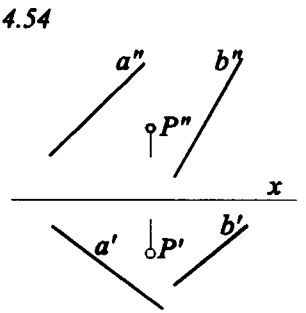
4.52



4.53

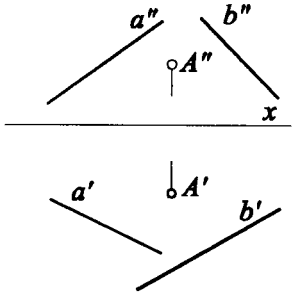


4.54

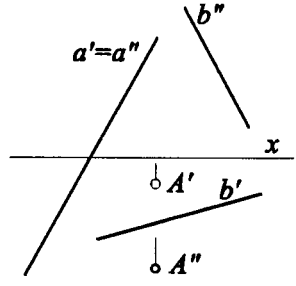


Przez punkt A poprowadzić prostą prostopadłą do dwóch prostych skośnych a i b.

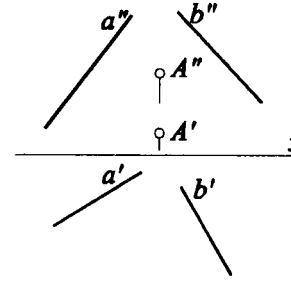
4.55



4.56

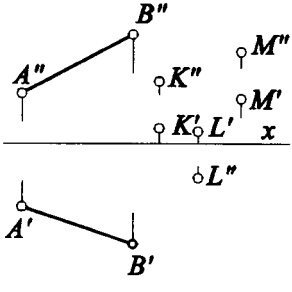


4.57

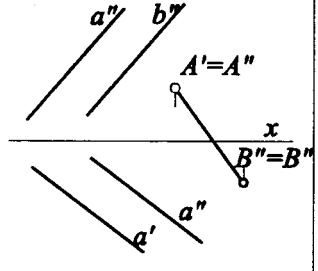


Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka AB na płaszczyznę α.

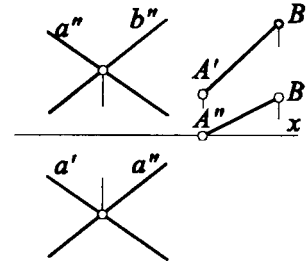
4.58 $\alpha(K, L, M)$



4.59 $\alpha(a, b)$

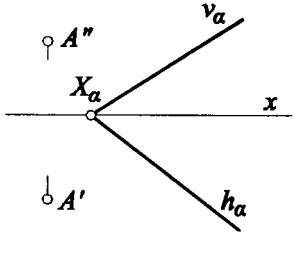


4.60 $\alpha(a, b)$

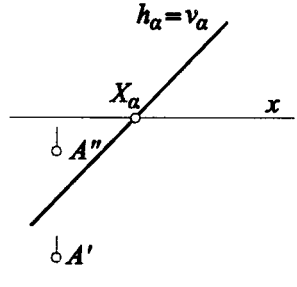


Przez punkt A poprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny α oraz płaszczyznę równoległą do płaszczyzny α.

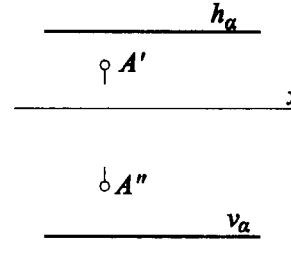
4.61 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



4.62 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

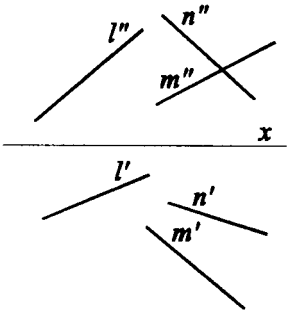


4.63 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

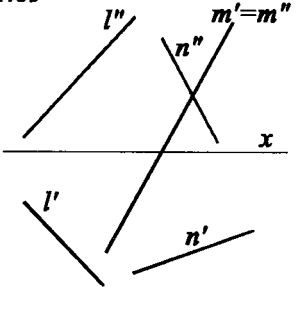


Dane są trzy proste skośne *l, m, n*. Poprowadzić prostą równoległą do prostej *l* i przecinającą proste *m* i *n*.

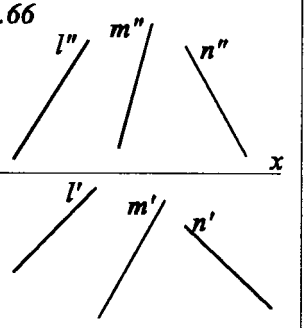
4.64



4.65

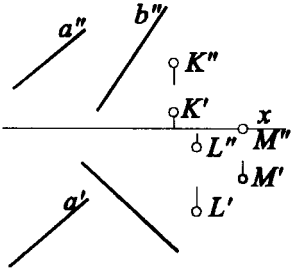


4.66

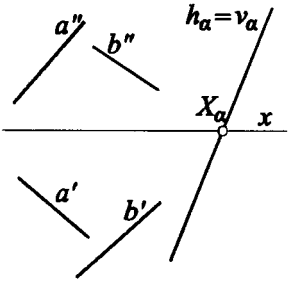


Wyznaczyć równoległobok *ABCD*, którego bok *AB* leży na prostej *a*, bok *BC* jest równoległy do płaszczyzny *α*, a wierzchołek *C* leży na prostej *b*.

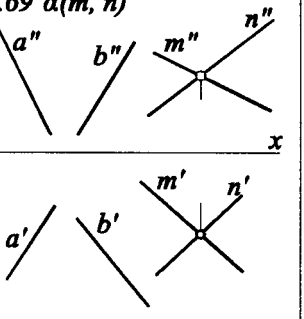
4.67 α(K, L, M)



4.68 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

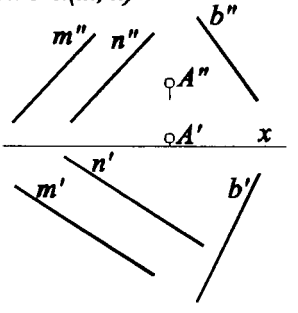


4.69 α(m, n)

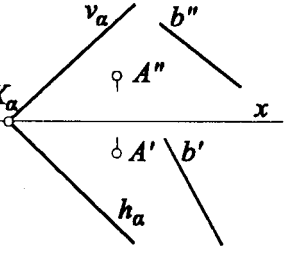


Przez punkt *A* poprowadzić prostą równoległą do płąszczyzny *α* i przecinającą prostą *b*.

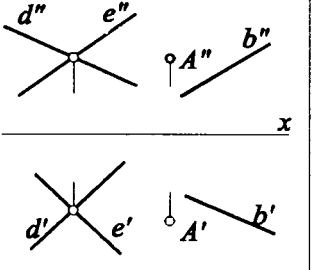
4.70 α(m, n)



4.71 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



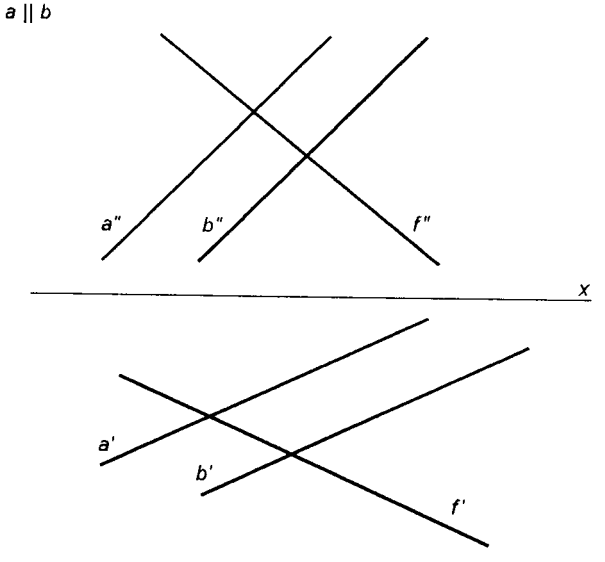
4.72 α(d, e)

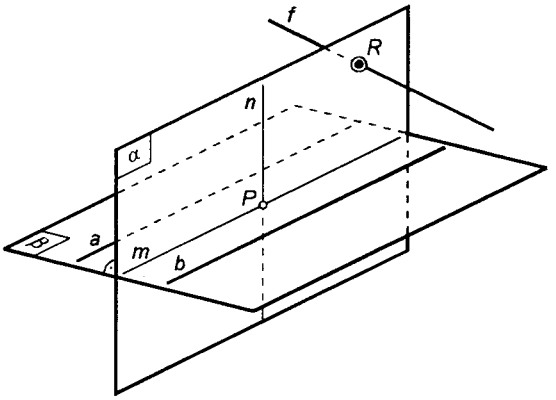


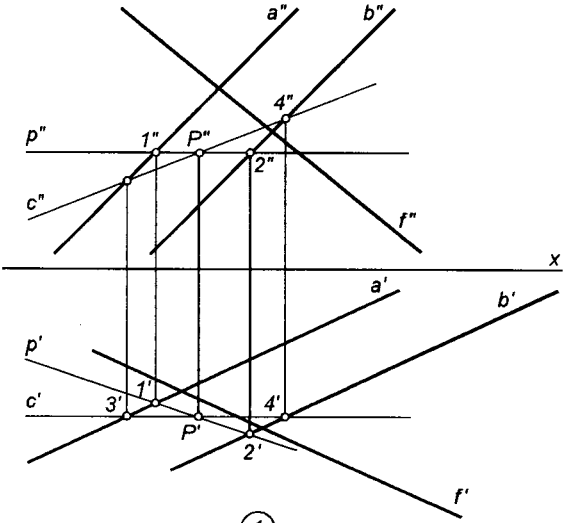
Ćwiczenie 4

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

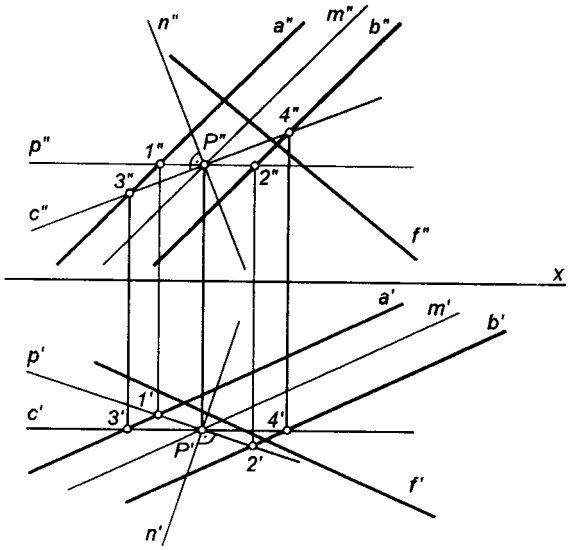
Dane są dwie proste równoległe *a*. *b* oraz skośna do nich prosta *f*.
Wyznaczyć na prostej *f* punkt równo oddalony od prostych *a i b*.



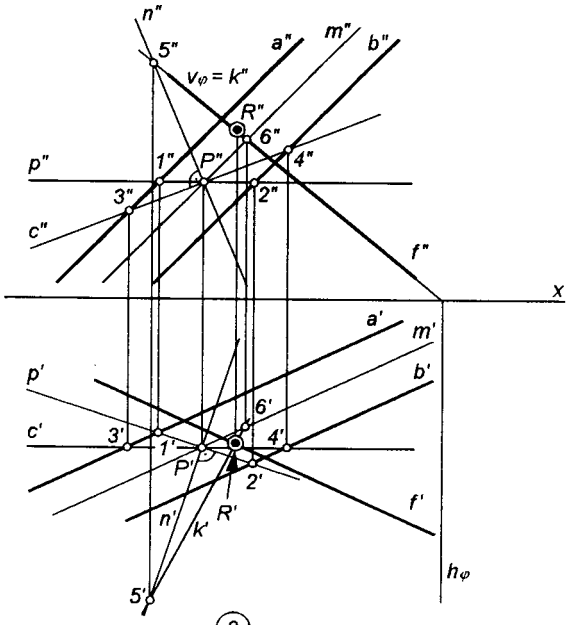




1


n"
a"
m"
b"
4"
p"
1"
P"
3"
2"
c"
f"
x
a'
m'
b'
p'
1'
c'
3'
4'
P'
2'
f'
n'

2


n"
5"
a"
m"
b"
$v_\varphi = k''$
R"
6"
p"
1"
P"
4"
3"
2"
c"
f"
x
a'
m'
p'
b'
6'
c'
3'
1'
4'
P'
2'
f'
n'
R'
k'
h_φ
5'

3

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 4

1. Wprowadzamy dowolną prostą poziomą p leżącą na wyznaczonej przez parę prostych a, b płaszczyźnie β. W tym celu prowadzimy dowolnie rzut pionowy p'' tej prostej (przy czym musi być oczywiście $p'' \parallel x$) i wyznaczamy rzuty pionowe $1''$, $2''$ punktów, w których prosta p przecina proste a i b. Na odnoszących poprowadzonych z tych rzutów do przecięcia się z a' i b' znajdujemy zaś rzuty poziome $1'$ i $2'$, które wyznaczają rzut poziomy p' prostej poziomej p. Wprowadzamy następnie prostą czołową c ($c' \parallel x$) tak, aby przechodziła ona przez punkt P będący środkiem odcinka $\overline{12}$. W tym przypadku wyznaczamy najpierw rzut c', a następnie po uzyskaniu rzutów $3'$ i $4'$ znajdujemy rzuty pionowe $3''$ i $4''$ tych punktów, dzięki którym możemy wyznaczyć rzut pionowy c'' prostej czołowej c.

2. Przez punkt P prowadzimy dwie proste m i n, które wyznaczają płaszczyznę α prostopadłą do płaszczyzny $\beta = ab$ i przechodzącą przez środek odległości pomiędzy prostymi a i b. Prostopadłość płaszczyzny α do β wynika z tego, że przechodzi ona przez prostą n prostopadłą do płaszczyzny β. Natomiast prosta n jest prostopadła do płaszczyzny α, ponieważ jest prostopadła do dwóch prostych c i p leżących na tej płaszczyźnie (rzuty prostej n rysujemy w ten sposób, że $n' \perp p'$ oraz $n'' \perp c''$).

3. Przez prostą f prowadzimy płaszczyznę pionowo-rzutującą φ. Płaszczyzna ta przecina proste m, n w punktach 5, 6, które wyznaczają krawędź przecięcia się płaszczyzn α i φ (prosta k). Na rzucie poziomym otrzymujemy $R' = f' \cap k'$. Na odnoszącej poprowadzonej z R' do f'' znajdujemy R'' i w ten sposób mamy określone rzuty punktu przebicia płaszczyzny α prostą f. Ponieważ płaszczyzna α jest zbiorem punktów równo oddalonych od prostych a i b, to punkt $R \in \alpha$ jest rozwiązaniem zadania

Uwaga: Zasadę rozwiązania powyższego zadania pokazano na rysunku poglądowym.

Ćwiczenie 5

OBROTY

1. Obrót punktu

Obrotem punktu A dookoła osi l nazywamy przemieszczenie tego punktu do nowego położenia A_l po łuku okręgu leżącego na płaszczyźnie $\varepsilon \perp l$ i przechodzącej przez punkt A. Środek S okręgu położony jest na osi obrotu l i nazywa się środkiem obrotu, a promień AS okręgu – promieniem obrotu. Skierowany kąt $\omega = ASA_l$ nazywamy kątem obrotu.

Konstrukcja obrotu jest możliwa pod warunkiem prostopadłości osi obrotu l do rzutni. Oznacza to, że płaszczyzna obrotu jest płaszczyzną poziomą lub czołową.

2. Obrót prostej

Obrotu prostej dokonujemy poprzez obrót dwóch punktów tej prostej o taki sam kąt skierowany.

Metodą obrotu możemy znaleźć rzeczywistą długość dowolnie położonego odcinka, a także kąt nachylenia odcinka (prostej) do rzutni.

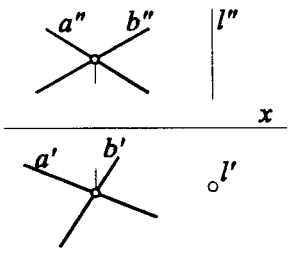
3. Obrót płaszczyzny, figury

Obrotem płaszczyzny α lub figury Γ dookoła osi l o skierowany kąt ω nazywamy obrót dookoła tej osi o ten sam kąt ω tylu punktów płaszczyzny α lub figury Γ, aby ich nowe położenie jednoznacznie określały płaszczyznę lub figurę w nowym położeniu Γ_l lub α_l.

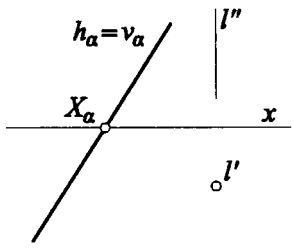
ZADANIA. Ćwiczenie 5

Obrócić płaszczyznę α dookoła osi l o $180°$.

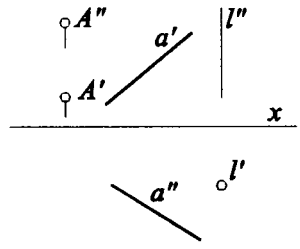
5.1 $\alpha(a, b)$



5.2 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

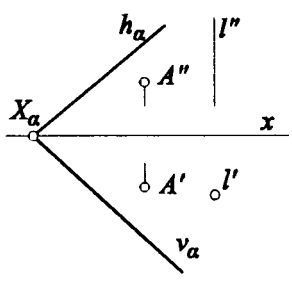


5.3 $\alpha(A, a)$

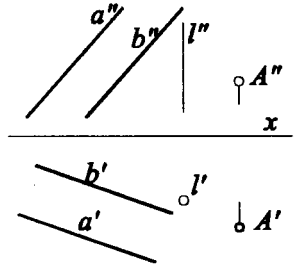


Obrócić płaszczyznę α dookoła osi l o taki kąt, aby płaszczyzna α zawierała punkt A.

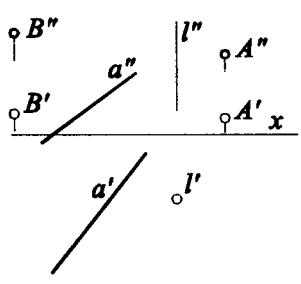
5.4 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



5.5 $\alpha(a, b)$

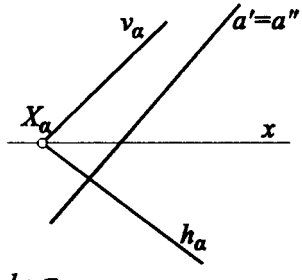


5.6 $\alpha(B, a)$



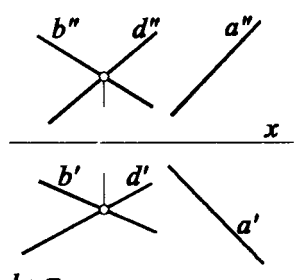
Obrócić prostą a dookoła osi l tak, aby znalazła się na płaszczyźnie α.

5.7 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



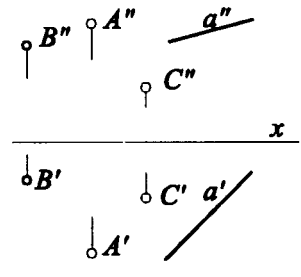
$l \perp \pi_1$

5.8 $\alpha(b, d)$



$l \perp \pi_2$

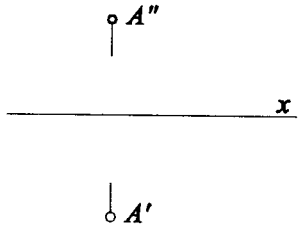
5.9 $\alpha(A, B, C)$



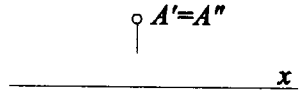
$l \perp \pi_1$

Przez punkt A poprowadzić prostą a, nachyloną pod kątem 45° do π_1 i 30° do π_2.

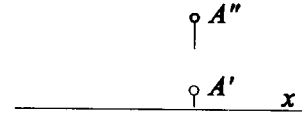
5.10



5.11

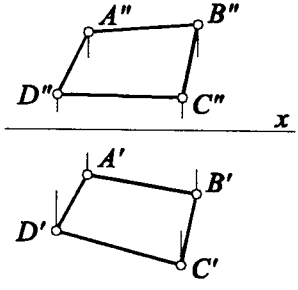


5.12

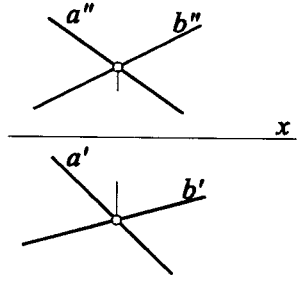


Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny α do rzutni π_1.

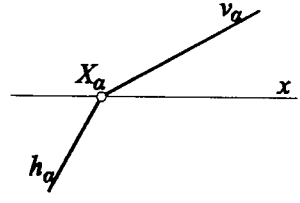
5.13 $\alpha(A, B, C, D)$



5.14 $\alpha(a, b)$

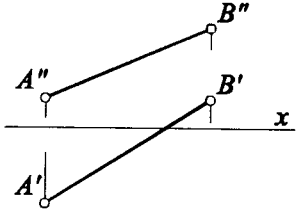


5.15 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

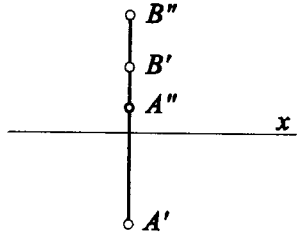


Wyznaczyć kąty nachylenia odcinka AB do rzutni π_1 i π_2.

5.16

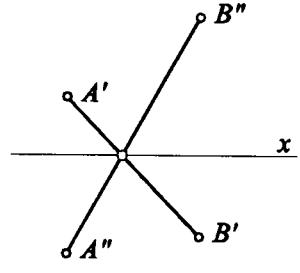


5.17



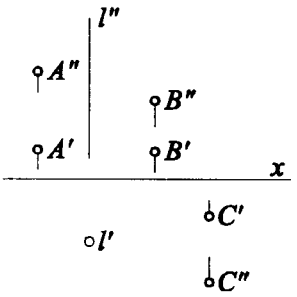
$AB \perp x$

5.18

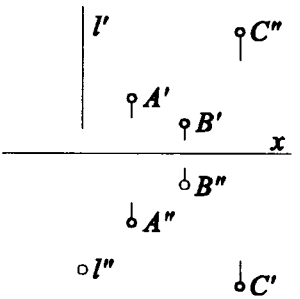


Punkt A obrócić dookoła prostej l tak, aby stał się równo odległy od punktów B i C.

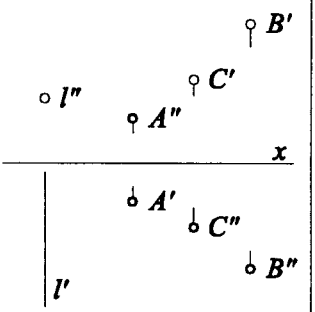
5.19



5.20

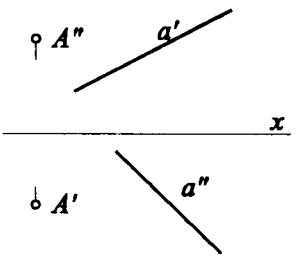


5.21

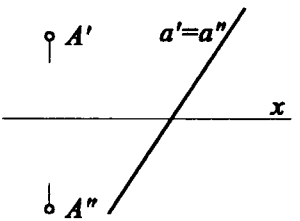


Wyznaczyć taką oś $l \perp \pi_1$, aby po obrocie dookoła niej punkt A znalazł się na prostej a. Podać zbiór rozwiązań.

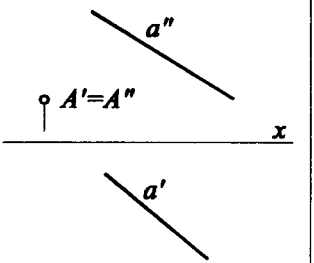
5.22



5.23

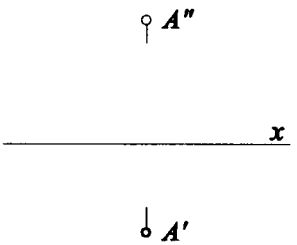


5.24



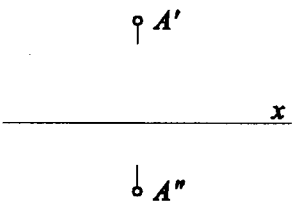
Przez punkt A poprowadzić płaszczyznę γ pod kątem α do π_1 i β do π_2.

5.25



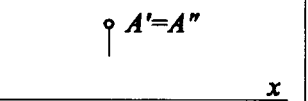
α=45°; β=60°

5.26



α=60°; β=45°

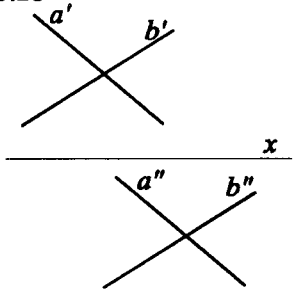
5.27



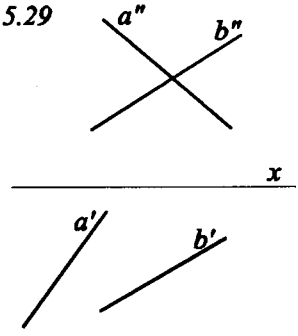
α=60°; β=60°

Wyznaczyć metodą obrotu odległość dwóch prostych skośnych.

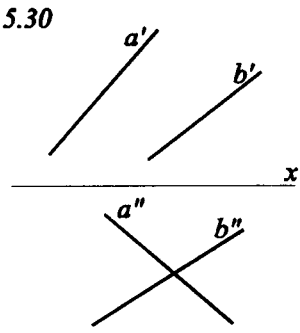
5.28



5.29

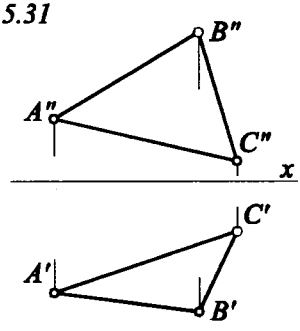


5.30

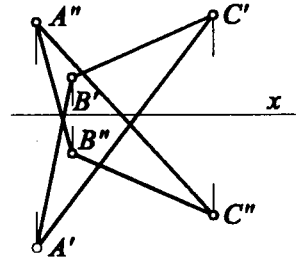


Wyznaczyć środek okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*.

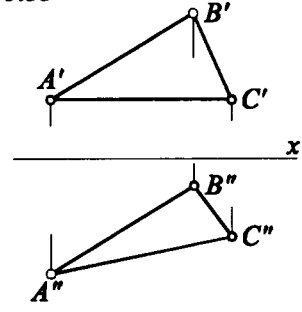
5.31



5.32

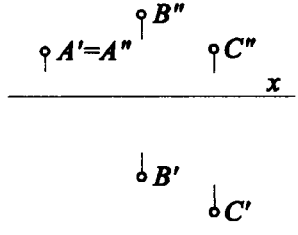


5.33

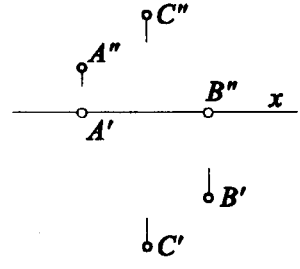


Stosując metodę obrotu wyznaczyć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od punktów *A, B, C*.

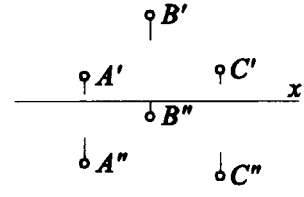
5.34



5.35



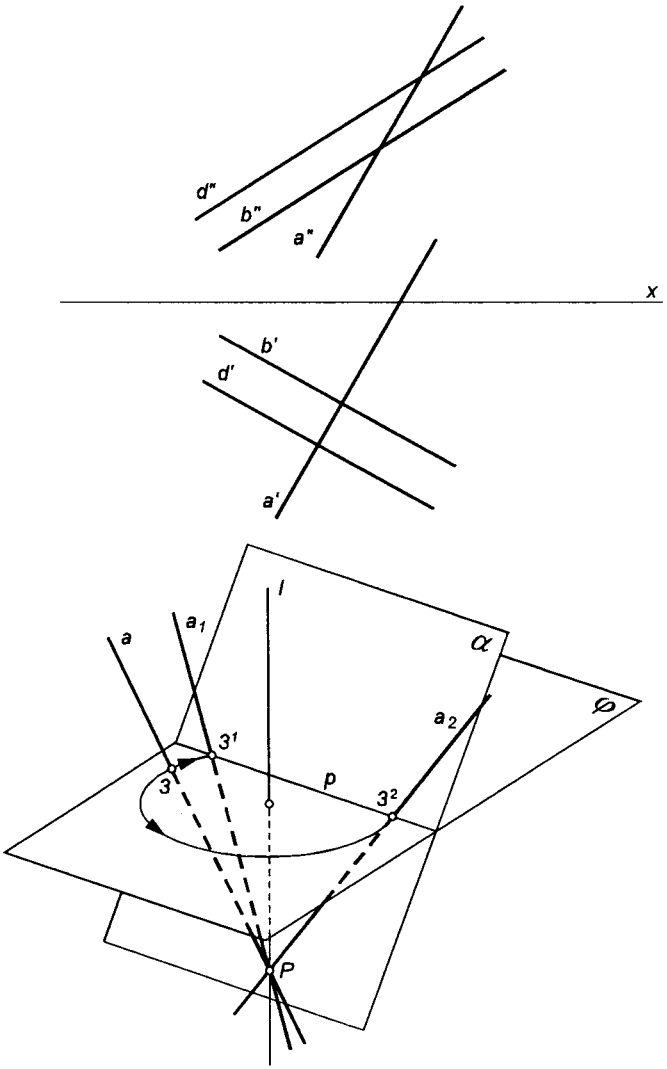
5.36

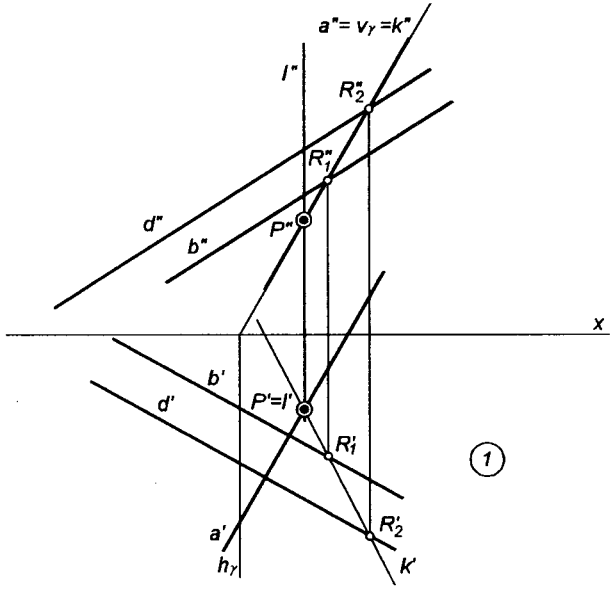


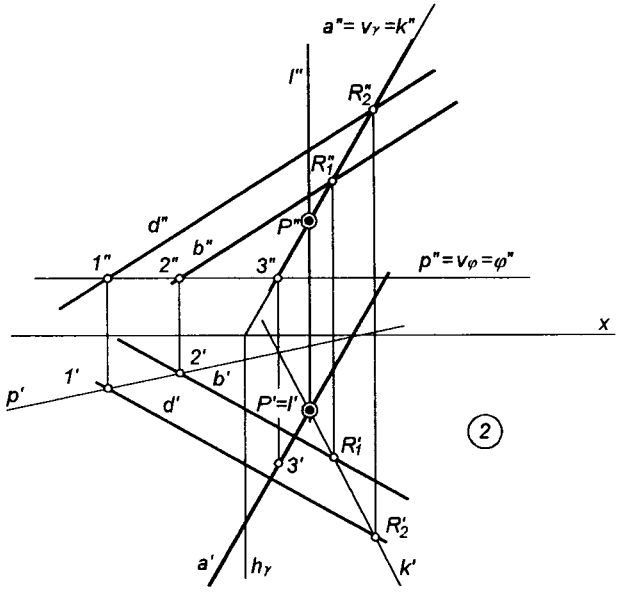
Ćwiczenie 5

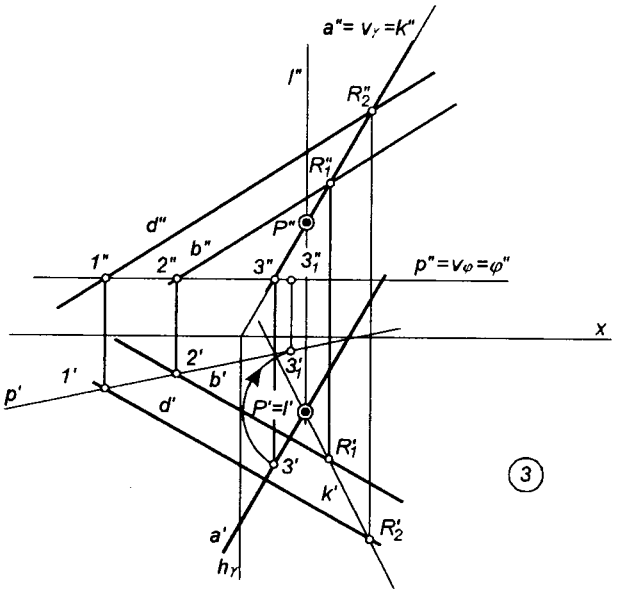
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

Obrócić prostą *a* dookoła osi *l* tak, aby po obrocie znalazła się ona na płaszczyźnie α.

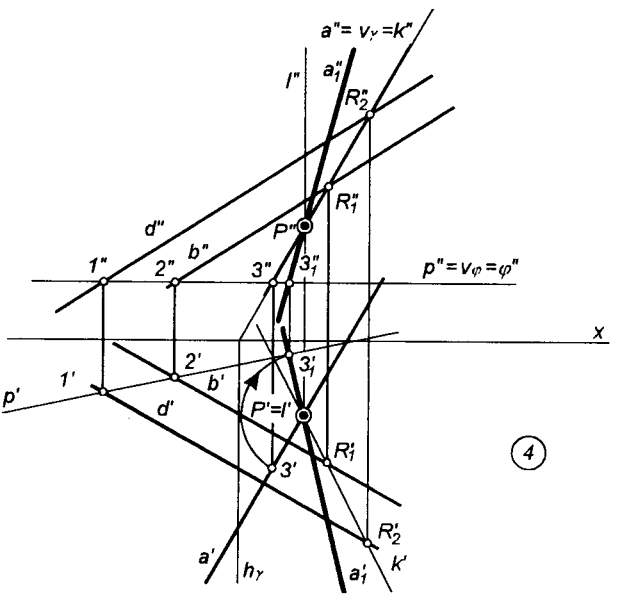



a"= vγ =k"
l"
R"2
R"1
d"
b"
P"
x
b'
d'
P'=l'
R'1
1
a'
R'2
hγ
k'


a"= vγ =k"
l"
R"2
R"1
d"
P"
1"
2"
b"
3"
p"=vφ=φ"
x
2'
1'
b'
p'
d'
P'=l'
R'1
2
3'
R'2
a'
hγ
k'


a"= vγ =k"
l"
R"2
R"1
d"
P"
b"
1"
2"
3"
3"1
p"=vφ=φ"
x
2'
3'1
1'
b'
p'
d'
P'=l'
R'1
3'
k'
a'
R'2
hγ

3


a"= vγ =k"
a"1
l"
R"2
R"1
d"
P"
b"
1"
2"
3"
3"1
p"=vφ=φ"
x
2'
3'1
1'
b'
p'
d'
P'=l'
R'1
3'
R'2
a'
hγ
a'1
k'

4

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 5

1. Przez prostą a prowadzimy płaszczyznę pionowo-rzutującą γ, a następnie znajdujemy rzuty krawędzi $k = R_1R_2$ płaszczyzn $\alpha = bd$ i γ. Na przecięciu się prostych a i k otrzymujemy punkt P, w którym prosta a przebija płaszczyznę α. W punkcie P umieszczamy oś obrotu l. Przyjmujemy oś obrotu prostopadłą do rzutni poziomej π_1.

2. Prowadzimy dowolnie płaszczyznę poziomą φ, która przecina płaszczyznę α wzdłuż prostej poziomej p. Prostą p wyznaczają punkty 1, 2, będące punktami przebicia płaszczyzny φ przez proste b i d. Prosta a przebija płaszczyznę γ w punkcie 3.

3. Dokonujemy obrotu rzutu poziomego $3'$ punktu 3 dookoła osi l, przyjmując jako promień obrotu odcinek $\overline{P'3'}$, o taki kąt, aby w nowym położeniu $3_1'$ punkt ten znajdował się na prostej poziomej p. Rzut pionowy $3_1''$ znajdujemy na odnoszącej, poprowadzonej z $3_1'$ do rzutu p''. W ten sposób wprowadziliśmy punkt 3 na płaszczyznę α. (Uwaga: w przypadku, gdy promień obrotu $\overline{P'3'}$ punktu 3 jest mniejszy od odległości osi obrotu l od prostej p, tj. gdy okrąg zatoczony promieniem obrotu nie przecina prostej poziomej, zadanie nie będzie miało rozwiązania).

4. Punkty 3_1 i P wyznaczają położenie a_1, w którym prosta a została wprowadzona na płaszczyznę α. Należy zauważyć, że w ogólnym przypadku zadanie będzie miało dwa rozwiązania, które zostały uwzględnione na załączonym rysunku poglądowym.

Uwaga: Zasadę rozwiązania powyższego zadania pokazano na rysunku poglądowym.

Ćwiczenie 6

KŁAD I PODNIESIENIE Z KŁADU

Kład jest szczególnym rodzajem obrotu. W odróżnieniu od klasycznego obrotu, kiedy to oś obrotu jest prostopadła do jednej z rzutni układu odniesienia (π_1,π_2), dokonuje się go dookoła osi obrotu położonej na rzutni lub na płaszczyźnie równoległej do rzutni.

1. Kład punktu

Kładem punktu P na rzutnię π lub płaszczyznę $\gamma \parallel \pi$ nazywamy obrót punktu P dookoła osi obrotu l położonej na rzutni π (płaszczyźnie γ) o taki kąt obrotu, po którym punkt ten w nowym położeniu a^0 znajdzie się na rzutni π lub płaszczyźnie γ.

Do wyznaczenia kładu prostej wystarczające jest wykonanie kładu dwóch punktów tej prostej (przyjmując tę samą oś obrotu). W ten sposób dokonujemy jednocześnie kładu odcinka określonego przez te punkty i wyznaczamy jego rzeczywistą długość.

W zależności od tego, jak zostanie umiejscowiona oś obrotu, możemy otrzymać:

a) kład trapezowy odcinka (oś obrotu pokrywa się z rzutem prostej, na której leży odcinek – oś obrotu położona jest na rzutni),
b) kład różnicowy odcinka (oś obrotu pokrywa się z rzutem prostej, na której leży odcinek – oś obrotu położona na płaszczyźnie przechodzącej przez jeden z końców odcinka).
c) kład prostej (odcinka) – przypadek, gdy oś obrotu nie pokrywa się z rzutem prostej.

Kład różnicowy (trapezowy) odcinka umożliwia także wyznaczanie kąta nachylenia do rzutni prostej przechodzącej przez ten odcinek (tzn. zawierającej ten odcinek).

2. Kład i podniesienie z kładu płaszczyzny

Kładem płaszczyzny nie będącej w położeniu rzutującym α na rzutnię π lub na płaszczyznę $\gamma \parallel \pi$ nazywamy taki obrót płaszczyzny α dookoła osi obrotu $l = \alpha \cap \pi$ $(\alpha \cap \gamma)$, że po obrocie o skierowany kąt $\omega \neq 90°$ płaszczyzna α w nowym położeniu α° jednoczy się z rzutnią π (płaszczyzną γ).

Podniesieniem z kładu płaszczyzny nie będącej w położeniu rzutującym α°, jednoczącej się z rzutnią π lub płaszczyzną $\gamma \parallel \pi$, nazywamy taki obrót płaszczyzny α° dookoła osi obrotu $l = \alpha \cap \pi$ $(\alpha \cap \gamma)$, przy którym po obrocie o skierowany kąt $\omega \neq 90°$ płaszczyzna α° w nowym położeniu jednoczy się z płaszczyzną α.

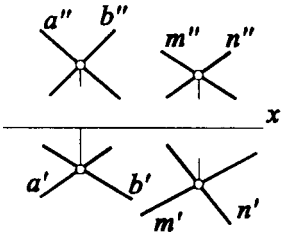
W przypadku kładu lub podniesienia z kładu płaszczyzny danej śladami najkorzystniej jest przyjąć jako oś obrotu ślad płaszczyzny, pionowy lub poziomy, w zależności od tego, którą rzutnię bierzemy pod uwagę.

Kład płaszczyzny może służyć do wyznaczenia wzajemnego położenia lub rzeczywistej wielkości elementów leżących na tej płaszczyźnie. Podniesienie płaszczyzny z kładu wykorzystuje się natomiast do wykreślenia rzutów elementów leżących na tej płaszczyźnie, przy znanej wielkości rzeczywistej tych elementów lub znanych relacjach wzajemnego położenia między nimi.

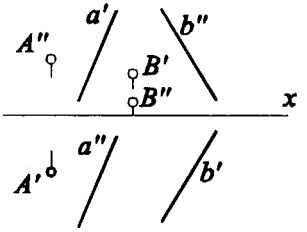
ZADANIA. Ćwiczenie 6

Wyznaczyć kąt między płaszczyznami α i β.

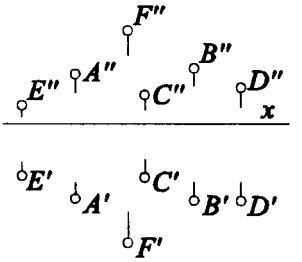
6.1 $\alpha(a,b)$; $\beta(m,n)$



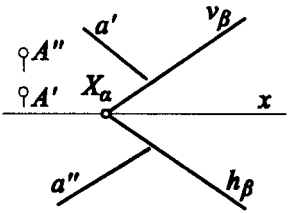
6.2 $\alpha(A,a)$; $\beta(B,b)$



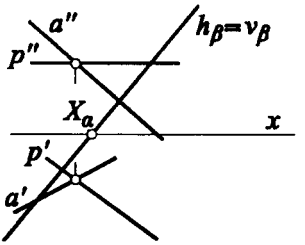
6.3 $\alpha(A,B,C)$; $\beta(D,E,F)$



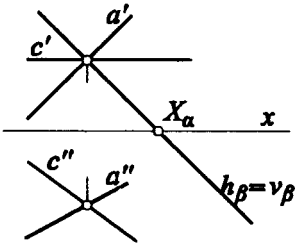
6.5 $\alpha(A, a)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$



6.5 $\alpha(a,p)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$

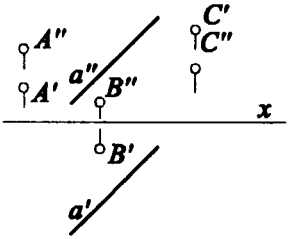


6.6 $\alpha(a,c)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$

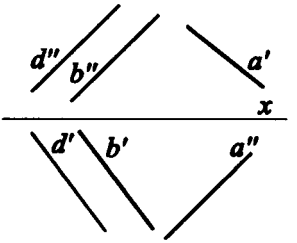


Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do płaszczyzny α .

6.7 $\alpha(A,B,C)$

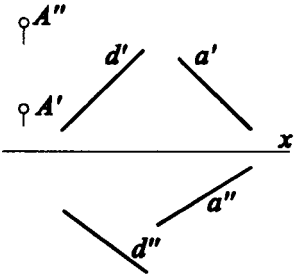


6.8 $\alpha(d,b)$



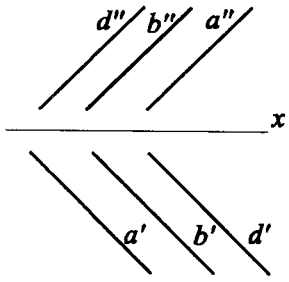
$b \| d$

6.9 $\alpha(A,d)$



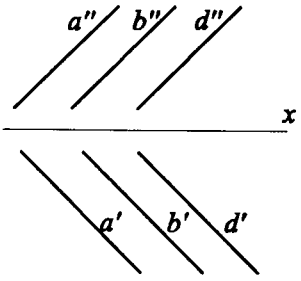
Dane są trzy proste równoległe. Wyznaczyć prostą *m* równoległą do tych prostych i równo oddaloną od nich.

6.10



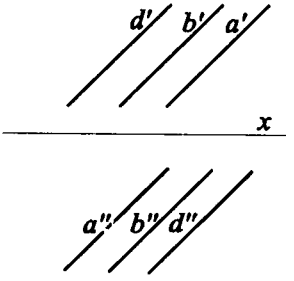
$a||b||d$

6.11



$a||b||d$

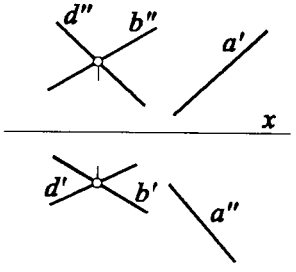
6.12



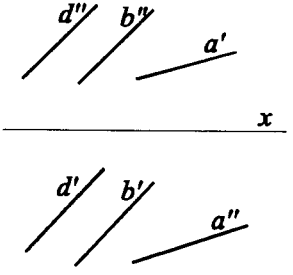
$a||b||d$

Wyznaczyć dwusieczną kąta nachylenia prostej *a* do płaszczyzny *α*.

6.13 $\alpha\,(d, b)$

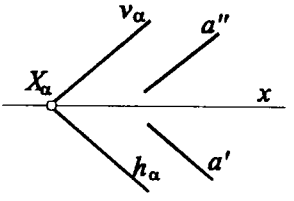


6.14 $\alpha\,(d, b)$



$b||d$

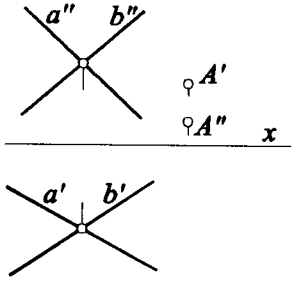
6.15 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



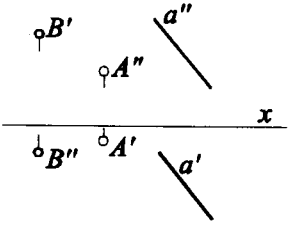
$a'||h_\alpha;\ a''||v_\alpha$

Przez punkt *A* poprowadzić prostą nachyloną pod kątem *α* do płaszczyzny *β*.

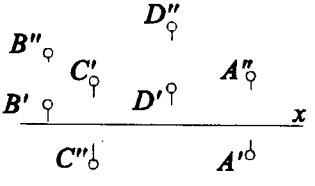
6.16 $\alpha = 45°$; $\beta(a,b)$



6.17 $\alpha = 60°$; $\beta(a,B)$

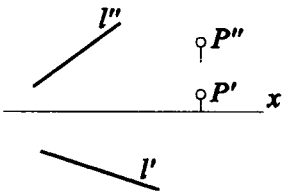


6.18 $\alpha = 30°$; $\beta(B,C,D)$

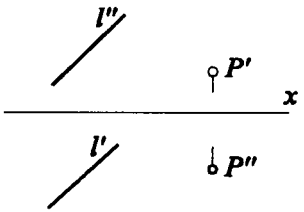


Na prostej l wyznaczyć odcinek o długości 5 cm, jeżeli wiadomo, że prosta przechodząca przez koniec tego odcinka i punkt P tworzy z prostą l kąt α.

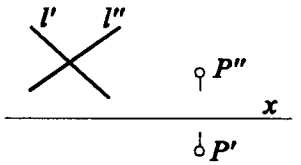
6.19 $\alpha = 45°$



6.20 $\alpha = 60°$

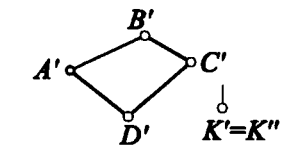


6.21 $\alpha = 30°$

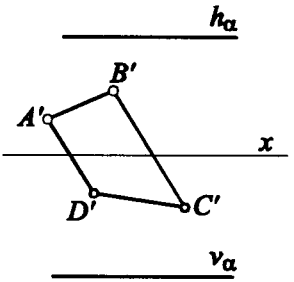


Znaleźć rzeczywiste wielkości czworokąta $ABCD$ leżącego na płaszczyźnie α.

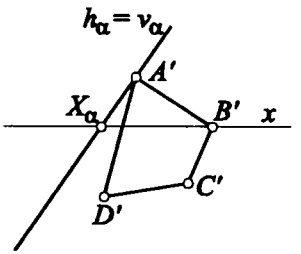
6.22 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha, K)$



6.23 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

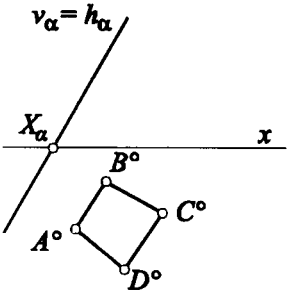


6.24 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

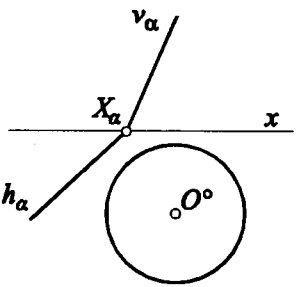


Wyznaczyć rzuty figury leżącej na płaszczyźnie α.

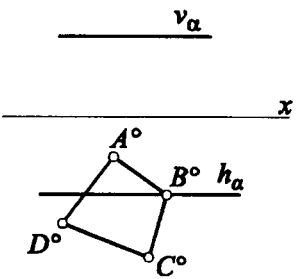
6.25 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



6.26 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

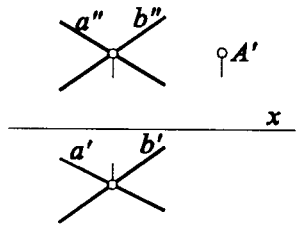


6.27 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

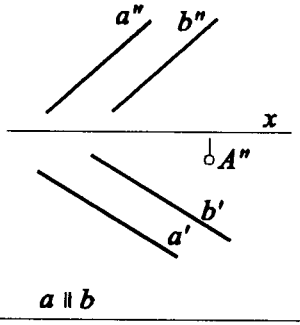


Przez punkt A leżący na płaszczyźnie α poprowadzić proste przecinające się pod kątem $45°$ i leżące na płaszczyźnie α.

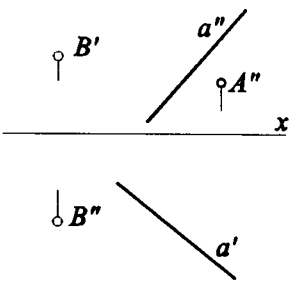
6.28 $\alpha(a, b)$



6.29 $\alpha(a, b)$

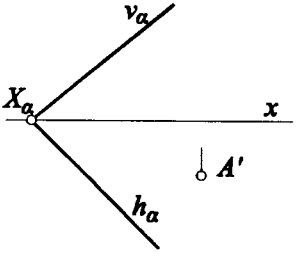


6.30 $\alpha(B, a)$

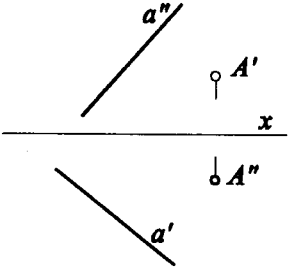


Wyznaczyć rzuty trójkąta równobocznego leżącego na płaszczyźnie α, o środku ciężkości w punkcie A.

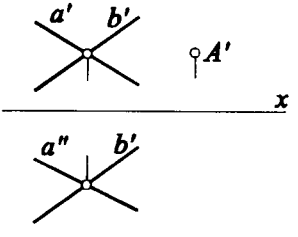
6.31 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



6.32 $\alpha(A, a)$

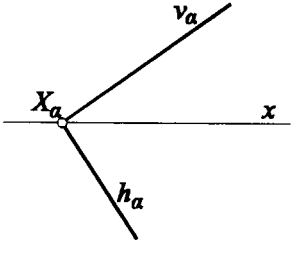


6.33 $\alpha(a, b)$

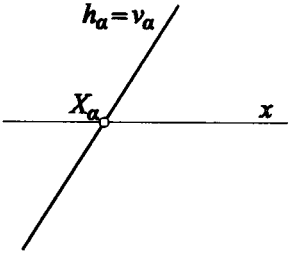


Wyznaczyć zbiór punktów równo oddalonych od śladów płaszczyzny α.

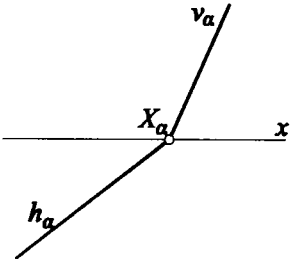
6.34 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



6.35 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

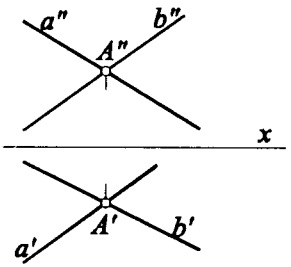


6.36 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

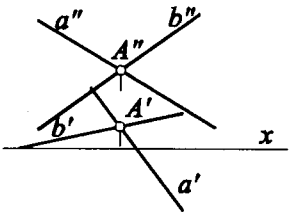


Wyznaczyć dwusieczną kąta zawartego między przecinającymi się prostymi *a* i *b*.

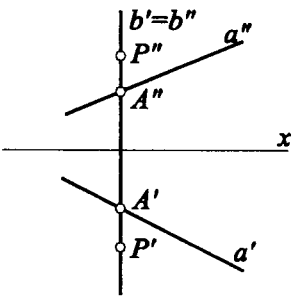
6.37



6.38



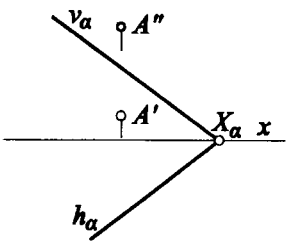
6.39



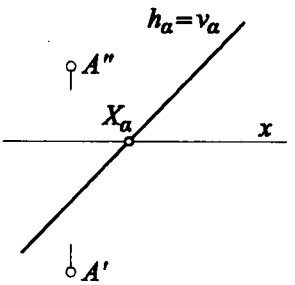
$A \in b;\ P \in b;\ b' \perp x;\ b''=b'$

Przez punkt A narysować dowolnie leżącą prostą tworzącą kąt φ z płaszczyzną α.

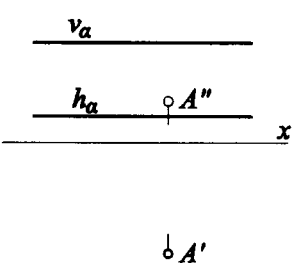
6.40 $\varphi=60°$



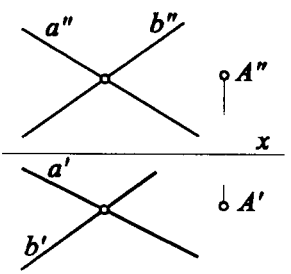
6.41 $\varphi=60°$



6.42 $\varphi=60°$

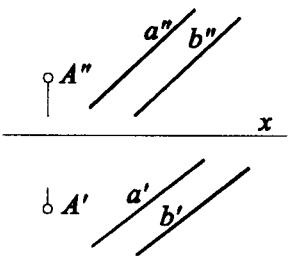


6.43 $\varphi=30°$



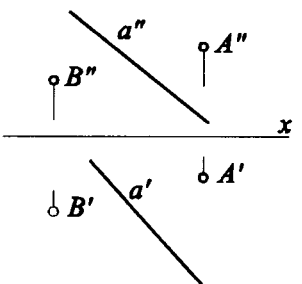
$\alpha(a, b)$

6.44 $\varphi=30°$



$\alpha(a, b)$

6.45 $\varphi=30°$

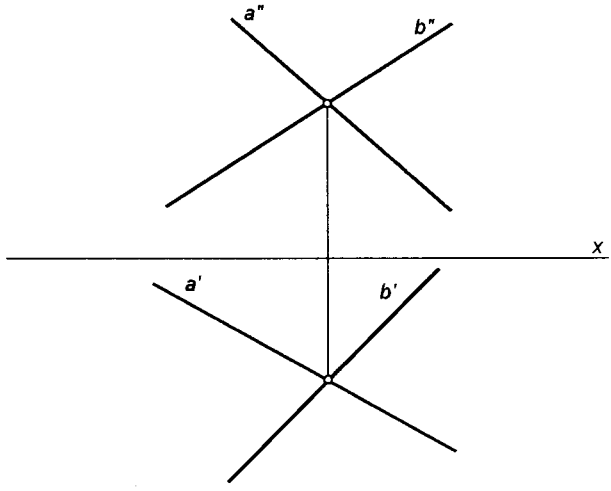


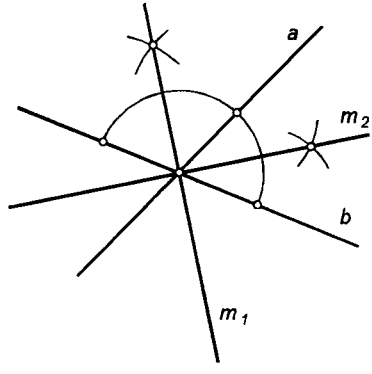
$\alpha(a, B)$

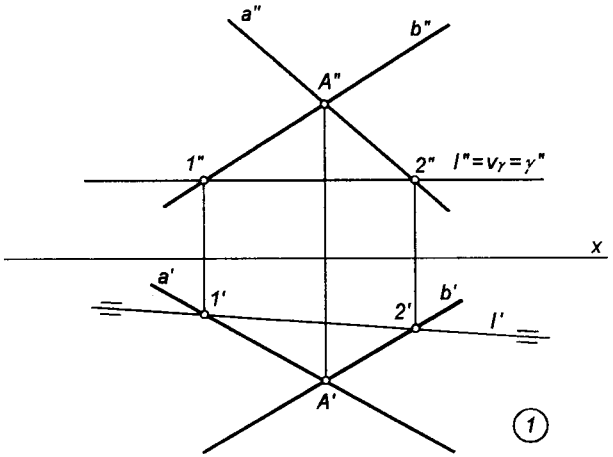
Ćwiczenie 6

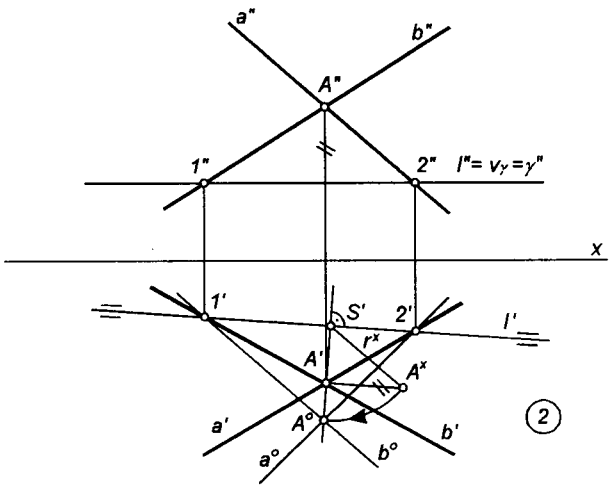
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

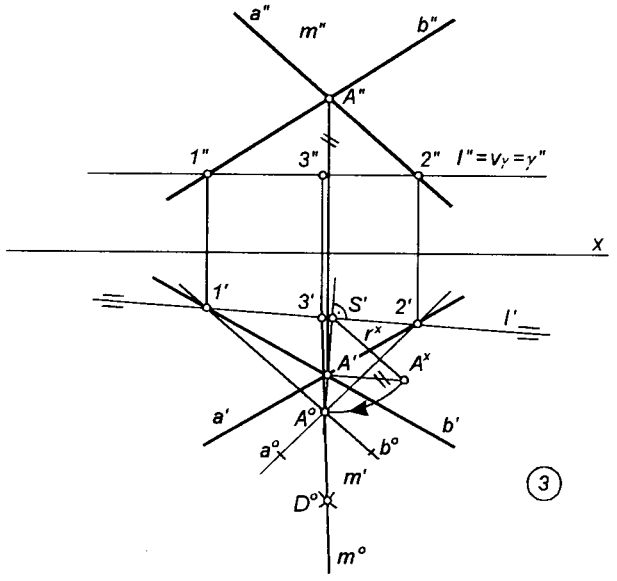
Wyznaczyć dwusieczną kąta zawartego między przecinającymi się prostymi *a i b*.



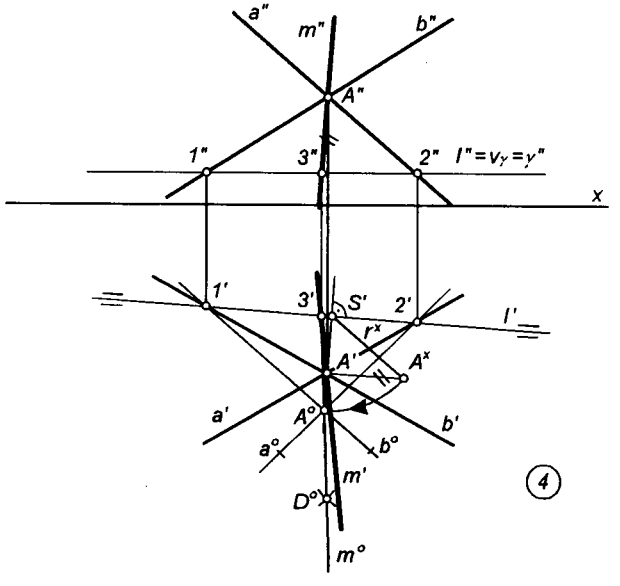



a"
b"
A"
1"
2"
l"=vγ=γ"
x
a'
1'
2'
b'
l'
A'
1


a"
b"
A"
1"
2"
l"= vγ=γ"
x
1'
S'
2'
l'
rx
A'
Ax
a'
Ao
b'
ao
bo
2


a"
m"
b"
A"
1"
3"
2"
l"=v_γ=γ"
x
1'
3'
S'
2'
l'
r^x
A'
A^x
a'
A°
b'
a°
b°
m'
D°
m°

3


a"
m"
b"
A"
1"
3"
2"
l"=v_γ=γ"
x
1'
3'
S'
2'
l'
r^x
A'
A^x
a'
A°
b'
a°
b°
m'
D°
m°

4

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 6

1. Prowadzimy dowolnie płaszczyznę γ równoległą do rzutni π_l, która przecinając dane proste a i b w punktach 1, 2 wyznacza nam oś obrotu l, potrzebną do wykonania kładu.

2. Wykorzystując wyznaczoną oś obrotu l znajdujemy kład A° punktu A. Punkty $1'$, A° wyznaczają kład b° prostej b, a punkty $2'$, A° wyznaczają kład a° prostej a.

3. Na kładach prostych a° i b° odmierzamy odcinki o jednakowej długości $\overline{A^\circ B^\circ}$ i $\overline{A^\circ C^\circ}$. Z punktów A° i C° zakreślamy łuki o jednakowym promieniu, które przecinając się wyznaczają punkt D° leżący na dwusiecznej kąta zawartego między prostymi a° i b°. Przez punkty A°, D° prowadzimy dwusieczną m° tego kąta. Prosta m° jest przecięta przez oś obrotu w punkcie 3. Rzuty punktów A, 3 pozwalają na wyznaczenie rzutów m', m'' dwusiecznej kąta zawartego między prostymi a i b.

Ćwiczenie 7

TRANSFORMACJE

1. Transformacja położenia przez przeniesienie

Transformacją położenia nazywamy taką zmianę pierwotnego położenia elementów (punktów, prostych, figur, płaszczyzn) w przyjętym układzie odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$, która nie zmienia wzajemnych relacji między tymi elementami, tzn. nie zmienia odległości i kątów.

Przykładem transformacji położenia są poznane we wcześniejszych rozdziałach kłady i obroty.

Transformacja położenia przez przeniesienie może być dokonana w następujący sposób:

a) poprzez *przeniesienie poziome*, w którym przejście do nowego położenia zachowuje wysokość wszystkich punktów (tzn. odległość punktów od rzutni π_1 nie zmienia się),

b) poprzez *przeniesienie czołowe*, w którym przejście do nowego położenia zachowuje głębokość wszystkich punktów (tzn. odległość punktów od rzutni π_2 nie zmienia się).

Przy przeniesieniu poziomym figury nie zmienia się wielkość i kształt jej rzutu poziomego i analogicznie, przy przeniesieniu czołowym nie zmienia się wielkość i kształt rzutu pionowego.

2. Transformacja odwzorowania

Transformacja odwzorowania polega na zmianie sposobu pierwotnego odwzorowania elementów w przyjętym układzie odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$.

Ten rodzaj transformacji wiąże się z wprowadzeniem nowego, nieprostopadłego do rzutni, kierunku rzutowania. W wyniku transformacji odwzorowania otrzymujemy tzw. *rzut ukośnokątny*. Jest to sposób, który wykorzystujemy m.in. przy wyznaczaniu linii przenikania prostopadłościanów.

3. Transformacja układu odniesienia

Transformacją układu odniesienia (lub po prostu metodą zmiany rzutni) nazywamy operację polegającą na wprowadzeniu kolejnej rzutni, prostopadłej do jednej rzutni pierwotnego układu rzutowania, i na dokonaniu rzutowania elementów (punktów, prostych, figur, płaszczyzn) na wprowadzoną rzutnię. W ten sposób dokonujemy zmiany pierwotnego układu odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$ na nowy układ $x_1(\pi_1,\pi_3)$ lub $x_1(\pi_2,\pi_3)$ – tzn. jednokrotnej zmiany rzutni. Wprowadzając rzutnię prostopadłą do którejkolwiek rzutni nowego układu możemy dokonywać kolejnej transformacji układu odniesienia – wielokrotnej zmiany rzutni.

Transformację układu odniesienia stosuje się w celu takiego doboru układu rzutni, w którym elementy zajmują położenie szczególne, co w konsekwencji ułatwia znalezienie rozwiązania zadania. Znalezienie właściwego rozwiązania wymaga w niektórych przypadkach zastosowania kilku następujących po sobie transformacji, a wybór sposobu transformowania jest zależny od warunków konkretnego zadania (zasadnicze znaczenie ma zawsze odpowiedni wybór położenia osi nowego układu odniesienia).

W praktyce spotykamy następujące szczególne przypadki zmiany pierwotnego układu odniesienia:

3.1. Rzutnia równoległa do danej prostej

Dokonanie transformacji układu odniesienia, po której nowa rzutnia jest równoległa do danej prostej, wymaga wprowadzenia osi nowego układu odniesienia równoległej do odpowiedniego rzutu danej prostej (jednokrotna zmiana rzutni). W ten sposób prosta przyjmuje w nowym układzie odniesienia położenie szczególne, tzn. staje się prostą czołową (oś nowego układu jest równoległa do rzutu poziomego prostej) lub poziomą (oś nowego układu jest równoległa do rzutu pionowego pro-

stej). Jest to dobry sposób np. na szybkie znalezienie rzeczywistej długości odcinka lub rzeczywistej wielkości kąta nachylenia prostej do rzutni.

3.2. *Rzutnia prostopadła do danej prostej*

Transformacji układu odniesienia, po której w nowym układzie rzutnia jest prostopadła do danej prostej, dokonuje się w takim przypadku, gdy w pierwotnym układzie odniesienia prosta ta przyjmuje położenie szczególne, tj. poziome lub czołowe. Oś nowego układu odniesienia ustawiamy wówczas prostopadle do odpowiedniego rzutu prostej i w ten sposób otrzymujemy jej nowy rzut w postaci punktu.

3.3. *Rzutnia równoległa do danej płaszczyzny*

Układ odniesienia transformujemy ustawiając nową rzutnię równolegle do danej płaszczyzny w takim przypadku, gdy w pierwotnym układzie odniesienia dana płaszczyzna przyjmuje położenie rzutujące, co oznacza, że jeden z jej rzutów jest prostą. Oś rzutów nowego układu odniesienia jest wówczas równoległa do tego rzutu lub jednoczy się z nim.

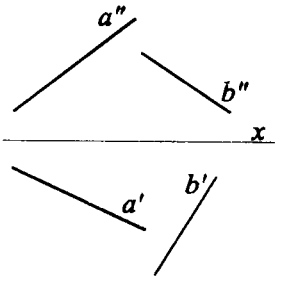
3.4. *Rzutnia prostopadła do danej płaszczyzny*

Aby rzutnia w nowym układzie odniesienia była prostopadła do danej płaszczyzny, należy ustawić ją w takim położeniu, w którym rzutnia ta będzie prostopadła do prostej poziomej lub czołowej leżącej na danej płaszczyźnie. Otrzymujemy wówczas nowy rzut płaszczyzny w postaci prostej, na którym znajduje się rzut prostej szczególnej (poziomej lub czołowej) w postaci punktu.

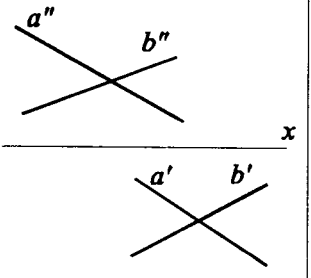
ZADANIA. Ćwiczenie 7

Wyznaczyć najkrótszy odcinek poziomy, którego końce leżą na dwóch prostych skośnych.

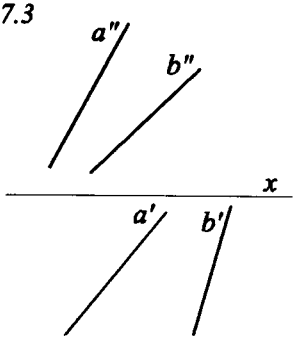
7.1



7.2

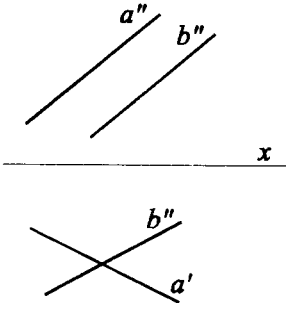


7.3

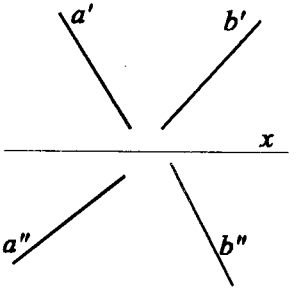


Wyznaczyć odcinek o długości równej dwukrotnej odległości dwóch danych prostych skośnych i końcach położonych na tych prostych.

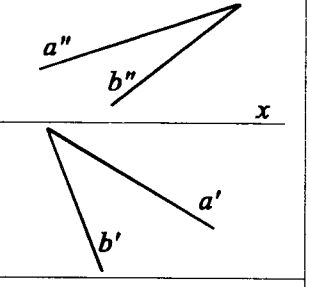
7.4



7.5

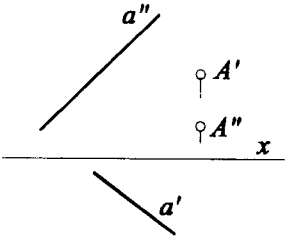


7.6

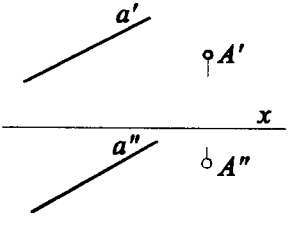


Wyznaczyć trójkąt równoboczny *ABC*, którego bok *BC* leży na prostej *a*.

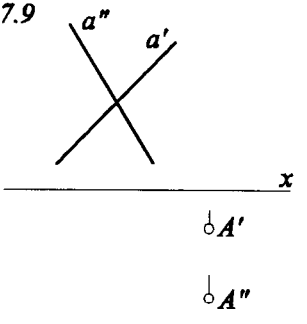
7.7



7.8

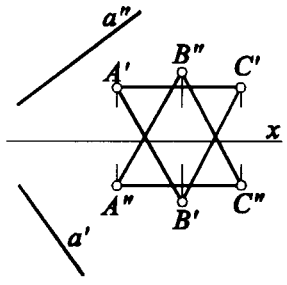


7.9

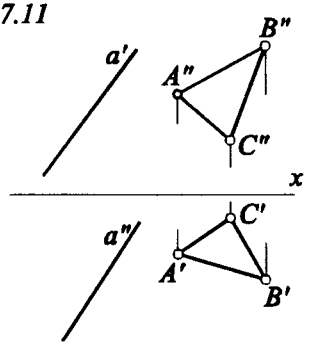


Na prostej a wyznaczyć punkty odległe od płaszczyzny trójkąta ABC o 3 cm.

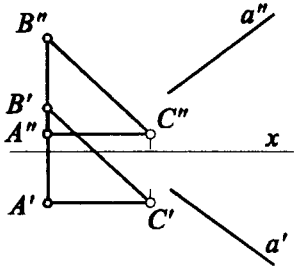
7.10



7.11

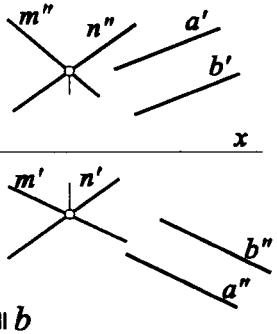


7.12



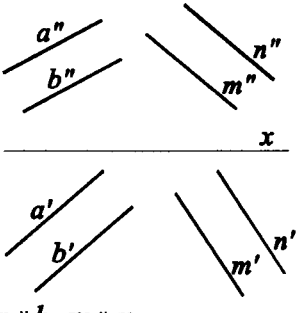
Na płaszczyźnie α wyznaczyć proste odległe od płaszczyzny β o 3 cm.

7.13 $\alpha(a, b)$; $\beta(m, n)$



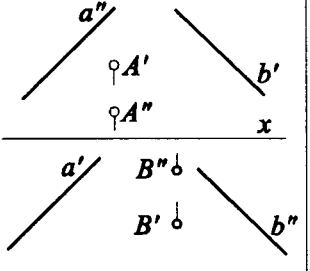
$a \parallel b$

7.14 $\alpha(a, b)$; $\beta(m, n)$



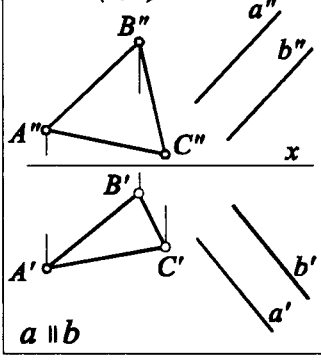
$a \parallel b; m \parallel n$

7.15 $\alpha(a, A)$; $\beta(b, B)$



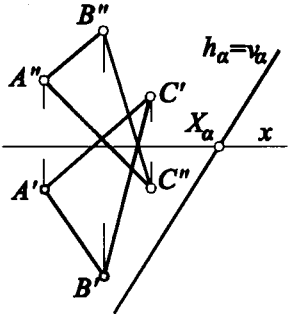
Na płaszczyźnie α wyznaczyć punkt równo oddalony od wierzchołków trókąta ABC.

7.16 $\alpha(a, b)$

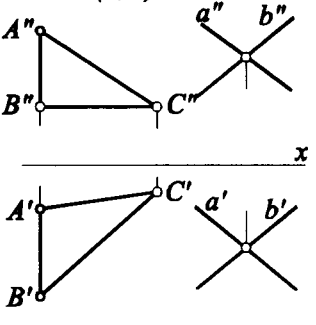


$a \parallel b$

7.17 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

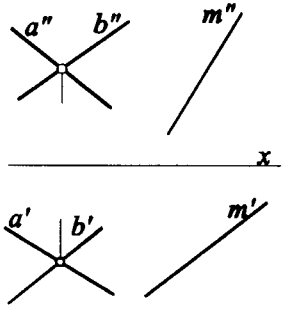


7.18 $\alpha(a, b)$

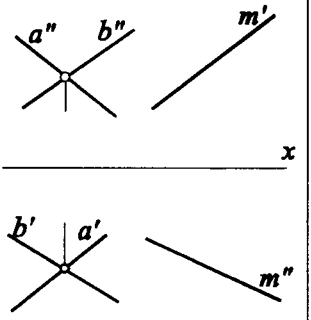


Na prostej *m* skośnej względem przecinających się prostych *a* i *b* wyznaczyć punkt równo oddalony od tych prostych.

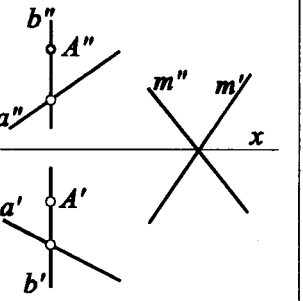
7.19



7.20

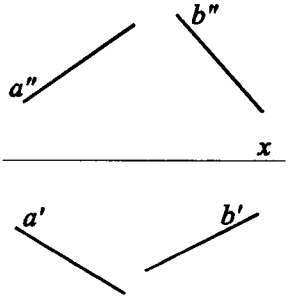


7.21

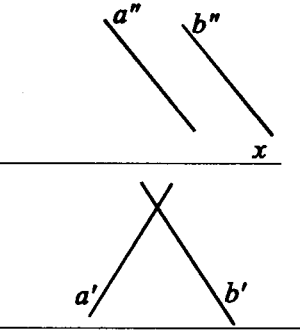


Wyznaczyć rzuty okręgu o promieniu równym dwukrotnej odległości dwóch prostych skośnych, stycznego do prostej *a* i środku położonym na prostej *l*.

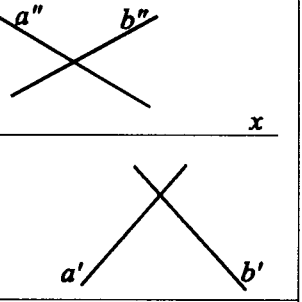
7.22



7.23

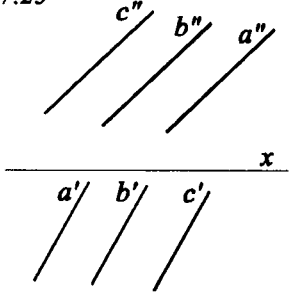


7.24



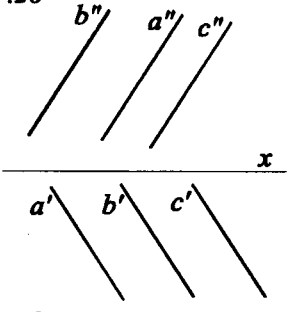
Znaleźć prostą równo oddaloną od trzech prostych równoległych.

7.25



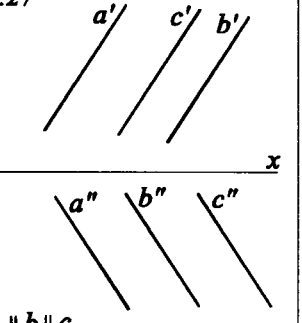
$a \parallel b \parallel c$

7.26



$a \parallel b \parallel c$

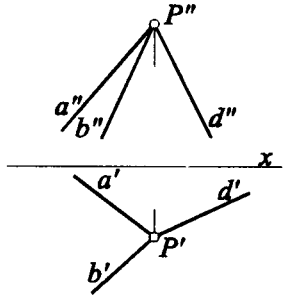
7.27



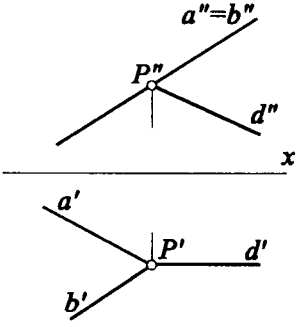
$a \parallel b \parallel c$

Wyznaczyć prostą nachyloną pod jednakowym kątem do każdej z danych trzech prostych, przecinających się w jednym punkcie.

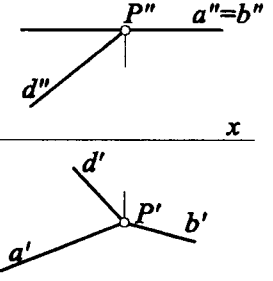
7.28



7.29

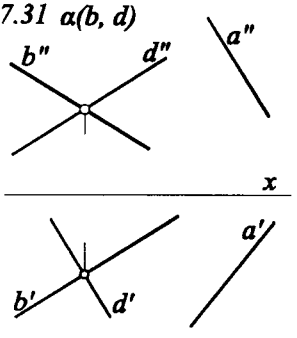


7.30

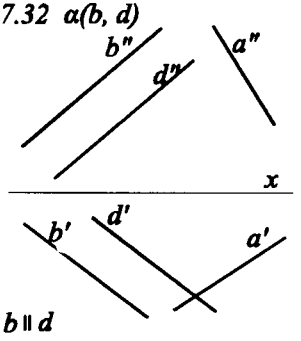


Poprowadzić płaszczyznę β równoległą do płąszczyzny α tak, aby płaszczyzny te odcinały na prostej a odcinek o długości 30 cm.

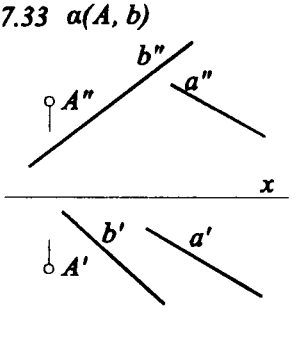
7.31 $\alpha(b, d)$



7.32 $\alpha(b, d)$

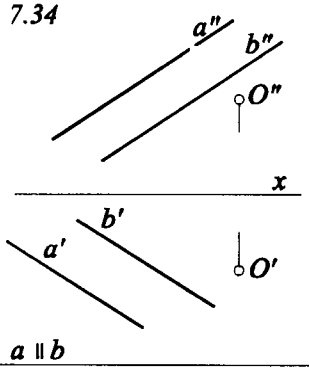


7.33 $\alpha(A, b)$

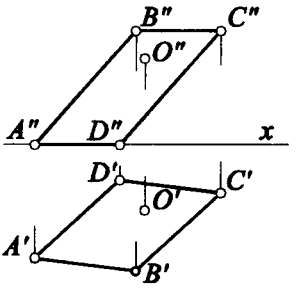


Kula o środku O toczy się po płaszczyźnie α. Znaleźć położenie środka kuli w momencie jej zetknięcia z rzutnią π_1.

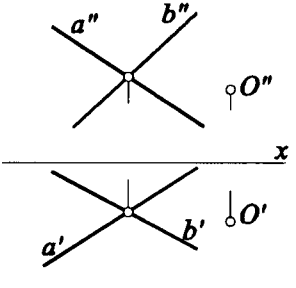
7.34



7.35

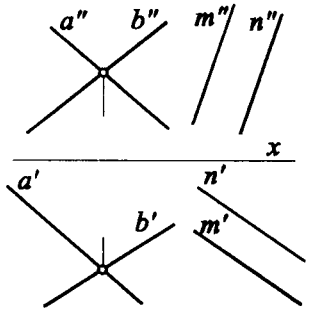


7.36

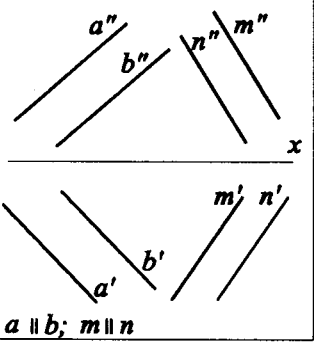


Wyznaczyć rzuty prostej odległej od płaszczyzny α o 20 mm i od płaszczyzny β o 30 mm.

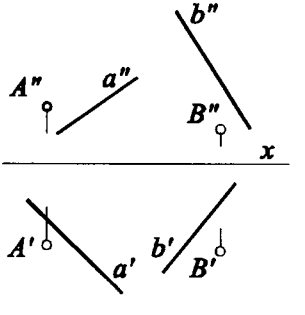
7.37 α(a, b); β(m, n)



7.38 α(a, b); β(m, n)

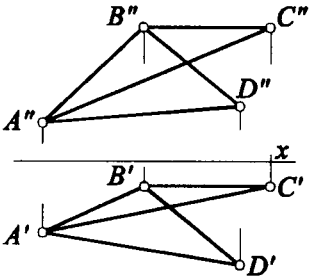


7.39 α(A, a); β(B, b)

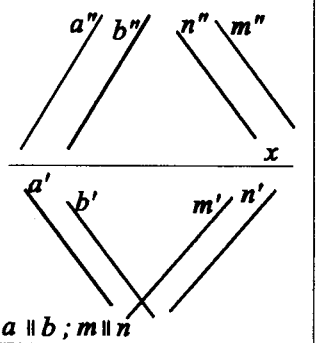


Wyznaczyć płaszczyznę dwusieczną kąta między płaszczyznami α i β.

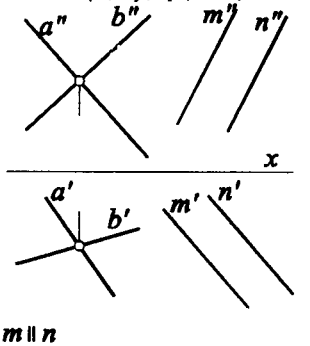
7.40 α(A B C); β(A B D)



7.41 α(a, b); β(m, n)

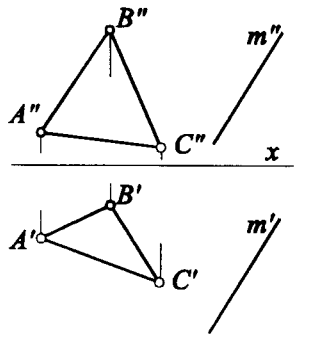


7.42 α(a, b); β(m, n)

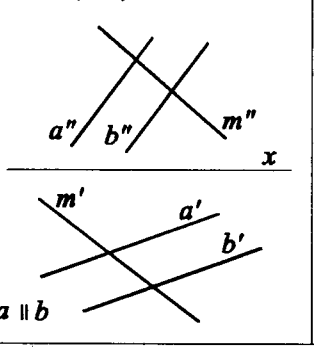


Na płaszczyźnie α narysować prostą n prostopadłą do m i przecinającą ją.

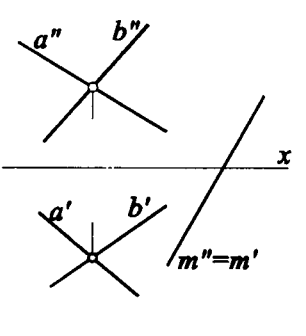
7.43 α(A, B, C)



7.44 α(a, b)

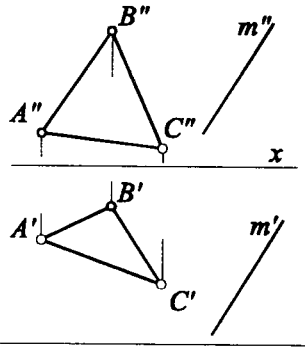


7.45 α(a, b)

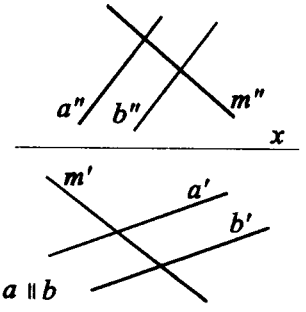


Znaleźć rzeczywisty kąt nachylenia prostej *m* do płaszczyzny *α*.

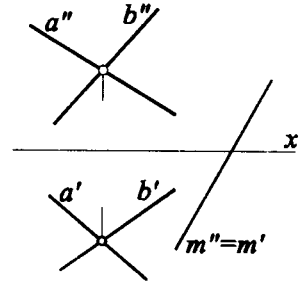
7.46 *α(A, B, C)*



7.47 *α(a, b)*

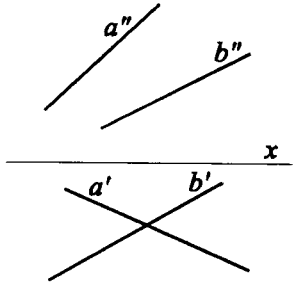


7.48 *α(a, b)*

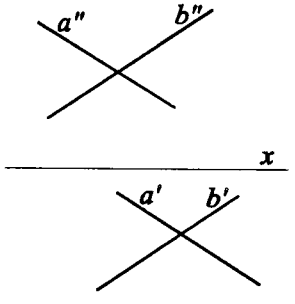


Dane są dwie proste skośne *a* i *b*. Zbudować trójkąt równoboczny o wysokości *h* tak, aby podstawa leżała na jednej prostej a wierzchołek na drugiej.

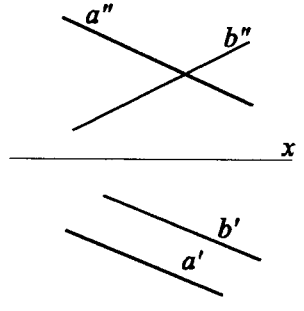
7.49 *h=2 cm*



7.50 *h=3 cm*

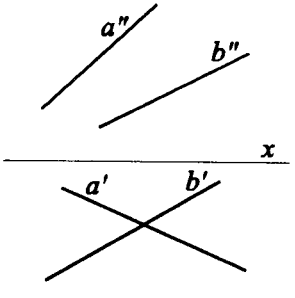


7.51 *h=4 cm*

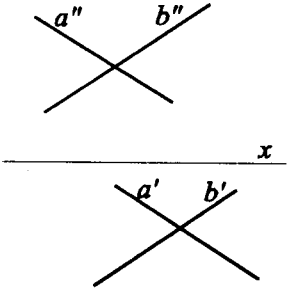


Narysować rzuty minimalnego okręgu stycznego do dwu prostych skośnych.

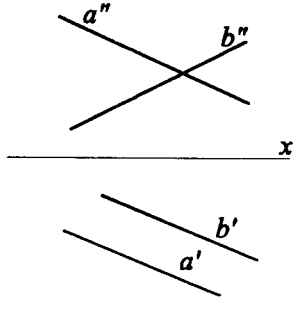
7.52 *h=2 cm*



7.53 *h=3 cm*

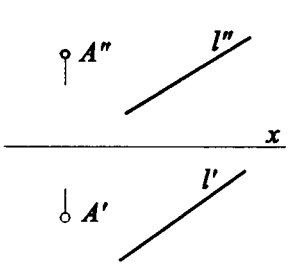


7.54 *h=4 cm*

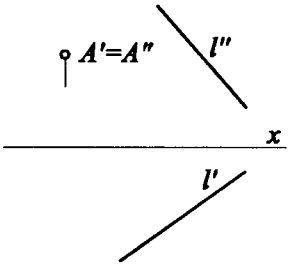


Obrócić punkt A wokół prostej l o kąt α. Podać obydwa rozwiązania.

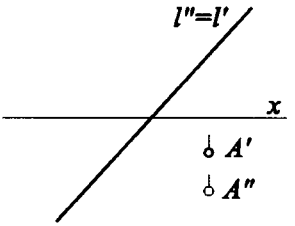
7.55 $\alpha=30°$



7.56 $\alpha=45°$

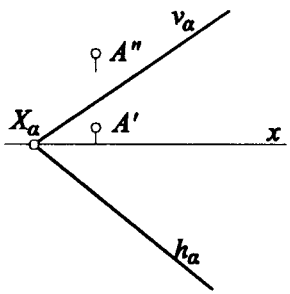


7.57 $\alpha=60°$

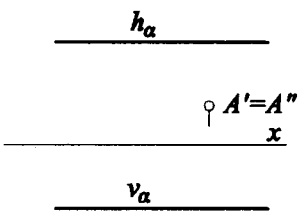


Przez punkt A poprowadzić dowolnie leżącą prostą tworzącą kąt φ z daną płaszczyzną α.

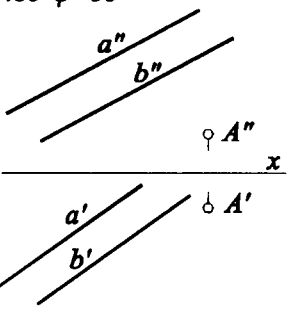
7.58 $\varphi=45°$



7.59 $\varphi=45°$

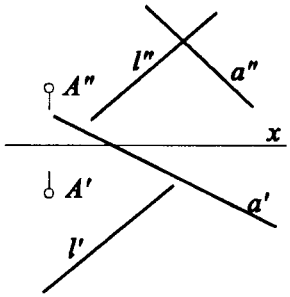


7.60 $\varphi=60°$

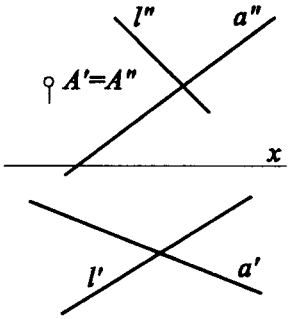


Obrócić prostą *a* wokół prostej *l* tak, aby po obrocie prosta *a* przechodziła przez punkt *A*.

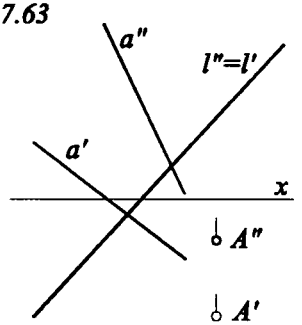
7.61



7.62



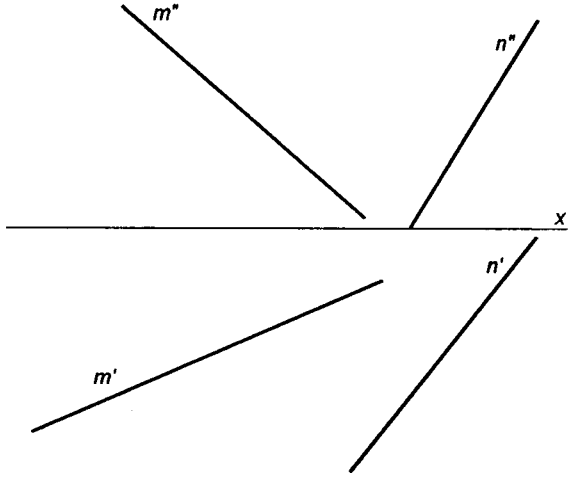
7.63

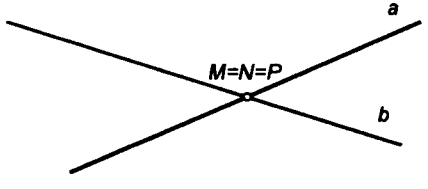


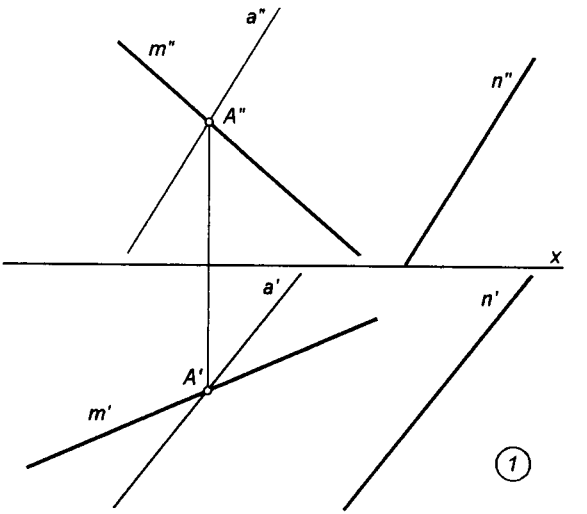
Ćwiczenie 7

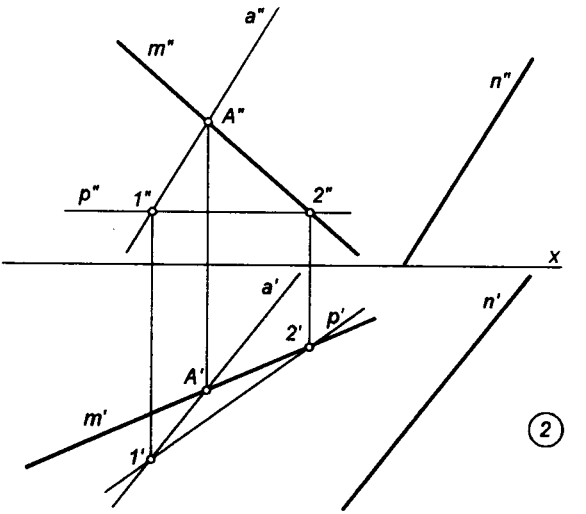
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

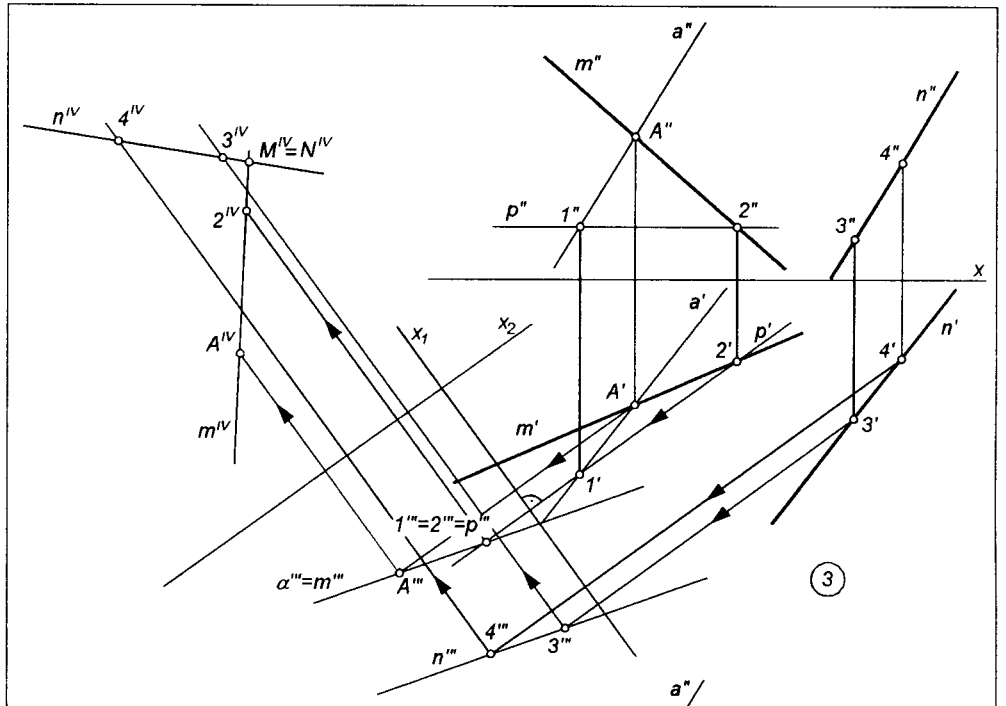
Wyznaczyć najkrótszy odcinek poziomy, którego końce leżą na dwóch prostych skośnych *m i n*.



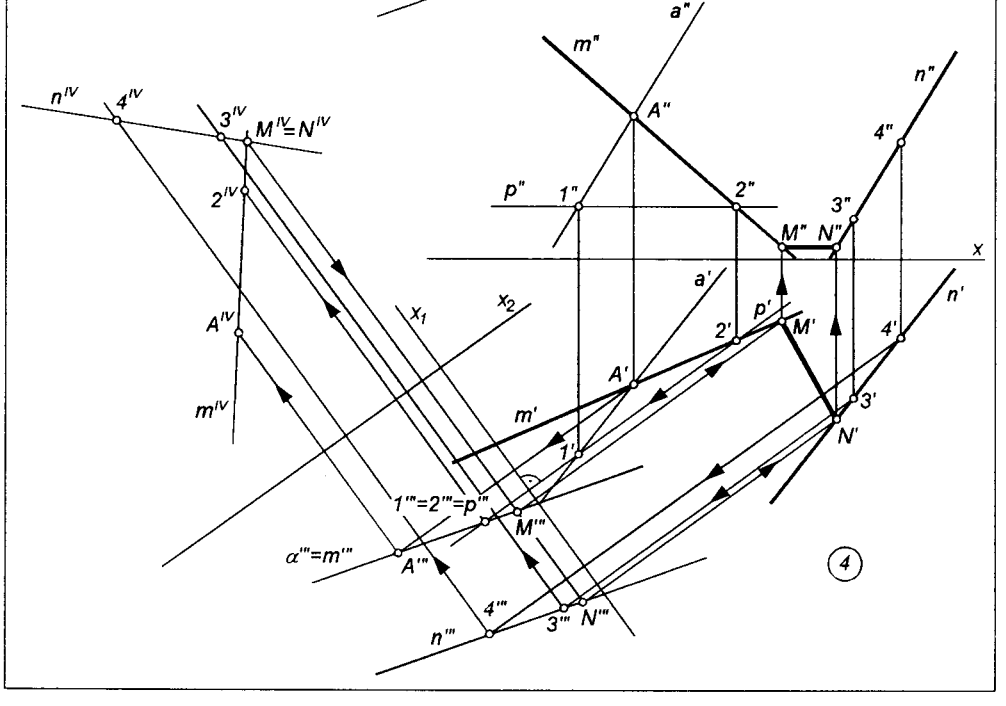



a"
m"
A"
n"
x
a'
n'
A'
m'
1


a"
m"
n"
A"
p"
1"
2"
x
a'
n'
2'
p'
A'
m'
1'
2



a"
m"
n"
A"
4"
p"
1"
2"
3"
x
a'
p'
2'
4'
n'
A'
3'
m'
1'
1'"=2'"=p'"
α'"=m'"
A'"
4'"
3'"
n'"
n^IV
4^IV
3^IV
M^IV=N^IV
2^IV
A^IV
m^IV
x1
x2
3



a"
m"
n"
A"
4"
p"
1"
2"
3"
M"
N"
x
a'
p'
M'
2'
4'
n'
A'
3'
m'
N'
1'
1'"=2'"=p'"
M'"
α'"=m'"
A'"
4'"
3'"
N'"
n'"
n^IV
4^IV
3^IV
M^IV=N^IV
2^IV
A^IV
m^IV
x1
x2
4

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 7

1. Przez dowolnie obrany na danej prostej m punkt A prowadzimy prostą a równoległą do danej prostej n ($a' \parallel n'$ i $a'' \parallel n''$). Otrzymujemy płaszczyznę $\alpha = am$ taką, że $\alpha \parallel n$.

2. Obieramy dowolnie prostą poziomą $p \in \alpha$, która przecina proste a i m w punktach 1, 2.

3. Obieramy oś nowego układu odniesienia $x_1 \perp p'$ i zmieniamy układ pierwotny $x(\pi_1,\pi_2)$ na układ odniesienia $x_1(\pi_1,\pi_3)$, w którym mamy $\pi_3 \perp \alpha$. Znajdujemy w nowym układzie odniesienia rzuty prostych należących do płaszczyzny α oraz rzuty prostej n. Otrzymujemy $a''' = m''' = p''' = \alpha'''$. Wprowadzamy kolejną oś rzutów $x_2 \perp x_1$ i otrzymujemy nowy układ odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$, w którym $\pi_4 \parallel p$. Znajdujemy w tym układzie rzuty n^{IV}, m^{IV} prostych m i n. Odnajdujemy punkt przecięcia się rzutów n^{IV} i m^{IV}. Punkt ten jest rzutem $\overline{M^{IV}N^{IV}}$ odcinka $\overline{MN}$, będącego rozwiązaniem zadania.

4. Mając dany rzut $\overline{M^{IV}N^{IV}}$ dokonujemy powrotu do pierwotnego układu rzutowania i odnajdujemy rzuty $\overline{M'N'}$ i $\overline{M''N''}$ najkrótszego poziomego odcinka, którego końce leżą na danych prostych m i n.

Ćwiczenie 8

WIELOŚCIANY I BRYŁY OBROTOWE

1. Wielościany

Wielościanem nazywamy geometryczną figurę przestrzenną złożoną ze skończonej liczby płaskich wielokątów, przy czym każdy bok jest wspólnym bokiem tylko dla dwóch wielokątów. Wielościany zbudowane są ze *ścian*, które mają wspólne *krawędzie*, a krawędzie mają wspólne *wierzchołki*.

Wśród wielościanów możemy w szczególności wyróżnić *ostrosłupy* i *graniastosłupy*.

Ostrosłupem nazywamy wielościan utworzony z wielokąta płaskiego o n bokach, będącego *podstawą ostrosłupa*, i z n trójkątów o wspólnym wierzchołku, zwanym *wierzchołkiem ostrosłupa*, stanowiących jego *ściany boczne*. Odległość wierzchołka ostrosłupa od jego podstawy nazywamy *wysokością ostrosłupa*. Wśród ostrosłupów wyróżniamy *ostrosłup prosty*, w którym krawędzie boczne mają jednakową długość, oraz *ostrosłup prawidłowy*, w którym dodatkowo podstawa jest wielokątem foremnym.

Graniastosłupem nazywamy wielościan utworzony z dwóch przystających wielokątów o n bokach, parami równoległych, zwanych *podstawami graniastosłupa*, oraz z n równoległoboków, stanowiących jego *ściany boczne*, które z kolei tworzą *pobocznicę graniastosłupa*. Jeżeli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do płaszczyzn podstaw, to graniastosłup taki nazywamy *prostym*. W przypadku, gdy podstawy graniastosłupa są wielokątami foremnymi, graniastosłup nazywamy *prawidłowym*. Graniastosłup, którego podstawą jest równoległobok, nazywamy *równoległościanem*, zaś graniastosłup o podstawie prostokąta – *prostopadłościanem*.

Wielościan będący przestrzenną figurą wypukłą nazywa się *wielościanem wypukłym*. Oznacza to, że zawierają się w nim wszystkie odcinki, których końce do niego należą. Do wielościanów wypukłych odnosi się twierdzenie Eulera: $W-K+S=2$, gdzie W oznacza liczbę wierzchołków, K – liczbę krawędzi, a S – liczbę ścian wielokąta.

Wielościan wypukły utworzony z przystających wielokątów foremnych, którego każdy wierzchołek należy do takiej samej liczby ścian, nazywamy *wielościanem foremnym* (*bryłą platońską*). Istnieje tylko pięć wielościanów foremnych: czworościan (cztery trójkąty równoboczne), sześcian (sześć kwadratów), ośmiościan (osiem trójkątów równobocznych), dwunastościan (dwanaście pięciokątów foremnych), dwudziestościan (dwadzieścia trójkątów równobocznych).

Przyjmując, że ściany wielościanu są nieprzezroczyste, w rzucie na rzutnię π, wykonanym zgodnie z kierunkiem rzutowania k, otrzymujemy ściany, krawędzie i wierzchołki widoczne (kreślone linią ciągłą) i niewidoczne (kreślone linią kreskową).

2. Bryły obrotowe

Obracając dowolną krzywą o kąt 360° dookoła dowolnej osi obrotu otrzymujemy powierzchnię obrotową. Najczęściej spotyka się powierzchnie obrotowe powstałe w wyniku obrotu prostej lub kuli. W pierwszym przypadku powstaje *powierzchnia walcowa* lub *stożkowa*, w drugim – *kula* lub *torus*.

Powierzchnia kuli lub inaczej *sfera* (*brzeg kuli*) powstaje w wyniku obrotu okręgu o kąt 180° wokół osi obrotu, leżącej w płaszczyźnie tego okręgu i przechodzącej przez jego środek. *Kula* jest bryłą stanowiącą zbiór punktów sfery i punktów położonych wewnątrz sfery. Każdy odcinek łączący dowolny punkt sfery ze środkiem kuli nazywamy *promieniem kuli*. Odcinek o końcach należących do sfery i przechodzący przez środek kuli nazywamy *średnicą kuli*.

Jeżeli obrotu okręgu dokonujemy dookoła osi obrotu leżącej w płaszczyźnie tego okręgu, ale nieprzechodzącej przez jego środek, to otrzymujemy bryłę zwaną *torusem*.

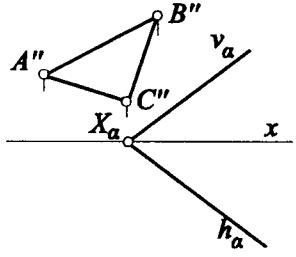
Zbiór prostych równoległych poprowadzonych przez dowolną krzywą nazywamy *powierzchnią walcową*. Krzywą tę nazywamy *kierownicą*, a proste - *tworzącymi powierzchni walcowej*. W przypadku gdy krzywa jest okręgiem, a tworzące są prostopadłe płaszczyzny tego okręgu, powstaje *powierzchnia walcowa obrotowa*. Jeżeli poprowadzimy zbiór prostych przez kierownicę i dowolny punkt nieleżący na płaszczyźnie kierownicy, to powstaje *powierzchnia stożkowa*. Gdy kierownicą jest okrąg, a prosta przechodząca przez ten punkt i środek okręgu jest prostopadła do płaszczyzny okręgu, to powierzchnię taką nazywamy *powierzchnią stożkową obrotową*.

Dowolny punkt leży na powierzchni walcowej lub stożkowej, jeżeli leży na tworzącej jej powierzchni.

ZADANIA. Ćwiczenie 8

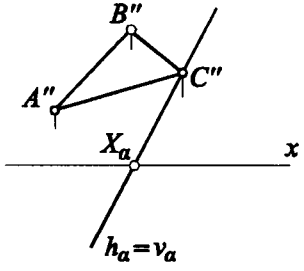
Wykreslić rzuty ostrosłupa o podstawie trójkąta położonej na płaszczyźnie α i wysokosci h.

8.1 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



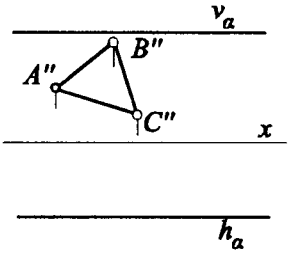
$h = 50mm$

8.2 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



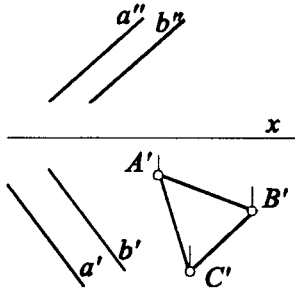
$h = 60mm$

8.3 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



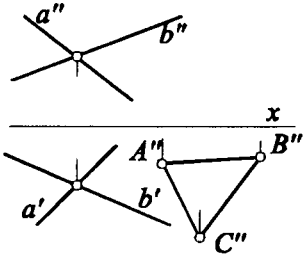
$h = 70mm$

8.4 $\alpha(a, b)$



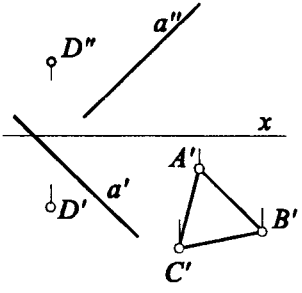
$h = 50mm$ $a \parallel b$

8.5 $\alpha(a, b)$



$h = 60mm$

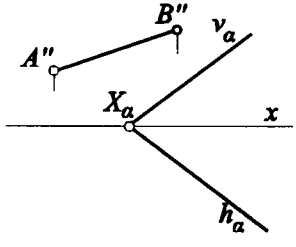
8.6 $\alpha(D, a)$



$h = 70mm$

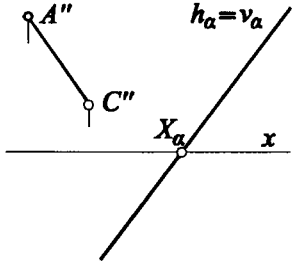
Dana jest przekątna kwadratowej podstawy ostrosłupa o wysokości h, stojacego na płaszczyźnie α. Wykreślić rzuty tego ostrosłupa.

8.7 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



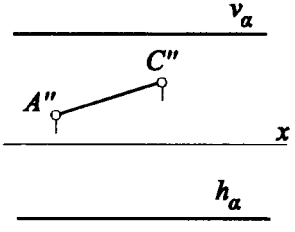
$h = 70mm$

8.8 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



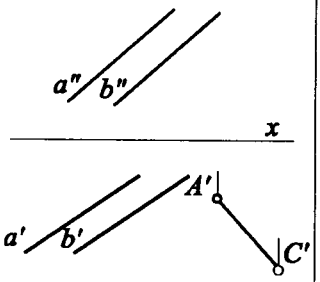
$h = 60mm$

8.9 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



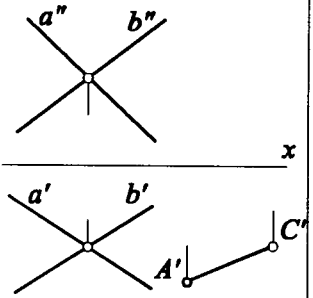
$h = 50mm$

8.10 $\alpha(a, b)$



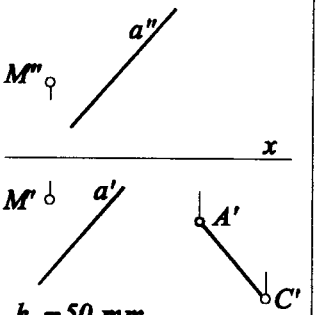
$h = 70\ mm$ $a \parallel b$

8.11 $\alpha(a, b)$



$h = 60\ mm$

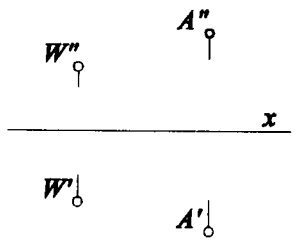
8.12 $\alpha(M, a)$



$h = 50\ mm$

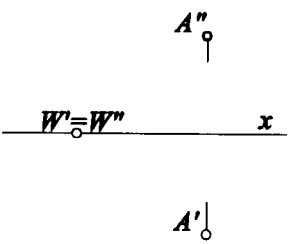
Wykreślić rzuty prawidłowego ostrosłupa trójściennego o wierzchołku W i jednym z wierzchołków podstawy A, gdy wysokość tego ostrosłupa jest nachylona pod kątem α do π_1 i pod kątem β do π_2.

8.13



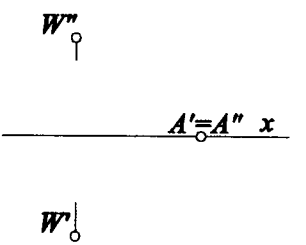
$\alpha = 30°$ $\beta = 45°$

8.14



$\alpha = 45°$ $\beta = 30°$

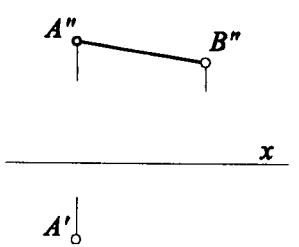
8.15



$\alpha = 30°$ $\beta = 30°$

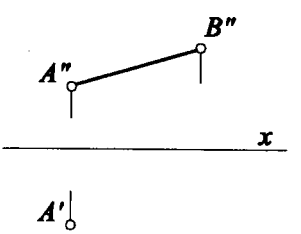
Wykreślić rzuty sześcianu o krawędzi AB, leżącej na płaszczyźnie γ nachylonej do π_1 pod kątem α i do π_2 pod kątem β.

8.16



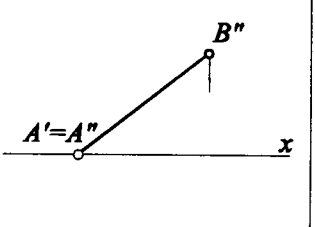
$\alpha = 60°$ $\beta = 60°$

8.17



$\alpha = 45°$ $\beta = 60°$

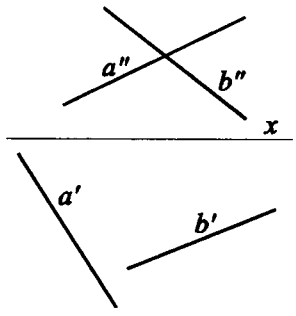
8.18



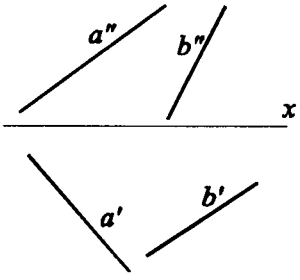
$\alpha = 60°$ $\beta = 45°$

Dane są dwie proste skośne *a* i *b*. Skonstruować sześcian o krawędzi równej odległości tych prostych i jednej krawędzi położonej na prostej *a*.

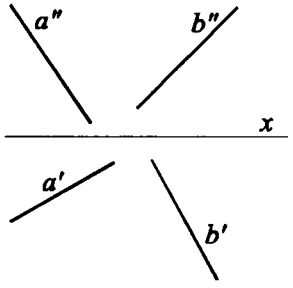
8.19



8.20

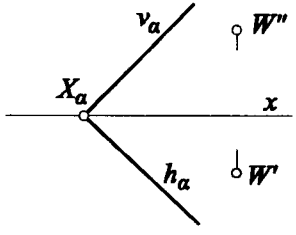


8.21

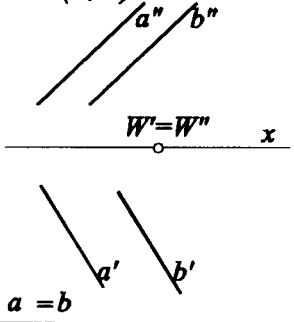


Wykreślić rzuty czworościanu foremnego o wierzchołku *W* i podstawie leżącej na płaszczyźnie *α*.

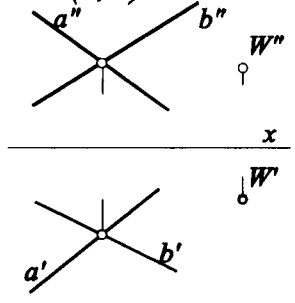
8.22 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



8.23 $\alpha(a, b)$

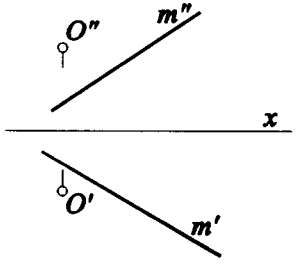


8.24 $\alpha(a, b)$

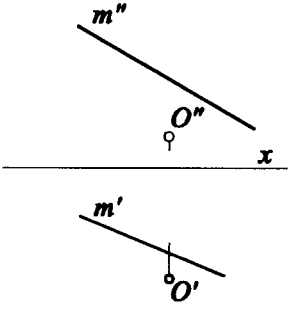


Dany jest środek *O* jednej ze ścian sześcianu oraz prosta *m*, na której leży krawędź prostopadła do tej ściany. Wykreślić rzuty sześcianu. Podać liczbę rozwiązań.

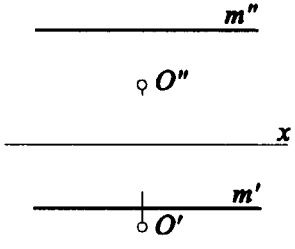
8.25



8.26

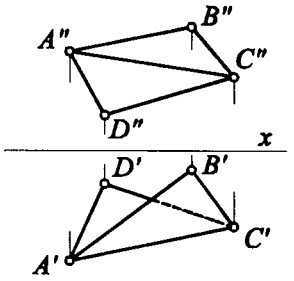


8.27



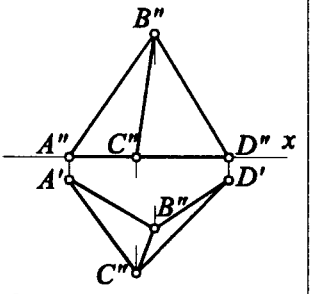
Wykreślić rzuty walca o wysokości h i średnicy d stycznej do danych dwu płaszczyzn.

8.28 $\alpha(A, B, C)$; $\beta(A, C, D)$



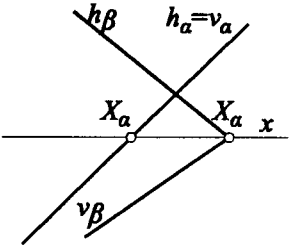
$d=30$ mm; $h=50$ mm

8.29 $\alpha(A, B, C)$; $\beta(B, C, D)$



$d=40$ mm; $h=60$ mm

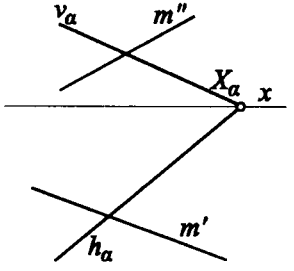
8.30 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$



$d=40$ mm; $h=70$ mm

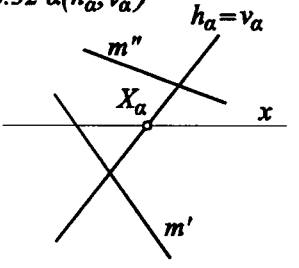
Wykreślić rzuty prostego stożka stojącego na płaszczyźnie α, o wysokości h i wierzchołku W leżącym na prostej m.

8.31 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



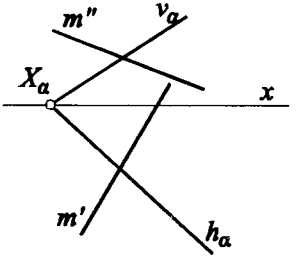
$h=50$ mm

8.32 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



$h=60$ mm

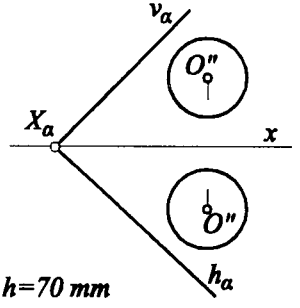
8.33 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



$h=70$ mm

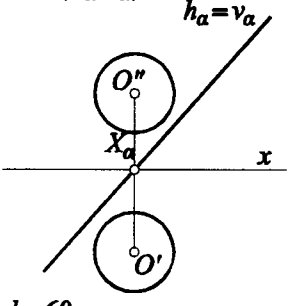
Wykreślić rzuty prostego stożka o wysokości h, opisanego na kuli o środku O i podstawie na płaszczyźnie α.

8.34 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



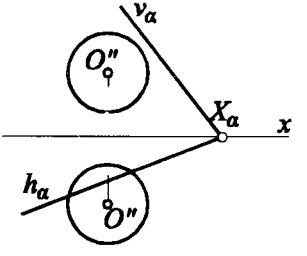
$h=70$ mm

8.35 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



$h=60$ mm

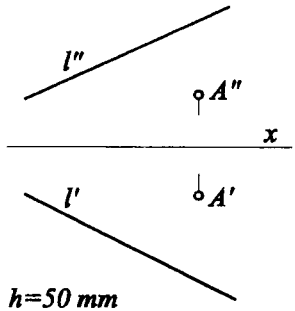
8.36 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



$h=80$ mm

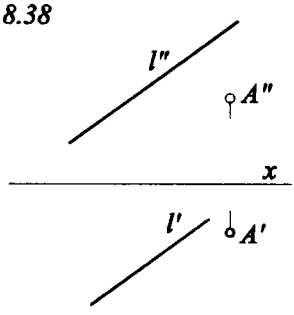
Wyznaczyć rzuty prostego walca obrotowego o osi l, wysokości h i podstawie stycznej do rzutni π_1. Punkt A leży na powierzchni walca.

8.37



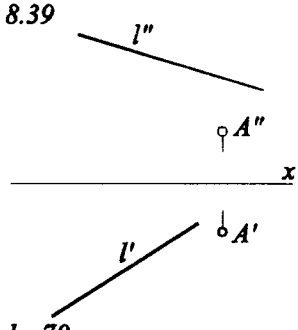
h=50 mm

8.38



h=60 mm

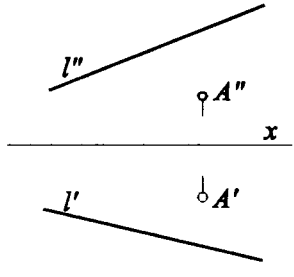
8.39



h=70 mm

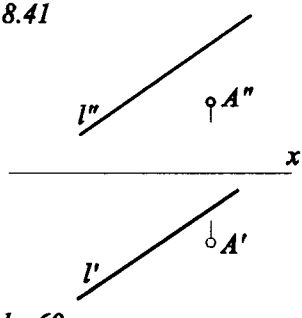
Wyznaczyć rzuty prostego walca obrotowego o osi l, wysokości h i podstawie stycznej do rzutni π_2. Punkt A leży na powierzchni walca.

8.40



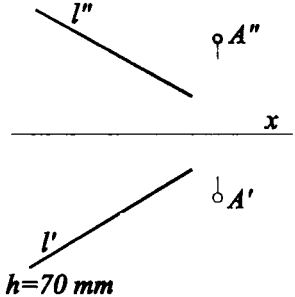
h=50 mm

8.41



h=60 mm

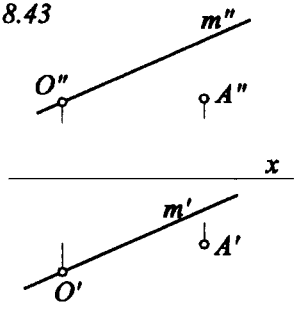
8.42



h=70 mm

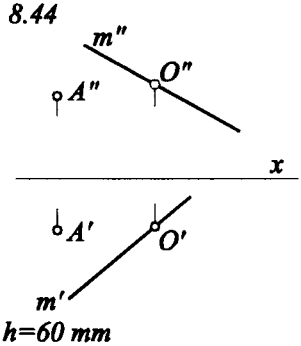
Wyznaczyć rzuty prostego stożka obrotowego o środku podstawy O, osi m i wysokości h. Punkt A leży na powierzchni stożkowej.

8.43



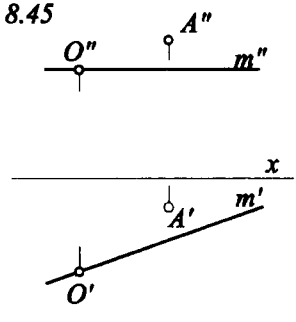
h=50 mm

8.44



h=60 mm

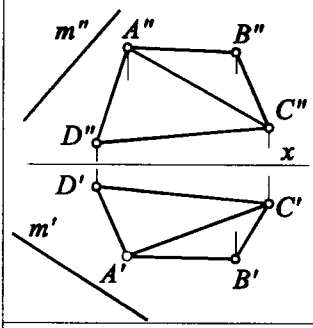
8.45



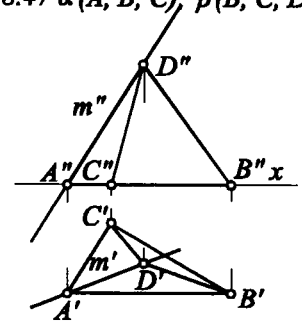
h=70 mm

Wykreślić rzuty kuli o środku O leżącym na prostej m, stycznej do danych płaszczyzn α i β.

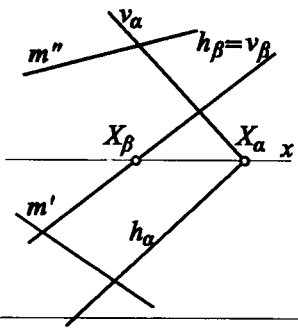
8.46 $\alpha(A, B, C)$; $\beta(A, C, D)$



8.47 $\alpha(A, B, C)$; $\beta(B, C, D)$

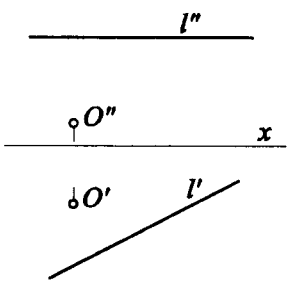


8.48 $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; $\beta(h_\beta, v_\beta)$

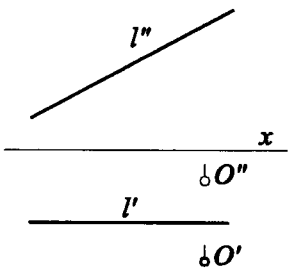


Wykreślić rzuty torusa powstałego w wyniku obrotu okręgu o średnicy d i środku O wokół prostej l.

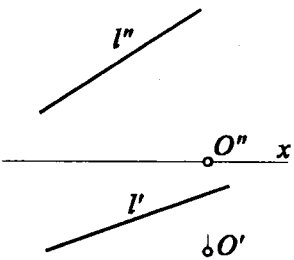
8.49 $d=2cm$



8.50 $d=2cm$

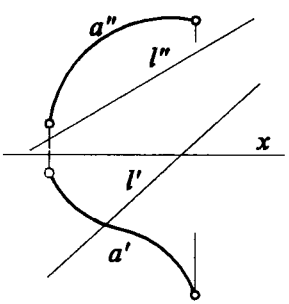


8.51 $d=2cm$

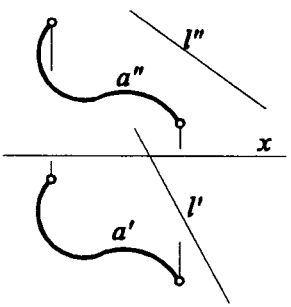


Wykreślić rzuty bryły powstałej w wyniku obrotu fragmentu krzywej a wokół prostej l.

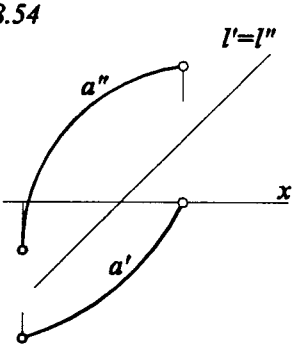
8.52



8.53



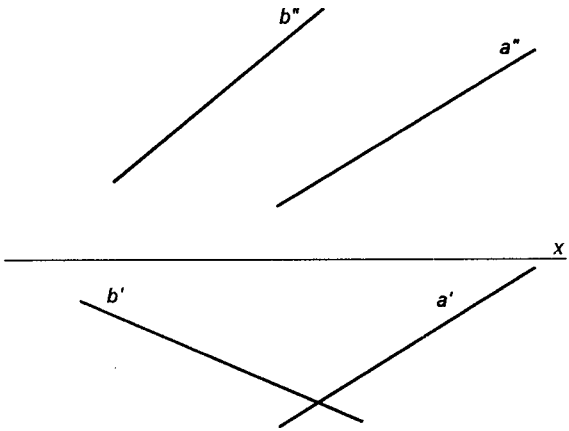
8.54

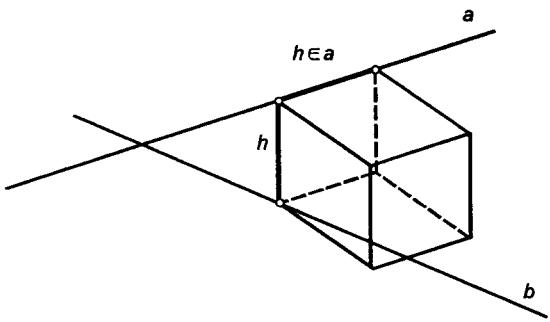


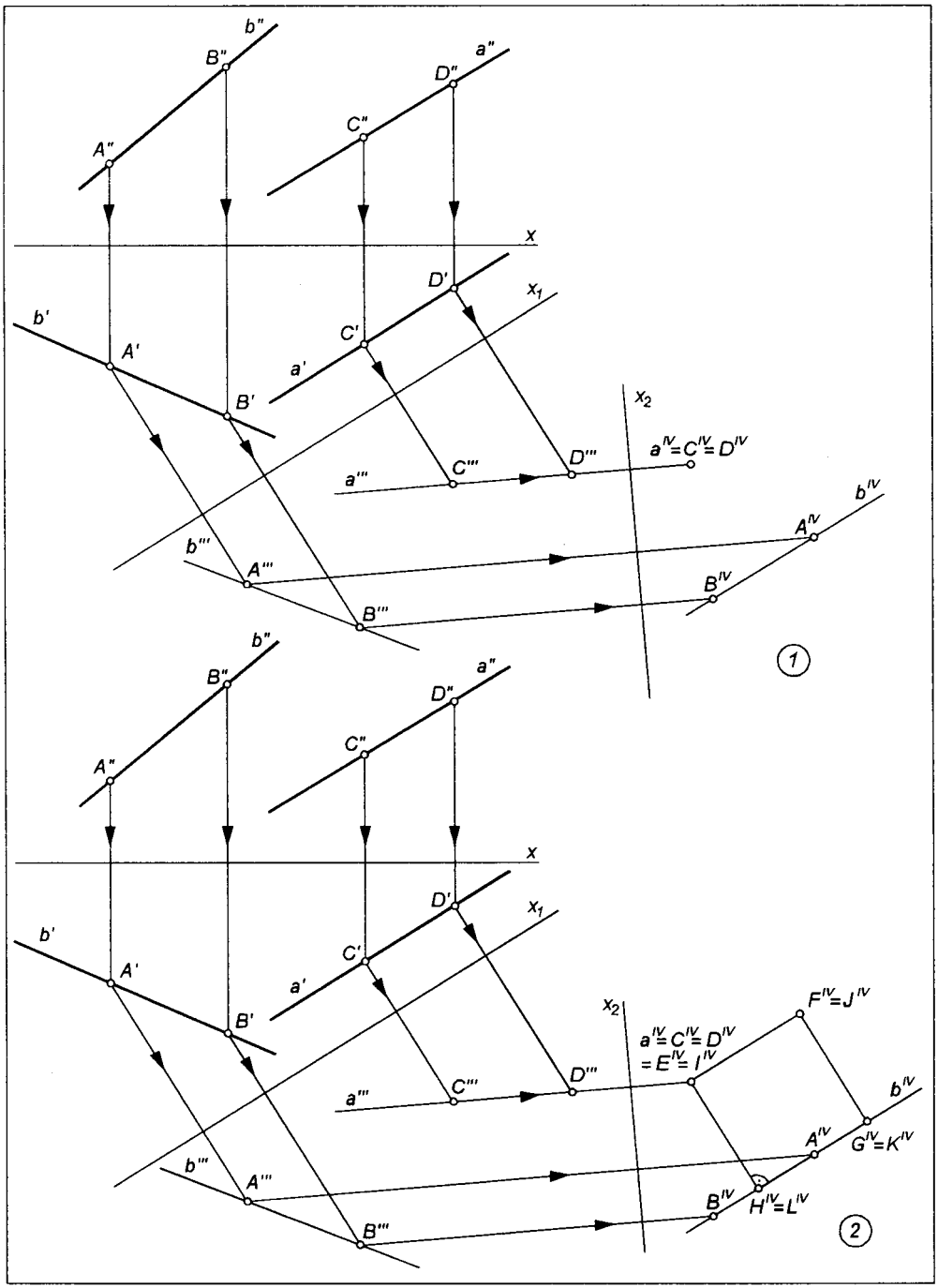
Ćwiczenie 8a

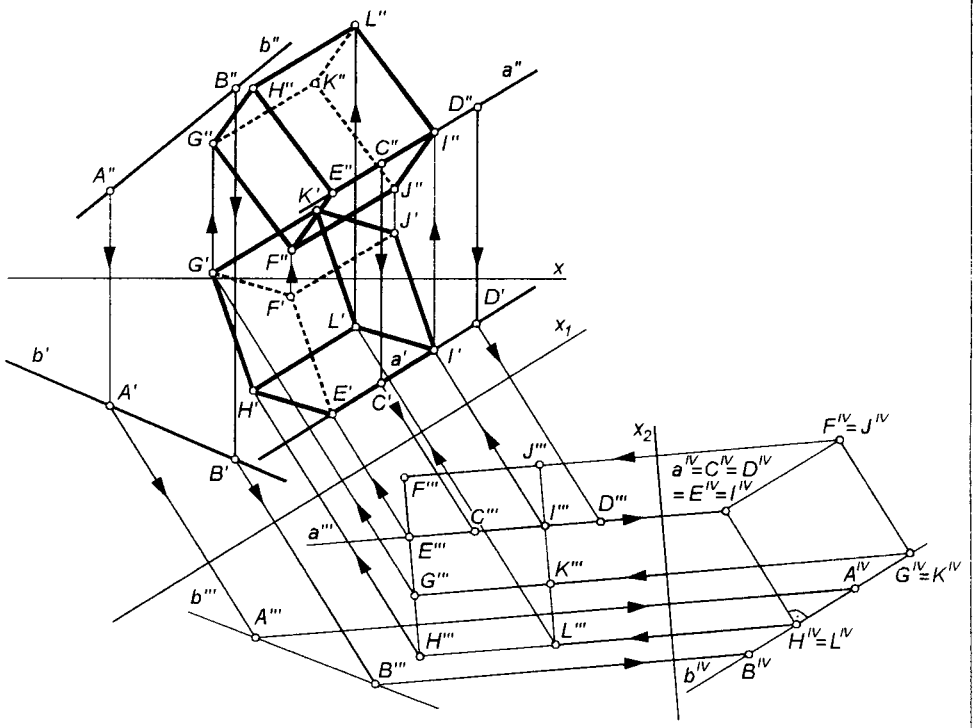
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

Dane są dwie proste *a i b*. Skonstruować sześcian o krawędzi równej odległości tych prostych i jednej krawędzi położonej na prostej *a*.






b''
B''
a''
D''
C''
A''
x
D'
x1
b'
C'
A'
a'
B'
x2
a'''
C'''
D'''
a^IV=C^IV=D^IV
b^IV
A^IV
b'''
A'''
B^IV
B'''
1
b''
B''
a''
D''
C''
A''
x
D'
x1
b'
C'
A'
a'
B'
x2
F^IV=J^IV
a^IV=C^IV=D^IV
=E^IV=I^IV
a'''
C'''
D'''
b^IV
A^IV
G^IV=K^IV
b'''
A'''
B^IV
H^IV=L^IV
B'''
2


L''
b''
a''
B''
H''
K''
D''
G''
C''
I''
A''
E''
K'
J''
J'
G'
F''
x
F'
D'
L'
x1
b'
a'
I'
A'
H'
E'
C'
x2
F^IV = J^IV
J'''
a^IV = C^IV = D^IV
= E^IV = I^IV
B'
F'''
C'''
I'''
D'''
a'''
E'''
G'''
K'''
A^IV
G^IV = K^IV
b'''
A'''
H'''
L'''
H^IV = L^IV
B'''
b^IV
B^IV
3

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 8a

1. Stosujemy w zadaniu metodę transformacji układu odniesienia, zmieniając w pierwszym etapie pierwotny układ $x(\pi_1,\pi_2)$ na układ nowy $x_1(\pi_1,\pi_3)$, w którym prosta a staje się prostą czołową ($x_1 \parallel a'$). Znajdujemy trzecie rzuty a''', b''' prostych a i b. Wprowadzamy kolejny układ odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$, w którym prosta a jest prostopadła do rzutni $\pi_4(x_2 \perp a''')$. Znajdujemy czwarte rzuty a^{IV}, b^{IV} prostych a i b. Rzut a^{IV} otrzymujemy w postaci punktu, co oznacza., że w układzie odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$ otrzymaliśmy taki układ rzutów prostych a, b, który pozwala na bezpośrednie wyznaczenie odległość między nimi (długość odcinka poprowadzonego z a^{IV} prostopadle do przecięcia się z b^{IV}).

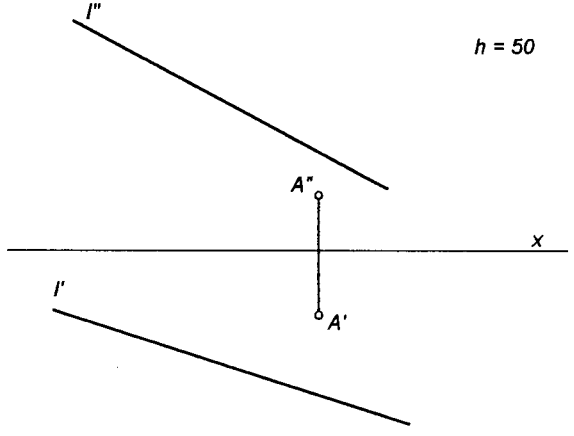
2. Konstruujemy rzut sześcianu na rzutnię π_4, który w naszym przypadku będzie kwadratem o boku równym odległości rzutów a^{IV} i b^{IV}, czyli odległości prostych a i b. Należy przy tym zauważyć, że istnieje pewna dowolność w wyborze położenia tego kwadratu, jedynym ograniczeniem jest to, aby rzut jednego z wierzchołków znajdował się na rzucie a^{IV} prostej a (w ten sposób czwarty rzut jednej krawędzi sześcianu jest punktem, co oznacza, że krawędź ta leży na prostej a).

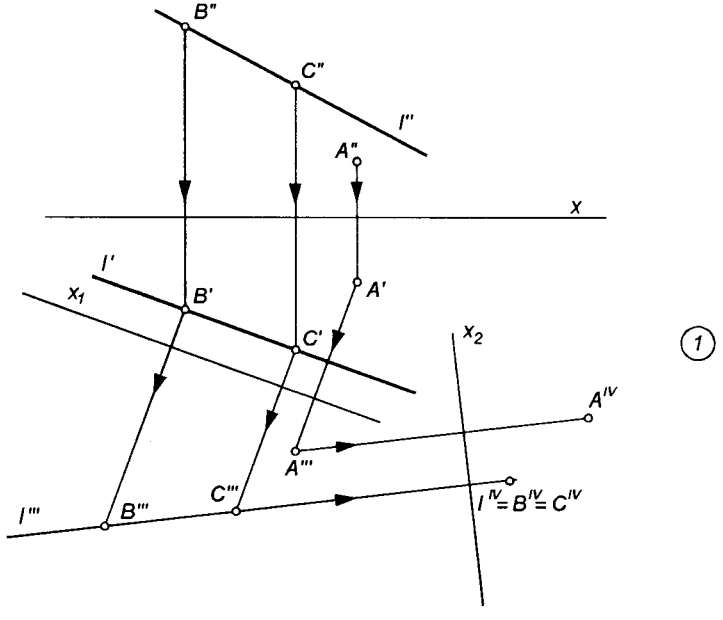
3. Wyznaczamy rzut sześcianu na rzutnię π_3, poczynając od ustalenia rzutu krawędzi położonej na prostej a, tj. rzutu $\overline{E'''I'''}$ (długość tego rzutu jest równa rzeczywistej długości krawędzi sześcianu, która może być umieszczona w dowolnym miejscu rzutu a''', ponieważ położenie krawędzi $\overline{EI}$ na prostej a nie jest w warunkach zadania ściśle określone). Rzuty ściany $I'''J'''K'''L'''$ oraz $E'''F'''G'''H'''$ otrzymujemy w postaci odcinków równoległych do osi układu odniesienia x_2. Mając wyznaczony trzeci i czwarty rzut sześcianu możemy, odmierzając odpowiednie odległości, skonstruować jego rzuty w pierwotnym układzie rzutowania. Wyznaczamy widoczność krawędzi sześcianu. Ponieważ wierzchołek L ma największą wysokość, musi być widoczny w rzucie z góry (poziomym). Widoczne muszą być więc także te ściany (krawędzie), które łączą się z wierzchołkiem L. Krawędzie łączące się z wierzchołkiem F będą przysłonięte i niewidoczne na rzucie poziomym sześcianu. Podobnie postępujemy określając widoczność na rzucie pionowym. W tym przypadku widoczny będzie wierzchołek o największej głębokości, tj. E, a niewidoczne krawędzie łączące się z wierzchołkiem K.

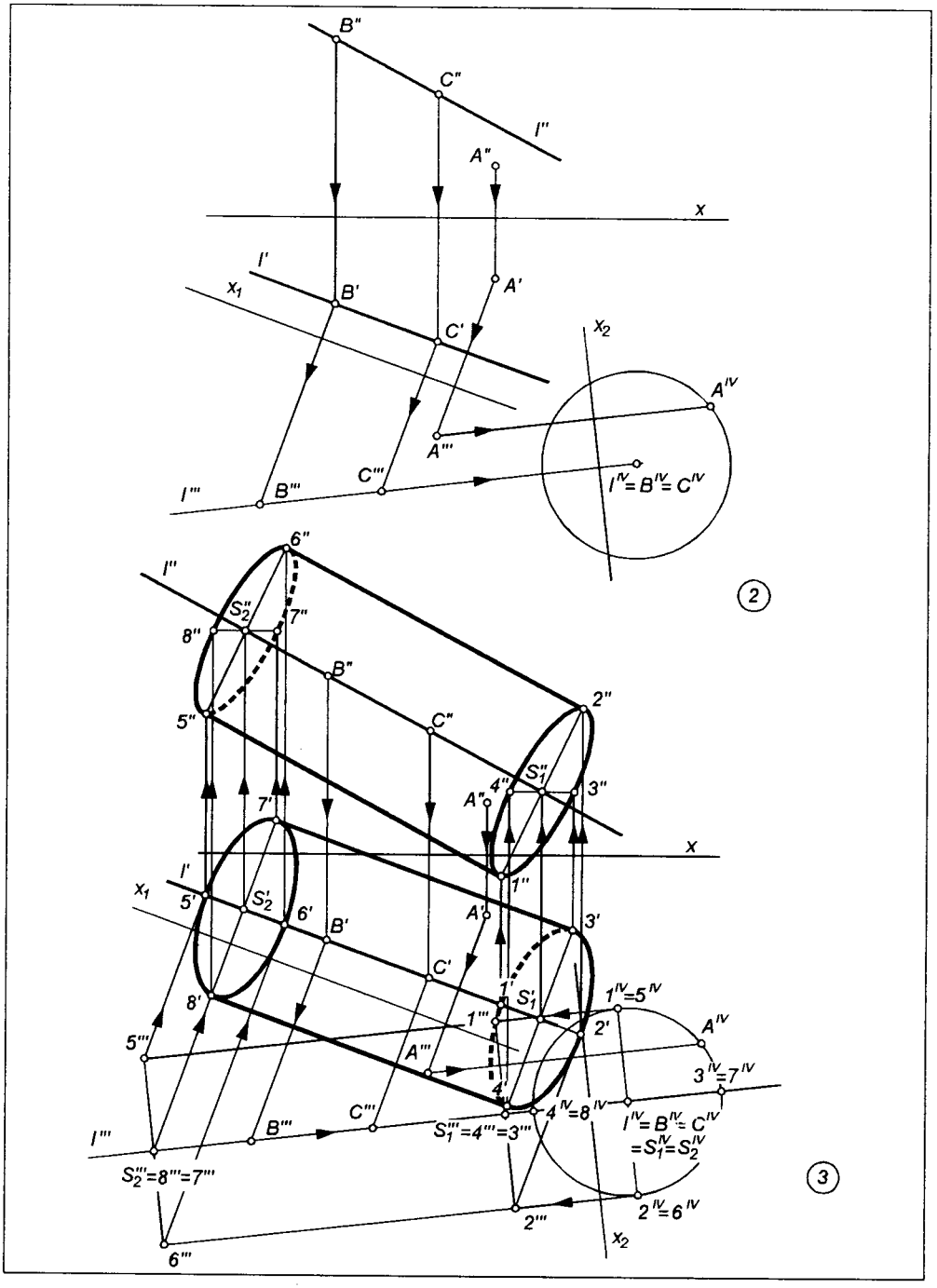
Ćwiczenie 8b

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

Wyznaczyć rzuty prostego walca obrotowego o osi *l*, wysokości *h* i podstawie stycznej do rzutni π_1 (punkt *A* leży na powierzchni walca).






B''
C''
l''
A''
x
l'
x1
B'
A'
C'
x2
A^IV
A'''
C'''
l'''
B'''
l^IV=B^IV=C^IV
2
6''
l''
S2''
7''
8''
B''
2''
5''
C''
S1''
4''
3''
A''
7'
x
l'
1''
x1
5'
S2'
6'
B'
A'
3'
C'
1'
S1'
1^IV=5^IV
8'
1'''
2'
A^IV
5'''
A'''
3^IV=7^IV
4'
4^IV=8^IV
C'''
l^IV=B^IV=C^IV
=S1^IV=S2^IV
l'''
B'''
S1'''=4'''=3'''
S2'''=8'''=7'''
3
2'''
2^IV=6^IV
x2
6'''

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 8b

1. Wprowadzamy oś nowego układu odniesienia $x_1 \parallel l'$ i zmieniamy pierwotny układ $x(\pi_1,\pi_2)$ na układ nowy $x_1(\pi_1,\pi_3)$, w którym dana prosta l przyjmuje położenie prostej czołowej. W nowym układzie odniesienia wyznaczamy rzuty l''' i A'''. Następnie wprowadzamy oś $x_2 \perp l'''$ oraz nowy układ rzutowania $x_2(\pi_3,\pi_4)$, w którym prosta l jest prostopadła do rzutni π_4. Wyznaczamy czwarte rzuty prostej l i punktu A. Otrzymujemy czwarty rzut prostej l^{IV} w postaci punktu.

2. Odcinek $\overline{l^{IV}A^{IV}}$ wyznacza promień podstawy poszukiwanego walca. Pozwala to narysować czwarty rzut walca. Ponieważ oś walca l w układzie odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$ jest prostopadła do rzutni π_4, to czwarty rzut otrzymamy w postaci okręgu.

3. Na czwartym rzucie podstawy obieramy punkty 1^{IV}, 2^{IV}, 3^{IV},4^{IV}, a następnie przystępujemy do wyznaczenia trzecich rzutów tych punktów. Położenie rzutu l''' wyznaczamy, wiedząc że podstawa walca jest styczna do rzutni π_1, z czego wynika, że rzut ten musi się znajdować na osi x_1. Rzuty $2'''$, $3'''$, $4'''$ zaś są położone na odcinku równoległym do osi x_2 i poprowadzonym z rzutu l''' (jest to trzeci rzut podstawy walca). Ponieważ w układzie odniesienia $x_1(\pi_1,\pi_3)$ prosta l jest równoległa do rzutni π_3, to na rzucie l''' możemy odmierzyć rzeczywistą wysokość walca h. Zaznaczamy środek jednej podstawy $S_1''' = 3''' = 4'''$, a następnie odmierzamy podaną w zadaniu wysokość h i zaznaczamy S_2''' środka drugiej podstawy. Zaznaczamy rzuty punktów $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$, należących do drugiej podstawy. Jeszcze raz powracamy do czwartego rzutu, na którym zaznaczamy rzuty 5^{IV}, 6^{IV}, 7^{IV}, 8^{IV},S_1^{IV},S_2^{IV}. Mając dany trzeci i czwarty rzut walca możemy powrócić do pierwotnego układu odniesienia i wyznaczyć w nim poziomy i pionowy rzut walca. Na rzucie pionowym widoczna będzie ta podstawa, na której znajduje się punkt o największej głębokości, a na rzucie poziomym widoczna będzie ta podstawa walca, na której znajduje się punkt o największej wysokości.

Uwaga: Rzuty podstaw walca przyjmują postać elipsy. Istnieją sposoby dokładnego wykreślenia elipsy, przy znanych (jak w końcowym etapie zadania) *średnicach sprzężonych.*

Ćwiczenie 9

PRZEKROJE WIELOŚCIANÓW

Wielokąt, którego boki są krawędziami pewnej płaszczyzny ze ścianami wielościanu nazywamy *przekrojem wielościanu* tą płaszczyzną. Przekrój wielościanu wypukłego jest wielokątem wypukłym.

Przekrój wielościanu daną płaszczyzną znajdujemy wyznaczając punkty przebicia płaszczyzny prostymi, na których położone są krawędzie tego wielościanu. Najprostszą, ale jednocześnie najbardziej pracochłonną metodą wyznaczania tych punktów jest metoda polegająca na poprowadzeniu płaszczyzn rzutujących przez wszystkie krawędzie danego wielościanu. Wygodniejszą w zastosowaniu i dającą bardziej przejrzysty rysunek jest w tym przypadku metoda transformacji układu odniesienia.

Punkt przebicia wielościanu prostą wyznaczamy dokonując następujących kolejnych czynności:

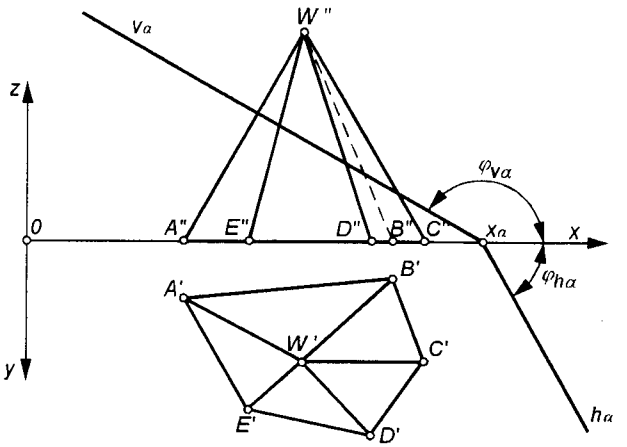
a) przez prostą prowadzimy płaszczyznę pomocniczą,
b) wyznaczamy przekrój wielościanu tą płaszczyzną,
c) punkty wspólne przekroju i prostej są punktami przebicia wielościanu prostą.

Na ogół poszukiwana jest wielkość rzeczywista przekroju wielościanu płaszczyzną. Uzyskujemy ją sprowadzając płaszczyznę tnącą wraz z wyznaczonym przekrojem na rzutnię, stosując do tego celu jedną z metod: obrót, kład lub transformację.

Rozwinięciem wielościanu nazywamy figurę płaską, która powstaje z rozcięcia wielościanu wzdłuż części krawędzi i następujących po nim obrotów ścian dookoła nie rozciętych krawędzi, po których wszystkie ściany są sprowadzone do jednej płaszczyzny (płaszczyzna rysunku). Po rozwinięciu każda z krawędzi dowolnej ściany wielościanu jest jednocześnie krawędzią co najmniej jednej z pozostałych ścian.

ZADANIA. Ćwiczenie 9

Wyznaczyć dwa rzuty przekroju ostrosłupa płaszczyzną α.
Znaleźć wielkość rzeczywistą przekroju.

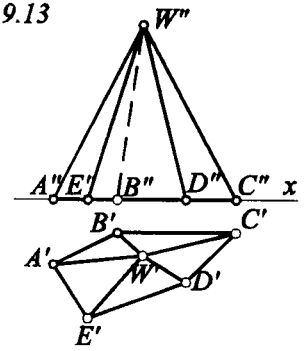


Numery zadań	Ostrosłup																		Płaszczyzna tnąca α		
	Wierzchołki podstawy															Wierzchołek ostrosłupa					
	A			B			C			D			E			W					
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x_α	$\varphi_{h\alpha}$	$\varphi_{V\alpha}$
9.1	20	25	0	40	5	0	75	10	0	60	40	0	35	48	0	50	25	65	105	135	150
9.2	20	25	0	40	5	0	75	10	0	60	40	0	35	48	0	50	25	65	90	135	120
9.3	20	25	0	40	5	0	75	10	0	60	40	0	35	48	0	50	25	65	25	120	30
9.4	100	25	0	80	5	0	45	10	0	60	40	0	85	48	0	70	25	65	15	45	30
9.5	45	10	0	75	5	0	90	20	0	80	40	0	50	45	0	65	25	60	0	30	30
9.6	45	10	0	75	5	0	90	20	0	80	40	0	50	45	0	65	25	60	60	150	45
9.7	20	25	0	40	5	0	75	10	0	60	40	0	35	48	0	50	25	65	90	120	135
9.8	50	20	0	70	5	0	110	25	0	80	60	0				45	50	55	0	45	35
9.9	50	60	0	29	40	0	66	5	0	74	34	0				55	30	60	100	120	135
9.10	50	5	0	70	34	0	50	65	0	7	67	0				50	35	60	100	120	135
9.11	39	19	0	75	35	0	47	65	0							50	30	50	100	120	150
9.12	20	0	25	45	0	45	65	0	30	55	0	5	25	0	5	50	55	35	0	30	60

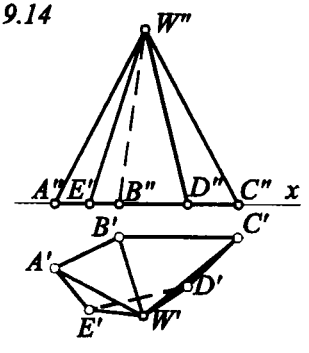
Wyznaczyć rzuty i znaleźć wielkość rzeczywistą przekroju ostrosłupa (graniastosłupa) płaszczyzną a przechodzącą przez:

a) bok AB podstawy i połowę wysokości,

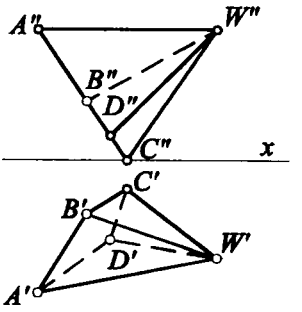
9.13



9.14

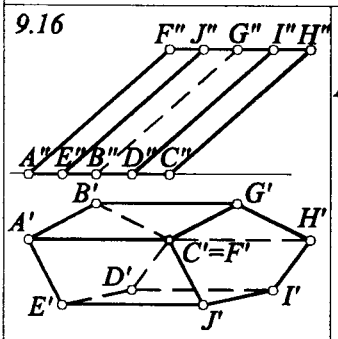


9.15

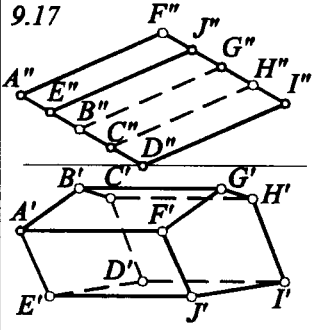


b) bok AB podstawy i środek ściany $CDHI$,

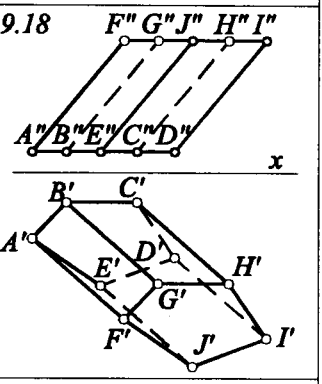
9.16



9.17

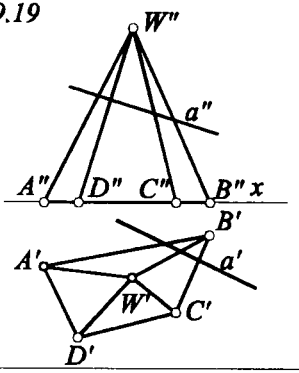


9.18

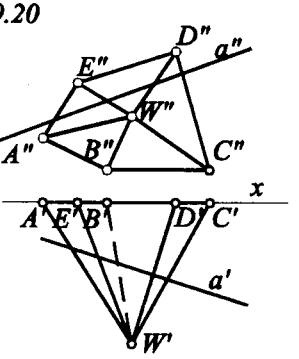


c) prostą a i wierzchołek podstawy,

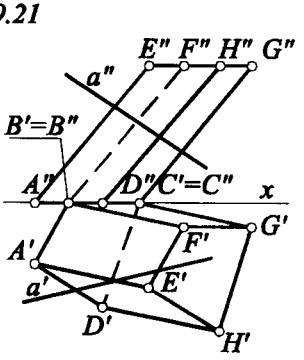
9.19



9.20

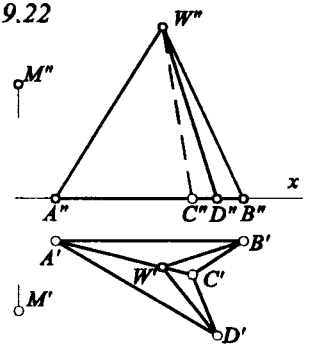


9.21

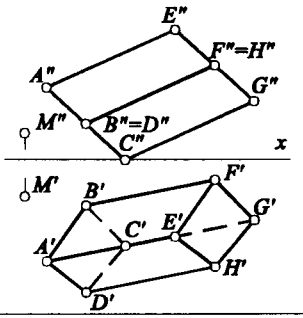


d) bok AB podstawy i punkt M.

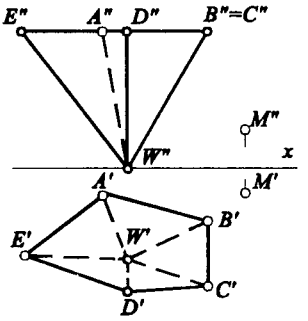
9.22



9.23



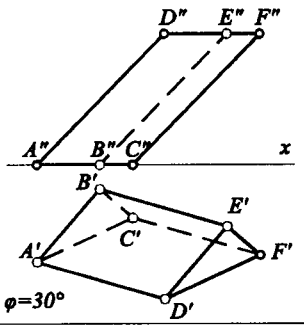
9.24



Dokonać przekroju i wyznaczyć jego wielkość rzeczywistą płaszczyzną α przechodzącą przez 1/2 wysokości i tworzącą kąt φ z dowolną ścianą boczną:

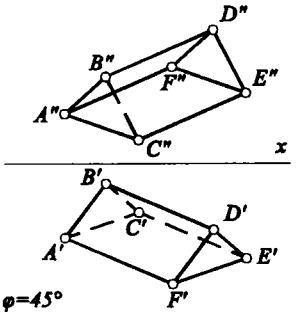
a) prostopadłościanu (wysokość jest "prostą" przechodzącą przez środki okręgów opisanych na jego podstawach),

9.25



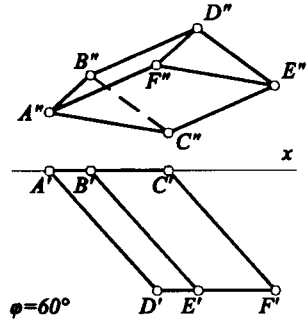
$\varphi=30°$

9.26



$\varphi=45°$

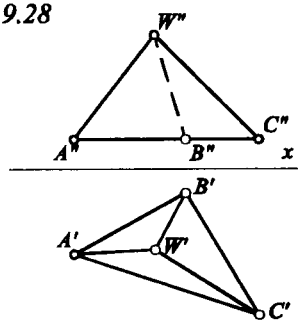
9.27



$\varphi=60°$

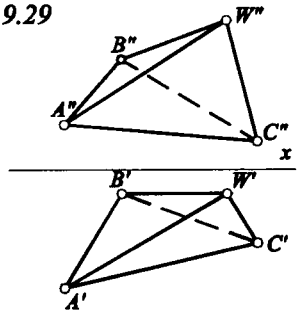
b) ostrosłupa.

9.28



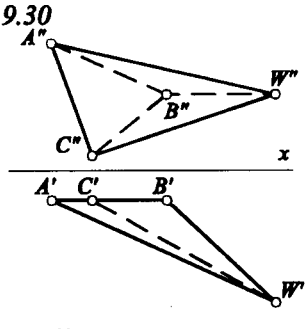
$\varphi=30°$

9.29



$\varphi=45°$

9.30



$\varphi=60°$

Przeciąć czworościan foremny tak, aby jego przekrojem był kwadrat. Podać liczbę rozwiązań. Na jaki nowy wielościan złożą się te przekroje?

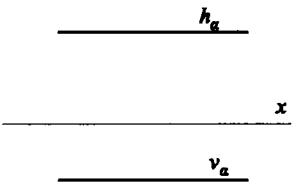
9.31

podstawa o boku 6 cm leży na rzutni π_1

9.32

podstawa o boku 7 cm leży na rzutni π_2

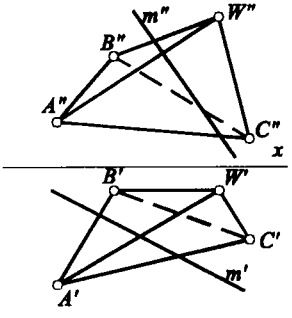
9.33



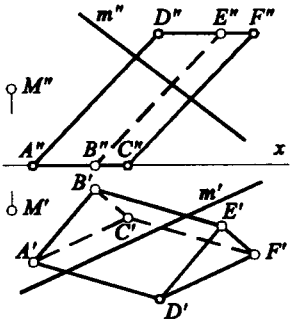
podstawa o boku 8 cm leży na płaszczyźnie α

Znaleźć rzuty przekroju płaszczyzną przechodzącą przez punkty przebicia wielościanu prostą m i punkt M.

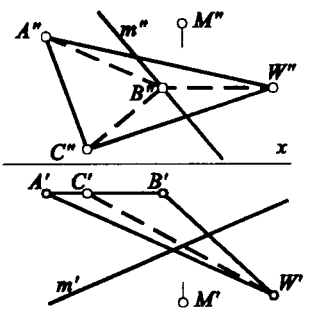
9.34



9.35

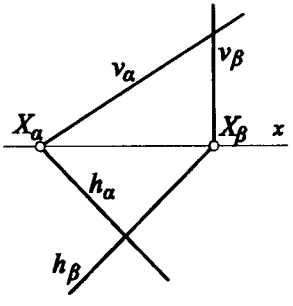


9.36

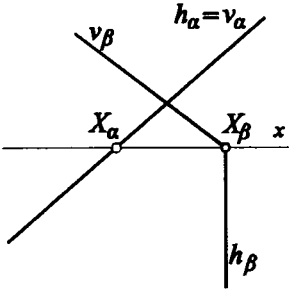


Znaleźć rzuty przekroju sześcianu o boku a stojącego na płaszczyźnie α płaszczyzną β. Określić wielkość rzeczywistą przekroju.

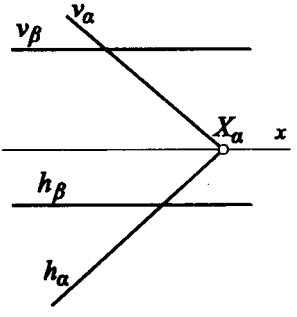
9.37 a=3cm



9.38 a=3cm



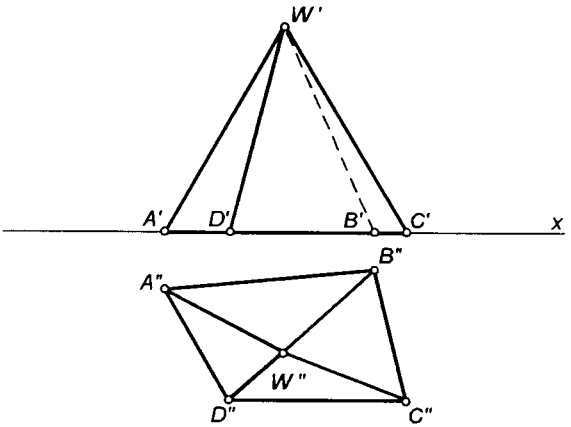
9.39 a=3cm

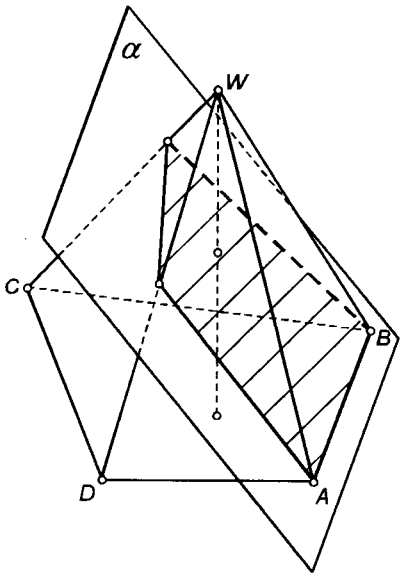


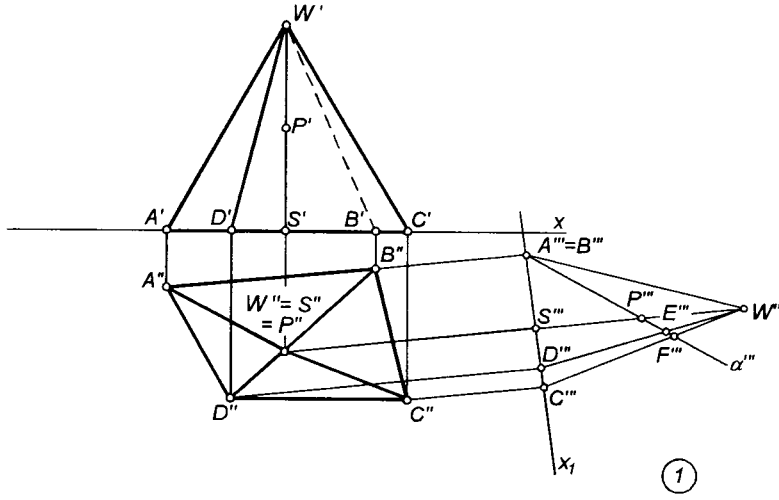
Ćwiczenie 9

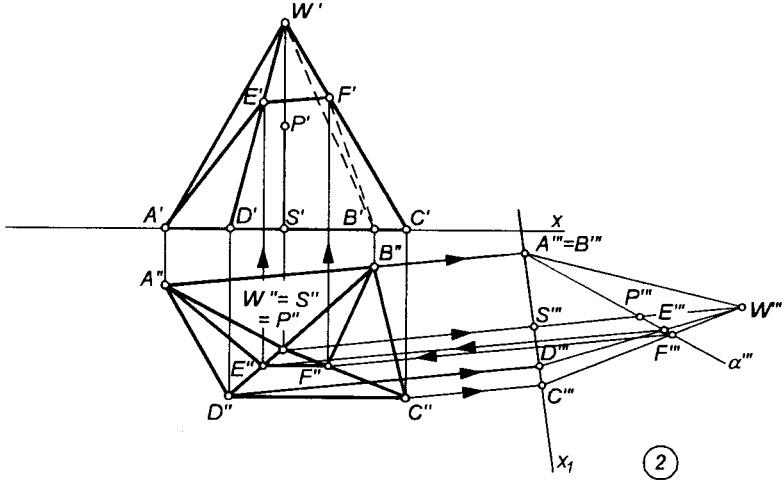
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

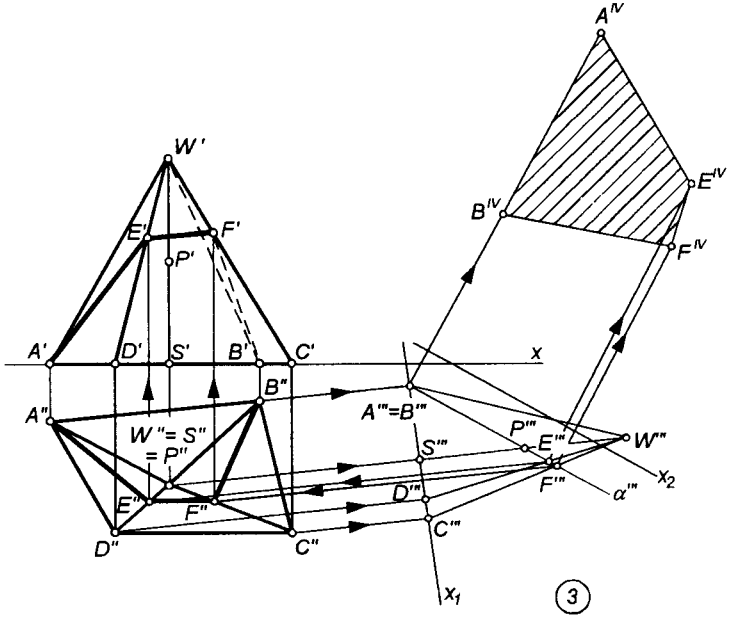
Wyznaczyć rzuty i znaleźć wielkość rzeczywistą przekroju ostrosłupa płaszczyzną α przechodzącą przez bok AB i połowę wysokości.






W'
P'
A'
D'
S'
B'
C'
x
A'''=B'''
B''
A''
W''= S''
= P''
P'''
E'''
W'''
S'''
D'''
F'''
α'''
C'''
D''
C''
x1
1


W'
E'
F'
P'
A'
D'
S'
B'
C'
x
A'''=B'''
B''
A''
W''= S''
= P''
P'''
E'''
W'''
S'''
D'''
F'''
α'''
E''
F''
C'''
D''
C''
x1
2


A^IV
E^IV
B^IV
F^IV
W'
E'
F'
P'
A'
D'
S'
B'
C'
x
B''
A''
W''= S''
= P''
A'''=B'''
P'''
E'''
W'''
S'''
x2
F'''
α'''
D'''
E''
F''
C'''
D''
C''
x1
3

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 9

1. Znajdujemy rzuty punktu P będącego środkiem wysokości $\overline{WS}$. Następnie zmieniamy pierwotny układ odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$ na taki układ $x_1(\pi_1,\pi_3)$, w którym rzutnia π_3 jest prostopadła do boku $\overline{AB}$ ($x_1 \perp \overline{A''B''}$). Wyznaczamy trzeci rzut ostrosłupa i zgodnie z warunkami zadania prowadzimy przez $A''' = B'''$ oraz P''' rzut α''' płaszczyzny α (płaszczyzna jest widoczna w postaci prostej). Zaznaczamy na przecięciu się α''' z $\overline{D'''W'''}$ rzut E''', a następnie na przecięciu się α''' z $\overline{C'''W'''}$ rzut F'''. Są to rzuty punktów, w których krawędzie $\overline{DW}$ i $\overline{CW}$ przebijają płaszczyznę α.

2. Znajdujemy rzuty punktów E, F w pierwotnym układzie rzutowania $x(\pi_1,\pi_2)$. Łączymy ze sobą rzuty punktów A, B, E, F i uzyskujemy w ten sposób rzuty wielokąta przekroju. Określamy widoczność krawędzi na poszczególnych rzutach.

3. Wprowadzamy kolejny układ odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$, w którym rzutnia π_4 jest równoległa do płaszczyzny α ($x_2 \parallel \alpha''$). Wyznaczamy czwarty rzut $A^{IV}B^{IV}C^{IV}D^{IV}$ wielokąta, który przedstawia rzeczywistą wielkość przekroju ostrosłupa płaszczyzną α.

Ćwiczenie 10

PRZEKROJE POWIERZCHNI OBROTOWYCH

Przekrojem powierzchni płaszczyzną nazywamy krzywą, będącą zbiorem punktów wspólnych powierzchni i płaszczyzny.

Rzuty przekroju dowolnej powierzchni obrotowej płaszczyzną konstruujemy przez wyznaczenie punktów przecięcia tą płaszczyzną poszczególnych równoleżników i południków powierzchni.

Płaszczyzna nachylona do osi powierzchni walcowej obrotowej pod kątem różnym od 90° przecina tę powierzchnię wzdłuż elipsy.

Przekrój powierzchni walcowej obrotowej płaszczyzną równoległą do osi tej powierzchni może być wykorzystany do wyznaczenia rzutów dowolnego punktu tej powierzchni lub też do wyznaczenia drugiego rzutu, gdy jeden rzut punktu jest dany.

Przekrojem powierzchni stożkowej o kącie wierzchołkowym ω płaszczyzną φ, tworzącą z osią stożka kąt ε, jest:

a) elipsa, gdy $\frac{\omega}{2} < \varepsilon < 90°$;

b) parabola, gdy $\frac{\omega}{2} = \varepsilon$;

c) hiperbola, gdy $\frac{\omega}{2} > \varepsilon \geq 0$.

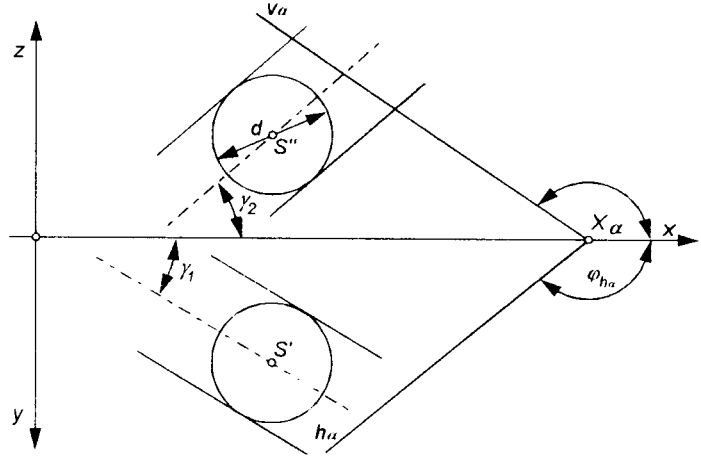
Podane wyżej krzywe noszą nazwę *krzywych stożkowych właściwych*. Istnieją także przypadki szczególne - przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek jest trójkątem, prostą lub punktem (*krzywe stożkowe niewłaściwe*), zaś płaszczyzną równoległą do podstawy – okręgiem.

Konstrukcja punktów przebicia powierzchni prostą jest podobna do konstrukcji przebicia prostą ścian wielościanu. W przypadku obrotowej powierzchni stożkowej najdogodniej jest poprowadzić powierzchnię pomocniczą przez daną prostą i wierzchołek stożka (łatwy do wyznaczenia przekrój stożka w postaci trójkąta). Przy walcowej powierzchni obrotowej płaszczyznę pomocniczą staramy się poprowadzić przez daną prostą równolegle do tworzących tej powierzchni.

ZADANIA. Ćwiczenie 10

A. Dana jest powierzchnia walcowa obrotowa opisana na kuli o średnicy *d* i środku w punkcie *S*. Rzuty linii osiowej powierzchni walcowej tworzą z osią *x* kąty γ_1 i γ_2.

Wyznaczyć: 1. Rzuty walca i jego podstawy.
2. Rzuty przekroju płaszczyzną α
3. Rzeczywistą wielkość przekroju.

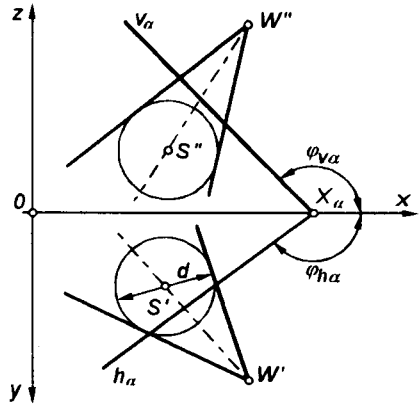


Numer zadania	Walec				Płaszczyzna						
	d	s			γ_1	γ_2	X_α	φ_{h_α}	φ_{v_α}	z_{h_α}	z_{v_α}
		x	y	z							
10.1	40	0	35	0	0	45	60	90	120		
10.2	40	0	35	0	0	45	80	135	90		
10.3	40	0	35	0	0	45				60	40
10.4	40	0	35	0	0	45	80	135	120		
10.5	40	0	35	0	0	45	0	30	120		
10.6	40	0	15	30	60	0	50	120	90		
10.7	40	0	20	30	30	0	60	90	120		
10.8	40	0	15	30	60	0				80	70
10.9	40	0	15	30	60	0	75	120	135		
10.10	40	0	20	30	30	0	40	150	60		
10.11	40	0	40	30	45	60	40	105	135		
10.12	40	0	30	30	15	60	80	135	135		

ZADANIA Ćwiczenie 10

B. Przeciąć stożek obrotowy stojący na rzutni π_1 płaszczyzną α:

1. wyznaczyć dwa rzuty przekroju,
2. wyznaczyć wielkość rzeczywistą przekroju,
3. wyznaczyć rzut podstawy.



Numery zadań	Stożek				Płaszczyzna				
	d	W / S x	W / S y	W / S z	X_α	$\varphi_{h\alpha}$	$\varphi_{v\alpha}$	$y_{h\alpha}$	$z_{h\alpha}$
10.13	30	0 / 5	60 / 30	60 / 20	50	90°	145°		
10.14	30	0 / 5	55 / 30	60 / 25	45	120°	135°		
10.15	30	0 / 15	60 / 30	60 / 20	50	45°	165°		
10.16	30	50 / 20	55 / 30	60 / 15	0	90°	30°		
10.17	30	0 / 30	60 / 30	60 / 20	∞	0°	0°	65	50
10.18	30	0 / 35	55 / 30	60 / 25	50	45°	135°		
10.19	30	0 / 35	60 / 35	60 / 25	70	135°	120°		
10.20	30	0 / 30	55 / 30	60 / 20	∞	0°	0°	50	50
10.21	30	0 / 30	60 / 30	60 / 30	80	135°	120°		
10.22	30	0 / 30	60 / 30	60 / 20	40	90°	45°		

Ćwiczenie 10

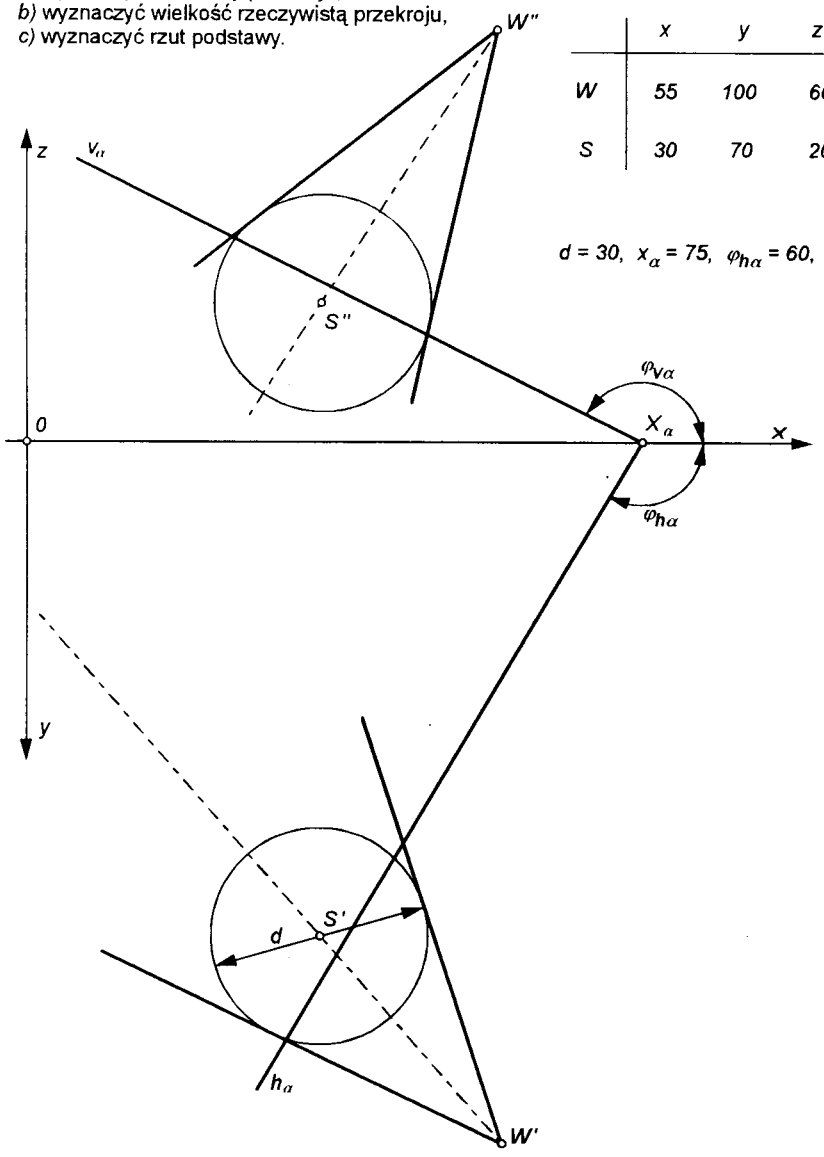
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

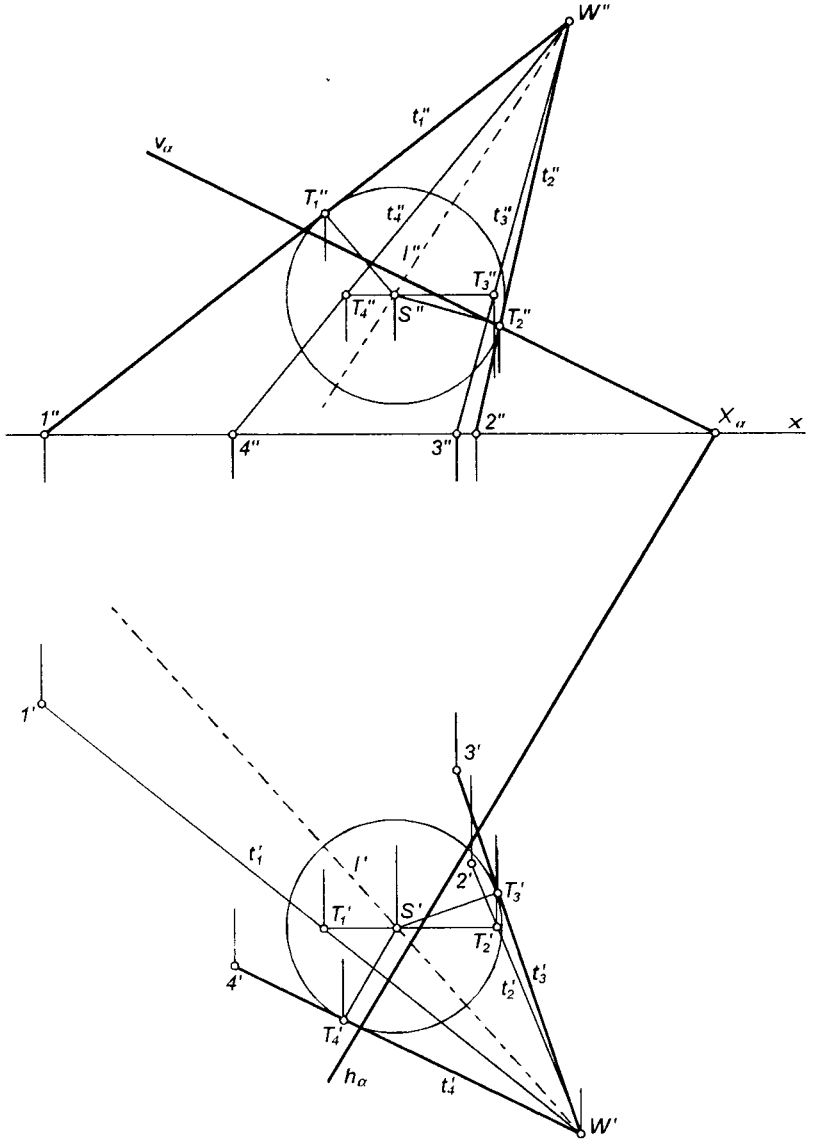
Przeciąć stożek obrotowy stojący na rzutni π_1 płaszczyzną α:

a) wyznaczyć dwa rzuty przekroju,
b) wyznaczyć wielkość rzeczywistą przekroju,
c) wyznaczyć rzut podstawy.

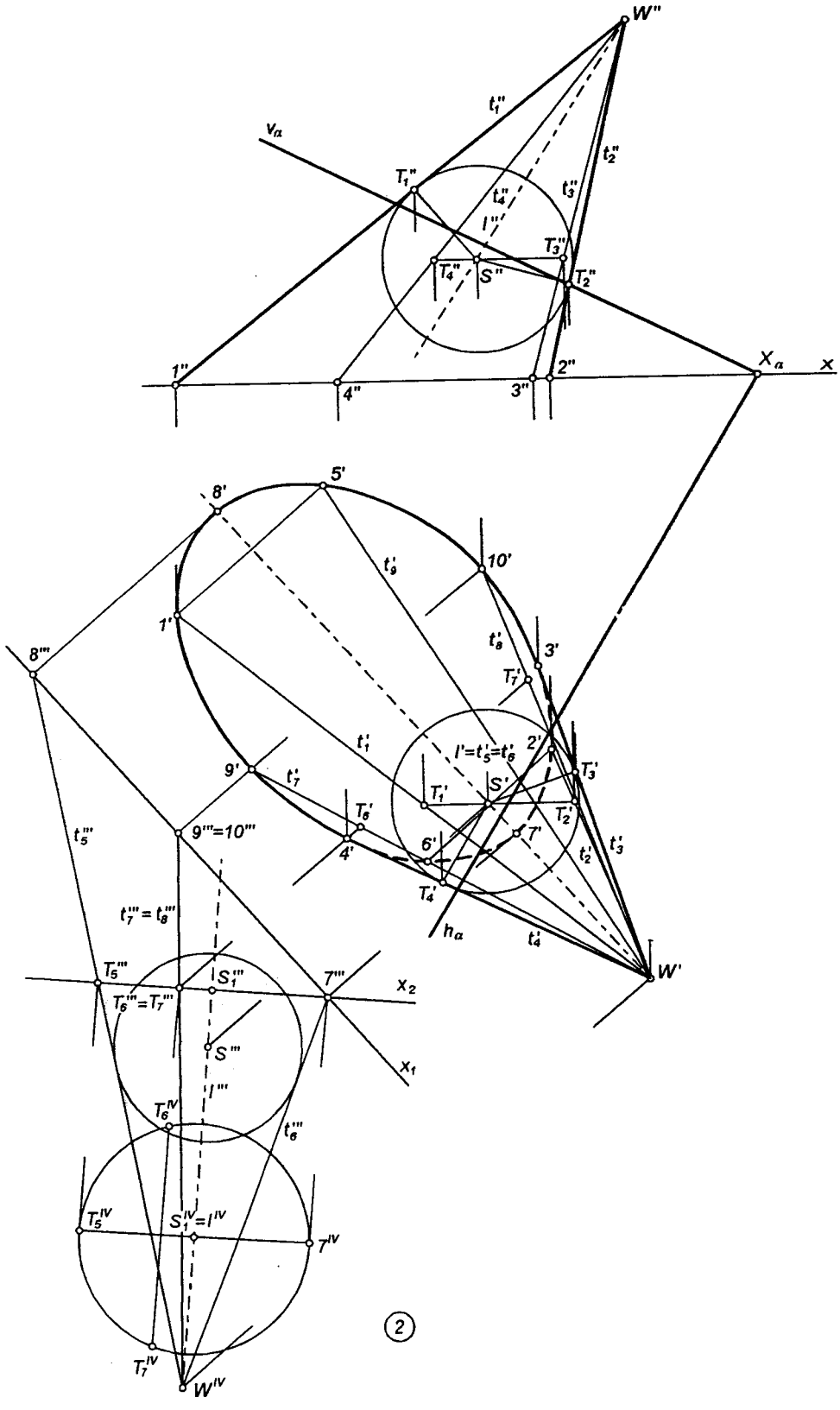
	x	y	z
W	55	100	60
S	30	70	20

$d = 30,\ x_\alpha = 75,\ \varphi_{h\alpha} = 60,\ \varphi_{v\alpha} = 30.$

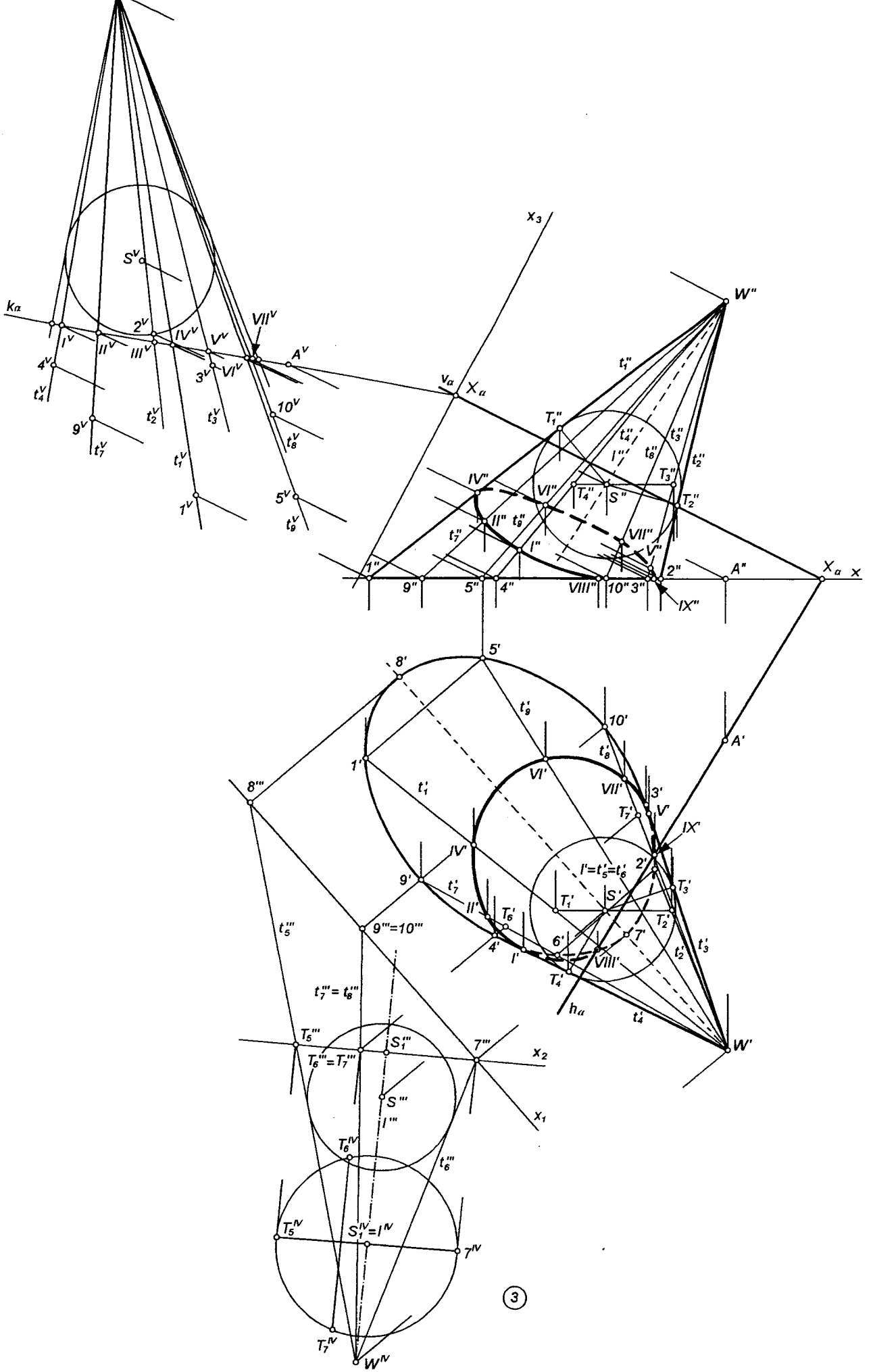


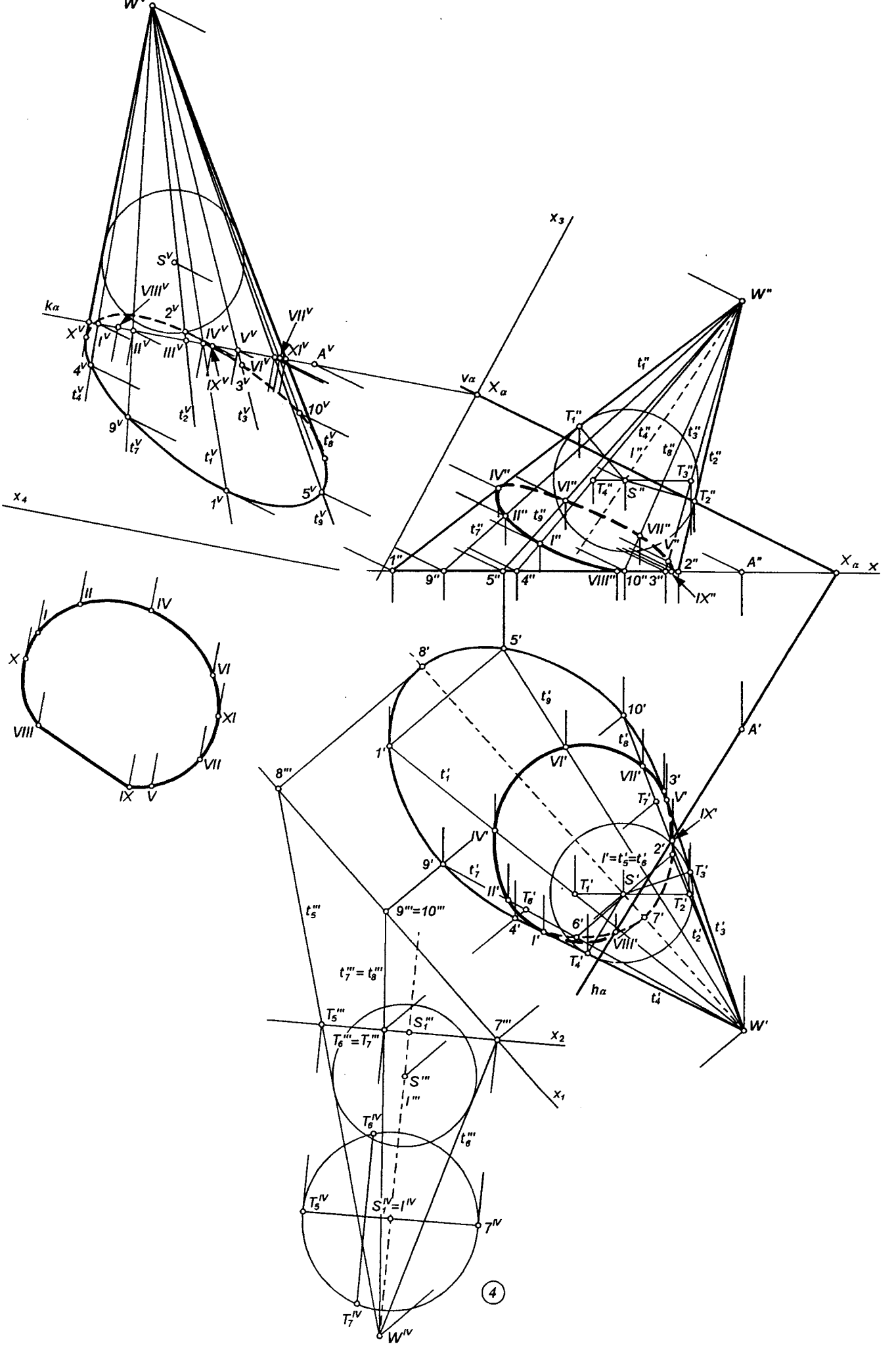

W''
t₁''
t₂''
vα
T₁''
t₄''
t₃''
l''
T₃''
T₄''
S''
T₂''
1''
2''
Xα
x
4''
3''
1'
3'
t₁'
l'
2'
T₃'
T₁'
S'
T₂'
4'
t₃'
t₂'
T₄'
hα
t₄'
W'

1


W''
t_1''
v_α
t_2''
T_1''
t_4''
t_3''
l''
T_3''
T_4''
S''
T_2''
1''
4''
3''
2''
X_α
x
5'
8'
t_9'
10'
1'
t_8'
3'
8'''
T_7'
t_1'
$l'=t_5'=t_6'$
2'
9'
t_7'
T_1'
S'
T_3'
T_6'
T_2'
t_5'''
9'''=10'''
6'
7'
t_3'
4'
t_2'
T_4'
$t_7'''=t_8'''$
h_α
t_4'
W'
T_5'''
S_1'''
7'''
x_2
$T_6'''=T_7'''$
S'''
x_1
l'''
T_6^{IV}
t_6'''
T_5^{IV}
$S_1^{IV}=l^{IV}$
7^{IV}
T_7^{IV}
W^{IV}

2


S^V
k_α
1^V
2^V
II^V
III^V
IV^V
V^V
VII^V
A^V
4^V
3^V
VI^V
t_4^V
t_2^V
t_3^V
10^V
t_8^V
9^V
t_7^V
t_1^V
7^V
5^V
t_9^V
x_3
W''
v_α
X_α
t_1''
T_1''
t_4''
t_3''
I'''
t_8''
t_2''
T_3''
IV''
VI''
T_4''
S''
T_2''
II''
t_9''
t_7''
VII''
I''
V''
$1''$
$2''$
A''
X_α
x
$9''$
$5''$
$4''$
$VIII''$
$10''$
$3''$
IX''
$5'$
$8'$
t_9'
$10'$
A'
$1'$
t_8'
VI'
t_1'
VII'
$3'$
$8'''$
T_7'
V'
IX'
IV'
$2'$
$I'=t_5'=t_6'$
$9'$
t_7'
T_3'
II'
T_6'
T_1'
S'
T_2'
t_5'''
$9'''=10'''$
$4'$
$6'$
$7'$
t_2'
t_3'
I'
$VIII'$
T_4'
$t_7'''=t_8'''$
h_α
t_4'
W'
T_5'''
S_1'''
$7'''$
x_2
$T_6'''=T_7'''$
S'''
x_1
I'''
T_6^{IV}
t_6'''
T_5^{IV}
$S_1^{IV}=I^{IV}$
7^{IV}
T_7^{IV}
W^{IV}
3


W'
S^V
VIII^V
2^V
kα
X^V
I^V
II^V
III^V
IV^V
V^V
VII^V
XI^V
A^V
4^V
t_4^V
IX^V
3^V
VI^V
10^V
9^V
t_2^V
t_3^V
t_7^V
t_1^V
t_8^V
1^V
5^V
t_9^V
x_4
x_3
W''
t_1''
vα
Xα
T_1''
t_4''
t_3''
I''
t_8''
t_2''
T_3''
IV''
VI''
T_4''
S''
T_2''
II''
t_9''
t_7''
VII''
I''
V''
1''
2''
A''
Xα
x
9''
5''
4''
VIII''
10''
3''
IX''
II
IV
I
X
VI
XI
VIII
VII
IX
V
5'
8'
t_9'
10'
A'
1'
t_8'
VI'
VII'
3'
8'''
t_1'
T_7'
V'
IX'
IV'
2'
I'=t_5'=t_6'
T_3'
9'
t_7'
II'
T_6'
S'
T_1'
T_2'
t_5'''
9'''=10'''
4'
6'
7'
t_3'
I'
VIII'
t_2'
T_4'
t_7'''=t_8'''
hα
t_4'
W'
T_5'''
S_1'''
7'''
T_6'''=T_7'''
x_2
S'''
x_1
I'''
T_6^IV
t_6'''
T_5^IV
S_1^IV=I^IV
7^IV
T_7^IV
W^IV
4

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 10

1. Obieramy dowolnie początek układu współrzędnych, a następnie, na podstawie danych zadania, wyznaczamy położenie śladów płaszczyzny α oraz rzuty zarysu stożka. Przez pionowy rzut W'' wierzchołka stożka prowadzimy pionowe rzuty t_1'', t_2'' tworzących stycznych do rzutu kuli, na której stożek został opisany. Otrzymujemy pionowe rzuty punktów styczności T_1'', T_2''. Rzuty poziome tych punktów znajdujemy na linii czołowej poprowadzonej przez S' (linia ta jest rzutem równika kuli), co umożliwia wyznaczenie położenia rzutów poziomych tworzących t_1', t_2'. Postępując w odwrotnej kolejności, tzn. zaczynając od rzutu poziomego, możemy w ten sam sposób wyznaczyć rzuty tworzących t_3, t_4. Przedłużamy rzuty pionowe wyznaczonych tworzących do przecięcia się z osią rzutów x, dzięki czemu otrzymujemy rzuty punktów 1, 2, 3, 4, należących do podstawy stożka. Zmieniamy pierwotny układ odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$ na układ $x_1(\pi_1,\pi_3)$, w którym oś stożka jest równoległa do rzutni π_3. Rysujemy rzuty kuli wpisanej w stożek oraz rzuty wierzchołka W w układzie odniesienia $x_1(\pi_1,\pi_3)$ Wyznaczamy rzuty t_5''', t_6''' kolejnej pary tworzących stycznych do kuli. Rzuty t_5', t_6' będą się pokrywały z rzutem l' osi stożka. Przedłużamy t_5''', t_6''' do przecięcia się z osią x i znajdujemy rzuty $7'''$ oraz $8'''$. Wyznaczamy kolejne rzuty punktów podstawy $7'$, $8'$ - odcinek $\overline{7'8'}$ jest osią wielką elipsy podstawy. Wprowadzamy nowy układ odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$, w którym oś stożka jest prostopadła do rzutni π_4 ($x_2 \perp l'''$). Znajdujemy rzut l^{IV} osi stożka w układzie odniesienia $x_2(\pi_3,\pi_4)$, który pokrywa się ze środkiem okręgu będącego rzutem podstawy (kierownicy) stożka na π_4. Na tym okręgu obieramy dwa punkty T_7^{IV}, T_8^{IV}, a następnie znajdujemy ich rzuty T_7''', T_8''' w układzie odniesienia $x_1(\pi_1,\pi_3)$. Przez rzut W''' wierzchołka i rzuty T_7''', T_8''' prowadzimy rzuty $t_6''' = t_7'''$ kolejnych tworzących stożka do przecięcia się z osią x_1 i otrzymujemy rzuty $9''' = 10'''$ kolejnych punktów podstawy. Znajdujemy rzuty poziome T_6', T_7', które wykorzystujemy do wyznaczenia poziomych rzutów t_6', t_7' i ostatecznie wyznaczamy następne punkty podstawy $9'$, $10'$. Punkt $5'$ znajdujemy jako symetryczny do punktu $1'$ względem rzutu osi l'''.

2. Znajdujemy poziome rzuty $5''$, $9''$, $10''$ punktów wyznaczających podstawę stożka, a następnie poziome rzuty t_7'', t_8'', t_9'' tworzących. Zmieniamy pierwotny układ odniesienia $x(\pi_1,\pi_2)$ na układ $x_3(\pi_2,\pi_5)$, w którym rzutnia π_5 jest prostopa-

dła do danej płaszczyzny α ($x_3 \perp \upsilon_\alpha$). Wyznaczamy piąte rzuty t_1^V, t_2^V, t_3^V, t_4^V, t_7^V, t_8^V, t_9^V tworzących, które przecinają ślad k_α płaszczyzny α w punktach I^V, II^V, III^V, IV^V, V^V, ^{V} VI^V, VII^V wyznaczając rzut przekroju stożka płaszczyzną α (ślad k_α znajdujemy za pomocą dowolnie obranego na śladzie h_α rzutu A^V punktu A). Znalezione rzuty punktów przekroju odnosimy do pierwotnego układu odniesienia. Prowadzimy przez rzuty punktów przekroju zarys elipsy, która odcina na śladzie h_α odcinek $\overline{VIII, IX}$ uzupełniający znalezioną część przekroju.

3. W celu znalezienia rzeczywistej wielkości przekroju wprowadzamy układ odniesienia $x_4(\pi_5, \pi_6)$, w którym nowa rzutnia π_6 jest równoległa do płaszczyzny przekroju ($x_4 \parallel k_\alpha$). Znalezione w nowym układzie odniesienia rzuty punktów od I do IX będą wyznaczały rzeczywistą wielkość przekroju stożka daną płaszczyzną α.

Uwaga: Na każdym rzucie określamy widoczność zarysów podstawy i przekroju stożka.

Ćwiczenie 11

PRZENIKANIE WIELOŚCIANÓW

Zbiór zawierający punkty wspólne dwóch wielościanów nazywamy *linią przenikania*. Linia przenikania jest najczęściej wielokątem przestrzennym (linią łamaną przestrzenną), a wierzchołkami tego wielokąta są punkty przebicia ścian jednego wielościanu krawędziami drugiego.

Aby znaleźć linię przenikania dwóch wielościanów, wykonujemy kolejno następujące czynności:

a) znajdujemy punkty przebicia ścian jednego wielościanu krawędziami drugiego, a następnie punkty przebicia ścian drugiego wielościanu krawędziami pierwszego,
b) ustalamy pary punktów położone na jednej ścianie jednego i drugiego wielościanu,
c) wykreślamy boki wielokąta przenikania, uwzględniając przy tym ich widoczność.

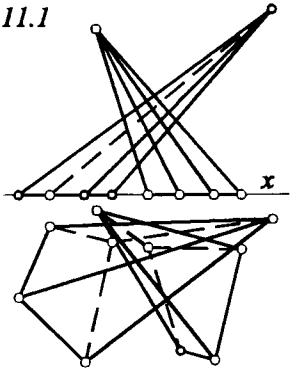
Przy określaniu widoczności należy pamiętać o tym, że bok wielokąta przenikania jest widoczny wówczas, gdy widoczne są obie ściany wielościanów, na których ten bok jest położony. Gdy chociaż jedna z przenikających się ścian jest niewidoczna, położony na nich bok wielokąta przenikania będzie również niewidoczny.

W celu ustalenia kolejności łączenia wyznaczonych punktów przenikania sporządzamy specjalny schemat łączeń – siatkę, którą umieszczamy obok każdego rzutu. Punkty przenikania zawsze znajdują się na krawędziach wielościanu, a nigdy pomiędzy nimi. Ponadto, linia przenikania zawsze na krawędziach wielościanu się załamuje.

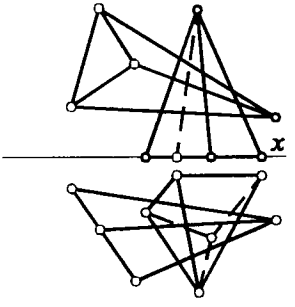
ZADANIA. Ćwiczenie 11

Wyznaczyć linie przenikania brył.

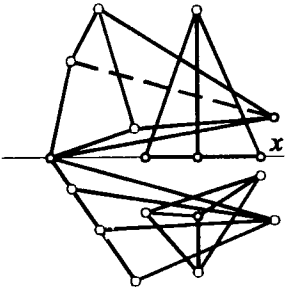
11.1



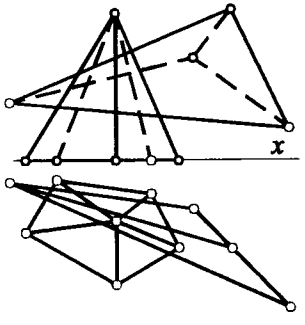
11.2



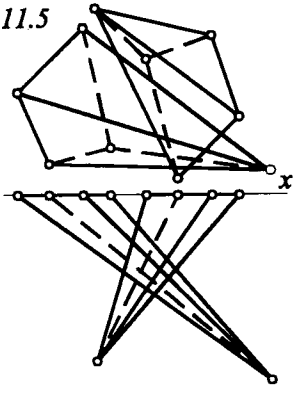
11.3



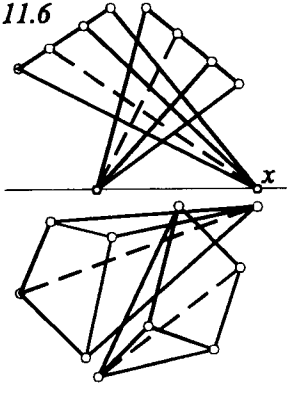
11.4



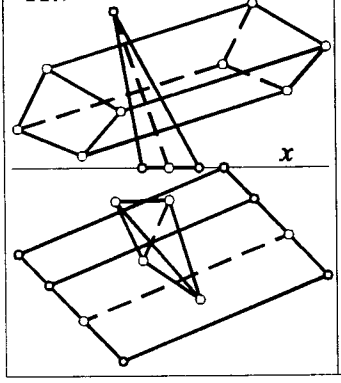
11.5



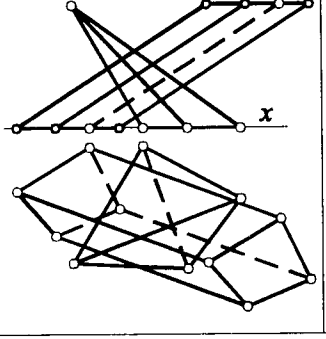
11.6



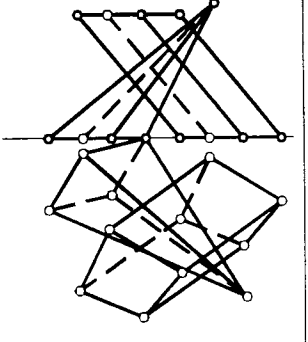
11.7



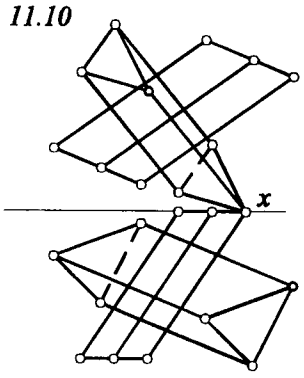
11.8



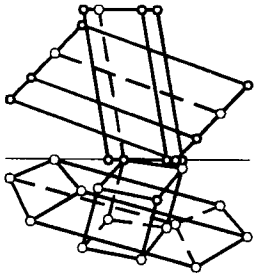
11.9



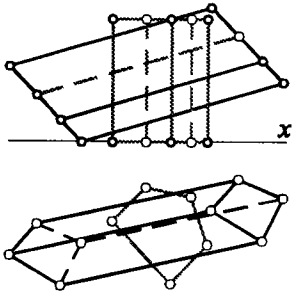
11.10



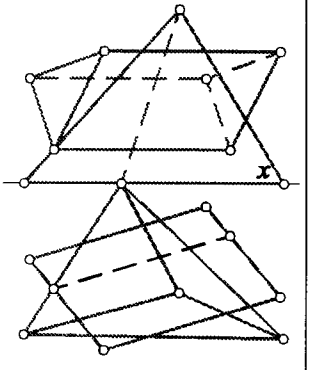
11.11



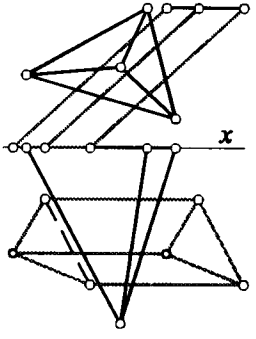
11.12



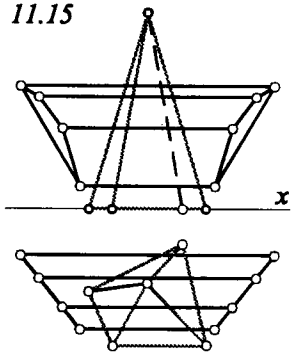
11.13



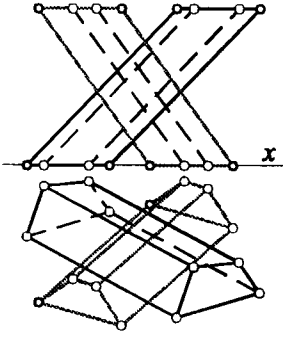
11.14



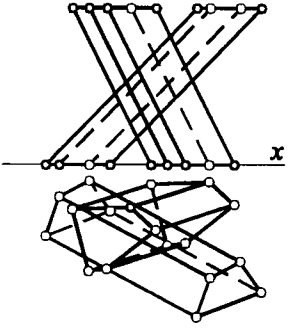
11.15



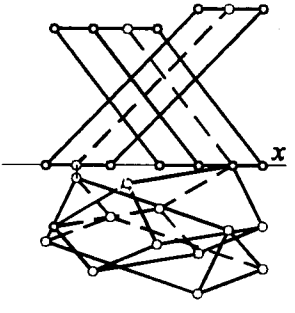
11.16



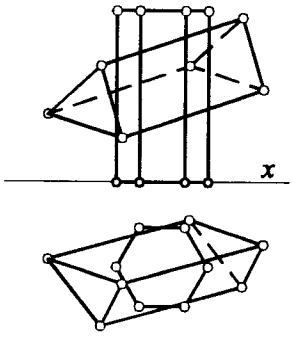
11.17



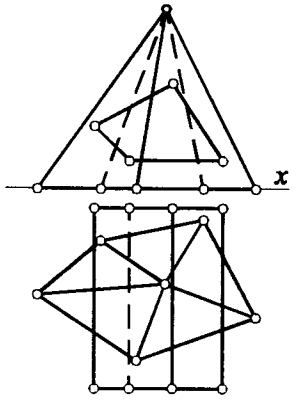
11.18



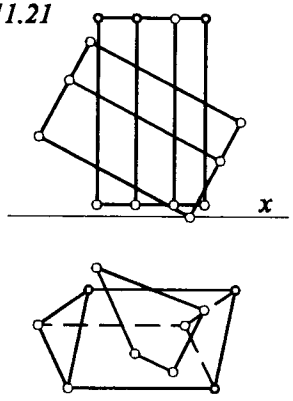
11.19



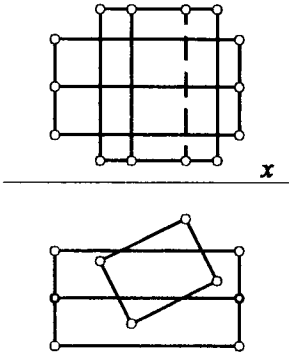
11.20



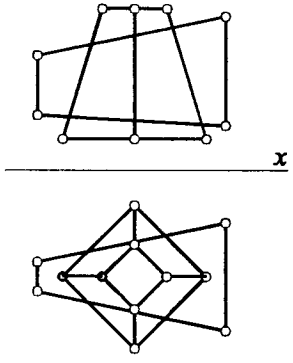
11.21



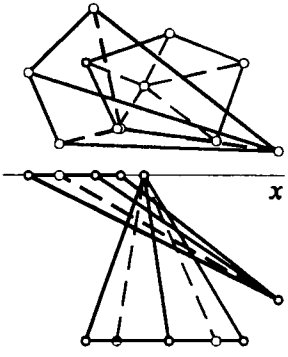
11.22



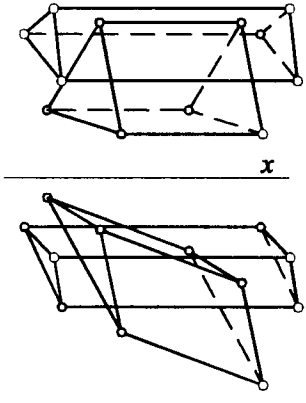
11.23



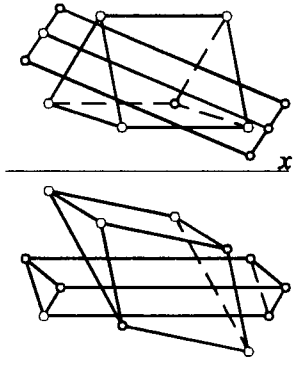
11.24



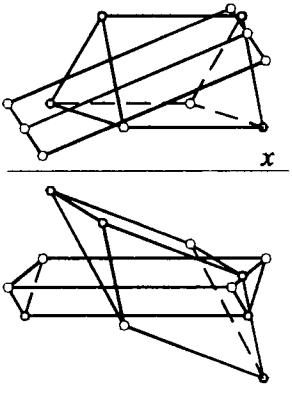
11.25



11.26



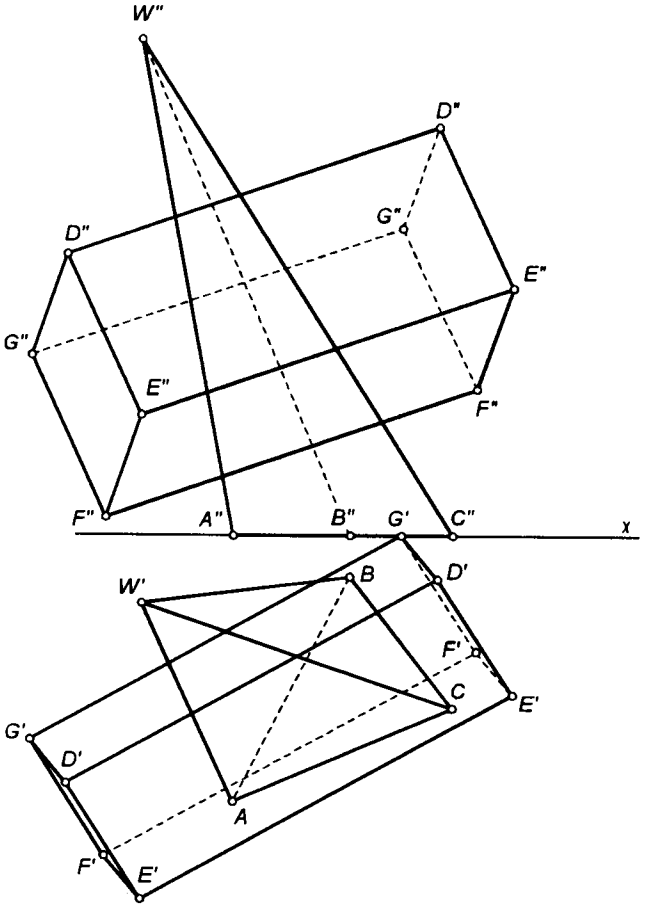
11.27

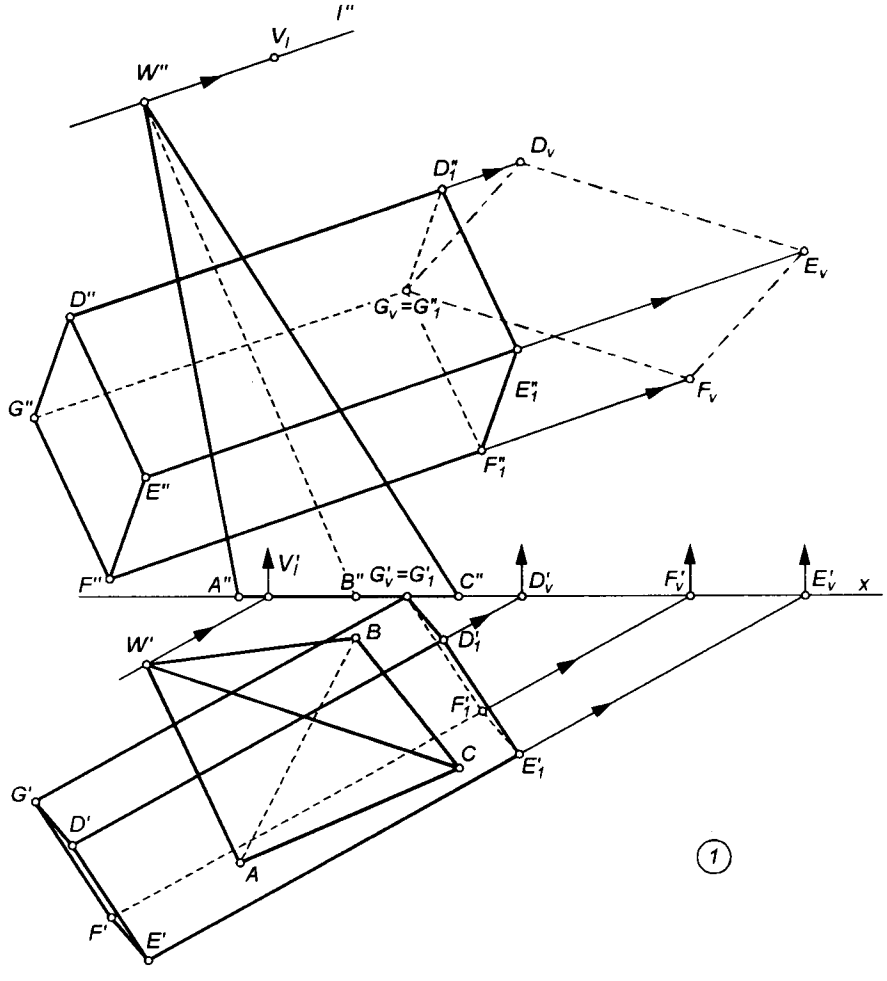


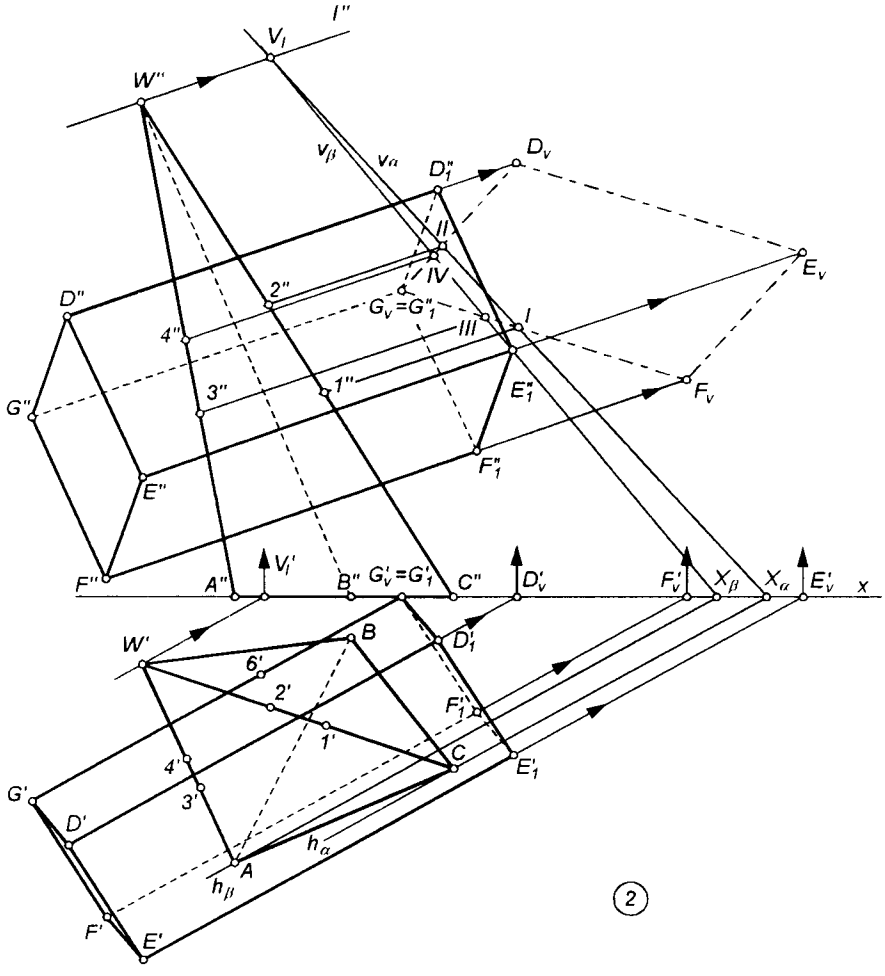
Ćwiczenie 11

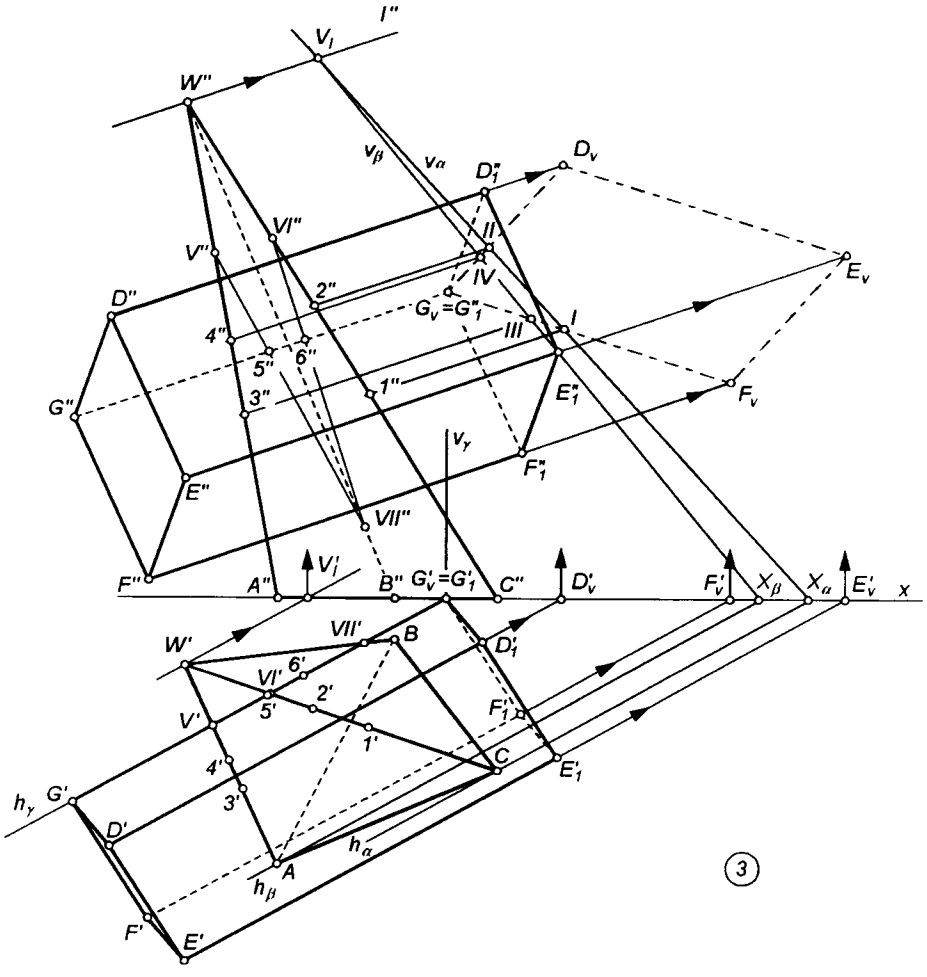
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

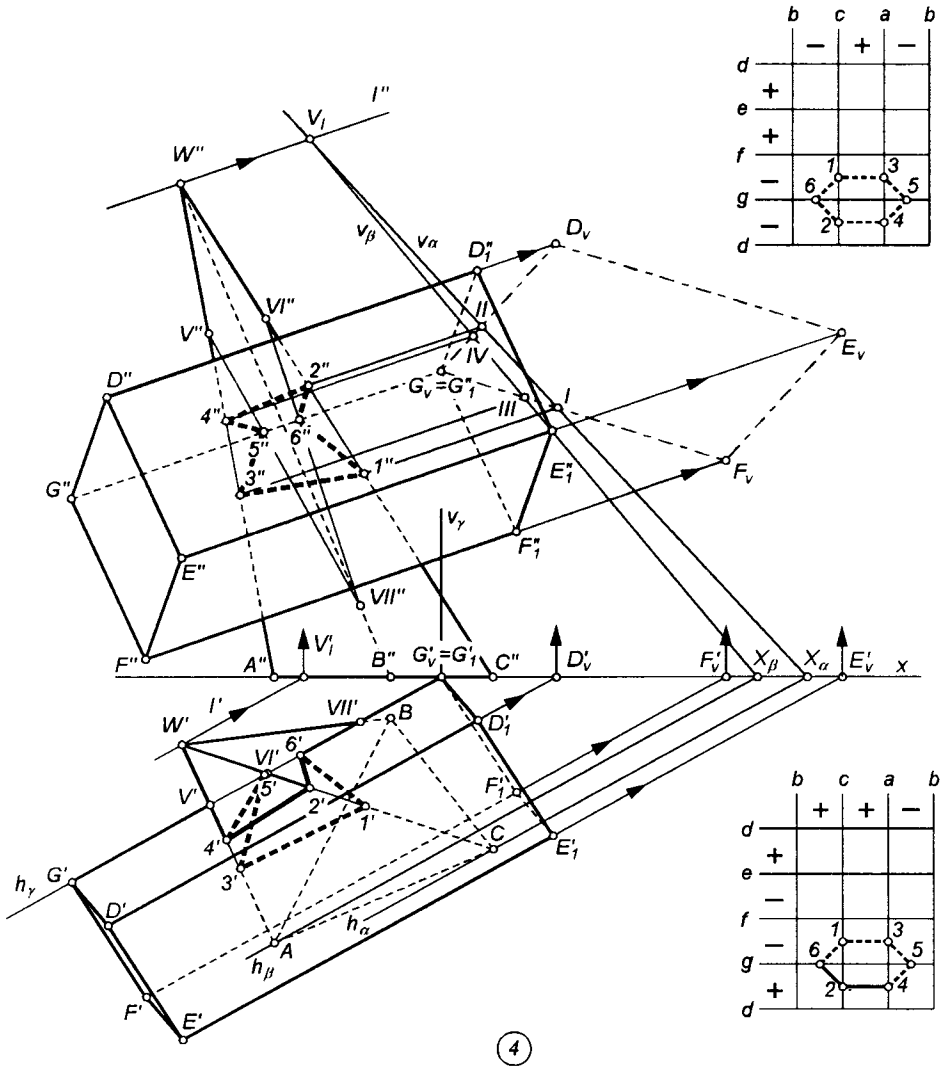
Wyznaczyć linie przenikania brył i określić ich widoczność.




l''
V_l
W''
D_v
D''_1
E_v
D''
G_v=G''_1
G''
E''_1
F_v
E''
F''_1
F''
A''
V'_l
B''
G'_v=G'_1
C''
D'_v
F'_v
E'_v
x
W'
B
D'_1
F'_1
C
E'_1
G'
D'
A
F'
E'
1


l''
V_l
W''
v_β
v_α
D''_1
D_v
II
IV
E_v
D''
2''
G_v=G''_1
I
4''
III
1''
3''
E''_1
F_v
G''
F''_1
E''
F''
A''
V'_l
B''
G'_v=G'_1
C''
D'_v
F'_v
X_β
X_α
E'_v
x
W'
B
D'_1
6'
2'
F'_1
1'
C
4'
E'_1
G'
3'
D'
h_α
A
h_β
F'
E'
2


l''
V_l
W''
v_β
v_α
D''_1
D_v
VI''
II
V''
IV
E_v
D''
2''
G_v=G''_1
I
4''
III
5''
6''
1''
E''_1
F_v
G''
3''
v_γ
F''_1
E''
VII''
F''
A''
V'_l
B''
G'_v=G'_1
C''
D'_v
F'_v
X_β
X_α
E'_v
x
W'
VII'
B
D'_1
VI'
6'
2'
5'
F'_1
V'
1'
C
4'
E'_1
h_γ
G'
3'
D'
h_α
A
h_β
F'
E'
3



	b	c	a	b
	−	+	−	
d				
e +				
f +				
g −	6	1	3	5
d −		2	4	

	b	c	a	b
	+	+	−	
d				
e +				
f −				
g −	6	1	3	5
d +		2	4	

4

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 11

1. Przez wierzchołek W ostrosłupa prowadzimy prostą l, równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa. Znajdujemy ślad pionowy V_l prostej l. Przedłużamy pobocznicę graniastosłupa do przecięcia się z rzutnią π_2, a otrzymany tym sposobem czworokąt D_V, E_V, E_V, G_V traktujemy jako nową podstawę graniastosłupa stojącego na rzutni π_2.

2. Aby wyznaczyć punkty przebicia ścian graniastosłupa przez krawędzie ostrosłupa, należy poprowadzić przez te krawędzie płaszczyzny równoległe do krawędzi graniastosłupa. W tym celu przez krawędź $\overline{AW}$ prowadzimy płaszczyznę α, a przez krawędź $\overline{CW}$ płaszczyznę β (krawędź $\overline{BW}$ nie bierze udziału w przenikaniu). Ślady płaszczyzny α wyznaczamy w ten sposób, że h_α prowadzimy przez wierzchołek C podstawy ostrosłupa, równoległe do poziomych rzutów krawędzi bocznych graniastosłupa, a ślad υ_α prowadzimy przez ślad V_l prostej l. Ślad υ_α przecina podstawę graniastosłupa w punktach I, II. Z tych punktów wyprowadzamy linie równoległe do krawędzi graniastosłupa, będące krawędziami przecięcia się płaszczyzny α ze ścianami FGG_lF_V i GDD_VG_l. Na przecięciu tych linii z krawędzią $\overline{CW}$ ostrosłupa uzyskujemy punkty 1, 2, czyli punkty, w których krawędź $\overline{CW}$ przebija ściany graniastosłupa. W podobny sposób znajdujemy punkty 3, 4, będące punktami przebicia ścian graniastosłupa przez krawędź $\overline{AW}$ ostrosłupa.

3. Punkty przebicia ścian graniastosłupa przez krawędzie ostrosłupa znajdziemy w sposób odmienny niż w zastosowany w punkcie 2. Sposób postępowania przedstawimy na przykładzie wyznaczenia punktów przebicia ostrosłupa krawędzią $\overline{GG_l}$. W celu wyznaczenia tych punktów, przez krawędź $\overline{GG_l}$ prowadzimy płaszczyznę poziomo-rzutującą γ. Płaszczyzna ta przecina krawędź ostrosłupa w punktach V, VI, VII. Otrzymujemy krawędzie $\overline{V\ VII}$ i $\overline{VI\ VII}$, wzdłuż których płaszczyzna γ przecina ściany ostrosłupa. Na przecięciu tych krawędzi z krawędzią $\overline{GG_l}$ otrzymujemy punkty 5, 6, czyli kolejne wierzchołki wielokąta przenikania. Pozostałe krawędzie graniastosłupa nie biorą udziału w przenikaniu.

4. Do prawidłowego połączenia wierzchołków wielokąta przenikania oraz określenia widoczności jego boków wykorzystujemy specjalną siatkę. Pionowe linie siatki przyporządkowujemy krawędziom jednej bryły (ostrosłupa), a linie poziome krawędziom drugiej bryły (graniastosłupa). W naszym przypadku mamy następujące przyporządkowanie: krawędzie ostrosłupa $\overline{AW}$ - a, $\overline{BW}$ - b, $\overline{CW}$ - c; krawędzie graniastosłupa $\overline{DD_1}$ - d, $\overline{EE_1}$ - e, $\overline{GG_1}$ - g. Kolejność przyporządkowania na siatce powinna wynikać z sąsiedztwa krawędzi w wielościanie. Pierwsze linie, zarówno pionową jak i poziomą, powtarzamy na końcu siatki. W przypadku gdy występują krawędzie niebiorące udziału w przenikaniu, bardzo istotne jest ustawienie na początku siatki linii odpowiadających tym krawędziom. Pasy pomiędzy sąsiednimi liniami na siatce odpowiadają poszczególnym ścianom wielościanów. Na pasach odpowiadających ścianom niewidocznym stawiamy znak „–", natomiast na pasach odpowiadających ścianom widocznym – znak „+". Sporządzamy oddzielne siatki dla każdego rzutu. Punkty przenikania znajdujące się na rysunku i należące do poszczególnych krawędzi przenosimy na linie siatki odpowiadające tym krawędziom. Na przykład punkt *6* leżący na krawędzi $\overline{GG_1}$ przenosimy na linię g i umieszczamy na pasie bc (*6* jest punktem przebicia ściany BWC przez krawędź $\overline{GG_1}$). Naniesione na siatkę punkty łączymy ze sobą, pamiętając o tym, że możemy bezpośrednio ze sobą połączyć punkty leżące na sąsiadujących liniach. Otrzymany wielokąt pokazuje, że punkty przenikania należy na rysunku połączyć w kolejności *1, 3, 5, 4, 2, 6, 1*. Jako widoczne rysujemy te boki wielokąta przenikania, które na siatce leżą na polach przecięcia się dwóch pasów oznaczonych znakiem „+". Pozostałe boki rysujemy jako linie kreskowe. W naszym przypadku więc wszystkie boki wielościanu przenikania będą niewidoczne na rzucie pionowym, a na rzucie poziomym widoczne są boki $\overline{6\ 2}$ i $\overline{2\ 4}$, pozostałe są natomiast niewidoczne.

Ćwiczenie 12

PRZENIKANIE POWIERZCHNI

Linią przenikania powierzchni nazywamy zbiór punktów wspólnych tych powierzchni. Linia przenikania powierzchni jest krzywą przestrzenną i tylko w szczególnych przypadkach przyjmuje np. postać okręgu.

Linie przenikania dwóch powierzchni możemy wyznaczyć za pomocą jednej z metod:

a) płaszczyzn pomocniczych, przecinających obie powierzchnie wzdłuż linii, których punkty wspólne należą do linii przenikania;
b) kul, dobieranych w sposób pozwalający na uzyskanie linii przenikania kul z danymi powierzchniami w postaci okręgów.

Dla poszczególnych przypadków przenikania powierzchni płaszczyzny pomocnicze prowadzimy następująco:

1) walec – stożek, przez prostą przechodzącą przez wierzchołek stożka i równoległą do tworzących walca,
2) stożek – stożek, przez prostą łączącą oba wierzchołki stożków,
3) walec – walec, płaszczyznę prowadzimy równolegle do płaszczyzny wyznaczonej przez proste równoległe do tworzących walców.

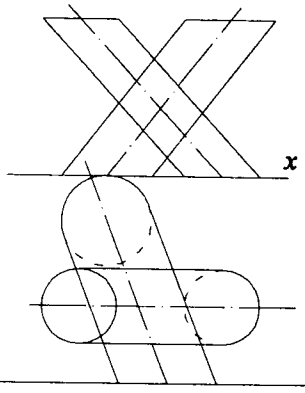
Metodę kul można stosować do wyznaczania linii przenikania powierzchni obrotowych o osiach przecinających się. Środek kul umieszczamy w punkcie przecięcia się osi (stąd metoda nazywana jest również *metodą kul współśrodkowych*). Okręgi będące liniami przenikania tej samej kuli z danymi powierzchniami przecinają się w punktach należących do linii przenikania. Wprowadzając szereg kul o różnych średnicach możemy wyznaczyć pełen zarys linii przenikania dwóch powierzchni.

Zagadnienie przenikania powierzchni występuje często w praktyce. Do przykładowych konstrukcji należą instalacje ciepłownicze, urządzenia wentylacyjne oraz rurociągi, składające się z segmentów ograniczonych najczęściej powierzchniami obrotowymi.

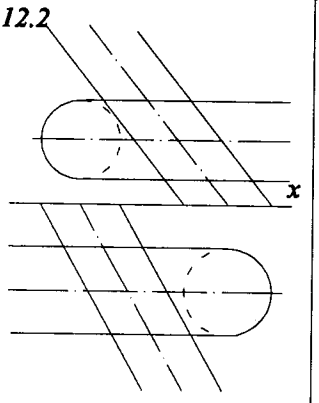
ZADANIA. Ćwiczenie 12

Wyznaczyć linie przenikania brył i określić widoczność.

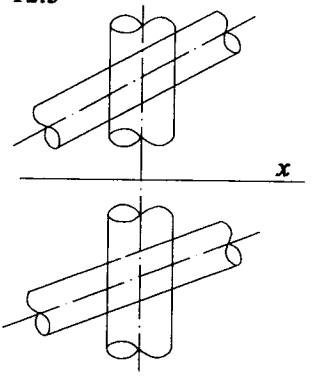
12.1



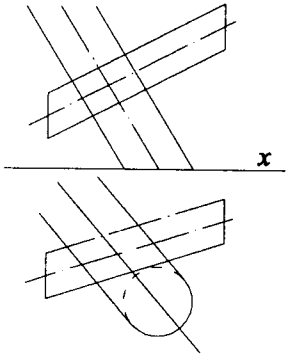
12.2



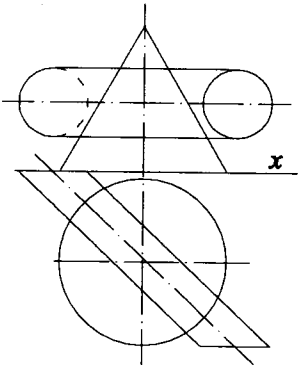
12.3



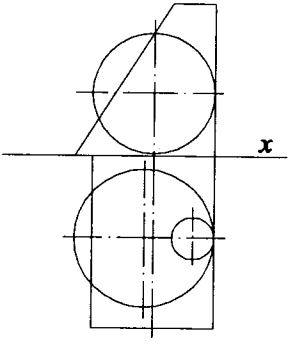
12.4



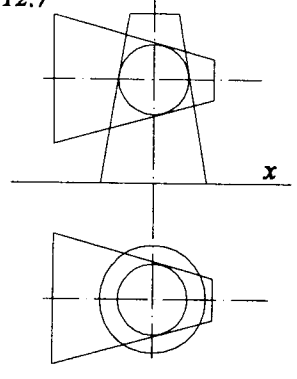
12.5



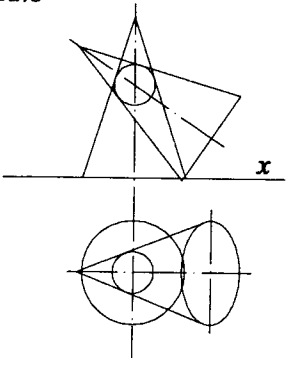
12.6



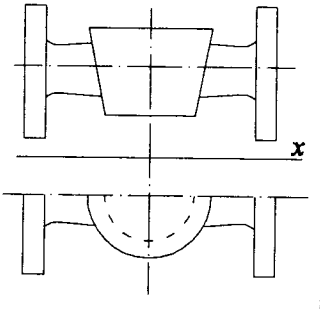
12.7



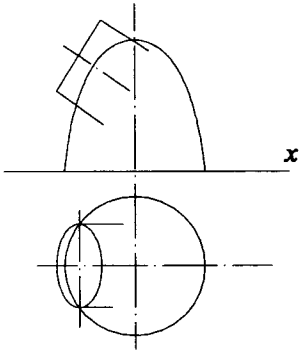
12.8



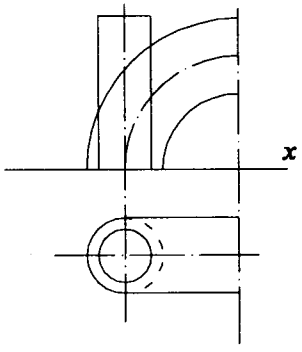
12.9



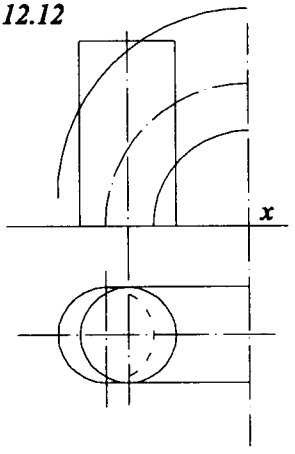
12.10



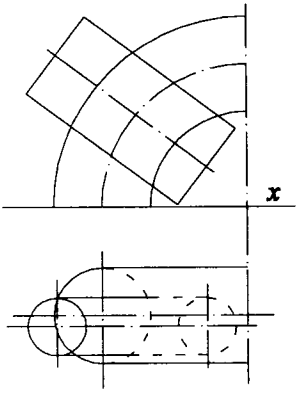
12.11



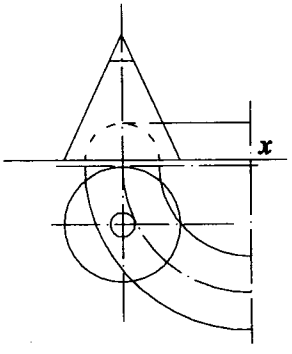
12.12



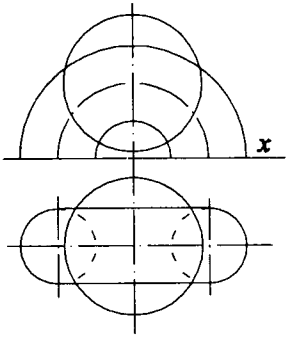
12.13



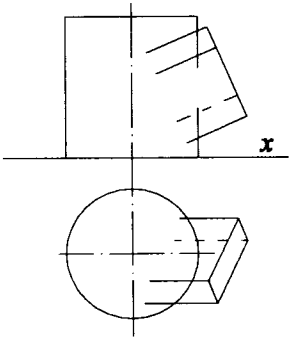
12.14



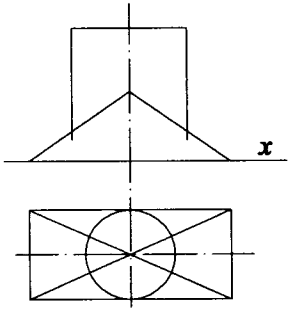
12.15



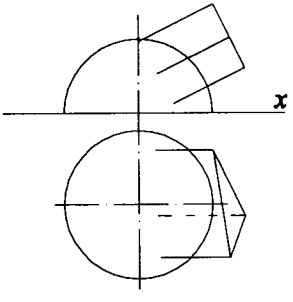
12.16



12.17

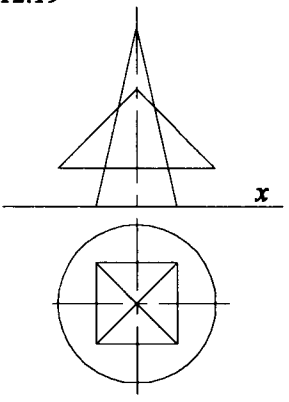


12.18

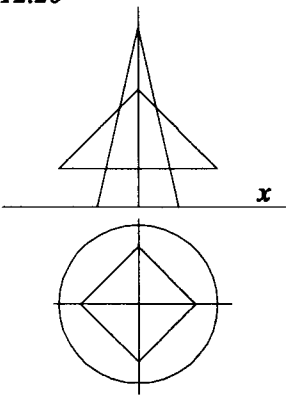


Wyznaczyć linię przenikania oraz rozwinięcie powierzchni ostrosłupa.

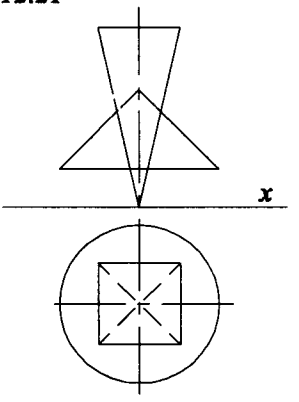
12.19



12.20

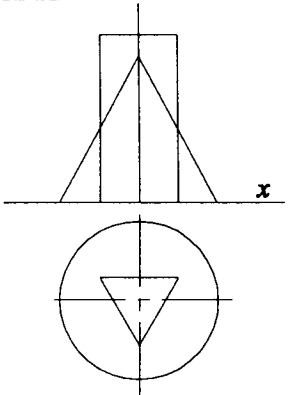


12.21

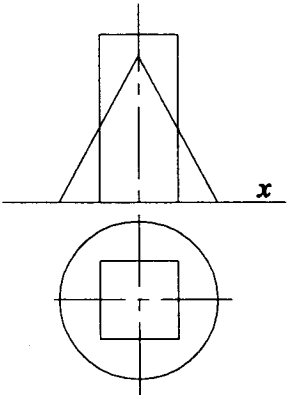


Wyznaczyć linię przenikania oraz rozwinięcie powierzchni graniastosłupa.

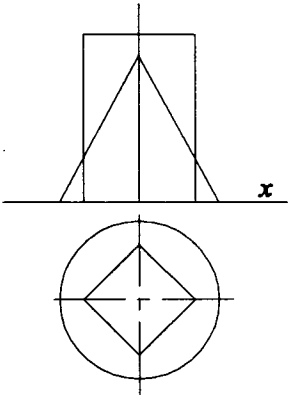
12.22



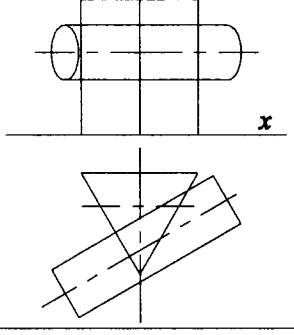
12.23



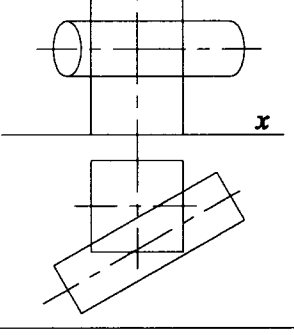
12.24



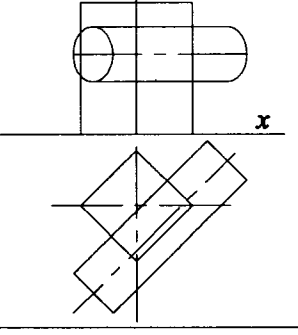
12.25



12.26



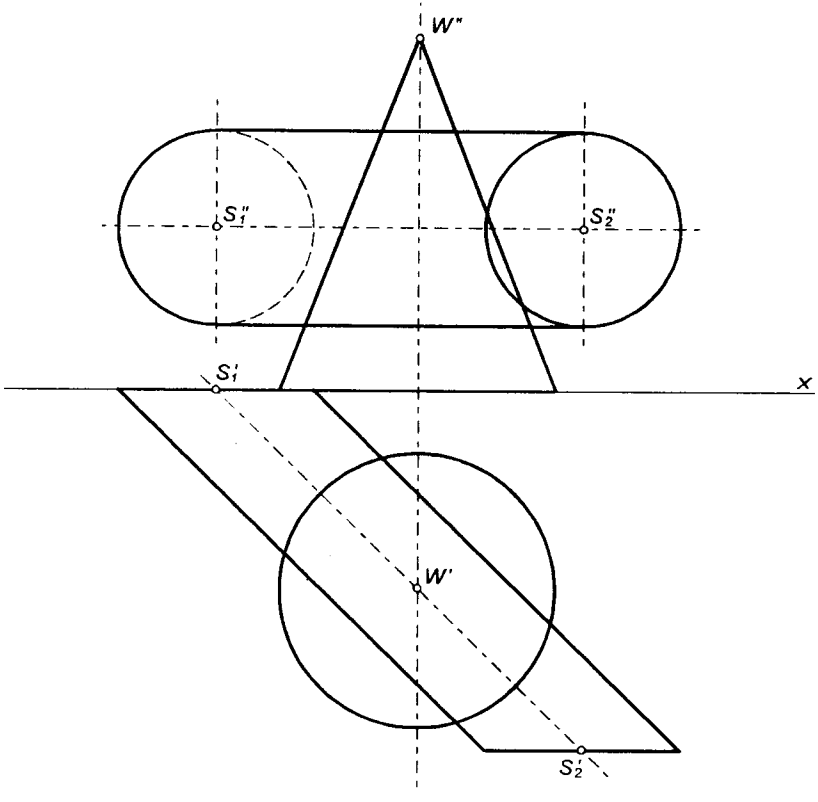
12.27

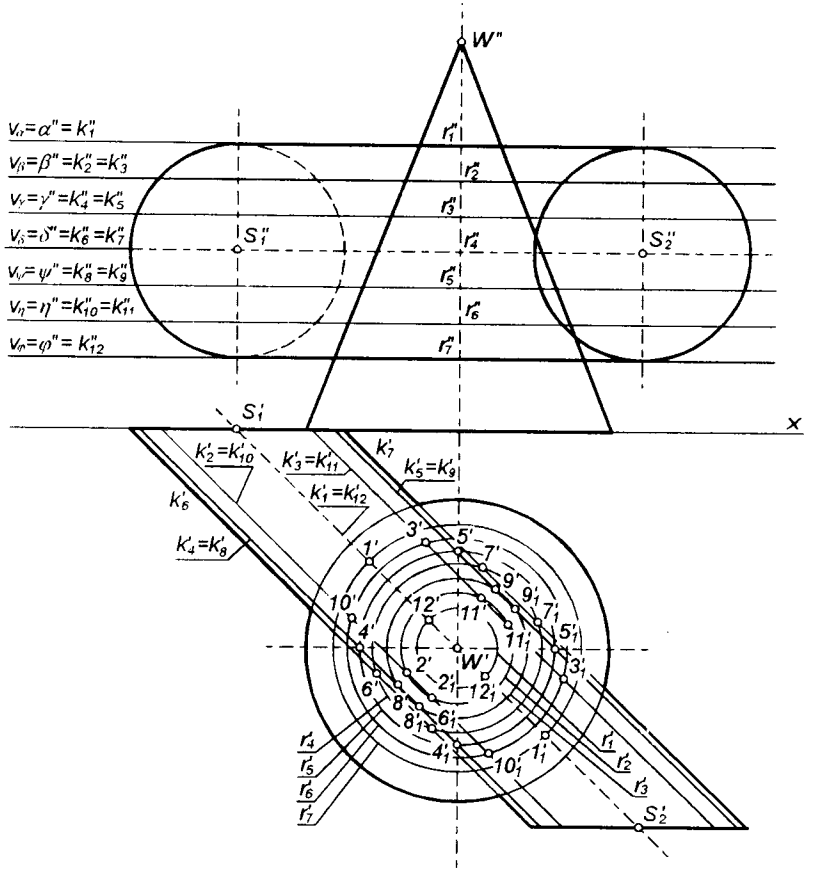


Ćwiczenie 12

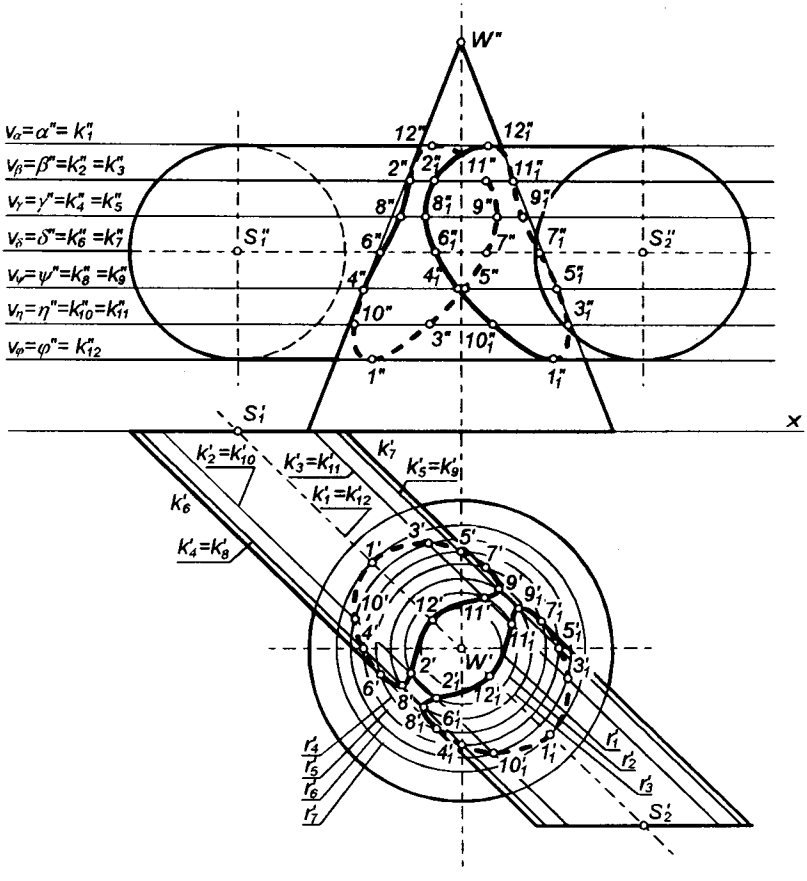
TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

Wyznaczyć linie przenikania brył i określić ich widoczność.




W''
$v_\alpha = \alpha'' = k_1''$
$v_\beta = \beta'' = k_2'' = k_3''$
$v_\gamma = \gamma'' = k_4'' = k_5''$
$v_\delta = \delta'' = k_6'' = k_7''$
$v_\psi = \psi'' = k_8'' = k_9''$
$v_\eta = \eta'' = k_{10}'' = k_{11}''$
$v_\varphi = \varphi'' = k_{12}''$
r_1''
r_2''
r_3''
r_4''
r_5''
r_6''
r_7''
S_1''
S_2''
S_1'
x
$k_2' = k_{10}'$
$k_3' = k_{11}'$
$k_1' = k_{12}'$
k_7'
$k_5' = k_9'$
k_6'
$k_4' = k_8'$
1'
3'
5'
7'
9'
$9_1'$
$7_1'$
$5_1'$
$3_1'$
10'
12'
11'
$11_1'$
4'
2'
W'
$2_1'$
$12_1'$
6'
8'
$8_1'$
$6_1'$
$4_1'$
$10_1'$
$1_1'$
r_4'
r_5'
r_6'
r_7'
r_1'
r_2'
r_3'
S_2'

1


W''
$v_\alpha=\alpha''=k_1''$
$v_\beta=\beta''=k_2''=k_3''$
$v_\gamma=\gamma''=k_4''=k_5''$
$v_\delta=\delta''=k_6''=k_7''$
$v_\psi=\psi''=k_8''=k_9''$
$v_\eta=\eta''=k_{10}''=k_{11}''$
$v_\varphi=\varphi''=k_{12}''$
S_1''
S_2''
x
S_1'
S_2'
W'
$k_2'=k_{10}'$
$k_3'=k_{11}'$
$k_1'=k_{12}'$
$k_5'=k_9'$
k_7'
k_6'
$k_4'=k_8'$
r_1'
r_2'
r_3'
r_4'
r_5'
r_6'
r_7'

2

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 12

1. Prowadzimy szereg płaszczyzn poziomych (im więcej płaszczyzn, tym dokładniejsze rozwiązanie), które przecinają stożek w okręgach (oznaczonych symbolem *r*), a walec wzdłuż jego tworzących (oznaczonych symbolem *k*). Okręgi i tworzące położone na tej samej płaszczyźnie przecinając się ze sobą wyznaczają punkty zarysu linii przenikania. Każda tworząca przecina okrąg w dwóch punktach, oznaczonych tą samą liczbą, w jednym przypadku bez indeksu, a w drugim z indeksem "$_1$". Znajdujemy najpierw rzuty poziome punktów przenikania:

   1 i $1_1 = k_{12} \cap r_7$
   2 i $2_1 = k_2 \cap r_2$
   3 i $3_1 = k_{11} \cap r_6$
   4 i $4_1 = k_8 \cap r_5$
   5 i $5_1 = k_9 \cap r_5$
   6 i $6_1 = k_6 \cap r_4$
   7 i $7_1 = k_7 \cap r_7$
   8 i $8_1 = k_4 \cap r_4$
   9 i $9_1 = k_5 \cap r_3$
   10 i $10_1 = k_{10} \cap r_6$
   11 i $11_1 = k_3 \cap r_2$
   12 i $12_1 = k_1 \cap r_1$

2. Mając dane rzuty poziome punktów przenikania możemy wyznaczyć ich rzuty pionowe, prowadząc odnoszące do przecięcia się z rzutami pionowymi odpowiednich tworzących walca. Znalezione punkty łączymy w następującej kolejności: *1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 2, 8, 6, 4, 10, 1*. Na rzucie pionowym widoczne będą te fragmenty linii przenikania, które przechodzą przez punkty leżące na widocznej stronie stożka. Na rzucie poziomym natomiast widoczne będą te fragmenty linii przenikania, które położone są na widocznej w tym rzucie stronie stożka.

Ćwiczenie 13

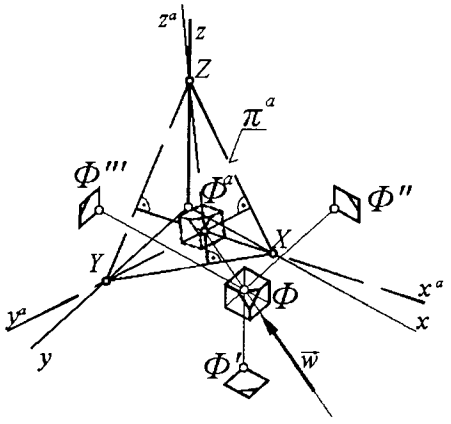
ODWZOROWANIA AKSONOMETRYCZNE PROSTOKĄTNE

1. Istota tworzenia rzutów aksonometrycznych

Rzutem aksonometrycznym przedmiotu odniesionego do układu współrzędnych prostokątnych $O(x,y,z)$ nazywamy jego rzut równoległy o kierunku określonym wektorem rzutowania $\vec{w}$ na rzutnię π^a (indeks górny "*a*" od "*aksonometria*") zwaną aksonometryczną. Zarówno wektor $\vec{w}$ jak i rzutnia π^a muszą spełniać warunek nieprostopadłości i nierównoległości do żadnej z osi x,y,z układu odniesienia. Rzutnia π^a przecina osie x,y,z i tworzy tzw. trójkąt śladów aksonometrycznych o wierzchołkach X,Y,Z leżących na osiach układu odniesienia i bokach leżących na płaszczyznach jego rzutni. Trójkąt śladów odwzorowuje więc płaszczyznę π^a. Rzut układu współrzędnych odniesienia $O(x,y,z)$ na π^a tworzy układ osi aksonometrycznych $O^a(x^a,y^a,z^a)$. Dowolny układ przestrzenny Φ rzutowany zgodnie z kierunkiem $\vec{w}$ na rzutnię π^a przekształca się w rzut aksonometryczny Φ^a (rys. 13.1). Jeżeli kierunek rzutowania $\vec{w}$ będzie prostopadły do rzutni aksonometrycznej π^a, to uzyskane odwzorowanie będzie rzutem aksonometrycznym prostokątnym. *(Jeżeli zaś kierunek rzutowania $\vec{w}$ będzie ukośny do rzutni π^a, to takie odwzorowanie nazywane będzie rzutem aksonometrycznym ukośnym.)*

Przyjęcie wektora $\vec{w}$ jednoznacznie określa układ osi aksonometrycznych oraz tak zwane skrócenia aksonometryczne definiowane jako kosinusy kątów nachylenia osi układu odniesienia do osi aksonometrycznych.

Przypuśćmy, że zadany jest wektor $\vec{w}(w_x,w_y,w_z)$ określający kierunek rzutowania w pewnym układzie odniesienia $O(x,y,z)$. Rzut tego układu w kierunku $\vec{w}$ na dowolną płaszczyznę aksonometryczną π^a utworzy układ osi aksonometrycznych $O^a(x^a,y^a,z^a)$. Konstrukcja jest elementarna i może zostać wykonana metodą obrotów, transformacją przez przeniesienie albo transformacją układu odniesienia (Ćwiczenie 13a).



Rys. 13.1 Poglądowe przedstawienie odwzorowań aksonometrycznych.

Znając kierunki osi aksonometrycznych, można przystąpić do wyznaczenia trójkąta śladów oraz dokonać kładów par osi x, y, y, z oraz x, z na płaszczyznę aksonometryczną π^a. Kolejne etapy tej konstrukcji przedstawiono w ćwiczeniu 13b. Podano tam również wykreślny sposób wyznaczenia tzw. skróceń aksonometrycznych określanych stosunkami odcinków:

$$s_x = \frac{e_x}{e}, \qquad s_y = \frac{e_y}{e}, \qquad s_z = \frac{e_z}{e} \tag{1}$$

oraz kątów α, β, γ:

$$\alpha = arc\cos(s_x), \qquad \beta = arc\cos(s_y), \qquad \gamma = arc\cos(s_z). \tag{2}$$

Można udowodnić, że dla aksonometrii prostokątnej spełnione będzie

$$s_x^{\,2} + s_y^{\,2} + s_z^{\,2} = 2 \tag{3}$$

oraz

$$e_x^{\,2} + e_y^{\,2} + e_z^{\,2} = 2 \cdot e^2. \tag{4}$$

Zadanie skróceń $s_x < 1$, $s_y < 1$, $s_z < 1$ spełniających związek (3) jednoznacznie określa układ osi aksonometrycznych i kąty nachylenia osi tego układu do osi układu odniesienia.

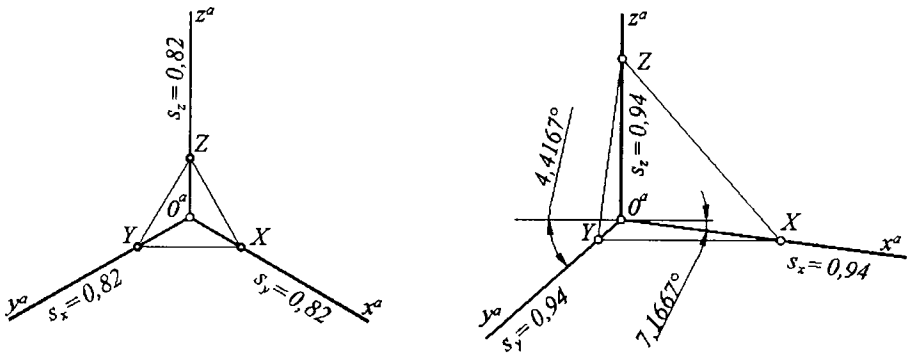
2. Rodzaje rzutów aksonometrycznych

Rzuty aksonometryczne określone przez trzy różne od siebie skrócenia $s_x \neq s_y \neq s_z$ nazywane są rzutami **anizometrycznymi**, trymetrycznymi albo trójmiarowymi.

Rzuty aksonometryczne określone przez trzy równe sobie skrócenia $s_x = s_y = s_z$ nazywane są rzutami **izometrycznymi** albo równomiarowymi. Trójkąt śladów aksonometrycznych XYZ jest trójkątem równobocznym.

Rzuty aksonometryczne określone przez dwa dowolnie wybrane i równe sobie skrócenia $s_x = s_y$, $s_x = s_z$ lub $s_y = s_z$ nazywane są rzutami **dimetrycznymi** albo dwumiarowymi. Trójkąt śladów aksonometrycznych XYZ jest trójkątem ostrokątnym równoramiennym.

Układy osi współrzędnych i teoretyczne wartości skrótów dla rzutów izometrycznych oraz dimetrycznych dla przypadku $s_x = s_z$ przedstawiono na rys. 13.2.



Rys. 13.2 Układy osi współrzędnych i teoretyczne wartości skrótów:
a) dla rzutów izometrycznych,
b) dla rzutów dimetrycznych.

3. Zastosowanie odwzorowań aksonometrycznych do zapisu konstrukcji inżynierskich

Odwzorowania aksonometryczne stosowane są powszechnie do przedstawiania kształtu elementów maszynowych w sposób poglądowy przy wykorzystaniu wyłącznie jednego rzutu. Rzuty aksonometryczne być mogą tworzone w zadanym układzie osi aksonometrycznych w dwojaki sposób:

1. metodą konstruowania rzutu aksonometrycznego bezpośrednio z rzutów prostokątnych lub
2. metodą określania jego wymiarów zgodnych z kierunkami osi x^a, y^a, z^a jako iloczynów wymiarów rzeczywistych i odpowiednich skrótów.

W odwzorowaniach realizowanych sposobem pierwszym wykorzystuje się istniejące rzuty prostokątne przedmiotu, zgodne (w układzie rzutów europejskich - E) z rzutami Monge'a, przedstawianymi powszechnie w kartezjańskim lewostronnym układzie współrzędnych.

Jeśli rzut aksonometryczny konstruowany będzie sposobem drugim, to do jego utworzenia wystarczy znajomość rzeczywistych wymiarów przedmiotu w pewnym prostokątnym układzie odniesienia $O(x,y,z)$ oraz wartości skrótów s_x, s_y, s_z spełniających zależność (2), jednoznacznie definiujących układ osi aksonometrycznych $O^a(x^a, y^a, z^a)$. Oczywista pozostaje zgodna skrętność układów $O(x,y,z)$ i $O^a(x^a, y^a, z^a)$.

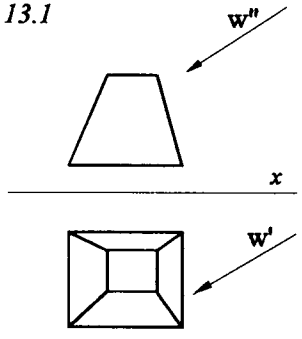
Pewne rodzaje aksonometrii są przedmiotem normy PN-82/N-01619. Norma ta dopuszcza pewne przybliżone (różne od wyliczonych teoretycznie) wartości skrótów oraz proponuje konstruowanie rzutu aksonometrycznego w prawostronnym układzie współrzędnych.

ZADANIA. Ćwiczenie 13

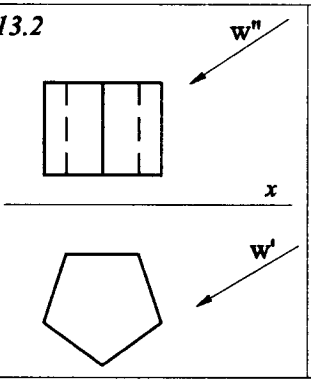
Wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu danego rzutami Monge'a, zgodną z kierunkiem rzutowania, zadanym składowymi w' i w" pewnego wektora $\overline{w}$:

a) stosując metodę obrotów,

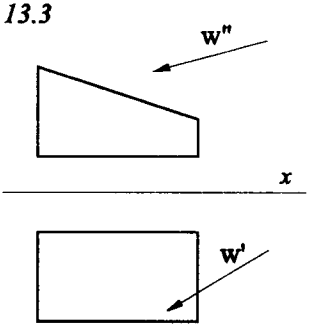
13.1



13.2

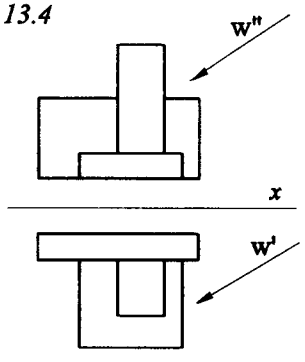


13.3

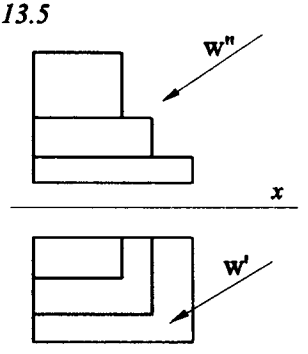


b) stosując metodę transformacji przez przeniesienie,

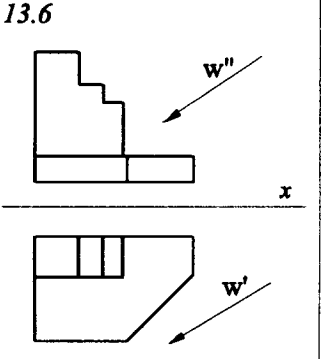
13.4



13.5

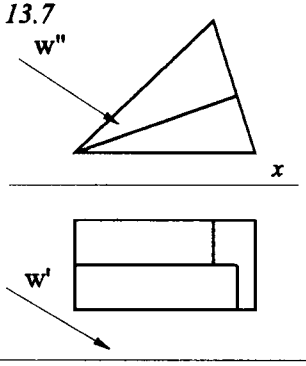


13.6

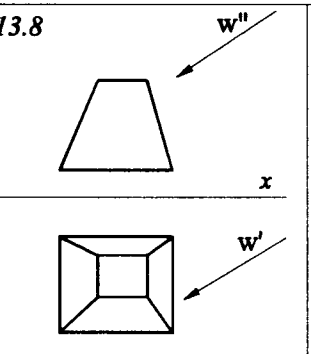


c) stosując metodę transformacji układu odniesienia.

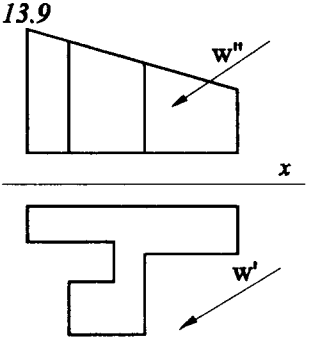
13.7



13.8

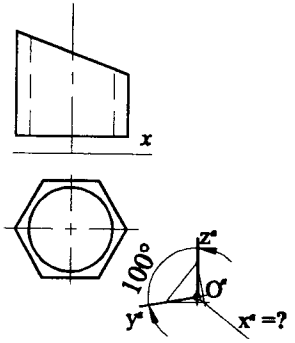


13.9

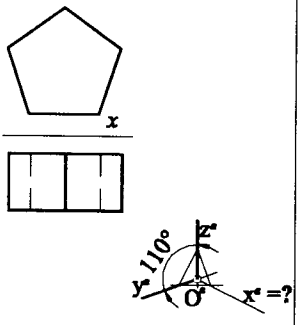


Dane są rzuty prostokatne przedmiotu oraz kierunki dwóch osi aksonometrycznych. Wyznaczyć kierunek trzeciej osi oraz wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu:
a: metodą wykreślną,
b: metodą wykorzystującą wykresy przeliczeniowe skrótów.

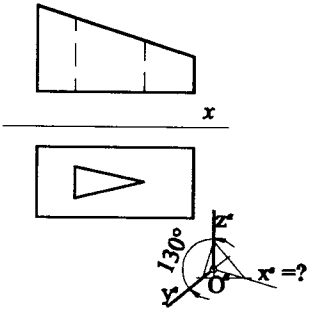
13.10 Rozwiązać metodą "a".



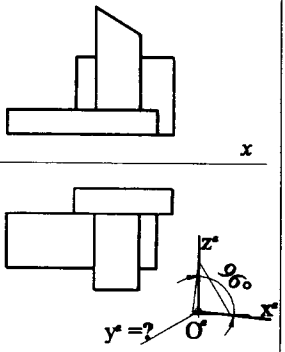
13.11 Rozwiązać metodą "b".



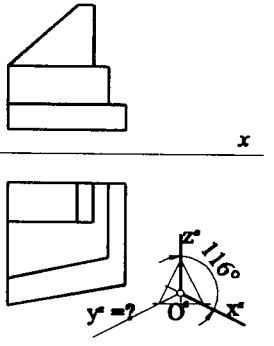
13.12 Rozwiązać metodą "a".



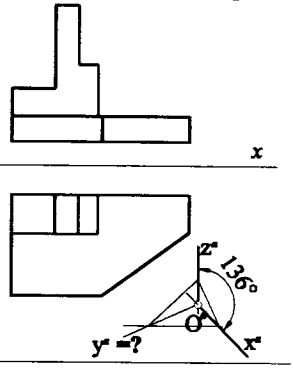
13.13 Rozwiązać metodą "b".



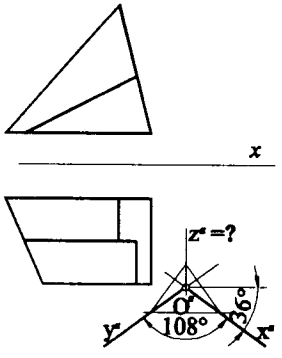
13.14 Rozwiązać metodą "a".



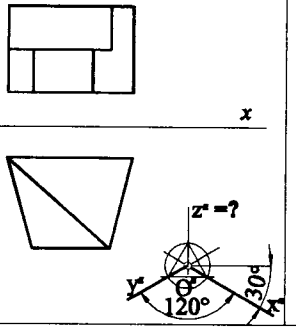
13.15 Rozwiązać metodą "b".



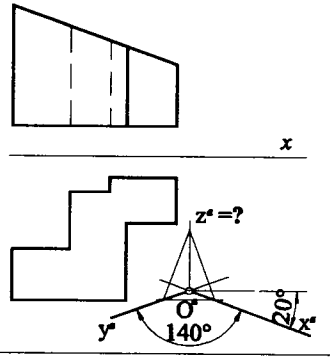
13.16 Rozwiązać metodą "a".



13.17 Rozwiązać metodą "b".

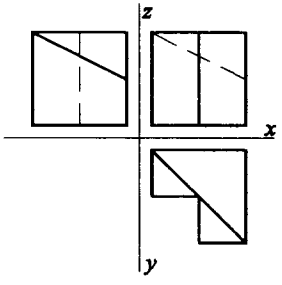


13.18 Rozwiązać metodą "a".

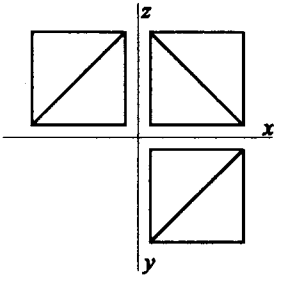


Wykreślić aksonometrię prostokątną równomiarową przedmiotu danego rzutami Monge'a:
a) wprowadzając rzuty wektora $\overline{w}$ wyznaczającego nowy kierunek rzutowania,
b) wprowadzając odpowiednie kierunki osi aksonometrycznych i wyznaczając wartości skróceń.

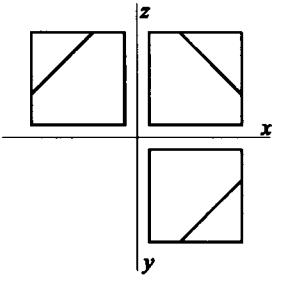
13.19 Rozwiązać metodą "a".



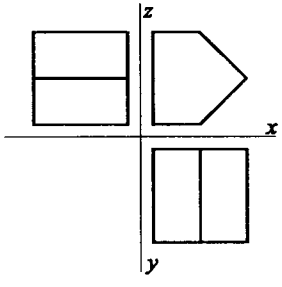
13.20 Rozwiązać metodą "b".



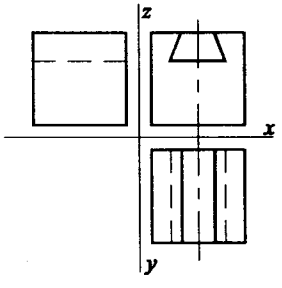
13.21 Rozwiązać metodą "a".



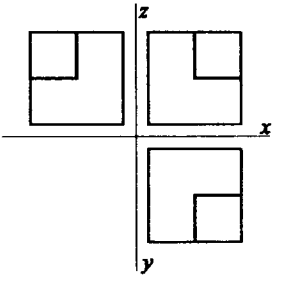
13.22 Rozwiązać metodą "b".



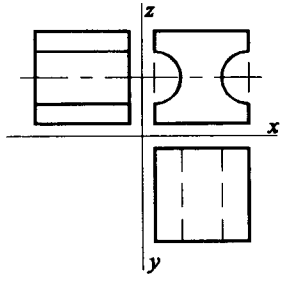
13.23 Rozwiązać metodą "a".



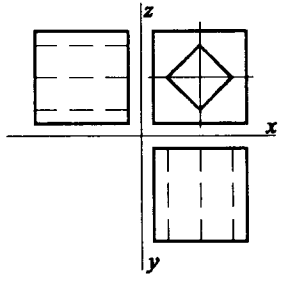
13.24 Rozwiązać metodą "b".



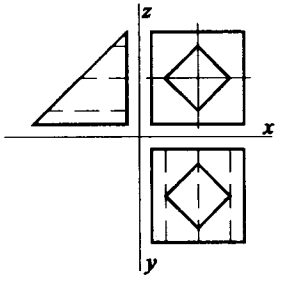
13.25 Rozwiązać metodą "a".



13.26 Rozwiązać metodą "b".

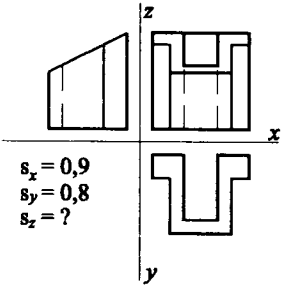


13.27 Rozwiązać metodą "a".



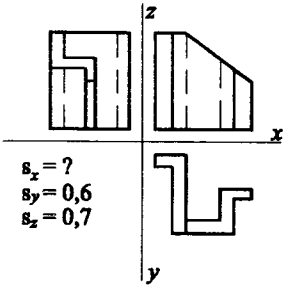
Dane są rzuty prostokatne przedmiotu oraz wartości dwóch skróceń aksonometrycznych. Wyznaczyć wykreślnie kierunki osi aksonometrycznych oraz trzecie skrócenie. Wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu. Obliczyć sumę kwadratów skróceń.

13.28



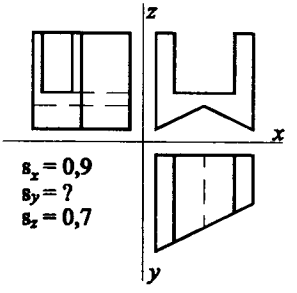
$s_x = 0{,}9$
$s_y = 0{,}8$
$s_z = ?$

13.29



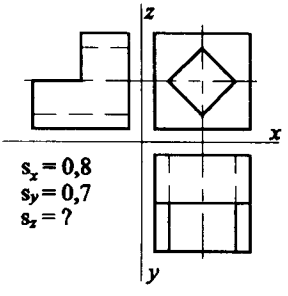
$s_x = ?$
$s_y = 0{,}6$
$s_z = 0{,}7$

13.30



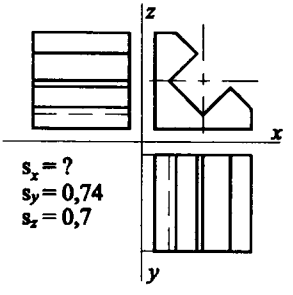
$s_x = 0{,}9$
$s_y = ?$
$s_z = 0{,}7$

13.31



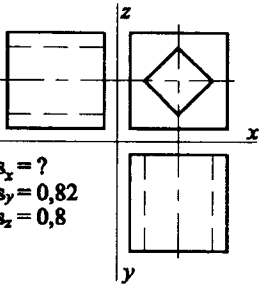
$s_x = 0{,}8$
$s_y = 0{,}7$
$s_z = ?$

13.32



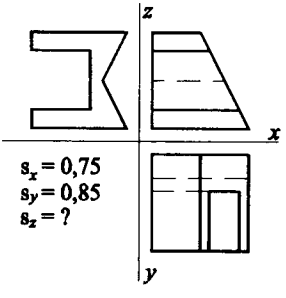
$s_x = ?$
$s_y = 0{,}74$
$s_z = 0{,}7$

13.33



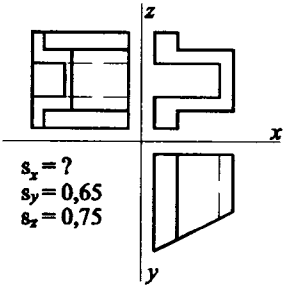
$s_x = ?$
$s_y = 0{,}82$
$s_z = 0{,}8$

13.34



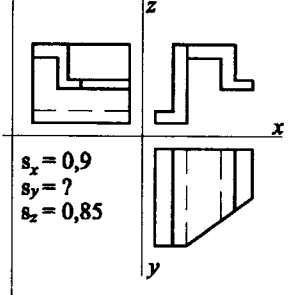
$s_x = 0{,}75$
$s_y = 0{,}85$
$s_z = ?$

13.35



$s_x = ?$
$s_y = 0{,}65$
$s_z = 0{,}75$

13.36

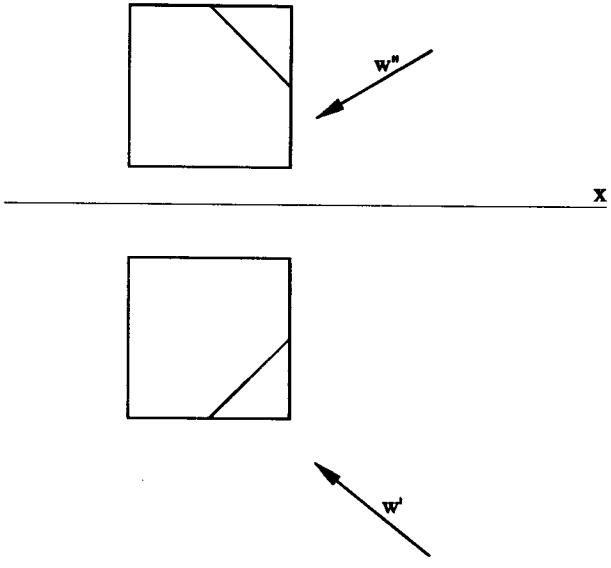


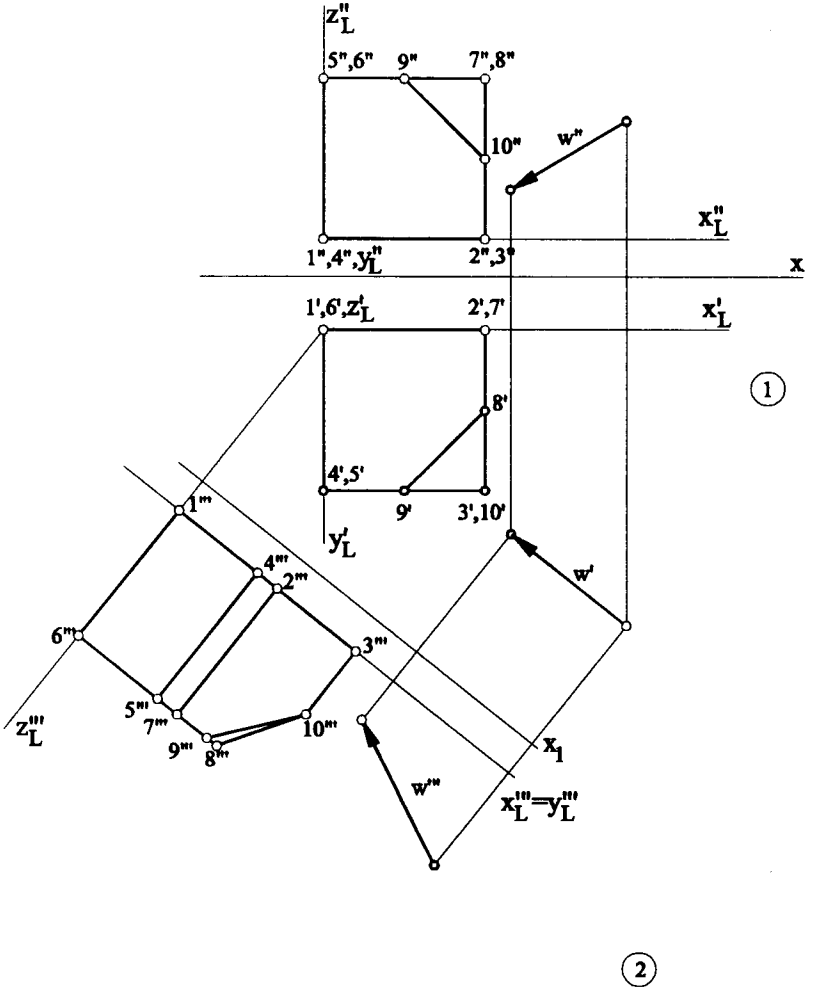
$s_x = 0{,}9$
$s_y = ?$
$s_z = 0{,}85$

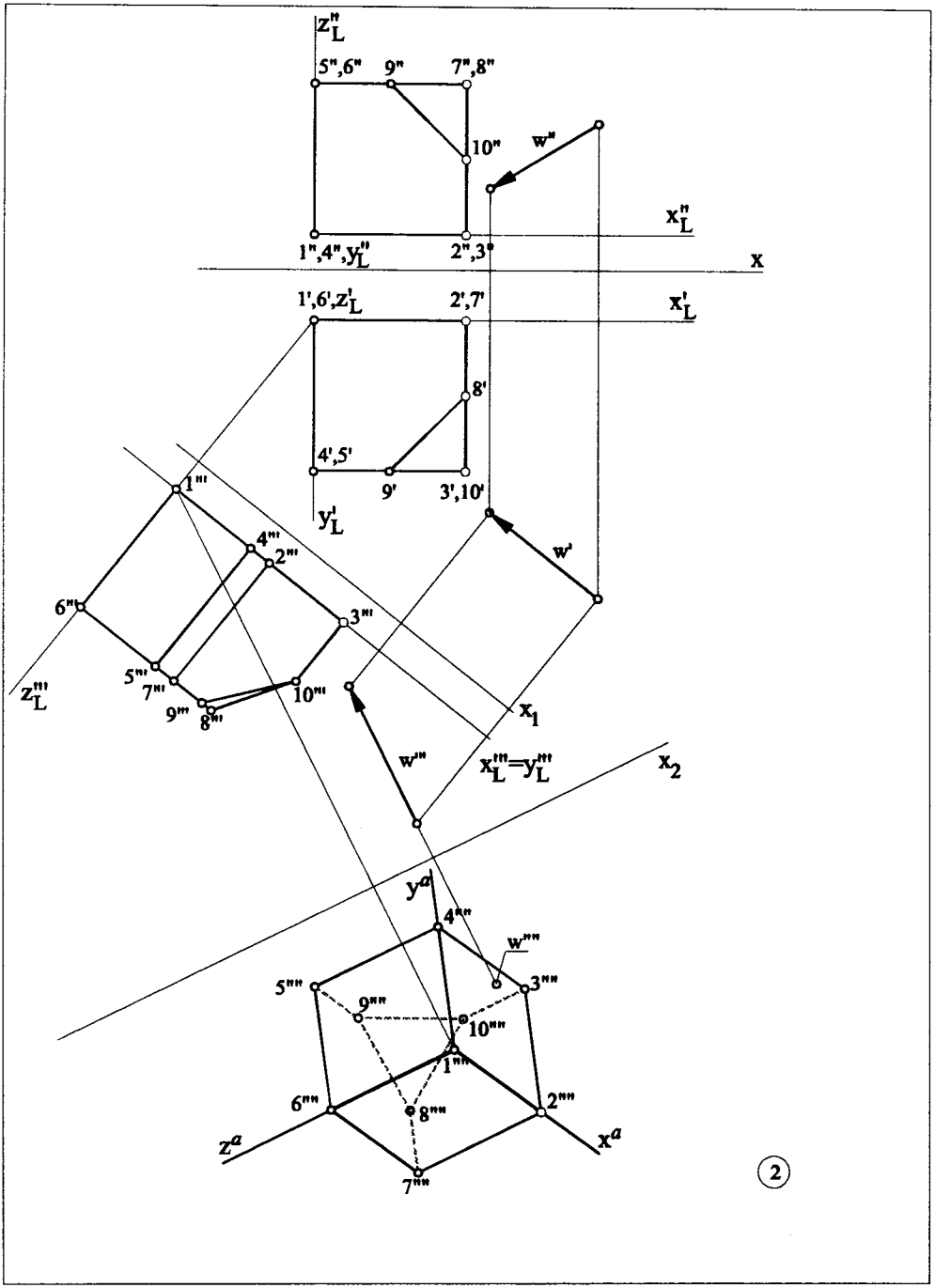
Ćwiczenie 13.a

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

Wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu danego rzutami Monge'a,zgodną z kierunkiem rzutowania zadanym składowymi w' i w" pewnego wektora $\overline{w}$. Zastosować motodę transformacji układu odniesienia.




z''L
5'',6''
9''
7'',8''
10''
w''
x''L
1'',4'',y''L
2'',3''
x
1',6',z'L
2',7'
x'L
1
8'
4',5'
9'
3',10'
y'L
w'
1'''
4'''
2'''
6'''
3'''
5'''
7'''
10'''
z'''L
9'''
8'''
x1
w'''
x'''L=y'''L
2


z''_L
5",6"
9"
7",8"
10"
w"
x''_L
1",4",y''_L
2",3"
x
1',6',z'_L
2',7'
x'_L
8'
4',5'
9'
3',10'
y'_L
w'
1'''
4'''
2'''
6'''
3'''
5'''
7'''
10'''
9'''
8'''
z'''_L
x_1
w'''
$x'''_L=y'''_L$
x_2
y^a
4''''
w''''
5''''
3''''
9''''
10''''
1''''
6''''
8''''
2''''
z^a
x^a
7''''
2

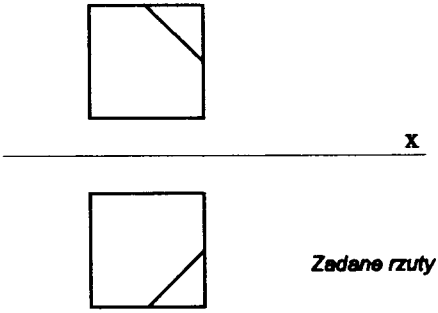
OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 13a

1. Wprowadzamy związany z przedmiotem lokalny układ współrzędnych x_L, y_L, z_L o osiach $x_L \| x$ $y_L \| y$, $z_L \| z$. Opisujemy wierzchołki bryły oraz początek i koniec wektora . $\vec{w}$.
2. Wprowadzamy nową rzutnię π_3 prostopadłą do rzutni poziomej π_1 oraz równoległą do wektora $\vec{w}$. Nowa oś rzutów x_1 jest równoległa do primowego rzutu tego wektora: $x_1 \| w'$. Wyznaczamy trzecie rzuty: przedmiotu, układu osi x_L, y_L, z_L oraz wektora $\vec{w}$.
3. Wprowadzamy nową rzutnię π_4 prostopadłą do rzutni poprzedniej oraz do wektora $\vec{w}$. Nowa oś rzutów x_2 jest prostopadła do trzeciego rzutu tego wektora: $x_2 \perp w'''$. Wyznaczamy czwarty rzut przedmiotu, układu osi x_L, y_L, z_L oraz wektora $\vec{w}$. Uzyskany rzut przedmiotu jest jego poszukiwanym odwzowaniem aksonometrycznym. Uzyskany rzut układu osi przedstawia osie aksonometryczne x^a, y^a, z^a. Uzyskany czwarty rzut w'''' wektora $\vec{w}$ odwzorowany jest punktem.

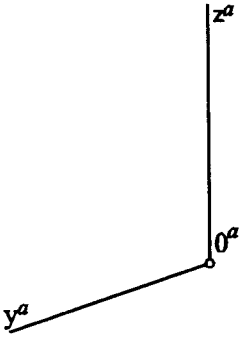
Ćwiczenie 13b

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

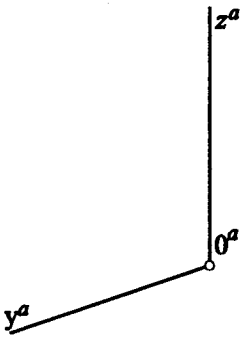
Dane są rzuty prostokątne przedmiotu oraz kierunki dwóch osi aksonometrycznych. Wyznaczyć kierunek trzeciej osi oraz wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu:
a) metodą wykreślną, na podstawie rzutów prostokątnych,
b) przy pomocy wykresów przeliczeniowych skrótów.



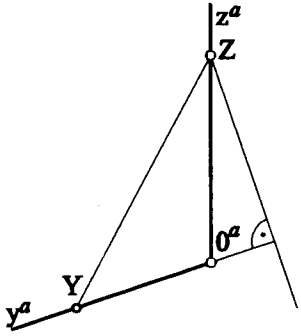
Zadane rzuty prostokątne przedmiotu.



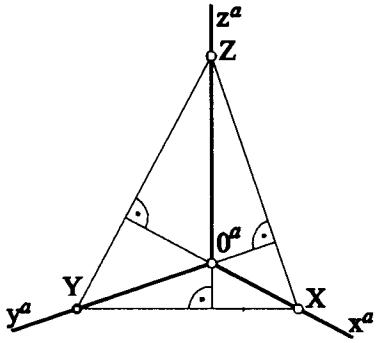
Zadane kierunki dwóch osi aksonometrycznych.



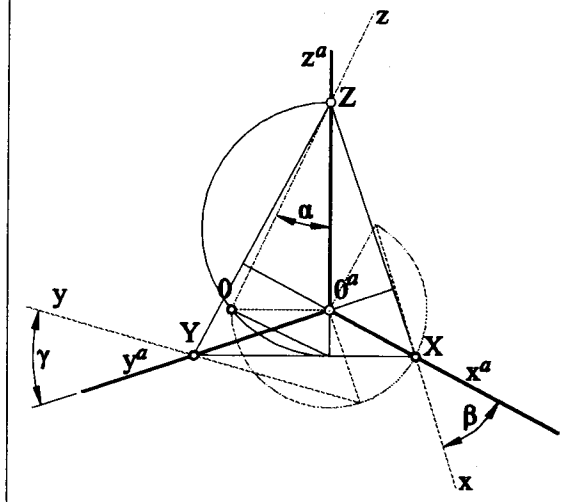
1



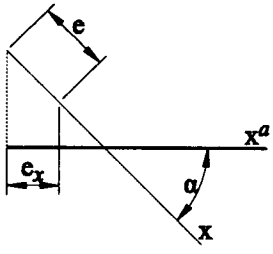
2



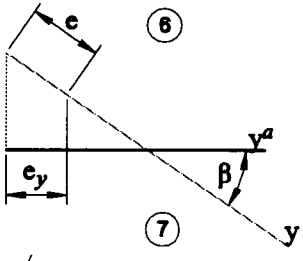
3


z
z^a
Z
α
0
0^a
y
Y
X
γ
y^a
x^a
β
x

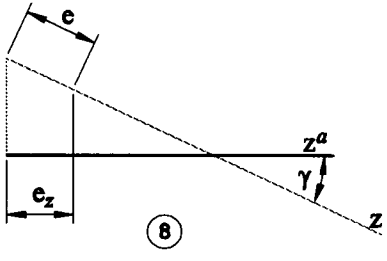
4


e
x^a
e_x
α
x

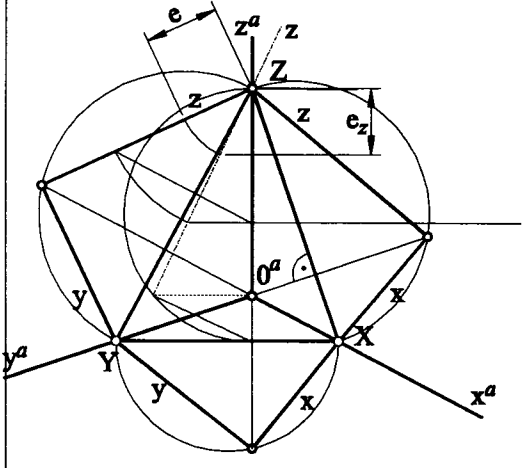
6


e
y^a
e_y
β
y

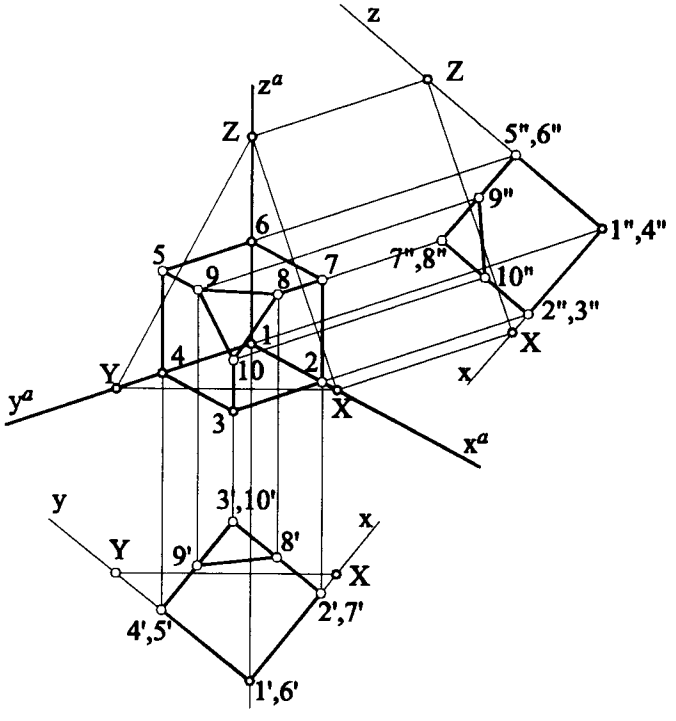
7


e
z^a
γ
e_z
z

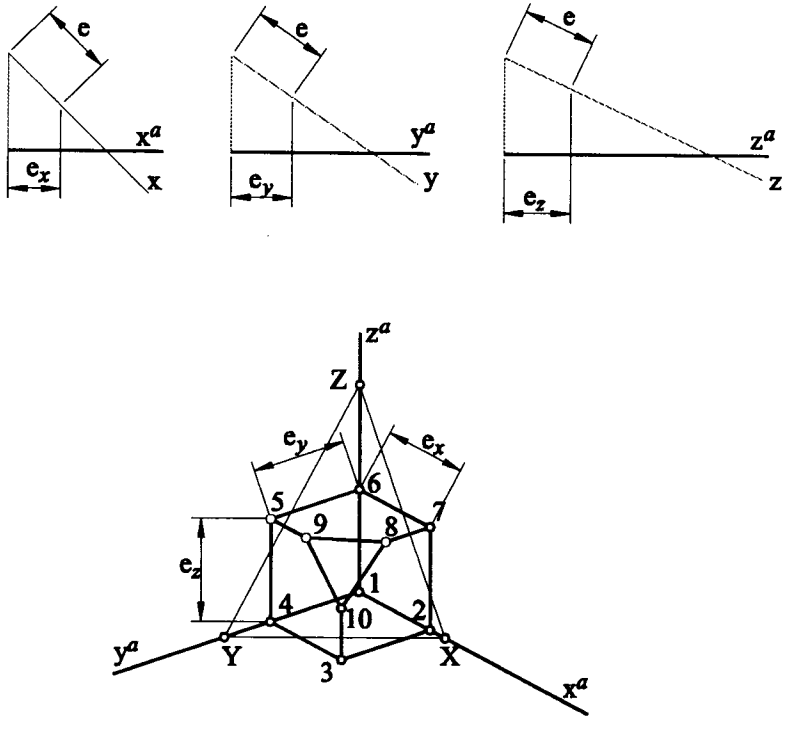
8


e
z^a
z
Z
z
z
e_z
0^a
y
x
y^a
Y
X
y
x
x^a

5


z
Z
z^a
Z
5",6"
9"
1",4"
6
5
9
8
7
7",8"
10"
2",3"
1
X
4
10
2
x
Y
y^a
X
3
x^a
y
3',10'
x
Y
9'
8'
X
2',7'
4',5'
1',6'

9



10

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 13b

1. Wykreślamy dwie zadane osie aksonometryczne z^a oraz y^a.
2. Na osie nanosimy dowolnie wybrane punkty wierzchołkowe aksonometrycznego trójkąta śladów: $Y \in y^a$ oraz $Z \in z^a$. Łączymy punkty Z i Y. Z punktu Z kreślimy półprostą prostopadłą do osi y^a.
3. Z punktu Y kreślimy półprostą prostopadłą do osi z^a. Punkt przecięcia się tej półprostej z półprostą wyznaczona w p. 2 jest trzecim wierzchołkiem X aksonometrycznego trójkąta śladów.
4. Korzystając z metody kładów wyznaczamy kąty nachylenia osi układu odniesienia x, y, z do osi aksonometrycznych.
5. Dokonujemy kładów płaszczyzn zy, zx oraz xy na rzutnię aksonometryczną.

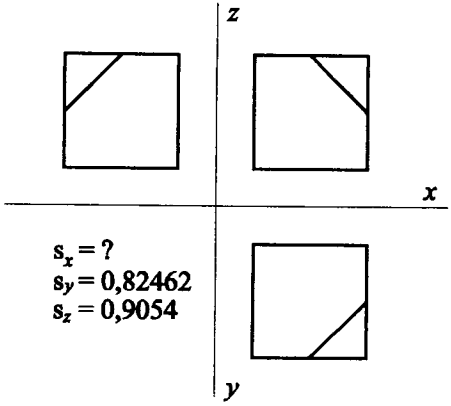
6, 7, 8 Wykonujemy szkice odwzorowujące kąty nachylenia osi rzeczywistych z, y, z do aksonometrycznych x^a, y^a, z^a.

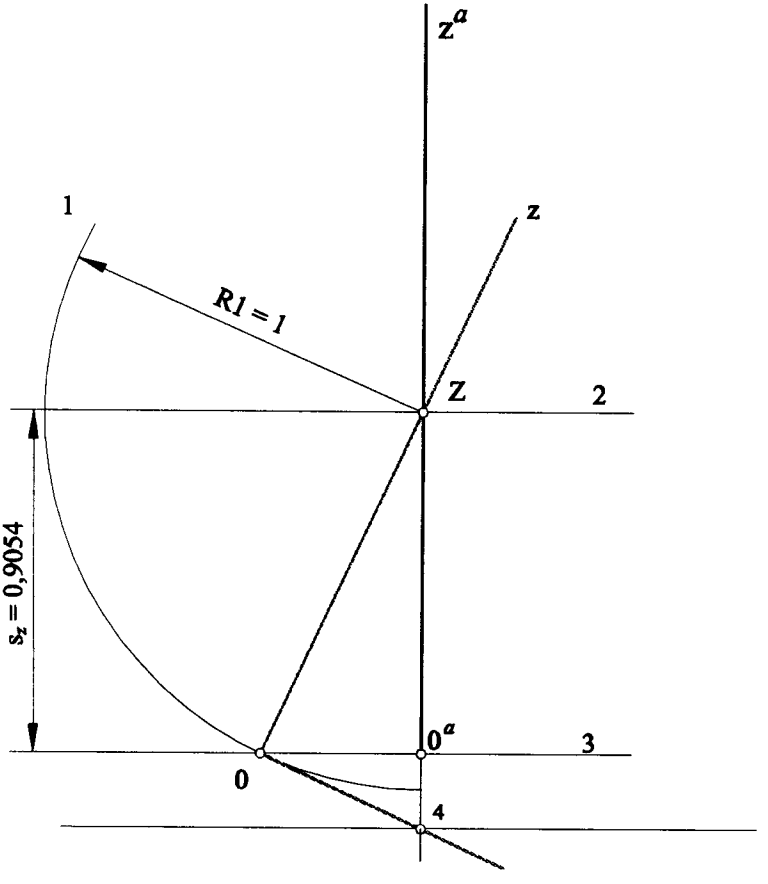
9. Konstruujemy rzut aksonometryczny na podstawie zadanych rzutów prostokątnych, albo kreślimy rzut aksonometryczny określając jego wymiary przy pomocy wykresów przeliczeniowych skrótów.

Ćwiczenie 13c

TREŚĆ ZADANIA (dane, szkic):

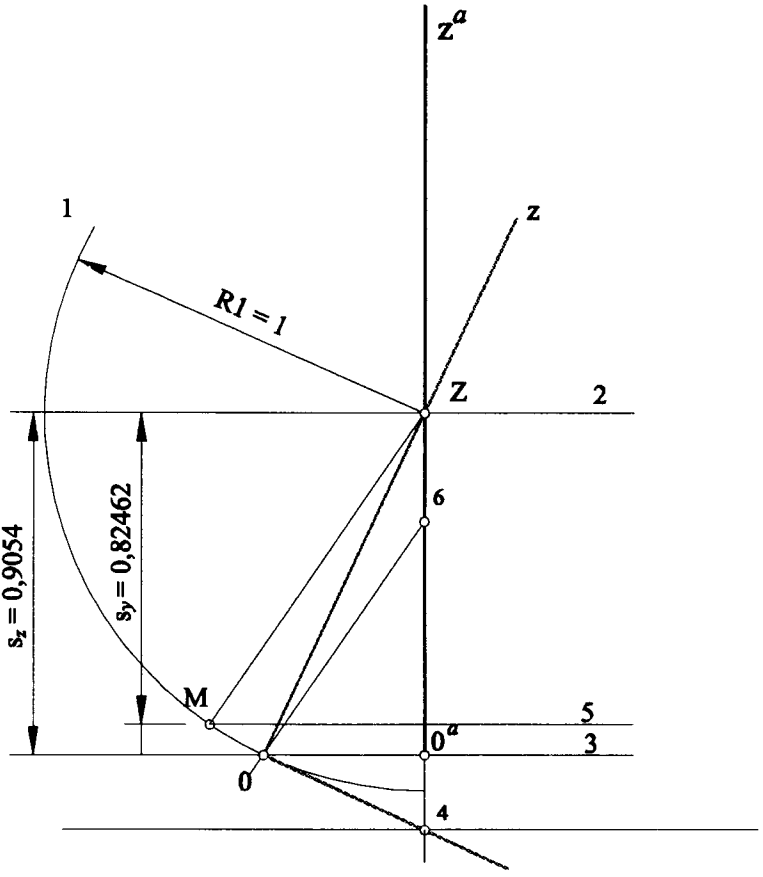
Dane są rzuty prostokątne przedmiotu oraz wartości dwóch skróceń aksonometrycznych. Wyznaczyć wykreślnie kierunki osi aksonometrycznych oraz trzecie skrócenie. Wykreślić aksonometrię prostokątną przedmiotu. Obliczyć sumę kwadratów skróceń.





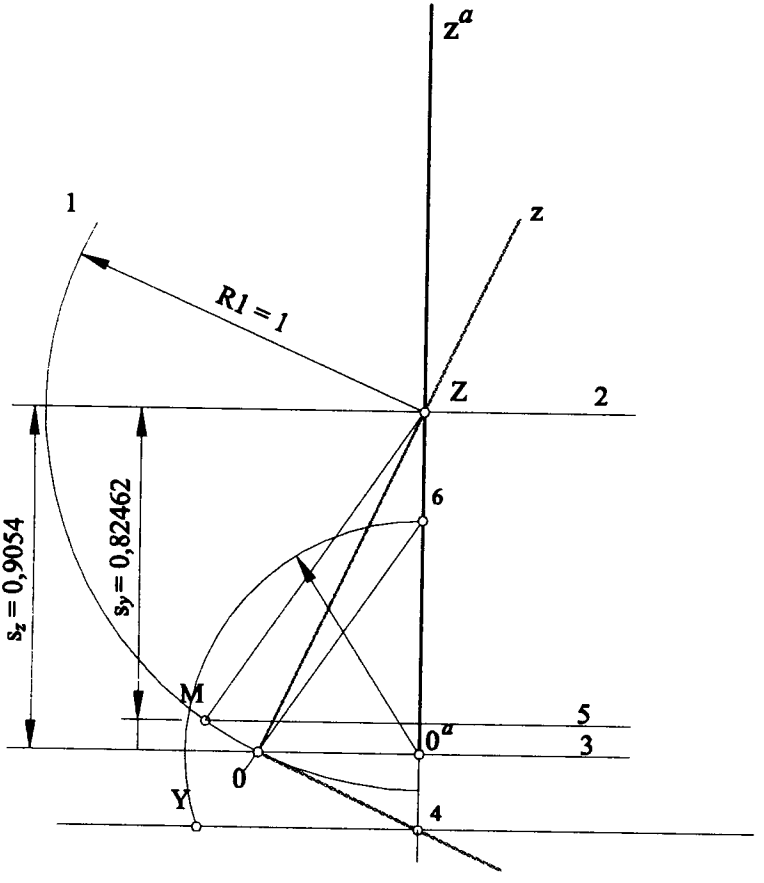
Podz. 5:1

1



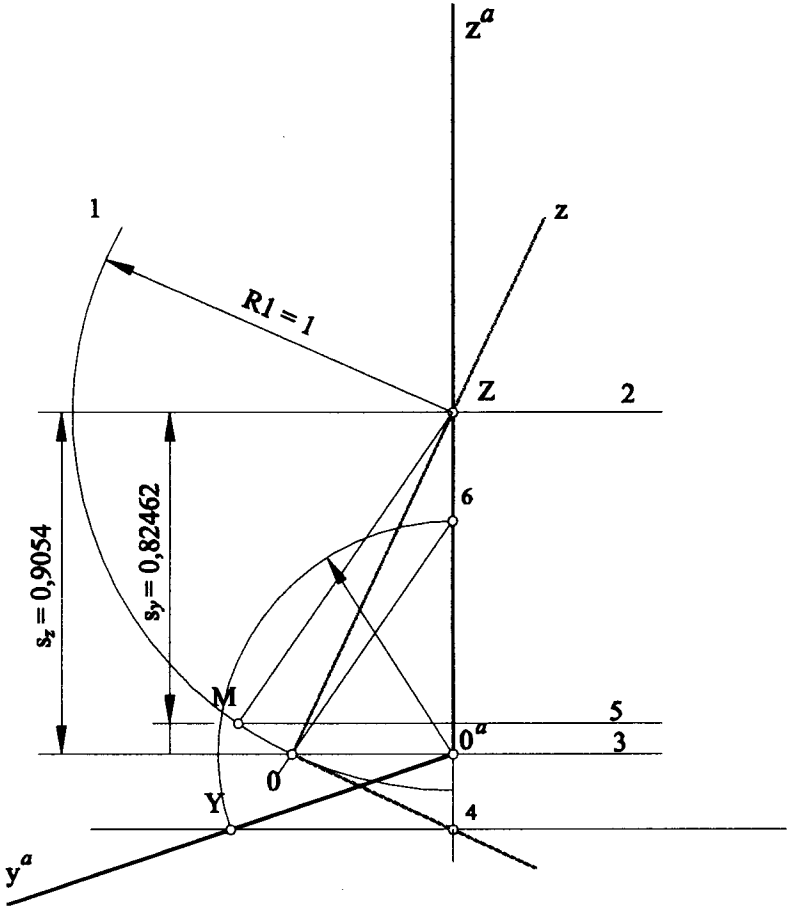
Podz. 5:1

2



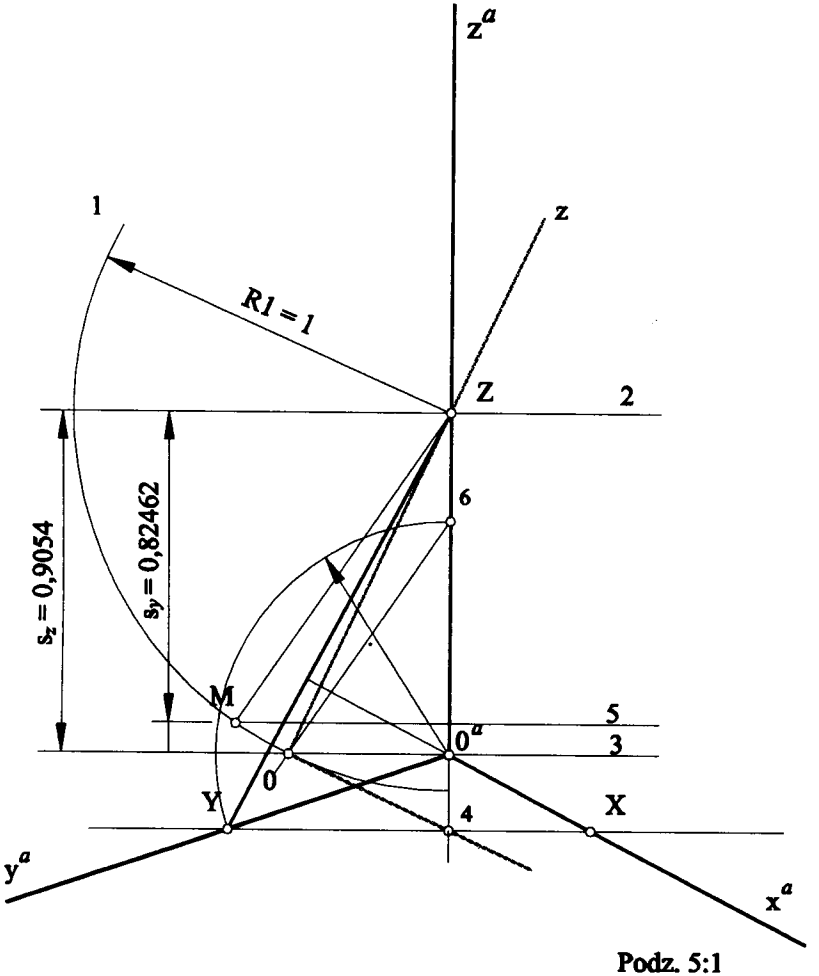
Podz. 5:1

3



Podz. 5:1

4



Podz. 5:1

5

Dalszy przebieg rozwiązania jak w ćwiczeniu 13b.

OPIS ROZWIĄZANIA. Ćwiczenie 13c

1. Wykreślamy oś aksonometryczną z^a. Na osi tej zaznaczamy wierzchołek Z aksonometrycznego trójkąta śladów. Z punktu Z kreślimy łuk 1 o promieniu równym jednostce (na szkicu za jednostkę przyjęto 1 cm). Kreślimy linię pomocniczą 2 przechodzącą przez Z i prostopadłą do z^a. Linię tę przesuwamy w dół o s_z =0.90554 cm do położenia 3. Przecięcie tej linii z łukiem 1 wyznacza nam punkt O (początek układu współrzędnych $0,x,y,z$), zaś jej przecięcie z osią z^a wyznacza punkt 0^a (początek układu współrzędnych aksonometrycznych $0^a, x^a, y^a, z^a$). Punkty OZ wyznaczają oś z układu odniesienia w kładzie na rzutnię aksonometryczną π^a. Prostopadła do z poprowadzona przez punkt 0 leży na płaszczyźnie O,x,y oraz tnie oś z^a w punkcie 4 leżącym na przeciwległym do p-tu Z boku trójkąta śladów aksonometrycznych.
2. Linię pomocniczą 2 przesuwamy w dół o s_y =0.82464 cm do położenia 5. Przecięcie tej linii z łukiem 1 wyznacza nam punkt M. Kąt nachylenia prostej określonej punktami ZM odwzorowuje nachylenie osi y do rzutni aksonometrycznej π^a. Prosta ZM przesunięta równolegle do punktu 0 wyznacza nam na osi z^a punkt 6.
3. Z punktu 6 kreślimy łuk o środku 0^a, aż do przecięcia z przeciwległym do punktu Z, bokiem trójkąta śladów aksonometrycznych. Punkt ten wyznacza nam wierzchołek Y aksonometrycznego trójkąta śladów.
4. Kreślimy aksonometryczną oś y^a.
5. Kreślimy bok YZ aksonometrycznego trójkąta śladów. Przez punkt 0ª kreślimy oś x^a prostopadle do YZ.

Dalszy przebieg rozwiązania jak w ćwiczeniu 13b.

Ćwiczenie 14

ELEMENTY KOMPUTEROWEGO WSPOMAGANIA W GEOMETRII WYKREŚLNEJ

1. Wprowadzenie do zagadnień komputerowego zapisu konstrukcji

Omówione w poprzednich rozdziałach metody odwzorowań wykorzystywane są powszechnie do zapisu konstrukcji różnych maszyn, urządzeń i ich elementów. Tradycyjne sposoby uzyskania takiego zapisu realizowane przy pomocy różnego rodzaju przyrządów kreślarskich są bardzo pracochłonne. Nośnikiem takiego zapisu zwykle jest papier, a narzędziem służącym do jego wykonania ołówek o ostrzu określonej grubości. Jego dokładność jest ograniczona i zależy od użytych przyrządów i doświadczenia wykonawcy. Korekta takiego zapisu jest utrudniona koniecznością usuwania i powtórnego rysowania niektórych jego fragmentów. Najczęściej stosowanym rodzajem zapisu jest zapis dwuwymiarowy 2D. Z zapisu takiego można uzyskać zapis trójwymiarowy 3D, ale tradycyjne metody przy pomocy linijki i ołówka są bardzo pracochłonne. Przykładem takiego zapisu są odwzorowania aksonometryczne.

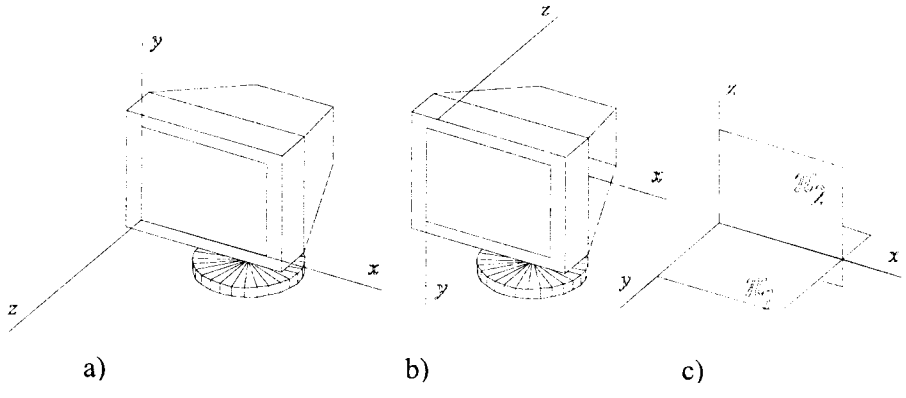
Przyszłościowym sposobem zapisu konstrukcji jest zapis komputerowy oferowany przez współczesne systemy komputerowego wspomagania projektowania CAD. Pierwotnym i oryginalnym nośnikiem takiego zapisu jest pamięć operacyjna komputera. Ponieważ pamięć ta jest adresowalna, wszelkie korekty takiego zapisu są nieskomplikowane i mogą być dokonywane na dowolnym etapie jego tworzenia. Zapis utworzony w pamięci operacyjnej nie jest trwały i ginie po wyłączeniu komputera. Z tego powodu jest on okresowo zapisywany w tzw. pamięci masowej, najczęściej na dysku twardym komputera. Można tworzyć dowolną ilość kopii tego zapisu na dyskach przenośnych lub dyskietkach. Z każdej z tych kopii można uzyskać ponownie zapis pierwotny w pamięci operacyjnej komputera. Zapis na papierze uzyskamy przy pomocy drukarki sprzężonej z komputerem.

Jednym z najbardziej rozpowszechnionych programów z grupy CAD jest program AutoCAD opracowany przez firmę Autodesk z USA. Rysunek 2D w takim programie tworzony jest przez przy użyciu szeregu obiektów płaskich, takich jak

linie, łuki, okręgi itp. Rysunek 3D tworzony jest przy pomocy tzw. prymitywów (tzn. obiektów prostych), takich jak prostopadłościany, stożki, kule, walce itp. Program umożliwia tworzenie rysunków o dużej dokładności. Współrzędne punktów rysunkowych mogą być zapamiętywane w pamięci komputera z dokładnością do 14 miejsc po przecinku.

Po włączeniu AutoCADa na monitorze komputera pojawia się okno programu zawierające pasek rozwijalnego menu w górnej części, pasek stanu na dole, obszar rysowania, pole poleceń i wiele pasków narzędziowych, zawierających ikony symbolizujące polecenia. Poszczególne komendy rysunkowe można wprowadzać z klawiatury w polu poleceń, wybierać z menu lub pasków narzędziowych. Korzystanie z pierwszego z owych sposobów wymaga znajomości składni poleceń i umiejętności ich zapisania. Sposób ostatni (klikanie na ikony) nie wymaga nawet umiejętności czytania.

Z oknem rysunku związany jest kartezjański prawostronny układ współrzędnych (rys. 14.1a) o początku w lewym dolnym narożniku okna. Oznacza to, że oś x skierowana jest w prawo, oś y do góry, zaś oś z w stronę użytkownika. Identyczną orientację ma układ współrzędnych związany z ekranem graficznym programu Turbo Pascal. Początek układu jest tu jednak związany z lewym górnym narożnikiem ekranu (rys. 14.1b). Natomiast odmienną orientację mają osie układów używanych w geometrii wykreślnej i rysunku technicznym (rzutnie Monge'a). Zastosowano tam kartezjański lewostronny układ współrzędnych (Rys. 14.1c).



Rys. 14.1 Orientacje wybranych układów współrzędnych
a) prawostronny programu AutoCAD, b) prawostronny Turbo Pascala,
c) lewostronny dla rzutni Monge'a.

Kolejne polecenia konieczne do wykonania rysunku można zapisać do pliku, wywołać i wykonać w trakcie sesji programu AutoCAD. Umożliwia to interpreter języka AutoLISP, wbudowany do programu AutoCAD. Programy w tym języku muszą być zapisane w plikach z rozszerzeniem *.*lsp*. Taki sposób pracy umożliwia tzw. parametryzację rysunku oraz jego wielokrotne poprawianie i wykonywanie.

2. Komputerowe wspomaganie konstruowania wybranych odwzorowań geometrii wykreślnej w zapisie algorytmicznym

Każde zadanie zapisać można w postaci sieci działań prowadzących do jego rozwiązania. Taki sposób zapisu nazywany jest algorytmem. Algorytm budowany jest przy przestrzeganiu pewnych reguł logiki matematycznej oraz przedstawiany zwykle jednym z następujących dwóch sposobów:

1. jako schemat blokowy na podstawie pewnego zbióru symboli określony normą PN-75/E-01226 i przy przestrzeganiu pewnych reguł łączenia tych symboli,
2. przy wykorzystaniu języka naturalnego za pomocą tzw. pseudokodu.

Algorytm tworzenia wybranej elementarnej konstrukcji tworzy procedurę, która może stanowić elementarny składnik innej, bardziej złożonej konstrukcji.

Do elementarnych procedur stosowanych w konstrukcjach geometrii wykreślnej należą:

- wyznaczanie śladów prostej zadanej jej rzutami lub rzutami dwóch niepokrywających się punktów,
- wyznaczanie śladów płaszczyzny zadanej parą przecinających się lub wzajemnie równoległych i niepokrywających się prostych, punktem i prostą nie przechodzącą przez ten punkt albo trzema nie współosiowymi punktami,
- wyznaczanie krawędzi dwóch płaszczyzn zadanych śladami,
- wyznaczanie punktu przebicia płaszczyzny prostą.

Poniżej przedstawione zostaną algorytmiczne zapisy pierwszej z tych procedur.

2.1. Odwzorowanie elementów podstawowych i przynależnych

2.1.1. Wyznaczanie śladów prostej zadanej dwoma punktami

Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania następujące zadanie:

Wyznaczyć w układzie rzutni π_1 i π_2 ślady H_a V_a prostej a, zadanej punktami A i B.

Aby rozwiązać to zadanie, należy wykreślić osie x, y, z układu rzutni Monge'a sprowadzonych do płaszczyzny rysunku pokrywającej się z rzutnią π_2 i wykonać czynności wymienione w poniższym algorytmie.

Algorytm rozwiązania:

- W układzie osi x, y, z odwzorować rzuty A', A'', B', B'' punktów A, B. Przez odpowiednie rzuty punktów wykreślić rzuty prostej: $p' = A'B'$, $p'' = A''B''$.
  - Jeżeli współrzędne x obu punktów A i B będą sobie równe, to rozwiązanie zadania wymaga wprowadzenia trzeciej rzutni.
    - Jeżeli współrzędne y obu punktów A i B będą sobie równe, to ślad pionowy V_p będzie punktem niewłaściwym.
    - Jeżeli współrzędne z obu punktów A i B będą sobie równe, to ślad poziomy H_p będzie punktem niewłaściwym.
  - Jeżeli współrzędne x obu punktów A i B będą różne, to rozwiązanie zadania nie wymaga wprowadzenia trzeciej rzutni.
    - Jeżeli współrzędne z obu punktów A i B będą sobie równe, to ślad poziomy H_p będzie punktem niewłaściwym ($p \| \pi_1$, prosta pozioma). Rzut primowy śladu pionowego V_p będzie punktem przecięcia rzutu primowego prostej p i osi x. Ślad pionowy V_p będzie leżał na rzucie wtórowym prostej p.
    - Jeżeli współrzędne y obu punktów A i B będą sobie równe, to ślad pionowy V_p będzie punktem niewłaściwym ($p \| \pi_2$, prosta czołowa). Rzut wtórowy śladu poziomego H_p będzie punktem przecięcia rzutu wtórowego prostej p i osi x. Ślad poziomy H_p będzie leżał na rzucie primowym prostej p.
    - Jeżeli współrzędne z obu punktów A i B oraz współrzędne y obu tych punktów będą różne, to rzut primowy śladu pionowego V_p będzie punktem przecięcia rzutu primowego prostej p i osi x. Rzut wtórowy śladu poziomego H_p będzie punktem przecięcia rzutu wtórowego prostej p i osi x. Ślad pionowy V_p będzie leżał na rzucie wtórowym prostej p, a ślad poziomy H_p będzie leżał na rzucie primowym prostej p.

KONIEC

Ten sam algorytm zapisany w formie pseudokodu będzie wyglądał następująco:

START

W układzie osi x,y,z nanieść rzuty A',A'' i B',B'' punktów A i B. Przez odpowiednie rzuty punktów wykreślić rzuty prostej: $p' := A'B'$, $p'' := A''B''$.

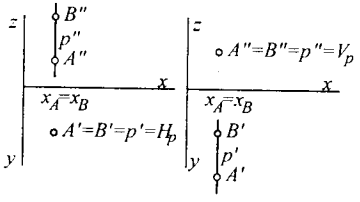
Jeżeli $x_A = x_B$, to

Jeżeli $y_A = y_B$, to

$A'' \equiv A'$; $H_p := A'$; $V_p := \infty$.

Jeżeli $z_A = z_B$, to

$A' \equiv A''$; $V_p := A''$; $H_p := \infty$.



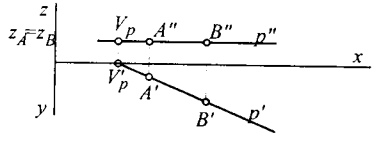
Jeżeli $x_A \neq x_B$, to

Jeżeli $z_A = z_B$, to

$H_p := \infty$;

$V'_p := p' \cap x$;

$V_p := f(x_{V'_p}, 0, z_A)$

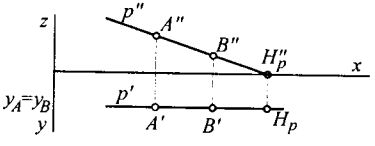


Jeżeli $y_A = y_B$, to

$V_p := \infty$;

$H''_p := p'' \cap x$;

$H_p := f(x_{H''_p}, y_p, 0)$



Jeżeli $z_A \neq z_B \wedge y_A \neq y_B$, to

$V'_p := p' \cap x$;

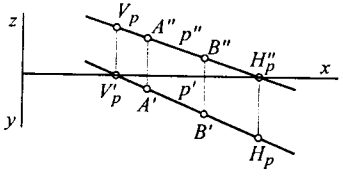
$V''_p \cap p''$;

$V_p := V''_p$

$H''_p := p'' \cap x$;

$H'_p \cap p'$;

$H_p := H'_p$;



KONIEC

Przedstawioną wyżej procedurę zapisano (używając specjalnego kodu) w języku AutoLISP w pliku o nazwie "drawLIN.lsp". Procedura ta zawiera w swej treści pewne parametry formalne (np. zapisane symbolicznie jako ***ptA*** i ***ptB*** oznaczenia punktów A i B, oznaczenie prostej ***pros*** oraz współrzędne **xA yA zA xB yB zB** punktów A i B).

```
;;;            drawLIN.lsp
;;; procedura służąca do rysowania rzutów prostej pros przechodzącej przez punkty ptA i
ptB.
;;;
(defun DRAW ( ptA ptB pros xA yA zA xB yB zB)
 (setq Apr (list xA yA))
 (setq Bpr (list xB yB))
      (setq Awt (list xA zA))
      (setq Bwt (list xB zB))
            (command "pline" Apr Bpr "")
            (command "pline" Awt Bwt "")
 (load (strcat DIR "TEKST"))
 (if (= xA xB) (progn
    (if (= yA yB) (progn                          ;;prosta pionowa  (pros ⊥π1 )
       (tekst Awt (strcat ptA """))
       (tekst Bwt (strcat ptB """))
       (tekst Apr (strcat ptA "="" ptB""=H" pros))
       (setq ptHa Apr)
    ))
    (if (= zA zB) (progn                          ;;prosta celowa  (pros ⊥π2 )
       (tekst Apr (strcat ptA """))
       (tekst Bpr (strcat ptB """))
       (tekst Awt (strcat ptA ""="" ptB ""=V" pros ))
       (setq ptVa Awt)
    ))
 ))
;;;
 (if (/= xA xB) (progn
    (tekst Apr (strcat ptA """))
    (tekst Bpr (strcat ptB """))
    (tekst Awt (strcat ptA """))
    (tekst Bwt (strcat ptB """))
    (if (= zA zB) (progn                          ;;prosta pozioma  (pros ||π1 )
       (setq xVa (/ (- (* xA yB) (* xB yA)) ( - yB yA)))
       (tekst (list xVa 0)  (strcat "V" pros """))
       (tekst (list xVa zA) (strcat "V" pros """))
       (setq yVa zA)
```

```
    ))
    (if (= yA yB) (progn                                  ;;prosta czołowa (pros ||π2 )
        (setq xHa (/ (- (* xA zB) (* xB zA)) ( - zB zA)))
        (tekst (list xHa 0) (strcat "H" pros """))
        (tekst (list xHa yA) (strcat "H" pros ))
        (setq yHa yA)
    ))
    (if (and (/= zA zB) (/= yA yB)) (progn            ;;; prosta dowolna
        (setq xVa (/ (- (* xA yB) (* xB yA)) ( - yB yA)))
        (tekst (list xVa 0) (strcat "V" pros """))
        (setq xHa (/ (- (* xA zB) (* xB zA)) ( - zB zA)))
        (tekst (list xHa 0) (strcat "H" pros """))
        (setq yVa (/ (+ (* xVa (- zA zB)) (- (* xA zB) (* xB zA))) (- xA xB)))
        (setq yHa (/ (+ (* xHa (- yA yB)) (- (* xA yB) (* xB yA))) (- xA xB)))
        (setq ptHa (list xHa yHa))
        (setq ptVa (list xVa yVa))
        (tekst ptHa (strcat "H" pros ))
        (tekst ptVa (strcat "V" pros ))
    ))
    (if (and (/= xA xB) (and (/= zA zB) (/= yA yB)))
       (command "pline" ptHawt ptHa ptVapr ptVa "_c")
    )
))
)
```

Wywołania tej procedury w innej, hierarchicznie ważniejszej (np. zapisanej niżej, stanowiącej tu główny blok programu) mogą następować wielokrotnie dla coraz to innych parametrów aktualnych.

```
(defun C:rys ()                                   ; polecenie wywołujące procedurę
   (command "pline" "0,0" "100,0" "")                 ; rysowanie osi x
   (command "pline" "0,-50" "0,50" "")                ; rysowanie osi y-z
   (command "rectangle" "-20,-70" "130,70")           ; obramowanie rysunku
   (command "zoom" "extents")      ; powiększenie rysunku do wymiarów ekranu
   (load "g:/skrypt_gw/cad/drawLIN")                  ; ładowanie procedury drawLIN
   (DRAW "A" "B" "a" 10.0 -5.0 55.0  ; wywołanie procedury drawLIN w celu
                     30.0 -25.0 55.0)    ; narysowania prostej a przechodzącej
                                   ; przez punkty: A(10,5,55) i B(30,25,55)
   (DRAW "C" "D" "b" 50.0 -55.0 55.0 ; wywołanie procedury drawLIN w celu
                     70.0 -55.0 15.0)    ; narysowania prostej b przechodzącej
                                   ; przez punkty: C(50,55,55) i D(70,55,15)
)
```

Wykaz symboli

$\overline{(AB)}$	długość odcinka o końcach A i B
$\overline{AB}$	odcinek o końcach A i B
$\perp$	symbol prostopadłości
$\angle(\alpha, \beta)$	kąt nachylenia płaszczyzn α i β
$\angle(a, \alpha)$	kąt nachylenia prostej a do płaszczyzny α
$\angle(a, b)$	kąt nachylenia prostych a i b
$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$	płaszczyzna α określony dwoma śladami h_α i v_α
$\alpha, \beta,...$	dowolne płaszczyzny
$\alpha:=aA$	płaszczyzna α określona prostą a i punktem A
$\alpha:=ab$	płaszczyzna α określona prostymi a i b
$\alpha:=ABC$	płaszczyzna α określona trzema punktami A, B, C
π_1	rzutnia pozioma
π_2	rzutnia pionowa
$\angle ABC$, $\angle 1A2$	kąty
$\parallel$	symbol równoległości
1,2,...	dowolne punkty
$a(a', a'')$	prosta a określona dwoma rzutami a' i a''
A(A', A")	punkt A określony dwoma rzutami A' i A"
$a, b,...$	dowolne proste
A, B,...	dowolne punkty
A' ,B',...	primowe (poziome) rzuty dowolnych punktów
$a', b',...$	primowe (poziome) rzuty dowolnych prostych
$a'', b'',...$	bisowe rzuty dowolnych prostych (pionowe)
$A'', B'',.....$	bisowe rzuty dowolnych punktów (pionowe)
$A:=a \cap \alpha$	punkt A określony prostą a i płaszczyzną α

$A:=a \cap b$	punkt A określony dwiema prostymi a i b (punkt przecięcia)
$a:=AB$	prosta a określona punktami A i B
a^O, b^O,...	kłady prostych a, b,... uzyskane przez obrót o skierowany kąt różny od 90°
A^O, B^O,...	kłady punktów A, B,... uzyskane przez obrót o skierowany kąt różny od 90°
a^x, b^x,...	kłady prostych a, b,... uzyskane przez obrót o skierowany kąt 90°
A^x, B^x,...	kłady punktów A, B,... uzyskane przez obrót o skierowany kąt 90°
h_α	ślad poziomy płaszczyzny α
H_a	ślad poziomy prostej a
H_a',	rzut poziomy śladu poziomego prostej a
H_a'',	rzut pionowy śladu poziomego prostej a
I, II, III, IV	kolejne ćwiartki układu współrzędnych
$k:=\alpha \cap \beta$	prosta k, określona dwiema płaszczyznami α i β (krawędź)
l	oś obrotu
R_1, R_2,...	punkt przebicia płaszczyzny prostą
R_1', R_2',...	rzut poziomy punktu przebicia płaszczyzny prostą
R_1'', R_2'',...	rzut pionowy punktu przebicia płaszczyzny prostą
v_α	ślad pionowy płaszczyzny α
V_a	ślad pionowy prostej a
V_a'	rzut poziomy śladu pionowego prostej a
V_a''	rzut pionowy śladu pionowego prostej a
x	oś odciętych
X_α	węzeł płaszczyzny α
$x(\pi_1, \pi_2)$	układ odniesienia o osi x i rzutniach $\pi_1 \perp \pi_2$
$x_1(\pi_1, \pi_3)$	transformowany układ odniesienia o osi x_1 i rzutniach $\pi_1 \perp \pi_3$

ISBN 83-88229-16-8